

CURSO DE FÍSICA I

Para estudiantes de ciencias, ingeniería
y licenciaturas en educación

Notas de clase



Luis Aphranio Portilla Salazar



Editorial
Universidad de Nariño

êditorial

Universidad de **Nariño**

CURSO DE FÍSICA I
PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS,
INGENIERÍA
Y LICENCIATURAS EN EDUCACIÓN
NOTAS DE CLASE

CURSO DE FÍSICA I
PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS,
INGENIERÍA
Y LICENCIATURAS EN EDUCACIÓN
NOTAS DE CLASE

Luis Aphranio Portilla Salazar

êditorial
Universidad de **Nariño**

Portilla Salazar, Luis Aphranio
Curso de física I para estudiantes de ciencias, ingeniería y licenciaturas en educación : notas de clase / Luis Aphranio Portilla Salazar. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2024

459 páginas : ilustraciones, gráficas, tablas, fotografías

Incluye referencias bibliográficas p. 451-456 y biografía del autor p. 457

ISBN: 978-628-7679-83-2

1. Física 2. Física—Enseñanza y aprendizaje 3. Física—Ejercicios y problemas 4. Física—Educación superior

530 P852c – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

CURSO DE FÍSICA I

© Editorial Universidad de Nariño

© Luis Aphranio Portilla Salazar

ISBN: 978-628-7679-83-2

Imagen de portada: Mateo Felipe Delgado

Rediseño de portada: Sergio Arley Bastidas

Diagramación y Diseño: Sergio Arley Bastidas Rosero

Fecha de publicación: 2024

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito sin la autorización de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

Este trabajo es el resultado de la experiencia de años dedicados a la educación universitaria, fundamentalmente en la Universidad de Nariño, como profesor de Física en los diferentes programas en que el Departamento de Física presta sus servicios. Mis agradecimientos a las estudiantes Sara Gabriela Cruz y Isabell Tello Burbano quienes se dedicaron a transcribir el manuscrito de Física I

Nota

Las gráficas como esquemas las realiza el autor de estas notas de clase en AutoCAD (2019), con lo cual se puede conservar la escala adecuada; algunas imágenes de fotografías se han tomado de portales de Internet, en las que se señala la correspondiente referencia.

Índice

Capítulo 1. Introducción a la Física	15
1.1 Introducción	16
1.2 Dimensiones y unidades	23
Dimensión Longitud	23
Metro	24
Dimensión Masa	25
Kilogramo	25
Dimensión tiempo	26
Segundo	26
Calendario	29
1.3 Sistema de Conversión de Unidades	29
Conversión de unidades de longitud	29
Centímetro	29
Pulgada	29
Kilometro	29
Milla	29
Unidad astronómica	29
Año luz	30
Parsec	30
Conversión de unidades de masa	31
Gramo	31
Libra	31
Quintal	31
Quintal métrico	31
Conversión de unidades de tiempo	32
Segundo	32
Minuto	32
Hora	32
1.4 Metrología	32
1.5 Orden de magnitud	35
1.6 Análisis dimensional	36
1.7 Sistema de referencia	39
Sistema Unidimensional	39
Sistema Bidimensional	39
Sistema Polar	40

Sistema Tridimensional	40
Sistema Esférico	41
1.8 Magnitud vectorial	43
Características del vector	43
Magnitud	43
Dirección	43
Sentido	44
Concepto de igualdad	44
Concepto de vector libre	44
1.9 Operaciones de vectores con escalares	44
1.10 Operaciones vectoriales de forma geométrica	46
Operaciones vectoriales en un sistema	
unidimensional	46
Adición vectorial	46
Sustracción vectorial.....	47
Operaciones vectoriales en un Sistema	
bidimensional	47
Suma de vectores	48
Resta de vectores	48
Sumar más de dos vectores	49
Componentes de un vector	50
Suma de vectores mediante	
componentes	52
Vectores en tres dimensiones	61
Vectores unitarios o versores	63
1.11 Producto de vectores	66
Producto escalar o punto	66
Primera definición	66
Segunda definición	66
Propiedades del producto escalar	68
Producto vectorial	69
Primera definición	69
Segunda definición	69
Propiedades del producto vectorial	71

Capítulo 2. Cinemática	77
2.1 Sistemas de referencia	78
Sistema de referencia unidimensional	79
Sistema de referencia bidimensional	80
Sistema de referencia tridimensional	80
2.2 Trayectoria	81
2.3 Posición	82
Variación de la posición – desplazamiento ..	82
2.4 Velocidad	83
2.5 Aceleración	85
2.6 Sacudida	86
2.7 Clasificación de movimiento	87
Movimiento rectilíneo	88
Movimiento rectilíneo uniforme	88
Movimiento rectilíneo variado	95
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)	98
2.8 Gráfica de las ecuaciones cinemáticas	110
Desplazamiento en el movimiento rectilíneo uniforme	110
Desplazamiento en el movimiento uniformemente acelerado	111
Velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme acelerado	112
Aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme acelerado	113
Aporte de la Edad Media a la Física	117
2.9 Velocidad relativa	118
2.10 Caída libre de objetos	132
2.11 Movimiento curvilíneo o en el plano	148
Movimiento parabólico (lanzamiento de proyectiles)	150
Tiempo de subida	152
Tiempo de bajada	153
Tiempo de vuelo	153
Altura máxima	153
Alcance	154

Velocidad	156
Función o ecuación de la trayectoria	158
Movimiento semi-parabólico o tiro	
horizontal	170
2.12 Movimiento circular	174
Movimiento circular uniforme	175
Velocidad tangencial	176
Transmisión del movimiento circular	184
2.13 Aceleración centrípeta	194
Aceleración centrípeta en el movimiento	
curvilíneo en general.....	198
2.14 Movimiento circular acelerado	202
2.15 Movimiento relativo	205
Velocidad relativa	206
Movimiento relativo de traslación o	
galileano	209
Movimiento relativo entre sistemas de traslación	
y rotación	211
Péndulo de Foucault	214
Cauces de los ríos en los hemisferios ...	215
Rieles de carrileras del hemisferio Norte y	
Sur	215
Formación de grandes remolinos en las	
nubes tanto en el polo norte como en el polo	
sur	216

Capítulo 3. Dinámica 217

3.1 Leyes de la dinámica	218
Primera ley. Inercia	218
Segunda ley. Fuerza	219
Tercera ley. Acción y Reacción	219
3.2 Momentum o cantidad de movimiento	220
Inercia	221
Fuerza	221
Acción y Reacción	224
3.3 Conservación del momentum lineal	225
Movimiento de los cuerpos	226

3.4 Fuerzas ficticias y verdaderas	230
Fuerza gravitacional	230
Fuerza electromagnética	232
Fuerza nuclear débil	233
Fuerza nuclear fuerte	233
Peso	234
Fuerza elástica	235
Peso y masa	236
Fuerza de rozamiento	238
Clases de rozamiento	240
Frenos ABS	241
3.5 Sistema inercial	242
Análisis de fuerzas en el sistema inercial	242
3.6 Sistema acelerado	250
Análisis de fuerzas en sistemas acelerados .	250
Carril de Fleacher	250
Máquina de Atwood	252
Plano inclinado	252
3.7 Aplicaciones	259
Caída de gotas de agua con rozamiento	259
Movimiento del ascensor	262
3.8 Tercera ley de Newton	264
Balistocardiografo	268
Lanzamiento de un cohete	268
Impulso y fuerza impulsora	270
3.9 Leyes de la dinámica en el movimiento circular	272
Orbitas de un satélite	272
Péndulo cónico	274
Peralte	277
Peralte con rozamiento	279

Capítulo 4. Dinámica de la rotación 285

4.1 Dinámica de la rotación para una partícula	286
Momento de una fuerza o Torque	293
Ejemplos	295
Sistemas inerciales en la rotación	296
Palancas de primer género	297

	Palancas de segundo género	299
	La balanza	301
	La balanza romana	302
4.2	Poleas y aparatos afines	304
	Polea simple	304
	Polea móvil	305
	Aparejo potencial	306
	Aparejo factorial	307
	Aparejo diferencial	308
	Torno	310
4.3	Aplicaciones	310
	Polea fija	310
	Polea móvil	311
	Aparejo potencial	311
	Aparejo factorial	311
	Aparejo diferencial	312
	Torno	312
4.4	Dinámica de la rotación en el cuerpo rígido	313
	Centro de masa, caso discreto	314
	Centro de masa, caso continuo.	317
	Ejemplos	318
4.5	Momento de inercia en casos continuos	333
	Momento de inercia de un sólido	333
	Ejemplos	334
	Momento de inercia de una varilla	334
	Momento de inercia de un volante	335
	Momento de inercia de un disco	336
4.6	Teorema de Steiner	337
	Ejemplos	339
	Aplicaciones	343
	Rotación de una rueda por acción de una fuerza	343
	Rotación de una rueda por acción de un peso	344
	Rotación de una rueda por acción de su propio peso	346
	Máquina de Atwood	347
	Velocidad al final de la rampa	349

4.7	Análisis vectorial para el movimiento rotacional	354
	Movimiento giroscópico	356
	Aparato vestibular y piloto automático.	359
4.8	Estática	362
	Ejemplos	362
4.9	Equilibrio respecto a un punto de suspensión	377
	Equilibrio estable	378
	Equilibrio inestable	378
	Equilibrio neutro o indiferente	379
4.10	Equilibrio de un sólido	379
	Equilibrio estable	380
	Equilibrio inestable	380
	Equilibrio neutro	381
	Paradoja de equilibrio	382
Capítulo 5. Trabajo y energía		383
5.1	Trabajo	385
5.2	Potencia	396
5.3	Trabajo y energía	399
	Energía potencial	399
	Energía cinética	400
5.4	Conservación de la energía	402
5.5	Conservación del momentum	408
	Choque elástico	408
	Choque semi-elástico	409
	Choque inelástico	411
5.6	Energía de la rotación	414
5.7	Potencia en la rotación	416
5.8	Energía de la traslación y la rotación	418
Capítulo 6. Gravitación universal		420
6.1	Introducción	421
6.2	Leyes de Kepler	423
6.3	Concepto de fuerza a distancia	425
6.4	Ley de la Gravitación Universal	426
	Principio de superposición	427

6.5 Aceleración gravitacional o gravedad	429
Ejemplos	431
6.6 Energía potencial gravitacional	433
6.7 Órbitas planetarias y de satélites	436
6.8 Secciones cónicas	440
Sección circular	440
Sección elíptica	441
Sección parabólica	441
Sección hiperbólica	441
Construcción de las secciones cónicas	441
Circunferencia	441
Forma general de estudiar las cónicas .	441
6.9 Órbitas planetarias y de satélites	444
Órbitas circulares	444
Ejemplos	445
6.10 Gravedad cero entre la luna y la tierra	446
6.11 Campo gravitacional	448

Capítulo 1

Introducción a la Física



Arcoíris o *cueche* en lengua quechua. Corregimiento de Cimarrones Nariño (Fotografía del autor)

1.1 Introducción

Al iniciar este estudio de la física, cabe preguntarse: ¿desde cuándo conocemos la Física?; ¿que tanto sabían sobre fenomenologías de la naturaleza nuestros antepasados? Para saberlo hay que trasegar a través de un un proceso enormemente largo para llegar hasta donde estamos y así seguirá en un continuo proceso evolutivo; para tratar de entenderlo, es conveniente echar una mirada hacia atrás y partir desde un punto origen sobre una línea del tiempo.

Hace unos dos millones de años vivió el *Australopithecus afarensis* (del latín, ‘mono austral de Afar’), que fue un homínido del cual, parece, hemos descendido; se cree que habitó en África; hubo otros que desafortunadamente desaparecieron; hace 1,8 millones de años, este homínido pudo liberarse de la marcha con el apoyo de las manos para lograr caminar en dos piernas; así surgió el *Homo erectus*; con sus manos libres para poder realizar otras labores diferentes a la marcha, aumentó la habilidad. Se cree que hace 0,8 millones de años apareció el *Homo habilis*, un ser que ha logrado unir la acción de sus manos con el querer del cerebro, un ser que logró con sus manos realizar movimientos macro y finos; con esta habilidad logró elaborar una vestimenta para cubrir el cuerpo en los tiempos fríos al utilizar la piel de los animales; también logró fabricar herramientas para la caza y la defensa, aprendió a construir espacios donde pasar la noche y protegerse de las inclemencias del tiempo; además, aprendió a proteger a sus seres cercanos, el uso de herramientas de caza, le permitio subsistir y en ocaciones utilizarlas para atacar a invasores.

El fuego fue muy importante en la supervivencia; así que, hace 0,5 millones de años, el fuego aparece como una herramienta probablemente como resultado de la caída de rayos, erupciones volcánicas, etc. Pero, en esta línea de tiempo, parece que el fuego se utilizó para el abrigo y la cocción de alimentos pues la carne cocida resultaba más fácil de

digerir que la carne cruda, al igual que otros alimentos. Este proceso largo pudo servir, también, para poblar la tierra; por otra parte, ahora que las necesidades más básicas de supervivencia se han logrado cubrir, pudo quedar tiempo para pensar sobre su propia existencia; esto ocurrió hace unos 45 o 38 mil años, cuando aparece *Homo sapiens*, un hombre similar al actual, capaz de razonar, dotado de las habilidades e inteligencia para inventar y solucionar problemas de la vida cotidiana, dedicado a pensar en la fenomenología del día a día; sin embargo, hace solo unos 15,000 años aparece la primera ciudad con aparente organización; se trata de la ciudad de Jericó (en el Suan, cerca del Río Jordán, en Palestina); los arqueólogos y científicos han determinado que este es el punto de partida en la historia de la humanidad.

A lo largo de este transcurrir, el hombre siempre miró fenómenos de la naturaleza que le llamaron la atención; entre tantos, se encontró con un fenómeno cotidiano y de extraordinaria belleza: el “arco iris”; en la lengua quechua se le diría el cueche (Fig. 1.1), para entonces imposible entender la naturaleza del fenómeno, que siempre ha acompañado los días lluviosos y soleados; el hombre distinguió colores y, cuando conoció los números, se dio cuenta que había siete colores; con el paso de muchos años encontró una feliz coincidencia, pues también había siete planetas; estos dos fenómenos naturales, que implican cantidad, fueron un inicio muy importante para el desarrollo de la humanidad.

En el arco iris se pudieron distinguir colores, que luego llamaron rojo, naranja, amarillo, verde, azul añil y violeta; y los planetas distinguibles en las noches estrelladas eran: Sol, Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno y el Sol en el día; así, cuando el hombre pensó en el arco iris, como una manifestación de algún dios que quería ayudarlos o que se manifestaba enfadado por algo malo que se hubiera realizado, parece que esto fue un gran pretexto para iniciar un camino espiritual, que se convierte en necesidad para calmar los demonios que, por la falta de conocimiento, atormentaban a la mente del hombre primitivo.

Así que, en las cosas que el hombre realizaba, habría de hacer coincidir con este número mágico; los caldeos plantearon un calendario de siete días de la semana (lunes, martes, miércoles, jueves, viernes sábado y domingo), cada día dedicado a un dios en especial; mucho más temprano, el hombre hizo coincidir en las construcciones antiguas siete maravillas (Jardines Colgantes de Babilonia (Mesopotamia), La gran pirámide de Giza (Egipto), Estatua de Zeus (Grecia), Mausoleo de Halicarnaso (Turquía), Faro de Alejandría (Egipto), Coloso de Rodas (Grecia), Templo de Artemisa (Turquía); para entonces, el hombre consideró que también se debería tener siete mujeres; los griegos decidieron establecer siete notas musicales (Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si); mucho más temprano, los escritores religiosos vieron la necesidad de describir las siete plagas de Egipto, según la *Biblia* (primera plaga, el agua del Nilo se convierte en sangre; segunda, una lluvia de ranas; tercera, muerte del ganado; cuarta, lluvia de granizo y fuego; quinta, una invasión de langostas; sexta, conocida como las tinieblas, el cielo de Egipto se sumió en la oscuridad durante tres días; y la séptima, muerte de todos los primogénitos egipcios), y muchos otros casos donde se refiere al número siete como algo mágico; muchos otros fenómenos sin explicación también se atribuyeron a manifestaciones divinas que, poco a poco, han alcanzado explicaciones aceptables a la mente humana, en un transcurrir largo, muy largo, lleno de muchas contradicciones, réplicas y aciertos; así ha sido el devenir de la ciencia, por eso: ¿qué debe hacer un científico contemporáneo? Debe comprometerse con la verdad razonable, esto es: “El científico moderno jamás puede dar respuesta a preguntas sobre mitos, leyendas o costumbres hasta que estas no estén demostradas científicamente”. [Tippens]

Razón por la cual, la ciencia moderna se apoya en la cosa demostrada experimentalmente y confrontada con la teoría, así que está muy lejos de la especulación, sesgo político, filosófico y religioso; de esta forma, la ciencia sigue su propio método: el “método científico”, que no es más que la sistematización en miniatura de lo que hacemos a lo largo de la vida: observar,

preguntar, imaginar, desarrollar y concluir con la vejez. Entonces, cabe formular la pregunta: ¿qué es la ciencia?

Cuando se trata de dar este tipo de definiciones, siempre nos remitimos a los sabios griegos (600 a. C.); ellos se referían al estudio de la naturaleza como **filosofía natural**; aunque no lograron contrastar el desarrollo natural del ser humano con el aprendizaje natural, tenían toda la razón al aceptar que es preciso filosofar para entender los fenómenos de la naturaleza. Mucho tiempo pasó para que la especulación diera paso a la experimentación sistemática y a aceptar que el lenguaje es el correspondiente a las matemáticas; el mismo Pitágoras (572-500 a. C.) afirmaba que los números rigen el universo; sin embargo, la especulación y las creencias infundadas rigieron las Edades Antigua y Media.

En la Universidad de Oxford, el religioso Roger Bacon (1220-1294) ya afirmaba que sin experimentación y matemáticas no hay ciencia; hubo que esperar a Galileo Galilei (1564-1642) para que sintetizara un protocolo de modelo de investigación científica mostrado en el desarrollo de múltiples experimentos que efectuó para conocer la verdad de los fenómenos naturales que estudió.

Así, entonces, se puede decir que los pasos del modelo científico se basan en: observación, cuestionamiento, hipótesis, metodología adecuada y conclusiones. Estos pasos los sigue toda ciencia moderna de alguna forma y siempre se obtiene una respuesta. Los científicos vieron conveniente que la ciencia se debería dividir de acuerdo a los campos de estudio; así surgieron las disciplinas, como: Biología: dedicada a estudiar la naturaleza viva; Física: estudia la interacción de la materia y la energía; Química: estudia la naturaleza, sus componentes y propiedades. En el caso de la Física, la palabra proviene del griego *physis*, que significa naturaleza, y también del latín *physicus*, que es algo relativo o relacionado con la ciencia de la naturaleza.

Así que hoy diremos que la Física es una ciencia fundamental para el estudio y comprensión de fenómenos de

la naturaleza, donde hay interacción de la materia y la energía; sin embargo, por asuntos de extensión, los campos de la Física son de tipo teórico y experimental: el primero se dedica a formular modelos matemáticos que describieran la naturaleza, y el segundo se dedica a comprobar lo planteado por la teoría en el estrado judicial del laboratorio; así se tienen dos formas de estudiar la Física: científicos teóricos y científicos experimentales, quienes dan la última palabra sobre la teoría; de esta forma es como se ha desarrollado la física contemporánea.

Ahora bien, otro papel es lo referente de la ciencia a enseñar; en general, como los modelos originales son de muchísima complejidad, entonces, cuando el científico tiene que asumir el papel de docente y sintetizar, sin perder la veracidad de la teoría, formula modelos didácticos pedagógicos asequibles a los jóvenes que inician el estudio de la Física.



Fig. 1.1 Arco iris, o cueche en lengua quechua. Corregimiento de Cimarrones (autor).

En la actualidad, la Física se puede clasificar en Física clásica y Física moderna. La primera se desarrolló desde 1600 hasta 1900, fecha en la cual surge la Física moderna; el siglo XVIII fue uno de

los siglos más florecientes para la Física clásica; innumerables modelos matemáticos se desarrollaron que hasta ahora se estrenan para acuñar nuevas teorías. Galileo recoge tratados de Física mecánica y utiliza el método científico de la experimentación, al trabajar en problemas de la actualidad de ese entonces; así descubre las leyes del movimiento rectilíneo acelerado, la caída de los cuerpos y mucho más. El año en que muere Galileo, nace Newton, uno de los más grandes científicos, a quien se le debe el cálculo diferencial e integral, junto a Leibniz, la teoría sobre la gravitación universal, las

tres leyes de la dinámica o de Newton, tratados de óptica y mucho más que, a medida que se avance, se irán mostrando los trabajos realizados.

Al finalizar el siglo XIX, se creía que todo se había concluido y lo único que restaba era aplicar a la técnica; sin embargo, el científico alemán Max Planck (1858-1947) descubre que la energía es discontinua, con lo que surge la Física Cuántica, que abre nuevos horizontes para inagotables estudios.

Así que, con este breve preámbulo, podemos establecer una clasificación de lo que se tiene hoy por hoy:

En la Física clásica se desarrollan tres campos:

1. Mecánica clásica, como estudio del movimiento de los cuerpos, partículas y fluidos.

2. Termodinámica, o estudio del calor, las transformaciones y las propiedades de los sistemas de muchísimas partículas.

3. Electromagnetismo, o estudio de la electricidad, el magnetismo, las ondas electromagnéticas, la luz y el calor como un todo.

En la Física moderna se vienen desarrollando también tres campos:

1. Relatividad especial. Física del comportamiento de las partículas que se mueven a gran velocidad, lo que condujo a una nueva forma de pensar sobre el espacio y el tiempo.

2. Mecánica cuántica. Física del mundo subatómico, cuyo resultado trastornó totalmente nuestra forma de ver cómo funciona nuestra naturaleza.

3. Relatividad general. Estudia lo relacionado con la naturaleza de la fuerza de la gravedad y las propiedades geométricas del espacio.

Así, el propósito de la Física es explorar la naturaleza, enriquecerla y sistematizarla para dar una explicación del fenómeno en términos simples y precisos; por ejemplo: en nuestro conocimiento actual, a la naturaleza ordinaria la constituyen cristales, moléculas, átomos que, a su vez, se forman por electrones y núcleos, el núcleo por neutrones y protones, los neutrones y protones por cuarks, pero todas las partículas elementales (cientos de ellas) pueden construirse a partir de dos tipos básicos: los cuarks y leptones.

Otro ejemplo puede ser la amplia gama de fuerzas que se encuentran en la Naturaleza, como la generada por cuerdas, resortes, músculos, fluidos, cargas eléctricas, magnéticas y nucleares, etc. A pesar de esta gran variedad de fuerzas, los físicos han logrado clasificarlas en cuatro grupos:

1. Gravitacional
2. Electromagnética
3. Nuclear débil
4. Nuclear fuerte.

Cualquier fuerza que se encuentre en la naturaleza siempre caerá en uno de estos cuatro grupos; así, por ejemplo, la fuerza gravitacional es la causante de que los cuerpos tengan peso, de que las cosas caigan, de que los planetas orbitasen alrededor del sol y los satélites alrededor de los planetas.

La interacción electromagnética entre cargas eléctricas se manifiesta en reacciones químicas, señales de radio, televisión, la luz, rayos X, la fricción, la fuerza muscular y todas las fuerzas que resultasen de experimentar con cuerpos rígidos, maleables, dúctiles, elásticos, el dolor y hasta nuestra forma de pensar.

A partir de la interacción débil entre cuarks y leptones, se asocian con la radioactividad de los elementos químicos, como el radio, el uranio, el plutonio, entre otros. En los últimos tiempos se ha confirmado que las interacciones

electromagnéticas débiles son manifestaciones de la interacción más básica.

Entre las interacciones fuertes entre cuarks y las demás partículas subatómicas que unen a las partículas del núcleo está la fisión atómica; el desprendimiento de energía al partir un núcleo radioactivo, como el uranio 235, es muy grande; esto es justamente lo que ocurrió con la explosión de la bomba atómica de uranio o de plutonio, donde el desprendimiento de energía se comporta de acuerdo con la ecuación de Einstein $E = \Delta mc^2$, y esta cantidad de energía es sencillamente descomunal; de allí, el efecto bélico que produjo el desarrollo de estos conocimientos.

1.2 Dimensiones y unidades

Para poder unificar el lenguaje de la Física, los científicos han definido unos estándares convenientes que permitieran homogeneizar las cantidades físicas; por ahora, se tomarán en cuenta tres: longitud, masa y tiempo. Para poder definir las, se necesita tener unas unidades que permitan cuantificarlas; en el Sistema Internacional (SI), las unidades son: para la longitud, el metro; para la masa, el kilogramo, y para el tiempo, el segundo. Esto se requirió materializarlo en una oficina de pesas y medidas, en un edificio en Sèvres, muy cerca de París, como se puede ver en la Fig. 1.2. Así:



Fig. 1.2. Edificio donde se encuentra el Museo de pesas y medidas, en Sèvres (Francia). Fuente: Benjismo89 (2008)

Dimensión longitud. En esta dimensión está todo lo relacionado con las distancias entre dos puntos a y b; para poder cuantificar la distancia, es necesario establecer una comparación con la unidad escogida; en este caso, la unidad se denomina metro (Fig. 1.3).

Metro. Unidad de medida que, desde su implementación, ha tenido definiciones cada vez más precisas; estas definiciones son:

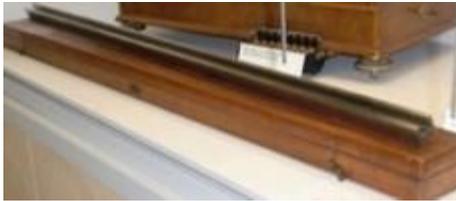


Fig. 1.3. Metro patrón: barra de la aleación de platino e iridio. Fuente: Tinoco (s.f.).

1. En 1791, la Academia de Ciencias de Francia conformó la primera Comisión Científica en el Nuevo Mundo de las Américas; en esa Comisión, se propuso como objetivo medir el arco que corresponda a un grado en la zona ecuatorial; de igual forma, hubo una comisión para la zona ártica, cuyo objetivo era el mismo, medir la longitud del arco sobre la superficie terrestre correspondiente a un grado, lo que, de acuerdo a la teoría de Newton que afirmaba que por acción de la rotación la tierra resulta achatada en los polos *vs.* la teoría de **Cassini** y **Descartes**, en la que se afirmaba lo contrario; la Comisión del Ártico la encabezaba **Pierre Maupertuis**, con la participación del físico Anderson Celsius, y la Comisión para la zona ecuatorial la encabezaba **Charles Marie de la Condamine**, con la presencia de los físicos **Jorge Juan** y **Antonio de Ulloa**.

Tras muchos debates, al fin la Comisión conformada por **Jean-Baptiste D'Alembert** y **Pierre Méchain**, con los datos obtenidos por las Comisiones, entre 1791 y 1798, llegaron a la conclusión de que el perímetro de la tierra en sentido meridional es de 40.000.000 de metros; es decir que cada cuadrante tendría 10.000.000 metros, así que la definición del metro fue: $\frac{1}{10.000.000}$, o sea, una diezmillonésima parte de la distancia que separa el Polo Norte de la Línea Ecuatorial.

2. En 1882, la Comisión de Pesas y Medidas, para que se pudiera tornar tangible lo antes expresado, decidió diseñar un prototipo de metal con propiedades de bajo coeficiente de dilatación térmica y bajo coeficiente de corrosión; entre tantas

aleaciones, se escogió la de platino e iridio. Así, la barra de esta aleación se la subdividió en cien partes, con lo cual aparece el centímetro, y se depositó en una urna, bajo tres campanas de vidrio al vacío, que se encuentra en la Oficina de Pesas y Medidas, en Sèvres.

3. En 1960, la Oficina de Pesas y Medidas adoptó una nueva definición del metro, con la cual se puede replicar en cualquier laboratorio capacitado para poder obtener una radiación naranja del átomo criptón 86, de tal forma que un metro equivale a 1'650.763,73 veces la longitud de onda de dicha radiación en el vacío.

Dimensión Masa

Para la masa, también hay una historia respecto a la definición de la unidad de medida, tras existir muchísimas unidades disímiles, como: el quintal, la arroba, la onza, etc. Algunas siguen en uso, pero con su equivalencia estandarizada.

Kilogramo. Al igual que en el caso del metro, científicos encargados de estandarizar buscaron la unidad que unificara todas; entonces, se tienen estas definiciones (Fig. 1.4):

1. Decisión tomada por la Junta de la Revolución Francesa en 1795, en la que se especifica al Kilogramo como el equivalente a un decímetro cúbico (litro) de agua destilada a una temperatura de 3.98 °C y a una presión de una atmósfera.

2. Similar a lo que ocurrió en la dimensión longitud, también se fabricó un prototipo de platino e iridio, con una densidad de $21.5 \frac{Gm}{Cm^3}$, con lo que se conformó un cilindro de igual altura que su diámetro, de 34mm, depositado en igual cámara de tres campanas al vacío.



Fig. 1.4 Urnas de cristal donde se encuentra el kilogramo patrón, en la Oficina de Pesas y Medidas, de Sèvres. Fuente: Ramani (2018).

3. Con el pasar del tiempo, se prefirió adoptar una definición con base en la Física atómica, a partir del número de Avogadro; esto es: $m = \frac{\text{Peso atómico}}{N_0}$; por ejemplo, en el caso

de un átomo de aluminio, es: $m = \frac{27 \frac{\text{Gm}}{\text{mol}}}{6.02 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}}}$, con lo que se

tiene: $m = 4.5 \times 10^{-23} \frac{\text{Gm}}{\text{átomos}}$

En este caso, se puede ver que la masa se determina en términos de un número determinado de átomos.

4. El 20 de mayo de 2019 (mientras se empezaba a escribir estas notas de clase), se redefinió la masa en función de la constante de Planck, así:

$$1\text{Kgm} = \frac{h}{6.626070 \times 10^{-34}}$$

Dimensión tiempo

Al igual que en las unidades anteriores, hay una larga historia alrededor del tiempo, una inquietud de grandes civilizaciones por tratar de medir los días. Los caldeos, 3000 años a. C., tenían dividido el día en 12 partes; Hiparco, 500 años a. C., propuso dividirlo en 24 horas, unidad que se conserva desde entonces.

Segundo.

1. Solo en 1700 se define el segundo como unidad de tiempo, con lo cual se establece que 60 segundos conforman un minuto, 60 minutos conforman una hora y 24 horas conforman un día.

2. En el SI (sistema internacional) de unidades, implica que $1s = \frac{1}{86400}$, de un día solar medio (el intervalo de tiempo en que el sol alcanza el punto más alto entre dos días consecutivos).

Debido a la disminución gradual de la rotación de la tierra, se eligió al día medio como un día del año 1900; como no es posible reproducir esta medida experimentalmente en ningún laboratorio, entonces se tiene la siguiente definición:

3. Con base en las vibraciones del átomo de cesio 133, se ha definido que 1 segundo equivalga a 9.162.631,770 vibraciones; de esta forma, se puede reproducir el experimento y obtener la unidad de tiempo en cualquier laboratorio especializado del mundo. Así se ha construido el reloj atómico, cuyo margen de error es de 1 segundo en 30.000 años.

Calendario.

El calendario que en la actualidad se maneja, se diseñó en el año 1582, cuando se cambió del calendario juliano al actual calendario gregoriano; en este cambio, se perdieron 10 días, de modo que se pasó del 4 de octubre del calendario gregoriano al siguiente 15 de octubre del nuevo calendario gregoriano; esto se requirió, porque el calendario juliano, creado desde la época de Julio Cesar (46 a. C.) había acumulado un error de 10 días, con lo cual se alejaba de las fechas tradicionales de la religión católica, al extremo que el plenilunio de Pascua había que buscarlo en febrero o en mayo. El papa Gregorio XIII ordenó una modificación para cumplir con los preceptos católicos; con todos los ajustes realizados, el actual calendario acumula un error de 1 día cada 3300 años (véanse Tablas 1.1 y 1.2).

Tabla 1.1. Nombre moderno, antiguo y significado de los nombres de los meses.

MESES	NOMBRE ANTIGUO	SIGNIFICADO	DURACIÓN EN DÍAS	PERIODO
Enero	ianuarius	En honor al dios Jano, protector de puerta de entrada	31	Cada año
Febrero	februum	Dedicado a Plutón, para aplacar las iras	28-29	Cada cuatro años, año bisiesto
Marzo	Mars	Dios de la guerra	31	Cada año
Abril	aphrós	Significa espuma; de ahí representa al planeta Venus. Mes dedicado a la fertilidad	30	Cada año
Mayo	Maius	Mayores. Dedicado a las personas adultas.	31	Cada año
Junio	Iunius	Segador de heno; mes dedicado a los jóvenes.	30	Cada año
Julio	Iulius Caesar	Representa al segador de trigo, persona adulta.	31	Cada año
Agosto	Augustus	En homenaje al emperador Augusto	31	Cada año
Septiembre	Septem	En el antiguo calendario era el séptimo mes.	30	Cada año
Octubre	Octo	En el antiguo calendario era el octavo mes	31	Cada año
Noviembre	Novem	En el antiguo calendario era el noveno mes	30	Cada año
Diciembre	Decem	En el antiguo calendario era el décimo mes	31	Cada año

Tabla 1.2. Nombre actual, antiguo y significado de los días de la semana.

Numeración	Días de la semana	Nombre antiguo	significado
1	Lunes	Lunae	Dedicado a la luna
2	Martes	Martis dies	Dios de la guerra
3	Miércoles	Mercurii dies	Dedicado a Mercurio
4	Jueves	dies Iovis	Dedicado a Júpiter
5	Viernes	Veneris dies	Dedicado a Venus
6	Sábado	Shabat Sabbatum dies	Día de descanso
7	Domingo	Dominicus	Día del señor.

1.3 Sistema de Conversión de Unidades

Para efectuar conversiones de unidades de la misma naturaleza es conveniente conocer los factores de equivalencia que permiten operar y obtener el equivalente.

Conversión de unidades de longitud

Centímetro.

Esta es una unidad derivada de la unidad del SI, de modo que se ha establecido que el centímetro fuese la centésima parte del metro:

$1m = 100Cm$, o lo que es lo mismo que:

$$1Cm = \frac{1}{100}m = 0.01m$$

Pulgada. Unidad de medida de longitud muy antigua y muy utilizada en la actualidad en el campo de las ingenierías, donde se la conoce como unidad americana, así:

$1Plg \equiv 2,54Cm$, es decir $1Cm \equiv 0,39Plg$

Kilómetro. Es una unidad de medida muy utilizada, en casi todos los países del mundo, para medir longitudes relativamente grandes, como longitud de carreteras, perímetros y áreas de ciudades y países. Tiene un valor de:

$1kilometro \equiv 1000m$, y se lo denotará como Km

Milla. En los Estados Unidos de América, se acostumbra a medir las distancias, en las carreteras, en millas:

$1milla \equiv 1852m$, es decir: $1m \equiv 4,4 \times 10^{-4}milla$

Unidad astronómica. UA es la distancia promedio entre el sol y la tierra, equivalente, aproximadamente, a 149.597'870.700 metros. Pero se puede redondear a 150'000.000 de kilómetros; también se puede escribir como:

$150 \times 10^9 m$, o 150 giga metros o 0,15 tetrámetros.

Año Luz

Corresponde a la distancia que la luz recorre a lo largo de un año; esto significa que, como la velocidad de la luz es de 300000 Km/s y un año, expresado en segundos, es: $365.25 \text{ dias} \times 24 \text{ horas} \times 60 \text{ min} \times 60 \text{ segundos} = 31557600 s$, por tanto, lo que la luz recorre en un año es:

$$\text{Año luz} = (300000 \frac{km}{s})(31557600s)$$

$$\text{Año luz} = 9.4672 \times 10^{12} km$$

Parsec

Unidad de medida de longitud interestelar, de tal modo que, en un triángulo rectángulo formado en el espacio, la unidad astronómica hace de cateto opuesto al ángulo de 1 segundo, entonces, al cateto adyacente le corresponde la distancia de un parsec, palabra que viene del inglés “parallax of one arc second”; por tanto, la tangente, en el triángulo rectángulo, se expresa como:

$$\text{Tan}(0^\circ 0' 1'') = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{150'000.000}{P_c}$$

$$P_c = \frac{150'000.000 km}{0.000004848}$$

$$P_c = 3.093 \times 10^{13} km$$

Esta expresión se puede leer como 30.93 **billones de kilómetros**. Si a esta expresión se la divide entre lo que equivale un año luz, se tiene:

$$P_c = \frac{3.093 \times 10^{13} km}{9.4672 \times 10^{12} km}$$

$$P_c = 3.26 \text{ Años luz}$$

Respecto a unidades astronómicas será:

$$P_c = \frac{3.093 \times 10^{13} \text{ km}}{150'000.000 \text{ km}}$$

$$P_c = 206200 \text{ UA}$$

Como se ve, es una unidad de longitud muy grande para nuestros sistemas terrestres; sin embargo, para medir el cosmos, en muchos casos resulta insuficiente.

Conversión de unidades de masa

Gramo

Esta es una unidad de medida derivada del sistema SI, donde un gramo equivale a una milésima del kilogramo, así:

$$1 \text{ Kgm} = 10^3 \text{ Gm}, \text{ o lo que es lo mismo decir:}$$

$$1 \text{ Gm} = 10^{-3} \text{ Kgm}$$

Libra. En el caso de la masa, aún se encuentra la **libra**, unidad muy utilizada en el comercio (libra de arroz, libra de azúcar, etc.):

$$1 \text{ libra} \equiv 453.6 \text{ Gamos}, \text{ es decir:}$$

$$1 \text{ Gm} = \frac{1 \text{ libra}}{453.6}$$

$$1 \text{ Gm} \equiv 2,2 \times 10^{-3} \text{ libra}$$

Quintal. Unidad aún utilizada en el campo agrario para medir semillas y otros:

$$1 \text{ Quintal} = 46 \text{ kilos}$$

Quintal métrico. Es una unidad más ajustada al SI (sistema internacional):

1 Quintal métrico = 100 kilos

Conversión de unidades de tiempo

Segundo

Para mejorar la medida del minuto, se derivó una segunda medida (de aquí proviene el nombre de segundo), al dividirlo en 60 partes. Así que:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ segundos}$$

El minuto

Desde lo histórico, la palabra “minuto” proviene del latín *pars minuta prima*, que significa “primera pequeña parte”. Así, la hora quedó dividida en 60 partes, o sea que una hora tiene 60 minutos, esto es:

$$1h = 60 \text{ min}$$

Hora

La palabra hora parece significar, en griego, momento, parte de un día; desde los egipcios habían dividido el día en 24 horas, doce de luz solar y doce de noche, sistema que adoptaron los griegos y luego los romanos, y así hasta nuestros días.

1.4 Metrología. La gran incertidumbre que se presentaba a comienzos del siglo XVII, frente a las múltiples unidades de medida que se tenía; en aquel entonces, cada país, cada región tenía sus propias medidas, lo que tornaba muy complicado el comercio entre regiones, más aun cuando se practicaba el trueque, se cruzaban cuentas entre alimento y animales u objetos; en estos casos, no había parámetros de medida que permitieran efectuar una operación comercial de forma justamente comercial y, sobre todo, que se mantuviera en el tiempo.

Entre tantos cambios del orden político y social que realizó, la Revolución Francesa incursionó en lo técnico y lo científico; entre estos aspectos, se inició un fuerte impulso

para tratar de sistematizar las unidades de medida utilizadas bajo un nuevo sistema decimal; las principales unidades de medida a modificar fueron: unidades de longitud, masa y tiempo. Así que, un primer intento en serio se presentó en 1791, con la definición del metro y el kilogramo, para posteriormente crear una Oficina de Pesos y Medidas en el mundo occidental que, en ese entonces, correspondía al noroccidente de Europa; ahora bien, una vez aceptadas las definiciones científicas, otra dificultad mayúscula era la no aceptación del sistema por países vecinos; solo en Francia se tardó un siglo para que todo el país aceptara el nuevo sistema de medidas; por otra parte, el avance de la tecnología en plena Edad Moderna, necesitaba de nuevas unidades de medida, como el calor, la energía, la electricidad, etc., por lo cual, en el siglo XX, hubo la necesidad de crear un instituto que se dedicara a este campo de crear unidades y, sobre todo, la calibración de los equipos ya existentes; por ejemplo: en medicina, se ha generado una gran cantidad de técnicas que necesitan unidades de medida y, en general, en todo campo técnico y científico. Con el avance de la microelectrónica, los instrumentos de medida han llegado a unidades del orden del nano, lo que implica calibración de equipos de altísima precisión y mantenimiento; así que, para responder a esta necesidad de la ciencia y la tecnología, surgió la metrología, con sus propios laboratorios y museos; en la actualidad, es de obligado cumplimiento que cada país tuviera un laboratorio o, al menos, una oficina.

En Colombia, solo hasta 1963 se creó el Instituto Colombiano de Normas y Técnicas (ICONTEC), organizado por un grupo de empresarios y directivos gremiales que vieron la necesidad de crear una organización que trabajara en normas y técnicas para mejorar la productividad y la competitividad internacional para poder importar y exportar, tanto materia prima como productos. El primer director ejecutivo fue el ingeniero civil Javier Henao Londoño; entre muchas gestiones realizadas de gran calibre, está la afiliación

del Instituto a la Comisión Panamericana de Normas Técnicas y, luego, a la Organización Internacional de Normas (ISO).

En los años ochenta, la industrialización del Japón generó una nueva forma de administración, la llamada Teoría Z que, a su vez, requería de estándares de calidad en todo el



Fig. 1.5. Laboratorio de metrología de la Universidad EAFIT, Medellín. Fuente: Universidad EAFIT, de Medellín.

proceso productivo y post productivo, con lo cual las normas ISO se ampliaron para originar las normas ISO 9000, para la gestión de calidad de las empresas; esto incluye medidas estandarizadas de todo tipo, para poder medir tiempos y movimientos de puestos de trabajo, de máquinas robotizadas y empleados de las empresas japonesas y todas sus filiales, en todo el mundo; por tanto, los laboratorios de metrología garantizan la estandarización y calibración de equipos y demás aparatos necesarios en los procesos.

En la Fig. 1.5, se puede ver un laboratorio de metrología diseñado para prestar servicios de calibración al país y sus vecindarios. La universidad EAFIT lidera esta línea; en su campo de acción está la calibración de equipos biomédicos, ópticos y electrónicos, equipos de ingeniería civil y metalurgia y, en general, dar el soporte técnico para la calibración de básculas comerciales y equipos de medida de longitudes.

El 20 de mayo de 2019 fue un día especial en el mundo científico y, sobre todo, en metrología, porque entró en vigencia una reforma histórica del Sistema Internacional de Unidades (SI). A partir de esta fecha, todas las unidades del SI se definen a partir de constantes de la naturaleza, por lo cual ya no se

depende de ninguna unidad vinculada con algún prototipo o artefacto material, como el metro patrón o kilogramo.¹

1.5 Orden de Magnitud

Es muy frecuente oír que se dice que hay trillones de estrellas en el universo o que una montaña pesa billones de toneladas; en realidad, esto quiere decir que son números muy grandes, que indican muchísimo, sin que se tuviera un sentido preciso de lo que significa; estas afirmaciones sobrepasan nuestra imaginación; entonces, es posible acercarse, así fuese de forma aproximada, al valor real. Los científicos lo han logrado al pensar y hablar en órdenes de magnitud, lo que significa que, de esta forma, es posible acercarse al valor correcto. Resulta curioso que los físicos, que pertenecen a una ciencia exacta, cuando se trata de responder rápido sobre cifras grandes, lo hacen mediante órdenes de magnitud, justamente algo inexacto, pero aceptable; por ejemplo, cuando se trata de un cálculo como:

$$\frac{295,7 \times 58,9}{3,75} \approx \frac{3 \times 10^2 \times 6 \times 10^1}{4 \times 10^0} \approx 5 \times 10^3$$

Para ciertos propósitos, esto sería lo suficientemente cercano a la respuesta exacta, que es *4500*.

Por otra parte, es conveniente conocer el origen y significado de los términos que implican cantidades como trillón, megabits, término muy utilizado en la actualidad por la técnica digital. Cuando se conoce el significado cuantitativo del prefijo, ayuda a entender el valor de la cantidad en cuestión, ya fuese en longitud, masa o tiempo. (Véase la Tabla 1.3).

¹ En particular, el 20 de mayo se despidió el Prototipo Internacional del Kilogramo, conocido como “el gran K”, un cilindro de platino-iridio conservado en el *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM), en Francia, cuya masa ha definido el kilogramo desde 1889. Este prototipo es el último artefacto material que ha servido para definir una unidad del SI [Davis, 2003]. <https://www.e-medida.es/numero-15/historia-de-las-unidades-desde-el-sistema-metrico-decimal-hasta-la-reciente-revision-del-sistema>

Tabla 1.3. Prefijos muy utilizados cuando se nombran cantidades.

PREFIJO	ABREVIATURA	FACTOR	EJEMPLO	
Tera	T	10^{12}	Tetrámetro	10^{12} metros
Giga	G	10^9	Giga litro	109 litros
Mega	M	10^6	Mega Hertz	10^6 hercios
Kilo	K	10^3	Kilómetro	10^3 metros
deci	d	10^{-1}	decigramo	10^{-1} gramo
centi	c	10^{-2}	centímetro	10^{-2} metro
mili	m	10^{-3}	miligramo	10^{-3} gramo
micro	μ	10^{-6}	microamperio	10^{-6} amperios
nano	n	10^{-9}	nanosegundo	10^{-9} segundo
pico	p	10^{-12}	picofaradio	10^{-12} faradios.

1.6 Análisis dimensional. En Física clásica, toda función derivada se reduce a las dimensiones básicas: longitud, masa y tiempo, cuyas unidades están en el SI. Cuando se refiere a las dimensiones, cierta cantidad x se suele poner entre paréntesis rectangulares: $[x]$. Por ejemplo, el tamaño de cierto elemento se define por la longitud, de modo que su dimensión es: $[L] = L$

En el caso del área que resulta del producto de dos longitudes: $[A] = L^2$

Y, por último, el volumen es el producto de tres longitudes; entonces: $[V] = L^3$

Como se sabe, la velocidad es: $[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$, como también la fuerza $F = ma$; entonces, dimensionalmente sería: $[F] = MLT^{-2}$

En Física, una ecuación como $A = B + C$, solo tiene sentido si las dimensiones de los dos extremos son idénticas; así que no tiene sentido sumar metros con segundos; por tanto, la ecuación debe ser compatible dimensionalmente hablando, esto es: si A tiene unidades de longitud, la cantidad $(B+C)$ también debe tener dicha dimensión, como se puede ver en el siguiente caso:

En la ecuación del movimiento acelerado $x = \frac{1}{2}at^2$, donde

x es la distancia recorrida por un cuerpo en t segundos: por tanto, la distancia corresponde a la dimensión longitud y la unidad de medida es el metro. Así que todo lo que está a la derecha de la expresión corresponde a la dimensión longitud; como el tiempo se ha elevado al cuadrado, entonces la constante a debe tener dimensiones de tal forma que, al operar con las demás cantidades, debe quedar en términos de longitud; así. $[x] = \left[\frac{1}{2}at^2 \right]$, en términos de dimensiones; para

que se dé la igualdad, la ecuación debe quedar: $L = \frac{L}{T^2}T^2$; en

estas condiciones, el tiempo se cancela y se obtiene la igualdad únicamente en función de la longitud; por tanto, como se puede ver, la constante “ a ” debe tener dimensiones de longitud y tiempo al cuadrado, así: $\frac{L}{T^2}$; cuando se trata de ecuaciones fáciles, también resulta factible descubrir la dimensiones de las constantes que acompañan a las demás cantidades.

Otro ejemplo puede ser encontrar la ecuación para calcular el periodo del péndulo. Para iniciar con la respuesta a la pregunta, se puede plantear: ¿cómo depende el periodo del péndulo, con la masa, longitud y la aceleración gravitacional?; esto, en términos matemáticos y de forma general, sería:

$$P = k m^x l^y g^z$$

donde k es una constante de proporcionalidad; por tanto, habría que determinar el valor de x , y , z . Para lograrlo, pongamos las variables en términos de las dimensiones; además, la aceleración gravitacional tiene dimensiones de aceleración; es decir, $\frac{L}{T^2}$; entonces, se tiene:

$$T = M^x L^y \left(\frac{L}{T^2} \right)^z$$

o también:

$$T = M^x L^y L^z T^{-2z}$$

$$\text{o } T = M^x L^{y+z} T^{-2z},$$

asunto en que, para encontrar los valores de las variables x , y , z , se igualan los exponentes de cada lado de la ecuación:

$$L: 0 = y + z$$

$$M: 0 = x$$

$$T: 1 = -2z$$

Dado lo anterior, y al despejar las variables, se tiene:
 $x = 0$. $y = \frac{1}{2}$ $z = -\frac{1}{2}$; por tanto, al remplazar en la ecuación general, se tiene:

$$P = k l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} \text{ es decir: } P = k \left[\frac{L}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ o.}$$

$$P = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Esta ecuación corresponde al periodo del péndulo; en su momento, se llegará a deducir que: $k = 2\pi$ y, como se ve, el periodo es independiente de la masa del péndulo.

En los resultados y procesos de ejercicios es conveniente verificar la compatibilidad dimensional; por supuesto que esto no garantiza que la ecuación o el procedimiento fuese correcto, pero elimina la incompatibilidad dimensional y acerca mucho a la funcionalidad de las relaciones matemáticas en Física.

1.7 Sistema de Referencia

En Matemáticas tanto como en Física se requiere conocer los parámetros necesarios para poder realizar un análisis, que se traduce en conocer las condiciones con las que se va a trabajar; así que un sistema de referencia solo es unos marcos de referencia en los que suceden los hechos de la vida diaria; para describirlos, es necesario clasificarlos.



Fig. 1.6. Eje x como sistema unidimensional.

Sistema unidimensional. Se trata de un solo eje, que puede tener cualquier orientación; por lo general, se acepta el eje horizontal formado por los números reales o, en su defecto, cualquier eje paralelo al eje x (Fig. 1.6.).

Sistema bidimensional. Matemáticamente, es el sistema más utilizado o, al menos, el más cotidiano. Propuesto por el francés René Descartes, cuyo nombre en latín es Renatus Cartesius (1596–1650), cuyo apellido se toma para la denominación sistema cartesiano. Formado por dos sistemas unidimensionales

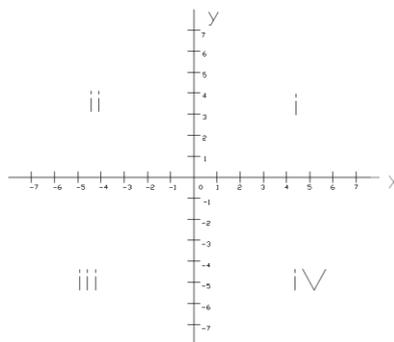


Fig. 1.7. Sistema bidimensional.

horizontal y vertical, o sea sistemas graficados de forma ortogonal que permiten describir una superficie donde cualquier punto localizado en dicha superficie tiene proyecciones al eje vertical y al eje horizontal, proyecciones que se denominan coordenadas cartesianas (x, y) , ejes que dividen la superficie en cuatro partes, que se denominan cuadrantes (I, II, III, IV), cuyo conjunto de coordenadas será:

cuadrante I (x, y) ; cuadrante II $(-x, y)$; cuadrante III $(-x, -y)$ y, cuadrante IV $(x, -y)$ (véase Fig. 1.7).

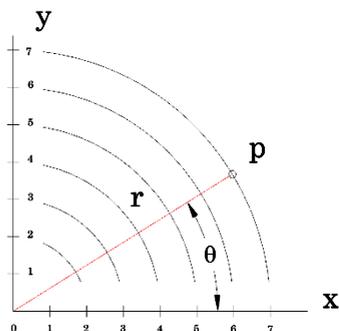


Fig. 1.8. Sistema polar, con coordenadas radial y angular.

Sistema Polar. Al igual que en el sistema bidimensional, en este sistema es posible localizar un punto en la superficie de forma exacta bajo las coordenadas angular y radial; así que el punto P quedará totalmente determinado por las coordenadas polares (r, θ) . En la vida práctica, las ciudades árabes, y aquellas que descendían de dicha cultura,

construían calles de forma circular y carreras que van desde el centro hacia afuera; en el centro se encuentra la plaza principal, con el palacio más importante.

Ahora bien, a partir de la Fig. 1.8, se puede observar que hay unas relaciones entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas, así:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\text{Como } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ entonces } \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Sistema tridimensional. En el lenguaje cotidiano, se le llama sistema 3D por tener las tres dimensiones o los tres ejes, x, y, z , que definen tres planos: (x, y) ; (y, z) ; (z, x) . En nuestro mundo cotidiano, por lo general, nos desplazamos en el plano horizontal; sin embargo, cuando se vive en edificios altos, se tiene la experiencia de estar moviéndose en tres dimensiones; no obstante, existen seres, como la mayoría de los insectos y aves, que gobiernan las tres dimensiones. Así

como el sistema bidimensional define la superficie, el sistema tridimensional define el volumen largo, ancho y alto; toda edificación se diseña en tres dimensiones, por lo que cualquier punto del espacio se definirá por tres dimensiones: (x, y, z) ; en la Fig. 1.9, se pueden observar los tres ejes con coordenadas positivas, por lo que se entiende que las coordenadas que están por detrás del punto de intersección serán negativas; todo depende del punto de referencia que se tomara para el origen de los ejes; en la Fig. 1.10, se puede ver una esfera dividida por el sistema cartesiano tridimensional, con lo que quedan definidas ocho partes, denominadas octantes. El octante en el que se desarrolla la cotidianidad corresponde al primero y lo confinan los tres ejes positivos x , y , z , como se puede ver en la Fig. 1.10, así que cada octante tiene estas coordenadas: Primer octante: (x, y, z) ; Segundo $(-x, y, z)$ Tercero: $(-x, -y, z)$; Cuarto: $(x, -y, z)$; Quinto, en la parte inferior: $(x, y, -z)$, Sexto: $(-x, y, -z)$; Séptimo, $(-x, -y, -z)$, octavo: $(x, -y, -z)$; así que cualquier punto que se encuentre en el espacio puede localizarse mediante una de estas triadas de coordenadas.

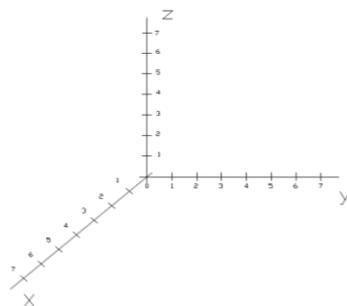


Fig. 1.9. Sistema tridimensional, que consta de tres ejes: x , y , z .

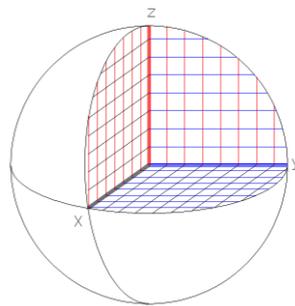


Fig. 1.10. Esfera dividida en ocho partes u octantes.

Sistema esférico. Tanto en Matemáticas como en Física, en ocasiones resulta más cómodo presentar algún tipo de teorema o relación matemática en coordenadas esféricas; por esta razón, es conveniente conocer su naturaleza para que, cuando se dé la aplicación, resulte más fácil su comprensión.

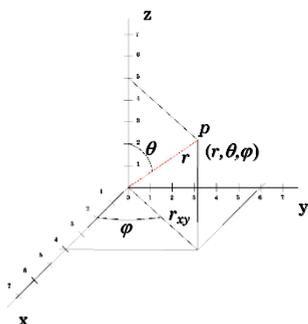


Fig. 1.11. Sistema esférico, con las coordenadas (r, θ, φ) .

En la Fig. 1.11, se puede ver el punto \mathbf{p} , que se define por las coordenadas (r, θ, φ) , donde r es el radio vector cuya magnitud es la distancia del centro al punto \mathbf{p} ; en el caso de mantener constante la magnitud y variar los ángulos, el resultado será que el punto \mathbf{p} dibujará una esfera, razón por la cual se le llama sistema esférico; la proyección del radio vector r en el plano (x, y) se

define como $r_{xy} = r \text{ Sen } \theta$. En Astronomía, cuando el eje “ y ” se orienta hacia el norte geográfico, al complementario de φ se lo denomina acimut, y al ángulo θ se le llama altura; en este caso, el eje “ z ” apuntaría hacia el cénit, y el eje “ x ” apuntaría hacia el oriente. Para realizar las conversiones del sistema esférico al sistema cartesiano, se tienen estas relaciones:

$$\text{Como: } \cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c.a.}{h} = \frac{z}{r}, \text{ de donde}$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\cos \varphi = \frac{c.a.}{h} = \frac{x}{r_{xy}}, \text{ de donde } x = r_{xy} \cos \varphi; \text{ ahora bien, la}$$

pregunta es: ¿a qué es igual r_{xy} ? Entonces: $\text{sen } \theta = \frac{c.o.}{h} = \frac{r_{xy}}{r}$ (c.o. cateto opuesto), de donde $r_{xy} = r \text{ sen } \theta$; por tanto: $x = r \text{ sen } \theta \cos \varphi$, y, para la coordenada en “ y ”, será: $y = r \text{ Sen } \theta \text{ Sen } \varphi$; de esta forma, el conjunto de expresiones de transformaciones es:

$$z = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

1.8 Magnitud vectorial

Para designar cantidades en Física es necesario saber el tipo de naturaleza de la cantidad, pues existen algunas que solo requieren de la cantidad numérica; sin embargo, otras son mucho más exigentes y requieren de la cantidad numérica, de la orientación y del sentido; a estas se las conoce como magnitud vectorial, como es el caso de la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc. No obstante, a aquellas que solo requieren la cantidad numérica, como la masa, el tiempo, la energía, etc., se las denomina magnitud escalar.

Como la magnitud vectorial exige tener tres características fundamentales, se necesita definirla en uno de los sistemas de referencia de los que ya se han visto, en el que se lo pueda representar; para facilidad en el inicio de este tema, se tendrá en cuenta el sistema bidimensional o sistema cartesiano.

Características del vector

Para representar un vector, es necesario hacerlo mediante letras mayúsculas A , B , C , como se puede ver en la Fig. 1.12. Por otra parte, los vectores tienen unas características únicas que los tornan inconfundibles y, por tanto, es necesario conocerlas.

Magnitud. A la magnitud de un vector también se la denomina tamaño, longitud y se la designa con letras minúsculas a , b , c .

Dirección. Se define por la pendiente que tuviera la recta donde se ha dibujado el vector; se la define con la

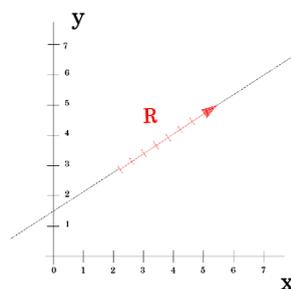


Fig. 1.12. Representación geométrica de un vector.

utilización de letras griegas, que indican el ángulo en el sistema de referencia en el que se encuentra, tales como: $\alpha, \beta, \chi, \theta$.

Sentido. En los vectores es muy importante definir el sentido; es decir, no es suficiente tener el tamaño y la dirección; se requiere tener el sentido, que define hacia dónde va “la saeta” o flecha en la recta o donde se ha dibujado.

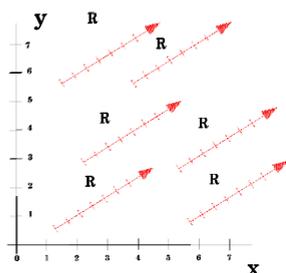


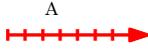
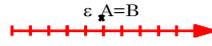
Fig. 1.13. Representación de un vector libre.

Concepto de igualdad. Dos vectores son iguales “si y solo si” tienen igual magnitud, igual dirección e igual sentido; en el caso en que no reúnan una de estas características, los vectores ya no son iguales.

Concepto de vector libre. Un vector se puede mover por el plano (x, y) siempre y cuando cumpla con el concepto de igualdad; es decir, cumpla con la igualdad de la magnitud, dirección y sentido, con lo cual el vector solo puede desplazarse, pero nunca podrá rotar. En la Fig. 1.13, se puede ver al vector r en diferentes posiciones del plano (x, y) , sin que hubiera cambiado las características fundamentales; por tanto, en este caso, el vector cumple con el concepto de vector libre.

1.9 Operaciones de vectores con escalares

Se considerarán como escalares aquellas cantidades que pertenecen a los reales; es decir: $\varepsilon \in R$, donde ε es un escalar. Por tanto, cuando se efectúan operaciones de este tipo, como resultado siempre se obtiene otro vector que, al depender de las propiedades del escalar, serán los resultados. Así que se tienen estos casos:

- Si $\varepsilon > 1$ y A es el vector,  entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$, se  obtendrá un

vector de mayor tamaño que A , es decir, que escalares de este tipo amplifican al vector. Por ejemplo, si $\varepsilon = 1.37$ y el vector A tiene como magnitud 8 unidades, entonces $\varepsilon \times A = B$, cuya magnitud de B es $b = \varepsilon \times a$;

$$b = 1.37 \times 8 = 10.96$$

Como se ve, el vector resultante es de mayor tamaño que A .

2. Si $\varepsilon = 1$ y el vector A ,  entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$ se obtendrá un vector con iguales características que A ; es decir: igual tamaño, dirección y sentido. En este caso, el escalar es neutro; esto es: $\varepsilon \times A$, como  se ve el vector, no ha cambiado, sigue  igual.

3. Si $0 < \varepsilon < 1$ y el vector A ,  entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$, se obtiene un vector de menor tamaño que A ; es decir, escalares de este tipo reducen el tamaño del vector y conservan la dirección y el sentido. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0,5$ y el vector A tiene como magnitud 8 unidades, entonces $\varepsilon \times A = C$, cuya magnitud de C es $c = \varepsilon \times a$. Esto es: $c = 0.5 \times 8 = 4$ es lo mismo que si se dividiera por 2; el vector resultante es: . Como se ve, el vector C es de menor tamaño, pero conserva la dirección y el sentido de A .

4. Si $\varepsilon = 0$ y el vector A ,  entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$ se obtiene la anulación del vector.



5. Si $0 > \varepsilon > -1$ y el vector A , entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$ se obtiene un vector de menor tamaño que A , con la misma dirección y sentido contrario; es decir, escalares de este tipo invierten el sentido y reducen la magnitud del vector. Por ejemplo, si $\varepsilon = -0.5$ y el vector A tiene como magnitud 8 unidades, entonces $\varepsilon \times A = D$, cuya magnitud de D es: $d = -0.5 \times 8 = -4$; así que el vector resultante es.

Como se ve, el vector resultante es de menor tamaño e invertido. $\varepsilon \vec{A} = \vec{D}$ 

6. Si $\varepsilon = -1$ y el vector A , entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$ se obtiene un vector de igual tamaño, igual dirección, \vec{A}  pero de sentido contrario; es decir, que el escalar invierte al vector. Esto es: $\varepsilon \vec{A} = \vec{E}$ 

7. Por último, si $\varepsilon < -1$ y el vector A , entonces, al efectuar la operación $\varepsilon \times A$ se obtiene un vector de mayor tamaño e igual dirección, pero de sentido contrario; es decir, este tipo de escalares invierten al vector y, además, lo amplifican. Por ejemplo, si $\varepsilon = -1,37$ y el vector A , entonces, $\varepsilon \times A = F$, cuya magnitud de F es: $f = 1,37 \times 8 = -11$, valor aproximado.

1.10 Operaciones vectoriales de forma geométrica. entre los vectores se pueden realizar diversos tipos de operaciones, como sumas, restas y multiplicaciones o divisiones con escalares (números reales). Y aún entre vectores. Para afrontar esta situación, es conveniente empezar por operaciones sencillas de sumas y restas vectoriales, así:

Operaciones vectoriales en un sistema unidimensional.

Si se asume que el sistema unidimensional es el eje x , se tiene:

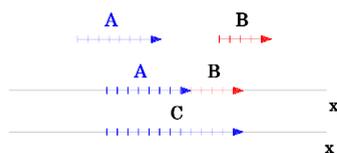


Fig. 1.14. Adición de vectores.

1. Adición vectorial. Sean los vectores A y B de 8 y 5 unidades, con igual dirección e igual sentido (véase Fig. 1.14).

Para efectuar la adición vectorial, se debe tener como norma que “donde termina un vector comienza el siguiente”, con aplicación, por supuesto, del concepto de vector libre. Por tanto, el vector resultante será aquel que une el origen del primero con el extremo final del último; es decir, el vector

resultante es de 13 unidades. Únicamente en sistemas unidimensionales *coincide* que la suma de vectores es igual a sumar magnitudes; es decir: $a + b = c$, así que: $c = 8 + 5 = 13$ unidades, que dependen de que se opere “siempre de la misma dimensión”.

2. Sustracción vectorial.

Sean los vectores A y B , donde el vector B tiene sentido contrario al vector A ; como solo tiene la opción de ser hacia la derecha o a la izquierda, el vector B , en este caso, se dirige hacia la izquierda; por tanto, se lo considera

negativo; en este caso, es una sustracción de vectores, donde la norma establecida será la misma; es decir: “donde termina un vector comienza el siguiente”; aquí el sentido del vector A es hacia la derecha y el vector B es de sentido contrario, así que, como resultante, será el vector que une el origen del vector A y el extremo final del vector B vectorialmente; esto es: $A + (-B) = C$, lo que numéricamente será: $c = a - b$; es decir: $c = 5 - 8 = -3$; el signo menos indica que el vector tiene el mismo sentido del vector B , o sea que se dirige hacia la izquierda (véase Fig. 1.15)

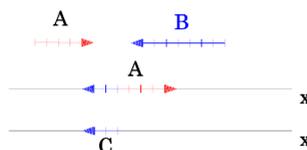


Fig. 1.15. Sustracción de vectores.

Operaciones vectoriales en un sistema bidimensional

Un sistema bidimensional significa tener un sistema cartesiano (x, y) o cualquier otro sistema que tuviera efectivamente dos dimensiones. Al referirse al sistema cartesiano, se habla del plano; por tanto, las operaciones que se realizan serán tanto geométricas como analíticas. Así que las operaciones que se pueden efectuar son:

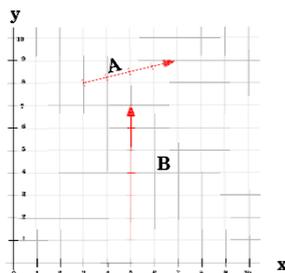


Fig. 1.16. Vectores en el plano x, y .

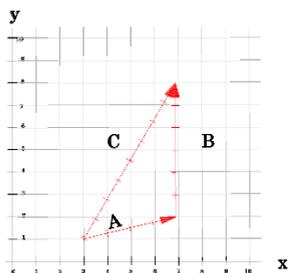


Fig. 1.17. Suma vectorial de forma gráfica.

1. Suma de vectores. De acuerdo a la Fig. 1.16, los vectores A y B representados en el plano (x, y) , son de magnitudes 4 y 6 unidades. Para realizar la suma, se seguirá la regla establecida en el sistema unidimensional: “Donde termina un vector comienza el siguiente”, con respecto, por supuesto, del concepto de vector libre.

Así, el vector C , o vector resultante, procede de unir el origen del primero con el extremo final del último. Ahora bien: la suma de vectores: $A + B = C$ es diferente a sumar magnitudes; es decir, $a + b \neq c$, de modo que, para encontrar la magnitud por ahora, se debe hacer muy bien la gráfica, con respecto del valor de las unidades en cualquier dirección (véase Fig. 1.17).

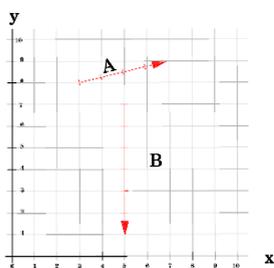


Fig. 1.18. Vectores en el plano x, y .

Resta de vectores. Sean los vectores A y B , tal como se ven en la Fig. 1.18, donde B es negativo respecto a la Fig. 1.16; es decir, tiene sentido contrario. Al efectuar la suma vectorial, con aplicación de la norma “donde termina un vector comienza el siguiente”, como se ve en la Fig. 1.19; así que se tiene una adición de vectores; ahora bien, del primer caso se sabe que el vector B se dirige hacia arriba y, por tanto, es positivo, pero, si el sentido es contrario, se asume que sería negativo, esto es, una resta vectorial. Así:

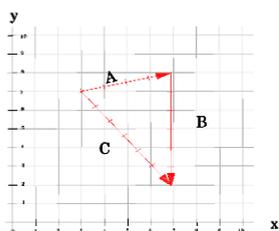


Fig. 1.19. Suma de vectores en donde el segundo es negativo.

$A + (-B) = C$, en que, al efectuar la operación de signos, se tiene: $A - B = C$

Al superponer las dos figuras de operaciones, se tiene un rombo, donde la diagonal mayor corresponde a la suma y la diagonal menor corresponde a la resta.

Sumar más de dos vectores.

Sean los vectores A , B , C , D y E ; la magnitud, dirección y sentido se puede apreciar en la Fig. 1.20.

Bajo el concepto de vector libre y de acuerdo a la norma “donde termina un vector comienza el siguiente”, de modo que, hasta agotar todos los vectores propuestos, se tendrá una suma vectorial, tal como se ve en la Fig.

1.21 donde, al primer vector A , lo continúa el vector B y luego C , hasta agotar todos los vectores. El vector resultante será aquel que une el origen del primero con el extremo final del último vector; en la Fig. 1.21, ese vector es de color azul y, como resulta claro que sumar vectores implica tener en cuenta las tres características vectoriales y, por tanto, es muy diferente a sumar escalares; por esta razón, el vector resultante debe tener magnitud, dirección y sentido; para lograrlo, se debe elaborar un buen dibujo técnico, en el que se respetan las unidades, el ángulo respecto a x , y el cuadrante donde indique el sentido del vector; en este caso, se tienen aproximadamente cuatro unidades de magnitud, con dirección negativa de -36° , y el sentido estaría en el cuarto cuadrante.

Ejemplo. Una persona camina sobre una amplia pista, de tal forma que parte desde el centro hacia el norte, a lo largo de 30 m; luego 15m hacia el este, 50m hacia el sur, 40m al oeste y, por último, 70m noreste. ¿Cuál es la nueva posición de la persona respecto al

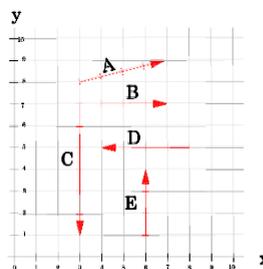


Fig. 1.20. Esquema de vectores en el plano.

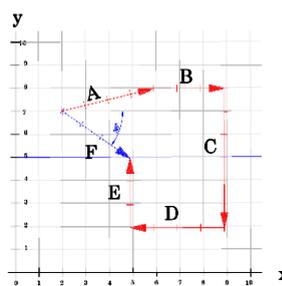


Fig. 1.21. Suma vectorial de forma geométrica.

punto de partida? (cada lado de un cuadrado de la Fig. 1.22 corresponde a 10 unidades).

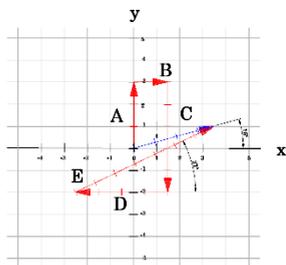


Fig. 1.22. Suma vectorial de manera geométrica.

Solución.

Como se ve en la Fig. 1.22, los vectores se han dibujado de acuerdo a las instrucciones del enunciado del Ejemplo. Existe alguna imprecisión cuando se dan ángulos diferentes a los ortogonales, es decir de 90 , 180 o 270° y, para tener la gráfica con alta precisión, es necesario conocer dicha pendiente; así, por ejemplo, en la figura el vector E se ha trazado con un ángulo de elevación de 27 grados, y el vector resultante de color azul une el origen del primer vector con el extremo del último, que tiene aproximadamente 35 unidades, una dirección de 16 grados y el sentido está en el primer cuadrante. Estos datos serían las coordenadas de la persona respecto al origen desde donde inició la marcha.

Componentes de un vector.

Debido a que las operaciones vectoriales de manera geométrica, como se han realizado hasta ahora, implican saber dibujo técnico, y pese a que los resultados no son lo suficientemente exactos, ayudan lo necesario para establecer aproximaciones que permiten adelantar resultados o que, al menos, indican como va a ser el final. Así que hay un método matemático que permite obtener resultados de forma exacta, que no exigen tanto tecnicismo a la hora de dibujar.

En el plano, tanto como en el espacio, todo vector tiene proyecciones en los ejes que permiten desarrollar reglas algebraicas.

El vector A , trazado en el plano, tiene proyecciones en el eje x , a la que se denominará A_x , y, en el eje y , la proyección será A_y ; a estas proyecciones se las denomina componentes de

un vector; en este caso, serán las componentes del vector A . Como los ejes se han dispuesto de forma ortogonal, entonces los vectores proyectados también son perpendiculares uno a otro, de tal modo que, al seguir el concepto de vector libre, el vector A se puede llevar al origen de los ejes, de tal modo que las componentes A_x y A_y también llegan al origen; así resulta mucho más claro ver que el vector A solo es la suma de las componentes. Como se conoce la orientación del vector A , es decir el ángulo con el cual se ha trazado el vector, que, en este caso, es θ (véanse Figs. 1.23 y 1.24), entonces el vector A , se puede expresar en términos de sus componentes como:

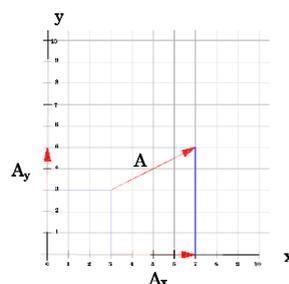


Fig. 1.23. Proyecciones del vector A a los ejes x , y .

$$A_x + A_y = A \quad (1.1)$$

Debido a que geoméricamente las componentes y el vector forman un triángulo rectángulo, la magnitud del vector A puede expresarse en términos de las magnitudes de las componentes, de acuerdo al teorema de Pitágoras. Esto es:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

es decir:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1.2)$$

Ahora bien, para la dirección del vector A , se puede expresar en términos de las componentes; esto es:

$$\text{Tan}\theta = \frac{co}{ca} = \frac{a_y}{a_x};$$

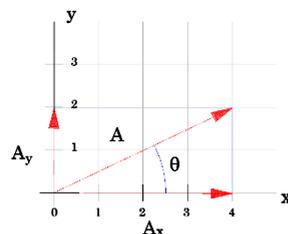


Fig. 1.24. Proyecciones de un vector en los orígenes de los ejes x , y .

de donde

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{a_y}{a_x} \quad (1.3)$$

Donde *co* y *ca* significan cateto opuesto y cateto adyacente y, por último, para el sentido del vector, se tendrá en cuenta el cuadrante hacia donde apunta el vector.

Suma de vectores mediante componentes. Sean los vectores:

A: magnitud $a = 5.1 \text{ und}$, dirección $\alpha = 12^\circ$, sentido primer cuadrante.

B: magnitud $b = 2,8 \text{ und}$, dirección $\theta = 45^\circ$ y sentido primer cuadrante.

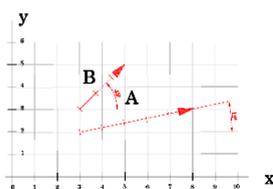


Fig. 1.25. Vectores en el plano A y B.

Tal como se muestra en la Fig. 1.25, los vectores cumplen con sus características vectoriales de magnitud, dirección y sentido. Ahora bien, para sumar vectores se debe aplicar la norma “*donde termina un vector comienza otro*” y, con el concepto de vector libre, se puede realizar la suma vectorial tal

como se puede apreciar en la Fig. 1.26. Al vector A, de magnitud 5.1 unidades y dirección de 12° aproximadamente, lo continúa el vector B, de magnitud 2.8 unidades y dirección 45° .

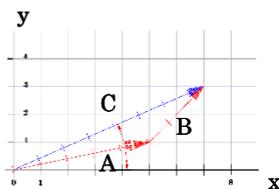


Fig. 1.26. Suma vectorial de manera gráfica.

El vector resultante de esta suma es el vector C, cuya magnitud se puede apreciar de 7 unidades y fracción, la dirección es de 23° aproximadamente; como en este método es difícil dar con la respuesta exacta, entonces se puede utilizar como alternativa el método analítico o de componentes.

De modo que: como todo vector tiene componentes, entonces las componentes de los vectores A y B son: A_x , A_y y B_x , B_y , respectivamente.

Por otra parte, las componentes A_x y B_x están en un sistema unidimensional, por lo que se suman con la misma regla hasta ahora establecida; lo mismo ocurre con las componentes en el eje y , de tal forma, se tiene un vector resultante R_x en el eje x y R_y en el eje y ; es decir:

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por otra parte, el vector componente $A_x = A \cos 12^\circ$, donde la magnitud es:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos 12 \\ a_x &= 5,1 \times 0,982 = 5 \end{aligned}$$

De igual forma, para la componente en x del vector B :

$$\begin{aligned} b_x &= b \cos 45 \\ b_x &= 2,83 \times 0,7 = 2 \end{aligned}$$

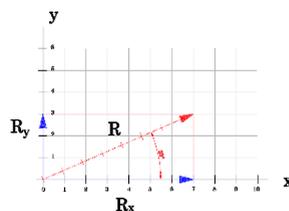


Fig. 1.27. Componentes del vector R .

Ahora bien, como $R_x = A_x + B_x$, la magnitud es:

$r_x = a_x + b_x$; es decir:

$$\begin{aligned} r_x &= 5 + 2 \\ r_x &= 7 \end{aligned}$$

De igual forma para R_y , como la componente de A en el eje y es:

$$A_y = A \sin 12,$$

cuya magnitud será:

$$a_y = a \text{ Sen } 12 = 5,11 \times 0.19 = 1.$$

La componente del vector B en y es:
 $b_y = b \text{ Sen } 45 = 2.83 \times 0.7071 = 2.$

Como $R_y = A_y + B_y$, entonces la magnitud será:

$$r_y = a_y + b_y : \text{ es decir:}$$

$$r_y = 1 + 2$$

$$r_y = 3$$

Con estos datos ya se puede calcular la magnitud del vector $R = R_x + R_y$ con utilización de la ecuación (1.2); esto es:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} :$$

$$r = \sqrt{7^2 + 3^2}$$

$$r = 7.62$$

Para la dirección, mediante la ecuación (1.3), se tiene:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{r_y}{r_x},$$

lo que en números es:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{3}{7}.$$

De modo que:

$$\theta = 23^\circ 11'.$$

Para referirse al sentido, se debe mirar la Fig. 1.28 de la suma geométrica; así, el vector resultante está en el primer cuadrante.

Ejercicio 2.

Sean los vectores:

A: magnitud, $a = 5 \text{ und}$, dirección, $\alpha = 0^\circ$, sentido, eje x positivo.

B: magnitud, $b = 3,5 \text{ und}$, dirección $\beta = 45^\circ$, primer cuadrante.

C: magnitud 3 und , dirección $\varphi = 270^\circ$, sentido, eje y negativo.

D: magnitud, 3 und , dirección $\delta = -135^\circ$, sentido, tercer cuadrante. (tener -135 es lo mismo que 225).

Tal como se presentan en la Fig. 1.28.

Solución.

En adelante se presentará una gráfica de suma geométrica de vectores para tener una idea de cómo sería el resultado.

Tal como se ve en la Fig. 1.29, al vector A le continua el vector B y luego el C y D ; el resultado de la suma vectorial es el vector F ; en la gráfica se puede contar 6 unidades (valor aproximado).

La dirección, de acuerdo al graficador utilizado para estas gráficas, es AutoCAD 2019, entrega un valor de 26 grados, pero dado hacia donde se ha dirigido el vector, la dirección es negativa y también confirma el sentido del vector que, en este caso, es el cuarto cuadrante.

Para realizar una suma bajo el método analítico, se debe llevar los vectores al origen del sistema cartesiano y cumplir con el concepto de vector libre; esto es tal como se muestra en

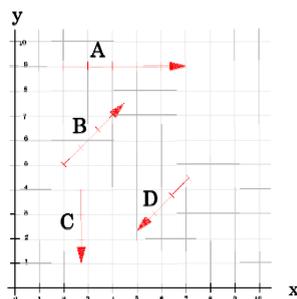


Fig. 1.28. Vectores en el plano x, y .

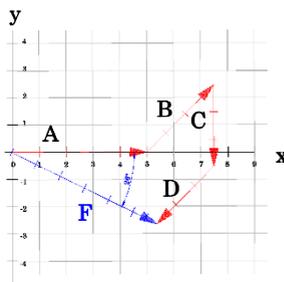


Fig. 1.29. Suma de los vectores de forma gráfica.

la Fig. 1.29; los trazos de color rojo corresponden a los vectores originales y los de color azul corresponden a las proyecciones o componentes vectoriales.

Ahora bien, los vectores que están sobre los ejes, como el vector A y C , pues no tienen componentes y serán ellos mismos los que hacen de componente respecto al eje en donde está dibujado; en cambio, los vectores B y D tienen componentes tanto en el eje x como en el eje y ; así que las componentes de estos vectores serán B_x y B_y , lo mismo D_x y D_y .

Por tanto, el vector resultante en el eje x es:

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x \text{ ,}$$

donde A_x es el mismo vector A , y el vector C_x vale 0 por estar sobre el eje y ; es decir, el ángulo que le corresponde es 270° , así que $\text{Cos } 270 = 0$.

El vector resultante en el eje y es:

$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y \text{ ,}$$

donde C_y es el mismo vector y el vector A_y vale cero por estar sobre el eje x .

Así que la magnitud del vector R_x es:

$r_x = a_x + b_x + c_x + d_x$; sin embargo, al efectuar toda la operación, se tiene:

$$r_x = a \text{Cos} 0^\circ + b \text{Cos} 45^\circ + c \text{Cos} 270^\circ + d \text{Cos} 225^\circ$$

$$r_x = 5 \times 1 + 3.5 \times 0.71 + 3 \times 0 + 3 \times (-0.71)$$

$$r_x = 5.36$$

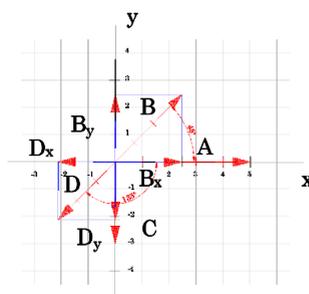


Fig. 1.30. Esquema de las componentes de los vectores.

Por otra parte, la magnitud del vector R_y es:

$$r_y = a_y + b_y + c_y + d_y$$

$$r_y = a\text{Sen}0 + b\text{Sen}45 + c\text{Sen}270 + d\text{Sen}225 .$$

Al remplazar los valores de las magnitudes vectoriales, se tiene:

$$r_y = 3.5 \times 0.71 - 2.5 \times 1 - 3 \times 0.71 = -2.15$$

$$r_y = 2.48 - 2.5 - 2.13$$

$$r_y = -2.15$$

Como $R = R_x + R_y$, entonces la magnitud de R , según (1.2), será:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$r = \sqrt{5.36^2 + 2.15^2} = 5.78$$

$$r = 5.78$$

Para la dirección, según (1.3), se tiene:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{r_y}{r_x}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{-2.15}{5.78}$$

$$\theta = -20.4 \text{ grados decimales}$$

$$\theta = -20^\circ 24' \text{ grados cegesimales.}$$

El sentido: a partir de la Fig. 1.30, se puede observar que el ángulo del vector resultante es negativo; por tanto, el vector apunta hacia el cuarto cuadrante. Además, las componentes del vector resultante así lo indican.

Ejercicio 3. Sumar de forma analítica estos vectores:

A1: $a_1 = 5$ und; $\theta_1 = 30^\circ$

A2: $a_2 = 6$ und; $\theta_2 = 120^\circ$

A3: $a_3 = 4$ und; $\theta_3 = 190^\circ$

A4: $a_4 = 4$ und; $\theta_4 = 280^\circ$

A5: $a_5 = 6$ und; $\theta_5 = 320^\circ$

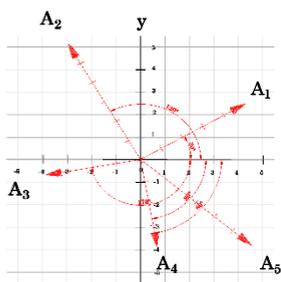


Fig. 1.31. Esquema de los vectores propuestos.

Solución.

Para efectuar la suma de vectores es conveniente realizar su gráfica; así que, como se puede ver, cada vector se grafica de acuerdo a las condiciones dadas; en la Fig. 1.31, se pueden apreciar la magnitud, la dirección y el sentido de los vectores.

El vector A_3 , cuya dirección es de 190° , aparece con 170° ; esto se debe a que el graficador AutoCAD traza el ángulo suplementario, entonces el ángulo de menor valor, con lo que tener 190° es lo mismo que 170° y, como tal, la suma entre estos dos ángulos es 360 .

Cuando se trata de sumar más de dos vectores, es conveniente realizar las operaciones de forma sistematizada, como se puede ver en la Tabla 1.4:

Tabla 1.4. Tabulación de las componentes vectoriales.

VEC-TOR	MAG NI TUD	DIREC- CION	COMPONENTE EN x		MAG. COMPO - NENTE S EN x	COMPONENTE EN y		MAG. COMPO- NENTES EN y
			$A_i \cos \theta_i$	$5. \cos 30$		$A_i \sin \theta_i$	$5. \sin 30$	
A1:	$a_1 = 5$	$\theta_1 = 30^\circ$	$A_1 \cos \theta_1$	$5. \cos 30$	4.33	$A_1 \sin \theta_1$	$5. \sin 30$	2.50
A2:	$a_2 = 6$	$\theta_2 = 120^\circ$	$A_2 \cos \theta_2$	$6. \cos 120$	-3.00	$A_2 \sin \theta_2$	$6. \sin 120$	5.20
A3:	$a_3 = 4$	$\theta_3 = 190^\circ$	$A_3 \cos \theta_3$	$4. \cos 190$	-3.94	$A_3 \sin \theta_3$	$4. \sin 190$	-0.69
A4:	$a_4 = 4$	$\theta_4 = 280^\circ$	$A_4 \cos \theta_4$	$4. \cos 280$	0.69	$A_4 \sin \theta_4$	$4. \sin 280$	-3.94
A5:	$a_5 = 6$	$\theta_5 = 320^\circ$	$A_5 \cos \theta_5$	$6. \cos 320$	4.60	$A_5 \sin \theta_5$	$6. \sin 320$	-3.86
			A_x SUMATORIA		2.68	A_y SUMATORIA		-0.79

Con estos resultados, ya se puede calcular el vector resultante, así:

Como: $A = A_x + A_y$

Entonces, la magnitud, nuevamente según (1.2), es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a = \sqrt{2.68^2 + 0.79^2}$$

$$a = 2.79$$

La dirección, según (1.3), es:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{-0.79}{2.68}$$

$$\theta = -16.42$$

$$\theta = -16^\circ 25'$$

El sentido: debido a que el ángulo resultante de la dirección es negativo, entonces el vector está en el cuarto cuadrante

Ejercicio 4. Sumar de forma analítica estos vectores:

A1: $a_1 = 3$ und; $\theta_1 = 30^\circ$

A2: $a_2 = 7$ und; $\theta_2 = 270^\circ$

A3: $a_3 = 9$ und; $\theta_3 = 180^\circ$

A4: $a_4 = 12$ und; $\theta_4 = 20^\circ$

A5: $a_5 = 30$ und; $\theta_5 = 120^\circ$

A6: $a_6 = 18$ und; $\theta_6 = 60^\circ$

A7: $a_7 = 25$ und; $\theta_7 = 15^\circ$

A8: $a_8 = 10$ und; $\theta_8 = 90^\circ$

A9: $a_9 = 15$ und; $\theta_9 = 150^\circ$

A10: $a_{10} = 28$ und; $\theta_{10} = 45^\circ$

El sentido lo da el ángulo; como todos son positivos, se entiende que los vectores están en el primer cuadrante.

Solución.

Para resolver este tipo de problemas, de igual forma que en el ejercicio anterior, cuando se trata de efectuar suma de varios vectores, es aconsejable utilizar una hoja de cálculo como Excel, como se puede ver en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5. Tabulación de componentes vectoriales en hoja de cálculo de Excel.

VEC-TOR	MAG NITU D	DIREC- CIÓN	COMPONENTES EN x		MAG. COM PO NEN TE EN x	COMPONENTES EN y		MAG. COMP O- NENT E EN y
A ₁ :	$a_1 = 3$	$\theta_1 = 30^\circ$	$A_1 \cos \theta_1$	$3 \cdot \cos 30$	2.60	$A_1 \sin \theta_1$	$3 \cdot \sin 30$	1.50
A ₂ :	$a_2 = 7$	$\theta_2 = 270^\circ$	$A_2 \cos \theta_2$	$7 \cdot \cos 270$	0.00	$A_2 \sin \theta_2$	$7 \cdot \sin 270$	-7.00
A ₃ :	$a_3 = 9$	$\theta_3 = 180^\circ$	$A_3 \cos \theta_3$	$9 \cdot \cos 180$	-9.00	$A_3 \sin \theta_3$	$9 \cdot \sin 180$	0.00
A ₄ :	$a_4 = 12$	$\theta_4 = 20^\circ$	$A_4 \cos \theta_4$	$12 \cdot \cos 20$	11.28	$A_4 \sin \theta_4$	$12 \cdot \sin 20$	4.10
A ₅ :	$a_5 = 30$	$\theta_5 = 120^\circ$	$A_5 \cos \theta_5$	$30 \cdot \cos 120$	-15.00	$A_5 \sin \theta_5$	$30 \cdot \sin 120$	25.98
A ₆ :	$a_6 = 18$	$\theta_6 = 60^\circ$	$A_6 \cos \theta_6$	$18 \cdot \cos 60$	9.00	$A_6 \sin \theta_6$	$18 \cdot \sin 60$	15.59
A ₇ :	$a_7 = 25$	$\theta_7 = 15^\circ$	$A_7 \cos \theta_7$	$25 \cdot \cos 15$	24.15	$A_7 \sin \theta_7$	$25 \cdot \sin 15$	6.47
A ₈ :	$a_8 = 10$	$\theta_8 = 90^\circ$	$A_8 \cos \theta_8$	$10 \cdot \cos 90$	0.00	$A_8 \sin \theta_8$	$10 \cdot \sin 90$	10.00
A ₉ :	$a_9 = 15$	$\theta_9 = 150^\circ$	$A_9 \cos \theta_9$	$15 \cdot \cos 150$	-12.99	$A_9 \sin \theta_9$	$15 \cdot \sin 150$	7.50
A ₁₀	$a_{10} = 28$	$\theta_{10} = 45^\circ$	$A_{10} \cos \theta_{10}$	$28 \cdot \cos 45$	19.80	$A_{10} \sin \theta_{10}$	$28 \cdot \sin 45$	19.80
			A_x SUMATORIA		29.84	A_y SUMATORIA		83.94

Como el vector $A = A_x + A_y$, entonces la magnitud es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a = \sqrt{29.84^2 + 83.94^2}$$

$$a = 89.09$$

Dirección:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{83.94}{29.84}$$

$$\theta = 70.43$$

$$\theta = 70^\circ 25'$$

Sentido: debido a que el ángulo resultante de la dirección es positivo, entonces el vector está en el primer cuadrante.

Al utilizar una hoja de cálculo como Excel, se tienen los resultados de la Tabla 1.6, similares a los obtenidos en los cálculos de la Tabla 1.5.

Tabla 1.6. Tabulación rápida en hoja de cálculo Excel.

vector	und	Ángulo	RAD	com x	com y
A1	3	30	0,523599	2,60	1,50
A2	7	270	4,712389	0,00	-7,00
A3	9	180	3,141593	-9,00	0,00
A4	12	20	0,349066	11,28	4,10
A5	30	120	2,094395	-15,00	25,98
A6	18	60	1,047198	9,00	15,59
A7	25	15	0,261799	24,15	6,47
A8	10	90	1,570796	0,00	10,00
A9	15	150	2,617994	-12,99	7,50
A10	28	45	0,785398	19,80	19,80
			Sumas	29,83	83,94

Vectores en tres dimensiones.

Para analizar vectores en 3D, se tomará el sistema tridimensional cartesiano (x, y, z) .

En la Fig. 1.32, se puede observar el mundo de tres seres que cohabitan con el ser humano. El ratón, por lo general, es animal que vive y se desplaza sobre el plano horizontal; en ocasiones excepcionales, puede subir o bajar paredes, pero por lo general está en el piso; es decir: en el plano (x, y) .

Otro animal que cohabita con nosotros son las hormigas; al igual que en el caso anterior, su modo de vida se desarrolla en el plano; pueden subir y bajar paredes, así que su vida también se desarrolla en dos dimensiones.

Pero hay un animal que cohabita y gran parte de su vida se desarrolla en tres dimensiones; en el caso de los insectos

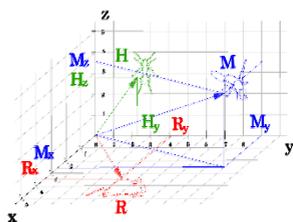


Fig. 1.32. Esquema de vectores en tres-D.

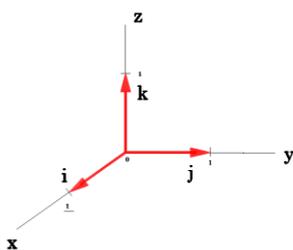


Fig. 1.33. Vectores unitarios de los ejes x, y, z .

voladores, como la mosca, gran parte de su vida la pasa volando; es decir, su vida se desarrolla en tres dimensiones (alto, ancho y profundo), así:

En la Fig. 1.33, se puede ver la esquina de una habitación, donde se juntan las paredes y forman una línea vertical, que corresponde al eje z ; la línea de juntura entre el piso y la pared de la derecha corresponde al eje y , y por último, la junta entre la pared de izquierda y el piso forma el eje x ; es decir, que la esquina se forma por tres planos: (x, y) piso; (y, z) pared; (x, z) pared. Estos conjuntos de planos conforman el primer octante; todo lo que se encuentre o se desarrolle

aquí se describirá por las coordenadas (x, y, z) , así que el movimiento del ratón se describirá por $(x_R, y_R, 0)$; es decir, está en el plano (x, y) .

El movimiento de la hormiga se describirá por $(0, y_H, z_H)$; es decir, está en el plano (y, z) ; y, por último, el movimiento de la mosca se describirá por las coordenadas (x_M, y_M, z_M) ; es decir, se encuentra en el espacio (x, y, z) , o 3-D.

De esta forma, la posición de estos tres animales por ahora la determinarán bien los vectores $R, H, y M$, donde cada uno de estos vectores tiene proyecciones en los ejes x, y, z , así:

$$\begin{aligned} R &: R_x; R_y \\ H &: H_y; H_z \\ M &: M_x; M_y; M_z \end{aligned}$$

Así que los vectores serán:

$$R = R_x + R_y$$

$$H = H_y + H_z$$

$$M = M_x + M_y + M_z$$

Como se puede ver, el vector M es el único que tiene tres proyecciones o coordenadas; ahora bien, como las coordenadas no son más que números o escalares, entonces ¿qué hacer para escribirlos como vectores?

Vectores unitarios o versores.

Un vector unitario es aquel vector cuya magnitud es la unidad (1); la dirección y el sentido depende del vector al cual caracteriza; para el caso del sistema cartesiano, los vectores unitarios o versores son: \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , que corresponden a los ejes x , y , z .

Así, todo escalar que multiplique al vector unitario adquiere la propiedad de vector, razón por la cual los vectores también se pueden expresar como:

$$R = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j}$$

$$H = h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k}$$

$$M = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k}$$

Para el caso del vector M , se entiende que: $M_x = m_x \mathbf{i}$; $M_y = m_y \mathbf{j}$; $M_z = m_z \mathbf{k}$ y, de igual forma, para los vectores \mathbf{R} y \mathbf{H} .

Ahora, como al extremo del vector lo dan las coordenadas x_m ; y_m ; z_m , entonces, también el vector M puede expresarse como:

$$M = x_m \mathbf{i} + y_m \mathbf{j} + z_m \mathbf{k}$$

Como las coordenadas son escalares, sus magnitudes son:

$$x = 4$$

$$y = 5.5$$

$$z = 3.2$$

Entonces, el vector es:

$$M = 4i + 5.5j + 3.2k ,$$

donde la magnitud del vector, por extensión del teorema de Pitágoras, es:

$$m = \sqrt{4^2 + 5.5^2 + 3.2^2}$$

$$m = 7.52$$

Para encontrar la dirección se requiere definir los ángulos respecto a los tres ejes.

Como el vector es el resultado de las componentes, entonces también el ángulo respecto a sus ejes permite dar una orientación precisa del vector, así:

Respecto al eje x , el ángulo se forma entre el vector M y la proyección o componente M_x . De igual forma para M_y y M_z . Así que:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\alpha &= \frac{m_x}{m} \\ \text{Cos}\beta &= \frac{m_y}{m} \\ \text{Cos}\gamma &= \frac{m_z}{m} \end{aligned} \quad (1.5)$$

A este grupo de ecuaciones se lo conoce como **cosenos directores**. Como se puede ver en la Fig. 1.34, los ángulos se forman por el vector y las proyecciones; así que, de los cosenos directores, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Cos}^{-1} \frac{m_x}{m} \\ \beta &= \text{Cos}^{-1} \frac{m_y}{m} \\ \gamma &= \text{Cos}^{-1} \frac{m_z}{m} \end{aligned} \quad (1.6)$$

A partir del ejemplo numérico que se tenía, se puede calcular el valor de los ángulos.

Como $M = 4i + 5.5j + 3.2k$ y la magnitud es $m = 7.52$, entonces:

$$\alpha = \text{Cos}^{-1} \frac{4}{7.52} = 57.87 = 57^{\circ}51'$$

$$\beta = \text{Cos}^{-1} \frac{5.5}{7.52} = 43.00 = 43^{\circ}$$

$$\gamma = \text{Cos}^{-1} \frac{3.2}{7.52} = 64.82 = 64^{\circ}48'$$

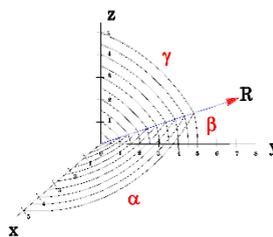


Fig. 1.34. Ángulos respecto a los ejes x, y, z desde el vector.

Para definir el sentido, es conveniente recordar las coordenadas de los octantes del sistema tridimensional; tal como se puede ver en la Tabla 1.3.1, cada octante tiene su triada de coordenadas, de tal forma que, al depender de su valor, se define el octante y, por tanto, el sentido del vector resultante, así como también el ángulo que se define en los cosenos directores. Con estos resultados, el vector queda totalmente determinado.

Tabla. 1.3.1.

Octante	Coordenadas
1	+x +y +z
2	-x +y +z
3	-x -y +z
4	+x -y +z
5	+x +y -z
6	-x +y -z
7	-x -y -z
8	+x -y -z

Ahora bien, es conveniente conocer cuál es el vector unitario del vector M : por definición, el vector unitario es:

$$\|M\| = \frac{M}{m} \quad (1.7)$$

Esto es: al vector M se lo debe dividir entre la magnitud del vector M mediante la expresión (1.7), así:

$$\|M\| = \frac{4i + 5.5j + 3.2k}{7.52}$$

$$\|M\| = \frac{4}{7.5}i + \frac{5.5}{7.52}j + \frac{3.2}{7.52}k$$

$$\|M\| = 0.53i + 0.73j + 0.43k$$

Por tanto, la magnitud del vector unitario será:

$$\|m\| = \sqrt{0.53^2 + 0.73^2 + 0.43^2}$$

$$\|m\| = 1.00$$

Como era de esperar, la magnitud de todo vector unitario siempre es uno; de allí su denominación.

1.11 Producto de vectores.

Así como se pueden realizar sumas y restas entre vectores, también se puede efectuar multiplicación entre vectores; esto implica analizar dos situaciones que se presentan, así:

Producto escalar o punto: también denominado producto interno, que se define así: Sean los vectores:

$$A = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$B = b_x i + b_y j + b_z k$$

1. Primera definición. Se define producto escalar entre A y B como:

$$A \cdot B = ab \cos \theta \quad (1.8)$$

Donde a y b son las magnitudes de los vectores A y B , y θ es el ángulo entre los dos vectores, de modo que el resultado de este producto es un escalar, un número; por tanto, carece de dirección y sentido, pero permite encontrar el ángulo entre los vectores; entonces, al despejar el ángulo de (1.8), se tiene:

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{ab}$$

El asunto es ahora saber a qué es igual $A \cdot B$.

2. Segunda definición se define producto escalar de A y B como:

$$A \cdot B = (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k)$$

Para solucionarlo, se procede a efectuar la multiplicación miembro a miembro, así:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= a_x b_x (i \cdot i) + a_x b_y (i \cdot j) + a_x b_z (i \cdot k) \\ &+ a_y b_x (j \cdot i) + a_y b_y (j \cdot j) + a_y b_z (j \cdot k) \\ &+ a_z b_x (k \cdot i) + a_z b_y (k \cdot j) + a_z b_z (k \cdot k) \end{aligned}$$

Ahora bien, por la primera definición, el ángulo entre los dos vectores es: entre i y j de 90° , entre j y k de 90° y, por último, k e i también 90° ; ahora bien, como $\text{Cos } 90 = 0$, mientras que el ángulo entre sí mismo, es θ , por tanto $\text{Cos } 0 = 1$; o sea:

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

Mientras que:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = \text{Cos } 0 = 1$$

De modo que:

$$A \cdot B = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.9),$$

lo que implica efectuar una suma de productos de escalares.

Ejemplo:

Sean los vectores.

$$A = 3i + 4j + 7k$$

$$B = 8i + 2j + 5k$$

Además, el ángulo entre ellos es de 36° .

Solución.

A partir de la primera definición (1.8), se tiene:

$$A \cdot B = ab \text{Cos } \theta$$

Calcular las magnitudes de los vectores A y B :

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2}$$

$$a = 8.6$$

$$b = \sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2}$$

$$b = 9.64$$

Con estos valores, se reemplaza en la definición de (1.9):

$$A \cdot B = 8.6 \times 9.64 \cos 36$$

$$A \cdot B = 82.9 \times 0.81$$

$$A \cdot B = 67.07$$

Al utilizar la segunda definición, se tiene:

$$A \cdot B = 3 \times 8 + 4 \times 2 + 7 \times 5$$

$$A \cdot B = 67.00$$

Los dos resultados prácticamente son iguales.

Con la ayuda de las dos definiciones, se puede calcular el ángulo, en caso de que no se conociera.

A partir de la primera definición (1.8), se tiene:
 $A \cdot B = ab \cos \theta$

Al despejar el ángulo, se tiene:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{A \cdot B}{ab}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{67}{8.6 \times 9.64}$$

$$\theta = 36^\circ$$

Que es el mismo ángulo que se había dado en el ejemplo.

Propiedades del producto escalar.

Conmutatividad. El producto interno o escalar es conmutativo; es decir:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Producto vectorial. También se lo denomina producto cruz y se define como:

Sean los vectores:

$$A = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$B = b_x i + b_y j + b_z k$$

1. Primera definición. Se define producto vectorial o cruz de los vectores A y B como:

$$\|A \times B\| = ab \text{Sen} \theta \quad (1.10)$$

A diferencia del producto escalar, este producto es un vector; entonces, al tener al producto entre doble barra, se indica la magnitud del vector, producto cruz o producto vectorial.

2. Segunda definición. También se define el producto vectorial o producto cruz como:

$$A \times B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Por tanto, al solucionar el determinante, se tiene:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

Por otra parte, se puede realizar el producto vectorial al analizar el producto de los vectores unitarios, así:

$$A \times B = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k)$$

Al desarrollar el producto de los paréntesis, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times k) + \\
 A \times B = & a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times k) + \\
 & a_z b_x (k \times i) + a_z b_y (k \times j) + a_z b_z (k \times k)
 \end{aligned}$$

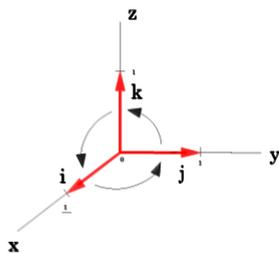


Fig. 1.35. Producto vectorial de los vectores unitarios i, j, k .

vale 0; por tanto, $i \times i = 0$.

Ahora, si $i \times j = k$, en sentido contrario se tiene otro resultado, dado a la NO conmutatividad del producto; esto es: $j \times i = -k$; el sentido positivo se presenta cuando el producto se realiza en el orden tal como se muestra en la Fig. 1.35; por tanto, los productos vectoriales de los vectores unitarios son:

$$\begin{aligned}
 i \times j &= k & j \times i &= -k \\
 j \times k &= i, & k \times j &= -i & (1.12) \\
 k \times i &= j & i \times k &= -j
 \end{aligned}$$

Ahora bien, como: $i \times i = j \times j = k \times k = 0$, al remplazar estos resultados en el desarrollo de (1.10), se tiene:

$$\begin{aligned}
 & a_x b_x (i \times i = 0) + a_x b_y (i \times j = k) + a_x b_z (i \times k = -j) + \\
 A \times B = & a_y b_x (j \times i = -k) + a_y b_y (j \times j = 0) + a_y b_z (j \times k = i) + \\
 & a_z b_x (k \times i = j) + a_z b_y (k \times j = -i) + a_z b_z (k \times k = 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_x b_x(0) + a_x b_y(k) + a_x b_z(-j) + \\
 A \times B = & a_y b_x(-k) + a_y b_y(0) + a_y b_z(i) + \\
 & a_z b_x(j) + a_z b_y(-i) + a_z b_z(0)
 \end{aligned}$$

Si se organiza el resultado, se tiene:

$$A \times B = a_x b_y(k) + a_x b_z(-j) + a_y b_x(-k) + a_y b_z(i) + a_z b_x(j) + a_z b_y(-i)$$

Por último, al organizar los signos, queda:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

Para comparar con el resultado del determinante, es necesario factorizar el signo del segundo componente, así:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k \quad (1.13)$$

Como se puede ver, el resultado es igual al obtenido cuando se desarrolla el determinante. Por tanto, se deja en libertad de aplicar cualquiera de las formas para desarrollar el producto vectorial.

Propiedades del producto vectorial.

1. El producto vectorial no es conmutativo; esto es: $A \times B \neq B \times A$

En algunos casos, se necesita tener un producto de vectores en el que hubiera producto interno y producto vectorial, lo que se conoce con la denominación de producto mixto, así: $A \cdot (B \times C)$ (véase Fig. 1.36).

Ejemplo 1.

Sean los vectores:

$$A = 3i + 4j + 7k$$

$$B = 6i + 2j + 9k$$

Calcular el producto vectorial entre A y B.

Solución.

Al Utilizar el determinante, se tiene:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (4 \cdot 9 - 7 \cdot 2)i - (3 \cdot 9 - 7 \cdot 6)j + (3 \cdot 2 - 4 \cdot 6)k$$

$$A \times B = (36 - 14)i - (27 - 42)j + (6 - 24)k$$

$$A \times B = 22i + 15j - 18k$$

La magnitud del vector es:

$$|A \times B| = \sqrt{22^2 + 15^2 + 18^2}$$

$$|A \times B| = 32.14$$

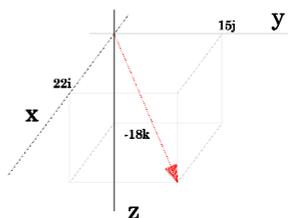


Fig. 1.36. Vector resultante del producto vectorial.

Para calcular los ángulos, se recuerdan los cosenos directores (1.5):

$$\alpha = \text{Cos}^{-1} \frac{22}{32.14} = 46^{\circ}4'$$

$$\beta = \text{Cos}^{-1} \frac{15}{32.14} = 62^{\circ}10'$$

$$\gamma = \text{Cos}^{-1} \frac{-18}{32.14} = 124^{\circ}3'$$

Por otra parte, el vector unitario del producto vectorial es:

$$\langle A \times B \rangle = \frac{22i + 15j - 18k}{32.14}$$

$$\langle A \times B \rangle = 0.68i + 0.47j - 0.56k$$

Para calcular el ángulo entre los vectores, se puede partir de la primera definición (1.9):

$$\|A \times B\| = ab \text{Sen} \theta, \text{ de donde: } \theta = \text{Sen}^{-1} \frac{\|A \times B\|}{ab}; \text{ entonces, como}$$

la magnitud del vector ya se tiene, se calcula la magnitud de cada vector:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} = 8.60$$

$$b = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = 11$$

Con estos resultados, se puede calcular el ángulo:

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \frac{32.14}{8.6 \cdot 11}$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1} 0.34$$

$$\theta = 19.86$$

$$\theta = 19^\circ 51'$$

Ejemplo 2. Sean los vectores:

$$A_1 : a_1 = 3 \text{ und } \theta = 35^\circ \text{ respectoa } x$$

$$A_2 = 3i + 4j + 7k$$

Calcular la suma de los vectores, A_1, A_2 .

Solución. Para sumar vectores mediante el método de componentes, es necesario conocer las componentes del vector, por lo cual, primero, se deben calcular las componentes del primer vector, así:

Como $A = A_x + A_y$, entonces:

$$A_x = a_x i = (3 \text{Cos} 35) i = 3 \times 0.82 i = 2.46 i$$

$$A_y = a_y j = (3 \text{Sen} 35) j = 3 \times 0.57 i = 1.72 j$$

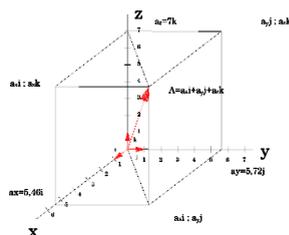


Fig. 1.37. Esquema de un vector en tres dimensiones.

Así que el vector A es: $A = 2.46i + 1.72j + 0k$

Por tanto, para efectuar la suma, será:

$$A_1 = 2.46i + 1.72j + 0k$$

$$A_2 = 3i + 4j + 7k$$

$$A = A_1 + A_2 = 5.46i + 5.72j + 7k$$

Cuya magnitud es:

$$a = \sqrt{5.46^2 + 5.72^2 + 7^2}$$

$$a = 10.56 \text{ und}$$

La dirección la dan los cosenos directores, así:

$$\alpha = \text{Cos}^{-1} \frac{ca_x}{h} = \text{Cos}^{-1} \frac{5.46}{10.56} = 58.87 = 58^\circ 51'$$

$$\beta = \text{Cos}^{-1} \frac{ca_y}{h} = \text{Cos}^{-1} \frac{5.72}{10.56} = 57.20 = 57^\circ 12'$$

$$\gamma = \text{Cos}^{-1} \frac{ca_z}{h} = \text{Cos}^{-1} \frac{7}{10.56} = 48.48 = 48^\circ 28'$$

Debido a que las componentes son positivas, el sentido estará en el primer octante.

Ejercicios

1. Sean los vectores:

$$A = 3i + 4j + 6k$$

$$B = 2i - 3j + 9k$$

$$C = 7i - 4j + 8k$$

Calcular: $A+B$; $A+C$; $A+B+C$

Graficar los resultados.

Calcular los Cosenos directores y ángulos de los vectores resultantes.

Calcular los vectores unitarios.

2. Sean los vectores:

$$A_1 : a_1 = 3\text{und} \quad \theta_1 = 35^\circ \text{ respectoa } x$$

$$A_2 : a_2 = 5\text{und} \quad \theta_2 = 120^\circ \text{ respectoa } x$$

$$A_3 : a_3 = 3i + 4j + 7k$$

$$A_4 : a_4 = 3i + 2j$$

$$A_5 : a_5 = 7k$$

Efectuar estas operaciones:

$$A_1 + A_2$$

$$A_1 + A_3$$

$$A_1 - A_4$$

$$A_2 + A_4$$

$$A_1 + A_5$$

Graficar los resultados.

3. Sean los vectores:

$$A = 3i + 4j + 5k$$

$$B = 2i + 7j - 6k$$

$$C = 9i - 3j + 8k$$

Calcular: $A \cdot B$

$$A \cdot C$$

$$A \times B$$

$$B \times C$$

$$A \cdot (B \times C)$$

$$A \times (B \times C)$$

Capítulo 2

Cinemática



En el mundo cotidiano hay innumerables objetos que se mueven: aves que vuelan, animales que corren, carros por las avenidas, aviones que cruzan los cielos, personas caminan o corren, etc. La pregunta que nos hacemos es: ¿cómo sabemos que los objetos se mueven? Sin duda, nuestro cerebro siempre compara los objetos en movimiento con las cosas que no lo hacen; así, por ejemplo, a los aviones se los ve cruzar entre las nubes, que relativamente están quietas; las personas, cuando caminan, pasan frente a puertas y ventanas que están quietas, los carros cruzan velozmente frente a edificios y frente a otros estacionados o que cruzan en sentido contrario; de esta forma, nuestro cerebro superpone imágenes de objetos en movimiento con aquellas imágenes de cosas que están en reposo o con otro tipo de movimiento; es decir, siempre busca un sistema de referencia con el cual compara su posición inicial y final.

Así, el hombre, desde tiempos inmemoriales, ha estudiado estos fenómenos, que los físicos han denominado cinemática (del griego *kinêmatikos*, derivado de *kinêma*, que significa ‘movimiento’). La cinemática es una parte de los fundamentos de la Física que estudia el movimiento de los objetos vistos como puntos en algún sistema de referencia que se eligiera para su estudio.

En esta parte de la Física, los objetos están desprovistos de dimensiones en longitud y masa; por esta razón solo se los considera puntos que reciben cualquier nombre, el que se les desee dar, por lo que el estudio se torna ideal, por ahora; por otra parte, como en toda parte de la Física, es necesario establecer un lenguaje apropiado para poder entender y establecer relaciones de dependencia e independencia, razón por la cual, para empezar, se va a referir a parámetros del movimiento.

2.1 Sistema de referencia

Para poder referirse a movimiento, es necesario establecer en qué sistema de referencia matemático se realiza el movimiento; para iniciar, se establecerán algunos, como:

Sistema de referencia unidimensional.

Es el sistema de referencia más básico, en el cual los objetos no tienen otra alternativa que moverse a lo largo del eje y alejarse de o acercarse al punto de origen cero, tanto en la parte derecha como en la izquierda (véase Fig. 2.1). Un ejemplo de esta situación puede ser el movimiento de un pequeño roedor (ratón) que corre por dentro de un tubo, o el acróbata mono araña que cruza caminando por cuerdas de energía en la India (Fig. 2.2) que, de no saltar, no tiene más alternativa que seguir o regresar; también podemos considerar el movimiento de una lombriz por un túnel rectilíneo. En nuestra vida real, las carreteras o autopistas solo permiten que los vehículos avancen en un solo sentido; para regresar, se debe utilizar el sentido contrario en busca de un retorno, pero algo más práctico; como ejemplo de sistemas de referencia unidimensionales están las carrileras de los trenes, pues la locomotora y sus vagones no tienen más posibilidades que moverse hacia delante o hacia atrás, tal como lo hacen los modernos trenes eléctricos en que, para cambiar de sentido, tan solo falta que el maquinista cambie la ubicación de cabina, como en este moderno tren urbano de pasajeros en Holanda (Fig. 2.3); obsérvese que el frente y la parte de atrás son iguales; por tanto, podrá viajar en cualquiera de los dos sentidos. Bueno, puede



Fig. 2.1 sistema unidimensional



Fig. 2.2. Mono araña caminando por una cuerda de energía. Fuente: <https://pixabay.com/es/photos/india-electricidad-mono-4393149/>



Fig. 2.3. Moderno tren de pasajeros en Holanda; su funcionamiento es 100% con energía eólica. Fuente: <https://www.pexels.com/es-es/foto/autopista-calle-ciudad-cruce-614/>

haber muchos más ejemplos que ilustrasen este tipo de sistema de referencia, que permite el movimiento en una sola dimensión.

Sistema de referencia bidimensional. El sistema bidimensional o sistema cartesiano tiene los dos ejes (x, y), por lo que también se lo conoce como plano, dado que son suficientes los dos ejes para definir áreas (véase Fig. 2.4).

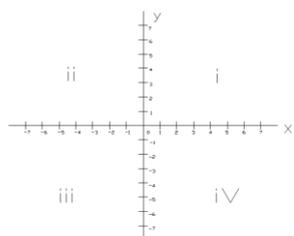


Fig. 2.4. Sistema cartesiano de dos ejes.

En el sistema se distinguen cuatro cuadrantes, definidos por los valores que toman los ejes. Los movimientos que realizan los cuerpos en este sistema se proyectan hacia los ejes (x, y) para trabajarlos como si estuvieran en un sistema unidimensional; un ejemplo de esto es el movimiento de un jugador de fútbol: el jugador se desplaza por todo el campo de juego; también, el movimiento de un roedor en una alcoba; cuando se analice el movimiento parabólico y circular se verá cómo este tipo de movimiento necesita de los dos ejes; es decir, se realizan en un plano, pero se analizan desde los ejes. En fin, hay muchos ejemplos que pueden ilustrar el sistema de referencia de dos dimensiones.



Fig. 2.5. Vuelo de una libélula *Aeshna cyanea*, del infraorden *Anisoptera*. Fuente: Lucero (2015)

Sistema de referencia tridimensional. También llamado sistema de referencia 3D, o de tres dimensiones (x, y, z). Los tres ejes describen el movimiento, de acuerdo a sus proyecciones; por ejemplo, el elegante vuelo de la libélula (Fig. 2.5), o de un ave cualquiera, donde, para poder estudiar su movimiento, se requiere proyectarlo hacia los ejes

de forma independiente; de esta forma el movimiento vuelve a ser de análisis unidimensional.

2.2 Trayectoria. Es el camino por donde se va a mover el objeto o partícula; esta huella o camino se define por una función matemática $y = f(x)$, en general descrita en el sistema bidimensional u otro.

Las trayectorias son de dos tipos: lineales y curvilíneas. En el caso de ser lineal, habrá infinitas funciones cuya gráfica es una recta, que puede ser de paralelas al eje x , al eje y o formar cualquier ángulo con el eje x , en caso de que se describa en el plano cartesiano (Fig. 2.6).

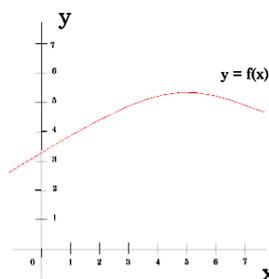


Fig. 2.6. Gráfica de una función de trayectoria.

De igual forma, si es de tipo no lineal, las gráficas serán curvas, unas más complejas que otras, con infinitas posibilidades, cuya denominación de la gráfica le da el apelativo al movimiento del objeto que se mueve sobre dicha trayectoria; entre las trayectorias más conocidas, se hallan las que se pueden ver en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Nombre de los movimientos de acuerdo a la función matemática de la trayectoria.

NOMBRE DE LA FUNCIÓN	EXPRESIÓN MATEMÁTICA DE LA TRAYECTORIA	NOMBRE DE LA GRÁFICA
Lineal	$y = ax + b$	Recta
Circular	$r^2 = x^2 + y^2$	Circunferencia
Cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$	Parábola
Hiperbólica	$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	Hipérbola
Elíptica	$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Elipse
Exponencial	$y = ke^{-\mu t}$	Exponencial

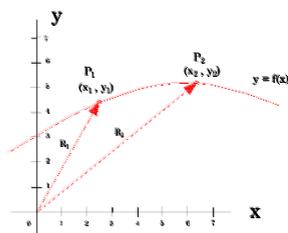


Fig. 2.7. R_1 y R_2 son los radios vectores de posición.

2.3 Posición. Cuando se mueven sobre la trayectoria, los objetos pasan por infinitos puntos; cada uno de estos se convierte en la posición del objeto; ahora bien, un punto que represente la posición o localización del objeto puede determinarse por un vector que se denominará vector posición, como se puede ver en la Fig. 2.7, en la que

se muestran dos puntos de posición P_1 , cuyas coordenadas son (x_1, y_1) , y P_2 , de coordenadas (x_2, y_2) . Estas coordenadas son las componentes de los vectores R_1 y R_2 ; es decir, que:

$$R_1 = x_1i + y_1j \text{ y el vector } R_2 = x_2i + y_2j$$

Así que los puntos P_1 y P_2 también pueden determinarse por los vectores posición.

Variación de la posición-desplazamiento. Al moverse a lo largo de la trayectoria, los objetos están pasando por infinitos puntos de esa trayectoria; ahora bien, si consideramos dos de ellos, tal como lo muestra la Fig. 2.7, hasta allí corresponde a dos posiciones; ahora, si se considera que el punto P_1 es el punto inicial y P_2 el punto donde termina el evento, de esta forma se puede preguntar cuál es la diferencia de posición; o sea, entre P_1 y P_2 , tal como se puede ver en la Fig. 2.8; al efectuar el desarrollo vectorial, se tiene que:

$$R_1 + \Delta R = R_2$$

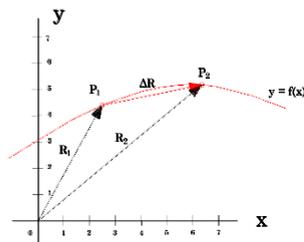


Fig. 2.8. Variación de la posición.

Por tanto,

$$\Delta R = R_2 - R_1 \quad (2.1).$$

Esta expresión se conoce como *variación de la posición* o *desplazamiento*, asunto que corresponde a una diferencia

vectorial y, como todo vector debe tener magnitud, dirección y sentido, una variación en cualquiera de estas propiedades es motivo de cambio.

En el caso de la magnitud que varía con la posición, se podría calcular así:

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta magnitud se da en unidades de longitud, bien sea en metros u en otro tipo de unidades que se requiera; a la magnitud de la variación de la posición se la denomina *distancia* y, como tal, solo tendrá carácter escalar (un número).

La dirección del vector variación de posición será:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para encontrar el sentido, se deben utilizar las mismas características de los valores que adquieran las componentes de un vector.

2.4 Velocidad. Con muchísima frecuencia, en el mundo de la Física se habla de la velocidad de objetos, partículas o cosas. Así que, cuando un objeto se mueve desde el punto P_1 hasta el punto P_2 , ocurre que en ese evento transcurre un tiempo; es decir, cuando se encuentra en P_1 , ha transcurrido el tiempo t_1 , y cuando llega al punto P_2 , habrá transcurrido el tiempo t_2 ; en ese movimiento ha empleado una diferencia de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$; así, se define como velocidad a la razón de la variación de la posición o desplazamiento respecto a la variación del tiempo (véase Fig. 2.9). Esto es:

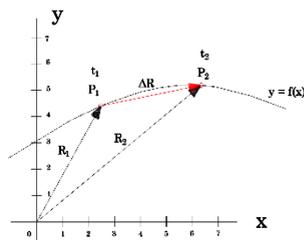


Fig. 2.9. Variación de la posición en función del tiempo.

$$\bar{v} = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} \quad (2.2)$$

Esto quiere decir que entre más pequeña sea la variación del tiempo, la velocidad es grande; ahora bien, como la variación de la posición es un vector y el tiempo es un escalar, entonces la velocidad es un vector y, como tal, tendrá magnitud, dirección y sentido. A la magnitud de la velocidad, que será igual a $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, se la denomina *rapidez*, cuyas

dimensiones son: $[v] = \frac{[L]}{[T]}$; por tanto, las unidades se darán en $\frac{\text{metros}}{\text{segundo}} \Rightarrow \frac{m}{s}$, para el sistema SI, y cuantas se deriven de aquí.

Por otra parte, cuando la velocidad está cambiando y se necesita calcular en un instante dado, se refiere a la *velocidad instantánea*; es decir, cuando la variación del tiempo tiende a cero, entonces la velocidad es:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{dR}{dt} \quad (2.3)$$

A partir de la expresión (2.3), se dice que la velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo.

Como el tiempo es muy pequeño, entonces el desplazamiento también lo es, con lo cual se tiene un punto en la trayectoria; por tanto, la velocidad instantánea será la tangente a la trayectoria en dicho punto.

Entre los ejemplos que la naturaleza tiene, está la velocidad de la luz, las ondas electromagnéticas de la radio, televisión y telefonía celular que viajan con la velocidad de la luz ($c = 299.792 \text{ km/s}$), cuyo valor es muy muy grande. También está la velocidad del sonido, en 340 m/s ; en el atletismo, se cuenta con un registro olímpico, impuesto por el atleta jamaicano Usain

Bolt el 5 de agosto de 2012, al recorrer 100 m en solo 9.63 segundos, de modo que la velocidad del atleta fue:

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

$$v = \frac{100m}{9.63s}$$

$$v = 10.38 \text{ m/s}$$

2.5 Aceleración. Ahora bien, puede ocurrir que el objeto, al pasar por el punto P_1 en el tiempo t_1 , llevaba una velocidad v_1 y, tiempo más tarde t_2 al pasar por el punto P_2 ; la velocidad ha cambiado a v_2 , así que la velocidad puede ser que hubiera aumentado o disminuido; en cualquiera de los dos casos, hay una aceleración positiva si aumenta o negativa si disminuye, a la que se le llamará desaceleración.

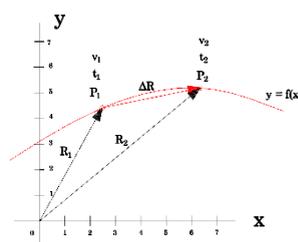


Fig. 2.10. Variación de la velocidad respecto a una variación del tiempo.

En esto se ha dado una variación de la posición, una variación de la velocidad y una variación del tiempo (Fig. 2.10).

Así que la aceleración será la variación de la velocidad respecto a la variación del tiempo; esto es:

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (2.4)$$

Como la variación de la velocidad es un vector y el tiempo un escalar, entonces la aceleración es un vector, cuyas dimensiones son: $[\vec{a}] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L/T]}{[T]} = \frac{[L]}{[T^2]}$, por lo que, para el SI se medirá en $\frac{m}{s^2}$ y lo que corresponda a las unidades derivadas de este sistema.

Ahora bien, así como en la velocidad, también se habla de una aceleración instantánea como la medida de la variación de la velocidad en un tiempo infinitesimal. Esto es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2.5)$$

A partir de la expresión, se diría que la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. Por otra parte, como la velocidad es $v = \frac{dR}{dt}$, entonces, al remplazar en la ecuación de la aceleración, se tiene:

$$\vec{a} = \frac{d^2 R}{dt^2} \quad (2.6)$$

Esta expresión se debe leer como: segunda derivada de la posición respecto al tiempo.

Tiempo	Velocidad
1° segundo	9.81 m/s
2° segundo	19.62m/s
3° segundo	29.43m/s
4° segundo	39.24m/s

Tabla 2.2. Variación de la velocidad.

Entre los ejemplos que la naturaleza tiene respecto a aceleraciones, está la gravedad o aceleración con que caen los cuerpos cuando se los deja caer

libremente: $g = -9.81 \frac{m}{s^2}$

El valor negativo se debe a que la acción de la gravedad se dirige hacia “abajo”, o sea, hacia la tierra; por tanto, cuando un cuerpo cae libremente, en cada segundo que pasa la velocidad se incrementa en $9.81m/s$, tal como se puede ver en la Tabla.2.2

2.6 Sacudida

Así como la aceleración es la variación de la velocidad en un determinado tiempo, la sacudida implica que la aceleración puede cambiar en el tiempo; esto justamente sucede con la aceleración gravitacional cuando objetos se dejan caer desde alturas muy grandes, del orden de kilómetros; es decir, se dejan caer desde un avión o un globo; a medida que caen, los objetos

experimentan cambios en la aceleración gravitacional, de modo que, por extensión, la sacudida se puede expresar como:

$$s = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3R}{dt^3}$$

Por temas de didáctica, se considera en muchos casos que la gravedad fuese constante, lo que es correcto cuando los fenómenos de laboratorio no pasan de más de dos metros, pero para mayores alturas el comportamiento de la gravedad resulta variable.

2.7 Clasificación del movimiento

Para tener una claridad respecto al tipo de movimientos que se presentan, es conveniente tomar en cuenta de qué función proviene su denominación, como se puede ver en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3. Denominación de los movimientos de acuerdo a la función de la trayectoria.

Función de trayectoria	Expresión matemática	Denominación de la gráfica	Denominación del movimiento
Lineal	$y = ax + b$	Recta	Rectilíneo
No lineal	$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$	curva	Curvilínea

Para algunos movimientos cuya trayectoria es No lineal, se tiene:

Tabla 2.4. Denominación de los movimientos de acuerdo a la función No lineal.

Función de trayectoria	Expresión matemática	Denominación de la gráfica	Denominación del movimiento
Cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$	Parábola	Parabólico
Hiperbólica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	Hiperbólico
Elíptica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	Elíptico
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	Circunferencia	Circular
Exponencial	$y = Ae^{-\mu t}$	Exponencial	Exponencial

Queda claro que cada tipo de función de la trayectoria le da la denominación al movimiento y como tal existirán infinitas formas de trayectorias representadas siempre por funciones matemáticas.

Movimiento rectilíneo

Según lo que se ha dicho, la trayectoria es una función lineal cuya gráfica es una recta y de allí su denominación. Ahora bien, el movimiento rectilíneo aún se puede clasificar en: **uniforme, variado y acelerado.**

Movimiento rectilíneo uniforme.

Para definir este tipo de movimiento, se requieren dos definiciones:

1. La función de la trayectoria $y = f(x)$ debe ser lineal; es decir, la gráfica es una recta.
2. Para que fuese uniforme, debe cumplir con que la velocidad fuera constante; esto es: $v = cte.$

De acuerdo a las dos definiciones, se establece que el movimiento responde a:

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

Lo que corresponde a la definición de la velocidad, solo que, en todo el trayecto, el vector velocidad no puede cambiar; es decir:

$$v = \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} = \frac{R_1 - R_0}{t_1 - t_0}$$

Esto quiere decir que a lapsos de tiempos iguales se tienen desplazamientos iguales, de tal modo que el objeto que

tuviera este tipo de movimiento siempre mantendrá la misma velocidad.

Nota. Movimientos con esta característica se pueden cumplir en tramos pequeños, como ocurre en el caso de un avión en vuelo o un tren en medio del recorrido. En el caso del sonido, las ondas se pueden propagar con velocidad constante en aquellas zonas donde el aire se mantuviera a igual presión, temperatura, viscosidad y densidad; con cualquier cambio en una de ellas, la velocidad se alterará.

Para que la velocidad de las ondas electromagnéticas se mantuviera constante, el medio donde se propaga debe cumplir con linealidad y homogeneidad constantes, eso sin tomar en cuenta otros factores relativistas.

Como se trata del primer ejemplo de velocidad constante, se debe asumir que se trata de algo ideal, que, de forma didáctica, es por donde se debe empezar a construir el conocimiento físico.

Por otra parte, para simplificar los ejemplos, se va a considerar que la trayectoria coincidiera con el eje x o sistema unidimensional, de tal modo que $\Delta R = \Delta x$; así que: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Ejemplos.

La velocidad de la luz se considera constante, con un valor de $c = 299.972 \frac{km}{s}$, valor que se aproxima a $c = 300.000 \frac{km}{s} = 300.000.000 \frac{m}{s}$ y, en muchos casos, se puede escribir únicamente así: $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$

1. Si la luz, entre ir y volver a la luna, se tarda $2.53s$, ¿cuál es la distancia que separa a la luna de la tierra?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$C = 300.000Km/s$$

$$\Delta t = 2.53s$$

Como $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, entonces: $\Delta x = v \cdot \Delta t$; esto es:

$$\Delta x = (300.000 \frac{Km}{s})(2.52s)$$

$$\Delta x = 756.000Km$$

Este es el recorrido que hace la luz entre ir y volver, así que la distancia de la tierra a la luna será:

$$D_{TL} = \frac{\Delta x}{2}$$

$$D_{TL} = 378.000Km$$

Distancia de la tierra a la luna.

2. Si la tierra se encuentra a 150 millones de kilómetros del sol, ¿cuánto tiempo gasta la luz para llegar del sol a la tierra?

Solución.

Datos del Ejemplo:

$$\Delta x = 150'000.000 Km$$

$$C = 300.000Km/s$$

Como $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, entonces, al despejar el tiempo, se tiene:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}; \text{ así que:}$$

$$\Delta t = \frac{150'000.000 Km}{300.000 \frac{Km}{s}}$$

$$\Delta t = 500s$$

Tiempo que se puede expresar en minutos; esto es:

$$\Delta t = \frac{500s}{60s}$$

$$\Delta t = 8.33 \text{ min}$$

3. Los científicos advierten que puede llegar un viento solar que puede afectar las comunicaciones; el viento solar es una corriente de partículas liberadas desde la corona solar y pueden viajar a $1200 \frac{Km}{s}$, así que cuando se observa una fulguración en la corona solar se puede predecir la llegada de ese viento solar. ¿Con cuánto tiempo de anticipación se puede predecir el fenómeno?

Solución.

Datos del Ejemplo:

$$\Delta x = 150.000.000 Km$$

$$v = 1.200 Km/s$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\Delta t = \frac{1.5 \times 10^6 Km}{1.2 \times 10^2 \frac{Km}{s}}$$

$$\Delta t = 125.000s$$

$$\Delta t = 2.083 \text{ min}$$

$$\Delta t = 34H 43 \text{ min}$$

Aproximadamente unas 34 horas y media tardaría en llegar el viento solar desde que se produce la fulguración, a lo que se debería descontar los 8 min que tarda la luz en avisar.

4. Como ya se dijo, a la distancia entre el sol y la tierra se la denomina unidad astronómica (UA). Júpiter está a 1500 veces la distancia de la tierra a la luna. ¿A qué distancia se encuentra, en UA y qué tiempo gasta una señal de radio para llegar a la sonda Voyager, que se encuentra orbitando a Júpiter?

Solución.

Datos del Ejemplo:

Distancia Tierra/luna. $x_l = 378.000 \text{ Km}$

Distancia Tierra/Júpiter, 1500 veces la distancia a la luna.

Entonces, con estos datos, la distancia a Júpiter es:

$$x_j = 378.000 \times 1500 = 567.000.000 \text{ Km}$$

$$x_j = 5.67 \times 10^8 \text{ Km}$$

Lo que en UA es:

$$x_j = \frac{5.67 \times 10^8 \text{ Km}}{1.5 \times 10^8}$$

$$x_j = 3.78 \text{ UA}$$

De modo que el tiempo que tarda en llegar la señal es:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{C}$$

$$\Delta t = \frac{5.67 \times 10^8 \text{ Km}}{3 \times 10^5 \frac{\text{Km}}{\text{s}}}$$

$$\Delta t = 1890s$$

$$\Delta t = 31.5 \text{ min}$$

$$\Delta t = 0.5 \text{ horas}$$

Es decir, media hora, en promedio, tarda la señal que se envía a la sonda desde la tierra y otra media hora en responder; de modo que es del lapso de una hora, aunque, obviamente, depende de dónde se encuentra la sonda en la órbita respecto a Júpiter y la tierra respecto al sol y Júpiter, variaciones pequeñas, pero que se deben tomar en cuenta.

5. En la naturaleza encontramos otro fenómeno que tiene velocidad más o menos constante: se trata de la velocidad de propagación de la onda del sonido. Para procesar una señal, nuestro cerebro tarda 0.1s (una décima de segundo). De modo que se puede averiguar ¿cuál es distancia mínima a la que debe estar un muro para que, al gritar frente a él, se produzca el eco?

Solución.

Datos del ejercicio:

$$v_s = 340 \frac{m}{s}$$

$$\Delta t = 0.1 s$$

Con estos datos se puede analizar el fenómeno, así: Cuando el hombre grita frente al muro, se presentan dos señales que llegan al cerebro: la primera corresponde a la señal que sale desde sus cuerdas vocales y llega a los oídos; la segunda es aquella señal que sale desde la boca, va hasta el muro y rebota hasta alcanzar los oídos de la persona; solo en este momento el cerebro distingue dos sonidos independientes: si entre ellos hay una diferencia de tiempo de una décima de segundo, distingue el eco (Fig. 2.11).

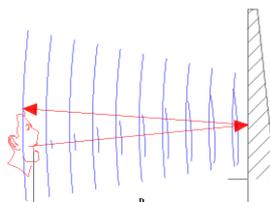


Fig. 2.11. Esquema de la onda sonora de ida y regreso, tras rebotar sobre el muro.

Como $v = \frac{x}{t}$, entonces: $x = v \cdot t$; de modo que:

$$x = 340 \frac{m}{s} \times 0.1s$$

$$x = 34m$$

Resultado de la distancia total que tiene que recorrer la onda sonora, por lo que la distancia entre el muro y la persona que grita es:

$$D_x = \frac{x}{2}$$

$$D_x = 17m$$

Por encima de esta distancia, se puede oír el eco, pero por debajo de esta distancia no se puede percibir, solo se logra que los recintos que tienen estas medidas se tornen resonantes, aquello que en acústica se denomina reverberación.

En la Edad Media, entre los secretos de los constructores de catedrales estaba construir naves que produjeran uno o más ecos.

6. La estrella más cercana al sol es Alfa Centauri; una señal de radio desde la tierra, al viajar a la velocidad de la luz, gastaría *4.5 años* en llegar al sistema planetario de la estrella y otro tanto la respuesