TRADUCCIONES ENTRE DIVERSOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CÚBICA INTEGRANDO EL CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

ERWIN MICHAEL MINGÁN OLIVA
IGNACIO DARÍO ENRÍQUEZ GARCÍA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2013

TRADUCCIONES ENTRE DIVERSOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CÚBICA INTEGRANDO EL CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

ERWIN MICHAEL MINGÁN OLIVA
IGNACIO DARÍO ENRÍQUEZ GARCÍA

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2013

Nota de aceptación:

Edinsson Fernández Mosquera

Firma del Asesor

Fernando Soto Agreda

Firma del Jurado

Luis Felipe Martínez Patiño

Firma del Jurado

San Juan de Pasto, Julio de 2013.

Este documento está dedicado a:

Mi Madre ***Salomé***

Y a

Mi Hija ***Ángela Valentina***

Michael

Este documento está dedicado a:

Mis Padres ***Luz Dary y Álvaro***

Y a

Mis Hermanos ***Mauricio y Silvia Marcela***

Ignacio

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme las fuerzas necearías para persistir en las dificultades.

A mi Madre Salomé, por darme la vida, por creer siempre en mí, por darme su apoyo incondicional en todo momento, por darme una formación en valores, por alentarme a continuar luchando cuando desfallecía, por enseñarme que lo más importante es ayudar sin recibir nada a cambio y lo más importante por ser mi Madre.

A mi Tía Blanca, por el tiempo invertido en mí crianza y educación durante todos estos años, por enseñarme a defenderme de las adversidades a través del ejemplo y sobre todo por quererme como un hijo más.

A mi hija Ángela Valentina, por regalarme todos los momentos de felicidad, por ser la causa de seguir levantándome y continuar luchando en la vida, por cambiarme a una persona comprensiva, tolerante y compasiva y lo más importante por haber nacido.

A mis hermanos de crianza, William, Juan Carlos y Paola, por compartir conmigo todos esos momentos que marcaron nuestras vidas.

Al Profesor Edinsson Fernández, por el tiempo dedicado a las asesorías para la consecución de este trabajo, por sus consejos profesionales que me ha brindado, por alentarme a seguir con mi formación educativa y por no abandonarme y apoyarme en las dificultades de estos últimos meses.

Al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, por orientarme durante todo mi proceso de formación universitaria y por permitirme hacer parte de la Licenciatura en Matemáticas.

Michael

A Dios Todopoderoso, por darme la oportunidad de culminar este trabajo de grado y que a través de su amor me dio fortaleza y esperanza para creer que todo es posible.

A mi Madre Luz Dary, por darme la vida, que siempre ha estado alentándome y que me ha educado sabiamente a través de su amor.

A mi Padre Álvaro, que a lo largo de mi vida me ha enseñado y aconsejado para tomar sabias decisiones.

A mi hermano Mauricio, que ha sido parte fundamental en mi vida y que a través de su entrega ha demostrado el amor que tiene por mi familia y por mí.

A mi hermana Silvia Marcela, que es una mujer con excelentes valores y que espiritualmente me ha guiado en las dificultades.

Al profesor Edinsson Fernández, por estar presente y orientarme de manera óptima para la consecución de éste trabajo de grado.

A la Universidad de Nariño, en especial al Departamento de Matemáticas y Estadística, por proporcionarme los conocimientos necesarios para ser un excelente profesional y ante todo una excelente persona.

Ignacio

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Lista de Esquemas

Lista de Anexos

Resumen

En la actualidad en el sistema educativo de la ciudad de San Juan de Pasto, no se considera primordial la enseñanza de la función cúbica, quedando relegada a estudios de años posteriores o de profundización, su enseñanza se restringe al estudio básico de algunos sistemas de representación, lo anterior se refleja en una encuesta realizada a docentes de grado noveno de básica secundaria y a docentes que han tenido experiencia en la enseñanza de la funciones polinómicas.

Por lo cual, en esta investigación, se diseñó una propuesta didáctica para que los estudiantes de grado noveno de básica secundaria del Instituto San Francisco de Asís de San Juan de Pasto (Nariño, Colombia), realicen las traducciones de los elementos en los sistemas de representación matemáticos (Descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas) de la función cúbica e identifiquen las propiedades matemáticas de las mismas. Esta secuencia didáctica se realizó en el marco de *la Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (1997), por lo cual se utilizó una metodología acorde a ésta teoría, la *micro - ingeniería didáctica*, que propone Artigue (1995).

Como medio didáctico para la implementación de las situaciones, se utilizó el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri Géomètre II Plus, que permite de manera dinámica, la construcción de las traducciones entre los sistemas de representación.

Palabras Claves: función cúbica, traducciones, sistemas de representación, Teoría de las Situaciones Didácticas, Ambiente de Geometría Dinámica, micro-ingeniería didáctica, visualización.

Abstract

At present in the educational system of the city of San Juan de Pasto, is not considered primary teaching cubic function, being relegated to studies or deepening later years, his teaching is restricted to the basic study of some systems of representation , the above is reflected in a survey of ninth grade teachers of elementary and secondary teachers who have had experience in the teaching of polynomial functions.

Therefore, in this research, we designed a didactic for ninth grade students of secondary basic St. Francis Institute of Pasto (Nariño, Colombia), made translations of the elements in the systems of mathematical representation (verbal description, charts, graphs and algebraic expressions) of the cubic function and identify the mathematical properties of the same. This sequence was performed in the framework of the Theory of Didactic Situations (TSD) of Brousseau (1997), for which we used a methodology according to this theory, the micro - teaching engineering, proposing Artigue (1995).

As a teaching tool for the implementation of the situations, we used Dynamic Geometry Environment (AGD) Cabri Geometry II Plus, which allows dynamically, the construction of translation between systems of representation.

Keywords: cubic function, translation, representation systems, Theory of Didactic Situations, Dynamic Geometry Environment, micro-engineering didactic display.

Introducción

La enseñanza de la función cúbica pertenece a la familia de las funciones polinómicas y está establecida en el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos de los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). Así mismo, este pensamiento abarca, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), lo siguiente:

> Tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (p.66)

Por tanto, es pertinente realizar "*traducciones*"[1] (Janvier, 1987a) entre los "*sistemas de representación"* (Kaput, 1987), para la comprensión en diferentes contextos de la función cúbica. Son escasos los estudios sobre la comprensión de la función cúbica, sin embargo, en este trabajo, se clasifica los encontrados, en dos categorías: primero las investigaciones pertinentes al concepto de función y segundo investigaciones concernientes a la función cúbica, en ésta se realiza una sub-categoría, teniendo en cuenta las estrategias didácticas de enseñanza que integran las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) u otros *materiales o recursos didácticos*[2].

[1]El término "*traducción*" es introducido por Janvier (1987a), para referirse al proceso de expresar un concepto matemático en diferentes sistemas de representación (descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas). Este proceso se presentará con más detalle, en la Dimensión Cognitiva de esta investigación.

[2] *Materiales o Recursos Didácticos* son recursos manipulables que ayuda al sujeto a generar un concepto matemático. Según Coriat (1997), los materiales didácticos y recursos simplemente, modelizan (o representan) algunas relaciones matemáticas (siempre son pocas, en comparación con la riqueza de relaciones abstractas entre objetos matemáticos) bien a través de los procedimientos de construcción o bien a través de la observación, uso o bien de manipulación.

Por otro lado, en esta investigación, se realizó una encuesta[3] dirigida a docentes para detectar el estado inicial sobre el estudio de la función cúbica en San Juan de Pasto, y a partir de ésta, se observó algunas de las falencias como la enseñanza trivial y tradicional de la función cúbica, la no utilización de un AGD[4] y el desinterés en la enseñanza del objeto de estudio por parte de los docentes, las anteriores se trataron de resolver con la secuencia de situaciones didácticas.

Esta secuencia de situaciones reflejó que la función cúbica tiene trascendencia en la matemática de la Educación Básica y Media secundaria e influirá significativamente en asignaturas de la educación superior como en los cursos de cálculo.

Con las investigaciones que se han revisado en los antecedentes y de manera paralela con la encuesta realizada a los docentes, se puede inferir que existen problemas cognitivos acerca de la función cúbica y que por intermedio de éste trabajo se intenta dar algunas alternativas de solución, por ello el planteamiento del problema busca, que una secuencia didáctica se lleve a cabo utilizando el AGD Cabri Géomètre II Plus[5].

En cuanto, al objetivo general, busca tener en claro y responder cuál es el propósito de la investigación y que a través de los objetivos específicos estos se articulan de manera coherente para la consecución de los mismos.

El Marco Teórico de esta investigación, está fundamentado en tres dimensiones básicas que sugiere la metodología de la *micro – ingeniería* didáctica, las cuales son:

[3] Ver Anexo No. A. Encuesta para Docentes (p.195)

[4]Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) son recursos informáticos que facilitan la visualización dinámica de diferentes sistemas de representación para el tratamiento de los conceptos.

[5] El AGD *Cabri Géomètre II Plus* es una herramienta de aprendizaje que en este trabajo ayudará al sujeto a ver los objetos de forma dinámica y al reconocimiento de las propiedades contenidas en la función cúbica.

Dimensión Histórica – Epistemológica, donde se presenta un revisión concreta de la historia del concepto de función, sus obstáculos y los problemas que contribuyeron al estudio de la función cúbica.

Dimensión Cognitiva, en la cual se explican los sistemas de representación, las traducciones desde la perspectiva de Kaput (1987) y Janvier (1987a), el concepto de parámetro matemático desde la perspectiva de Drijvers (2001) y se tomó algunos de los obstáculos cognitivos estudiados por Sierpinska (1992) pertinentes para esta investigación.

En la Dimensión Didáctica, se realizó una revisión curricular comprendida por la reforma de la educación matemática en Colombia, se hizo una revisión del plan de área y los apuntes de los estudiantes, después se manifestó cómo la secuencia didáctica en el marco de la TSD (Brousseau, 1997) actúa sobre el objeto de estudio y las relaciones didácticas que acontecen entre el saber, el profesor y el estudiante y por último, se expone como va influir un AGD, especialmente Cabri Géomètre II Plus, en la investigación.

La metodología utilizada para esta investigación fue la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), más específicamente una *micro- ingeniería didáctica* que contempla los fenómenos locales en el aula, por tal motivo la investigación consta de las siguientes fases, los análisis preliminares, los análisis *a priori*, la experimentación y los análisis *a posteriori.*

En el capítulo de la planeación del estudio y diseño de actividades se construyó básicamente con los análisis preliminares proporcionados para determinar y organizar el campo de restricciones, el plan de actuación en el aula, los instrumentos de recolección de información y las unidades de análisis para el diseño de las situaciones didácticas.

Con la puesta en acto de las situaciones didácticas, se realizó el análisis de los resultados, donde se contrastó lo planificado con lo implementado, se describieron detalladamente las sesiones de trabajo de la experimentación y se analizaron los resultados con base a las unidades de análisis comprendidas en el anterior capítulo. Por último se presentan las conclusiones basadas en los análisis de los resultados teniendo en cuenta la pregunta, hipótesis y objetivos determinados en la investigación.

1. Antecedentes

En lo que respecta a la función cúbica Gómez y Carulla (1998b) afirman que: “Existe muy poca investigación acerca de la comprensión de la función cúbica” (p. 2), sin embargo, se realizó una clasificación de investigaciones relevantes que abarcarían: el concepto de función, su comprensión y obstáculos cognitivos[6]; en lo que concierne más detalladamente al objeto de estudio de esta investigación, se realizó una sub-clasificación basada en la estrategia de enseñanza y aprendizaje de la función cúbica, unas basadas en la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y otras que hacen uso de otro material o recurso didáctico.

1.1. Concepto de función: comprensión y obstáculos cognitivos

Una de las investigaciones que se ha realizado en el marco epistemológico y didáctico de la noción de función es la tesis doctoral de Ruiz (1998): *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico,* en este estudio se puede apreciar un análisis completo sobre la evolución histórica del concepto de función, con esto se identificó el surgimiento de las representaciones matemáticas del concepto de función a lo largo de la historia. Además su marco teórico, fundamentado en la didáctica de las matemáticas, fortaleció la dimensión didáctica de ésta investigación.

Otro estudio acerca del concepto de función es la realizada por Trujillo, Castro y Delgado (2010): *El concepto de función y la teoría de situaciones,* en el cual, en el capítulo 3 se realizó un estudio sobre los obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función y se hace referencia al artículo *sobre la comprensión de la noción de función* donde

[6] Obstáculo cognitivo (OC). Es un conocimiento que tiene un aspecto negativo y otro positivo. Funciona negativamente porque se interpone a lo que debería ser conocido, pero, al mismo tiempo, tiene un funcionamiento positivo porque es parte constitutiva del nuevo conocimiento que está a la espera de ser alcanzado y por tanto es necesario. (Trujillo, Castro & Delgado, 2010, p. 109).

trata sobre la lista de los obstáculos de Sierpinska (1992) y la importancia de este artículo en la investigación para el diseño del instrumento de diagnóstico como para la evaluación de resultados y para el diseño de situaciones de enseñanza con la calculadora algebraica y graficadora.

Sobre la comprensión de la noción de función realizado por Sierpinska (1992), en este explica detalladamente la evolución epistemológica del concepto de función, realizando una categorización por condiciones de los actos de comprensión (C(f)) y la identificación de los obstáculos epistemológicos (OE(f)) que se evidencian en esta comprensión. Para las ambiciones de esta investigación, se toma como relevante los dos primeros actos de comprensión con sus obstáculos epistemológicos.

En el trabajo de Hitt (2002a): *Funciones en contexto*, propone la resolución de situaciones con el propósito de asimilar el concepto de función, no de una forma Bourbakista[7] o en términos de regla de correspondencia entre conjuntos si no desarrollando una idea intuitiva de variación. Hitt (2002a) argumenta que por estudios realizados sobre las dificultades del concepto de función, la utilización de la definición del concepto de función en términos de variación es la más conveniente para la Educación Básica y Media.

Hitt (2002a), afirma que en la educación tradicional, la enseñanza del concepto de función está limitada a las definiciones y sus representaciones algebraicas. En ésta investigación se tiene como imprescindible que el estudiante construya el concepto de función cúbica, realizando traducciones entre las diferentes representaciones (algebraica, gráfica y numérica).

[7] Según Hitt (2002, p. 74) es un grupo de matemáticos que se dio a la tarea de realizar una visión y sistematización de la matemática, publicó una serie de libros con un enfoque conjuntista.

1.2. Función cúbica

A continuación se presenta una clasificación de las investigaciones encontradas sobre la enseñanza de la función cúbica:

1.2.1. La Función Cúbica cuando se integran las TIC en la enseñanza

Sobre las investigaciones que abarcan el estudio de la función cúbica a través de las TIC se encontraron los siguientes autores:

Gómez y Carulla (1998a): *Calculadoras Gráficas y Precálculo: ¿El imperio de lo gráfico?*, donde se presentaron unas reflexiones didácticas sobre los sistemas de representación de la función radical y la función cúbica, además argumentaron que al estudiar estas funciones con las calculadoras graficadoras, se origina un problema sobre el abuso de la representación gráfica.

Sobre la función cúbica se muestra un contraste entre el uso de la tecnología computacional y el sistema de representación gráfico para encontrar solución a un problema propuesto y concluye que en determinados casos es más sencillo recurrir a la utilización de la representación simbólica que a la representación gráfica.

También en Gómez y Carulla (1998b), con su trabajo titulado *Desequilibrios entre lo Gráfico y lo simbólico. Efectos en la comprensión de la función cúbica,* se estudiaron algunas concepciones de un grupo de estudiantes que emergieron cuando hicieron gráficas, en especial de la función cúbica, posteriormente se realizó la misma prueba pero a otro grupo de estudiantes diferentes con la finalidad de confirmar las categorías que estos autores habían formulado a través de la utilización de calculadoras gráficas. En este estudio, se evidencia la importancia de la utilización de las TIC para la identificación de errores en los sistemas de representación de la función cúbica.

Otro estudio que se consideró pertinente fue el de Estrada, Sánchez y Limias (s.f.), denominado *El uso de Cabri Géomètre II plus en las funciones del preuniversitario*, donde demostraron la importancia del uso del AGD Cabri, para la enseñanza y aprendizaje de las funciones, el cual radicó en proponer cómo usar las TIC para la realización de la gráfica de la función cúbica y posterior identificación de algunas propiedades, como la monotonía, paridad, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Además, realiza las traducciones entre los sistemas de representación (analítica, gráfica y descriptiva).

1.2.2. La Función Cúbica desde otros enfoques Didácticos

En el trabajo de Hitt (2002b): *Funciones en contexto*, se trabaja con entes matemáticos en un contexto de la vida real y se propuso técnicas de resolución de problemas que integran el uso de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. Además, presentó, una guía, para identificar y relacionar los efectos de los parámetros de la función cúbica en sus diferentes representaciones.

Otro trabajo realizado sobre la función cúbica, fue el diseño de una secuencia de situaciones didácticas de Valenzuela (2010) denominado: *Matemáticas 4*. Aquí se propuso actividades para la construcción del concepto de las funciones polinómicas de grado tres y cuatro, interactuando con los diferentes sistemas de representación, y en el cual el medio didáctico utilizado por los estudiantes fue a través de instrumentos manipulables como el papel milimetrado para representar gráficamente tales funciones.

Siguiendo en la línea de las secuencias didácticas, se encontró el trabajo realizado por Rivera (2011) denominado: *Matemáticas IV*, donde se plantearon problemas en diferentes contextos, donde el estudiante debía construir la solución con los procedimientos enseñados en clase y apoyados con materiales manipulativos físicos como proyector, acetatos, materiales para realizar las diferentes gráficas como hojas, regla, lápiz, borrador, etc.

2. Justificación y planteamiento del problema

Con base en la experiencia obtenida por los autores de este trabajo, en la enseñanza de la función cúbica, se ha identificado dificultades de tipo curricular y metodológico, por tal razón se ve la necesidad de realizar una encuesta para corroborar si estas debilidades continúan presentándose en la experiencia de otros docentes.

Para obtener información actualizada sobre el estado que presenta la enseñanza y aprendizaje de las funciones y en especial sobre la función cúbica, y en beneficio de la investigación se realizó una encuesta (en el Anexo No. A) en tres instituciones oficiales de la ciudad de San Juan de Pasto. La encuesta fue dirigida a docentes que trabajan en el área de Matemáticas y en el grado noveno de básica secundaria, además se tuvo en cuenta a docentes que tenían experiencia en ésta área. La población para la aplicación de ésta encuesta fue de diez docentes.

Para la elaboración de la encuesta se tuvo en cuenta principalmente, el siguiente estándar del pensamiento Variacional, “Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas”. (MEN, 2006, p.87).

Las preguntas tuvieron los siguientes propósitos, en su orden:

1. Identificar si el estándar antes mencionado está propuesto en el plan de área de cada institución.

2. Establecer si el contendido que está inmerso en este estándar se enseña a cabalidad.

3. Indagar sobre la utilización de un software educativo en la enseñanza de la función cúbica.

4. De qué manera los estudiantes transitan de una representación a otra utilizando algún procedimiento que haya sido enseñado en su institución.

5. Conocer la importancia que se le da al estudio de la función cúbica por parte de los docentes e Instituciones educativas.

6. Comparar cuales son las representaciones de la función cúbica que tienen mayor énfasis en su enseñanza por parte de los docentes.

Las respuestas se encuentran en el Anexo No. A, denominado "Encuesta para la enseñanza de la función cúbica". A continuación se presentan el análisis de las respuestas:

Pregunta No. 1: ¿En el plan de área de matemáticas de su institución educativa esta propuesto este estándar?

Del total de los encuestados el 80% respondió que SI estaba estipulado el estándar frente al 20% que respondió negativamente, porque dijeron que el estándar se maneja en años superiores. Una de las repuestas de los docentes fue: "Hace parte fundamental de la estructura matemática básica". De los resultados se puede inferir que la mayoría de los encuestados comprenden la importancia del estándar mencionado.

Se puede concluir que en las tres Instituciones educativas de la ciudad de San Juan de Pasto si está estipulado el estándar propuesto en la encuesta para los grados octavo y noveno, sin embargo en una de las instituciones se profundiza la función cúbica en los grados 10 y 11.

Pregunta No. 2: ¿Se logra enseñar el contenido de las funciones polinómicas en su totalidad?

Del total de los encuestados el 30% afirmó que Si se alcanza a enseñar la funciones polinómicas, frente a un 70% que afirma que no es posible, una de las razones que argumentaron como justificación es la siguiente: “A pesar de que son 5 horas semanales los estudiantes tienen muchas dificultades que no permiten avanzar”. Otra de las justificaciones fue: “Se forma únicamente la definición, el dominio y el rango como información documental pero no se profundiza en las mismas”. Otras respuestas aluden a la planeación establecida de la siguiente manera: “Las más iguales, y en especial las que están de acuerdo a los prerrequisitos de los estudiantes y a su pertinencia”.

De acuerdo a las respuestas se puede inferir que No se logra enseñar el contenido de las funciones polinómicas en su totalidad debido a diversos factores como la intensidad horaria semanal, por obstáculos cognitivos de los estudiantes que no permiten avanzar en la enseñanza de las diferentes funciones polinómicas, y si se logra se hace de una manera superficial.

Pregunta No. 3: ¿Utiliza usted algún software educativo en la enseñanza de la función cúbica?

En los resultados se encontró que el 30% utiliza un software educativo frente a un 70% que afirmó que no usa este tipo de tecnología por diversas razones como: “A penas se está implementado la tecnología para las matemáticas”, “No he encontrado uno que esté muy acorde, pero se utiliza otras herramientas”, “hay situaciones reales que pueden sustituir la información del software, experiencias”. Para los que contestaron que utilizan alguna herramienta argumentaron: “En la graficación cartesiana Derive graph”, “Se trabaja con calculadora”.

Se puede concluir que en los grados 8 y 9 no se utiliza un software educativo como instrumento para la enseñanza de la función cúbica u otros contenidos matemáticos, no obstante en grados superiores 10 y 11 se utilizan software como la calculadora TI92, Derive, Encarta 2008. Los encuestados afirmaron que las situaciones reales, puede sustituir de alguna forma al software.

Pregunta No. 4: ¿A partir de la representación gráfica de la función cúbica se podría hacer que los estudiantes deduzcan la representación algebraica asociada a la gráfica dada?

El 100% de los encuestados señaló que SI se puede deducir a partir de la representación gráfica la representación algebraica asociada a la función cúbica.

¿Considera que es importante el hacerlos transitar a los estudiantes de una representación a otra?

Algunas de las razones que dieron los encuestados sobre la importancia del contenido de la pregunta fueron las siguientes: "Si fundamentalmente el alumno debe ser capaz de generalizar, partiendo de observaciones, de análisis y de la obtención de conclusiones", "En las transformaciones de funciones", "Si, de esta manera logran aclarar sus dudas".

Se puede inferir que los encuestados están de acuerdo en que si es posible pasar de una representación a otra y que es importante hacerlos transitar entre ambas representaciones porque estas se complementan, de tal forma que pueden analizar y aclarar dudas referente a las representaciones de la función cúbica.

Pregunta No. 5: ¿Usted cree que se debería fomentar el estudio de la función cúbica?

En los resultados se encontró que el 70% de los encuestados está a favor en fomentar el estudio de la función cúbica frente a un 30% de opositores. Algunas de las razones que escribieron los encuestados fueron: “Sí sería bueno fomentar en la secundaria para que en la universidad no sea algo extraño”, “ya que los estudiantes adquieran mayor destreza en la observación de gráficas, en la solución de problemas y sobre todo desarrollar su pensamiento lógico”. Las razones de algunos encuestados que están en contra del estudio de la función cúbica fueron: “Considero que debe formar parte de otras funciones (lineal, cuadrática, exponencial)”.

La mayoría de los encuestados está de acuerdo en fomentar el estudio de la función cúbica para desarrollar diferentes destrezas que favorecen al estudio con profundidad de ésta función. No obstante, existe una resistencia de algunos de ellos ya que consideran que otras funciones tienen mayor aplicabilidad tanto en matemáticas como en otra áreas de conocimiento y dicen que además son tomadas en cuenta en la conformación de preguntas que maneja el Ministerio de Educación Nacional.

Pregunta No. 6: ¿Qué tipo de representaciones matemáticas utiliza Usted cuando enseña las funciones polinómicas cúbicas?:

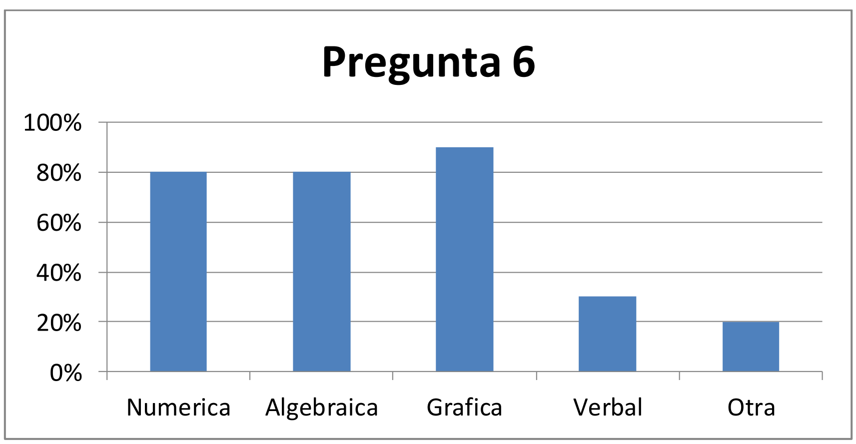


Figura No. 1. Sistemas de representación utilizados en la enseñanza de la función cúbica

De acuerdo con el porcentaje que se obtuvo al realizar la pregunta se aprecia que la mayoría de los encuestados utiliza las tres primeras representaciones como mecanismo en la enseñanza de la función cúbica y que un porcentaje del 30% recurre a la representación verbal y solamente el 20% explota otro tipo de representaciones.

En el 20% dos de los encuestados sostuvieron que utilizan una representación volumétrica y sólo uno de ellos explicó que sería de manera experimental a través de un juego donde se reúnen los estudiantes en grupos o equipos éstos toman una cubeta sacan agua y la llevan a otro recipiente para llenarlo totalmente y el equipo que sustrae más agua será el ganador, dice que los volúmenes son relaciones cúbicas.

A continuación se presentan las conclusiones generales de la encuesta:

- Aunque en la mayoría de las instituciones el estándar está establecido para el grado noveno de básica secundaria, no se profundizan las diferentes funciones polinómicas que existen, llegando al análisis de la función cuadrática, y en algunos casos a la enseñanza frívola y tradicional de la función cúbica, donde sólo se enfocan en el sistema analítico y el docente es el transmisor del conocimiento y el estudiante es sólo un receptor de la información. Además, rebaten la utilización de una estrategia metodológica que ayude a los estudiantes a transitar de un sistema de representación a otro.

- En la enseñanza de las funciones polinómicas y demás temáticas del grado noveno no se hace uso de un instrumento educativo como un AGD, limitando la representación dinámica que ofrece éste medio didáctico.

- El interés que reflejan los docentes hacia este tema es poco, afirmando que las funciones lineal y cuadrática tienen prevalencia en aplicaciones a la vida cotidiana.

La encuesta fue realizada debido a que no existía información sobre la enseñanza y aprendizaje de la función cúbica en las instituciones educativas de San Juan de Pasto.

También se observó que en trabajos como los de Hitt (2002a) y en el Trujillo, Castro y Delgado (2010), refutan la utilización de una enseñanza tradicional, la cual hace énfasis en las definiciones de los conceptos y sus representaciones algébraicas y proponen replantear la acción educativa tradicional incorporando herramientas tecnológicas, en el MEN (2006) se afirma que éstas proponen retos a los procesos de enseñanza y aprendizaje al integrar diferentes tipos de representación para el tratamiento de los conceptos, así mismo, en Sierra, Gonzáles y López (1998) se concluye que la adquisición de un concepto depende de la capacidad para reconocer, interpretar, utilizar y traducir las representaciones del mismo.

De acuerdo a lo anterior se diseñó una secuencia de situaciones didácticas para la construcción y aprendizaje de las representaciones de la función cúbica, con ayuda de un AGD en el marco de la TSD, que permita hacer traducciones de una representación matemática a otra, identificando algunas propiedades y de esta manera se pueda evidenciar la importancia que tiene la función cúbica y la aplicabilidad en situaciones escolares.

3. Pregunta e Hipótesis de Investigación

3.1. Pregunta de investigación de este proyecto:

¿Qué tipo de acciones matemáticas genera una secuencia de situaciones didácticas diseñada para realizar las traducciones de los elementos de la función cúbica en los sistemas de representación matemáticos con la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus en los estudiantes de grado noveno de básica secundaria?

3.2. Hipótesis de la Investigación:

Con una secuencia de situaciones didácticas integrando el AGD Cabri Géomètre II Plus producirá en estudiantes de grado noveno de básica secundaria acciones matemáticas que permitirá realizar traducciones de los elementos de la función cúbica en los sistemas de representación matemáticos.

4. Objetivos

4.1. Objetivo General

- Proponer una estrategia de enseñanza integrando el AGD Cabri Géomètre II Plus para la realización de las traducciones de los elementos en los sistemas de representación matemáticos de la función cúbica para la identificación de sus propiedades.

4.2. Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar una secuencia de situaciones didácticas en el marco de la TSD, utilizando una *micro-ingeniería* [8] didáctica para la enseñanza de las traducciones de los elementos en los sistemas de representación matemáticos de la función cúbica e identificación de sus propiedades.

- Analizar el conjunto de acciones matemáticas de cuatro (4) estudiantes de grado noveno de básica secundaria, en el aprendizaje de las traducciones de los elementos en los sistemas de representación matemáticos de la función cúbica e identificar las propiedades matemáticas integrando el *medio* Cabri Géomètre II Plus.

[8] Las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula. (De Faria, 2006, p. 3)

5. Marco Teórico

La investigación comprendió tres dimensiones básicas, que sugiere la Escuela Francesa de la Didáctica de las Matemáticas, además como se tuvo en cuenta la complejidad de los fenómenos en el aula (Artigue, 1995), entorno a la función cúbica, ésta se revistió de un nivel de *micro-ingeniería didáctica*.

El diseño de las situaciones didácticas tiene como soporte conceptual una dimensión histórica-epistemológica, cognitiva y didáctica.

En la dimensión histórico-epistemológica asociada a las características del saber puesto en funcionamiento, proporcionó a la investigación la identificación de las representaciones de función utilizadas en la historia y los conceptos implícitos para afrontar obstáculos presentados en cada época.

La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas de los estudiantes a los que se dirige la enseñanza, fue base teórica para prever los comportamientos de los estudiantes en la puesta en acto de las situaciones así como para el análisis de la comprensión de los resultados obtenidos en la experimentación.

La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, juega un papel muy importante en esta investigación, porque se realizó una revisión curricular sobre el estado de la enseñanza de las funciones polinómicas en Colombia, como también una revisión curricular de la Institución donde se colocó en acto las situaciones didácticas. Además se determinaron las interacciones existentes entre los actores del sistema didáctico, las características de la TSD, sus fases que la componen y el tipo de contrato didáctico utilizado para ésta.

A continuación, se desarrollan los aspectos correspondientes a cada una de las dimensiones.

5.1. Dimensión Histórica – Epistemológica

Con el estudio conciso de la evolución histórica del concepto de función y los sistemas de representación, se identificaron aportes y obstáculos que influyeron en su desarrollo, después se identificó situaciones o problemas que dieron origen y contribuyeron a obtener la noción que en la actualidad conocemos de la función cúbica.

5.1.1. Evolución del concepto de función

La matemática babilónica

Desde la antigüedad las civilizaciones más representativas como la civilización Babilónica (2000 a.C. – 600 a. C), a través de tablillas de arcilla, relacionaban algunas cantidades y las variaciones que estaban implícitas en ellas, “Aunque no utilizaban letras para representar cantidades variables, los mismos términos, longitud, anchura, área y volumen servían perfectamente para este fin (7 longitud + 5 longitud = 12 longitud)” (Ruiz, 1998, p.107).

Pedersen (como se cita en Ruiz, 1998):

> Opinan que los matemáticos babilónicos tuvieron un auténtico *instinto de funcionalidad*, ya que una función no sólo es una fórmula si no una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, y esto si está presente en las numerosas tablas de los cálculos babilónicos. (p.107).

La matemática griega en la antigüedad

En esta cultura griega antigua existieron varios obstáculos que frenaron el desarrollo del concepto de función. En esta época número y magnitud eran dos conceptos que no tenían relación porque se pensaba que número era exclusivo de la aritmética y la teoría de números y el concepto de magnitud le pertenecía a la geometría.

Según Ruiz (1998), para los griegos el cambio y el movimiento eran ajenos a las matemáticas, ellos consideraban que las matemáticas estudiaban objetos estáticos y lo que correspondía al cambio y al movimiento eran problemas estrictamente concernientes a la física, sin embargo, fue la proporcionalidad y la inconmensurabilidad lo que no les permitió avanzar de manera precisa para la consecución del concepto de la noción de función. En la escuela pitagórica intentaron relacionar números y magnitudes por medio de proporciones, ello les permitió resolver problemas geométricos, las proporciones representaban la razón numérica que se puede establecer entre dos cantidades de una misma magnitud.

Según René de Cotret, como se cita en Ruiz (1998),

> *La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser también un obstáculo al desarrollo de la noción de función* (1985, p.36), puesto que oscurecía e impedía encontrar, de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional. (p. 109).

Edad media

En la edad media (desde el final del imperio romano hasta el siglo XV) dos aspectos importantes que se pueden destacar de la matemática árabe son la separación del álgebra y la trigonometría en la matemática.

Una de las mayores preocupaciones de la edad media, fue el análisis de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento.

En esta época, según Ruiz (1998), también se desarrollaron dos métodos importantes para expresar las relaciones funcionales, las letras para expresar cantidades variables y un método geométrico por medio de gráficas.

> A Nicolás Oresme, antes del año 1361, se le ocurrió una idea brillante: ¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica que represente el modo en que las cosas varían? Aquí vemos una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones. (p.113)

La sugerencia primitiva de Oresme (1320-1382) fue la de ubicar en una gráfica, la *extensio* por una línea horizontal y la altura de las perpendiculares proporcionales a la *intenso*. Oresme, quería representar la cantidad de una cualidad y afirmó que las propiedades de la figura, representaban propiedades intrínsecas a las cualidades.

Siglos XV, XVI y XVII

Según Ruiz (1998) en este período se realiza un perfeccionamiento serio del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular, los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar la expresión de variable en una función o incógnita en una ecuación.

Otro matemático que contribuyó a la evolución del concepto de función fue el astrónomo, filósofo, físico y matemático italiano Galilei (1564-1642) quién estudió los fenómenos físicos de forma cuantitativa, por medio de la experimentación también relacionó de forma funcional las causas y los efectos.

Según Boyer, como se cita en Sierra, González y López (1998), con la creación de la algebra simbólica

> (...) Descartes (1596-1650) quien habla explícitamente de relaciones funcionales manifestando por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponde a determinados valores de la otra. Descartes afirmará que «Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva»(p.95)

Siglo XVIII

Según Sierra, González y López (1998), matemáticos posteriores a Descartes propusieron que los métodos de la geometría analítica podían ser usados no solo en el estudio de funciones elementales sino también en funciones algebraicas generales. “se propone entonces el énfasis en la representación de una función mediante su expresión algebraica” (p.95).

Con Euler (1713-1783) se estudiaron las funciones en sí mismas y sus formas de representación. En Sierra, González y López (1998) se afirma que Euler dio dos definiciones de función, la primera “En su *Introductio in Analysis Infinitorum*, publicada en 1748, Euler define una función como «una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de una cantidad variable y números o cantidades constantes»” (p.95), y posteriormente “(…) en sus *Institutiones Calculi Differentialis* de 1755 en el que aparece una nueva definición: «si *x* es una cantidad, entonces toda cantidad que dependa de *x* de cualquier manera o que esté determinada por aquélla se llama una función de dicha variable»” (p.95), se puede observar que en la segunda definición es más generalizada y no tan restringida como la primera.

Euler también realiza una representación gráfica de función, en Sierra, González y López (1998) describe detalladamente, el método para realizar la gráfica de una función:

> Para representar gráficamente las funciones, Euler se valía de un eje horizontal, de tal forma que si en dicho eje elegimos un punto fijo A, si x es una cantidad variable, los sucesivos valores de x se representan por distintos intervalos que se llaman abscisas. A la derecha de A las abscisas son positivas y a la izquierda negativas.

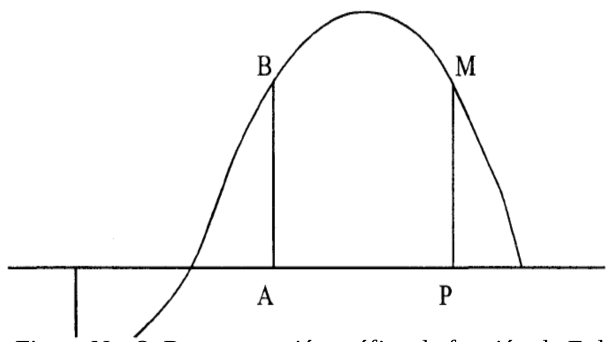


Figura No. 2. Representación gráfica de función de Euler
Tomado de Sierra. Gonzáles & López (1998)

> Si y es una función de x, y toma un determinado valor para cada uno de los valores de la abscisa; si $x = AP$ es la abscisa, dibujamos por P un segmento PM que corresponde al valor de y que se llama ordenada ortogonal o simplemente ordenada. Los pares de abscisa y ordenada se denominan coordenadas ortogonales. (p.95).

Siglo XIX y XX

En el siglo XIX, diversos investigadores como Cauchy (1789-1857), Lobachevsky (1792-1856), Dirichlet (1805-1859), Riemann (1826-1866), Cantor (1845-1928), Weiertrass (1815-1897), entre otros, aportaron al concepto de función tratándola como correspondencias generalizadas entre cantidades variables. En Sierra et al. (1998) se afirma que Dirichlet en 1837, define el concepto de función como se conoce actualmente de modo que sigue:

> *Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x*. (p. 96)

En el siglo XX, según Ruiz (1998), totalmente influenciadas las Matemáticas por la teoría de conjuntos, en especial, el concepto de función, se presentaron diferentes definiciones unas más rigurosas que otras, ocasionando que éste concepto sea considerado como algo estático y no algo dinámico como se presentaba al principio, a través de asignaciones de variables.

5.1.2. Problemas que contribuyeron a la función cúbica

En el transcurro de la historia, acontecieron diversas situaciones que beneficiaron a la evolución de la función cúbica, entre los cuales se destacan:

La duplicación del cubo

Uno de los tres problemas clásicos más importantes en la historia de la antigüedad, es la duplicación del cubo, que consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo inicial.

A través de la historia, el relato del problema se enmarca, cuando ocurrió una peste en Grecia alrededor del siglo V a.C., entonces, la población envió un grupo de personas para que le preguntase al oráculo de Apolo en Delfos, sobre cómo terminar ésta peste que estaba atacando a la población, el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar que tenía forma de un cubo.

Este problema ha sido traído a la investigación con el motivo de relacionar el concepto de la función cúbica con un problema en contexto, uno de los más relevantes en la historia, porque por medio del volumen de un cubo se puede llegar a plasmar la gráfica, en este caso, de la función cúbica. A través de la historia el estudio de la duplicación del cubo ha sido analizado por diversos personajes como Hipócrates de Quíos (471 a.C.-411a.C.), Arquitas de Tarento (428 a.C.-350 a.C.), Eratóstenes (276 a.C.- 194 a.C.), Menecmo (380 a.C.-320 a.C.), Eudoxo (408 a.C.-347 a.C.), Apolonio (262 a. C.-190 a.C.), Herón (10 d.C.-70 d.C.), Diocles (240 a.C. – 180 a.C.), entre otros.

Solución de la ecuación de grado tres

Según Martin (2000) a lo largo de la historia diferentes matemáticos intentaron encontrar una solución a la ecuación cúbica, sin embargo, fueron Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576) y Ferrari (1522-1565) los que contribuyeron y formalizaron una solución general de la ecuación de tercer grado.

Fue Tartaglia quien en un comienzo encontró la solución por casos de la ecuación de tercer grado, pero quien en realidad aportó en encontrar la solución general fueron Cardano y su alumno Ferrari.

Según la historia, éstos matemáticos estuvieron envueltos en un conflicto, por el crédito de la solución de la ecuación de tercer grado, batiéndose en duelos donde estaba en juego su honor y reputación, en resumen, se puede afirmar que Ferrari fue el que salió triunfante de estos encuentros, adjudicando como el primer descubridor de la solución de la ecuación de tercer grado a un profesor de la Universidad de Bolonia llamado Scipione del Ferro (1465-1526) y el descubrimiento de una fórmula general a Cardano con su ayuda.

5.2. Dimensión Cognitiva

En esta dimensión, se identificará los conceptos cognitivos del sujeto, que debe dominar, para poder desempeñar con facilidad los diferentes procesos donde se verá envuelto, por tal razón, la investigación destacará lo siguiente:

Los sistemas de representación desde la perspectiva de Kaput (1987) y Janvier (1987a) y otros autores para observar los procedimientos que se realizarán en las fases *a priori* y de experimentación.

La definición de visualización en los sistemas de representación matemáticos y sus objetivos principales de aprendizaje.

Se tendrá en cuenta los obstáculos cognitivos del concepto de función para describir y prever las posibles acciones de los estudiantes.

Así mismo, se explicará el término *traducción* utilizado en este trabajo, los tipos de representación para el concepto de función y los procesos propuestos por Janvier (1987a) para las traducciones de los sistemas de representación.

Por último, se presentará las definiciones de *parámetro* matemático y los pasos esenciales en el aprendizaje de parámetro según Basurto (2010).

5.2.1. Sistemas de representación

Un sistema de representación es un conjunto de símbolos, signos, con reglas estructuradas y relacionadas lógicamente. Sierra, González y López (1998) hacen referencia a la denominación del concepto de representación por otros autores:

> A recibido diferente denominación en la Educación Matemática, así, Skemp (1980) utiliza simplemente el término *símbolos*, Kieran y Filloy (1989) enfatizan el carácter sistémico de este conjunto y lo denominan sistemas matemáticos de signos, Kaput (1992) se refiere a él como *sistemas de notación*, Duval (1993) se centra en los aspectos lingüísticos hablando de *sistemas semióticos* y más recientemente Castro y otros (1997) lo generalizan mediante la expresión *sistemas de representación. (*p.91)

En este trabajo se utilizó la denominación de Castro (1997) y Kaput (1987), acerca del concepto de representación como Sistema de Representación.

Según Kaput (como se cita en Sierra, González & López, 1998) para entender el concepto de representación hay que referirse al mundo representante y al mundo representado y explica:

> Cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir al menos cinco entidades:
>
> 1. El mundo representado.
> 2. El mundo representante.
> 3. Qué aspectos del mundo representado se representan.
> 4. Qué aspectos del mundo representante realizan la representación.
> 5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.
>
> En buena parte de los casos importantes uno o ambos mundos pueden ser entidades hipotéticas e incluso abstracciones. (p.91).

También se afirma que el mundo representado y el mundo representante son dos entidades abstractas, por tanto su representación no dependen de letras, cifras, gráficos, etc., en otras palabras, su comprensión no está sujeta a los sistemas de representación, ya que la idea de estos dos mundos se va a comprender por igual sin importar como se exprese.

En Educación Matemática existen dos tipos de representaciones, *representaciones internas*, son las que se originan en la mente, o como denomina Von Glaserlfeld (como se cita en Fernández y Garzón, 2007), "concepciones", y *representaciones externas,* que son las evidencias físicas de los conceptos, como los "signos, símbolos, gráficas" (Sierra, González & López, 1998).

En Gómez y Carulla (2001), se asevera que "la representación de un objeto matemático *no* es el objeto en sí mismo" (p. 14), y explica esta afirmación con una metáfora, donde el objeto matemático es la cara de una persona desconocida que se encuentra en otro lugar y para identificar su cara se puede tener diferentes representaciones de esta, como una foto a color, una foto en blanco y negro, un dibujo de la cara realizado por una artista, o simplemente una descripción verbal, todas estas representaciones tienen muchas cosas en común porque son representaciones de una misma persona y se pueden identificar elementos en cada representación las cuales se relacionan y se complementan. En este artículo, ellos argumentan que van utilizar los sistemas de representación para "*representar* diferentes facetas de un objeto matemático" (p. 16) y que se trabajará con los sistemas de representación porque estos se ajustan a unas reglas que están condicionadas en general por las matemáticas y en particular por el objeto matemático y por estas razones se toma la definición de Kaput sobre los sistemas de notación (sistema de representación), *"un sistema de notación es un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres,(ii) operar en ellos y(iii) determinar relaciones"*(p. 16)

Con relación al uso de los sistemas de representación en Sierra, González y López (1998) se afirma que su uso en la Educación Matemática es doble, ya que sirven para la comunicación de conceptos, en donde el sujeto como receptor debe leer e interpretar símbolos, o como emisor que está condicionado a ciertas reglas, pero también sirven para desarrollar la habilidad cognitiva del pensamiento manipulando sintácticamente los símbolos o elaborando semánticamente referentes de dichos símbolos esto hace que se construyan nuevas relaciones y se profundice los conceptos representados, incrementando conexiones entre varios conceptos y aumentando su conocimiento de ellos.

5.2.2. Visualización en los Sistemas de Representación Matemáticos.

Según Bishop (como se cita en Fernández y Garzón, 2007b), el término visualización se lo puede definir como sustantivo cuando se refiriere al proceso de él "qué" de la Visualización y como verbo se refiere al proceso al "cómo" Visualizar. Bishop argumenta "*La visualización implica la habilidad de manipular mentalmente, rotar, deformar o invertir un objeto presentado de manera gráfica"* (p.3).

Otros hacen referencia al término de visualización y lo definen haciendo uso de las representaciones internas y externas, un ejemplo de ello es Presmeg (citada en Fernández y Garzón, 2007), ella afirma "*en el proceso de hacer las representaciones internas y externas, el estudiante efectúa una estrecha conexión entre ellas que luego permite interpretar el trabajo de los estudiantes, y "ver" la utilización que hacen de la visualización en sus procesos de pensamiento*" (p.3).

Según Fernández y Garzón (2007) éstos investigadores, utilizaron el término visualización como verbo al igual que Bishop, porque hace referencia a los procesos de los estudiantes como construir, transformar y relacionar imágenes mentales[9] visuales.

Otra definición del término *Visualizar*, resaltable para los intereses de esta investigación está contextualizada en una investigación que implementó las TIC, Arcavi y Hadas (2000) (como se cita en Fernández y Garzón, 2007) afirma "*...generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual"*

[9] "(….)formarse ideas acerca de ese algo hechas en el interior de la mente" (Fernández y Garzón,2007a, p.3)

Los procesos o habilidades que se han definido de visualización serán importantes en la situación didáctica, para la comprensión de las posibles imágenes mentales que construya el estudiante cuando interactúa con el medio y las confronte con las posibles retroacciones que se produzcan.

En el trabajo de Fernández y Garzón (2007), cita el libro de Zimmermann y Cuningham del año de 1991, en esta investigación se toma la visualización como el pensamiento visual y "*sostienen que al mejorar la educación visual en matemáticas aumenta la intuición, proporcionando al sujeto una mayor capacidad de comprensión*", y se explican tres objetivos principales de aprendizaje con relación a la visualización:

1. *"**Básicos**, que consisten en aprender a interpretar la información implícita en representaciones gráficas, algebraicas, geométricas y numéricas, y entenderlas como lenguajes alternativos".*

2. *"**Funcionales**, tales como aprender a interpretar la información en representaciones gráficas y utilizarlas para resolver problemas".*

3. *"**Generales**, como aprender a reconocer simetrías, patrones y transformaciones geométricas; relacionados con el cálculo; y objetivos de alto nivel".* (pp. 4 - 5).

Estos objetivos ayudaron en la realización del contraste entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* de las situaciones didácticas.

Fernández y Garzón (2007), afirman que en la resolución de problemas, los enunciados sugieren que método utilizar y cita un ejemplo de máximos y mínimos, el cual podría ser resuelto realizando un modelo funcional y con métodos algebraicos, sin embargo, también afirman que, otra solución es utilizando un método gráfico y manifiestan “podemos tener en cuenta que los fenómenos de visualización nos pueden dar fuertes intuiciones del resultado buscado.”(p. 6)

Estos autores argumentan que desde la psicología cognitiva, en la resolución de problemas los estudiantes recurren a imágenes mentales y su manipulación, pero esas imágenes mentales también pueden ser manipuladas de forma física. También aseveran que en la educación matemática la visualización es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con ayuda de las TIC para la comprensión de nociones matemáticas.

5.2.3. Errores y Dificultades del concepto de función

Según Trujillo, Castro & Guerrero (2010), afirman que investigaciones realizadas reflejan que los errores y las incomprensiones de los estudiantes son renuentes y difíciles de superar, esto debido a las estrategias educativas tradicionales que se establecen en la enseñanza, sin embargo, también argumentan que es posible superar estas situaciones, replanteando la educación tradicional integrando las TIC como medio en la realización de las actividades matemáticas. También se afirma que el error y el fracaso se constituyen en conocimientos anteriores que fueron importantes pero que en nuevas actividades matemáticas, éstos se pueden presentar inadecuados o insuficientes en la construcción de nuevos conocimientos. Por tanto, los errores de esta clase se pueden constituir en obstáculos.

Los obstáculos cognitivos, según Brousseau (como se cita en Ruiz, 1998) pueden ser de diferentes orígenes, *de origen ontogenético, de origen didáctico y de origen epistemológico.*

De origen Ontogenético: Hace referencia a las limitaciones de las capacidades cognitivas que tiene el sujeto en su proceso de aprendizaje.

De origen Didáctico: Hace referencia a los obstáculos que el estudiante y el docente presenta por dificultades en el sistema didáctico.

Se conoce de los estudios citados en los antecedentes que los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza y aprendizaje tradicional, caracterizada porque el docente es un emisor del conocimiento y el estudiante tan solo un receptor, por esto, no conciben la idea de iniciar la resolución de un problema, sin haberles enseñado, métodos, procesos y algoritmos de forma anticipada característico de esta enseñanza, por tal razón, el contrato didáctico de un enfoque constructivista, puede percibirse como un impedimento en la comprensión del conocimiento.

También ésta enseñanza tradicional se caracteriza por la predominancia en la representación algebraica en la resolución de problemas, debido al énfasis dado a lo largo de la historia del siglo XX al tránsito de la representación algebraica hacia la gráfica, tanto el docente como el estudiante se han habituado en desarrollar estas dos representaciones pero se han encontrado con la dificultad de realizar el proceso inverso o las traducciones hacia otras representaciones.

Se ha demostrado en varias investigaciones las ventajas de la utilización de un AGD como herramienta mediadora en las situaciones didácticas, sin embargo, en las instituciones educativas son desconocidas o no son empleadas con regularidad, esto, conlleva a que cuando ésta tecnología llega a manos del estudiante produzca temor y rechazo por el desconocimiento en su manipulación.

De origen epistemológico: Están contenidos en la construcción misma de los conceptos matemáticos, están ligados a su evolución histórica; en la dimensión epistemológica se describió una breve historia sobre el concepto de función y los obstáculos que afrontó para obtener el concepto formal como se lo concibe en la actualidad.

Investigaciones como la de Ruiz (1998), Trujillo, Castro & Delgado (2010) sobre el concepto de función hacen referencia a los obstáculos de Sierpinska (1992), estos obstáculos que ha categorizado son importantes para entender lo que se puede presentar en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, por tanto, en ésta investigación sirvió para prever el comportamiento que tomará el sujeto entorno a las situaciones que se presentarán en el desarrollo y construcción del conocimiento en las traducciones de la función cúbica.

Según Sierpinska (1992), "si el obstáculo no es sólo nuestro o de un par de personas, sino que es más extendido, o ha sido extendido en algún tiempo o en alguna cultura, entonces es llamado un obstáculo epistemológico."(p. 28)

Desde comienzos de la humanidad como ya se ha mencionado en la dimensión histórica – epistemológica, los problemas de estudio estaban presentes en la cotidianidad, donde se observaban diversos cambios y el hombre quería explicar el comportamiento de estos con el fin de entender este tipo de fenómenos que se presentan en la naturaleza, sin embargo, en algunas civilizaciones el estudio de este tipo de cambios, de conocimientos tenían privilegios para las personas a quienes se dirigían, como también aludían que ciertos conocimientos no eran dignos de estudio como las relaciones existentes en tablas donde se presentaban regularidades de los valores consignados, también se referían con el mismo criterio en problemas de carácter práctico.

De acuerdo con lo anterior, en beneficio del desarrollo de las situaciones didácticas presentes en la investigación se tomaron en cuenta los siguientes obstáculos epistemológicos (OE(f)) con sus respectivos actos de comprensión (C(f)), tomados de Sierpinska (1992):

> *C(f)1: Identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.*

C(f)2: Identificación de regularidades en las relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.

OE(f)-1: (Una filosofía de las matemáticas): Las matemáticas no están interesadas en los problemas prácticos.

OE(f)-2: (Una filosofía de las matemáticas): Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en matemáticas.(pp. 31-32)

Los anteriores obstáculos epistemológicos pertenecen al grupo de las primeras condiciones.

A través de las situaciones didácticas que se desarrollaron en ésta investigación, éstos obstáculos epistemológicos tienen posibles soluciones, ya que como afirma Sierpinska (1992) "Un obstáculo es sobrepasado si nosotros somos capaces de tomar un distancia de nuestra creencia o esquema de pensamiento, si nosotros observamos sus consecuencias y estamos dispuestos a considerar otros puntos de vista". (p. 28)

De acuerdo con lo anterior se han determinado los obstáculos y lo que debe comprender el sujeto para poder superarlos, así mismo, en la investigación éstos tuvieron relevancia en las traducciones de los sistemas de representación de la función cúbica.

5.2.4. Traducciones de los sistemas de representación matemáticos

En este Trabajo de Grado, se entiende el término "traducción" como un proceso de tipo psicológico que implica el hacer pasar de un sistema de representación a otro, de acuerdo con Janvier, (como se cita en Gagatsis, Christou & Elia, 2004). Así mismo, el objetivo de la traducción es que los estudiantes establezcan relaciones (o asignaciones) de los elementos de un sistema de representación a otro, preservando las características estructurales matemáticas y el significado, como se hace de la misma manera cuando se traduce de un idioma escrito a otro.

Es decir, para referirse al proceso de traducción de un sistema de representación a otro, se hace uso de los diferentes sistemas de representación (descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas).

Sierra, González y López (1998) afirman que varias investigaciones han demostrado que existe un vacío entre las definiciones de los alumnos y la clasificación de funciones en los diferentes sistemas de representación y que por tal motivo parece necesario enseñar al estudiante diferentes formas de expresar un conocimiento matemático. En este artículo aseveran que los tipos de representación utilizados para las funciones son la descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas y realizan las siguientes definiciones:

> — *Descripción verbal,* es un enunciado en el que se describe el comportamiento de un fenómeno natural, social, matemático, etc., que implica una relación entre dos o más variables.
> — *Tablas,* es un listado organizado en dos filas o columnas (de ahí la denominación de tabla) de valores de la variable independiente y los correspondientes de la variable dependiente.
> — *Gráficas,* es la representación en el plano mediante una línea recta o curva de la relación entre variables.
> — *Expresiones algebraicas,* son fórmulas que relacionan las dos variables que intervienen en una función. (pp. 96-97)

Janvier (1987a) realiza un cuadro donde relaciona los sistemas de representación antes mencionados y propone procesos para realizar las traducciones entre los sistemas. Ver Tabla No. 1.

	Descripción Verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones Algebraicas
Descripción Verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste Numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones Algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Tabla No. 1. Procesos de interacción – traducción entre sistemas de representación.

Las anteriores son utilizadas por Sierra et al. (1998), para diseñar unas actividades donde se solicita a los estudiantes la traducción entre diferentes sistemas de representación.

A continuación se describen la actividades propuestas por Sierra et al. (1998).

ACTIVIDAD 1. Área - Perímetro de un rectángulo.

Existen infinitos rectángulos de área 60 cm^2 y diferente perímetro cada uno. Completa la siguiente tabla:

Base	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30
Altura										

Tabla No. 2. Tabulación Área-Perímetro de un rectángulo
Tomado de Sierra et al. (1998) en Funciones: Traducciones entre representaciones.

- Haz la gráfica de la función anterior utilizando el eje de abscisas para representar la base de los rectángulos y el eje de ordenadas para las alturas.

- Escribe la expresión algebraica de las alturas en función de las bases.

La primera pregunta de la actividad tiene la intención de generar la traducción de la tabla a la gráfica. Al completar la tabla con la información suministrada el estudiante relaciona los datos y puede obtener un “dibujo” detallado que represente la situación.

En la segunda pregunta, se pide a los estudiantes la traducción a la expresión algebraica de la altura en función de la base. Se trata aquí de un proceso de generalización de los datos “Ajuste Numérico” incluidos en la tabla.

ACTIVIDAD 2. El peregrino.

Un peregrino quiere cubrir la distancia de Astorga a Santiago de 240 km. La siguiente gráfica ilustra la progresión después de t días:

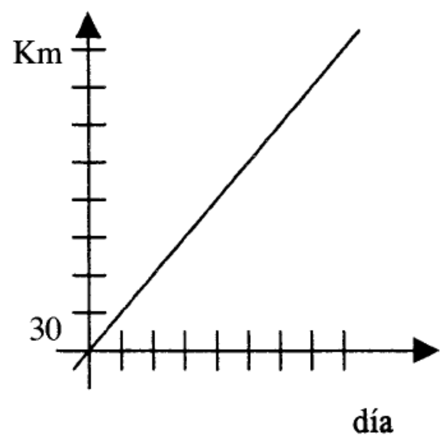


Figura No. 3. Gráfica relación día-distancia

Tomado de Sierra et al. (1998)

- Describe la situación con tus propias palabras.
- ¿Qué distancia ha recorrido durante el primer día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
- ídem para el segundo día.
- Construye una tabla que represente la distancia recorrida cada día.

- ¿Cuánto habrá recorrido después de t días? ¿Cuánto le queda para llegar a su destino?
- Haz un gráfico de la distancia que le queda por recorrer en función de los días.

Se plantea al estudiante que describa verbalmente la situación planteada “lectura de relaciones gráficas” con el propósito de entender la relación entre el espacio y el tiempo.

El estudiante con esta actividad debe recurrir a la información dada, tanto en la descripción verbal como en la gráfica, para analizar específicamente el desplazamiento del peregrino.

Se realiza una “tabulación” con la información suministrada en la descripción verbal y gráfica, para obtener la tabla que represente la distancia recorrida cada día y la tabla que represente la distancia que queda por recorrer y con ésta información el estudiante puede obtener un “dibujo” detallado que represente las relaciones de la última tabla.

ACTIVIDAD 4. Caída libre de un cuerpo.

La ley de caída libre de los cuerpos viene dada por la fórmula $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la constante de gravedad 9,8 m/s^2.

- Construye una tabla para los valores de t entre 0 y 6 segundos.
- Dibuja la gráfica.
- Expresa con tus propias palabras lo que significa esta fórmula.
- Expresa algebraicamente el tiempo en función de la altura.

Esta última actividad se refiere a un fenómeno físico. Se parte de la fórmula de la caída libre de un cuerpo a partir de la cual el alumno debe hacer la traducción a la tabla a través de la “tabulación” de los datos adquiridos por medio de sustituciones de valores en la expresión algebraica suministrada.

Se procede a realizar un "dibujo" relacionando la información suministrada en la tabla. Por último con las representaciones obtenidas el estudiante puede interpretar las regularidades encontradas a través de una "descripción verbal".

Con las anteriores actividades se reconoce algunos de los procesos de traducción entre sistemas de representación propuestos por Janvier (1987a). Éstos serán relevantes en el diseño de las situaciones didácticas, para determinar y organizar las traducciones entre las representaciones.

Gómez y Carulla (2001), afirman que las definiciones de sistemas de representación son muy poderosas porque gracias a ellas Kaput (1987), puede describir las actividades matemáticas escolares y realiza una categorización de ellas:

> 1) transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un mismo sistema de representación particular, con o sin referencia a otros significados externos;
> 2) traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;
> 3) construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y
> 4) la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o "entidades cognitivas" que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización. (p. 17)

Gómez y Carulla (2001) explican que la primera actividad se refiere a las manipulaciones que se realizan a las representaciones dentro de un mismo sistema de representación para transformarlas en otras representaciones equivalentes, por ejemplo el procedimiento utilizado de completación de cuadrados para transformar una expresión $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a la expresión $f(x) = (x-2)^2 - 1$, en el sistema gráfico se puede evidenciar cuando se utiliza traslaciones para obtener la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a partir de $f(x) = x^2$.

En la segunda actividad se relacionan elementos de un sistema de representación con elementos de otro sistema de representación, por ejemplo en la expresión algebraica $f(x) = x^2 - 4x + 3$ el término 3 hace referencia en el sistema gráfico al punto de corte con el eje y del plano cartesiano.

La tercera actividad, la de modelización, hace referencia a la representación de una situación en términos de un sistema de representación matemático diferente al que esta descrito, en esta actividad se hace uso de las anteriores actividades, por ejemplo hallar el área de un lote rectangular, de tal manera que teniendo el perímetro fijo (40) se obtenga la mayor área posible, aquí se obtiene una representación algébrica según la condición de perímetro que se dio $2x + 2y = 40$, con esta relación se busca una representación en función de una de las medidas, $A(x) = x(20 - x)$ aquí se hace uso de la primera actividad en donde se realizan transformaciones sintácticas dentro de un mismo sistema de representación, $A(x) = -x^2 + 20$ completando cuadrados $A(x) = -(x - 10)^2 + 100$, con esta expresión se hace uso de la segunda actividad realizando traducciones entre sistemas de representación, se identifican los elementos $(10{,}100)$ los cuales traducidos al sistema de representación gráfico hacen referencia al punto máximo de la gráfica y con esto se puede responder a la pregunta de la situación, diciendo que el lote debe ser un cuadrado de lado 10 teniendo un área máxima de 100.

Los autores no consideran la cuarta actividad argumentando que es de carácter esencialmente cognitivo.

Las dificultades que el estudiante puede presentar en la primera actividad categorizada por Kaput (1992), serían los procesos de tipo sintáctico, a causa del no dominio de *nociones* en el campo de las matemáticas, las cuales imposibilitan realizar transformaciones en un mismo sistema de representación.

Las dificultades que se pueden presentar en la segunda actividad, es el fracaso de realizar las traducciones entre diferentes sistemas de representación por el no reconocimiento de los elementos de un sistema de representación, por tanto, no se realiza la relación correspondiente con los elementos de otro sistema de representación.

Y en la tercera actividad, las dificultades que surgen en la modelización[10] de una situación abarcarían las anteriores dificultades, debido a que el éxito de esta actividad esta concatenada con la coordinación de la realización de las transformaciones sintácticas que se realizan en un mismo sistema de representación con el reconocimiento y relación de los elementos entre las traducciones entre los sistemas de representación.

Por último, si bien las traducciones son algo importante en los procesos de la Educación Matemática porque ayudan a la comprensión matemática de las personas, la mayoría de investigadores como Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham (2011) afirman que, en estos temas cognitivos sobre la representación, están de acuerdo en considerar que los estudiantes tienen dificultades para traducir con precisión entre las diversas representaciones tales como las verbales, tabulares, gráficas y algebraicas. En otras palabras, no es fácil este proceso de aprendizaje acerca de las traducciones entre representaciones matemáticas en la gran mayoría de estudiantes.

5.2.5. Parámetro Matemático

En la relación de los elementos existentes entre el sistema de representación gráfico y algebraico, se pueden identificar que además de las incógnitas y variables en la expresión general de la función cúbica hace presencia, coeficientes (Parámetros), es pertinente comprender el significado que puede tener este objeto matemático.

[10]Al proceso mediante el cual se construye y desarrolla un modelo matemático se le conoce como *modelización matemática*. *La Modelización matemática* es, fundamentalmente, una forma de resolución de problema de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo. Para ello no tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de habilidades matemáticas; no llega sólo a una respuesta específica sino a un rango de respuesta que describen la conducta del fenómeno considerado y da al resolutor sentido de participación y control en los procesos de solución. Esto hace que la modelización matemática sea un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula. (Castro & Castro, 1997)

Drijvers (2001), afirma que

> El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro puede ser considerado una meta – variable: por ejemplo a en $y = ax + b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición (placeholder), una cantidad desconocida o que cambia pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular sino completamente a la gráfica. El concepto de parámetro además es adecuado para resaltar la abstracción de situaciones concretas, así que representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes. (p. 3).

Drijvers (2001), señala que se pueden identificar tres pasos esenciales en el aprendizaje de parámetro "el parámetro como un fijador de posición (placeholder), como una cantidad que cambia y como un generalizador" (p. 3). En este artículo organiza los roles del parámetro a través del siguiente cuadro:

Rol del parámetro	***Por ejemplo:*** ***a en y = a x + b***	***Modelo gráfico***
Fijador de posición.	***a*** contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra.
Cantidad que cambia. Parámetro que se desliza.	***a*** transita a traves de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rapidamente las páginas de un "comic".
Generalizador. Parámetro que determina una familia.	***a*** representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas.

Tabla No. 3. Roles del Parámetro
Tomado de Basurto (2010) en *Conceptualización de los Parámetros en Funciones polinomiales vía TI-Nspire* (p. 3)

En este artículo se afirma que a través de los roles de aprendizaje del concepto de parámetro de Drijvers (2001), se pueden diseñar actividades las cuales ayuden a reconocer las característica específicas de estos parámetros y la influencia que van a tener en el comportamiento de las representación gráfica de las funciones polinomiales.

5.3. Dimensión Didáctica

La investigación que se realizó con relación a la función cúbica tiene como marco la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007), que a través de sus experiencias como docente en una escuela rural, y sus conocimientos en Matemáticas y Psicología logró diseñar una teoría nueva para ese entonces, en los años setenta, en la cual enfrenta a los actores que participan en la enseñanza a unas situaciones en donde deben interactuar entre ellos, para construir un conocimiento. En la actualidad, esta teoría es un enfoque, del modelo constructivista de la educación, enfoque que globalizará el aprendizaje de la función cúbica con un AGD, herramienta que será parte fundamental en el desarrollo de las interacciones de los actores que intervienen.

En esta dimensión, se identifican las características y el funcionamiento del enfoque constructivista de la TSD, por lo que conlleva a realizar una revisión curricular general alrededor de la enseñanza de la función cúbica, dentro de ésta, se identificó lo pertinente sobre el plan de área de matemáticas y de qué manera incide en la enseñanza y aprendizaje de este saber. Por otro lado, dado que Brousseau desarrolló la TSD con relación a la Didáctica de las Matemáticas, es necesario realizar un acercamiento al Sistema Didáctico, en ello se identificaron las interacciones entre los actores de éste Sistema. Por último se presenta los fundamentos básicos de la TSD que sirvieron para el diseño de las situaciones.

5.3.1. Una revisión curricular general sobre el tratamiento de la función cúbica.

La educación tradicional en Colombia ha sido básicamente originada desde los años sesentas y setentas a través de movimientos que surgieron en los países europeos desde 1958, como también en los Estados Unidos, este movimiento de Reforma se trataba de la modernización de la enseñanza de las matemáticas con el propósito de adaptar este conocimiento a los saberes científicos y tecnológicos. Sin embargo, ésta reforma se basó en la enseñanza Bourbakista, como afirma García (1996): “La escuela bourbakiana organiza las matemáticas en tres grandes estructuras, a saber, la algebraica, la topológica y la de orden”. (p. 196).

Esta forma de ver las matemáticas ocasionó que el conocimiento matemático sea enseñado como conocimientos acabados, rigurosos y formales, éstos se presentaron en la educación primaria, media y secundaria. Como afirma García (1996): “Se concedió excesiva prioridad al manejo riguroso de la notación simbólica”. (p. 197) Entonces, partiendo de estos criterios se realizó el manejo de la educación determinando lo que se debía enseñar en los contenidos curriculares, además transmitieron esta información a través de textos escolares donde se plasmaba éste énfasis; sin embargo, ésta reforma no tuvo mucho éxito ya que se presentaron muchas dificultades como fueron fracasos en los estudiantes, el rechazo hacia el conocimiento matemático, como también que los docentes necesitaban capacitaciones para impartir de esa forma las clases de matemáticas. Más adelante, se dieron cuenta que ésta manera de enseñanza sólo era posible impartirla en la educación superior.

De ahí en adelante, existió la necesidad de diferenciar los conocimientos propios de la matemática (saber sabio) de los conocimientos matemáticos escolares (saber enseñado). Por tanto, iniciaron las investigaciones en las matemáticas escolares a través de diferentes grupos con la finalidad de transmitir éstos conocimientos desde otros enfoques, como afirma García (1996): “Se recuperaron los procesos histórico y epistemológicos de las matemáticas, con el fin de dimensionar la construcción del conocimiento matemático y el vasto campo de problemas que dieron lugar a su desarrollo”. (p. 198)

Ahora, los propósitos de la enseñanza de las matemáticas se direccionaban en otros aspectos como son, que el conocimiento matemático está relacionado con otras ciencias, que las matemáticas sean capaces de modelizar situaciones de índole científico, social y cultural; como también que las matemáticas tienen utilidad en la comunicación y que la mayoría de los conceptos matemáticos se han logrado han sido por medio del razonamiento empírico deductivo. De ahí, se toman otros criterios en la enseñanza como la implementación de las calculadoras, computadores, y que los conocimientos ofrecidos sean a través de resolución de problemas.

En la educación Colombiana se presentaron muchas dificultades en la enseñanza de las matemáticas, como son, para nombrar algunas de ellas que, los docentes no estaban capacitados para enseñar desde este enfoque bourbakista, que los libros de texto estaban descontextualizados; aquí el docente era el propietario del saber, el cual, de acuerdo a sus capacidades lo transmitía hacia los estudiantes que eran pasivos y ellos sólo lo recepcionaban. De igual manera, se enfatizaba en la parte abstracta por medio de un lenguaje conjuntista, por estos motivos, en los años ochenta desde el Ministerio de Educación Nacional se dio inicio a las investigaciones concernientes en la Educación Matemática.

Como se ha revisado, en la historia de la educación de alguna manera, éste enfoque tradicional en Colombia todavía tiene relevancia en algunos programas curriculares, que es necesario atacar desde diferentes frentes. En ésta investigación, se pretende a través de una secuencia de situaciones que el estudiante sea el constructor de su propio conocimiento, donde observe, manipule, reflexione, conjeture sobre el objeto de estudio y accione sus conocimientos previos para dar solución a un problema, de ésta manera, él será el "beneficiado" y el actor principal en las clases. Es así que, se atacará, la enseñanza tradicional en la educación como también será beneficioso porque se dará la implementación de una alternativa de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento matemático como es la función cúbica.

Revisión general del plan de área de matemáticas para grado noveno y apuntes de los estudiantes.

La importancia de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones a nivel nacional se ha venido rescatando ya hace varios años, debido a las necesidades que demanda la sociedad y para que los conocimientos sean asequibles para la mayoría de personas, en vista de ello el MEN (2006) ha formulado los Estándares Básicos de Competencias pertinentes para cada área del conocimiento.

En el área de Matemáticas, se ha clasificado el conocimiento en cinco pensamientos, que son los siguientes: El Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, el Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, el Pensamiento Aleatorio y Sistemas de datos y el Pensamiento Variacional y Sistemas algebraicos y Analíticos. Para los propósitos que sigue la investigación toma importancia el Pensamiento Variacional ya que el estudio de la función cúbica está contenido dentro de este, sin discutir sobre la importancia que tienen los demás Pensamientos Matemáticos.

De igual manera, para la investigación que se implementó en grado noveno acerca del Pensamiento Variacional se tomaron como referentes los siguientes estándares:

a. Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

b. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

c. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. (MEN, 2006, p.87).

En la adquisición de información idónea para la implementación de las situaciones didácticas se realizó una revisión del Plan de área de Matemáticas para grado noveno de la Institución, en el Anexo No. B, donde se realizó la parte experimental del estudio, con la finalidad de verificar que los estándares antes mencionados estén presentes en la conformación de dicho Plan. Es pertinente resaltar que en la Institución Educativa, la intensidad horaria planificada para desarrollar el curso de Matemáticas es de cuatro horas semanales y que el año lectivo está dividido en tres períodos. La revisión encontró los siguientes resultados:

Con respecto a los saberes dentro de este Plan, se hace referencia a las funciones como contenidos en la programación en el primer período así: "Funciones: concepto de función, elementos y representaciones.". En el segundo período se toma el estudio de la función lineal, de esta manera: "Formalización del concepto de función y función lineal: línea recta, ecuación de la recta y situaciones problema.". Para el tercer período se estudia lo siguiente en el Pensamiento Variacional:

- "Sistemas de ecuaciones lineales: Situaciones problemas.
- Ecuaciones y funciones cuadráticas.
- Funciones exponenciales y logarítmicas." En el Anexo No. B.

De esta manera, queda en evidencia que en ninguno de los períodos académicos para el grado noveno se ha planificado el estudio de las demás funciones polinómicas por ende el estudio de la función cúbica queda relegado para años posteriores, si así lo fuera, ya que no se encuentra especificado en los Planes de Área para los grados décimo y once el estudio de la función cúbica.

Con respecto a los estándares (saber sabio) subrayados como referentes para la investigación, los tres (a, b y c) están presentes dentro del Plan de área de matemáticas en el Pensamiento Variacional, descritos en el segundo período.

También en los Indicadores de Desempeño y los Logros está presente el estudio de las funciones alcanzando hasta el segundo período, la Función Lineal.

En las Instancias Verificadoras y/o Acciones evaluativas del Plan de Área, es importante resaltar que las herramientas utilizadas para la adquisición del conocimiento por parte del estudiante y aplicadas por el docente en ningún momento se enuncia el apoyo de un AGD como mediador entre el saber sabio y el saber enseñado, ni tampoco la intervención de calculadoras, software, entre otros. De esta manera para el primer período se utilizan los siguientes acciones evaluativas en lo pertinente al concepto de función:

- "Realización de la lectura "Como surgió modelos de función" Alfa 9.
- Desarrollo de la guía "función".
- Evaluación de función." En el Anexo No. B.

Para el segundo período se utilizan las siguientes acciones evaluativas de acuerdo al estudio de la función lineal y sistema de ecuaciones lineales:

- Lectura de cómo nació la definición de la palabra función (Alfa 9), realización del taller de lectura comprensiva.
- Aplicación de la guía de "función, propiedades y notaciones"
- Taller evaluativo, quiz o evaluación del tema visto." En el Anexo No. B.

Los recursos y materiales didácticos generales que utiliza el estudiante para la adquisición del conocimiento son: "Material policopiado, elementos geométricos como la escuadra, materiales básicos, libros e internet." como se puede apreciar en el Anexo No. B.

Con el fin de verificar lo proyectado en el Plan de Área con lo desarrollado por parte de los estudiantes se realizó una revisión del cuaderno de uno de los estudiantes que participó de la investigación.

Desde el inicio en el desarrollo del concepto de función quedó en evidencia que la manera como se ”transmite” este conocimiento matemático pertenece a la enseñanza tradicional, que se mencionó anteriormente, se escribe la definición formal de función tanto desde la descripción verbal como de la representación algebraica. Un hecho notorio, es que ellos trabajan con unos diagramas, para determinar si una relación es una función. Así mismo, emprenden el estudio de la función lineal, escriben la definición formal, luego la expresión algebraica de ella y para graficar tabulan valores que son consignados como coordenadas en el plano cartesiano, (En el Anexo No. B, Apuntes de los estudiantes). Dentro del estudio de la función lineal se hace una relación entre ésta y la función afín que toma la forma: $y = mx + b$. (En el Anexo No. B, Apuntes de los estudiantes).

Con respecto a las actividades propuestas por el docente encargado y de acuerdo con el Plan de Área en el desarrollo de éstas no interviene un instrumento el cual ayude al estudiante a interpretar desde otras representaciones los conocimientos matemáticos acerca de la función, la función lineal y los sistemas de ecuaciones lineales, en el Anexo No. B, Plan de área.

Consideraciones de la investigación frente al Plan de Área y los apuntes de los estudiantes:

De acuerdo con la revisión realizada tanto al Plan de Área de Matemáticas del Instituto y los apuntes de los estudiantes, se tomaron las siguientes consideraciones encaminadas al diseño de las situaciones, en beneficio de la investigación:

Con referencia a los contenidos: Las representaciones utilizadas por los estudiantes inician desde la expresión algebraica pasando por las tablas y finalizando con la realización de la gráfica, por esto, en la investigación se realizaron las traducciones entre los sistemas de representación en un orden alterno haciendo la diferencia frente a la forma tradicional.

De igual manera, como la puesta en acto de la investigación fue desarrollada en el término del segundo período y el inicio del tercero y con lo evidenciado en los apuntes de los estudiantes no es posible con los conocimientos previos observados encontrar de manera algebraica los ceros o raíces que pertenecen a la función cúbica, ya que para la etapa experimental ellos no habían tratado con la función cuadrática ni encontrado los ceros o raíces de ésta función delimitando de esta manera este aspecto de la investigación.

Con referencia a los instrumentos utilizados para la enseñanza: En la conformación del Plan de Área del Instituto no existe presencia ni tampoco en los apuntes de los estudiantes de la utilización de algún instrumento ya sea calculadoras, software, entre otros, que ayuden a construir el conocimiento, por tanto, para la investigación toma relevancia la utilización de una herramienta computacional para el desarrollo de las situaciones didácticas.

5.3.2. Sistema Didáctico

Según Trujillo, Castro y Guerrero (2010) afirman: "[…] El objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de esas concepciones." (p. 109)

Para tener una claridad en los conceptos que se presentan en la TSD es conveniente hacer una revisión del sistema didáctico teniendo en cuenta el siguiente esquema:

Esquema No. 1. Esquema del Sistema Didáctico tomado de Chamorro (2003)

Aquí, se muestran los actores del sistema didáctico y las interacciones que entre ellos existen:

Profesor – estudiante: En este subsistema, se encuentra el c*ontrato didáctico*, que son unas reglas o normas implícitas entre ellos, que dependen del enfoque y modelo pedagógico en el que se trabaja, y los *obstáculos didácticos*, que según Brousseau (como se cita en Ruiz, 1998):

> Están ligados al sistema de enseñanza en que se encuentran inmersos nuestros alumnos. Son debidos a las decisiones del sistema educativo o a las del profesor en el aula. Resultan, pues, de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza. (p. 27)

Brousseau identifica los siguientes efectos que acontecen en la TSD (como se cita en Chavarría, 2006): *Efecto Topaze,* e*fecto Jourdain*, *deslizamiento Meta – Cognitivo, uso Abusivo de la Analogía*.

Estudiante – saber: En este subsistema las interacciones entre estudiante y saber se pueden encontrar las *teorías de aprendizaje* del estudiante que en la investigación estarán sujetas al *contrato didáctico* de la TSD.

Es imprescindible tener en cuenta los errores que acontecen en las teorías de aprendizaje. La noción de obstáculo en Didáctica de la Matemática según Brousseau (como se cita en Ruiz, 1998) argumenta:

> El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. (p. 27)

Saber – Profesor: El profesor es el responsable de que el conocimiento formal, aquel saber que tiene un carácter universal, el conocimiento descontextualizado y despersonalizado, *El Saber Sabio*, sea transformado al conocimiento que el docente desea enseñar, aquel que tiene unas pretensiones y objetivos tanto en el sistema institucional como en el proceso educativo del estudiante, este conocimiento el *Saber enseñado* estará diseñado por el profesor que preverá el conocimiento que será construido y validado por el estudiante y que con ayuda del profesor se institucionalizará a un *Saber Aprendido.*

Este proceso de transformación del conocimiento se conoce como la *transposición didáctica,* y se debe a Chevallard.

Chevallard (como se cita en Gómez, 2005), define la transposición didáctica de la siguiente manera:

> “un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van

> a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica". (p. 87).

D'Amore (2006) argumenta que es fundamental que el docente maneje la epistemología de un concepto matemático, con ello el podrá identificar los obstáculos inmersos del saber a enseñar, y reconocerá las concepciones de los estudiantes. El conocimiento de la epistemología de un saber facilita la transposición didáctica:

- por un lado permite una intervención didáctica que prevenga, en los límites de lo posible, la formación de conceptos inadecuados incluso errados;

- por otro lado permite al maestro reconocer sus mismas concepciones implícitas en lo que a la matemática se refiere. (p. 239).

5.3.3. La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

La Teoría de las Situaciones Didácticas como se mencionó anteriormente se debe al investigador francés Guy Brousseau (1986; 1997; 2007), quién a través de investigaciones realizadas en un grupo de niños en una escuela Francesa, donde observaba las diversas interacciones que se presentaban entre los estudiantes, los docentes y el saber matemático, originó ésta Teoría, que en la actualidad, en la Didáctica de la Matemática se toma como referente en diversas investigaciones que desean saber acerca de las relaciones que existen cuando se imparte un conocimiento matemático con la participación de todos los actores que intervienen en él. La TSD como afirma Fernández (2011): "pretende estudiar, modelizar y contrastar empíricamente los *fenómenos didácticos* que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, teorema o procedimiento a sus estudiantes." (p. 145)

La propuesta de la investigación implementó tres situaciones didácticas, que están dentro del marco de la TSD y se utilizó el Ambiente de Geometría Dinámico Cabri Géomètre II Plus, ya que éste fue el medio en el cual los estudiantes buscaron las respuestas interactuando y realizando retroacciones pertinentes en cada una de ellas. De acuerdo con esto se busca que el estudiante encuentre por sí mismo las soluciones aludiendo al *aprendizaje por adaptación*, como afirma Brousseau (2007):

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p. 30)

Dicho de otra manera, en la TSD se plantea un problema a los estudiantes donde se establecerá una intención y se entrega el medio en el cual ellos van a interactuar, realizando acciones y retroacciones, gracias a estas el estudiante encontrará las respuestas esperadas, adquiriendo de esta manera el conocimiento.

Para que se dé el conocimiento, a través de la TSD, es necesario distinguir los elementos, relaciones y situaciones que ayudarán a prever las acciones que realizarán los estudiantes y por consiguiente las soluciones que los docentes esperan que los estudiantes realicen. A continuación se explicará lo más relevante de la TSD que será pertinente en la investigación.

El término *situación* es tomado como el contexto donde el estudiante desarrolla todas las actividades planteadas por el docente y que tienen un propósito.

Medio: Es el instrumento en el cual se pondrá en acto las situaciones didácticas. En la investigación el medio utilizado es *Cabri Géomètre II Plus*.

Situación Didáctica: es el proceso de la situación donde el docente proporciona el problema en contexto y el medio con el cual el estudiante debe llegar a dar respuesta al problema. Es decir, existe una relación permanente entre docente – estudiante - medio didáctico.

Esta dimensión como afirma Chavarría (2006): "*Situación Didáctica* se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor – estudiante – medio didáctico." (p. 2)

Situación a-didáctica: Está inmersa en la *Situación Didáctica*. Es el proceso de la situación donde el docente plantea al estudiante un problema en contexto y éste con sus conocimientos previos debe ser capaz de actuar, reflexionar y lograr dar respuesta al problema sin la intervención del docente. Como afirma Chavarría (2006): "En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido." (p. 2). Se refiere también al diseño de las situaciones que el docente preverá orientadas a provocar una intención en el estudiante, con el propósito de que éste interactúe con el medio y a través de las acciones y retroacciones encontradas, de alguna manera obligue al estudiante a buscar diferentes estrategias de solución para llegar a la respuesta final y de esta manera se apropie del conocimiento.

Según Brousseau, una situación *a-didáctica* comprende tres fases*:* de *acción, formulación* y *validación.* Estas fases inducen al alumno a transitar etapas propias de la actividad matemática.

Fase a-didáctica de acción: Aquí el estudiante actúa sobre el problema que debe ser de interés para el estudiante, el sujeto utiliza el medio y sus conocimientos anteriores, entonces el medio le proporciona unas retroacciones donde el estudiante tomará las más convenientes en forma de estrategias o hipótesis para llegar a la repuesta esperada. El conocimiento está implícito solo que el estudiante debe llegar a encontrarlo.

Fase a-didáctica de formulación: La comunicación interviene en ésta fase, el estudiante comunica sus ideas con otro u otros compañeros donde se comparten experiencias en la resolución del problema, por ello, es necesario que cada uno intervenga y exponga sus ideas. Como afirma en este sentido Brousseau (2007) afirma:

> La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). EI *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información. (p. 25)

Fase a-didáctica de validación: Después de interactuar con el medio y haber planteado conjeturas, hipótesis y estrategias para llegar a la solución del problema, ya sea de manera individual o grupal, ahora el estudiante deberá demostrar con pruebas y defender sus estrategias de solución con las cuales llegó a la respuesta del problema. Aquí se verifica si la respuesta encontrada es pertinente y válida para el problema en cuestión.

En concordancia con las anteriores fases, es necesario retomar por último en una *situación didáctica* lo que efectuaron los estudiantes y despersonalizar el conocimiento adquirido formalizando y generalizando éste nuevo conocimiento, aportando observaciones relevantes y aclarando cualquier duda en el conocimiento que aprendieron los estudiantes, éste proceso está inmerso dentro de la *situación didáctica* y se denomina *fase de institucionalización*. En esta parte, es fundamental la intervención del docente como sostiene D'Amore (2006):

> (…) tiene el objetivo (como hemos visto) de establecer y dar un status oficial a conocimientos aparecidos durante las actividades en el salón. Normalmente tiene relación con conocimientos, símbolos, etcétera, que se deben tener en vista de su utilización en un trabajo sucesivo." (p. 98).

5.3.4. Ambientes de Geometría Dinámica (AGD)

De acuerdo con la TSD donde se manifestaron las necesidades del aprendizaje del conocimiento por parte del estudiante desde un enfoque diferente, es primordial proporcionar o introducir al estudiante, la integración de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD). En el contexto actual de la Educación Matemática permiten que sean herramientas por medio de las cuales el estudiante sea el protagonista principal en la construcción del conocimiento del objeto de estudio y es él quien explora las alternativas de solución frente a un problema determinado.

Así mismo, el MEN (2006), manifiesta la importancia de utilizar diferentes recursos didácticos, que permiten estructurar situaciones problema más pertinentes en pro de la actividad matemática y por consiguiente a favor del sujeto que aprende, lo cual ayuda a profundizar y fortalecer los procesos que intervienen en el conocimiento matemático, como también destaca que estos recursos se consideran como mediadores en el avance de diferentes conocimientos cada vez más superiores y de mayor calidad.

Al respecto, el MEN (2006) declara:

> Entre estos recursos, pueden destacarse aquellos configurados desde ambientes informáticos como calculadoras, software especializado, páginas interactivas de internet, etc. Estos ambientes informáticos, que bien pueden estar presentes desde los primeros años de la Educación Básica, proponen nuevos retos y perspectivas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en tanto que permiten reorganizaciones curriculares, pues no sólo realizan de manera rápida y eficiente tareas rutinarias, sino que también integran diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.). (p. 75).

En este orden de ideas, diversos autores han escrito a través de sus trabajos los beneficios de la integración de estos ambientes en las clases de matemáticas los cuales utilizan comandos y propiedades que permiten representar de diferentes maneras un objeto de estudio en particular, entre algunos de ellos, se destaca a Santos-Trigo (2001) que afirma lo siguiente con respecto a los AGD:

> Las calculadoras y computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos de manera eficiente y precisa. Cuando disponen de herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas. (p.249)

Para éste trabajo de investigación, en particular, acerca de la función cúbica el AGD Cabri Géomètre II Plus, es el instrumento principal donde se actúa sobre el objeto de estudio con la finalidad de encontrar las reflexiones y por ende las respuestas esperadas en la investigación.

6. Metodología

Como metodología para esta investigación, emplearemos la *ingeniería didáctica*, más específicamente una *micro–ingeniería didáctica* porque se estudia los fenómenos en el aula y se realizará una secuencia de enseñanza para la función cúbica.

La *micro-ingeniería* didáctica consta de 4 fases, según Artigue (1995)

- Análisis preliminares
- Análisis *a priori*
- Experimentación
- Análisis *a posteriori* y evaluación

6.1. Análisis preliminares

Los análisis preliminares hacen referencia a las bases teóricas que se deben conocer y explicitar para el análisis de las concepciones, comportamientos, en general fenómenos del aula, Artigue (1995) describe los análisis preliminares más frecuentes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.(…)(p. 38)

En el análisis del campo de restricciones se identificarán, los sistemas de representación de la función cúbica (gráfico, algebraico, numérico), estas se diferenciarán en tres dimensiones, dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica.

6.2. Análisis *a priori* de las Situaciones Didácticas

Aquí se seleccionará las variables de comando, que en este caso se constituyen en variables micro-didácticas, y que en éste análisis según Artigue (1995), comprende una parte descriptiva y una predictiva, la descriptiva tiene que ver con las variables de la situación didáctica, las que desencadenan, provocan, estimulan al estudiante a la acción, y ayudan a percibir, distinguir sus diferentes retroacciones, luego se analiza lo que está en juego, si la situación *a-didáctica* diseñada para el estudiante cumplirá con su objetivo; también se debe tener en cuenta que este análisis sirva para prever los diferentes comportamientos de los estudiantes a la hora de poner en práctica la situación didáctica.

6.3. Experimentación

En ésta fase se lleva a cabo todas las acciones y retroacciones que se presentan al poner en juego las situaciones didácticas formuladas, en base a los propósitos y los objetivos de la investigación. Es decir, entran en escena el investigador, el estudiante y el docente, alrededor del objeto de investigación, la función cúbica.

También se pone en práctica, el AGD seleccionado junto con las situaciones didácticas diseñadas, con el propósito de que, a través de ellos, se trata de encontrar los registros que son pertinentes en la investigación. En la investigación, el medio que se va utilizar será *Cabri Géomètre II Plus*.

6.4. Análisis *a posteriori* de las Situaciones Didácticas y validación

En ésta fase se analizan todos los registros y demás pruebas, que fueron adquiridas en la anterior fase y que son indispensables para encontrar los resultados esperados al poner en práctica las situaciones didácticas. También se analizan algunos datos complementarios e importantes que se han encontrado a través de otras metodologías como son las encuestas, entrevistas, etc.

Se realiza una confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*, con la finalidad de realizar una validación de los resultados encontrados en la investigación.

6.5. Ambiciones cognitivas de la propuesta didáctica

Se pretende identificar con las traducciones, las regularidades que cada sistema de representación puede otorgar a la comprensión de la función cúbica y con ello superar obstáculos cognitivos de tipo epistemológico y didáctico.

Como se observó en los antecedentes, existen pocas investigaciones sobre la función cúbica, llegando al estudio de la función cuadrática fundamentándose en una enseñanza tradicional, esta enseñanza se limita a que el estudiante transite desde el sistema de representación algebraico a las tablas o desde las expresiones algebraicas a la gráfica.

Investigaciones realizadas sobre la función cúbica se deben más que todo por la interacción con un AGD o calculadoras graficadoras, un ejemplo de esto es el estudio que realizó Gómez y Carulla (1998b), en la cual contrastan las concepciones de los estudiantes con respecto a la función como resultado de diferentes estrategias de enseñanza, sin embargo, se enfocan en dos sistemas de representación el simbólico (expresiones algebraicas) y el gráfico, por tal razón se ve necesario realizar investigaciones que profundicen en las traducciones de los sistemas de representación matemáticos de la función cúbica.

En muchas investigaciones se hace notable que la intervención de los AGD complejizan la construcción de nuevos conceptos matemáticos, por este motivo, se apuesta a la utilización de Cabri Géomètre II Plus, como herramienta para la articulación de las traducciones de los sistemas de representación de la función cúbica.

La propuesta de esta investigación tiene como meta la elaboración de una secuencia de situaciones didácticas desde lo cognitivo, caracterizada por:

- La construcción de la función cúbica en contexto identificando las regularidades que surgen a través de las acciones del estudiante, en las traducciones de los sistemas de representación.

- La incorporación de las situaciones implementando el AGD Cabri Géomètre II Plus permite acciones reflexivas, argumentativas y propositivas entorno a la construcción de la función cúbica.

6.6. Análisis de restricciones

A continuación se presenta una reflexión de las ideas que sobresalen en los análisis preliminares, estas consideraciones serán la base del diseño de las situaciones didácticas.

- Dimensión Epistemológica:

En el análisis histórico- epistemológico se puede evidenciar que el surgimiento de los sistemas de representación empezaron con la explicación y descripción de fenómenos físicos, por tal razón se vieron en la necesidad de buscar un lenguaje para expresar o transmitir esta información, al usar el mismo lenguaje se estaría utilizando una herramienta de descripción que bien podría ser un sistema de representación verbal.

También se encontró que las tablas fueron esenciales para el registro de magnitudes físicas, algunas culturas utilizaron tablas para encontrar regularidades, esto demuestra a la luz de la investigación que han sido fundamentales como herramientas para la resolución de problemas, es por esto que se ve necesario que el estudiante haga uso de este sistema de representación para relacionar magnitudes variables.

Varios matemáticos como Oresme intentaron explicar a través de esquemas gráficos las relaciones que se podrían encontrar entre magnitudes variables, dando surgimiento a la representación gráfica, la historia muestra la necesidad de encontrar formas de expresión para identificar y entender el comportamiento del mundo físico, al relacionar estas formas de representación, se realiza traducciones entre ellas.

En los últimos siglos la evolución del concepto de función se enfatiza en la representación algebraica que es de mayor grado de abstracción, debido a la evolución misma de las matemáticas, se formalizan definiciones y la notación simbólica, los matemáticos consideran a las expresiones analíticas como fundamentales en el estudio de función, la complejidad de las definiciones ocasionan que se traten a las de definiciones como algo estático y no dinámico, perdiendo el énfasis de variabilidad que tenía en un principio.

Se puede inferir que los sistemas de representación ya están totalmente desarrollados, sin embargo, se hace énfasis en la representación algebraica debido al surgimiento de la teoría de conjuntos.

La historia muestra que las representaciones se han desarrollado, en un orden en específico, partiendo de la descripción verbal a las tablas, luego a su representación gráfica, y a su modelización con la expresión algebraica, la larga predominancia de la representación algebraica en los últimos siglos se ha opuesto a la expansión de la enseñanza a los otros sistemas de representación emergentes tales como las representaciones ejecutables[11] en ambientes informáticos.

- Dimensión Cognitiva:

Se pudo percibir que las restricciones asociadas a las características cognitivas de los estudiantes tenían relación con las dificultades que se presentan en las traducciones de los sistemas de representación. Con la categorización que realizó Kaput (1992) de las actividades matemáticas en los sistemas de representación se puedo identificar y crear dificultades que influyeron en el diseño de las situaciones didácticas, estas dificultades están influenciadas por el análisis curricular del plan de área y revisión de apuntes de matemática de los estudiantes que se realizó.

- Dificultades en los procesos de tipo sintáctico, a causa del no dominio de *nociones* en el campo de las matemáticas las cuales imposibilitan realizar transformaciones en un mismo sistema de representación.

- Dificultades en realizar las traducciones entre diferentes sistemas de representación por el no reconocimiento de los elementos de un sistema de representación, por tanto, no se realiza la relación correspondiente con los elementos de otro sistema de representación.

[11] En la actualidad, los instrumentos computacionales (calculadoras algebraicas como la TI-92, las computadoras) encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos. (…). (Moreno & Waldegg, 2002, pp. 58 – 59), también afirman que el objetivo de las representaciones ejecutables no es reemplazar la "fluidez algorítmica" (p. 59), si no, que el estudiante pueda expresar un problema desde diferentes sistemas de representación, interpretando los resultados que arroja el instrumento ejecutor.

- Las dificultades que surgen en la modelización de una situación abarcarían las anteriores dificultades, debido a que el éxito de esta actividad esta concatenada con la coordinación de la realización de las transformaciones sintácticas que se realizan en un mismo sistema de representación con el reconocimiento y relación de los elementos entre las traducciones entre los sistemas de representación.

- Dimensión Didáctica

De acuerdo con la Dimensión Didáctica que se desarrolló en el Marco Teórico, se describieron algunas de las falencias en la enseñanza del conocimiento matemático en la Educación Básica y Media secundaria donde todavía se otorgan privilegios al sistema de representación algebraico por encima de otros sistemas de representación, y con la encuesta realizada, se logró verificar, como en varias instituciones de la ciudad de San Juan de Pasto, se aborda la enseñanza de las funciones principalmente en el sistema de representación algebraico y que en la mayoría de los encuestados se encontró que la estrategias de enseñanza de este conocimiento están dentro de la enseñanza tradicional, además fueron pocos los docentes que afirmaron que utilizaban otros recursos, como herramientas o instrumentos, que permitieran desde otro enfoque el aprendizaje por parte de los estudiantes del concepto de función y de las funciones polinómicas.

Lo anterior está en contraposición al enfoque de la TSD sumado con la integración de herramientas computacionales; en favor a los intereses de la investigación se plantean las siguientes consideraciones con el fin de que las situaciones didácticas sean efectivas y cumplan con los objetivos trazados:

- Las situaciones didácticas propuestas abogan por el enfoque constructivista que plantea la TSD aplicadas en las traducciones que intervienen en la función cúbica, se emplea el *aprendizaje por adaptación*, de esta manera se propone el problema al estudiante para que él interactúe con el medio encontrando de esta manera las soluciones respectivas y explicitando el conocimiento al final de la situación.

- La metodología empleada será en un nivel de *micro-ingeniería didáctica* ya que es concerniente con la TSD, para la concepción y el diseño de las situaciones didácticas, transitando por las etapas propias de la ingeniería como son los análisis preliminares, los análisis *a priori*, experimentación y análisis a *posteriori*, con la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus.

- La intervención del AGD Cabri Géomètre II Plus en la investigación es importante ya que permite que el estudiante explore diferentes representaciones de la función cúbica, verifique y materialice las soluciones.

- El diseño de las situaciones establece una dinámica diferente en el aprendizaje ya que el estudiante cobra el papel protagónico y se enfrentará a un problema que no parte de la expresión algebraica como se realiza tradicionalmente. Al principio, puede que exista algún conflicto debido a las prácticas usuales de enseñanza, no obstante, se prevé que el estudiante alcance los propósitos de la secuencias.

7. Planeación del Estudio y Diseño de Actividades

Finalizado el análisis preliminar, se prosigue con el diseño y la implementación de las situaciones didácticas en el aula, las cuales son fundamentales en la tercera fase de la metodología de esta investigación, la experimentación.

7.1. Análisis del Campo de Restricciones

La investigación se realizó con estudiantes de una Institución Educativa de carácter privado de la ciudad de San Juan de Pasto (Nariño), de calendario B, la razón por la cual se escogió este calendario se debe a la necesidad de unos conocimientos previos que los estudiantes tienen que haber adquirido en el comienzo del año y por sincronización con el calendario de ésta investigación, a continuación se especifican las restricciones de índole de diseño y de favorabilidad en el sistema educativo.

7.1.1. Restricciones de Diseño

El detonante de la secuencia de las situaciones didácticas propuestas en la investigación será la interacción entre el estudiante y el medio, provocando que este utilice lo conocido y deduzca los procesos convenientes en las traducciones de los sistemas de representación de la función cúbica, es decir, en el marco de la TSD según Brousseau (2007) que el estudiante se desenvuelva en una situación *a - didáctica.*

El medio en la situación *a–didáctica* utilizado, son las construcciones propuestas por los investigadores diseñadas en Cabri Géomètre II Plus, el cual posibilita al estudiante utilizar las herramientas que este medio ofrece, para la identificación y la comprensión dinámica de los elementos de cada sistema de representación que permita relacionar y realizar las actividades matemáticas, con las cuales se pueda identificar propiedades y comportamientos generales de la función cúbica.

7.1.2. Restricciones de favorabilidad del sistema educativo

La investigación se realizó en una institución privada de la ciudad de San Juan de Pasto, de ahí se seleccionaron para la puesta en escena de la secuencia de situaciones didácticas a cuatro estudiantes de grado noveno, quienes recibieron una inducción por parte de los investigadores en el tratamiento del AGD Cabri Géomètre II Plus, con la intención de reconocer las funciones de las herramientas y favorecer la interacción con el medio. La parte experimental de la secuencia de situaciones didácticas fue realizada en horas de clases.

Las directivas de este Instituto dieron viabilidad para que se desarrollara la investigación habilitando aulas de la planta física y recursos audiovisuales como videobeam, tablero, un computador y un computador portátil pertenecientes al Instituto. Para el desarrollo de la secuencia se instaló el programa Cabri Géomètre II Plus en el computador portátil del Instituto y otro facilitado por uno de los investigadores.

7.2. Plan de actuación en el aula

Se organizó la secuencia de situaciones didácticas teniendo en cuenta los análisis preliminares, con esto se elaboró el siguiente Plan de actuación en el aula:

Actividades	Tiempo	Instrumentos
Introducción: explicación a los estudiantes en que consiste la secuencia de situaciones didácticas y el contrato didáctico que se manejará en su aplicación	30 minutos	Diario de la sesión Fotografías
Sección Introductoria al AGD Cabri Geómetra II Plus: Explicación de las herramientas del medio, visualizando la función que tiene cada una en construcciones que se realizarán con el estudiante.	5 horas	Diario de la sesión Fotografías
Aplicación de la Situación Didáctica No. 1: Se propondrá una situación didáctica que lleve a los estudiantes a realizar las actividades matemáticas de	2 horas	Diario de la sesión Fotografías Video

los sistemas de representación, partiendo de la descripción verbal del problema del volumen máximo de la caja y con ayuda del medio visualicen comportamientos y propiedades generales de la función cúbica.		Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación de la Situación Didáctica No. 2: Se propondrá una situación didáctica que lleve a los estudiantes a realizar la traducción del sistema de representación algebraico al sistema de representación gráfico, sin transitar en otro sistema deduciendo los efectos de los parámetros de la forma general de la función cúbica con ayuda de la construcción diseñada en Cabri Géomètre II Plus.	4 horas	Diario de la sesión Fotografías Video Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación de la Situación Didáctica No. 3: Se propondrá una situación didáctica que lleve a los estudiantes a Plantear la forma general de la expresión algebraica de la función cúbica, a partir de la identificación de los efectos de los parámetros en el sistema de representación gráfico.	2 horas	Diario de la sesión Fotografías Video Producciones escritas de los estudiantes

Tabla No. 4. Plan de Actuación en el Aula. La estructura de esta tabla ha sido tomada del plan de actuación de aula de Camargo & Guzmán (2005).

7.3. Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de recolección de la información que se tiene previsto utilizar en la fase de experimentación, son en primer lugar las producciones escritas de los estudiantes, fotografías y filmaciones, estos instrumentos son los siguientes:

- Diario de la sesión: Se registrarán observaciones de los investigadores, entorno al tiempo previsto en la realización de las situaciones así como también las actuaciones y comportamientos de los estudiantes que reflejan en las diferentes fases de la situación didáctica (acción, formulación, validación).

- Fotografías: Se registrarán las acciones y retroacciones en la interacción entre el estudiante y el medio propuesto.

- Videograbaciones: En la fase de validación donde los estudiantes confrontarán sus conocimientos adquiridos, se realizarán las videograbaciones de estos actos para tener un registro completo de estas afirmaciones verbales y de sus realizaciones escritas.
- Producciones escritas de los estudiantes: Se proporcionará a los estudiantes en cada sesión de las situaciones, material donde puedan consignar por escrito, el trabajo realizado por ellos en las fases de acción y formulación.

7.4. Hipótesis de Trabajo

Con la implementación de una secuencia de situaciones didácticas basadas en las actividades matemáticas de los sistemas de representación, se podrá modelizar situaciones en contexto y visualizar los comportamientos de los parámetros y propiedades generales de la función cúbica. Las situaciones didácticas deben caracterizarse por:

- Estar contenidas en contextos variacionales, donde exista la necesidad de estudiar la variación entre magnitudes y parámetros, utilizando los sistemas de representación para su descripción.

- Organizar la enseñanza en torno a las actividades matemáticas de los sistemas de representación en los cuales se puedan alcanzar los objetivos de la visualización.

7.5. Unidades de Análisis

7.5.1. Unidad de Análisis para el estudio del contenido

En la dimensión de análisis Histórico - Epistemológico se puede apreciar el surgimiento de sistemas de representación del concepto de función, estas representaciones tenían como propósito describir y explicar fenómenos físicos que se presentaban alrededor de las culturas de cada época. Aunque cronológicamente los sistemas de representación del concepto de función surgieron en un orden en específico: Descripción Verbal – Tablas – Gráfica - Expresión algebraica, y en la enseñanza tradicional el tránsito frecuente entre representaciones se limita a seguir el siguiente orden: Expresión algebraica – Tablas – Gráfica, en las situaciones no se tendrán en cuenta los anteriores, porque con la secuencia se pretende innovar el tránsito de las traducciones entre representaciones. Las unidades de análisis de la organización del contenido son:

- Las magnitudes son propiedades de los objetos susceptibles de ser medidas. Conviene diferenciar entre magnitudes constantes y magnitudes variables.

- Tablas utilizadas para el registro de magnitudes físicas y la identificación de regularidades.

- La dependencia funcional entre dos magnitudes permite expresar los valores de la magnitud dependiente en términos de la magnitud independiente.

- La representación de la función cúbica a través de su expresión algebraica.
- La variación entre magnitudes dependientes se puede expresar por medio de gráficas cartesianas.

7.5.2. Unidad de Análisis para el estudio de la comprensión

Con ayuda de la dimensión del análisis Cognitivo realizado, se determinaron las unidades para el estudio de la comprensión de las traducciones de los sistemas de representación de la función cúbica, basados en las actividades matemáticas de los sistemas de representación que categorizó Kaput (1992), para la realización de transformaciones sintácticas en un mismo sistema de representación, la relación de elementos entre diferentes sistemas y la utilización de las anteriores para la deducción de un modelo funcional. Se propone las unidades de análisis que comprende los objetivos principales de la visualización para la interpretación de la información como lenguaje alternativo, resolución de problemas y reconocer el efecto de los parámetros y propiedades de la función cúbica en los sistemas de representación, también se establece un análisis de comprensión basados en el rol de parámetro como una cantidad que cambia según Basurto (2010).

- La interpretación de las magnitudes de alto, ancho, largo y volumen, en diversos sistemas de representación como descripción verbal, tablas, expresiones algebraicas y gráficas.

- Las transformaciones sintácticas de las expresiones algebraicas para la identificación de elementos que constituyen la dependencia de magnitudes variables.

- Relaciones de las magnitudes de las tablas con el sistema de representación gráfico para la interpretación y solución al problema de la caja de volumen máximo.

- La visualización de los efectos de los parámetros como una cantidad que cambia, en los sistemas de representación gráfico y algebraico.

- La interpretación de los parámetros en la deducción de la forma general de la función cúbica.

- Identificación y comprensión de obstáculos cognitivos que presentan en la realización de las situaciones didácticas.

7.5.3. Unidad de análisis para el estudio de la interacción didáctica.

Estas unidades muestran los aspectos principales en las etapas donde intervienen las acciones por parte de los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del sistema didáctico, resaltando las instancias principales, donde se puede apreciar las siguientes partes:

- La administración del trabajo realizado, con respecto a la organización e implementación de las secuencias didácticas.

- La administración del tratamiento que se dio a la función cúbica y las traducciones de los sistemas de representación.
- La elaboración por parte de los estudiantes del conocimiento en las sesiones de trabajo en el aula.

7.6. Diseño y Análisis *a priori* de las Situaciones Didácticas

7.6.1. Situación Didáctica No. 1

Deducción de la función cúbica realizando traducciones de los sistemas de representación en la resolución del problema de la caja de volumen máximo.

Enunciado de la Situación Didáctica No. 1

Construir una caja sin tapa con una pieza de cartulina de medidas de 4 cm de ancho (A) y 5 cm de largo (L)**.**

Variables *micro-didácticas*

- La variación de la altura (x) en los sistemas de representación del problema de la caja de volumen (y) máximo.

Propósito Matemático

- Proporcionar la comprensión de la función cúbica y propiedades adquiriendo los objetivos básicos y funcionales de la visualización en las actividades matemáticas en sus sistemas de representación.

Propósito Didáctico

- Identificar y comprender desde un enfoque dinámico la variabilidad de las magnitudes de la altura (x), ancho (a), largo (l) y volumen (y) en los sistemas de representación del problema de la caja de volumen máximo.

Saberes que moviliza la Situación Didáctica No. 1

- Reconocimiento de magnitudes en objetos o fenómenos que puedan ser medidos.

- Transformaciones sintácticas en el sistema de representación algebraico.

- Interpretación de relaciones de magnitudes, en el sistema de representación gráfico y tablas.

- Identificación de dependencia entre magnitudes.

- Identificación de la magnitud dependiente.

Momentos de la realización didáctica:

El tiempo establecido para la realización de la Situación Didáctica No. 1 es de dos horas. Aquí será donde el estudiante actuará sobre ella; primero lee el contenido de la situación siguiendo los pasos establecidos, a continuación revelará las reflexiones para encontrar las posibles soluciones y con otro compañero discutirá sobre éstas. No es posible acudir al docente para validar las respuestas ya que éste desarrollará la socialización del conocimiento de manera formal al finalizar la clase cuando el profesor institucionalice el saber que se puso en acto.

Según la TSD de Brousseau (2007), toda situación didáctica contempla una situación *a-didáctica*, en la que se desarrolla tres fases: de acción, de formulación y de validación. En la Situación Didáctica No. 1 el estudiante debe desarrollar éstas tres fases:

Fase de acción: en esta primera fase el estudiante, después de haber escuchado las instrucciones de trabajo del docente y haciendo uso de la construcción de la caja de volumen (y) máximo realizada en Cabri Géomètre II Plus propuesta como medio, deberá responder las siguientes preguntas:

1. ¿Si mueves el punto x (Alto) que pasa con las medidas del ancho (A) y largo (L) de la cartulina y con el ancho (a) y el largo (l) de la caja?

El estudiante en el medio, realizará la acción de mover el punto x (Alto), el medio producirá la retroacción de alterar las medidas de la construcción de la caja, entonces interpretará que a medida que la altura (x) aumenta, las medidas del ancho (a) y el largo (l) de la caja disminuyen, por tanto, observará la dependencia entre las magnitudes en la construcción propuesta.

2. Con ayuda de la construcción realizada en Cabri Géomètre II Plus, complete la tabla y responda las preguntas:

En esta actividad con ayuda de la construcción de Cabri Géomètre II Plus propuesta como medio, el estudiante podrá realizar el proceso de medida de una forma fácil y rápida y producirá la traducción de los sistemas de representación, descripción verbal a la tabla, identificando regularidades que existen entre las dimensiones de la caja, como dependencia, variabilidad, por lo que su comprensión da solución al obstáculo epistemológico propuesto por Sierpinska (1992):

OE(f)-2: (Una filosofía de las matemáticas): Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en matemáticas.

C(f)-2: Identificación de regularidades en las relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar los cambios.

ALTO $(x)cm$	ANCHO $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{cm}$	LARGO $(\boldsymbol{l})\boldsymbol{cm}$	VOLUMEN $(\boldsymbol{y})\boldsymbol{cm^3}$
0	4	5	0
0,316	3,368	4,368	4,647
0,5	3	4	6
0,658	2,684	3,684	6,506
0,711	2,579	3,579	6,558
0,763	2,474	3,474	6,558
0,816	2,368	3,368	6,508
1	2	3	6
1,263	1,474	2,474	4,605
2	0	1	0

Tabla No. 5. Tabla de las magnitudes del problema de la caja de volumen máximo.

a) Puede observar en la tabla que los valores que toma la medida de la altura (x) están entre $0\ cm$ y $2\ cm$, ¿Por qué no se pueden tomar valores diferentes a estos?

El estudiante tratará de verificar con la tabla, si la información expuesta es correcta e identificará que si la medida de la altura (x) tiene valores mayores a $0\ cm$ y menores a $2\ cm$ la caja tendrá un volumen (y), por lo tanto se la podría fabricar; si la medida de la altura (x) es igual a $0\ cm$ no habría altura, obteniendo las medidas de la cartulina. Ahora si la medida de la altura (x) es igual a $2\ cm$, la medida del ancho (a) sería igual a $0\ cm$ por lo que no existiría un volumen (y) luego no se puede construir la caja.

Con esto se pretende que el estudiante comprenda que el dominio del problema de volumen (y) máximo de la caja toma valores reales para la medida de la altura (x) en el intervalo abierto $(0,2)$.

b) Observando la tabla identifica entre qué medidas del volumen (y) puede construirse la caja.

El estudiante podrá observar en la tabla que los valores de la medida del volumen (y) para formar la caja toman valores mayores a $0\ cm^3$ y menores e iguales a $6{,}558\ cm^3$.

El estudiante al identificar estos valores de la medida del volumen (y), comprenderá que corresponden a los valores del rango del problema de volumen (y) máximo de la caja.

c) ¿Si la medida de la altura (x) aumenta que ocurre con la medida del volumen (y)?

El estudiante analizando la información de la tabla observará que si la medida de la altura (x) aumenta la medida del volumen (y) también lo hace, pero en determinada medida de la altura (x) la medida del volumen (y) empezará a descender, por lo cual identificará el valor máximo para la medida del volumen (y) con relación a la medida de la altura (x).

d) Si se desea saber con cuales medidas se puede construir la caja de mayor capacidad ¿entre qué medidas de la altura se encuentra el máximo volumen?

El estudiante identificará los valores correspondientes al ancho (a), el largo (l) y el volumen (y) de la caja, suministrados por el medio, estos serán interpretados en la tabla por el estudiante, quien identificará que el volumen máximo está comprendido entre los valores de la medida de la altura (x) el cual está en el intervalo abierto $(0.763, 0.816)$.

e) ¿Qué relaciones se observan entre el ancho (a) – altura (x) y el largo (l) – altura (x)?

El estudiante al completar la tabla anterior observará que la medida del ancho (a) y largo (l) de la caja disminuyen cuando la medida de la altura (x) aumenta y observando la construcción en Cabri Géomètre II Plus, visualizará que la medida de la altura (x) está presente dos veces en cada lado de la cartulina, por lo que comprenderá que para obtener el ancho (a) de la caja deberá quitar dos veces la medida de la altura (x) a la medida del ancho de la cartulina (A), así mismo, deducirá la relación entre el largo (l) y la altura (x).

Fase de formulación: Para esta fase se pedirá a los estudiantes que trabajen en grupos de dos y con el conocimiento obtenido en la fase de acción, respondan a las siguientes preguntas, intercambiando, conjeturando, deduciendo, argumentando y planteando posibles soluciones ayudándose también de la construcción suministrada en Cabri Géomètre II Plus.

Respondan las siguientes preguntas en grupos de dos personas ayudándose de la construcción suministrada por los docentes en Cabri Géomètre II Plus.

3. Con ayuda de la construcción y de la herramienta calculadora del AGD Cabri Géomètre II Plus, llena las siguientes tablas con diferentes valores de la medida de la altura (x).

Los estudiantes desplazarán la medida de la altura (x) en el medio y tomará valores aleatorios para completar las tablas, en un comienzo no entenderá el objetivo de esta actividad, sin embargo, las preguntas consecuentes, obligarán a los estudiantes a comunicarse entre ellos y compartir experiencias e información que obtuvieron de las anteriores preguntas que respondieron interactuando con el medio.

Ancho de la cartulina (A)	**altura (x)**	$\boldsymbol{A-(x+x)}$
4		
4		
4		

Largo de la cartulina $(\boldsymbol{L})$	**altura** $(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{L-(x+x)}$
5		
5		
5		

Tabla No. 6. Ancho y Largo de la caja en términos de la altura

a) ¿Qué pueden afirmar de los resultados obtenidos en la operación planteada en la primera y segunda tabla?

Los estudiantes activarán la herramienta "calculadora" del AGD Cabri Géomètre II Plus, para realizar la operación solicitada que representa la medida del ancho (a) y el largo (l) de la caja en términos de la altura (x), al obtener el resultado de esta operación, podrán observar que estos valores correspondían a los valores de la medida del ancho (a) y largo (l) de la caja de la tabla del punto 2, por lo que se espera la identificación de estas medidas.

b) Observando las anteriores tablas propongan una expresión algebraica que represente la medida del ancho (a) de la caja y otra para la medida del largo (l) de la caja.

Los estudiantes analizando la información obtenida en el anterior punto y con el medio intuirán que las operaciones planteadas en las anteriores tablas corresponden a expresiones algebraicas de la medida del ancho (a) y largo (l) de la caja, se espera que formulen las siguientes expresiones: $a = 4 - 2x$ y $l = 5 - 2x$.

c) Como se observa en la Construcción, el volumen (y) es igual al producto de las medidas del ancho (a), largo (l) y altura (x) de la caja $y = a \times l \times x$, según esto y con las expresiones algebraicas del ancho (a) y el largo (l) de la caja obtenidas anteriormente, deduzcan una expresión algebraica para el volumen.

Se supone que los estudiantes sepan encontrar el volumen de figuras sólidas, por lo tanto esta igualdad no será desconocida, el éxito de este punto está sujeto a la correcta formulación de las expresiones algebraicas de la medida del ancho (a) y el largo (l) de la caja en términos de la altura, por tanto se espera que el estudiante realice un remplazo de estas expresiones algebraicas, en la expresión del volumen y realizando operaciones con estas expresiones, encuentre una relación entre la medida de la altura (x) y el volumen de la caja (y).

d) Con la expresión algebraica obtenida del volumen (y) identifiquen el grado y sus variables que la determinan.

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes al realizar la traducción de las tablas a la expresión algebraica a través de un ajuste numérico, comprendan la dependencia de la medida del volumen (y) con la medida de la altura (x), además de reflexionar sobre el grado de la expresión algebraica obtenida.

e) Con ayuda de las herramientas de Cabri Géomètre II Plus y las variables identificadas en la anterior pregunta, construyan la gráfica del volumen (y) de la caja en el plano cartesiano.

Según Janvier (1987a) para realizar la traducciones entre la expresión algebraica y la gráfica basta con realizar un croquis de esta, sin embargo, con las herramientas que proporciona Cabri Géomètre II Plus y con ayuda de la información obtenida del medio, es posible obtener un dibujo detallado de la expresión algebraica del volumen de la caja, hay que aclarar que los estudiantes tuvieron una curso introductorio en el manejo del AGD Cabri Géomètre II Plus por lo cual se espera que con el análisis de los datos puedan obtener la gráfica de esta expresión, se prevé que los estudiantes utilizarán la herramienta “Mostrar los ejes”, luego realicen la transferencia de medidas de la altura al eje (x) y del volumen al eje (y) utilizando la herramienta “Transferencia de medidas”, ubicarán el punto de coordenadas comprendida por la altura y el volumen, utilizando la herramienta “Recta perpendicular” y “Punto(s) de intersección”, lo nombrará punto P, localizado este punto y al mover la medida de la altura, podrán visualizar el comportamiento que tomará la gráfica, y para obtener el dibujo de la relación entre la medida de la altura y el volumen, ellos utilizarán la herramienta "Lugar" aplicándola en el punto P, al moverse la medida de x.

f) En la gráfica obtenida identifiquen el dominio, rango, punto máximo, en que intervalos la gráfica es creciente, decreciente y los puntos de corte con los ejes coordenados si existen.

Con la gráfica de la expresión algebraica del volumen en términos de la altura, podrá ser más sencilla la identificación de sus propiedades.

Fase de Validación: En la validación de la Situación Didáctica No. 1, se les solicitará a los estudiantes, que expongan las respuestas de las preguntas orientadoras que resolvieron en forma individual o en grupo dependiendo de la parte de la situación en la que se trabajó, los estudiantes después de escuchar estas afirmaciones, deberán argumentar si están de acuerdo o no con las respuestas dadas.

En esta confrontación los estudiantes coincidirán en sus afirmaciones o discreparán originando una discusión constructiva en la cual los estudiantes defenderán su posición con pruebas y argumentos lógicos, con esto los estudiantes reflexionarán o corroborarán sus respuestas.

Fase de Institucionalización: El profesor al final de la sesión de trabajo de esta primera situación institucionalizará el saber matemático explicando:

- Función Cúbica: Función Polinómica de grado tres
- Forma General de la función cúbica: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
- Variables, Coeficientes y Constantes de la función cúbica.
- Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento.
- Extremos Locales (Máximo Local, Mínimo Local) del modelo funcional

- Puntos de corte en el plano cartesiano del modelo funcional

7.6.2. Situación Didáctica No. 2

Traducción de la Forma general de la función cúbica al sistema de representación gráfico a través de la variación de sus parámetros.

Enunciado de la Situación Didáctica No. 2

Con ayuda de la construcción dinámica en Cabri Géomètre II Plus propuesta por el docente, identifique y describa los comportamientos que puede tomar la función cúbica modificando los parámetros A, B, C y D en la forma general.

Variables *micro-didácticas*:

- Variación de los parámetros A, B, C y D.

Propósito Matemático:

Efectuar la traducción del sistema de representación algebraico al sistema de representación gráfico, visualizando los efectos de los parámetros de la forma general de la función cúbica en el comportamiento de su gráfica.

Propósito Didáctico:

- Observar en la construcción propuesta por el docente diseñada en Cabri Géomètre II plus el efecto que produce la variación de sus parámetros gracias al dinamismo que ofrece el medio.

Saberes que moviliza la Situación Didáctica No. 2:

- El reconocimiento de los elementos de un polinomio en su expresión algebraica.

- Distinción entre variables, parámetros y constantes de una función en la forma general de la expresión algebraica.

- Relación de elementos del sistema de representación algebraico con los elementos del sistema de representación gráfico.

Momentos de la realización didáctica:

El tiempo establecido para la realización de la Situación Didáctica No. 2 es de 4 horas. Aquí será donde el estudiante actuará sobre ella; primero lee el contenido de la situación siguiendo los pasos establecidos, a continuación revelará las reflexiones para encontrar las posibles soluciones y con otro compañero discutirá sobre éstas. No es posible acudir al docente para validar las respuestas ya que éste desarrollará la socialización del conocimiento de manera formal al finalizar la clase.

Fase de acción: En ésta primera parte de la situación los estudiantes tendrán que interactuar con la construcción “Representación algebraica y gráfica de la función cúbica” (Archivo 2) en Cabri Géomètre II Plus en grupos de dos personas, y dependiendo de las condiciones propuestas en la tabla deberán manipular el medio, para identificar y registrar las retroacciones producidas por este.

En la primera parte de la situación se presenta las siguientes instrucciones.

I. Con las indicaciones que se dan para los parámetros A, B, C y D y con la construcción que se le ha facilitado en Cabri Géomètre II Plus complete la tabla[12], tenga en cuenta que los coeficientes de la expresión algebraica de la función cúbica puede tomar diferentes valores dependiendo de las condiciones.

En esta parte de la situación se prevé que los estudiantes manipulen los parámetros en la construcción, diseñados en base a los roles de los parámetros de Drijvers (2001), como fijadores de posición y como cantidades que cambian, estableciendo valores fijos a ciertos parámetros y variando el parámetro indiciado.

En la tabla los estudiantes dibujarán las retroacciones producidas en el medio con su respectiva expresión algebraica, para analizar posteriormente el comportamiento que se visualizó en el medio.

Las figuras presentadas a continuación son tomadas del AGD Cabri Géomètre II Plus y son de la autoría de esta investigación.

Las acciones previstas en cada caso son:

1. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0, B = 0, C = 0$ y $D = 0$

Para completar el primer caso de la tabla, los estudiantes podrán observar que si el parámetro A aumenta cuando B, C y D son iguales a cero, la gráfica pasará por cero, tendrá dos ramas ubicadas en el primer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y), otra en el tercer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

[12] En el Anexo No. D, ver la Situación Didáctica No. 2.

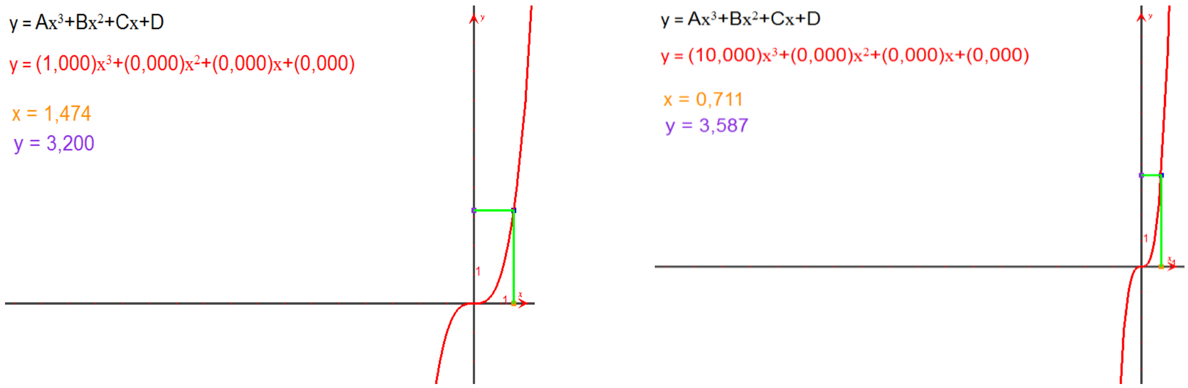


Figura No. 4. Comportamiento de la gráfica cuando (A) aumenta

2. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0, B = 0, C = 0$ y $D = 0$

Para completar el segundo caso de la tabla, los estudiantes podrán observar que si el parámetro A disminuye cuando B, C y D son iguales a cero, la gráfica pasará por cero, tendrá dos ramas, una ubicada en el segundo cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y la otra en el cuarto cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

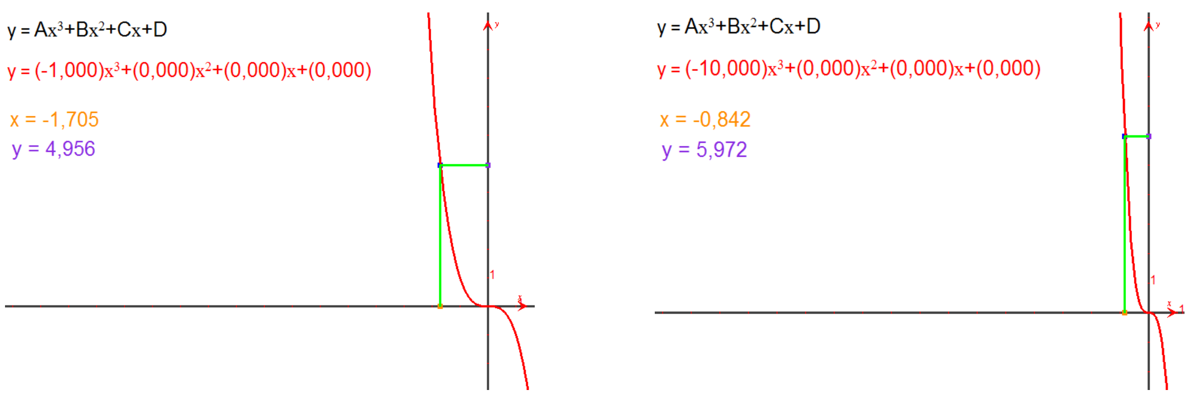


Figura No. 5. Comportamiento de la gráfica cuando (A) disminuye

3. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0, B > 0, C = 0$ y $D = 0$

Para completar el tercer caso de la tabla, donde $A > 0, B > 0, C = 0, D = 0$ pero con la condición de que A tenga un valor fijo y B aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto visualizarán que la gráfica pasa por el punto de origen del plano cartesiano y que tiene dos ramas. Cuando B empieza con valores cercanos a 0 y va en aumento, la rama que está en el tercer cuadrante asciende al segundo formando un máximo local y un mínimo local en el origen del plano cartesiano, el máximo local tiende con respecto a la abscisa (x) a $-\infty$ y la ordenada (y) a $+\infty$ a medida que B aumenta además existe un punto de corte con el eje negativo de las abscisas (x).

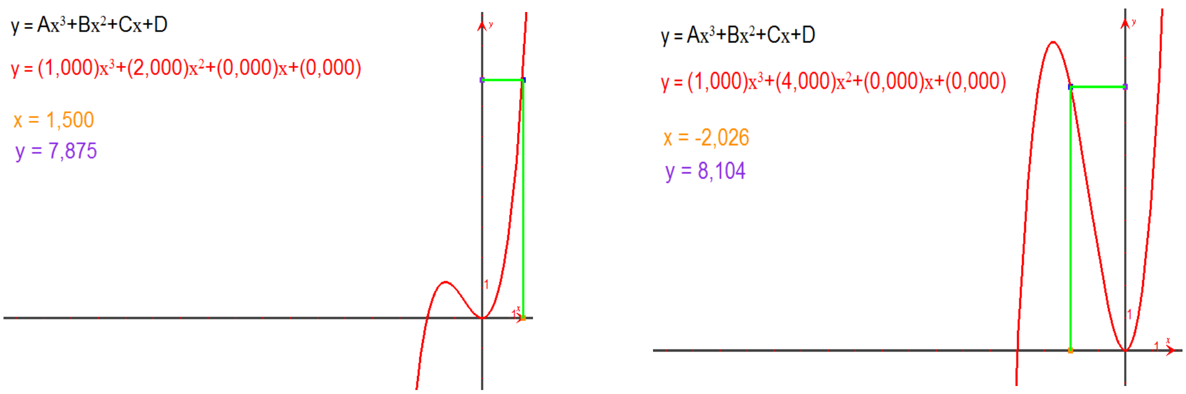


Figura No. 6. Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta

4. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B > 0,\ C = 0$ y $D = 0$

Para completar el cuarto caso de la tabla, donde $A < 0,\ B > 0,\ C = 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A tenga un valor fijo y B aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que la gráfica pasa por el punto de origen del plano cartesiano y que tiene dos ramas. Cuando B empieza con valores cercanos a 0 y va en aumento, la rama que está en el cuarto cuadrante asciende al primero formando un máximo local y un mínimo local en el origen del plano cartesiano, el máximo local tiende con respecto a la abscisa (x) y la ordenada (y) a $+\infty$ a medida que B aumenta además existe un punto de corte con el eje positivo de las abscisas (x).

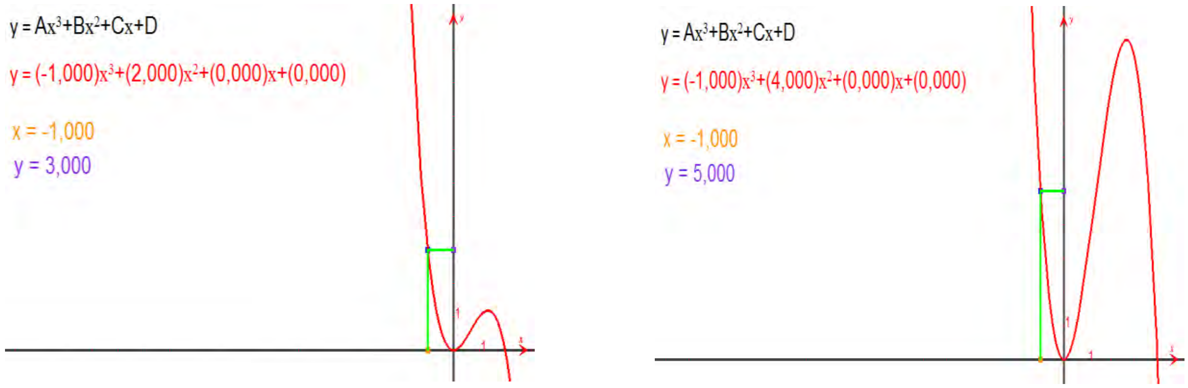


Figura No. 7. Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta

5. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B < 0,\ C = 0$ y $D = 0$

Para completar el tercer caso de la tabla, donde $A > 0,\ B < 0,\ C = 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A tenga un valor fijo y B disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que la gráfica pasa por el punto de origen del plano cartesiano y que tiene dos ramas. Cundo B empieza con valores cercanos a 0 y van descendiendo, la rama que está en el primer cuadrante desciende al cuarto formando un mínimo local y un máximo local en el origen del plano cartesiano, el mínimo local tiende con respecto a la abscisa (x) a $+\infty$ y la ordenada (y) a $-\infty$ a medida que B aumenta además existe un punto de corte con el eje positivo de las abscisas (x).

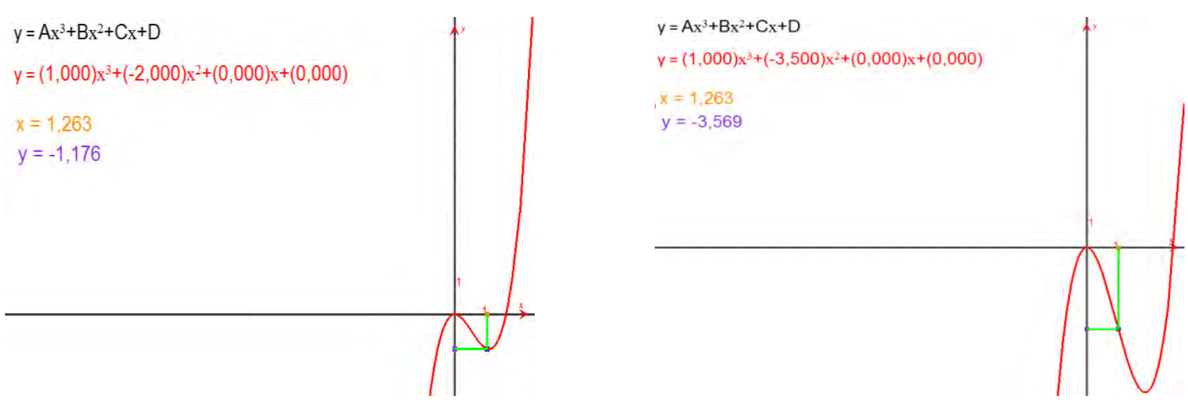


Figura No. 8. Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye

6. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B < 0,\ C = 0$ y $D = 0$

Para completar el sexto caso de la tabla, donde $A < 0,\ B < 0,\ C = 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A tenga un valor fijo y B disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que la gráfica pasa por el punto de origen del plano cartesiano y que tiene dos ramas. Cundo B empieza con valores cercanos a 0 y van descendiendo, la rama que está en el segundo cuadrante desciende al tercero formando un mínimo local y un máximo local en el origen del plano cartesiano, el mínimo local tiende con respecto a la abscisa (x) a $-\infty$ y la ordenada (y) a $-\infty$ a medida que B aumenta además existe un punto de corte con el eje negativo de las abscisas (x).

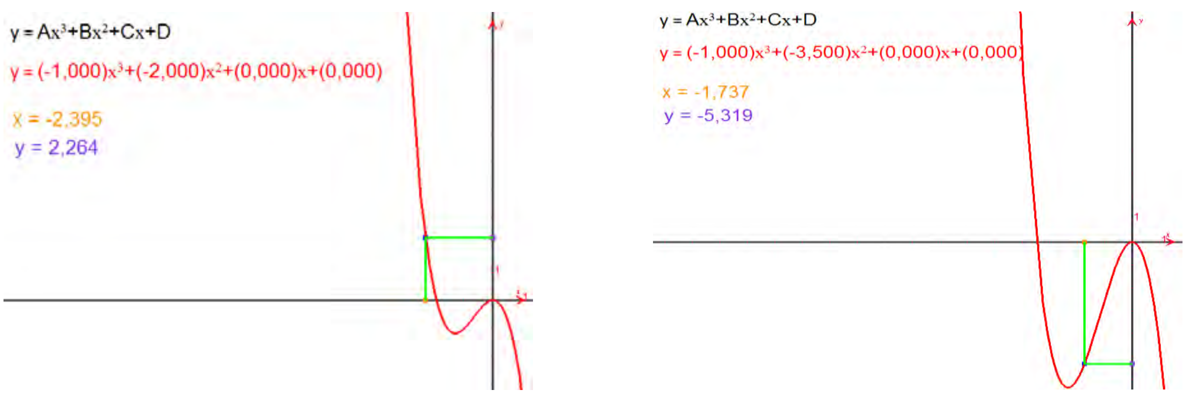


Figura No. 9. Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye

7. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ y $D = 0$

Para completar el séptimo caso de la tabla, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va aumentando, los extremos locales se desplazan hacia el tercer cuadrante y tienden a desaparecer, formando una gráfica que tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y la otra en el tercer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

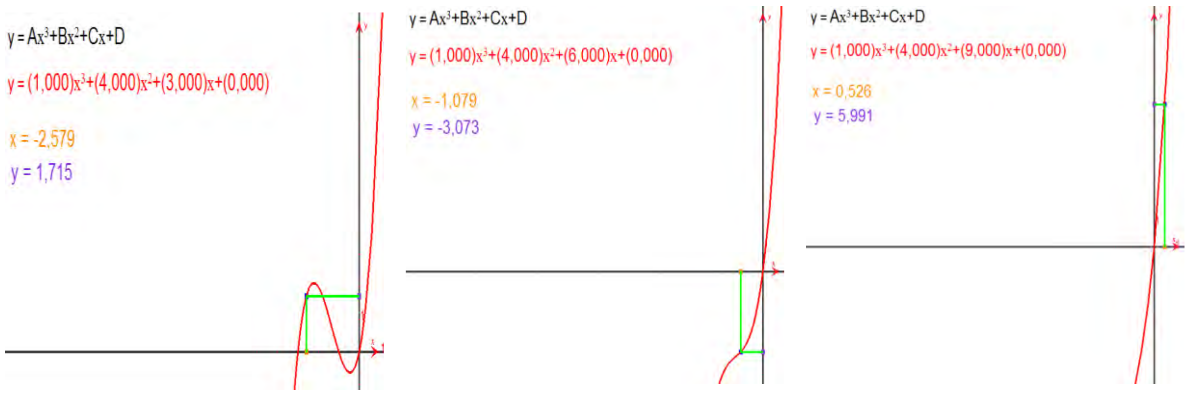


Figura No. 10. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta

8. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B < 0,\ C > 0$ y D = 0

Para completar el octavo caso de la tabla, donde $A > 0,\ B < 0,\ C > 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va aumentando, los extremos locales se desplazan hacia el primer cuadrante y tienden a desaparecer, formando una gráfica que tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y la otra en el tercer cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

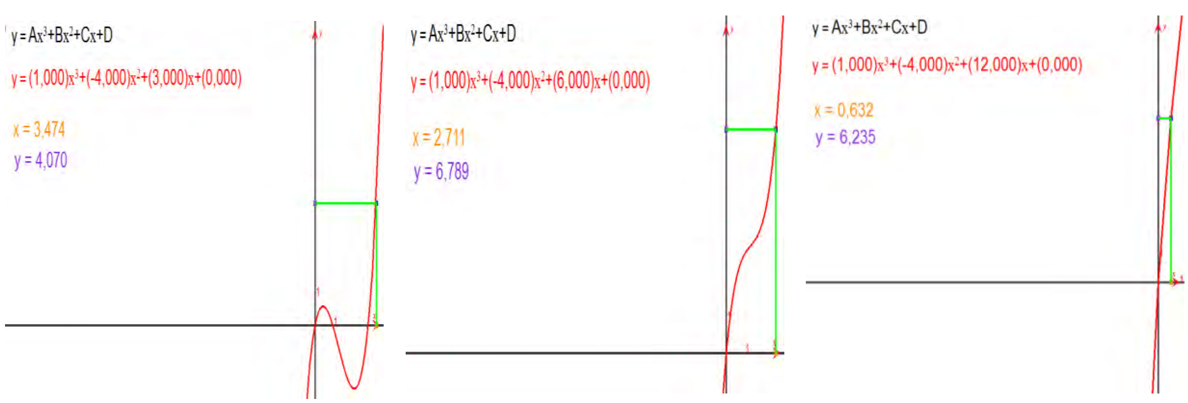


Figura No. 11. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta

9. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$ y $D = 0$

Para completar el noveno caso de la tabla, donde $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$, $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va disminuyendo, los extremos locales se desplazan hacia el cuarto cuadrante y tienden a desaparecer, formando una gráfica que tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el segundo cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y la otra en el cuarto cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

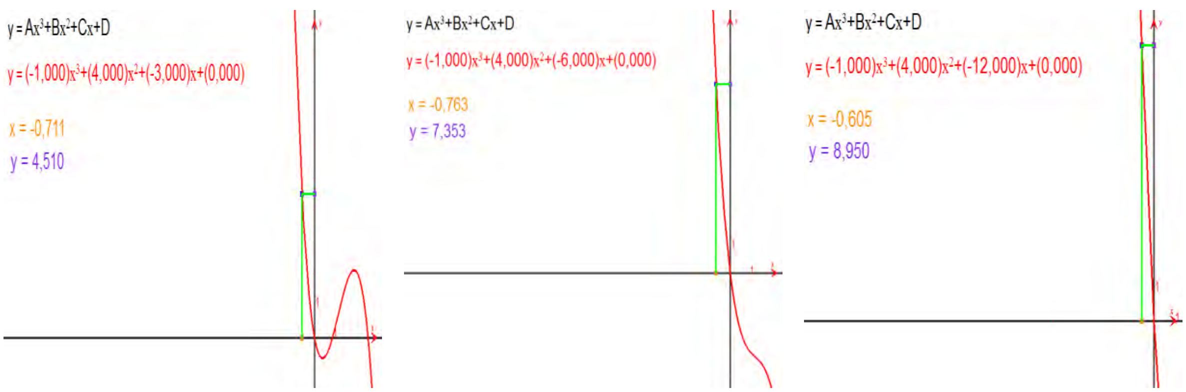


Figura No. 12. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye

10. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo caso de la tabla, donde $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$, $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va disminuyendo, los extremos locales se desplazan hacia el segundo cuadrante hasta desaparecer, formando una gráfica que tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el segundo cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y la otra en el cuarto cuadrante del plano cartesiano que se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

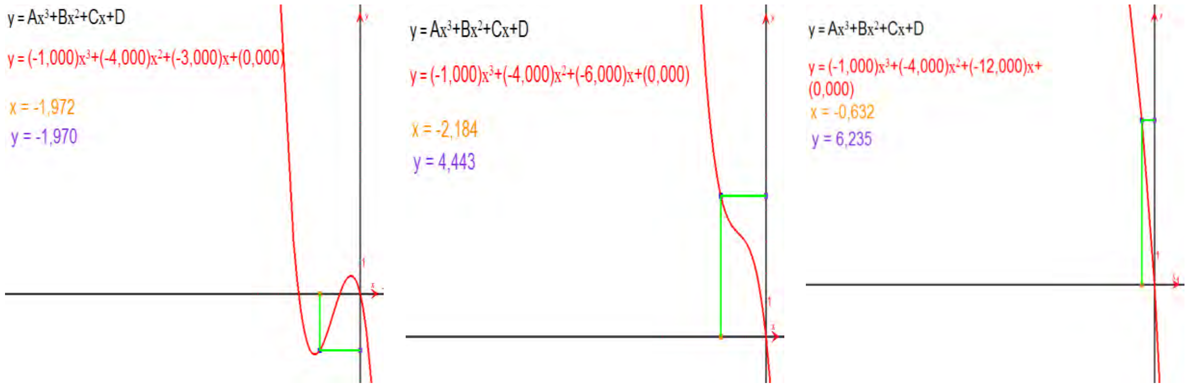


Figura No. 13. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye

11. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo primer caso de la tabla, donde $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$, $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va disminuyendo, los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el segundo cuadrante, el mínimo local en el cuarto y la distancia del máximo local al origen será mayor con relación a la distancia del mínimo local al origen. También se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen del plano cartesiano.

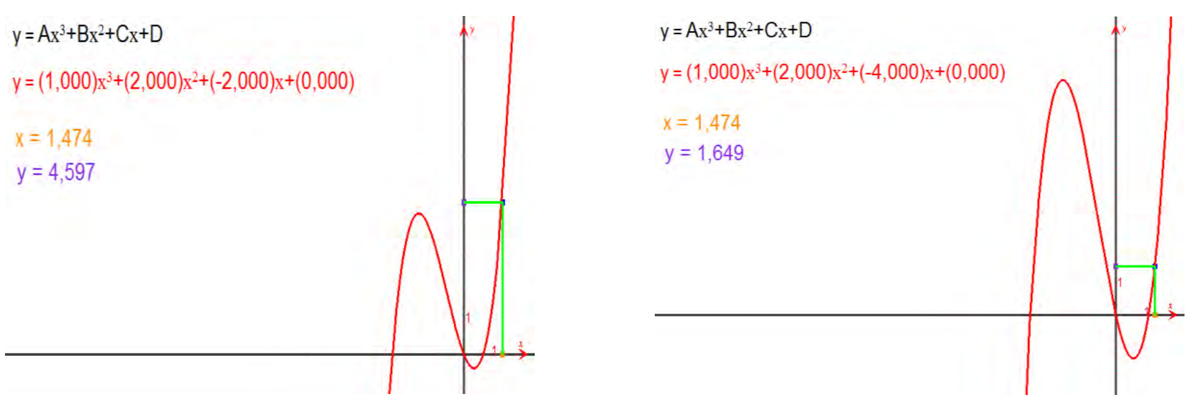


Figura No. 14. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye

12. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B < 0,\ C < 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo segundo caso de la tabla, donde $A > 0,\ B < 0,\ C < 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va disminuyendo, los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el segundo cuadrante, el mínimo local en el cuarto y la distancia del máximo local al origen será menor con relación a la distancia del mínimo local al origen. También se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen del plano cartesiano.

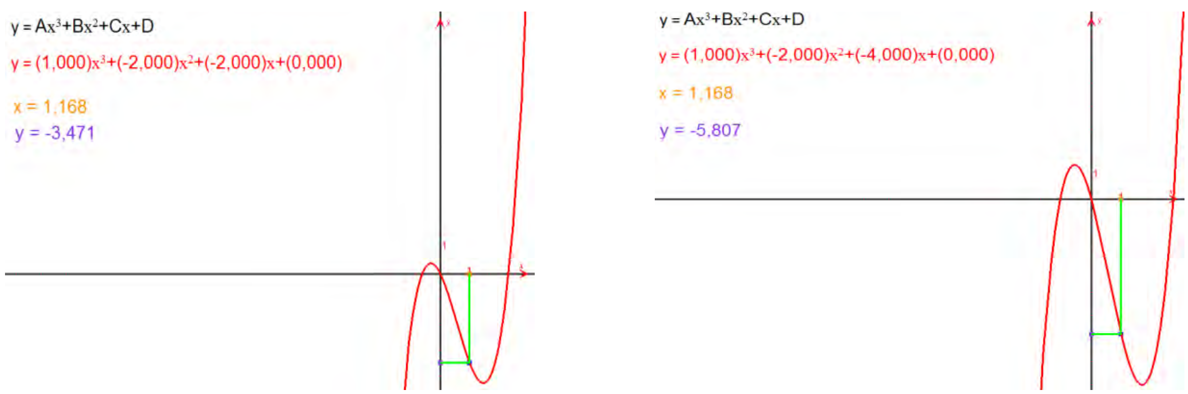


Figura No. 15. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye

13. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B > 0,\ C > 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo tercer caso de la tabla, donde $A < 0,\ B > 0,\ C > 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C empieza con valores cercanos a 0 y va aumentando, los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el primer cuadrante, el mínimo local en el tercero y la distancia del máximo local al origen será mayor con relación a la distancia del mínimo local al origen. También se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen del plano cartesiano.

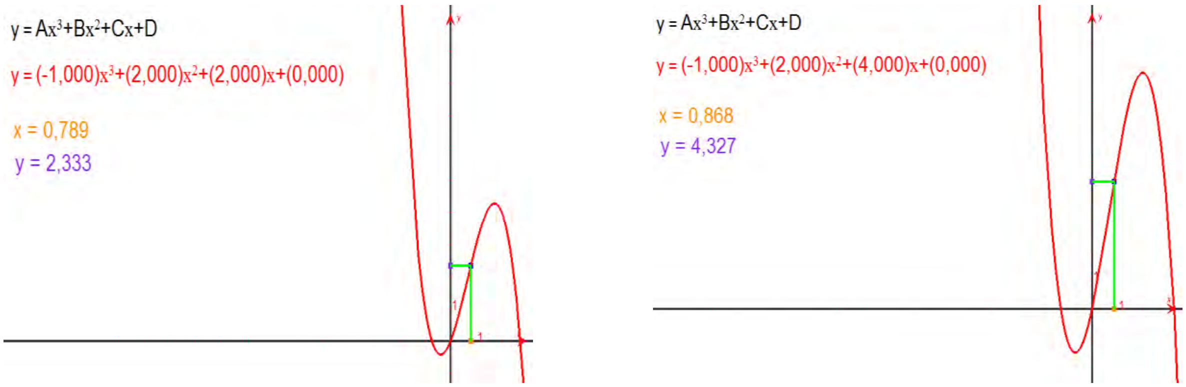


Figura No. 16. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta

14. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B < 0,\ C > 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo cuarto caso de la tabla, donde $A < 0$, $B < 0$, $C > 0$, $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C toma valores cercanos a 0 y aumenta, los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el primer cuadrante, el mínimo local en el tercero y la distancia del máximo local al origen será menor con relación a la distancia del mínimo local al origen. También se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen del plano cartesiano.

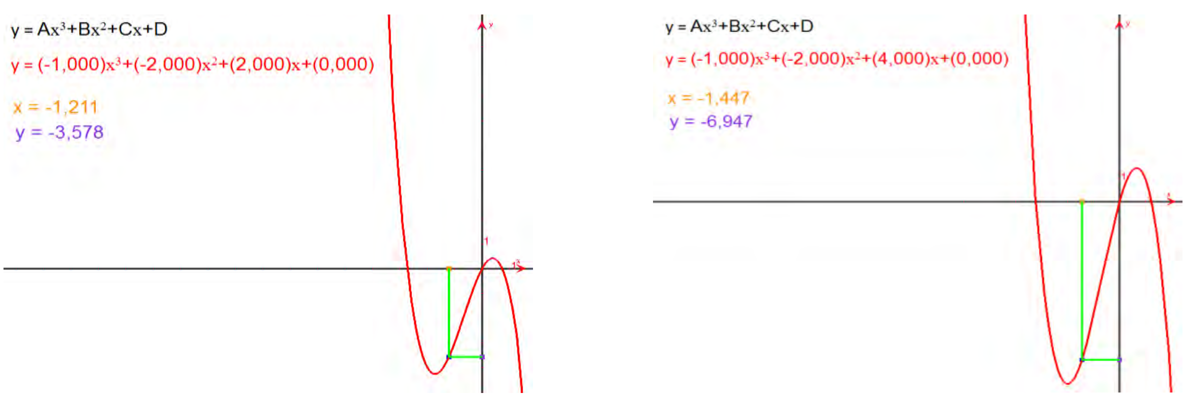


Figura No. 17. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta

15. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B = 0,\ C > 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo quinto caso de la tabla, donde $A > 0,\ B = 0,\ C > 0,$ $D = 0$ pero con la condición de que A sea un valor fijo y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que la gráfica, tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano la cual se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y otra en el tercer cuadrante del plano cartesiano la cual se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

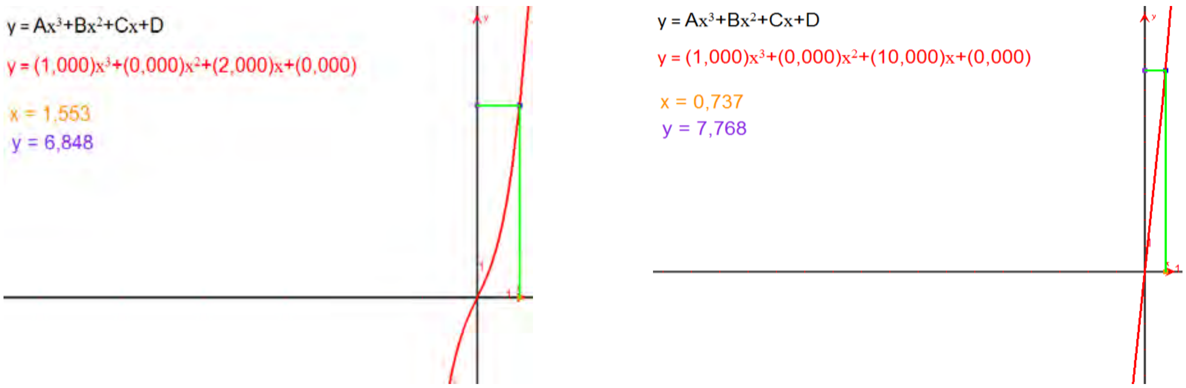


Figura No. 18. Comportamiento de la gráfica cuando (A) fijo y (C) aumenta

16. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B = 0,\ C < 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo sexto caso de la tabla, donde $A < 0,\ B = 0,\ C < 0,\ D = 0$ pero con la condición de que A sea un valor fijo y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que la gráfica, tendrá dos ramas, una de ellas ubicada en el segundo cuadrante del plano cartesiano la cual se acerca al eje positivo de las ordenadas (y) y otra en el cuarto cuadrante del plano cartesiano la cual se acerca al eje negativo de las ordenadas (y).

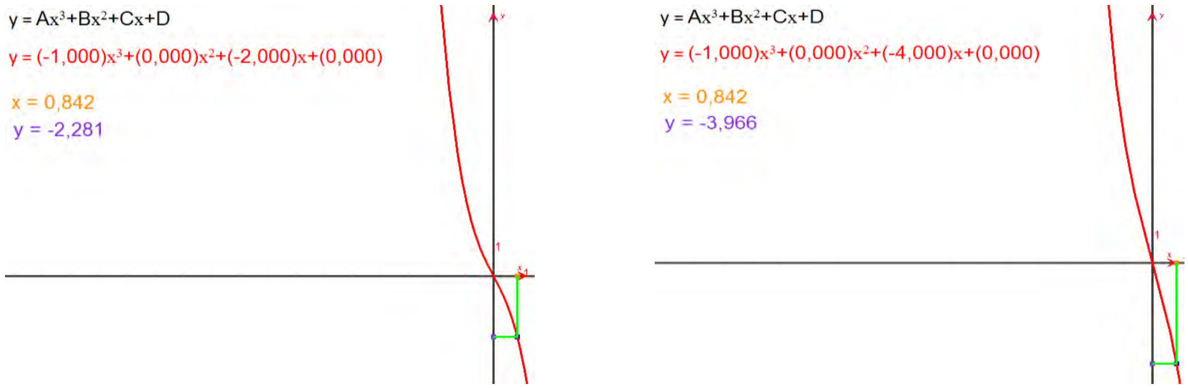


Figura No. 19. Comportamiento de la gráfica cuando (A) fijo y (C) disminuye

17. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B = 0,\ C < 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo séptimo caso de la tabla, donde $A > 0,\ B = 0,\ C < 0,$ $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C toma valores cercanos a 0 y disminuye, los extremos locales estarán ubicados en cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el segundo cuadrante, el mínimo local en el cuarto y la distancia de estos extremos locales con respecto al origen será la misma, también se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen.

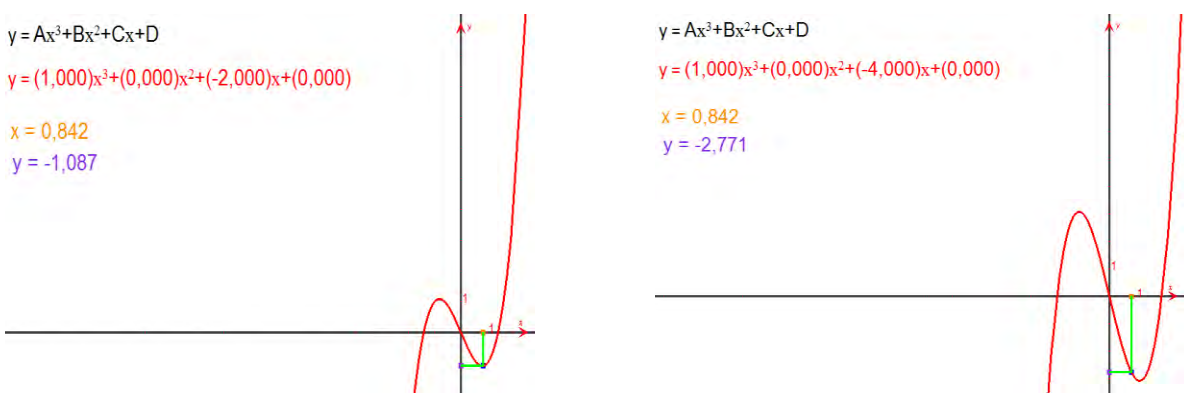


Figura No. 20. Comportamiento de la gráfica cuando (A) fijo y (C) disminuye

18. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A < 0,\ B = 0,\ C > 0$ y $D = 0$

Para completar el décimo octavo caso de la tabla, donde $A < 0,\ B = 0,\ C > 0,$ $D = 0$ pero con la condición de que A, B tengan valores fijos y C aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando C toma valores cercanos a 0 y aumenta, los extremos locales estarán ubicados en cuadrantes opuestos por el origen del plano cartesiano, el máximo local se ubicará en el primer cuadrante, el mínimo local en el tercero y la distancia de estos extremos locales con respecto al origen será la misma, también se formarán dos puntos de corte con en el eje negativo y positivo de las abscisas (x) y otro en el origen.

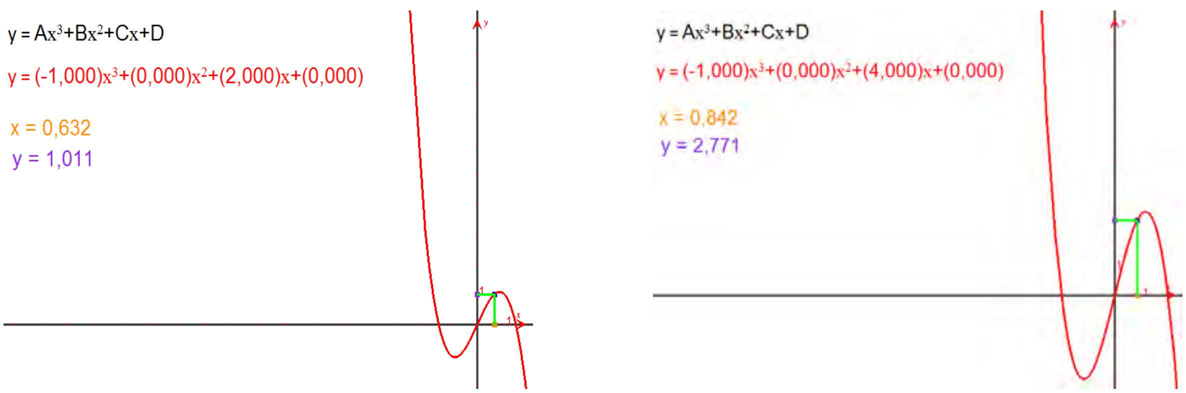


Figura No. 21. Comportamiento de la gráfica cuando (A) fijo y (C) aumenta

19. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ y $D > 0$

Para completar el décimo noveno caso de la tabla, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0,$ $D > 0$ pero con la condición de que A, B, C tengan valores fijos y D aumente, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando D aumenta el punto de corte con el eje de las ordenadas (y) estará determinado por el valor de este parámetro.

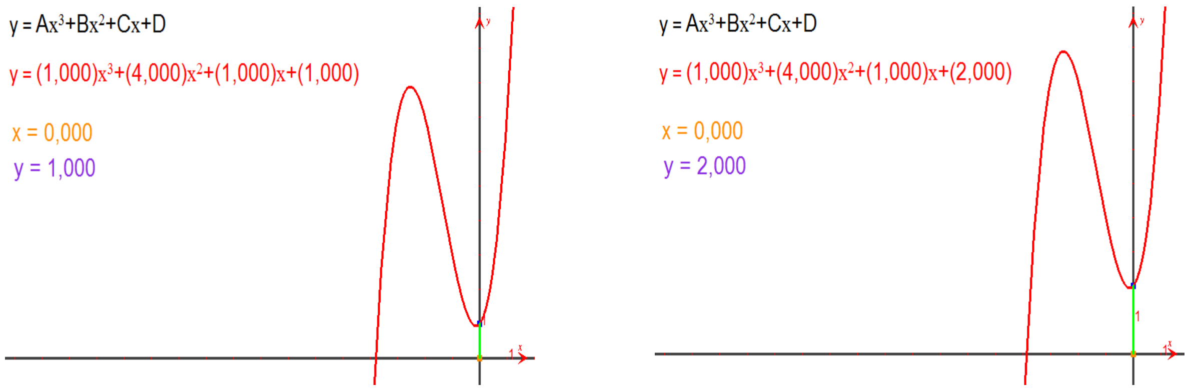


Figura No. 22. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) aumenta

20. $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ y $D < 0$

Para completar el vigésimo caso de la tabla, donde $A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ D < 0$ pero con la condición de que A, B, C tengan valores fijos y D disminuya, los estudiantes utilizando el medio propuesto observarán que cuando el valor de D disminuye el punto de corte con el eje de las ordenadas (y) estará determinado por el valor de este parámetro.

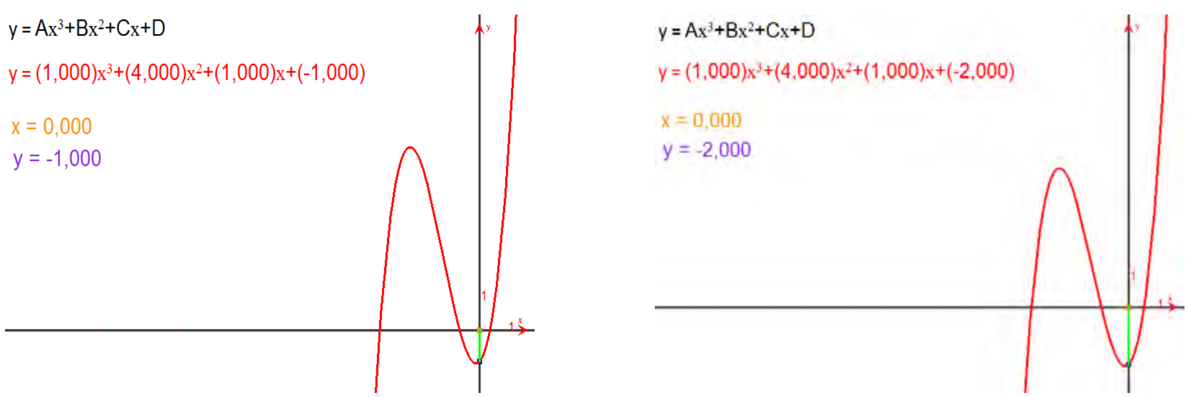


Figura No. 23. Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) Disminuye

Fase de Formulación: En esta parte de la situación a través de preguntas orientadoras, los estudiantes basados en observaciones realizadas de los comportamientos de la gráfica de la función cúbica en el medio y registradas en la tabla, deberán relacionar los diferentes casos planteados en la fase de acción para deducir el efecto de cada uno de los parámetros y comprender las propiedades de la función cúbica en general.

En la segunda parte de la situación se presenta las siguientes instrucciones.

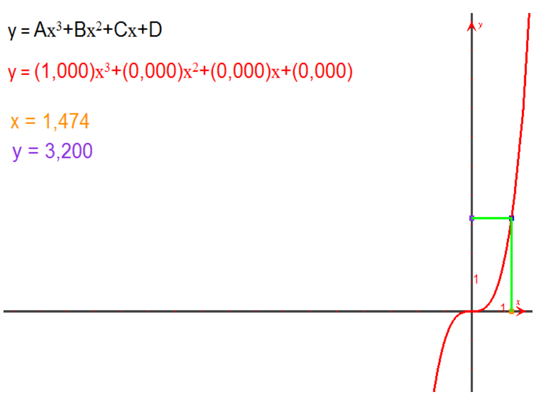
II. En la anterior actividad observaron los diferentes comportamientos que puede tomar la función cúbica cuando cambian los coeficientes o parámetros de la expresión algebraica, con base a esto, relacione los diferentes casos que se plantearon y responda las siguientes preguntas:

Las acciones previstas en cada caso son:

a) ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro A en la gráfica de una función cúbica?

Los estudiantes relacionarán los casos 1 y 2 de la anterior actividad y podrán observar y deducir el efecto del parámetro A. Afirmarán que si $A > 0$ el comportamiento de la gráfica es creciente y cuando $A < 0$ el comportamiento de la gráfica es decreciente.

$A > 0$, la gráfica es creciente



$A < 0$, la gráfica es decreciente

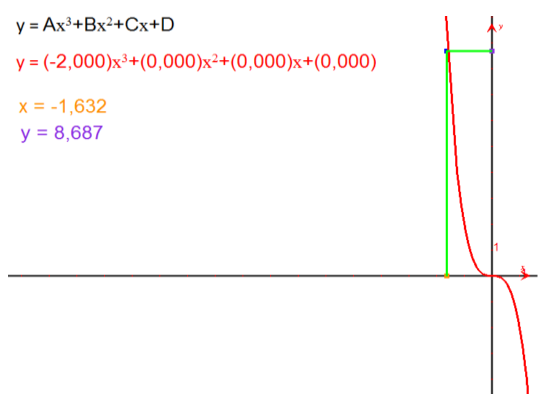


Figura No. 24. Relación del comportamiento de la gráfica de la función cúbica de los Casos 1 y 2

b) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2$ donde $A > 0$ o $A < 0$, ¿Qué pueden concluir acerca del efecto del parámetro B cuando:

- $B > 0$ aumentando?
- $B < 0$ disminuyendo?

Los estudiantes relacionando los casos 3 y 4 del punto I, podrían concluir que si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2$ donde $A > 0\ o\ A < 0$ y el parámetro $B > 0$ y su valor aumenta, se formará un mínimo local que siempre estará ubicado en el origen del plano cartesiano y un máximo local ubicado en el primer o segundo cuadrante el cual se ira distanciando del origen a medida que el valor del parámetro B aumenta.

$A > 0\ \ B > 0$ $\qquad\qquad$ $A < 0\ \ B > 0$

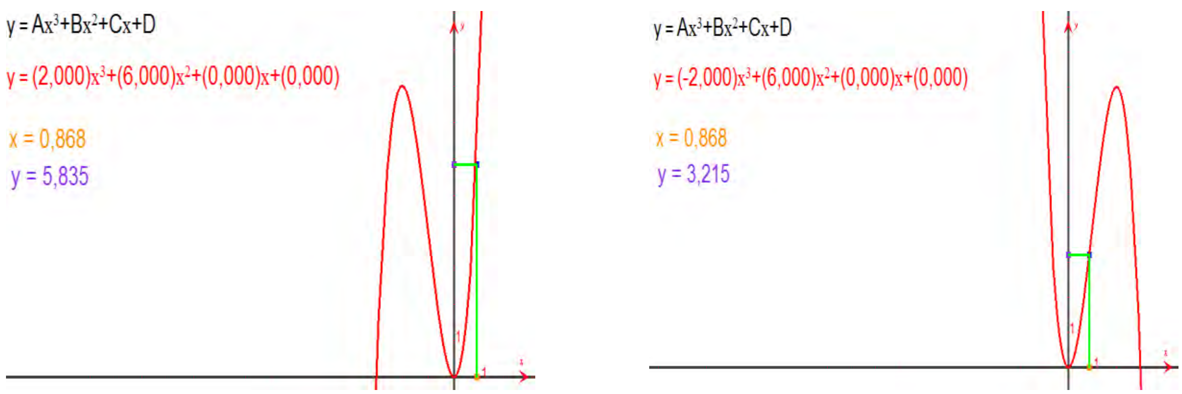
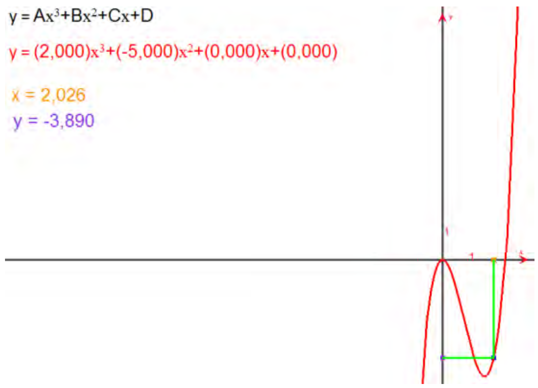


Figura No. 25. Relación del comportamiento de la gráfica de la función cúbica de los Casos 3 y 4

Con respecto a la segunda pregunta, los estudiantes relacionando los casos 5 y 6 del punto I, podrían concluir que si $A > 0$ o $A < 0$ y el parámetro $B < 0$ y su valor disminuye, se formará un máximo local que siempre estará ubicado en el origen del plano cartesiano y un mínimo local ubicado en el tercer o cuarto cuadrante el cual se ira distanciando del origen a medida que el valor del parámetro B disminuya.

$A > 0 \;\; B < 0$



$A < 0 \;\; B < 0$

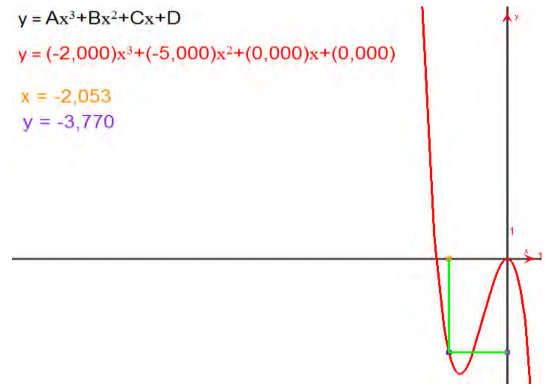


Figura No. 26. Relación del comportamiento de la gráfica de la función cúbica de los Casos 5 y 6

Los estudiantes respondiendo la pregunta b) podrían deducir en general que el efecto del parámetro B en el comportamiento de la gráfica de la función cúbica será la de formar dos extremos locales, los cuales estarán determinados por el valor de B. Si B es positivo se tendrá un máximo local en el primer o segundo cuadrante dependiendo del valor del parámetro A y un mínimo local en el origen y si B es negativo se tendrá un mínimo local en el tercero o cuarto cuadrante dependiendo del valor del parámetro A y un máximo local en el origen.

c) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y los parámetros A y C tienen signos positivos, ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando aumenta?

Los estudiantes podrían concluir los extremos locales se desplazarán a un solo cuadrante y podrían argumentar lo siguiente:

Cuando $A > 0,\ B > 0,\ C > 0$:

El máximo local estará ubicado en el segundo cuadrante y el mínimo local en el tercero, a medida que el valor del parámetro C aumenta, los dos extremos locales se desplazarán al tercer cuadrante y tienden a desaparecer. (Figura No. 10)

Cuando $A > 0,\ B < 0,\ C > 0$:

El máximo local estará ubicado en el primer cuadrante y el mínimo local en el cuarto, a medida que el parámetro C aumenta, los dos extremos locales se desplazarán al primer cuadrante y tienden a desaparecer. (Figura No. 11)

d) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y los parámetros A y C tienen signos negativos, ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando disminuye?

Los estudiantes podrían concluir que si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y A, C negativos los extremos locales se desplazarán a un solo cuadrante y podrían argumentar lo siguiente:

Cuando $A < 0,\ B > 0,\ C < 0$:

El máximo local estará ubicado en el primer cuadrante y el mínimo local en el cuarto, a medida que el parámetro C disminuye, los dos extremos locales se desplazarán al cuarto cuadrante y tienden a desaparecer. (Figura No. 10)

Cuando $A < 0,\ B < 0,\ C < 0$:

El máximo local estará ubicado en el segundo cuadrante y el mínimo local en el tercero, a medida que el parámetro C disminuye, los dos extremos locales se desplazarán al segundo cuadrante y tienden a desaparecer. (Figura No. 11)

En general el estudiante respondiendo los puntos c) y d) podría deducir que cuando A y C tienen el mismo signo los extremos locales se desplazarán a un solo cuadrante y a medida que el parámetro C aumente o disminuya estos tienden a desaparecer.

e) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y el parámetro A es positivo y el parámetro C es negativo ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando disminuye?

Los estudiantes concluirán que los extremos locales se desplazarán al segundo y cuarto cuadrante y dependiendo del valor de B argumentarán:

Si el parámetro B tiene valor positivo, la distancia del máximo local al origen será mayor con relación a la distancia del mínimo local al origen (Figura No. 14).

Pero si el parámetro B tiene un valor negativo, la distancia del máximo local al origen será menor con relación a la distancia del mínimo local al origen (Figura No. 15).

f) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0\ o\ B < 0$ y el parámetro A es negativo y el parámetro C es positivo ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando aumenta?

Los estudiantes llegarán a las mismas conclusiones del punto anterior con relación a los extremos locales, con la diferencia de que los extremos locales se ubicarán en el primer y tercer cuadrante. (Figuras No. 16 y No. 17).

En general, el estudiante respondiendo los puntos e) y f) podría deducir que cuando A y C tienen signos opuestos los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen y dependiendo del valor del parámetro B, se determina cuál de los extremos locales esta mas distanciado del origen del plano cartesiano.

g) ¿Qué puede concluir acerca del efecto del parámetro D en la gráfica de una función cúbica?

El observará que en cualquier caso el efecto del parámetro D en general, será desplazar el punto de corte con el eje de las ordenadas (y) de acuerdo al valor que tome este parámetro (Figuras No. 22 y No. 23).

Finalizada este punto se espera que los estudiantes identifiquen los valores de los parámetros en la forma general de la función cúbica, visualicen sus efectos y propongan un croquis de la representación gráfica.

En la Situación Didáctica No. 1 los estudiantes identificarán las propiedades de la función cúbica a través del modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo. El estudiante respondiendo las preguntas orientadoras del siguiente punto podrá hacer una deducción de estas propiedades teniendo en cuenta lo asimilado anteriormente.

III. Responda las siguientes preguntas observando los comportamientos que tomaron las gráficas de la función cúbica en el punto I.

a) ¿Observando las gráficas de los casos anteriores, ¿Cuál es el Dominio y el Rango de la función cúbica en general?

En esta pregunta el estudiante a través del dinamismo que ofrece la construcción propuesta como medio en Cabri Géomètre II plus y con los diferentes casos identificados en el punto I, los estudiantes concluirán que el dominio de la función cúbica serán todos los números reales, porque la gráfica estará definida para todos los valores de la abscisa (x), igualmente su rango está definido para estos valores.

b) ¿Cuántos puntos de corte como mínimo y como máximo puede tener la función cúbica con respecto al eje de las abscisas (x)?

Los estudiantes con ayuda del medio tendrán que completar y responder a las preguntas de los puntos I y II, gracias a esto, y dado que ellos poseen un conocimiento con el cual podrían llegar a la conclusión de que una función cúbica como máximo puede tener tres puntos de corte y como mínimo uno.

c) ¿Cuántos puntos de corte puede tener la función cúbica con respecto al eje de las ordenadas (y)?

Observando el comportamiento de la gráfica que puede tomar en los diferentes casos, cuando varían los parámetros A, B, C y D los estudiantes podrán concluir que como máximo solo puede tener un punto de corte con eje de las ordenadas (y) y está condicionado por el valor que tome el parámetro D.

d) ¿Cuántos puntos máximos y mínimos puede tener la función cúbica?

Debido a que en los puntos a), b), c) los estudiantes al observar los diferentes comportamientos de las gráficas que se obtuvieron gracias al dinamismo de la construcción propuesta en Cabri Géomètre II Plus, podrían concluir que la función cúbica puede tener un máximo y un mínimo, pero no dos máximos ni dos mínimos, pero si se puede presentar el caso en que no tenga ni un máximo ni un mínimo.

Fase de Validación: Se pedirá a los estudiantes que expongan sus afirmaciones y que realicen sus argumentaciones, luego se confrontarán estas respuestas y el docente provocará una discusión para que los estudiantes defiendan su posición, con esto se llegarán a diferentes reflexiones provocando la validación del conocimiento.

Fase de Institucionalización: El profesor al final de la sesión de trabajo de la segunda situación institucionalizará el saber matemático explicado:

- Efectos de los parámetros A, B, C, D de la forma general de la función cúbica $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
- Domino de la función cúbica
- Rango de la función cúbica
- Puntos de corte en el plano cartesiano.
- Extremos Locales (Máximo Local, Mínimo Local)

7.6.3. Situación Didáctica No. 3

La traducción del sistema gráfico al sistema de representación algebraico a partir de la visualización de los efectos de los parámetros de la función cúbica.

Enunciado de la Situación Didáctica No. 3

Observando los comportamientos que toman las diferentes gráficas de la función cúbica e identificando los parámetros que afectan en este comportamiento, plantee una posible forma general de su expresión algebraica.

Variables *micro-didácticas*

- Identificación del efecto de los parámetros A, B, C y D en el sistema de representación gráfico.

Propósito Matemático:

- Realizar la traducción del sistema de representación gráfico al sistema de representación algebraico de la función cúbica, sin transitar en otro sistema de representación.

Propósito Didáctico:

- Comprender la deducción de la forma general de la función cúbica a través de la validación de las representaciones externas realizadas en lápiz y papel con las representaciones externas dinámicas realizadas en la construcción de Cabri Géomètre II Plus.

Saberes que moviliza la Situación Didáctica No. 3

- Identificación de los elementos que conforman un polinomio de grado tres en el sistema de representación gráfico y algebraico.

- Identificación de los comportamientos que toman los parámetros A, B, C y D en la gráfica de la función cúbica.

- Relación de elementos del sistema de representación gráfico con los elementos del sistema de representación algebraico.

Momentos de la realización didáctica

El tiempo establecido para la realización de la Situación Didáctica No. 3 es de dos horas. De igual manera como en las anteriores situaciones, este será el espacio donde el estudiante actuará sobre la situación, de acuerdo a las instrucciones establecidas el estudiante leerá detenidamente las acciones a realizar, a continuación interpretará la situación y reflexionará sobre cómo encontrar las posibles soluciones para ésta, además discutirá con el compañero y escogerán las mejores estrategias para llegar a las respuestas. La validación será por medio de la discusión de los grupos y la intervención del docente solo será al término de la situación a través de la institucionalización.

Así mismo, el tratamiento de la situación está en el marco de la TSD de Brousseau (2007), donde toda situación didáctica contempla una situación *a-didáctica*, en la que se desarrollan tres fases: acción, formulación, validación y una situación didáctica de la institucionalización, que la realizará el docente – investigador.

Fase de acción: En la Situación Didáctica No. 3, la fase de acción será la misma de la Situación Didáctica No. 2, porque será necesario la observación de los efectos de los parámetros en los casos propuestos limitados a las condiciones de los roles de los parámetros “fijador de posición” y “cantidad que cambia”. Esto ayudará a visualizar e identificar en las gráficas propuestas en la fase de formulación los valores numéricos de los parámetros de la expresión algebraica de la función cúbica.

Fase de formulación: La fase de formulación de la Situación Didáctica No. 3 consta de dos partes, en la primera los estudiantes tendrán que identificar e interpretar los parámetros en las gráficas de la Tabla del Punto I para poder proponer un valor numérico para cada parámetro y así obtener una expresión algebraica aproximada de la gráfica. En la segunda parte de la situación los estudiantes con ayuda de la construcción “Representación Gráfica y Algebraica de la Función Cúbica” tendrán que verificar si las expresiones algebraicas obtenidas en la Tabla del punto I se aproximan o no a las gráficas de la expresiones algebraicas propuestas y se pedirá que confronten estos resultados argumentando por escrito las interpretaciones correctas e incorrectas que realizaron de los efectos de los parámetros identificados en las gráficas.

Para la primera parte los estudiantes leerán detenidamente los enunciados y las instrucciones para esta situación, y se les proporcionará una tabla donde se muestran las gráficas de diferentes comportamientos de la función cúbica de acuerdo a los valores que toman los parámetros. A partir de estas gráficas se les solicita que planteen una posible expresión algebraica. En la tabla encontrarán ocho gráficas que representan diversos comportamientos de la función cúbica, en seguida encontrarán un espacio donde escribirán los valores de los parámetros que ellos supondrán que son los correctos y a continuación escribirán en la tabla la forma de la expresión algebraica con los valores de los parámetros escogidos.

El propósito general de esta situación será realizar la traducción de la función cúbica del sistema de representación gráfico al algebraico. De acuerdo, con lo anterior y en base a la Situación Didáctica No. 2, los parámetros A, B, C y D realizan diversos efectos sobre la gráfica de la función cúbica. En apariencia se ha dispuesto de ocho gráficas arbitrariamente, sin embargo, entre las gráficas existen relaciones que se pueden identificar de acuerdo a los valores que tomen sus parámetros.

Para llegar al éxito de la situación el estudiante debe tener en claro el primero de los objetivos que se presentan en la visualización como hace alusión Fernández y Garzón (2007), cuando se refiere a los objetivos *básicos* de la misma que ayudan a interpretar y aprender la información que en este caso se representa de manera explícita e implícita en las gráficas de las funciones, por otro lado, el estudiante debe tener la capacidad de identificar los elementos que constituyen la gráfica y la forma de la expresión algebraica, para poder realizar transformaciones sintácticas y transformaciones entre sistemas de representación (Gómez & Carulla, 2001). Con base, en lo mencionado a continuación se explicará en cada uno de las gráficas presentadas los efectos que producen los parámetros y las relaciones que se encuentran entre ellos.

Por ejemplo la Gráfica No. 1, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, el parámetro que interviene es A, los demás parámetros son iguales a cero. Los efectos que produce este parámetro sobre la gráfica son dos: si A toma valores mayores que cero la gráfica es creciente. Entre mayor sea el valor que tome este parámetro la gráfica se va acercando hacia el eje de la ordenadas (y). Ahora, si A toma valores menores que cero la gráfica es decreciente. Si A disminuye la gráfica también se va acercando hacia el eje de la ordenadas (y). En ambos casos la gráfica pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3, \text{ donde } A > 0.$$

En la Gráfica No. 2, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A y B, los demás parámetros son iguales a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se dice que este es menor que cero. Ahora el efecto que produce el parámetro B sobre la gráfica son dos: si B toma valores mayores que cero la gráfica es decreciente. Si B aumenta el valor en la gráfica se formará un mínimo local ubicado en el origen de coordenadas y un máximo local ubicado en el primer cuadrante. Ahora, si B toma valores menores que cero la gráfica es decreciente. Si B disminuye en la gráfica se formará un mínimo local ubicado en el tercer cuadrante y máximo local ubicado en el origen de coordenadas. Por tanto para ésta gráfica el valor de B es menor que cero.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + Bx, \text{ donde } A < 0 \text{ y } B < 0.$$

En la Gráfica No. 3, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A, B y C, el parámetro D es igual a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se interpreta que es mayor que cero y es creciente. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y C para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general si A y C tiene el mismo signo los extremos locales se desplazarán a un solo cuadrante y a medida que el parámetro C aumente o disminuya éstos se pierden. En esta caso el parámetro B toma valores mayores que cero, por esto se puede afirmar que se formará un máximo local ubicado en el segundo cuadrante y un mínimo local ubicado en el tercero, pero debido a que el parámetro C aumenta estos extremos locales se desplazan al tercer cuadrante y se pierden.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + Bx + C, \text{ donde } A, B \text{ y } C > 0.$$

En la Gráfica No. 4, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A, B y C, el parámetro D es igual a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se interpreta que es mayor a cero. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y C para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general si A y C tiene el mismo signo los extremos locales se desplazarán a un solo cuadrante y a medida que el parámetro C aumente o disminuya éstos se pierden. En esta caso el parámetro B toma valores menores que cero, por esto se puede afirmar que se formará un máximo local ubicado en el primer cuadrante y un mínimo local ubicado en el cuarto, pero debido a que el parámetro C aumenta estos extremos locales se desplazan al primer cuadrante y se pierden.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + Bx + C \text{ donde } A > 0, B < 0 \text{ y } C > 0.$$

En la Gráfica No. 5, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A, B y C, el parámetro D es igual a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se interpreta es menor que cero. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y C para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general si A y C tiene signos opuestos los extremos locales se desplazarán a cuadrantes opuestos por el origen y a medida que el parámetro C aumente o disminuya estos extremos se desplazarán en el mismo cuadrante en el que se producen. En esta caso, A es menor que cero, C es mayor que cero y el parámetro B toma valores menores que cero, por esto se puede afirmar que se formará un máximo local ubicado en el primer cuadrante y un mínimo local ubicado en el tercero, pero debido a que el parámetro C disminuye los extremos locales se desplazarán en los cuadrantes que se han formado.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + Bx + C \text{ donde } A < 0, B < 0 \text{ y } C > 0.$$

En la Gráfica No. 6, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A y C los demás parámetros son iguales a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se interpreta que es mayor que cero. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y C para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general si A y C tienen el mismo signo mayor que cero la curva es creciente, en este caso si A y C aumentan o alguno de los dos, las ramas de la curva se acercan al eje de las ordenadas (y).

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + C \text{ donde } A > 0 \text{ y } C > 0.$$

En la Gráfica No. 7, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A y C los demás parámetros son iguales a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se dice que este es mayor que cero. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y C para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general si A y C tienen signos opuestos se forman dos extremos locales, el máximo local estará ubicado en el segundo cuadrante y el mínimo local estará en el cuarto cuadrante, la curva en general es creciente. Además si C disminuye los extremos locales se desplazarán en los cuadrantes que se han formado.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + C \text{ donde } A > 0 \text{ y } C < 0.$$

En la Gráfica No. 8, en el Anexo No. E, de la Situación Didáctica No. 3, los parámetros que intervienen son A y D los demás parámetros son iguales a cero. De acuerdo a los efectos del parámetro A se interpreta que es mayor que cero y que la curva es creciente. Ahora, existe una relación entre los parámetros A y D para que se produzca el efecto como se muestra en la gráfica, en general, el efecto del parámetro D es desplazar el punto de corte con el eje de las ordenadas (y) de acuerdo al valor que tome este parámetro.

La forma de la representación algebraica será:

$$f(x) = Ax^3 + D \text{ donde } A > 0 \text{ y } D > 0.$$

En las anteriores gráficas existen relaciones entre ellas dependiendo de los comportamientos que tomen los parámetros, como en las Gráficas No. 1 y No. 8, son similares en el aspecto ya que son crecientes por A cuando toma valores mayores a cero, además la diferencia entre ellas se debe a que, en la Gráfica No. 8 actúa el parámetro D, indicando el desplazamiento del punto de corte de la gráfica con el eje de las ordenadas (y).

De la segunda gráfica se puede interpretar que los parámetros A y B toman valores negativos y que si B disminuye los extremos locales se desplazan de acuerdo a los cuadrantes donde se formaron.

En las Gráficas No. 3, No. 4 y No. 5 actúan los parámetros A, B y C. Cuando A y C toman valores mayores a cero y C aumenta, las gráficas son crecientes y los extremos locales se desplazan y se pierden. Aquí B actúa sobre la gráfica formando las concavidades. Cuando A es negativo y C es positivo los extremos locales se desplazan a cuadrantes opuestos por el origen y a medida que C aumente, los extremos locales se desplazarán en los cuadrantes que se han formado. En la gráfica 5 el efecto que tiene el parámetro B sobre el comportamiento de la gráfica cuando tiene un valor negativo es que el mínimo local se encuentra en el tercer cuadrante y el máximo local se formará en el primer cuadrante.

En las Gráficas No. 6 y No. 7 actúan los parámetros A y C, los demás parámetros son iguales a cero. Cuando A y C son positivos la gráfica es creciente y se acerca al eje de la ordenadas (y). Cuando A es positivo y C es negativo se forman dos extremos locales opuestos por el origen de coordenadas, para la Gráfica No. 7 éstos extremos se forman en el segundo y tercer cuadrante.

En la segunda parte de la fase de formulación, con ayuda de la construcción realizada en Cabri Géomètre II Plus denominada "Representación algebraica y gráfica de la función cúbica" propuesta por los investigadores, y dada a los estudiantes, ellos deberán verificar si las expresiones algebraicas planteadas en la primera parte de la fase de formulación, se aproximan a los comportamientos de las gráficas propuestas en la situación didáctica, para ello deberá introducir los parámetros escogidos e interpretar las retroacciones producidas por el medio. Con la información obtenida en la hoja de respuesta y con los saberes adquiridos en los puntos I y II deberán responder las siguientes preguntas:

a) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II coinciden con las propuestas en el punto I, ¿Explique en los casos que coinciden las gráficas, los efectos de los parámetros de la función cúbica que identificaron en las gráficas para plantear la forma general de la expresión algebraica?: En ésta pregunta los estudiantes después de identificar e interpretar los elementos que conforman los sistemas de representación gráfico y el algebraico comprobarán si los parámetros que escogieron eran los pertinentes. Aquí se abre el espacio para que los grupos discutan sobre las estrategias y muestran las representaciones externas sobre el objeto de estudio. Se otorga libertad para que los estudiantes por medio de las producciones escritas expliquen con argumentos válidos los criterios utilizados que llevaron a tomar las decisiones en cada gráfica.

b) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II no coinciden con las propuestas en el punto I, ¿Explique en los casos que no coinciden las gráficas, cuáles fueron los parámetros que se obviaron o los efectos de éstos que se malinterpretaron para plantear la forma general de la expresión algebraica de la función cúbica?: Ahora los estudiantes deberán identificar donde cometieron equivocaciones que dieron como resultado una malinterpretación de los parámetros llegando a chocar con la gráfica que se realizó en el medio. Se otorga libertad para que ellos describan y detecten de forma precisa donde están las falencias, este proceso lo realizan entre ellos sin la intervención de los investigadores, aquí emerge el aprendizaje por adaptación propuesto en la TSD con relación a la *micro-ingeniería* didáctica que se está integrando.

Las explicaciones dadas por los estudiantes para describir los efectos de los parámetros en las dos preguntas de la situación deben acercarse a los comportamientos que se describieron en el diseño de la situación, es por esto que es indispensable prever los comportamientos que se puedan presentar cuando se aplica una actividad matemática a un grupo de estudiantes.

Fase de Validación: Después de terminar el desarrollo de la fase de formulación se otorga un espacio a los estudiantes para que con los grupos conformados expliquen los resultados que han encontrado en el desarrollo de la situación, para ello, se confrontan las respuestas de las preguntas de los dos grupos donde describirán cómo y porque llegaron a esas conclusiones, para la situación se describirán los comportamientos de la gráfica con relación a los efectos de los parámetros, ellos libremente argumentarán sobre cada una de las gráficas, además están en la facultad de opinar sobre las respuestas del otro grupo, de ésta manera se aceptarán los conocimientos adquiridos.

Fase de Institucionalización: Se dará a conocer de manera general, que los conocimientos adquiridos por lo estudiantes al término de la situación serán los siguientes:

- Identificación del comportamiento del parámetro A, B, C y D en la gráfica.

- Deducción de la forma general de la función cúbica relacionando los valores de los parámetros.

8. Análisis de los Resultados

Siguiendo la estructura de la *micro-ingeniería didáctica*, se describe la experimentación de las situaciones didácticas en el aula y se procede a realizar un análisis *a posteriori*.

8.1. Experimentación

8.1.1. Balance entre la planificación y la acción

En la siguiente tabla se realiza un contraste entre las actividades, el tiempo y los instrumentos de observación previstos con la realización durante la puesta en acto de la secuencia didáctica.

Esquema general de desarrollo de la experimentación				
Planificación		Implementación		Instrumentos
Actividades	Tiempo	Actividades	Tiempo	
Introducción	30 min	Introducción	30 min	Diario de la sesión Fotografías
Inducción al AGD Cabri Géomètre II Plus	5 horas	Inducción al AGD Cabri Géomètre II Plus	5 horas	Diario de la sesión Fotografías
Aplicación de la Situación Didáctica No. 1	2 horas	Aplicación de la Situación Didáctica No. 1	3 horas	Diario de la sesión Fotografías Video Producciones escritas de los estudiantes

Aplicación de la Situación Didáctica No. 2	4 horas	Aplicación de la Situación Didáctica No. 2	3 horas	Diario de la sesión Fotografías Video Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación de la Situación Didáctica No. 3	2 horas	Aplicación de la Situación Didáctica No. 3	3 horas	Diario de la sesión Fotografías Video Producciones escritas de los estudiantes

Tabla No. 7. Balance entre la planificación y la acción.

La estructura de esta tabla ha sido tomada de Camargo & Guzmán (2005).

8.1.2. Descripción de las sesiones

La experimentación se realizó en una Institución privada, las directivas facilitaron a los investigadores de 5 horas semanales para la realización de las actividades de la secuencia didáctica en horario de clases, se solicitó a la institución la colaboración de cuatro estudiantes sobresalientes académicamente en el área de matemáticas de grado noveno (9no).

Se realizó una introducción el día 18 de marzo de 2013, en la cual se explicó a los estudiantes en que consiste la secuencia de situaciones didácticas y el contrato didáctico que se manejará en su aplicación.

A causa de que los estudiantes no habían tenido la experiencia de interactuar con el AGD Cabri Géomètre II Plus, se procedió a realizar una inducción de este medio los días

19 a 21 de marzo de 2013, en estas sesiones se explicó la función de cada una de las herramientas de este medio mostrando ejemplos de construcciones realizadas en Cabri Géomètre II Plus.

Por Semana Santa hubo un receso de actividades en el Instituto comprendido entre 22 de marzo hasta el 29 de marzo de 2013.

A continuación, se presentará una síntesis de las siete (7) sesiones de trabajo con los estudiantes:

Sesión No. 1 (1 de abril de 2013): En esta sesión se inició con la puesta en acto de la primera situación, aunque en la introducción ya se había explicado el contrato didáctico, pareció prudente para los investigadores volverlo a explicar por el receso de Semana Santa.

Se procedió a realizar la explicación de las instrucciones previas a la realización de la situación, en estas se informó a los estudiantes que tendrían a su disposición una construcción diseñada en Cabri Géomètre II Plus para el desarrollo de la fase de acción y el trabajo era de forma individual.

El tema propuesto para esta situación era la deducción de la función cúbica realizando traducciones de los sistemas de representación en la resolución del problema de la caja de volumen máximo.

En la primera fase de acción los estudiantes manipularon la construcción e identificaron las tres dimensiones de la caja ancho(a), largo(l) y alto (x) y el volumen (y), con la interpretación de las retroacciones que el medio producía, realizaron la traducción a las tablas y al relacionar la información depurada en ellas se dio respuesta a las preguntas orientadoras.

Sesión No. 2 (2 de abril de 2013): En esta sesión se dio inicio a la segunda parte de la misma situación, la fase de formulación, en ella los estudiantes trabajaron en grupos de dos personas.

Con la información obtenida en la primera parte y con ayuda de la construcción propuesta en Cabri Géomètre II plus, los estudiantes analizaron la información para relacionar las dimensiones de la cartulina con las dimensiones de la caja, al observar esta dependencia identificaron y propusieron las expresiones algebraicas de la dependencia de las dimensiones del ancho (a) y el largo (l) con la altura (x) de la caja y realizaron transformaciones sintácticas para identificar la dependencia entre las magnitudes del volumen (y) con la altura (x), luego dedujeron un modelo funcional el cual pudo ser traducido al sistema de representación gráfico gracias a las herramientas que proporcionaba el medio, con esta representación y la información de las tablas se relacionaron la altura (x) y el volumen (y) para encontrar el volumen máximo de la caja.

Los estudiantes observaron que el modelo funcional del problema de la caja, era una función cúbica y al interpretar los elementos que pertenecen a este modelo observaron sus propiedades limitadas al problema.

Sesión No. 3: (3 de abril de 2013): En esta sesión se confrontó el trabajo realizado por los estudiantes en la fase de acción y formulación es decir se hizo la validación de la situación. El estudiante Carlos no estuvo presente por motivos de salud.

Se inició realizando una breve explicación a los estudiantes sobre el desarrollo de la fase de validación, la intervención de los investigadores estaba limitada a la lectura de las preguntas y videograbación.

Los investigadores realizaron la lectura de las preguntas orientadoras y los estudiantes expusieron sus argumentos, después se confrontaban estas afirmaciones, donde cada grupo defendió su posición, en la discusión los estudiantes reflexionaron y aceptaron los argumentos del otro grupo cuando se habían equivocado. Después de esto cuando ya estaban consolidados los saberes nuevos el investigador procedió a realizar una aclaración y generalización de estos.

Sesión No. 4 (4 de abril de 2013): En ésta sesión se dio inicio a la parte experimental de la segunda situación, se suministró el material con las instrucciones y las hojas de respuesta, además se explicó que tendrían como medio una construcción diseñada en Cabri Géomètre II Plus para el desarrollo de la fase de acción y formulación, y que el trabajo debían efectuarlo en grupos de dos personas.

El trabajo se centró en el desarrollo de la traducción de la forma general de la función cúbica al sistema de representación gráfico a través de la variación de sus parámetros. Los estudiantes en la fase de acción manipularon, donde dieron valores a los parámetros en la forma general según las condiciones de cada caso, interpretaron la información obtenida de las retroacciones con el medio, y escribieron las gráficas con las expresiones algebraicas que para ellos representaban los comportamientos generales según los parámetros.

En la fase de formulación, los estudiantes con base a la información adquirida continuaron su trabajo desarrollando las preguntas orientadoras que en el sentido de la situación se habían formulado. Analizaron la información y relacionaron los casos para dar respuesta a las preguntas, como también escribieron conclusiones entorno a los efectos de los parámetros que tienen sobre la gráfica y la forma de la expresión algebraica. Finalmente, interpretaron las propiedades de la función cúbica presentes en el desarrollo de la situación.

Sesión No. 5 (5 de abril de 2013): En esta sesión se dio paso a la explicación por parte de los estudiantes de las respuestas y conclusiones realizadas en las anteriores fases, para esto, los grupos se enfrentaron en un debate donde expusieron sus argumentos y defendieron sus respuestas. Los investigadores como en la anterior situación se limitaron a leer las preguntas y realizar la videograbación del debate. Esta parte fue positiva ya que los estudiantes a través de la discusión encontraron conclusiones generales entorno a los efectos que producían los parámetros sobre la gráfica y la expresión algebraica de la función cúbica.

Después de la realización del debate y los conocimientos adquiridos por parte de los estudiantes los investigadores realizaron la institucionalización de los saberes de manera general.

Sesión No. 6 (8 de abril de 2013): En ésta sesión se pone en acto la situación didáctica No. 3, de igual manera, como en las dos situaciones anteriores se explicaron las instrucciones para el desarrollo efectivo de la situación y se proporcionó el material y las hojas de respuesta donde escribieron sus producciones escritas. Como se mencionó en el diseño de las situaciones hay que resaltar que la presente situación y la Situación Didáctica No. 2 están relacionadas, por tanto en la fase de acción de ésta situación los estudiantes iniciaron con la escritura de los posibles valores de los parámetros y las expresiones algebraicas.

El estudio de ésta situación se centró en la traducción del sistema gráfico al sistema de representación algebraico a partir de la visualización de los efectos de los parámetros de la función cúbica. Debido a que los estudiantes ya tenían conocimiento del medio, los estudiantes en la primera fase interpretaron, reflexionaron y propusieron expresiones algebraicas para cada gráfica que explicaban los efectos de los parámetros alrededor de la función cúbica.

En la fase de formulación los estudiantes con la intervención del medio denominado “Representación algebraica y gráfica de la función cúbica” corroboraron que las expresiones algebraicas propuestas por ellos describían o no los comportamientos de las gráficas planteadas en la situación. Después explicaron en la hoja de respuesta el porqué de los valores tomados ubicando en la parte a) de la situación los correctos y en la parte b) los que no explicaban efectivamente el comportamiento de la gráfica.

Sesión No. 7 (9 de abril de 2013): En ésta sesión los estudiantes confrontaron los resultados obtenidos explicando en cada una de las gráficas los valores de los parámetros que habían escogido para la conformación de la expresión algebraica. En los casos que estaban incorrectos, entre los dos grupos llegaron a un consenso general para dilucidar los conocimientos aprendidos. Las respuestas y diálogos se encuentran en la videograbación. Finalmente, al término de ésta fase los investigadores explicaron en forma general los conocimientos que habían aprendido a través de la situación.

8.2. Análisis *a posteriori*

Para realizar el análisis de los resultados de la experimentación se tendrá en cuenta las unidades de análisis propuestas en el análisis *a priori,* los datos se obtuvieron a través del diario de la sesión, fotografías, videograbaciones y producciones escritas de los estudiantes. El análisis del contenido y el análisis para la interacción didáctica se sintetizan en un solo estudio, mientras que el análisis de la comprensión se realizará para cada una de las tres situaciones didácticas.

8.2.1. Análisis del contenido

En la Situación Didáctica No. 1, se observó que la totalidad de los estudiantes poseían unos saberes previos, forjados de las experiencias y de los conocimientos adquiridos, para la determinación del volumen de la caja, también por otra parte, plasmaron los valores de las dimensiones de la caja que propiciaba el medio en la hoja de respuesta, demostrando la identificación plena de las dimensiones descritas en la gráfica de la construcción. A pesar, de que tenían conocimientos acerca de la determinación del volumen, y el concepto de función aplicado en la función lineal, en algunos de ellos las repuestas de las preguntas de la primera parte tuvieron algunas dificultades en la diferenciación de las magnitudes, en la dependencia e independencia de ellas, pero con la interacción con el medio “El problema de la caja de volumen máximo” las retroacciones producidas por este esclarecieron estas dificultades.

En esta situación los estudiantes interpretaron las relaciones entre magnitudes que estaban implícitas en las representaciones, sin embargo, la representación algebraica surgió con el propósito, de que, relacionen los conocimientos previos que poseían con los que se movilizaban en ese momento y que identifiquen la forma general de la función cúbica a través de una expresión algebraica, ampliando así, las representaciones que se desarrollaron con la función cúbica entorno al problema de la caja.

Aunque en ningún momento de la situación antes de la fase de Institucionalización, se mostró a través de una definición, ni a través de fórmulas los conceptos contenidos como son el de función cúbica principalmente, queda demostrado que buscar estrategias en las cuales sea el estudiante que descubra ese conocimiento es beneficioso, ya que el estudiante fue apropiándose no solamente de la función cúbica sino de algunos conceptos que no haya tenido en claro en sus experiencias y saberes previos. Así mismo, la dinámica que posee el AGD Cabri Géomètre II Plus logró con sus herramientas que además el estudiante visualice la gráfica que daba solución al problema de manera precisa según las condiciones otorgadas al problema. En la fase de Validación es posible observar que los argumentos presentados por los estudiantes describen las estrategias que utilizaron explicando el proceso con su propio lenguaje de manera clara y concisa.

Cuando afrontaron la Situación Didáctica No. 2, los estudiantes hicieron uso de la experiencia de la anterior situación como de los saberes previos y se encontraron una situación donde debían interactuar y utilizar varias representaciones al mismo tiempo, ésta contenía la forma general de la función cúbica, los parámetros que debían utilizar para observar e interpretar los efectos que tenían sobre la gráfica y la expresión algebraica, de igual manera debían relacionar todos estos elementos pertenecientes a los diferentes sistemas de forma eficaz.

De acuerdo a los análisis epistemológicos esta situación se pensó con el ánimo de emplear una ruta alterna en la cual no exista el tránsito de una tercera representación sino que la traducción sea directa, es decir, de las gráficas a las expresiones algebraicas, para ello en la situación se construyó un medio que permitiese este tipo de traducción. En la experimentación, cuando se presentó la situación, los estudiantes primero identificaron que elementos tenían para su manipulación sin desconocer los saberes previos que poseían con relación a la función lineal. Los alumnos manipularon uno a uno los parámetros del medio presentados en la forma general de la función cúbica, a partir de ahí y de acuerdo con las instrucciones de la situación fueron dándole valores arbitrarios a éstos con las herramientas del AGD Cabri Géomètre II Plus.

El medio realizado en Cabri Géomètre II Plus generó en los estudiantes un espectro amplio de representaciones gráficas y algebraicas, lo que implicó que debían interpretar y relacionar estas retroacciones detalladamente para identificar y describir los efectos que hacían cada uno de los parámetros. Cada grupo escribió de acuerdo a su experiencia los valores que sobresalían y representaban el comportamiento general de éstos. Por otro lado, el dinamismo que ofreció el medio permitió que las repuestas de las tablas en los dos grupos sean diferentes, tanto en las gráficas como en sus expresiones algebraicas, pero las relaciones internas que existían en torno a los efectos de los parámetros fueron complementadas a través de las preguntas orientadoras porque permitieron relacionar los casos y escribir conclusiones generales.

En la Situación Didáctica No. 3, la primera parte otorgó al estudiante la posibilidad para conjeturar y escribir diferentes valores para los parámetros de acuerdo a los conocimientos adquiridos en la anterior situación ya que no se realizó a través del medio construido en Cabri Géomètre II Plus. Fue una actividad creada para que el estudiante tenga autonomía en las acciones y en las decisiones sobre el objeto de estudio. En la experimentación, como se tenía previsto, los estudiantes actuaron en grupos de manera autónoma creando sus propias hipótesis y reflexionado sobre los valores que debían escribir para que la gráfica tenga aquel comportamiento, de acuerdo con los parámetros escogidos escribieron la expresión algebraica respectiva.

En la fase de formulación debían escribir los valores de los parámetros que escogieron en la forma de la expresión algebraica presentada en el medio y observar en la retroacción producida en la gráfica la representación de esos valores, de acuerdo con los resultados obtenidos debían explicar con argumentos lógicos porque razón la gráfica pertenecía a ese grupo, qué efectos producía la escogencia de esos valores; si los valores escogidos de los parámetros no coincidían tenían que explicar en la parte b) de la hoja de respuesta porque motivos estos valores reflejaban otros comportamientos en la gráfica de la función cúbica.

En la fase de Validación cada grupo explicó la elección de los valores y admitieron las equivocaciones producidas al escoger algunos de ellos que no reflejaban en la gráfica lo que se tenía propuesto para ésta situación. Al término de la explicación de cada uno de los casos presentados de la situación, se presentó una ampliación de la explicación en la determinación de los valores correctos de los parámetros en la Gráfica No. 8, en el grupo formado por Daniel y Camila, tomó la vocería Daniel para explicar las razones porque para ellos algunos de los valores tomados estaban correctos, en el grupo de Carlos y Jhonatan, Carlos tomó la palabra y explicó de manera precisa porque se habían equivocado al incluir en la expresión algebraica los parámetros B y C aclarando el comportamiento de la gráfica de la función cúbica cuando solamente actúan sobre ella A y D.

En la fase de Institucionalización se presentó la importancia de la situación realizada socializando los conocimientos adquiridos por ellos pero desde un enfoque formal. Éste trabajo fue realizado por los investigadores de acuerdo al plan diseñado. En ésta secuencia se observó cómo los estudiantes asimilaron la variación de los parámetros de la función cúbica y de qué manera se pueden expresar por medio de gráficas en el plano cartesiano.

8.2.2. Análisis de la comprensión

Situación Didáctica No. 1: Deducción de la función cúbica realizando traducciones de los sistemas de representación en la resolución del problema de la caja de volumen máximo.

El análisis de la comprensión en la Situación Didáctica No. 1, está centrada en la visualización de las relaciones de las magnitudes de las dimensiones y el volumen de la caja y en la realización de las actividades matemáticas de los sistemas de representación para deducir un modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo e identificar en sus representaciones elementos y propiedades generales de la función cúbica.

En el enunciado de la situación el reconocimiento de magnitudes físicas ayudan al estudiante a establecer una imagen interna o representación interna del problema, la cual se solidifica como representación externa con ayuda del medio. En la construcción propuesta por el docente los estudiantes interactúan con este medio realizando una manipulación de esta representación externa, identificando la dependencia de las dimensiones del ancho, largo con la altura, esto se puede evidenciar en las afirmaciones realizadas por los estudiantes en las producciones escritas y videograbaciones al responder la pregunta:

1. ¿Si mueves el punto x (Alto) que pasa con las medidas del ancho (A) y largo (L) de la cartulina y con el ancho (a) y el largo (l) de la caja?

Camila: Con el ancho (a) y el largo (l) de la caja cambian, o sea, por ejemplo, si (x) altura aumenta el largo (l) y el ancho (a) de la caja reduce y si (x) altura reduce el largo y el ancho de la caja aumenta.

Daniel: Cuando la altura (x) disminuye el ancho (a) y el largo (l) de la caja aumenta y cuando la altura (x) aumenta el ancho (a) y el largo (l) de la caja disminuye.

Jhonatan: Los valores cambian de manera que el cubo se puede hacer más ancho o más largo dependiendo de qué medida y el mismo caso con el largo.

Carlos: Los valores cambian de manera ordenada es decir que cierto valor de (x) equivale a un valor especifico de a, l.

Las anteriores afirmaciones se previeron en la descripción de los momentos de la situación en el diseño de la Situación Didáctica No. 1 y así sucedió con los estudiantes.

En el punto 2 de la Situación Didáctica No. 1 se solicitó a los estudiantes completar una tabla en la hoja de respuestas con ayuda de la construcción de Cabri Géomètre II Plus propuesta por los investigadores, los estudiantes pudieron visualizar las diferentes medidas que podían tomar las dimensiones de la caja, lo cual facilitó completar la tabla comprendida por los valores del ancho (a), largo (l), volumen (y) dado unas medidas de la altura (x). En el Anexo No. C, se puede observar la Situación Didáctica No. 1.

Con las preguntas orientadoras, los estudiantes visualizaron relaciones entre la dimensiones de la caja y entre magnitudes con ayuda de la tabla, sin embargo, las respuestas a la pregunta a) del punto 2.

a) Puede observar en la tabla que los valores que toma la medida de la altura (x) están entre 0 cm y 2 cm, ¿Por qué no se pueden tomar valores diferentes a estos?

No fueron las previstas, además el lenguaje utilizado en la argumentación tanto en las producciones escritas como en las videograbaciones son confusas como se aprecia en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas:

Camila: Porque tan solo se toma la mitad de la cartulina es decir 2 cm, porque la cartulina mide 4 cm aproximadamente y los valores están entre 0 cm y 2 cm la mitad de 4 cm por aquello no podríamos utilizar valores o medidas mayores a $2cm$.

Daniel: Porque solo usamos la mitad de la cartulina y como la cartulina mide 4 cm usamos como máximo 2 cm ya que usamos la mitad de la cartulina y el mínimo será cero.

Jhonatan: Porque el alto va ocupando todo en ancho de la caja y en la caja cuando se va haciendo más larga va ocupando el ancho de la cartulina.

Las afirmaciones de Camila y Daniel son similares por lo que podemos deducir que uno de ellos tuvo influencia en la argumentación del otro. En si cuando afirmaron "solo se toma la mitad de la cartulina" se están refiriendo a la mitad del ancho de la cartulina (L) y cuando afirman que "la cartulina mide 4 cm" se refieren a que el ancho de la cartulina mide 4 cm aclarando lo anterior estas argumentaciones reflejan que los estudiantes trataron de dar una respuesta basados en la construcción del punto medio cuando la altura $x = 2$, donde no existe el ancho de la caja (a), y no analizaron la información implícita en la tabla.

Lo mismo ocurrió con la respuesta dada por Jhonatan quién observó la construcción más no la tabla.

Sin embargo, uno de los estudiantes reconoce que para valores mayores a 2 cm no es posible construir la caja, porque argumenta que el material es insuficiente para construirla, esto se evidencia en la siguiente afirmación tomadas de las producciones escritas:

Carlos: …si tomamos el punto de vista del material en que se construye no alcanza o no hay cartulina suficiente para armarse.

Por lo que podemos concluir del anterior punto es que la mayoría de los estudiantes no visualizaron en la tabla el por qué no se puede tomar valores menores a 0 cm o mayores a 2 cm para la medida de la altura, esto se presentó porque todavía no identificaban que la dimensión del ancho de la cartulina está comprendida por la dimensiones del ancho y largo de la caja y así mismo con la dimensión del largo de la cartulina.

En la pregunta b) del punto 2)

b) Observa la tabla e identifica entre qué medidas del volumen (y) puede construirse la caja.

En la tabla se presentan las medidas de la magnitud del volumen (y) que puedo tomar dependiendo de la medida de la magnitud de la altura (x), la medidas del volumen (y) están registradas en la tabla de forma estructurada y organizada, lo cual facilitó al estudiante la identificación de la medida mínima y máxima de la magnitud del volumen (y) de la caja, como también medidas de volúmenes comprendidas entre las anteriores. Esto se aprecia en las producciones escritas de los estudiantes:

Camila: El Volumen mínimo será $0{,}000$ ya que se obtendría solo la cartulina y la máxima $6{,}558\ cm^3$ con lo cual se obtendría la caja incluyendo intermedios.

Daniel: El Volumen mínimo que podríamos coger para formar una caja es $0{,}000$ y el máximo volumen seria $6{,}558$.

Jhonatan: Se podría construir entre: $0{,}000$ y $6{,}558$.

Carlos: Tomamos los valores de la tabla el más bajo en el volumen es $0\ cm^3$ y el más alto es $6{,}558\ cm^3$.

Sin embargo en las afirmaciones de Camila, Daniel y Carlos toman a 0 cm^3 como una medida de volumen aceptable para formar la caja, lo que refleja que no se tuvo en cuenta las medidas de las dimensiones de la caja para llegar a esa conclusión.

En la pregunta c) del punto 2)

c) ¿Si la medida de la altura (x) aumenta que ocurre con la medida del volumen (y)?

El estudiante, en la tabla, relacionó dos magnitudes de la caja, la altura (x) con su volumen (y) y visualizó la dependencia del volumen (y) con la altura (x) de la caja, esto se refleja cuando realizó las siguientes afirmaciones en las reproducciones escritas:

Camila: Si aumentamos la medida de la altura (x) el volumen va ascendiendo en el cual llega a cierto punto alto (x) cm $0{,}763\ cm$ a él volumen $6{,}558\ cm^3$ desde allí desciende el volumen cuando la medida de la altura sigue aumentando.

Daniel: Cuando la altura x aumenta de $0{,}000\ cm$ a $1{,}000\ cm$ el volumen va aumentando pero de $1{,}000\ cm$ a $2{,}000\ cm$ va disminuyendo.

Jhonatan: Se va reduciendo el volumen mientras que aumenta el alto.

Carlos: Si se representara en una gráfica los valores de x y y harían una parábola así que según lo que cambie (x) hará la medida de y no se aumenta (y) ya que en cierto punto decrece como en una parábola.

En la respuesta de Camila se observa que describe el comportamiento que toma la medida del volumen (y) cuando aumenta la medida de la altura (x) y es más específica cuando determina el extremo local.

Daniel aunque identifica en general el comportamiento del volumen (y) cuando aumenta la altura (x), las medidas que propone como explicación contradice su afirmación.

En el caso de Jhonatan se observa que no visualizó correctamente el comportamiento del volumen (y) cuando aumenta la altura (x).

Carlos en su argumentación relaciona las medidas de las magnitudes con el comportamiento de una parábola en un sistema de representación gráfico.

En la pregunta d) del punto 2)

d) Si se desea saber con cuales medidas se puede construir la caja de mayor capacidad ¿entre qué medidas de la altura se encuentra el máximo volumen?

En las preguntas b) y c) del punto 2) los estudiantes en su mayoría identificaron entre qué medidas estaba determinado el volumen de la caja, además también observaron en la tabla el comportamiento de la dependencia de las medida del volumen (y) con la medida de la altura (x), conociendo lo anterior el estudiante argumentó que el volumen máximo está comprendido entre los valores de la medida de la altura (x) el cual está en el intervalo abierto $(0.711, 0.763)$. Eso lo podemos verificar en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas:

Camila: El máximo volumen seria $6{,}558\ cm^3$, entonces el alto (x) seria $0{,}711$ y $0{,}763$ donde los dos valores de (x) tendrán el mismo volumen $6{,}558\ cm^3$.

Daniel: El máximo volumen que puede tener la caja es $6{,}558$ esto podemos encontrar en la altura (x) $0{,}763$ y $0{,}711$.

Jhonatan: Se podría construir con las siguientes medidas: $0{,}763 - 6{,}558$

$0{,}711 - 6{,}558$

Carlos: Según nuestra tabla las medidas para la caja con más volumen son

x	A	L
$0{,}711$	$2{,}579$	$3{,}579$
$0{,}763$	$2{,}368$	$3{,}474$

En la pregunta e) del punto 2)

e) ¿Qué relaciones se observan entre el ancho (a) – altura (x) y el largo (l) – altura (x)?

El estudiante al relacionar la medida de la altura con la medida del ancho o el largo de la caja, identificó una dependencia entre estas dimensiones, la cual podemos observar en las siguientes afirmaciones:

Daniel: La relación entre (a) y (l) que cuando x aumenta (a) y (l) disminuye y cuando x disminuye (a) y (l) aumenta.

Jhonatan: Se puede observar que estos valores están relacionados que el alto empieza en 0 y el ancho termina en 0 tomando como relación el cero se podría decir que el alto va de forma ascendente y el largo descendente.

Tanto Daniel y Jhonatan comprenden y describen la dependencia que hay entre las medidas de estas dos dimensiones, sin embargo, en las afirmaciones de Camila y Jhonatan no se identifica esta relación:

Camila: La relación entre (a) y (x) es que el largo es mayor con $1\ cm$ de diferencia ejemplo $(x)\ 3{,}000$ y $(a)\ 2{,}000$, y el largo (l) y altura (x), entonces el alto disminuye según el largo.

Jhonatan: Se observa que estos valores están relacionados de tal manera que siempre den como figura final un rectángulo.

En la respuesta de Camila se puede entender que la comparación que realizado no fue entre la dimensión de la altura con el largo o ancho de la caja, sino entre las medidas del largo y el ancho de la caja, y llega a la conclusión de que la medida de el alto depende de la medida del largo. Se puede identificar que la causa del error en la afirmación de Camila tiene como base la malinterpretación de la notación de las dimensiones de la caja en la tabla.

En la respuesta de Jhonatan no determina que valores relaciona para llegar a su conclusión.

En esta primera parte de la Situación No. 1 se puede concluir, que la construcción propuesta por los investigadores en Cabri Géomètre II plus, facilitó a los estudiantes el proceso de medida de las dimensiones de la caja, lo cual ayudó a realizar la traducción de los elementos implícitos en la descripción verbal a la tabla.

Completada la tabla los estudiantes en su mayoría visualizaron relaciones, como la dependencia de la medida del ancho y el largo con la medida de la altura o la dependencia de la medida del volumen con la medida de la altura, como también se pudo determinar el máximo y mínimo de la medida del volumen, la visualización de estas relaciones en la tabla fueron contundentes para encontrar respuesta al problema del volumen máximo de la caja.

Se observó que algunos estudiantes llegaron a visualizar en la tabla elementos como extremos locales y un estudiante relacionó la dependencia entre la altura y el volumen con el comportamiento de una parábola en el sistema de representación gráfico.

Luego, se planteó la segunda parte de la Situación Didáctica No. 1, para desarrollarse en grupos de dos personas.

En el tercer punto de la situación los estudiantes completaron una tabla, con ayuda de la herramienta "calculadora" del AGD Cabri Géomètre II Plus, con estos datos y con las visualizaciones realizadas en la fase de acción, dieron solución a las preguntas orientadoras las cuales encaminaron al estudiante a reflexionar y ratificar la dependencia de las medidas de la dimensiones del ancho y el largo con la medida de la altura. En el Anexo No. C, se puede observar la Situación Didáctica No. 1.

En la pregunta a) del punto 3)

a) ¿Qué pueden afirmar de los resultados obtenidos en la operación planteada en la primera y segunda tabla?

Los estudiantes al dar datos aleatorios para la medida de la altura y al realizar la operación planeada con la herramienta calculadora observaron en el medio que el resultado obtenido era igual a la medida del ancho y largo de la caja, por tanto dedujeron que con la expresión sintáctica, propuestas en la tablas, se encontraba el ancho y el largo de la caja, esto se evidencia en las siguientes afirmaciones de los estudiantes tomadas de las producciones escritas

Camila y Daniel: Podemos afirmar que $A - (x + x)$ es la fórmula del ancho y $L - (x + x)$ es la fórmula del largo de la caja, para obtener los términos de la altura.

Jhonatan y Carlos: Que con las anteriores formulas podemos saber las medidas del ancho y el largo de la cartulina y caja.

En estas afirmaciones se puede observar que en las tablas y con la interacción con el medio realizan una identificación y relación de la dependencia de las medidas de ancho y alto de la caja con la altura, con esto visualizan a la expresión sintáctica dada en las tablas como una "formula" o expresión algebraica que representa la medida de las dimensiones de la altura y la caja.

En la pregunta b) del punto 3)

b) Observando las anteriores tablas propongan una expresión algebraica que represente la medida del ancho (a) de la caja y otra para la medida del largo (l) de la caja.

Los estudiantes con el cocimiento adquirido en la anterior pregunta, estuvieron en la capacidad de identificar y realizar transformaciones sintácticas para proponer expresiones algebraicas que representen las medidas del ancho y largo de la caja en términos de la medida de la altura, esto se evidencia en las afirmaciones de los estudiantes tomadas de las producciones escritas:

Camila y Daniel: $a = \mathrm{A} - 2\mathrm{x}$ es igual a $(\boldsymbol{a}) =$ ancho de la caja

$l = \mathrm{L} - 2\mathrm{x}$ es igual a $(\boldsymbol{l}) =$ largo de la caja

Jhonatan y Carlos: $a = \mathrm{A} - (\mathrm{x} + \mathrm{x})$ o $a = \mathrm{A} - 2\mathrm{x}$

$l = \mathrm{L} - (\mathrm{x} + \mathrm{x})$ o $l = \mathrm{L} - 2\mathrm{x}$

En estas afirmaciones podemos identificar las actividades matemáticas de los sistemas de representación que categorizó Kaput (1992), realizadas por los estudiantes, en primer lugar, se puede apreciar la realización de transformaciones sintácticamente restringidas a un sistema de representación, cundo los estudiantes simplifican las expresiones del largo y ancho de la caja, en segundo lugar la relación de uno o más elementos pertenecientes a un sistema de representación con otros elementos de otro sistema de representación, cuando los estudiantes relacionan las medidas registradas en las tablas con sus notaciones simbólicas y proponiendo una expresión algebraica para estas.

En la pregunta c) del punto 3)

c) Como se observa en la Construcción, el volumen (y) es igual al producto de las medidas del ancho (a), largo (l) y altura (x) de la caja $y = a \times l \times x$, según esto y con las expresiones algebraicas del ancho (a) y el largo (l) de la caja obtenidas anteriormente, deduzcan una expresión algebraica para el volumen.

Al representar la medida del ancho y el largo de la caja en términos de la medida de la altura en forma algebraica, los estudiantes con la información dada propusieron un modelo funcional del volumen de la caja en términos de la medida de su altura, esto se evidencia en las respuestas de los estudiantes a la pregunta en las producciones escritas:

Camila y Daniel: $\mathrm{V} = (\mathrm{A} - 2\mathrm{x})(\mathrm{L} - 2\mathrm{x})(\mathrm{x}) = (4 - 2\mathrm{x})(5 - 2\mathrm{x})(\mathrm{x})$

$$= (20 - 8x - 10x + 4x^2)(x)$$

$$= (20x - 18x^2 + 4x^3) = \text{Volumen y}$$

Jhonatan y Carlos: $\mathrm{y} = [\mathrm{A} - (\mathrm{x} + \mathrm{x})].[\mathrm{L} - (\mathrm{x} + \mathrm{x})].\mathrm{x}$

$$\mathrm{y} = (\mathrm{A} - 2\mathrm{x}).(\mathrm{L} - 2\mathrm{x}).\mathrm{x}$$

$$\mathrm{y} = (4 - 2\mathrm{x}).(5 - 2\mathrm{x}).\mathrm{x}$$

$$\mathrm{y} = (20 - 8\mathrm{x} - 10\mathrm{x} + 4\mathrm{x}^2).\mathrm{x} = 20\mathrm{x} - 18\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x}^3$$

$$\mathrm{y} = 4\mathrm{x}^3 - 18\mathrm{x}^2 + 20\mathrm{x}$$

En estas argumentaciones los estudiantes realizan transformaciones sintéticas en un mismo sistema de representación para obtener una expresión general del modelo funcional para facilitar la identificación de elementos implícitos en esta representación.

En la pregunta d) del punto 3)

d) Con la expresión algebraica obtenida del volumen ($\boldsymbol{y}$) identifiquen el grado y sus variables que la determinan.

Ya obtenida la forma general del modelo funcional, los estudiantes determinaron los elementos que conformaban esta expresión algebraica, identificando el grado de la función y la dependencia de la medida del volumen con la medida de la altura. Esto se puede ver en las producciones escritas de los estudiantes:

Camila y Daniel: Grado del volumen 3 variable (y) es dependiente y la variable (x) es independiente, (y) medida del volumen y (x) medida de la altura.

Jhonatan y Carlos no realizaron argumentación escrita pero en la videograbación de la validación de la Situación Didáctica No. 1, **Carlos** afirmó: La variable independiente es (x), la variable dependiente es (y) y la expresión algebraica sería de tercer grado.

En estas afirmaciones podemos observar que el estudiante ya identifica al modelo funcional como una función de grado tres, y la dependencia que hay entre diferentes magnitudes.

En la pregunta e) del punto 3)

e) Con ayuda de las herramientas de Cabri Géomètre II Plus y las variables identificadas en la anterior pregunta, construyan la gráfica del volumen (y) de la caja en el plano cartesiano.

Ya obtenido el modelo funcional de grado tres del problema de la caja de volumen máximo, los estudiantes con ayuda de la herramientas, “Transferencia de medidas” y “Lugar geométrico” de Cabri Géomètre II plus, construyeron la gráfica del modelo funcional en el medio, y lo registraron en el plano cartesiano de la hoja de respuesta, en este registro escrito se puede evidenciar que los estudiantes determinaron el punto máximo de la gráfica comprendidos por las coordenadas de la altura (x) y el volumen (y), en el Anexo No. C, Situación Didáctica No. 1.

Las herramientas “Transferencia de medidas” y “Lugar” geométrico, tuvieron importancia, porque gracias a ellas se realizó la gráfica del modelo funcional sin la necesidad de transitar en la tabulación para realizar la respectiva gráfica, además por estar construida en Cabri Géomètre II Plus, los estudiantes observaron de forma dinámica propiedades implícitas en ella, propiedades que pudieron ser difíciles reconocerlas si la gráfica hubiese estado construida en el ambiente de lápiz y papel.

La determinación del punto máximo en la gráfica se debe, a las visualizaciones realizadas en el primer punto de la situación, donde se determinó relaciones entre las dimensiones de la caja y entre las magnitudes de la misma.

En el punto f) del punto 3).

f) En la gráfica obtenida identifiquen el dominio, rango, punto máximo, en que intervalos la gráfica es creciente, decreciente y los puntos de corte con los ejes coordenados si existen.

Realizada la gráfica tanto en el medio como en la hoja de respuestas, los estudiantes identificaron las medidas que comprende la altura y el volumen de la caja, o sea determinaron el dominio y el rango del modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo, como también, el punto máximo, los puntos de corte con eje de las abscisas (x) altura, con el eje de las ordenadas (y) volumen y determinaron los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

La visualización de estas propiedades hace parte de la segunda actividad de los sistemas de representación que categorizó Kaput (1992). Aquí se relacionó elementos del sistema de representación para realizar la visualización de estos elementos para encontrar solución al problema de la caja de volumen máximo, esto se evidencia en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas de los estudiantes.

Camila y Daniel: Dom= $0.000 - 2.000$ cm Rango = $0.000 - 6{,}564$ cm
Punto máximo = 6.564 intervalo #1 = $0.000 - 0.740$ curva crece
y de $0.740 - 2.000$ la curva decrece
Con el eje y se corta una vez en el origen
y en el eje x se corta 2 veces en el origen y en dos

Jhonatan y Carlos: Punto Máximo $(0.76, 6.56)$
Punto de corte en 0 y en 2 con el eje x, 0 en y
Creciente $(0, 0{,}76)$
Dom de 0 a 2 en x
Decreciente $(0.76\ , 2.0)$
Rang de 0 a $6{,}56$ en y

En estas afirmaciones se observa la interpretación realizada por los estudiantes de los elementos del sistema de representación gráfico del modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo a una descripción verbal.

Situación Didáctica No. 2

Traducción de la Forma general de la función cúbica al sistema de representación gráfico a través de la variación de sus parámetros.

En la fase de acción de la Situación Didáctica No. 2 los estudiantes manipularon el medio y dependiendo de las condiciones de la tabla dada en la hoja de respuesta de ésta situación, dibujaron retroacciones con sus respectivas expresiones algebraicas. Esta actividad fue satisfactoria ya que los estudiantes no encontraron dificultades en la compresión de la actividad, y los registros de las observaciones realizadas en el medio son en su mayoría correctas. En el Anexo No. G en las producciones escritas de los estudiantes de la Situación Didáctica No. 2 se puede apreciar esto.

En la fase de formulación con respecto a la comprensión del efecto del parámetro A en el comportamiento de la gráfica de la función cúbica, los grupos realizaron las siguientes argumentaciones:

Camila y Daniel: Determina si A, crece o decrece, cuando A es positivo la gráfica crece y cuando es negativo la gráfica decrece.

Jhonatan y Carlos: El parámetro A nos dice si la gráfica es creciente o decreciente, cuando es creciente el parámetro A es positivo y decreciente cuando es negativo, y cuando A va aumentando la gráfica se va acercando al eje "y", y cuando A disminuye da el mismo efecto.

En estas afirmaciones se refleja que los estudiantes comprendieron en general el efecto que tiene el parámetro A en la gráfica de la función cúbica, además Jhonatan y Carlos describen un comportamiento más específico del parámetro cuando se toma a este como una cantidad que cambia, afirmando que cuando A aumenta o disminuye la gráfica se va acercando al eje "y". Esta afirmación hace referencia a las ramas de la función cúbica que tienden al eje positivo o negativo de las ordenadas (y), cuando A aumenta o disminuye, este tipo de observaciones se previeron en el análisis *a priori* de la situación en la fase de acción.

En relación a la deducción del efecto del parámetro B, los estudiantes realizaron las siguientes afirmaciones escritas:

Camila y Daniel: Cambian las curvas cuando A y B son positivos, si B aumenta las curvas se vuelven más grandes y dos extremos formando un máximo y un mínimo, hay un máximo en el cuadrante II y uno en el origen y cuando B<0 disminuye queda un mínimo en el cuadrante IV y un máximo en el origen.

Jhonatan y Carlos: Cuando B es mayor a 0 aumentando se puede observar que el tamaño de las curvas va aumentando, y cuando ocurre esto el punto mínimo se encuentra en el origen, cuando B es menor a 0 las curvas igual aumenta solo que en este caso el punto máximo estará en el origen.

En estas afirmaciones se identificó el efecto previsto en el análisis *a priori*, en general se pudo visualizar en el medio que el parámetro B forma dos extremos locales, uno de ellos estará ubicado en el origen y el otro dependiendo de los valores de los parámetros de A y B puede estar ubicado en los diferentes cuadrantes.

Las preguntas c) y d) como se había previsto en el análisis *a priori* tenían como propósito la deducción del efecto parámetro C en la representación gráfica de la función cúbica, tomando como valores fijos los parámetro A, B, como cantidad que cambia el parámetro C y con la condición de que A y C tuvieran el mismo signo. Las respuestas de los estudiantes a las preguntas c) y d) reflejan ideas similares sobre el efecto producido en la gráfica de la función, esto se puede evidenciar en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas de los estudiantes:

Respuestas a la pregunta c)

Camila y Daniel: el punto mínimo sube al cuadrante I y el máximo también, hasta que las curvas desaparecen.

Jhonatan y Carlos: Cuando $A > 0$ $B > 0$ $C > 0$ la gráfica (en si sus curvas) se van trasladando desde el cuadrante 2 al 3 y cuando $A > 0$ $B < 0$ $C > 0$ las curvas de la gráfica se trasladan del cuadrante 4 al 1, en estos 2 casos las curvas se trasladan hasta desaparecer y formar casi una recta.

Respuestas a la pregunta d)

Camila y Daniel: el máximo sube al cuadrante II y el mínimo también, hasta llegar al punto de desaparecer.

Jhonatan y Carlos: Cuando $A < 0$ $B > 0$ $C < 0$: la gráfica (en si sus curvas) se van trasladando desde el cuadrante 1 al 4 y cuando $A < 0$ $B < 0$ $C < 0$ las curvas de la gráfica se trasladan del cuadrante 3 al 2, en estos 2 casos las curvas se trasladan hasta desaparecer y formar casi una recta.

Se puede observar que Camila y Daniel en cada pregunta solo consideran el caso cuando el parámetro fijo B es mayor a 0, sin embargo, la visualización que hacen en general es correcta al identificar el desplazamiento de los extremos locales a un solo cuadrante y la desaparición de estos cuando el valor de C aumenta o disminuye, dependiendo de las condiciones establecidas.

En el caso de Jhonatan y Carlos sus respuestas son más específicas, consideran los casos cuando el valor del parámetro fijo B es mayor o menor a 0 e identificaron los cuadrantes que intervinieron en su comportamiento, sin embargo, en su afirmación hicieron uso del término curva para referirse a las concavidades de la gráfica, que puede ser una manera análoga de describir el efecto del parámetro C en el comportamiento de la gráfica.

En conclusión se evidencia que los estudiantes realizaron una visualización similar a la prevista en el análisis *a priori* sobre el efecto del parámetro C cuando se toma a A y B como valores fijos y a C como una cantidad que cambia, con la condición de que los parámetros A y C tengan el mismo signo.

Las preguntas e) y f) como se había previsto en el análisis *a priori* tenían como propósito la deducción del efecto parámetro C en la representación gráfica de la función cúbica, tomando como valores fijos los parámetro A, B, como cantidad que cambia el parámetro C y con la condición de que A y C tuvieran signos contrarios. Las respuestas de los estudiantes a las preguntas e) y f) se evidencian en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas de los estudiantes:

Respuestas a la pregunta e)

Camila y Daniel: Que el punto máximo se va para el cuadrante II y el mínimo para el cuadrante IV aumentando su tamaño pero siempre tocando el origen. Cuando B es positivo la curva más grande está en el cuadrante II y cuando esta negativo hasta el cuadrante IV.

Jhonatan y Carlos: Antes de que C disminuya en $A > 0$ $B > 0$ $C < 0$ las dos curvas son un tanto pequeñas y el punto mínimo se encuentra en el origen y cuando C ya disminuye las curvas se agrandan y el punto mínimo se aleja del origen trasladándose al cuadrante 4 y cuando $A > 0$ $B < 0$ $C < 0$ ocurre este proceso con el punto máximo y pasa al cuadrante 2.

Respuestas a la pregunta f)

Camila y Daniel: Podemos ver que el mínimo pasa a cuadrante III y el máximo al cuadrante I, y si B es positivo la curva mayor es en el cuadrante I y si es negativo en el cuadrante III.

Jhonatan y Carlos: Cuando $A < 0$ $B > 0$ $C > 0$ se puede concluir que cuando el punto mínimo está en el origen y aumenta C este pasa al III cuadrante y cuando $A < 0$ $B < 0$ $C > 0$ ocurre este mismo proceso con el punto máximo solo que este se traslada al cuadrante I.

Camila y Daniel en sus afirmaciones realizaron en general una descripción correcta del efecto del parámetro C con las condiciones establecidas, sin embargo nuevamente hace presencia el término curva, refiriéndose a las concavidades de la gráfica, para tratar de describir el comportamiento de los extremos locales cuando el parámetro C varía.

Jhonatan y Carlos en sus afirmaciones realizaron una visualización basada en el comportamiento del extremo local ubicado en el origen cuando el valor del parámetro C parte de 0 y varía, sin embargo, dejan a un lado la descripción del otro extremo local, y las relaciones de estos con respecto al origen.

En conclusión, se evidencia que Camila y Daniel realizaron observaciones similares a la prevista en el análisis *a priori* sobre el efecto del parámetro C cuando se toma a A y B como valores fijos y a C como una cantidad que cambia, con la condición de que los parámetros A y C tengan signos contrarios, por otra parte las afirmaciones de Jhonatan y Carlos reflejan que su descripción es en parte correcta, sin embargo, la no descripción del comportamiento del otro, extremo local, puede influir negativamente en la interpretación del efecto del parámetro C según condiciones establecidas.

La pregunta g) tenían como propósito la deducción del efecto parámetro D en la representación gráfica de la función cúbica, tomando valores fijos los parámetro A, B, C y como cantidad que cambia el parámetro D. Las respuestas de los estudiantes a la pregunta g) se evidencian en las siguientes afirmaciones tomadas de las producciones escritas de los estudiantes:

Camila y Daniel: Podemos ver que en el eje y, se mueve el punto de corte de la gráfica, si aumentamos o disminuimos el parámetro D.

Jhonatan y Carlos: Cuando $A > 0 \;\; B > 0 \;\; C > 0 \;\; D > 0$ y D empieza aumentar el punto de corte con respecto a "y" se desplaza más arriba (aumenta) y cuando $A > 0 \;\; B > 0 \;\; C > 0 \;\; D < 0$ ocurre lo mismo solo que el corte ira en "$-$y" y el corte bajará (disminuirá).

Se puede concluir que los estudiantes visualizaron correctamente el efecto del parámetro D en la gráfica, y sus afirmaciones son las previstas en el análisis *a priori*.

En la Situación Didáctica No. 1, los estudiantes identificaron las propiedades de la función cúbica en base al modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo, esta identificación estaba condicionada por los valores de las magnitudes de la caja por tanto solo se tomaban valores positivos en la tabla, lo que restringió la observación de las propiedades al primer cuadrante en la representación gráfica.

El propósito del punto III de la Situación Didáctica No. 2 era la de reconocer y comprender con ayuda de los diferentes casos que se categorizaron en el primer punto de la Situación Didáctica No. 2, las propiedades de la función cúbica (Dominio, rango, puntos de corte con el eje de las abscisas (x), con el eje de las ordenadas (y), extremos locales), dado que en estas representaciones graficas se puede observar el comportamiento de la función en la totalidad del plano cartesiano.

Las respuestas de los estudiantes fueron las previstas en el análisis *a priori* y reflejan que las observaciones de los compartimentos que toma la función cúbica en sus diferentes casos, facilita de forma significante el reconocimiento y generalización de sus propiedades. Esto se puede observar en las producciones escritas de los estudiantes de la Situación Didáctica No. 2 en el Anexo No. G.

Situación Didáctica No. 3:

La traducción del sistema gráfico al sistema de representación algebraico a partir de la visualización de los efectos de los parámetros de la función cúbica.

Análisis de la comprensión de la Situación Didáctica No. 3: Antes de realizar los análisis de la información es preciso referirse a que en ésta situación la fase de acción fue realizada conjuntamente con la Situación Didáctica No. 2.

El estudio de los análisis se enfatiza en la fase de formulación ya que consta de dos partes: Los resultados de la Tabla del punto I donde ellos escribieron los valores de los parámetros que interpretaron como válidos para explicar los comportamientos de las gráficas. La otra parte consta de los resultados de la Tabla del punto II donde verificaron las expresiones algebraicas propuestas, a través de la retroacción del medio y las argumentaciones de las producciones escritas por los estudiantes con respecto a las preguntas a) y b), donde explicaron los comportamientos que pueden tomar los parámetros tanto en la gráfica como en su expresión algebraica.

Las repuestas dadas por los estudiantes se analizaron de las dos preguntas formuladas en la situación, las reflexiones fueron tomadas de las producciones escritas de la hoja de respuesta y la videograbación.

a) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II coinciden con las propuestas en el punto I. Explique en los casos que coinciden las gráficas, los efectos de los parámetros de la función cúbica que identificaron en las gráficas para plantear la forma general de la expresión algebraica.

b) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II no coinciden con las propuestas en el punto I. Explique en los casos que no coinciden las gráficas, cuáles fueron los parámetros que se obviaron o los efectos de éstos que se malinterpretaron para plantear la forma general de la expresión algebraica de la función cúbica.

Gráfica No. 1, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Las siguientes respuestas fueron tomadas de las producciones escritas de los estudiantes:

Daniel y Camila: en la gráfica uno podemos ver que coincide porque nuestros parámetros coinciden y el parámetro A nos dice que es una gráfica creciente.

Jhonatan y Carlos: Son parecidas porque son crecientes porque el parámetro A es parecido y no tiene curvas y quedaría más parecida sin el parámetro B.

En la Gráfica No. 1, los dos grupos comprendieron con facilidad el efecto del parámetro A sobre la gráfica de la función cúbica al escribir que es creciente, pero según las expresiones algebraicas tiene sus diferencias, ya que para Daniel y Camila la forma debería ser $y = 3x^3$ y para Jhonatan y Carlos la forma es: $y = 2x^3 + 4x$. En éstas respuestas se puede concluir que las representaciones dadas por Daniel y Camila con respecto a la gráfica uno son acertadas, sin embargo, en la forma de la representación algebraica para Jhonatan y Carlos designaron un valor para C, su justificación en la videograbación es la siguiente: "el efecto de C si es positivo y A es también es positivo suavizaría las curvas y se acercarían al eje y, después admiten la equivocación y dicen los siguiente: "…el parámetro C está incorrecto y debería ser cero porque no debería suavizar las curvas".

Cuando Carlos utiliza el término suavizar la curvas está haciendo referencia a que los extremos locales de la representación gráfica de la función tienden desaparecer.

De acuerdo con las respuestas encontradas los estudiantes interpretaron el efecto del parámetro A que tiene sobre la gráfica y en la traducción que realiza hacia la expresión algebraica.

Gráfica No. 2, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Para ésta gráfica, los estudiantes encontraron las siguientes respuestas:

Daniel y Camila: La segunda gráfica coincide porque vemos que es decreciente y el punto máximo está en el origen.

Jhonatan y Carlos: Son parecidas porque toman 2 extremos y por lo tanto el parámetro “A” es negativo y un extremo está en el origen y otro en el cuadrante 3.

Se puede evidenciar que en los dos grupos han interpretado los efectos de los parámetros de manera semejante y llegan a la misma conclusión, al respecto de la conclusión aluden que los parámetros B y D toman el valor de cero, lo cual es verdadero ya que estos parámetros no intervienen en la Gráfica No. 2. Además observaron que existen extremos locales, asociando este comportamiento de la gráfica al parámetro B.

Gráfica No. 3, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

En el grupo de Daniel y Camila los parámetros están dentro de los comportamientos descritos en el diseño de la situación, sin embargo, para Jhonatan y Carlos los resultados no fueron los apropiados, se describen a continuación:

Daniel y Camila: En la tercera gráfica coincide pero para mayor perfección aumentamos el parámetro B. La forma de la expresión algebraica escrita por ellos es: $y = 1x^3 + 3x^2 + 3x$

Jhonatan y Carlos: Son crecientes porque el parámetro A es positivo pero el parámetro B se diferencia porque tendría que ser positivo. El parámetro B porque aumenta y cuando es positivo los extremos se ubican en el tercer cuadrante. La forma de la expresión escrita por ellos es: $y = 3x^3 - 2x^2 + 4x$

Aquí se evidencia que aunque los resultados no fueron los esperados, ellos explican que ocurrió y como sería la respuesta correcta. En la videograbación admiten que se equivocaron en un parámetro, en el B:

Carlos: No nos coincidió porque nos equivocamos en algunos parámetros

Investigador: ¿En qué parámetros en específico se equivocaron?

Carlos: "En el B, nosotros pusimos que era negativo en realidad debería ser positivo, ya que al ser positivo nos daría un extremo local y un mínimo local … pensábamos que nos iba dar curva en la parte de abajo pero no nos dio ese es el que teníamos mal".

En ésta parte se logra una de los aspectos relevantes que debería tener una actividad matemática ya que, es el estudiante el que debería caer en cuenta de sus errores, de esta manera se puede afirmar que es posible que el estudiante aprenda un conocimiento matemático.

Gráfica No. 4, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Los resultados que se encontraron en el desarrollo de ésta gráfica se describen a continuación, estas respuestas fueron tomadas de las producciones escritas:

Daniel y Camila: No coincide la gráfica cuatro porque en la tabla uno vemos un punto máximo y un mínimo y con los parámetros que dimos no muestra estos puntos, para ser iguales tiene que disminuir el B en negativo y el C aumentar. La forma de la expresión escrita por ellos es: $y = 3x^3 + 3x^2 + 2x$.

Admiten las equivocaciones de los valores de los parámetros que propusieron, pero proponen cómo deberían ser los valores correctos.

Jhonatan y Carlos: Los signos de los parámetros son correctos pero las medidas fallaron en B porque tendría que ser más grande porque forma la curva.

Para ésta gráfica los dos grupos no encontraron los valores correctos de algunos de los parámetros, que describían su gráfica; la dificultad se presentó en la interpretación de los valores que debería tener el parámetro B, ya sea positivo o negativo. En la videograbación se puede detallar cómo los estudiantes intentan de diversas maneras interpretar el comportamiento de la gráfica sin llegar a una conclusión veraz y concluyente por parte de ellos, solo Daniel y Carlos caen en cuenta de cómo sería estos valores para que describiese de esa manera el efecto del parámetro B.

Gráfica No. 5, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

En ésta gráfica las apreciaciones escritas por parte de los estudiantes fueron las siguientes:

Daniel y Camila: La gráfica número 5 coincide porque nos indica que la gráfica es decreciente y los valores para los parámetros A y B tiene que ser negativos y C debe ser positivo y si C aumenta las curvas se nos harían más grandes. La forma de la expresión escrita por ellos fue: $y = -3x^3 + (-8)x^2 + 2x$.

Jhonatan y Carlos: Las 2 gráficas son decrecientes y similares en cuanto a la ubicación de las curvas. La forma de la expresión escrita por ellos es: $y = -2x^3 - 3x^2 + 2x$.

En un aparte de la videograbación se detalla la explicación que da Carlos con respecto a ésta gráfica, de la siguiente manera:

Carlos: A nosotros si nos coincidió la gráfica.

Investigador: Explíquenme porque en cada parámetro.

Carlos: El parámetro A al ser negativo, nos da una gráfica que sea decreciente, el parámetro B al ser negativo hace que el mínimo local sea una curva más grande que la del máximo local, el valor de C al ser positivo y de signo contrario a A hace que el mínimo y el máximo local se ubiquen en cuadrantes opuestos y D al ser cero hace que el punto de corte con respecto a y sea en el origen.

Se demuestra que para este caso los dos grupos han identificado los valores que pueden tener los parámetros correctamente y han validado las respuestas entre los grupos llegando a la misma conclusión.

Gráfica No. 6, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Para esta gráfica estas son las apreciaciones:

Daniel y Camila: La gráfica número 6 coincide y los parámetros nos muestra que A y C tienen valores positivos y B y D serían cero y si aumentamos C podemos ver que se vuelve más recta. La forma de la expresión escrita por ellos es: $y = 2x^3 + 0x^2 + 1x$.

Jhonatan y Carlos: Son similares ya que las 2 son crecientes pero el valor de "C" tuvo que saber sido un poco más bajo y ambas son crecientes. La forma de la expresión escrita por ellos es: $y = 3x^3 + 6x$.

De igual manera, como en la anterior gráfica los grupos han interpretado los efectos de los parámetros correctamente y que producen en la representación gráfica.

Gráfica No. 7, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Daniel y Camila: la gráfica 7 no coincide porque el parámetro B tiene que ser cero y el parámetro C tiene que ser un poco menor y si disminuye C las curvas serían mayores y A y C tiene que ser de signos opuestos. La forma de la expresión algebraica escrita por ellos es: $y = 2x^3 + 8x^2 + (-2)x$. Sin embargo, dijeron a través de la videograbación: En el parámetro B colocamos 8 porque pensábamos que las curvas eran grandes.

En ésta gráfica existió una confusión con respecto al parámetro B ya que como en la representación gráfica se observa que existen extremos locales, asociaron el efecto del parámetro B con esta interpretación, de acuerdo con ese tipo de resultados se puede inferir que es necesario trabajar con varias representaciones para que el estudiante visualice de diferentes maneras un objeto matemático.

Jhonatan y Carlos: Las gráficas son crecientes y al no estar presente B las 2 curvas son parecidas y no es una más grande que la otra. La forma de la expresión algebraica escrita por ellos es: $y = 4x^3 - 8x$.

Gráfica No. 8, en el Anexo No. E, Situación Didáctica No. 3.

Daniel y Camila: No coincidió porque B tendría que ser cero para que no nos de puntos máximos o mínimos y C también sería cero para que se forme una parte como una curva pero sin que exista el punto máximo ni mínimo. La forma de la expresión algebraica escrita por ellos fue: $y = 2x^3 + (-1)x^2 + 3x + 2$.

Jhonatan y Carlos: Las dos gráficas son crecientes solo que el valor de C no debía ser 7 sino 0, ya que cuando C aumenta se desaparecen las curvas y al ser 0 hay una curva sin extremo local ni mínimo local.

La forma de la expresión algebraica escrita por ellos fue: $y = 2x^3 + 7x + 3$.

Para esta gráfica ninguno de los grupos interpretó correctamente los efectos de los parámetros que participaban. No obstante, después de una discusión que se puede encontrar en la videograbación en la cual involucró a Daniel y Carlos como los actores principales, solo Carlos tuvo la capacidad de interpretar correctamente los valores de los parámetros que intervenían en este caso.

Al término del análisis de la comprensión los obstáculos que según los investigadores fueron superados o tuvieron algunas soluciones gracias a la secuencia de situaciones didácticas planteadas como se previó en los análisis preliminares fueron los siguientes:

En la primera situación, los obstáculos de Sierpinska (1992) que fueron superados son:

> OE(f)-1: (Una filosofía de las matemáticas): Las matemáticas no están interesadas en los problemas prácticos.

> OE(f)-2: (Una filosofía de las matemáticas): Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en matemáticas. (pp. 31-32)

Porque se abordó el estudio de la función cúbica a través de un problema que fue traído de un contexto y que durante el desarrollo de la situación se usaron diferentes tablas donde se encontraban valores que estaban relacionados y que eran de gran ayuda para encontrar las repuestas. Se superaron cuando se realizó el tránsito entre los sistemas de representación presentes en la situación.

En la realización de la segunda y tercera situación los obstáculos que fueron superados y que estaban presentes en las actividades matemáticas se refieren a la categorización que hace Kaput (según Gómez & Carulla, 2001), donde los estudiantes realizaron transformaciones sintácticas porque identificaron los elementos que constituían los sistemas de representación como también realizaron el tránsito entre diversos sistemas asociando los elementos e interpretando la información que encontraban en cada pregunta de éstas situaciones. De igual manera encontraron diferentes formas de representación de una expresión algebraica.

8.2.3. Análisis de la Interacción Didáctica

Como se planificó en las Unidades para el estudio de la Interacción Didáctica, a continuación se escribirán los aspectos importantes que tuvieron lugar en el desarrollo de la secuencia de las situaciones didácticas, de acuerdo a las unidades descritas:

La administración del trabajo realizado, con respecto a la organización e implementación de las secuencias didácticas en el aula

Se puede afirmar que el diseño propuesto por los investigadores por medio de ésta *micro – ingeniería didáctica* fue exitoso, porque la aceptación por parte de los cuatro estudiantes que intervinieron en la investigación fue positiva frente al desarrollo de la secuencia y del medio utilizado en cada una de ellas, ya que despertaron en ellos el interés por aprender un nuevo conocimiento, además se encontraban dispuestos para afrontar y comprender lo que se les había manifestado cuando se comentó en que iban a participar. A medida que se desarrollaron las secuencias, en ellos se incrementaba el interés por dar respuesta a las situaciones y preguntas formuladas.

La metodología propuesta por los investigadores fue recibida con agrado por lo estudiantes, como se había mencionado en la Dimensión Didáctica los estudiantes estaban acostumbrados a la enseñanza tradicional donde el actor principal en el desarrollo de las clases era el docente, ahora desde el primer instante ellos eran los constructores de manera individual y colectiva del conocimiento, el medio dispuesto en cada una de las situaciones favoreció considerablemente el desarrollo de éstas.

La mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus fue indispensable en el acercamiento del conocimiento de las situaciones porque se proporcionaron unas construcciones que rompieron el esquema que estaban acostumbrados los estudiantes, donde sólo se consignaban en el cuaderno los saberes aprendidos, la integración del AGD seleccionado en la investigación desplegó en ellos una serie de acciones y retroacciones que motivaron la participación, la reflexión, el debate, formulación de hipótesis y la validación de la respuestas encontradas en el desarrollo de cada una de la situaciones pertinentes en el estudio de la función cúbica.

Con respecto a la disposición de las instalaciones y artefactos del Instituto, no hubo, mayores inconvenientes, sin embargo, hay que resaltar que las sesiones no se desarrollaron en un solo salón de clases, sino en un auditorio, salón de proyecciones, oficina y la biblioteca como se comprueba en las videograbaciones.

La Situación Didáctica No. 2, fue la que tuvo mayor aceptación en los estudiantes, las evidencias se resaltan en la hoja de respuesta y en las videograbaciones.

La administración frente al tratamiento de la función cúbica y las traducciones de los sistemas de representación:

La administración de la función cúbica estuvo condicionada por el diseño de las situaciones planteadas en el análisis *a priori*, como también las instrucciones y la comprensión de éstas; así mismo, por el desarrollo de las preguntas orientadoras por parte de los estudiantes y las estrategias que se propusieron para el desarrollo de las situaciones didácticas.

La Situación Didáctica No. 1 se vio inquietada al principio por distinguir cuales variables eran las que cambiaban y cuáles eran las dependientes o las independientes, ya que ellos no estaban acostumbrados a este tipo de actividades donde se forzaba a encontrar las respuestas a través de la interacción con un medio construido en Cabri Géomètre II Plus sin la intervención del docente. Pero a medida que transcurrió la situación y acorde con la *micro-ingeniería didáctica*, los estudiantes realizaron la misma actividad hasta encontrar las soluciones posibles a ésta, después los estudiantes comprendieron que, por sí mismos, estaban encontrando las respuestas requeridas tomando confianza en el desarrollo de la situación.

En la primera parte de la situación, en las respuestas de las primeras preguntas orientadoras se vio reflejada esta confusión (la enunciada anteriormente), pero que en los análisis *a priori* realizados estaban previstos, también es importante destacar que ellos tenían dominio de saberes previos, como encontrar el área de un rectángulo, el volumen de un paralelepípedo, el volumen de un cubo. En la consignación de los valores en la tabla no existieron mayores inconvenientes. En la segunda parte, el desarrollo de la situación en grupos alcanzó el objetivo, donde los estudiantes discutieron sobre las repuestas encontradas y la toma de decisiones sobre cuáles serían pertinentes para dar solución a las preguntas.

Se encontró un aspecto paradójico, cuando se propuso que deduzcan una expresión algebraica para el volumen, al principio ellos no tuvieron *fluidez algorítmica* en el planteamiento y desarrollo de ésta, tomándose un tiempo superior con respecto a las anteriores preguntas para la escritura final de la expresión algebraica, porque como se afirmó en la Dimensión Didáctica, ellos estaban acostumbrados a trabajar en el sistema de representación algebraico. Gracias a la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus, la traducción hacia el sistema de representación gráfico fue eficiente comprendiéndola y relacionándola con el problema inicial.

En la fase de Validación confrontaron sus respuestas, abriendo espacios para la discusión y el análisis de la situación, como también dijeron algunas conclusiones finales. Se pudo apreciar que los estudiantes estaban dispuestos en la realización del debate y cuando se presentaban respuestas diferentes a las suyas llegaron a un consenso general. Al término de esta fase se realizó la fase de Institucionalización de los saberes aprendidos que desarrollaron los estudiantes, ésta parte fue realizada por los investigadores detallando de forma general y descontextualizada los saberes comprendidos en esta situación didáctica.

La Situación Didáctica No. 2 se vio inquietada por los estudiantes cuando plasmaron la gráfica correspondiente de la función cúbica de acuerdo con las condiciones planteadas en la tabla para los parámetros A, B, C y D, porque el medio producía varias representaciones gráficas de las cuales los estudiantes debían interpretar el comportamiento general y su representación algebraica respectiva, los estudiantes nunca habían observado hasta el momento el comportamiento de los parámetros de la función cúbica y que efectos producía en los dos sistemas de representación (gráfico - algebraico). El medio desarrollado en Cabri Géomètre II Plus intervino para identificar las diversas representaciones que se presentaban en el desarrollo de la situación.

Desde el inicio de ésta situación los estudiantes trabajaron en grupos lo que condujo a la discusión y demostración de las estrategias para comprender la traducción de la representación gráfica a la algebraica sin pasar por otra representación. Debido a la carencia de algunos saberes previos como encontrar los ceros o raíces de un polinomio de segundo grado y/o por medio de la factorización, como también la realización de la gráfica de la función cuadrática como se mencionó en la Dimensión Didáctica, entonces sólo fue posible observar los puntos de corte con el eje de las abscisas (x) y el eje de las ordenadas (y) exactamente en la gráfica a través del medio dispuesto para ello.

En la fase de formulación, los estudiantes después de haber realizado de manera coherente la anterior parte, según las instrucciones de la secuencia procedieron a contestar las preguntas orientadoras con el fin de propiciar de manera general cuales eran las características de los efectos de los parámetros en los dos sistemas de representación. Se pudo evidenciar que las respuestas de las preguntas formuladas están argumentadas ampliamente fruto de las interacciones y estrategias realizadas por parte de ellos. En la videograbación de esta fase se constata la seguridad con la que argumentan sus respuestas, dando a conocer claramente los puntos de vista de cada pregunta pero al mismo tiempo aceptando sugerencias del grupo contradictor para dar una solución general a éstas.

De acuerdo a los análisis *a priori* se procedió a realizar la fase de institucionalización donde se expresó en el medio, en la representación gráfica y algebraica de manera general los comportamientos de la función cúbica que estaban inmersos en esta situación y como se podrían aplicar para otras funciones.

Como la Situación Didáctica No. 3, estaba relacionada con la anterior, los puntos críticos se presentaron cuando en la realización de la situación no se empleó el medio, sin embargo, como los estudiantes trabajaron de manera grupal supieron aprovechar esta parte para deducir con el compañero que valores podrían tomar los parámetros en la gráficas para que causaran esos efectos y en consecuencia escribir la forma general de la expresión algebraica. En la formulación emplearon el medio realizado en Cabri Géomètre II Plus, aquí el diseño de la situación sugirió que los estudiantes argumentaran con sus propias palabras lo que habían hecho y comprendido, éstas argumentaciones se encuentran concretadas en las expresiones escritas.

En la fase de validación, como se muestra en la videograbación, ellos explican con sus propias palabras como llegaron a las repuestas y como es el comportamiento de la función cúbica según los efectos que producen sus parámetros. Así mismo, como en las dos situaciones anteriores, culminada esta parte se institucionalizó el saber adquirido, explicando de manera general el comportamiento de los parámetros de la función cúbica y los efectos que tiene sobre ella, además se generalizaron éstos efectos para visualizar como intervienen en otros sistemas de representación.

La construcción del conocimiento de las sesiones en el aula

La construcción de los conocimientos elaborados en el aula permitieron manifestar que, como se presenta en la génesis de la función, el tratamiento de la función cúbica en la enseñanza empezaría con las indagaciones que se encuentran en las relaciones de magnitudes variables y en la descripción y posterior explicación de fenómenos físicos, donde haga presencia la variabilidad. Además, el desarrollo de la intuición en el estudiante es importante ya que permite encontrar diversas formas de representación como en las gráficas, en el lenguaje escrito, entre otras. Con relación a la secuencia desarrollada y en beneficio para la investigación afirma Hitt (2002): "Los estudios desarrollados sobre la comprensión de funciones muestran que para la enseñanza media la definición más apropiada es la que explícitamente se refiere a la variable."(p.75). Así mismo, en Hitt (2002a) se afirma lo siguiente: "La definición conjuntista, como la que presentó el grupo Bourbaki, puede ser enseñada a estudiantes de una carrera de matemáticas." (p.75)

Las representaciones que sobresalieron en la secuencia fueron la descripción verbal, encontradas en las producciones escritas en la hoja de repuesta y en las videograbaciones que hacen parte de la validación; las tablas, presentes en la identificación de las regularidades de las magnitudes y parámetros; la representación gráfica presente en todas las situaciones constituyéndose en parte fundamental en el desarrollo de éstas, ya que el medio utilizado en Cabri Géomètre II Plus sirvió para visualizar estas representaciones y por último el sistema de representación algebraico porque de igual manera, estuvo en las tres situaciones y tenía el propósito de relacionar las representaciones que ellos habían trabajado en las clases del Instituto.

Conclusiones

En los análisis de los resultados se identificaron las acciones matemáticas realizadas por los estudiantes en las diferentes situaciones didácticas, aunque la mayoría de éstas fueron previstas en el análisis *a priori*, se reconoce que algunas de ellas escaparon a lo planificado. A través del contraste entre el análisis *a priori* y *a posteriori* de las acciones matemáticas de los estudiantes se determinaron las conclusiones de ésta investigación, las cuales están categorizadas, primero por las conclusiones generales de cada Situación Didáctica, segundo las conclusiones de los análisis de contenido, de la comprensión y de la interacción didáctica, tercero las conclusiones que se dieron en la integración de Cabri Géomètre II Plus como instrumento mediador entre el saber y el estudiante, cuarto las dificultades que se presentaron en la implementación de la secuencia de las Situaciones Didácticas y por último sugerencias para futuras investigaciones desde la corriente de la micro- ingeniería didáctica.

Conclusiones generales de las Situaciones Didácticas:

En la Situación Didáctica No. 1: El estudiante obtuvo un modelo funcional del problema de la caja de volumen máximo, transitando por los diferentes sistemas de representación, a partir de la descripción verbal. La interacción con el medio hizo que las representaciones internas de los estudiantes se volvieran tangibles en las tablas, identificando la variabilidad de las magnitudes y la dependencia entre ellas.

Propiedades como el dominio y el rango del problema no fueron identificados del todo en las tablas pero si la determinación de un máximo local y la comprensión de este punto como la solución del problema de la caja de volumen máximo.

El reconocimiento de las dimensiones del rectángulo que representaba la cartulina que se requería recortar comprendidas por las dimensiones de la caja y la altura, provocó en los estudiantes caracterizar la dependencia del ancho y el largo de la caja en términos de la altura. La relación de estos elementos con ayuda de la notación propuesta para las magnitudes indujo a proponer una expresión algebraica representando estos fenómenos.

Con las expresiones algebraicas de las dimensiones de la caja, se relacionó la fórmula del volumen de un paralelepípedo descrita en el medio con las expresiones de las dimensiones de la caja, para obtener un modelo funcional del volumen en términos de la altura y se pudo identificar las transformaciones sintácticas realizadas por los estudiantes en el sistema de representación algebraico y el reconocimiento del modelo como una función polinómica de grado tres.

Los estudiantes tradujeron la expresión algebraica del modelo funcional al sistema de representación gráfico utilizando las herramientas que el medio ofrecía relacionando las magnitudes variables de la caja con los ejes coordenados del plano cartesiano (traducciones entre sistemas de notación, Kaput, 1992).

La gráfica del modelo funcional hizo palpable las propiedades implícitas en este modelo y su interpretación de estas a la solución del problema.

Con el modelo funcional y la identificación de sus propiedades, se comprendió los elementos de la función cúbica contextualizado en un problema de la vida cotidiana, se obtuvo relaciones e interpretaciones de variabilidad y dependencia en las tablas, sin embargo, el reconocimiento de sus propiedades estuvo restringido al dominio positivo de las magnitudes debido a la naturaleza de éstas.

En la Situación Didáctica No. 2: El estudiante realizó la traducción del sistema de representación algebraico al gráfico de la función cúbica, sin transitar en otro sistema de representación.

Con el dinamismo del medio el estudiante identificó los comportamientos de las gráficas en los diferentes casos, condicionadas por los roles que tomaron los parámetros, como punto fijo y cantidad que cambia, observando el valor del parámetro como variable y constante.

Relacionó los diferentes casos para deducir un efecto general del parámetro y comprender reglas que condicionaban el comportamiento final en la gráfica de la función cúbica.

En los diferentes casos planteados la observación de los efectos de los parámetros en el comportamiento de la gráfica de la función cúbica, hizo posible el reconocimiento de las propiedades matemáticas de la función cúbica (dominio, rango, puntos de corte con el eje de las abscisas (x), con el eje de las ordenadas (y), extremos locales) sin tener restricción de sus valores.

En la Situación Didáctica No. 3: El estudiante realizó la traducción del sistema de representación gráfico al algebraico, sin transitar en otro sistema de representación, tomando como base los conocimientos adquiridos de la Situación Didáctica No. 2 y los saberes previos que poseían.

La deducción de los parámetros de la expresión algebraica de la función cúbica como se había previsto en algunos casos no tuvo éxito, debido a interpretaciones imprecisas de los parámetros, sin embargo, el diseño de la situación permitió que los estudiantes rectificaran sus imprecisiones en sus respuestas, estableciendo argumentos en la deducción del valor de un parámetro a través de la visualización de la gráfica.

Conclusiones del análisis de contenido, de comprensión y de la interacción didáctica

Al respecto de los análisis de contenido, se puede concluir que:

- En el aprendizaje de la función cúbica, las traducciones entre representaciones no tiene un orden preestablecido y que a través de una secuencia de situaciones didácticas se puede proponer alternativas de tránsito entre los sistemas de representación de la función cúbica.

- La diferenciación entre magnitudes constantes y magnitudes variables y la dependencia funcional entre dos magnitudes son susceptibles de ser comprendidas por los estudiantes a partir de los sistemas de representación de tablas, expresiones algebraicas y gráficas.

Al respecto de los análisis de la comprensión, se puede concluir que:

- La enseñanza de la función cúbica basada en la utilización de los diferentes sistemas de representación, dota y enriquece al estudiante de elementos sintácticos que puede utilizar para identificar, relacionar, interpretar y comunicar las diferentes acciones matemáticas propuestas en el desarrollo de las situaciones didácticas para la caracterización de la función cúbica y sus propiedades.

- La visualización básica y funcional de la información implícita en los sistemas de representación permitió además de la solución del problema de la caja de volumen máximo, el reconocimiento de la función cúbica y sus propiedades asociadas al problema.

- La visualización de los efectos de los parámetros de la forma general de la función cúbica es posible si el estudiante es orientado a realizar procesos de observación, relación e interpretación de los roles de los parámetros en el sistema gráfico a través de una categorización por casos que permitan la deducción de estos.

- La determinación de los valores de los parámetros de la expresión algebraica de la función cúbica observando las gráficas propuestas es posible si el estudiante ha comprendido los efectos de los parámetros A, B, C y D.

- Las traducciones de los elementos de la función cúbica en los sistemas de representación son posibles cuando los estudiantes son introducidos en procesos de reconocimiento de regularidades y propiedades de este objeto matemático con la mediación de las construcciones dinámicas diseñadas en Cabri Géomètre II Plus.

- Después de la aplicación de la secuencia de situaciones didácticas se evidencia que las traducciones entre los sistemas de representación de la función cúbica son procesos que llevan un período de tiempo considerable para poder ser asimilados. Por lo tanto, para la traducción de un sistema de representación a otro, hace falta intervenciones didácticas como las que se propusieron en esta investigación para la comprensión de conceptos matemáticos.

- A través de la secuencia de situaciones didácticas se realizaron traducciones entre los sistemas de representación matemáticos de manera directa, es decir, sin pasar a otros sistemas de representación. Como se evidenció en la Situación Didáctica No. 2, donde se realizaron traducciones partiendo del sistema de representación algebraico hacia el gráfico variando los parámetros de la función cúbica. De igual manera, en la Situación Didáctica No. 3, se realizaron traducciones de la función cúbica partiendo del sistema gráfico al sistema de representación algebraico sin utilizar otro sistema de representación matemático.

- El obstáculo epistemológico propuesto por Sierpinska (1992) que afirmaba OE(f)-1: "Las matemáticas no están interesadas en los problemas prácticos", fue superado porque los estudiantes estuvieron inmersos en procesos de identificación de regularidades y dedujeron un modelo funcional del volumen de la caja en términos de la altura.

- El obstáculo epistemológico propuesto por Sierpinska (1992) afirmaba que OE(f)-2: "Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en matemáticas", sin embargo, las tablas de la Situación Didáctica No. 1 proporcionaron información para la identificación de las regularidades entre las magnitudes de la caja como la variabilidad y la dependencia entre ellas. También se debió interpretar y relacionar los elementos implícitos de este sistema de representación para la traducción hacia la representación algebraica y gráfica; aunque no se reconocieron algunas características de la función cúbica, se logró encontrar la solución al problema planteado. Por lo tanto, este obstáculo puede ser superado si los estudiantes son inmersos en procesos de identificación de regularidades de las magnitudes variables.

Al respecto de los análisis de la interacción didáctica, se puede concluir que:

- Fue importante el desarrollo de las tres situaciones para demostrar que la participación de los estudiantes en todos los momentos de las clases es indispensable para un aprendizaje significativo, y que este tipo de estrategias conlleva a que el estudiante conjuntamente con el saber, se constituyan en las partes fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos a nivel escolar, donde el docente solo intervenga en el diseño de las situaciones y en la parte final aclarando algunas ideas imprecisas y formalizando el conocimiento adquirido.

- La estrategia de enseñanza utilizada en la investigación cambió significativamente algunas de las concepciones de los estudiantes que tenían entorno a las clases de matemáticas. El cambio del *contracto didáctico* generó dificultades al inicio de la puesta en acto de las situaciones, los estudiantes debido a su adaptación a un contrato didáctico tradicional esperaban la participación del docente en el desarrollo de las situaciones, sin embargo, la aclaración de las reglas de juego de las situaciones permitió al estudiante ser gestor y constructor de su propio conocimiento.

- La interacción entre ellos propició la búsqueda de alternativas y estrategias para dar solución a las preguntas donde validaban conjuntamente sus respuestas aceptando sugerencias y llegando a concesos generales, sin dar importancia del grupo en el que trabajaron.

- El énfasis en los sistemas de representación y en interacciones didácticas en donde los estudiantes sean los protagonistas, favorece en la disminución de los contenidos del currículo de matemáticas lo que permite la construcción del saber en lugar de la memorización.

- La no presencia del docente de la asignatura del Instituto, ayudó sustancialmente a la investigación, debido a la libertad con que se encontraban los estudiantes, lo que permitió que ellos no se cohibieran cuando aplicaban sus acciones y retroacciones en las situaciones didácticas.

- Las fases de la TSD fueron abordadas de manera natural a través de las tres situaciones didácticas por parte de los estudiantes sin ser necesario insistir en algunos de los estudiantes en la complementación de algunos de éstas para dar solución a las preguntas de las situaciones didácticas.

Conclusiones de la integración de Cabri Géomètre II Plus, como instrumento mediador entre el saber y el estudiante fue productivo para

- Explorar, observar e interactuar diferentes elementos de los sistemas de representación matemáticos de la función cúbica y posteriores traducciones entre ellos.

- Acceder a un *medio* donde los estudiantes manipularon libremente de manera dinámica valores, gráficas y expresiones algebraicas concernientes a la función cúbica.

- Que el estudiante comprendiera cuales acciones eran convenientes para la búsqueda de respuestas a las preguntas formuladas y dar soluciones a las situaciones didácticas a través de la interpretación de las retroacciones que el medio producía.

- Ayudar a interpretar los efectos de los parámetros que tienen sobre la función cúbica en el sistema de representación gráfico y algebraico.

- Que el conocimiento sea construido por los estudiantes en las situaciones *a-didácticas*, esto encaminado en la transformación de las clases donde el actor principal en la realización de los saberes matemáticos escolares sea el sujeto que aprende.

- Crear un espacio de experimentación donde los estudiantes en tiempo real observaron diferentes interpretaciones y representaciones de la función cúbica.

- Crear caminos en beneficio de la transposición didáctica utilizada en el contrato didáctico de la Institución concernientes a la enseñanza de la función cúbica.

Conclusiones de las dificultades que se presentaron en la implementación de la secuencia de las Situaciones Didácticas

- Debido a la similitud de algunos de los comportamientos de las gráficas, los estudiantes no identificaron estas diferencias, provocando la no determinación o determinación adicional de parámetros en la expresión algebraica planteada por ellos.

- Se consideró irrelevante la determinación de la cantidad de los valores de los parámetros de la expresión algebraica de la función cúbica, por tal motivo la gráfica de la función cúbica no coincidió con la expresión algebraica propuesta por los estudiantes.

- Existió la dificultad para que los estudiantes realizaran argumentaciones escritas de los análisis de las situaciones, por no tener una apropiación de un lenguaje matemático formal que ayudara en la argumentación de sus respuestas.

- Dependencia al medio didáctico para el desarrollo de las situaciones didácticas, como por ejemplo en la Situación Didáctica No. 1, cuando a través de preguntas orientadoras se pidió obtener relaciones de la información plasmada en las tablas, algunos estudiantes trataron de obtenerlas de la construcción del problema de caja de volumen máximo, o cuando se les pidió visualizar los efectos de los parámetros para proponer una expresión algebraica de la gráfica, solicitaban la ayuda de la construcción de la representación algebraica y gráfica de la función cúbica.

- El traslado de un salón a otro ocasionó algunos inconvenientes en la puesta en acto de las situaciones ya que el tiempo estipulado para cada una de ellas era reducido. Así mismo, el préstamo oportuno en algunas ocasiones de los implementos para el desarrollo de las situaciones no era el adecuado ya que se tenía que solicitar continuamente algunos de ellos.

Sugerencias para futuras investigaciones desde la corriente de la *micro- ingeniería didáctica*

Ésta investigación permite la apertura de nuevos estudios alrededor de la función cúbica dentro de una *micro-ingeniería didáctica* como metodología, en la cual el diseño de las situaciones realizadas por el docente estén encaminadas a fortalecer la enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los estudiantes. Con base a este trabajo se pueden adelantar otras preguntas de investigación tales como:

- ¿De qué manera, a través de una secuencia de situaciones didácticas, se podrían encontrar los ceros o raíces de la función cúbica en la expresión algebraica integrando un AGD?

- ¿Qué fenómenos didácticos, a través de una secuencia de situaciones didácticas, bajo la metodología de una *micro-ingeniería didáctica*, se podrían encontrar en las traducciones de los sistemas de representación de una función de cuarto grado?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Basurto, E. (2010). *Conceptualización de los parámetros en funciones polinomiales vía TI-NSPIRE.* Recuperado de http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Conceptualizacion_de_los_parametros_en_funciones_polinomiales_via_TI_Nspire.pdf. 24/02/13

Bossé, M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Translations among Mathematical Representations: teacher beliefs and practices. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-23. Recuperado de: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bosse4.pdf. 21/01/13

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (1era. ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Camargo, L. & Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Chamorro, M. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En Didáctica de las Matemáticas para primaria (pp. 69-94). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(2), pp.3-4. Recuperado de http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6885/6571. 31/08/11

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* (pp. 155-178). Barcelona, España: Horsori.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Del Castillo, A. & Montiel, G. (s.f.). ¿Artefacto o instrumento? esa es la pregunta. *Comité latinoamericano de Matemáticas Educativa A.C.*, 459-467. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/%28ADelCastillo-GMontiel2009a%29-ALME22-.pdf. 04/06/12

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 1, Número 2.* Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/12/17. 31/08/11

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. En *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp, 221-227). Australia: The University of Melbourne.

Estrada, M., Sánchez, J. & Limias, A. (s.f.). *El uso de Cabri Géomètre II en las funciones del preuniversitario*. Recuperado de http://www.revistaluz.rimed.cu/articulospdf/edicion28/mario.pdf. 05/06/12

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus*. (Tesis de Maestría no publicada). Cali, Universidad del Valle, Colombia. Recuperada de la Biblioteca Digital de la Universidad del Valle. (http://hdl.handle.net/10893/3901). 05/06/12

Fernández, E. & Garzón, D. (2007). *Módulo 3: Pensamiento Geométrico y Métrico. Unidad 2: La Geometría en el Ámbito Escolar. 2.1. Las Representaciones en Matemáticas*. En: Programa de Formación Permanente de Educadores en Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática. Universidad del Valle.

Cali. [En línea y en CD-ROM]. Disponible en línea en: En las memorias electrónicas en CD y En el sitio Web del Campus Virtual Universidad del Valle. Cali, Colombia: https://proxse13.univalle.edu.co/campus/moodle/file.php/1290/pensamiento/Unidad2/versionpdf/matematicas_modulo3_unidad2.pdf. [Consultado 25 de septiembre, 2012].

Gagatsis, A., Christou, C. & Elia, I. (2004). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. *Quaderni di Ricerca in Didattica*. 14. 150-159. Recuperado de: http://math.unipa.it/~grim/quad14_gagatsis.pdf

García, G. (1996). Reformas en la Enseñanza de las matemáticas escolares: Perspectivas para su desarrollo. *Revista EMA,1*(1), pp. 195-206.

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos 1*(1), 83-115. Recuperado de http://200.21.104.25/latinoamericana/downloads/Latinoamericana1_5.pdf. 20/11/12

Gómez, P. & Carulla, C. (1998a). Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico?. En UCV, I. (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 710-715). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/334. 25/07/12

Gómez, P. & Carulla, C. (1998b). Concepciones de los estudiantes sobre el dominio de la función cúbica. En UCV, I. (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 591-596). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/331. 25/07/12

Gómez, P. & Carulla, C. (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

Hitt, F. (2002a). Desarrollo de una idea matemática: El concepto de función. En *Funciones en contexto* (pp. 71-77). México: Pearson Educación.

Hitt, F. (2002b). Funciones no lineales (continuación). Función cúbica o polinomio de tercer grado. En *Funciones en contexto* (pp. 105-144). México: Pearson Educación.

Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier, (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of functions as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 67-72). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159- 195). New Jersey: Hillsdale.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (*pp. 515-556). New York: Macmillan.

Martin, F. (2000). *La aventura de la ecuación cúbica*. Recuperado de http://catedu.es/matematicas_mundo/HISTORIA/Cardano_y_tartaglia.pdf. 22/12/11

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf. 20/12/11

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En *estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*, (pp. 46-95). Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Mora, J. (s.f.). *Geometría dinámica para el aula*. Recuperado de http://www.galega.org/emdg/web/geodinaMora.pdf . 05/06/12

Moreno, L. & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En A. Castiblanco, L. Moreno, F. Rodríguez, M. Acosta, L. Camargo & E. Acosta (Eds.), *En Memorias del Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 40-66). Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81040_archivo.pdf. 20/11/12

Rivera, N. (2011). Bloque IV. Emplea funciones poligonales de grado tres y cuatro Bloque V. emplea funciones polinomiales factorizables. En G. Enríquez (Ed.), *Matemáticas IV* (pp. 39-48). Recuperado de http://miscursos.org/biblioteca/preparatoria/SDmate4/SDmat4.pdf. 06/09/12

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Jaén, España: Universidad de Jaén, colección Juan Pérez de Moya.

Santos-Trigo, L. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva 20*, 247-258. Recuperado de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2001/89223_2.pdf. 05/06/12

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión de la noción de función (C, Delgado, Trad.). En H, Guershon & E, Dubinsky (Eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierra, M., Gonzáles, T. & López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula, 10,* pp. 89-104. Recuperado de http://campus.usal.es/~revistas_trabajo/index.php/0214-3402/article/viewFile/3540/3559. 20/09/12

Stewart, J. & Hernández, R. (2007). Polinomios y funciones racionales. En *Introducción al Cálculo* (pp. 316-377). Buenos Aires, Argentina: Thomson Learning.

Trujillo, M., Castro, N. & Delgado, C. (2010). *El Concepto de Función y la Teoría de Situaciones: Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras gráficadoras*. Bogotá: Universidad de la Salle.

Valenzuela, A. (2010). Bloque 3: Emplea funciones polinomiales. En B. Huerta (Ed.), *Matemáticas 4* (pp. 161-214). Recuperado de http://www.metropolitano.edu.mx/libros/semestre%204/FB4S_Matematicas4.pdf. 06/09/12

ANEXOS

ANEXO No. A. ENCUESTA PARA DOCENTES

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ENCUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CÚBICA

Esta encuesta está dirigida a Docentes del Área de Matemáticas, que se desempeñan en el grado Noveno de la Educación Básica Secundaria. Las personas encuestadas se eligieron al azar y las respuestas de los encuestados se incluirán en el estudio, estas serán confidenciales y no se expondrán datos individuales.

Lea las siguientes preguntas cuidadosamente, según la siguiente información, luego marque con una X, según su criterio y responda las preguntas.

En los ***Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*** del Ministerio de Educación Nacional (2006), más específicamente para los grados **Octavo** y **Noveno** de la Educación Básica, en el ***Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos***, está estipulado: "*Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas*".

<table>
<tr><th>#</th><th>PREGUNTA</th><th colspan="7">RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>¿En el plan de área de matemáticas de su Institución Educativa, está propuesto este estándar?</td><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="5">¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>¿Se logra enseñar el contenido de las funciones polinómicas en su totalidad?</td><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="5">¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>¿Utiliza usted algún software educativo en la enseñanza de la función cúbica?</td><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="5">¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>¿A partir de la representación gráfica de la función cúbica se podría hacer que los estudiantes deduzcan la representación algebraica asociada a la gráfica dada?</td><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="5">¿Considera que es importante el hacerlos transitar, a los estudiantes, de una representación a otra?</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>¿Usted cree que se debería fomentar el estudio de la función cúbica?</td><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="5">¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>6.</td><td colspan="3">¿Qué tipo de representaciones matemáticas usualmente utiliza Usted cuando enseña las funciones polinómicas cúbicas?</td><td>Numérica</td><td>Algebraica</td><td>Gráfica</td><td>Verbal</td><td>Otra.
¿Cuál?</td></tr>
</table>

ANEXO No. B. REVISIÓN DEL PLAN DE ÁREA

Pág.

Función*

↓

se define así

↓

dados dos conjuntos A y B se dice que una correspondencia f entre sus elementos es una función de A en B si a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B

↓

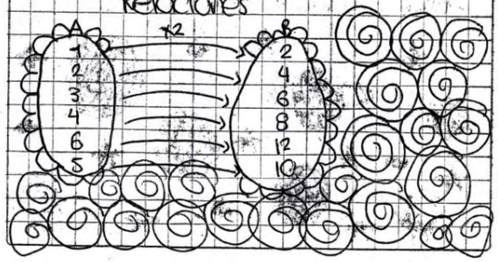
se puede notar como

$F: A \to B$ se lee "f de A en B"

$y = f(x)$ se lee Y igual a $f(x)$

Para comprender el concepto de función debemos tener en claro que es una Relación?

Relaciones



Relaciones

Una Relación es un conjunto de pares ordenados

Ejemplo*(Relación)

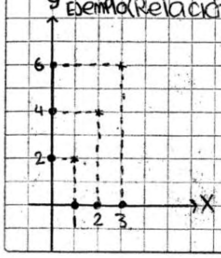
$R=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

una Relación se puede representar mediante tablas.

Ejemplo*(Relación)

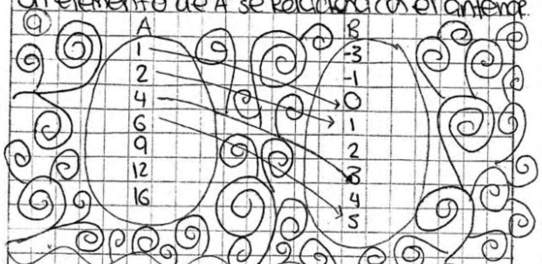
x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

mediante graficas

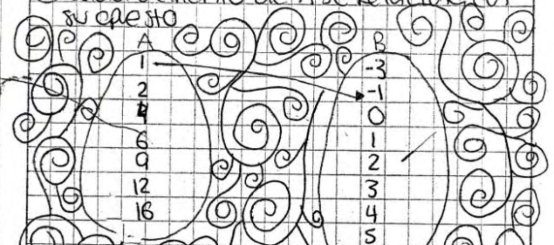


escanear

un elemento de A se Relaciona con el anterior



(b) cada elemento de A se Relaciona con su opuesto



A cada elemento de A le hace corresponder su anterior

Función

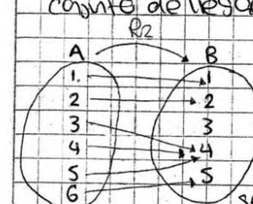
Para que una relación sea una función debe cumplir con las siguientes condiciones.

40
21-01-13

- en el conjunto de partida no sobran elementos.
- cada elemento del conjunto de partida solo puede relacionarse con uno y solo un elemento del conjunto de llegada

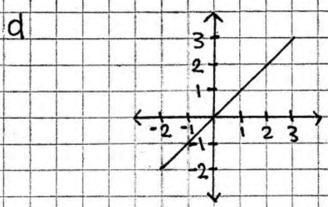
*Ejemplo

la Relación R1 no es función porque sobran elementos del conjunto de partida y además un elemento del conjunto de partida le corresponde dos elementos del conjunto de llegada.

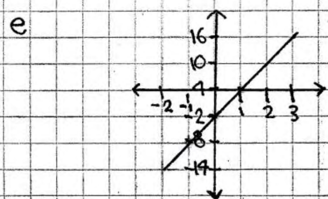


la Relación R2 es función porque cumple con las condiciones de que en el conjunto A no sobran elementos y del conjunto A solo se relaciona con un elemento del conjunto B.

d



e



Función a fín y Función lineal*

Función lineal* Toda función lineal de la forma $y = Mx$, donde M es na constante diferente de 0 a esto se le llama Función lineal

Ejemplo

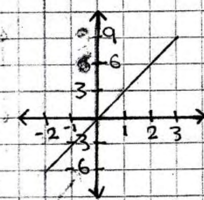
$y = 3x$ donde $M = 3$

la representación gráfica de na función lineal en el plano cartesiano es na

Linea Recta vertical que pasa por el origen (0)

Ejemplo

$y = 3x$ donde $M = 3$



Función Afín*

la función afín es de la forma

$y = Mx + b$ ejemplo: $y = 3x + 2$

$y = -2x + 1$

$y = -x - 3$

M se llama la constante de proporcionalidad.

es: $y = 3x + 2$ — $M = 3$

$y = -2x + 1$ — $M = -2$

$y = -x - 3$ — $M = 1$

cuando M es igual a 1 la función se denomina función identica

ejemplo $y = x + 1$

Función Lineal*

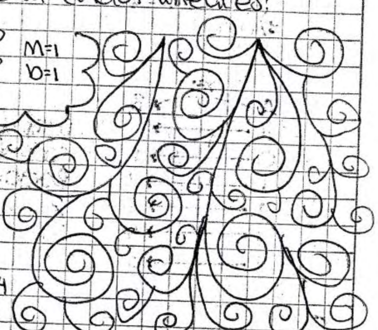
la función lineal se origina de la función polinomica de grado 1, es decir cuando la variable x está elevada al exponente 1

la forma de la función lineal es:

Ejemplo:

$y = Mx + b$ } $M = 1$, $b = 1$

$y = x + 1$



Ejemplo:

- $y = 5x + 2$ M: 5 b: 2
- $y = 6x$ M: 6 b: 0
- $y = 3 - 4x$ M: -4 b: 3

Para graficar na función lineal basta darle diferentes valores a x para encontrar los valores de y

Ejemplo: $y = x - 3$

x	y
-2	-5
-1	-4
0	-3
1	-2
2	-1
3	0

$y: -2 - 3$

$y: -5$

$y: -1 - 3$

$y: -4$

$y: 0 - 3$

$y: -3$

$y: 1 - 3$

$y: -2$

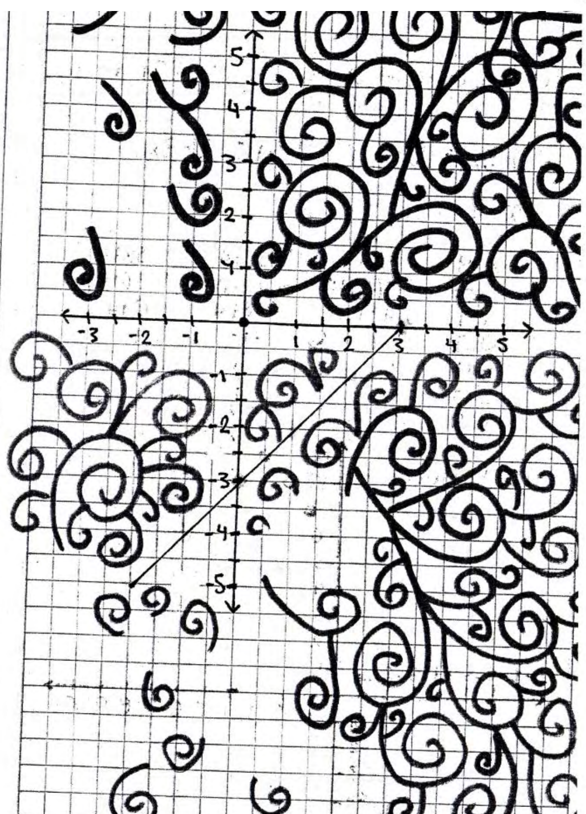
$y: 2 - 3$

$y: -1$

$y: 3 - 3$

$y: 0$

y



Grafica de función lineal

Para graficar una función lineal se siguen los siguientes pasos

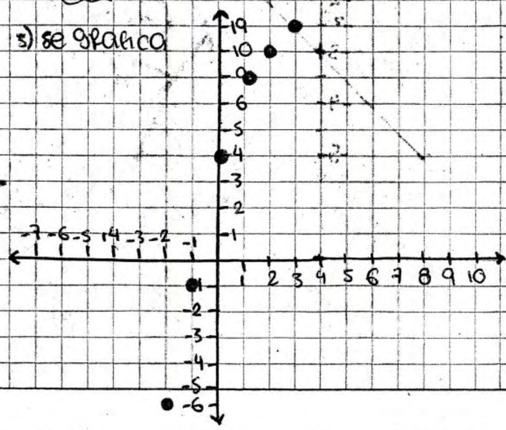
1) $y=5x+4$ ($y=mx+b$) $y=x+6$ $y=3x$

2) se tabula los datos

x	y
-2	-6
-1	-1
0	4
1	9
2	10
3	19

$y=5x+4$	$y\ 5x+4$	$y\ 5x+4$
$y\ 5(-2)+4$	$y\ 5(-1)+4$	$y\ 5(0)+4$
$y\ -10+4$	$y\ -5+4$	$y\ 0+4$
$y\ -6$	$y\ -1$	$y\ 4$

3) se grafica



Tarea

1) Graficar las siguientes funciones lineales.

a $y\ 2x$
b $y\ x-3$
c $y\ 2x+1$
d x
e $6x-2$

Solución

1)

a $2x$	b $x-3$	c $2x+1$	d x
$y\ 2(-2)+0$	$y\ 1(-1)-3$	$y\ 2(0)+1$	$y\ 1(1)$
$y\ -4+0$	$y\ -1-3$	$y\ 0+1$	$y\ 1$
$y\ -4$	$y\ -4$	$y\ 1$	$y\ 1$
$y\ 2(-1)+0$	$y\ 1(-2)-3$	$y\ 2(-2)+1$	$y\ 1(-2)$
$y\ -2+0$	$y\ -2-3$	$y\ -4+1$	$y\ -2$
$y\ -2$	$y\ -5$	$y\ -5$	$y\ -2$
$y\ 2(0)+0$	$y\ 1(0)-3$	$y\ 2(-1)+1$	$y\ 1(-1)$
$y\ 0+0$	$y\ 0-3$	$y\ -2+1$	$y\ -1$
$y\ 0$	$y\ -3$	$y\ -3$	$y\ -1$
$y\ 2(1)+0$	$y\ 1(1)-3$	$y\ 2(1)+1$	$y\ 1(0)$
$y\ 2+0$	$y\ 1-3$	$y\ 2+1$	$y\ 0$
$y\ 2$	$y\ -2$	$y\ 3$	$y\ 0$
$y\ 2(2)+0$	$y\ 1(2)-3$	$y\ 2(2)+1$	$y\ 1(2)$
$y\ 4+0$	$y\ 2-3$	$y\ 4+1$	$y\ 2$
$y\ 4$	$y\ -1$	$y\ 5$	$y\ 2$

norma

REVISIÓN DE PLAN DE ÁREA

ASIGNATURA: Matemáticas **GRADO: 9** **PERIODO: I**	**INTENSIDAD HORARIA : 4 HORAS SEMANALES** **DOCENTE(S):** Mónica Lorena Timaná Delgado
OBJETIVO GENERAL DE GRADO: Construir el concepto de número complejo y realizar demostraciones de teoremas básicos, iante la aplicación de modelos matemáticos utilizando magnitudes discretas y continuas que le permitan solucionar ecuaciones iles ,cuadráticas y experimentos aleatorios para conocer y entender los fenómenos sociales y científicos propios de su entorno **:TIVOS ESPECIFICOS:** • Identificar procesos algebraicos necesarios para poder sintetizar expresiones complejas en sencillas. • Establecer relaciones de conceptos teóricos bases con la aplicación directa de los mismos en pruebas SABER. • Utilizar criterios y teoremas fundamentales de la geometría para ser aplicados en la demostración de situaciones geométricas que las requieran.	**PREGUNTA PROBLEMA :** ¿Cómo utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversa realidad y en problemas tipo prueba saber?

SABERES	ESTANDARES Y/O COMPETENCIAS	LOGROS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	INSTANCIAS VERIFICADORAS y/O ACCIONES EVALUATIVAS
Diagnóstico. Potenciación y radicación: - Potenciación y Radicación de números reales - Racionalización. - Propiedades y simplificación de expresiones. Números complejos: - Identificación - Representación - Operaciones básicas. Funciones: concepto de función, elementos y representaciones. Semejanza - Semejanza: razón entre dos segmentos y segmentos proporcionales. - Teorema de THales. Y sus consecuencias. - Polígonos semejantes. - Triángulos semejantes. Preguntas tipo SABER relacionadas con los conceptos básicos de probabilidad y Técnicas de conteo: permutaciones y combinaciones.	Resuelvo y formulo problemas aditivos de composición, transformación, comparación e igualación. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Simplifico cálculos usando relaciones inversas entre operaciones. Identifico la potenciación y la radicación	***CONCEPTUALES*** 1. Identifica los algoritmos necesarios para el análisis y solución de problemas de la potenciación y de la radicación con números reales y expresiones algebraicas respectivamente. 2. Identifica el origen de los números complejos su relación con los imaginarios e interpreta sus propiedades y operaciones en la solución problemas que involucren este conjunto. 3. Identifica el concepto de función y sus propiedades. 4. Reconoce el concepto de razón y proporción e identifica las propiedades. 5. Conoce los criterios principales, elementos y propiedades previos para establecer la semejanza entre polígonos y triángulos. 6. Identifica procedimientos básicos para la	• Desarrollo pruebas tipo SABER a manera de talleres o practicas. • Aplico las propiedades de la potenciación y radicación para simplificar expresiones algebraicas, facilitando su desarrollo operatorio. • Demuestro la semejanza de triángulos, identificando y utilizando los criterios propios de la semejanza, además de utilizar los teoremas básicos de la geometría. • Represento un numero complejo y lo ubico en el plano cartesiano al igual que reconozco sus respectivas características y propiedades	• Desarrollo pruebas tipo SABER a manera d talleres o practicas. • Realización de ejercicios de manera grupal. • Desarrollo de ejercicios mediante la aplicació de fichas recortables sobre potenciación. • Evaluación escrita de potenciación • Desarrollo de ejercicios mediante la aplicació de fichas recortables sobre radicación. • Evaluación escrita de Radicación. • Aplicación de fichas recortables sobre razón polígonos semejantes. • Desarrollo de guía: "teorema de Thales" • Desarrollo de guía: "semejanza de triángulos" • Fichas recortables de criterios de semejanz de triángulos. • Desarrollo de la guía "Números complejos" • Realización de ejercicios mediante talleres fichas recortables.

para representar situaciones matemáticas y no matemáticas. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (Pitágoras y THales). Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).	resolución de preguntas tipo SABER, relacionadas con probabilidad **PROCEDIMENTALES** 7. Adquiere habilidades y destrezas en el análisis y cálculo de operaciones básicas y propiedades con expresiones algebraicas, contenidas por medio de potenciaciones y radicaciones. 8. Representa geométrica y analíticamente números complejos, realizando operaciones en la solución de problemas. 9. Representa gráficamente una situación lineal que modela y formaliza una función matemática. 10. Interpreta los elementos y criterios básicos para determinar la semejanza entre triángulos. 11. Analiza preguntas tipo SABER relacionadas con conceptos básicos de probabilidad y emplea las técnicas de conteo necesarias para la elección y organización de elementos de un conjunto de datos. ***ACTITUDINALES*** 12. Participa en clase en la resolución de problemas demostrando interés y respeto por los aportes que da y escucha de sus compañeros.	operacionales aplicándolas en la resolución de situaciones problema. • Resuelve situaciones matemáticas particulares en donde utiliza la definición formal y propiedades establecidas para la función lineal. • Soluciono y justifico respuestas de preguntas de selección múltiple relacionadas con las técnicas de conteo. • Demuestro interés y responsabilidad al solucionar y relacionar situaciones de la vida cotidiana con sus conocimientos matemáticos.	• Elaboración de trabajo artístico sobre números complejos. • Evaluación escrita de números complejos • Realización de la lectura" Como surgió modelos de función" Alfa 9. • Desarrollo de la guía "función". • Evaluación de función • Realización de actividades sobre variables estadísticas, espacio muestral de manera grupal • actividades grupales sobre ejercicios de los conceptos básicos de estadística. • realización de consultas sobre técnicas de conteo. • Realización de ejercicios tipo prueba saber sobre técnicas de conteo • evaluación de técnicas de conteo	semana 13ava semana. 13ava 3ra semana 5ta- 8va seman 9na semana 10- 12va semana 13ava semana

RECURSOS PEDAGOGICOS:
Material policopiado, elementos geométricos como la escuadra, materiales básicos, libros e internet.

BIBLIOGRAFIA:

ꞦISOL RAMIREZ RINCON.NEYLA YAMILE CASTAÑEDA MURCIA, ANNERIS DEL R. JOYA, MERCEDES GOMEZ ORTIZ.Hipertexto de matemáticas 11.Santillana.
O A. URIBE CÁLAD, JOSÉ ISRAEL BERRÍO MOLINA, Elementos de Matemáticas. Propuesta curricular 9. Bedout editores S.A.
RES, MARIA EUGENIA. Nuevo pensamiento matemático. Grados: 9. Bogotá, 2004, dc, Editorial Libros & Libros.2004
ILFO JAVIER HERRERA RUÍZ, DIANA CONSTANZA SALGADO RAMÍREZ, LUISA FERNANDA NIVIA ROMERO, MARTHA LUCÍA ACOSTA MAHECHA, JULIA PATRICIA ORJUELA MURCIA. Álgebra y Geometría II. Editorial Santillana. Bogotá, 20
NETH CARVAJAL ALVARADO, Glifos 9 Procesos Matemáticos, Editorial Libros & Libros, 2008.
TRES EDITORES, El Tesoro del Saber, 2008.
ÁNDARES NACIONALES DE CALIDAD
ebas saber de años anteriores y Páginas de Internet requeridas.

ASIGNATURA: Matemáticas **GRADO: 9** **PERIODO: II**	**INTENSIDAD HORARIA : 4 HORAS SEMANALES** **DOCENTE(S):** Mónica Lorena Timaná Delgado.
OBJETIVO GENERAL DE GRADO: Ampliar el conocimiento matemático establecido hasta el momento, para originar procesos ;eneralización de los conceptos, por medio del desarrollo de habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas, estadísticas y ɔabilísticas. **ETIVOS ESPECIFICOS:** • Reconocer nuevos campos numéricos que complementan los sistemas de numeración ya conocidos. • Utilizar elementos que se relacionan con la circunferencia para manejar y aplicar nuevas propiedades geométricas. • Manejar nuevas medias estadísticas, para la proposición de análisis diferentes a los usuales relacionados con la organización de la información.	**PREGUNTA PROBLEMA :** ¿Cómo reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser form términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados utiliz apropiados?

SABERES	ESTANDARES Y/O COMPETENCIAS	LOGROS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	INSTANCIAS VERIFICADORAS y/O ACCIONES EVALUATIVAS
Formalización del concepto de función y función lineal: línea recta, ecuación de la recta y situaciones problema. Noción de Sistemas de Ecuaciones lineales: métodos de solución. Circunferencia: elementos y propiedades. Circulo: área.	• Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. • Interpreto la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera. • Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas,	**CONCEPTUALES** 13. Representa gráficamente una situación lineal que modela y formaliza una función matemática. 14. Identifica las propiedades fundamentales de definición y representación de la función y ecuación lineal.	• Resuelve situaciones matemáticas particulares en donde utiliza la definición formal y propiedades establecidas para la función lineal.	• Lectura de cómo nació la definición de l palabra función.(alfa 9), realización del talle de lectura comprensiva. • Aplicación de guía de "función, propiedades notaciones" • Taller evaluativo , quiz o evaluación del tem visto.

• Preguntas tipo SABER: - Análisis de graficas estadísticas. - Interpretación de las medidas de tendencia central.	entrevistas). • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. • Reconozco que diferentes maneras de presentarla información pueden dar origen a distintas Interpretaciones. • Selecciona y usa métodos estadísticos adecuados según el tipo de información. • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. Uso representaciones gráficas adecuadas para presentar diferentes tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares). • Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.	15. Identifica la definición de sistemas de ecuaciones y sus características. 16. Conoce elementos nuevos de la circunferencia y sus relaciones. 17. Identifica un círculo y sus características esenciales de estudio. 18. Reconoce la aplicabilidad de los conceptos teóricos de las graficas estadísticas y medidas de tendencia central, en preguntas tipo SABER **PROCEDIMENTALES** 19. Representa gráficamente una situación lineal que modela y formaliza una función matemática. 20. Examina los diferentes métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. 21. Adquiere habilidades de destrezas en el manejo de elementos y relaciones nuevas que se aplican a la circunferencia y al circulo 22. Interpreta con claridad el uso y aplicación de los conceptos estadísticos básicos para la obtención de conclusiones de situaciones en estudio. **ACTITUDINALES** 23. Demuestra interés por conocer desde su origen los conceptos matemáticos	• Represento y soluciono situaciones problemas sencillas relacionadas con la función y ecuación lineal. • Construye sistemas de ecuaciones lineales que determinan una situación problema en particular. Finalmente propone su solución, mediante el uso de una de las reglas de resolución. • Resuelvo ecuaciones cuadráticas mediante el uso de los métodos de solución específicos para cada caso. • Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante el análisis inicial del caso de resolución al que pertenece. • Señalo e identifico elementos y relaciones que se generan entre rectas y circunferencias. • Aplico las propiedades de cuerdas y arcos para desarrollar situaciones especificas de la circunferencia. • Realiza transformaciones que se generan de la fórmula del área y perímetro del círculo y circunferencia respectivamente. • Calcula el área y perímetro del círculo y circunferencia, en situaciones sencillas que lo requieran.	• Presentación de diapositiva. resp unas preguntas sobre lo visto. • Realización de consulta sobre de cóm y como se aplica el sistemas de ecuaci las diferentes disciplinas. socializació misma. • Aplicación de sistemas de ecı mediante fichas recortables y guía • evaluación de la temática por cada mé resolución • Presentación de carteleras cc características de las funciones cuadrátic características. • Realización de ejercicios sobre las ec cuadráticas. • Aplicación de preguntas prueba saber (icfes, • Evaluación • Aplicación de guía sobre las r circunferencias. • Manejo oportuno de su material de compás y regla • .Manejo de fichas recortables s temática • Realización de ejercicio sobre el área círculo enfocado en problemas tipi Icf • Aplicación de guía sobre situac problema • Evaluaciones tipo Icfes de la temática

		nuevos que se adquieren en este año escolar.	• Utilizo los conceptos previos de estadística para dar solución a preguntas tipo SABER relacionadas con gráficos estadísticos y con medidas de tendencia central • Diferencia las propiedades específicas de los tipos de medidas existentes.	• Aplicación de fichas recortables • Desarrollo de guía enfocada en pregu Icfes sobre estadística. • Exposición de ejemplos mediante la a de medidas existentes por parte estudiantes.

RECURSOS PEDAGOGICOS:

- Material policopiado, elementos geométricos como la regla y el compás, materiales básicos, libros e internet.

BIBLIOGRAFIA:

MÁRISOL RAMIREZ RINCON.NEYLA YAMILE CASTAÑEDA MURCIA, ANNERIS DEL R. JOYA, MERCEDES GOMEZ ORTIZ.Hipertexto de matemáticas 9.Santillana.
JULIO A. URIBE CÁLAD, JOSÉ ISRAEL BERRÍO MOLINA, Elementos de Matemáticas. Propuesta curricular 9. Bedout editores S.A.
TORRES, MARIA EUGENIA. Nuevo pensamiento matemático. Grados: 9. Bogotá, 2004, dc, Editorial Libros & Libros.2004
ADOLFO JAVIER HERRERA RUÍZ, DIANA CONSTANZA SALGADO RAMÍREZ, LUISA FERNANDA NIVIA ROMERO, MARTHA LUCÍA ACOSTA MAHECHA, JULIA PATRICIA ORJUELA MURCIA. Álgebra y Geometría II. Editorial Santillana. Bog
JANNETH CARVAJAL ALVARADO, Glifos 9 Procesos Matemáticos, Editorial Libros & Libros, 2008.
LOS TRES EDITORES, El Tesoro del Saber, 2008.
ESTÁNDARES NACIONALES DE CALIDAD
Pruebas saber de años anteriores y Páginas de Internet requeridas.

ASIGNATURA: Matemáticas
GRADO: 9
PERIODO: III

INTENSIDAD HORARIA : 4 HORAS SEMANALES
DOCENTE(S): Mónica Lorena Timaná Delgado

OBJETIVO GENERAL DE GRADO: Ampliar el conocimiento matemático establecido hasta el momento, para originar procesos de generalización de los conceptos, por medio del desarrollo de habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas, estadísticas y probabilísticas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Reconoce procesos de formalización matemática que representan, solucionan y traducen situaciones reales.
- Utiliza técnicas de resolución para dar respuesta a preguntas tipo SABER, relacionadas con conceptos básicos de estadística y geometría.
- Amplia su conocimiento geométrico, a partir del uso de conocimientos previos.

PREGUNTA PROBLEMA :

¿Cómo reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las activic

SABERES	ESTANDARES Y/O COMPETENCIAS	LOGROS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	INSTANCIAS VERI ACCIONES
• Sistemas de ecuaciones lineales: Situaciones problemas. • Ecuaciones y funciones cuadráticas • Funciones exponenciales y logarítmicas. • Sucesiones y Progresiones: - Análisis grafico y numérico de sucesiones. - Clases de sucesiones. - Aplicaciones • Áreas sombreadas. • Cuerpos geométricos • Áreas y volúmenes. Preguntas tipo SABER relacionadas con conceptos básicos de áreas y volúmenes. • Medidas de posición y dispersión	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de Sólidos. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartíles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad). •	**CONCEPTUALES** *24.* Utiliza los métodos en los diferentes sistemas de ecuaciones lineales dados. *25.* Conoce la ecuación cuadrática, sus propiedades y características básicas de resolución. 26. Identifica las características principales de las funciones: exponenciales y logarítmicas, para su definición, solución y representación. 27. Identifica los algoritmos necesarios para el análisis de: Sucesiones, progresiones, respectivamente. 28. Conoce los procedimientos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas sencillas y compuestas; además de reconocer sus respectivas diferencias. *1.* Identifica medias estadísticas nuevas, que estudian el comportamiento de los datos y su organización. **PROCEDIMENTALES** 29. Aplica los métodos de solución de ecuaciones lineales en diferentes	• Aplico los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones en situaciones problemas dados. • Reconozco elementos y características representativos en las gráficas de las funciones: cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. • Diferencio una ecuación de una función cuadrática y una función exponencial de una logarítmica. • Formo una sucesión o proporciono su solución numérica o grafica de la misma, a partir del análisis de reglas lógicas de ordenamiento.	• Realización de ej situaciones problema: • Presentación de mediante fichas recor • Evaluación de sistema • Desarrollo de guía: funciones cuadrátic logarítmicas. • Resolución de s mediante fichas recor • Evaluación de las func • Presentación de diap y progresiones. • Realización de ejercic progresiones

ANEXO No. C. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 1

Deducción de la función cúbica realizando traducciones de los sistemas de representación en la resolución del problema de la caja de volumen máximo.

ENUNCIADO:

Construir una caja sin tapa con una pieza de cartulina de medidas de 4 cm de ancho (A) y 5 cm de largo (L).

LEA DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES ANTES DE EMPEZAR A DESARROLLAR LA SITUACIÓN:

i. Abra el acceso directo del archivo del AGD Cabri Géomètre II Plus llamado “Construcción de la caja de volumen máximo”.

ii. Observará una construcción, que lo ayudará en el desarrollo y solución a las preguntas formuladas para esta situación.

iii. Esta construcción está formada por un segmento de recta y un punto que se desplaza sobre éste, nombrado como Alto (x); debajo del segmento se encuentra un rectángulo que representa la cartulina para formar la caja, determinado por las medidas posibles que puede tener ésta (Ancho de la cartulina (A), largo de la cartulina (L), ancho de la caja (a), largo de la caja (l), altura de la caja (x)). También observará una construcción final en tres dimensiones de la caja especificando la medida de su volumen (y).

iv. Lea con atención las preguntas y respóndalas en la HOJA DE RESPUESTAS suministrada por el docente.

A continuación conteste las siguientes preguntas, en forma individual:

1. ¿Si mueves el punto x (Alto) que pasa con las medidas del ancho (A) y largo (L) de la cartulina y con el ancho (a) y el largo (l) de la caja?

2. Con ayuda de la construcción realizada en Cabri Géomètre II Plus, complete la tabla y responda las preguntas:

ALTO $(\boldsymbol{x})\boldsymbol{cm}$	ANCHO $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{cm}$	LARGO $(\boldsymbol{l})\boldsymbol{cm}$	VOLUMEN $(\boldsymbol{y})\boldsymbol{cm^3}$
0			
0,316			
0,5			
0,658			
0,711			
0,763			
0,816			
1			
1,263			
2			

a) Puede observar en la tabla que los valores que toma la medida de la altura (x) están entre $0\ cm$ y $2\ cm$, ¿Por qué no se pueden tomar valores diferentes a estos?

b) Observando la tabla identifique entre qué medidas del volumen (y) puede construirse la caja.

c) ¿Si la medida de la altura (x) aumenta que ocurre con la medida del volumen (y)?

d) Si se desea saber con cuales medidas se puede construir la caja de mayor capacidad ¿entre qué medidas de la altura (x) se encuentra el máximo volumen?

e) ¿Qué relaciones se observan entre el ancho (a) – altura (x) y el largo (l) – altura (x)?

Respondan las siguientes preguntas en grupos de dos personas ayudándose de la construcción suministrada por los docentes en Cabri Géomètre II Plus.

3. Con ayuda de la construcción y de la herramienta calculadora del AGD Cabri Géomètre II Plus, llena las siguientes tablas con diferentes medidas para la altura (x).

Ancho de la cartulina (A)	**altura (x)**	$A-(x+x)$
4		
4		
4		

Largo de la cartulina (L)	**altura (x)**	$L-(x+x)$
5		
5		
5		

a) ¿Qué pueden afirmar de los resultados obtenidos en la operación planteada en la primera y segunda tabla?

b) Observando las anteriores tablas propongan una expresión algebraica que represente la medida del ancho (a) de la caja y otra para la medida del largo (l) de la caja.

c) Como se observa en la Construcción de la caja de volumen máximo, el volumen (y) es igual al producto de las medidas del ancho (a), largo (l) y altura (x) de la caja, según esto y las expresiones algebraicas del ancho (a) y el largo (l) de la caja obtenidas anteriormente, deduzcan una expresión algebraica para el volumen.

d) Con la expresión algebraica obtenida del volumen (y) identifiquen el grado y sus variables que la determinan.

e) Con ayuda de las herramientas de Cabri Géomètre II Plus y las variables identificadas en la anterior pregunta, construyan la gráfica del volumen (y) de la caja en el plano cartesiano.

f) En la gráfica obtenida identifiquen el dominio, rango, punto máximo, en que intervalos la gráfica es creciente, decreciente y los puntos de corte con los ejes coordenados si existen.

ANEXO No. D. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 2

Traducción de la Forma general de la función cúbica al sistema de representación gráfico a través de la variación de sus parámetros.

ENUNCIADO:

Con ayuda de la construcción dinámica en Cabri Géomètre II Plus propuesta por el docente, identifique y describa los comportamientos que puede tomar la función cúbica modificando los parámetros A, B, C y D, además realice una tabla y proponga una expresión algebraica en base a estos parámetros.

LEA DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES ANTES DE EMPEZAR A DESARROLLAR LA SITUACIÓN:

a) Abra el acceso directo del archivo del AGD Cabri Géomètre II Plus llamado "Representación algebraica y gráfica de la función cúbica"

b) Observará una construcción que ayudará en el desarrollo de la tabla y solución de las preguntas formuladas para esta situación.

c) Esta construcción está compuesta por la forma general de la función cúbica, la cual está dada de dos maneras, una de forma estática y la otra de forma dinámica, en esta ultima los parámetros A, B, C y D pueden variar y tomar números reales. Debajo de estas expresiones algebraicas están definidos los valores que puede tomar (y) cuando (x) y sus parámetros varían, al lado derecho encontrará la gráfica de la función cúbica en el plano cartesiano la cual se modificará dependiendo de los valores que usted de a los parámetros A, B, C

y D, también podrá ubicar las coordenadas (x, y) de cualquier punto sobre la gráfica si usted mueve el punto que está sobre el eje de las abscisas (x).

d) Lea con atención las preguntas y respóndalas en la HOJA DE RESPUESTAS suministrada por el docente.

A continuación conteste las siguientes preguntas, en grupos de dos personas:

I. Con ayuda de la construcción suministrada en Cabri Géomètre II Plus, completen la tabla (Hoja de respuestas) conformada por la Forma general de la función cúbica, por sus parámetros A, B, C y D que deben cambiar en la construcción según las indicaciones establecidas para cada uno de ellos, unos espacios en blanco en los cuáles dibujarán los comportamientos de la gráfica de la función cúbica que se observarán en la construcción suministrada cuando determinados parámetros varían y por último deberá escribir ejemplos de la expresiones algebraicas que representan los comportamientos de las gráficas.

II. En la anterior actividad observaron los diferentes comportamientos que puede tomar la función cúbica cuando cambian los coeficientes o parámetros de la expresión algebraica, con base a esto, relacione los diferentes casos que se plantearon y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro A en la gráfica de una función cúbica?

b) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2$ donde $A > 0$ o $A < 0$, ¿Qué pueden concluir acerca del efecto del parámetro B cuando:

- $B > 0$ aumentando?
- $B < 0$ disminuyendo?

c) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y los parámetros A y C tienen signos positivos, ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando aumenta?

d) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y los parámetros A y C tienen signos negativos, ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando disminuye?

e) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y el parámetro A es positivo y el parámetro C es negativo ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando disminuye?

f) Si la expresión algebraica de la función es $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ donde $B > 0$ o $B < 0$ y el parámetro A es negativo y el parámetro C es positivo ¿Qué puedes concluir acerca del efecto del parámetro C cuando aumenta?

g) ¿Qué puede concluir acerca del efecto del parámetro D en la gráfica de una función cúbica?

III. Responda las siguientes preguntas observando los comportamientos que tomaron las gráficas de la función cúbica en el punto I.

a) ¿Observando las gráficas de los casos anteriores, ¿Cuál es el Dominio y el Rango de la función cúbica en general?

b) ¿Cuántos puntos de corte como mínimo y como máximo puede tener la función cúbica con respecto al eje de las abscisas (x)?

c) ¿Cuántos puntos de corte puede tener la función cúbica con respecto al eje de las ordenadas (y)?

d) ¿Cuántos puntos máximos y mínimos puede tener la función cúbica?

ANEXO No. E. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 3

La traducción del sistema gráfico al sistema de representación algebraico a partir de la visualización de los efectos de los parámetros de la función cúbica.

ENUNCIADO

Observando los comportamientos que toman las diferentes gráficas de la función cúbica, e identificando los parámetros que afectan en este comportamiento, plantee una posible forma general de su expresión algebraica.

LEA DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES ANTES DE EMPEZAR A DESARROLLAR LA SITUACIÓN:

a) En la Situación Didáctica No. 2, usted dedujo los efectos de los parámetros de la función cúbica, deberá tener en cuenta este conocimiento para desarrollar satisfactoriamente la Situación Didáctica No. 3.

b) Lea con atención las preguntas y respóndalas en la HOJA DE RESPUESTA suministrada por el docente.

A continuación conteste las siguientes preguntas, en grupos de dos personas:

I. En este punto observará una tabla en la cual se muestran las gráficas de diferentes comportamientos de la función cúbica, donde deberán determinar los posibles valores de los parámetros que afectan a su gráfica y a partir de estos plantear una posible forma general de su expresión algebraica. (HOJA DE RESPUESTA).

II. En el anterior punto se planteó una posible forma general de la expresión algebraica del comportamiento de la gráfica de la función cúbica. En este punto observará una tabla similar a la del punto I (HOJA DE RESPUESTA), en ella, con ayuda de la construcción de Cabri Géomètre II Plus “Representación algebraica y gráfica de la función cúbica” propuesta por el docente deberá verificar si las expresiones algebraicas planteadas en el punto I, se aproximan a los comportamientos de las gráficas propuestas en cada caso para ello deberá introducir los parámetros anteriores en el medio y dibujar en la tabla el comportamiento de la gráfica producida por la construcción.

Con la información obtenida de las tablas del punto I y II, respondan las siguientes preguntas:

a) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II coinciden con las propuestas en el punto I. Explique en los casos que coinciden las gráficas, los efectos de los parámetros de la función cúbica que identificaron en las gráficas para plantear la forma general de la expresión algebraica.

b) Si las gráficas de las expresiones algebraicas del punto II no coinciden con las propuestas en el punto I. Explique en los casos que no coinciden las gráficas, cuáles fueron los parámetros que se obviaron o los efectos de éstos que se malinterpretaron para plantear la forma general de la expresión algebraica de la función cúbica.

ANEXO No. F. ILUSTRACIONES

Figura No. 27. De izquierda a derecha, Carlos, Camila, Jhonatan y Daniel, recibiendo la Inducción al medio Cabri Géomètre II Plus

Figura No. 28. Daniel y Camila empleando las herramientas de Cabri Géomètre II Plus

Figura No. 29. Daniel y Camila interactuando con el medio en el desarrollo de la Situación Didáctica No. 1

Figura No. 30. Jhonatan y Carlos interactuando con el medio en el desarrollo de la Situación Didáctica No. 1

Figura No. 31. Carlos, Jhonatan, Camila y Daniel desarrollando la Situación Didáctica No. 2

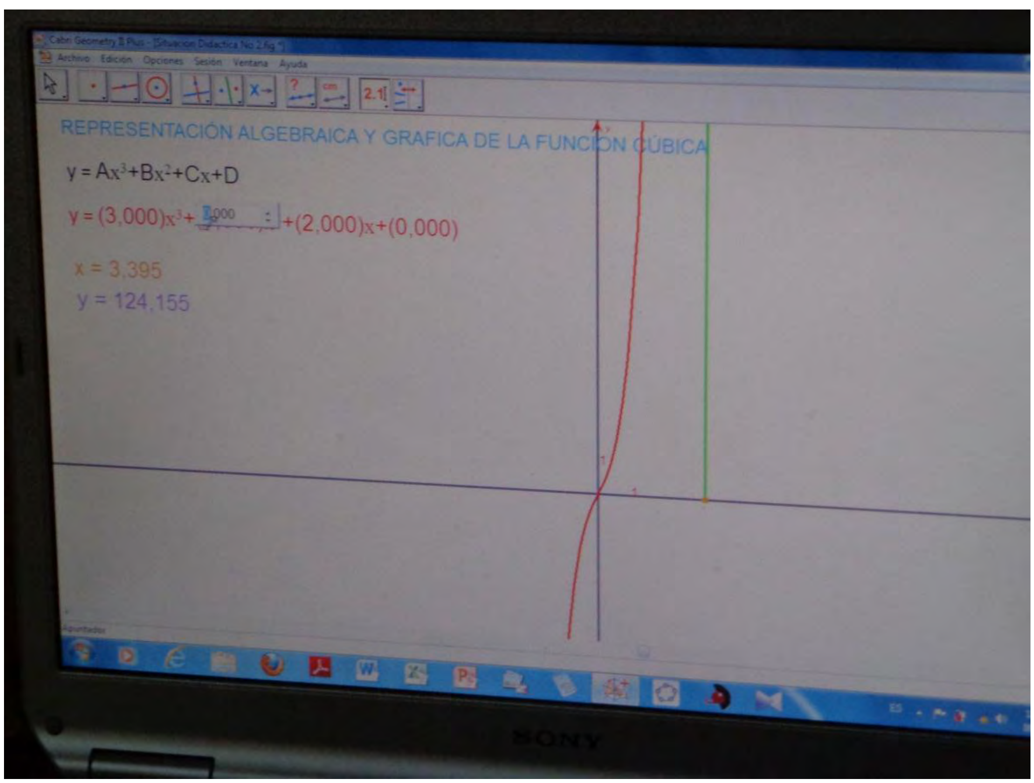


Figura No. 32. Construcción propuesta por los docentes para la Situación Didáctica No. 2

Figura No. 33. Carlos y Jhonatan desarrollando la Situación Didáctica No. 3

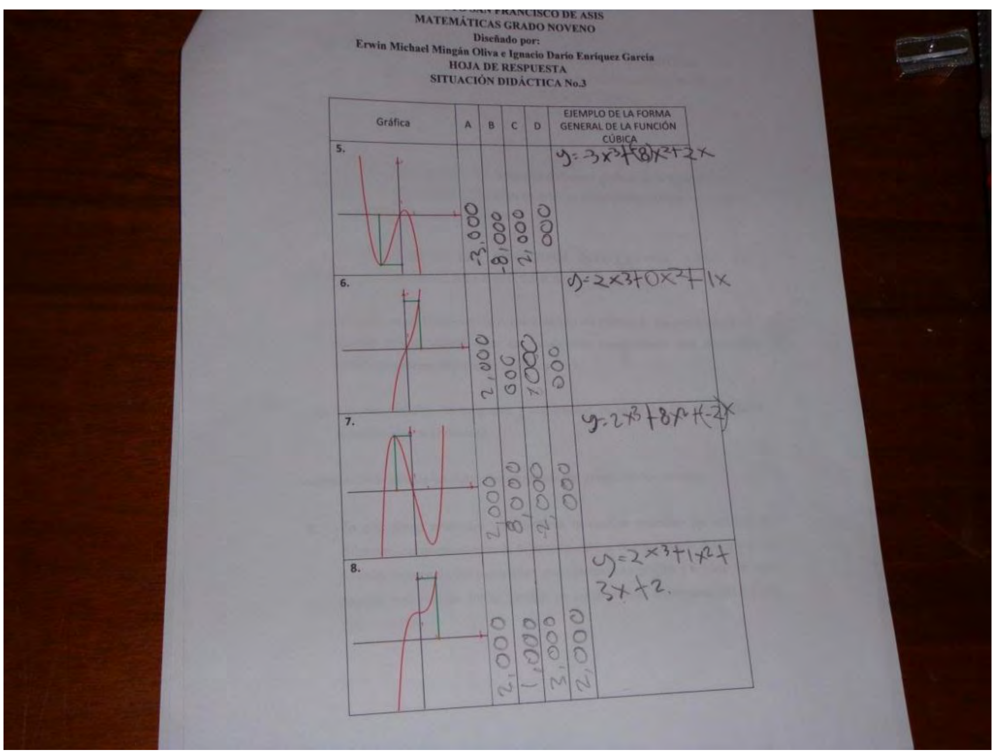


Figura No. 34. Primera parte de la Situación Didáctica No. 3

ANEXO No. G. LISTA DE REGISTROS ESCRITOS DE CAMILA Y DANIEL

Pág.

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: camila igua

1. En las medidas del Ancho (A) NO cambia nada la cartulina ni tampoco las medidas del largo (L) de la cartulina, pero al mover el punto x (Alto) cambian las medidas del ancho (a) y del largo (l) de la caja ya que se lo podría mover en cuestión menor o mayor cambian tanto largo (l) y ancho (a) es decir la caja.

2.

ALTO $(x)cm$	ANCHO $(a)cm$	LARGO $(l)cm$	VOLUMEN $(y)cm^3$
0	4.000 cm	5.000 cm	0,000
0,316	3,368 cm	4,368 cm	4,647 cm^3
0,5	3,000 cm	4.000 cm	6,000 cm^3
0,658	2,684 cm	3,684 cm	6,506 cm^3
0,711	2,579 cm	3,579 cm	6,558 cm^3
0,763	2,474 cm	3,474 cm	6,558 cm^3
0,816	2,368 cm	3,368 cm	6,508 cm^3
1	2,000 cm	3,000 cm	6,000 cm^3
1,263	1,474 cm	2,474 cm	4,605 cm^3
2	0,000 cm	1,000 cm	0,000

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

a) Por que tan solo se toma la mitad de la cartulina es decir 2cm, por que la cartulina mide 4cm aproximadamente y los valores estan entre 0cm y 2cm. la mitad de 4cm. por aquello no podriamos utilizar valores o medidas mayores a 2cm.

b) la volumen. minima seria 0,000 ya que se optendria solo la cartulina y la maxima $6{,}558\ cm^3$ con lo cual se obtendria la caja incluyendo intermedios.

c) si aumentamos la medida de la altura (x) el volumen van acendiendo en el cual o 0,711 llega a cierto punto (Alto (x) cm 0,763 cm a el volumen $6{,}558\ cm^3$) desde asi desiende el volumen cuando la medida de la altura sigue aumentando

d) el maximo volumen seria $6{,}558\ cm^3$, entonces el alto (x) seria 0,711 y 0,763. donde los dos valores de (x) tendrian el mismo volumen. $6{,}558\ cm^3$

e) la relación entre (a) y (x) es que el largo es mayor con 1cm de diferencia ejm (x) 3000 y (a) 2000, y el largo (L) y altura (x), entonces el alto disminuye segun el largo.

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: Daniel Benavides

1. el ancho A y el largo L quedan iguales no importa si se mueve el Punto X pero el largo L y el ancho A aumentan y disminuye dependiendo de los cm que tiene X

2.

ALTO $(x)cm$	ANCHO $(a)cm$	LARGO $(l)cm$	VOLUMEN $(y)cm^3$
0	4.000 cm	5000 cm	0,000
0,316	3,368 cm	4.368 cm	4.647
0,5	3.000 cm	4000 cm	6000
0,658	2.684 cm	3,684 cm	6.506
0,711	2,579 cm	3,579 cm	6558
0,763	2,474 cm	3,474 cm	6,558
0,816	2,368 cm	3,368 cm	6508
1	2000 cm	3,000 cm	6000
1,263	1,474 cm	2479 cm	4.605
2	0,000 cm	1000 cm	0000

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

a) Porque solo usamos la mitad de la cartulina y como la cartulina mide 4cm usamos como maximo 2cm ya que usamos la mitad de la cartulina y el minimo seria cero.

b) el volumen minimo que podriamos cojer para formar una caja es 0,000 cm y el maximo volumen seria 6,558

c) Cuando la altura x aumenta de 0,000cm a 1000cm el volumen va aumentando pero de 1.000cm a 2.000cm va disminuyendo

d) el maximo volumen que puede tenerla caja es 6558 esto podemos encontrar en la altura (x) 0,763 y 0,711.

e) la relacion entre (a) y (L) que cuando x aumenta (a) y (L) disminuye y cuando x disminuye (a) y (L) aumenta.

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS

MATEMÁTICAS GRADO NOVENO

Diseñado por:

Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García

HOJA DE RESPUESTA

SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: Dannyel Benavides y camila Igua

3.

Ancho de la cartulina (A)	altura (x)	$A-(x+x)$
4	0,974 cm	2,053 cm
4	1,000 cm	2,000 cm
4	1,421 cm	1,160 cm

Largo de la cartulina (A)	altura (x)	$L-(x+x)$
5	1,026 cm	2,950 cm
5	1,500 cm	2,000 cm
5	1,132 cm	2,740 cm

a) podemos afirmar que A-(x+x) es la formula del ancho y L-(x+x) es la formula del largo de la caja. para obtener los terminos de la altura x.

b) a= A-2x = es igual a(a)=ancho de la caja.
l= L-2x = es igual a(l)= largo de la caja.

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:

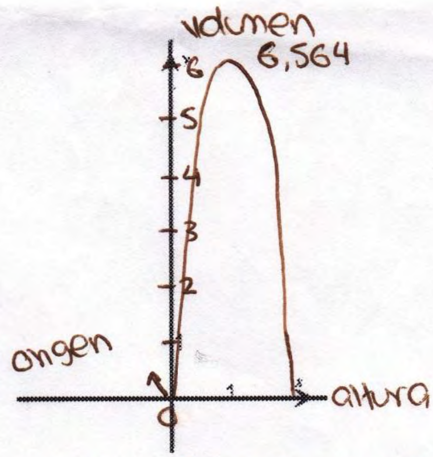
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García

HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

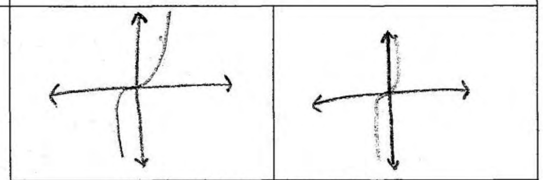
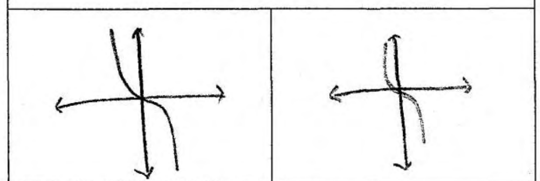
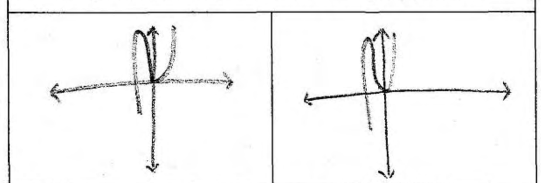
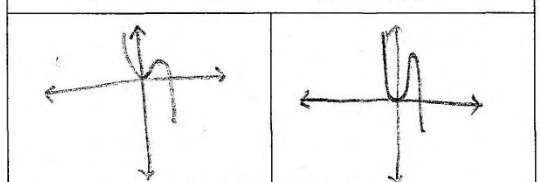
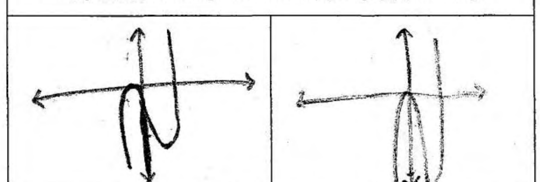
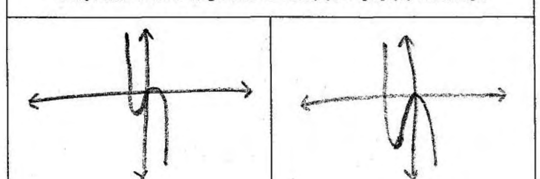
c) $V=(A-2x)(L-2x)(x)=(4-2x)(5-2x)(x)$
$(AL-2Ax^2-2x^2L)$ $(20-8x-10x+4x^2)(x)$
$(4x-24x^2-2x^2 5)$ $(20x-18x^2+4x^3)$ = volumen y

d) Grado del volumen 3, variables y es pendiente y la variable x es independiente, y medida del volumen y x medida de la altura.

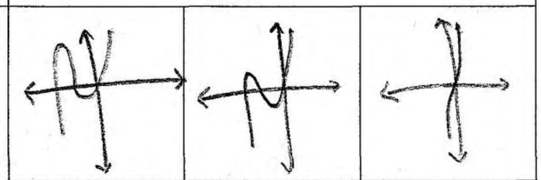
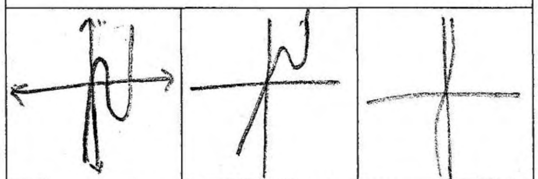
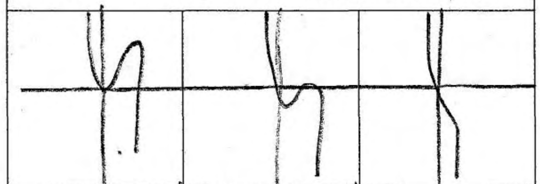
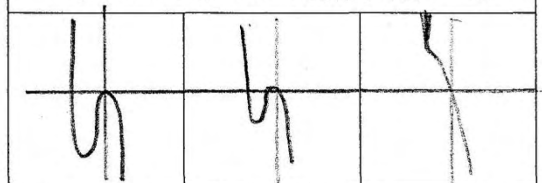
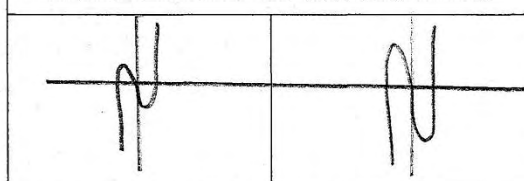
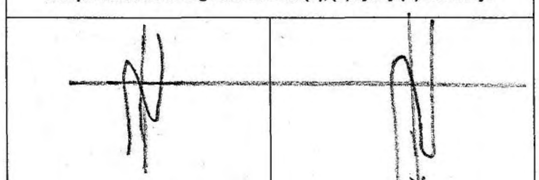
e)



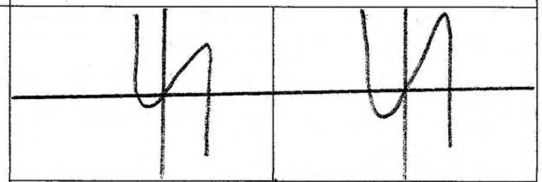
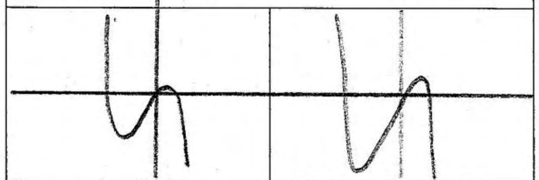
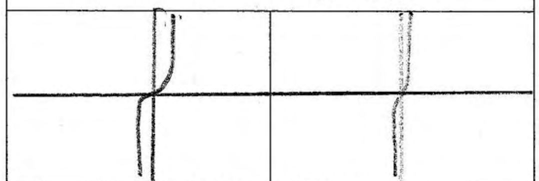
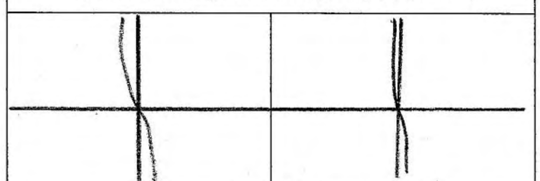
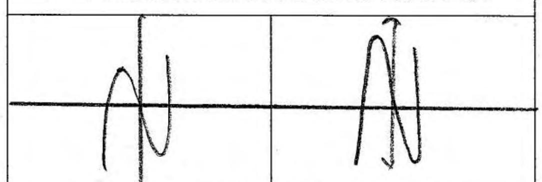
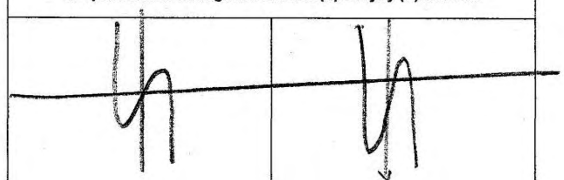
f) Dom = 0,000 - 2,000 cm Rango = 0,000 - 6,564 cm
Pnt maximo = 6,564 cm intervalo #1 = 0,000
0,740 curba crece y de 0,740 - 2,000 la
curva decrece *con el eje y se corta una vez
en el origen y en el eje x se corta 2 vecez en
el origen y en dos.

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A) aumenta
1) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C=0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $Y = 6x^3 + 0x^2 + 0x$ } $Y = 215x^3 + 0x^2 + 0x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) disminuye
2) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C=0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $Y = -1x^3 + 0x^2 + 0x$ } $Y = -8x^3 + 0x^2 + 0x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta
3) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C=0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $Y = 22x^3 + 28x^2 + 0x$ } $Y = 22x^3 + 35x^2 + 0x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta
4) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C=0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $Y = 9x^3 + 12x^2 + 0x$ } $Y = -9x^3 + 14x^2 + 0x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye
5) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C=0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = 3x^3 + 6x^2 + 0x$ } $y = 3x^3 + -8x^2 + 0x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye
6) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C=0	D=0	 $y =$ Ejemplos de la expresión algebraica:

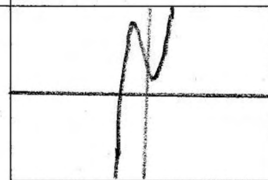
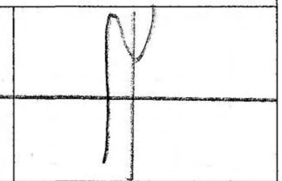
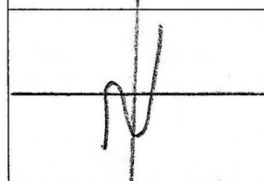
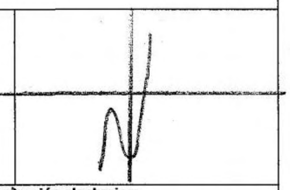
Daniel Benavides - Camila $y: -6x^3 + -6x^2 + 0x$ $y: -6x^3 + -12x^2 + 0x$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
7) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=1x^3+5x^2+9x$; $y=1x^3+5x^2+6x$; $y=1x^3+5x^2+13x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
8) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C>0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=1x^3+-5x^2+5x$; $y=1x^3+-5x^2+7x$; $y=1x^3+-5x^2+15x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
9) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=-3x^3+7x^2+-2x$ $y=-3x^3+7x^2+-4x$ $y=-3x^3+7x^2+-6x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
10) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=-1x^3+-4x^2+-1x$; $y=-1x^3+-4x^2+-3x$; $y=-1x^3+-4x^2+-6x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
11) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=7x^3+4x^2+-3x$; $y=7x^3+4x^2+-9x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
12) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:**

$y=7x^3+-3x^2+8x$; $y=7x^3+-3x^2+-13x$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
13) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y=-1x^3+2x^2+2x$; $y=-1x^3+2x^2+5x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
14) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y=-1x^3+-2x^2+2x$; $y=-1x^3+-2x^2+4x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) aumenta
15) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y=3x^3+0x^2+3x$; $y=3x^3+0x^2+10x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) disminuye
16) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C<0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y=-3x^3+0x^2+4x$; $y=-3x^3+0x^2+-11x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) disminuye
17) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C<0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y=4x^3+0x^2+5x$; $y=4x^3+0x^2+-11x$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) aumenta
18) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica:

$y=-2x^3+0x^2+4x$; $y=-2x^3+0x^2+9x$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) aumenta	
19) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D>0		
					Ejemplos de la expresión algebraica: $y=4x^3+8x^2+1x+2$	$y=4x^3+8x^2+1x+5$
					comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) disminuye	
20) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D<0		
					Ejemplos de la expresión algebraica: $y=4x^3+8x^2+1x+-3$	$y=4x^3+8x^2+1x+-6$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.2

NOMBRES: Danyel Benavides, camila Igua

II.

a) Determina si A, crece o decrece, cuando A es positivo la grafica crece y cuando es negativo la grafica decrece

b) Cambian las curvas cuando A y B son positivos, si B aumenta las curvas se vuelven mas grandes y dos extremos formando un maximo y un minimo. hay un maximo en el cuadrante II y uno en en origen. y cuando B<0 disminuye queda un minimo en el cuadrante IV y un maximo en el origen.

c) el punto minimo sube al cuadrante I y el maximo tambien, hasta que las curvas desaparescan.

d) el maximo sube al cuadrante II y el minimo tambien, hasta llegar al punto de desaparecer.

e) que el punto maximo se va para el cuadrante II y el minimo para el cuadrante IV aumentando su tamaño pero siempre tocando el origen. cuando B es positivo la curva mas grande esta en el cuadrante II y cuando esta negativo hasta el cuadrante IV

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.2

f) Podemos ver que el minimo pasa al cuadrante III y el(maxamimaximo en en cuadrante I, y si B es positivo la curva mayor es en el cuadrante I y si es negativo en el cuadrante III

g) Podemos ver que en el eje y, se mueve el punto de corte de la grafica, si aumentamos o disminuimos el parametroD.

III.

a) el dominio son todos los reales y el rango tambien segun los graficas de los puntos anteriores.

b) el punto de corte minimo con el eje x puede ser 1 y el maximo 3

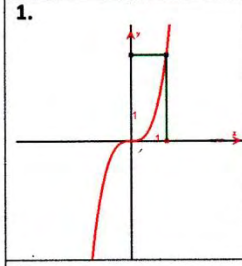
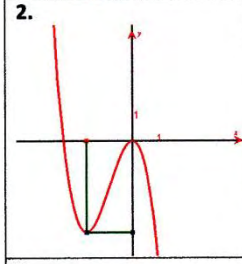
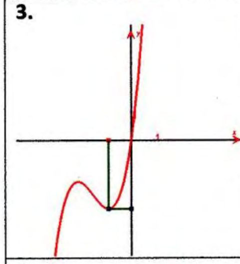
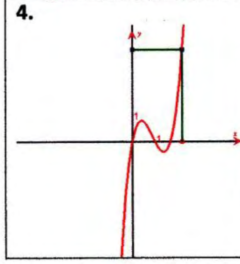
c) el punto de corte minimo con el eje y puede ser 1 y el maximo no.

d) en algunos casos no puede tener ni un maximo ni un minimo (extemos locales) y en otros casos pueden tener un maximo y un minimo (extemos locales).

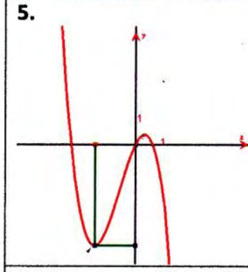
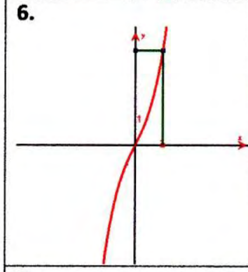
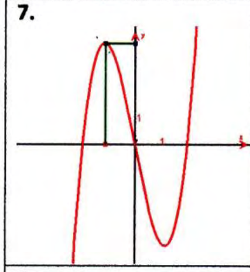
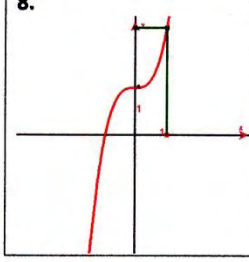
INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

NOMBRES: Camila Igua - Dannyel Benavides.

I.

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
1. 	3,000	0000	000	000	$y=3x^3$
2. 	-2,000	-3,000	000	,000	$y=-2x^3+(-3)x^2$
3. 	1,000	3,000	3,000	,000	$y=1x^3+3x^2+3x$
4. 	3,000	3,000	2,000	,000	$y=3x^3+3x^2+2x$

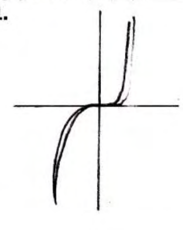
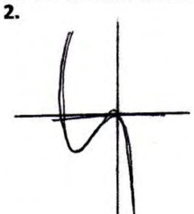
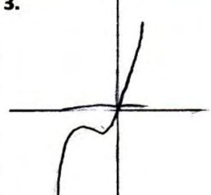
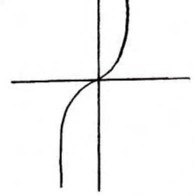
INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
5. 	-3,000	-8,000	2,000	000	$y=-3x^3+(-8)x^2+2x$
6. 	2,000	000	1000	000	$y=2x^3+0x^2+1x$
7. 	2,000	8,000	-2,000	000	$y=2x^3+8x^2+(-2)x$
8. 	2,000	-1,000	3,000	2,000	$y=2x^3+(-1)x^2+3x+2.$

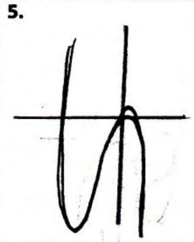
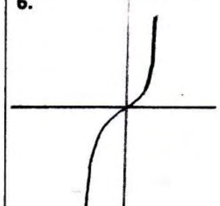
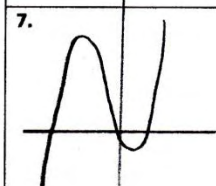
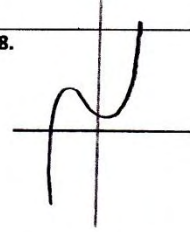
INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

NOMBRES: Daniel Benavides - Camila Igua

II.

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
1. 	3000	0000	6000	0000	$y=3x^3$
2. 	-2000	-3000	0000	0000	$y=-2x^3+(-3x^2)$
3. 	1000	3000	3000	0000	$y=1x^3+3x^2+3x$
4. 	3000	3.000	2000	0000	$y=3x^3+3x^2+2x$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
5. 	-3	-8	2	0	$y=-3x^3+(-8)x^2+2x$
6. 	2	0	1	0	$y=2x^3+0x^2+1x$
7. 	2	8	-2	0	$y=2x^3+8x^2+(-2)x$
8. 	2	-1	3	2	$y=2x^3+(-1)x^2+3x+2$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

a) en la grafica uno podemos ver que con side porque nuestros parametros considen y el parametro A nos dice que es una grafica creciente

la segunda grafica conside porque vemos que es decresiente y el punto maximo esta en el origen

en la tercera grafica conside pero para mayor perfeccion aumentamos el parametro B

la grafica #5 conside porque nos indica que la grafica es decreciendo y los valores para parametros A y B tienen que ser negativos y C deve ser positivo y si aumenta las curvas se nos arian mas grandes

la grafica #6 conside y los parametros nos muestra que A y C tiene valores positivos y B y D serian cero y si aumentamos C podemos ver que se vuelve mas recta

Daniel B. Camila Igua

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

b) no considero en la grafica cuatro porque en la tabla no vemos un punto maximo y un minimo y con los parametros que dimos no muestra estos puntos para ser igual es tiene que disminuir el B en negativo y el C aumentar

la grafica 7 no conside porque el parametro B tiene que ser cero y el parametro C tiene que ser un poco menor y si disminuye C las curvas serian mayores y A y C tienen que ser de signos opuestos

no conside porque B tendria que ser cero para que no nos de puntos maximos o minimos y C tambien seria cero para que se forme una parte como curva pero sin que exista el punto maximo ni minimo

Camila igua - Daniel Benavides

ANEXO No. H. LISTA DE REGISTROS ESCRITOS DE JHONATAN Y CARLOS

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: Jhonatan Ruiz

1. Los valores cambian de manera que el cubo se puede hacer mas ancho o mas largo dependiendo de que medida y el mismo caso con el largo

2.

ALTO $(x)cm$	ANCHO $(a)cm$	LARGO $(l)cm$	VOLUMEN $(y)cm^3$
0	4,00 cm	5,000 cm	0,000
0,316	3,368 cm	4,368 cm	4,647
0,5	3,00 cm	4,000 cm	6,000
0,658	2,684 cm	3,684 cm	6,506
0,711	2,579 cm	3,579 cm	6,558
0,763	2,474 cm	3,474 cm	6,558
0,816	2,368 cm	3,368 cm	6,508
1	2,00 cm	3,000 cm	6,000
1,263	1,474 cm	2,474 cm	4,605
2	0,000 cm	1,000 cm	0,000

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

a) Porque el alto ya ocupando todo el ancho de la caja y en la caja cuando se va haciendo mas larga va ocupando el ancho de la cartulina

b) Se podria construir entre : 0,000 y 6,558

c) Se va reduciendo el volumen mientras que aumenta el alto

d) Se podria construir con las siguientes medidas:
- 0,763-6,558
- 0,711- 6,558

e) Se puede observar que estos valores estan relacionados que el alto empieza en cero y el ancho termina en cero tomando como relacion el cero
Se podria decir que el alto va de forma acendente y el largo decendente

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: Carlos Garcedo M. 9-1

1. los Valores cambian de manera ordenada es decir que cierto valor de (x) equivale a un valor especifico de «A», «L»

2.

ALTO $(x)cm$	ANCHO $(a)cm$	LARGO $(l)cm$	VOLUMEN $(y)cm^3$
0	4cm	5cm	0cm^3
0,316	3.368cm	4,368cm	4,647cm^3
0,5	3 cm	4 cm	6cm^3
0,658	2,684cm	3.684cm	6,506cm^3
0,711	2,579cm	3,579cm	6,558cm^3
0,763	2,474cm	3,474cm	6,558cm^3
0,816	2,368cm	3,368cm	6.508cm^3
1	2cm	3 cm	6 cm^3
1,263	1.474cm	2.474cm	4.605cm^3
2	0cm	1cm	0cm

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

a) No se pueden tomar valores mas altos ya que el segmento usado en el programa no mide mas de 2cm, ademas de esto si tomamos el punto de vista del material en q' se construye no alcanza o no hay cartulina suficiente para armarse

b) Tomando los Valores de la Tabla el mas Bajo en el volumen es 0 cm³ y el mas alto es 6,558 cm³

c) Si se Rrepresentara en una grafica los Valores de X y Y harian una parabola asi que segun lo q' cambie (X) hara la medida de y no se aumenta (y) ya que en cierto punto decrenace como en una parabola.

d) segun Nuestra tabla las medidas para la caja con mas volumen son

X	A	L
0.711	2.579	3.579
0.763	2.368	3.474

e) Se observa que estos Valores estan Relacionados de tal manera que siempre den como figura final un Rectangulo *

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS

MATEMÁTICAS GRADO NOVENO

Diseñado por:

Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García

HOJA DE RESPUESTA

SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

NOMBRES: Jhonatan Ruiz, Carlos Caicedo

3.

Ancho de la cartulina (A)	altura (x)	$A-(x+x)$
4	0,026 cm	3,95 cm
4	1,789 cm	0,0421 cm
4	0,895 cm	2,211 cm

Largo de la cartulina (A)	altura (x)	$L-(x+x)$
5	1,184 cm	2,632 cm
5	0,526 cm	3,947 cm
5	1,737 cm	1,526 cm

a) Que con las anteriores formulas podemos saber las medidas del ancho y el largo de la cartulina y la caja

b) $a = A-(x+x)$ o $a = A-2x$

$l = L-(x+x)$ o $l = L-2x$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.1

c) $y = [A-(x+x)] \cdot [L-(x+x)] \cdot x$

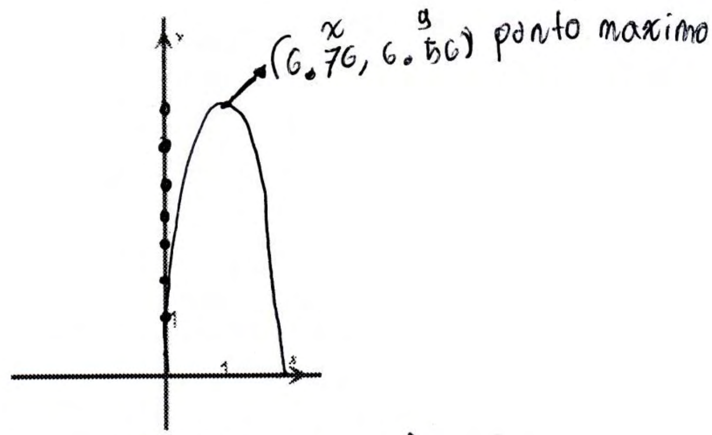
$y = (A-2x) \cdot (L-2x) \cdot x$

d) $y = (4-2x) \cdot (5-2x) \cdot x$

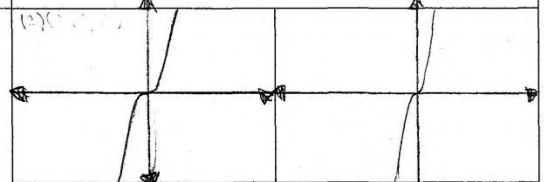
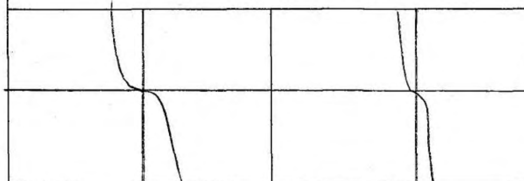
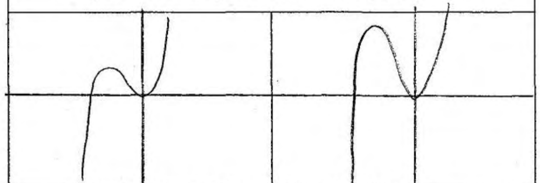
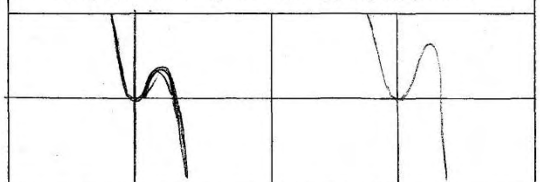
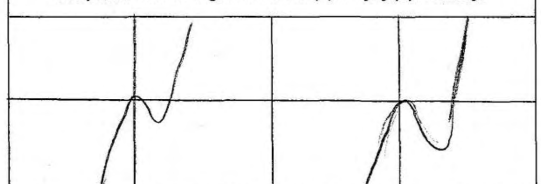
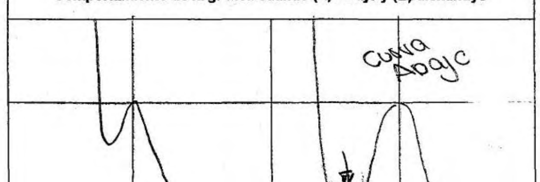
$(20-8x-10x+4x^2)\,x$

$20x-18x^2+4x^3 = 4x^3-18x^2+20x$

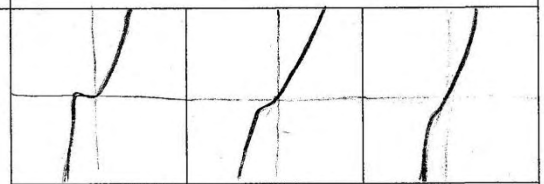
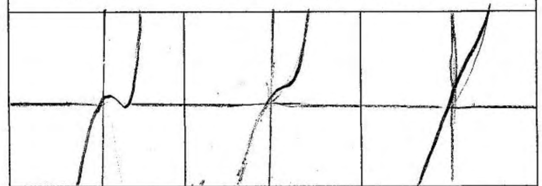
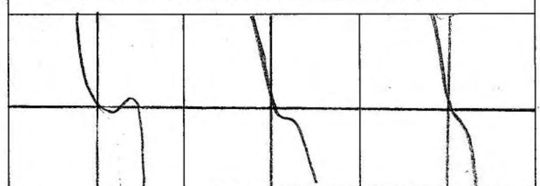
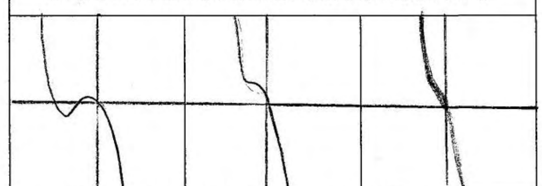
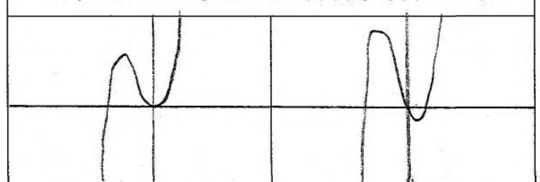
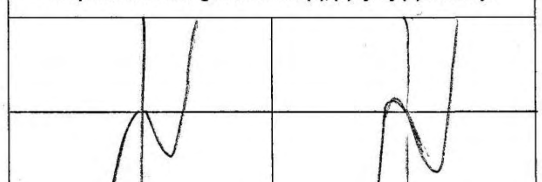
e)



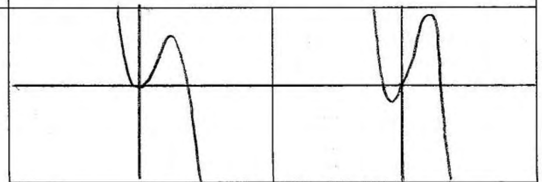
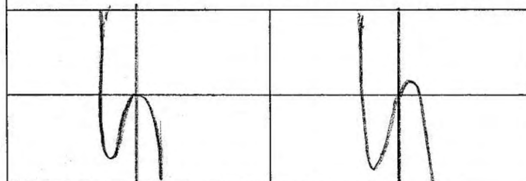
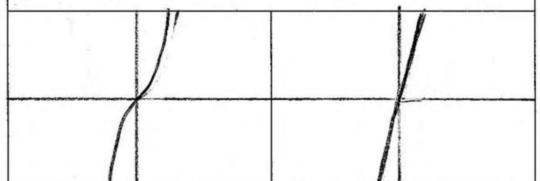
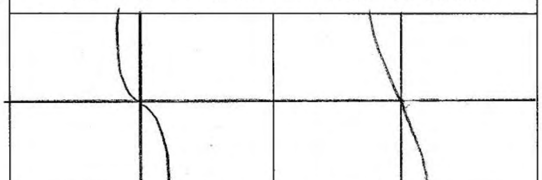
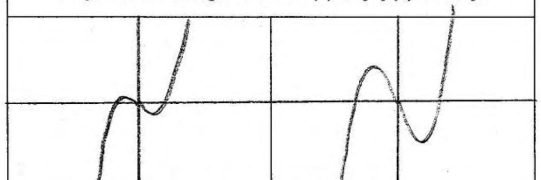
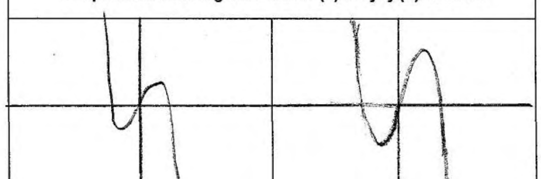
f) Punto Maximo (0,76 - 6,56)
Punto de Corte 0 & 2 en eje x o en y
Creciente (0.0 - 0,76)
Dom de 0 a 2 en x
Decreciente (0,76 - 2.0)
Rang de 0 a 6,56 en y

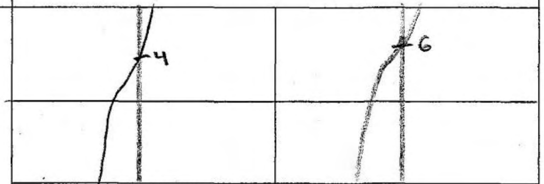
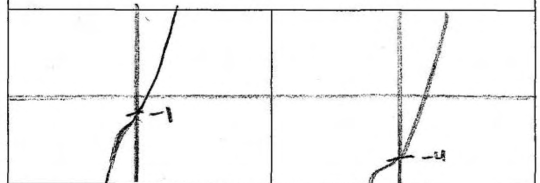
FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) aumenta
1) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = 2x^3+0x^2+0x+0$ / $y = 5x^3+0x^2+0x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) disminuye
2) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=(-2x^3)+0x^2+0x+0$ / $y=(-4x^3)+0x^2+0x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta
3) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=1x^3+3x^2+0x+0$ / $y=1x^3+4x^2+0x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) aumenta
4) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=(-1x^3)+3x^2+0x+0$ / $y=(-1x^3)+4x^2+0x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye
5) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=1x^3+(-2x^2)+0x+0$ / $y=1x^3+(-3x^2)+0x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (B) disminuye
6) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C=0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y=(-1x^3)+(-3x^3)+0x+0$ / $y=(-1x^3)+(-5x^2)+0x+0$

Jhonatan Ruiz Carlos Caicedo

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
7) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = 1x^3 + 2x^2 + 1x + 0$ / $1x^3 + 2x^2 + 2x + 0$ / $1x^3 + 2x^2 + 4x + 0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
8) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C>0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = (1x^3) + (-3x^2) + (2x) + 0$ / $(1x^3) + (-3x^2) + (3x) + 0$ / $(1x^3) + (-3x^2) + (6x) + 0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
9) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = (-1x^3) + 3x^2 + (-2x) + 0$ / $(-1x^3) + 3x^2 + (-3x) + 0$ / $(-1x^3) + 3x^2 + (-4x) + 0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
10) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = (-1x^3) + (-3x^2) + (-2x) + 0$ / $(-1x^3) + (-3x^2) + (-3x) + 0$ / $(-1x^3) + (-3x^2) + (-4x) + 0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
11) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:** $y = 1x^3 + 3x^2 - 1x + 0$ $\quad$ $y = 1x^3 + 3x^2 - 3x + 0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) disminuye
12) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B<0	C<0	D=0	 **Ejemplos de la expresión algebraica:**

$y = 1x^3 - 3x^2 - 1x + 0$ $\quad$ $y = 1x^3 - 3x^2 - 3x + 0$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
13) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B>0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = -1x^3+3x^2+1x+0$ / $-1x^3+3x^2+3x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B) fijos y (C) aumenta
14) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B<0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = -1x^3+(-3x^2)+1x+0$ / $-1x^3+(-3x^2)+3x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) aumenta
15) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = 1x^3+0x^2+1x+0$ / $1x^3+0x^2+8x+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) disminuye
16) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C<0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = (-1x^3)+0x^2+(-1x)+0$ / $(-1x^3)+0x^2+(-4x)+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) disminuye
17) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B=0	C<0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = 1x^3+0x^2+(-1x)+0$ / $1x^3+0x^2+(-5x)+0$
					Comportamiento de la gráfica cuando (A) es fijo y (C) aumenta
18) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A<0	B=0	C>0	D=0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = -1x^3+0x^2+3x+0$ / $-1x^3+0x^2+6x+0$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA	A	B	C	D	Comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) aumenta
19) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D>0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ / $1x^3 + 2x^2 + 3x + 6$
					comportamiento de la gráfica cuando (A), (B), (C) fijos y (D) disminuye
20) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	A>0	B>0	C>0	D<0	 Ejemplos de la expresión algebraica: $y = 1x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ / $1x^3 + 2x^2 + 3x - 4$

Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.2

NOMBRES: CARLOS CAICEDO / JHONATAN RUIZ

II.

a) El parameto A nos dice si la Grafica es creciente o Decreciente, cuando es creciente el parametro A es positivo y decreciente cuando es Negativo, y cuando A va aumentando la grafica se va acercando a el eje "y", y cuando A disminuye da el mismo efecto

b) cuando B es mayor a Ø aumentando se puede observar que el tamaño de las curvas va aumentando, y cuando ocurre este el punto minimo se encuentra en el Origen, cuando B es menor a Ø las curvas igual aumentan solo que en este caso el punto maximo estara en el Origen

c) Cuando A>Ø B>Ø C>Ø la Grafica (en si sus curvas) se van transladando desde el cuadrante 2 al 3 y cuando A>Ø B<Ø C>Ø las curvas de la Grafica se transladan del cuadrante 4 al 1, en estos 2 casos las curvas se transladan hasta desaparecer y formar casi una Recta

d) Cuando A<Ø B>Ø C<Ø: la grafica (en si sus curvas) se van transladando desde el cuadrante 1 al 4 y cuando A<Ø B<Ø C<Ø las curvas de la Grafica se transladan del cuadrante 3 al 2, en estos 2 casos las curvas se transladan hasta desaparecer y formar casi una Recta

e) antes de que C disminuya en A>Ø B>Ø C<Ø las dos curvas son un tanto pequeñas y el punto minimo se encuentran en el origen y cuando C ya disminuye las curvas se agrandan y el punto minimo se aleja del Origen transladandose al cuadrante 4 y cuando A>Ø B<Ø C<Ø ocurre este proceso con el punto maximo y pasa al cuadrante 2

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.2

f) Cuando $A<0$ $B>0$ $C>0$ se puede concluir que cuando el punto minimo esta en el origen y aumenta C este pasa al III cuadrante y cuando $A<0$ $B<0$ $C>0$ ocurre este mismo proceso con el punto maximo solo que este se transladadara al cuadrante 1

g) Cuando $A>0$ $B>0$ $C>0$ $D>0$ y D empieza a aumentar el punto de corte con respecto a "y" se desplaza mas Arriva (aumenta) y cuando $A>0$ $B>0$ $C>0$ $D<0$ ocurre lo mismo solo que el corte ira en "y-" y el corte Bajara (disminuira)

III.

a) Dom= Todos los N R (Reales)
Rango = Todos los N R

b) Como maximo se podra tener 3 puntos de corte con respecto al eje "x" y solo un punto de corte con respecto a "y". y como minimo podra tener 1 solo punto de corte con Respecto a "X"

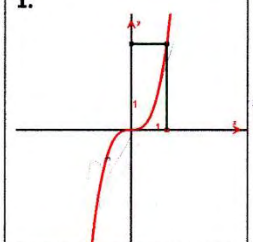
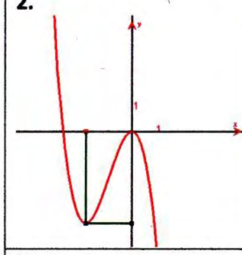
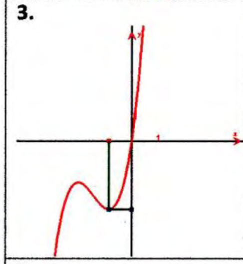
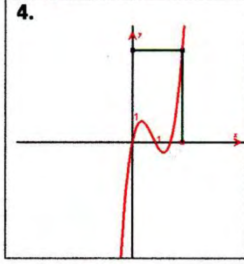
c) Con Respecto al eje "y" solo puede tener 1 punto de corte

d) en una funcion Cubica solo pueden haber 1 punto minimo y 1 punto maximo

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

NOMBRES: Jhonatan Ruiz, Carlos Caicedo

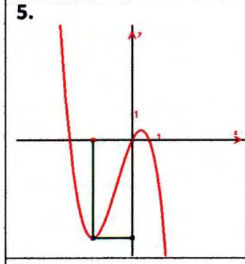
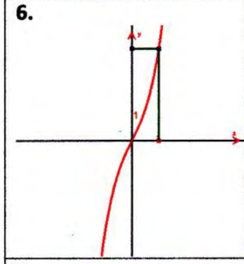
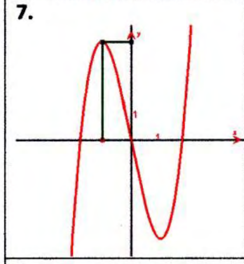
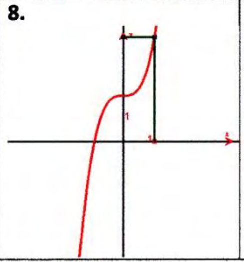
I.

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
1. 	2	0	4	0	$y=2x^3+4x$
2. 	-2	-3	0	0	$y-2x^3-3x^2$
3. 	3	-2	4	0	$y=3x^3-2x^2+4x$
4. 	2	-2	6	0	$y=2x^3-2x^2+3x$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:

Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García

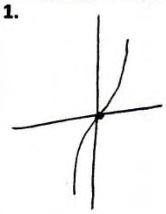
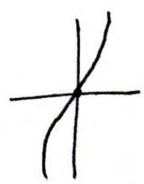
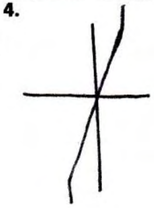
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
5. 	-2	-3	2	0	$y = -2x^3 - 3x^2 + 2x$
6. 	3	0	6	0	$y = 3x^3 + 6x$
7. 	4	0	-8	0	$y = 4x^3 - 8x$
8. 	+2	0	+1	3	$y = 2x^3 + 7x + 3$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

NOMBRES: Jhonatan Ruiz, Carlos caicedo

II.

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
1. 	2	0	4	0	$y=2x^3+4x$
2. 	-2	-3	0	0	$y=-2x^3-3x^2$
3. 	3	-2	4	0	$y=3x^3-2x^2+4x$
4. 	2	-2	6	0	$y=2x^3-2x^2+3x$

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

Gráfica	A	B	C	D	EJEMPLO DE LA FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN CÚBICA
5. 	-2	-3	2	0	$y=-2x^3-3x^2+2x$
6. 	3	0	6	0	$y=3x^3+6x$
7. 	4	0	8	0	$y=4x^3-8x$
8. 	2	0	7	3	$y=2x^3+7x+3$

Jhonatan Ruiz, Carlos Caicedo

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

a) 1 Son parecidas porque son crecientes porque el parametro a es parecido y no tiene curvas y quedaria mas parecida sin el parametro c

2 Son parecidas porque forman 2 extremos y por lo tanto el parametro "a" es negativo y un extremo esta en el origen y otro en el cuadrante 3

4 Los signos de los parametros son correctos pero las medidas fallaron en b porque tendria que ser mas grande porque forma las curva.

5 las 2 graficas son decrecientes y similares en cuanto a la ubicación de las curvas

6 Son similares ya que las 2 son crecientes pero el valor de "c" tubo que aver sido un poco mas bajo y ambas son crecientes

7) las 2 graficas son crecientes y al no estar presente B las 2 curvas son parecidas y no es una mas grande que la otra

Jhonatan Ruiz, Carlos Caicedo

INSTITUTO SAN FRANCISCO DE ASIS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado por:
Erwin Michael Mingán Oliva e Ignacio Darío Enríquez García
HOJA DE RESPUESTA
SITUACIÓN DIDÁCTICA No.3

b) 3. Son crecientes porque el parametro a es positivo pero el parametro b se diferencia porque tendria que ser positivo el parametro b porque aumenta y cuant es positivo los extremos se Ubican en el tercer cuadrante

8) las 2 Graficas son Crecientes solo que el valor de c no devia ser 7 si no 0, ya que cuando c aumenta se desaparecen las curvas y al ser 0 hay una curva sin extremo local ni minimo local

ANEXO No. I. VIDEOGRABACIONES DE LA PUESTA EN PRÁCTICA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS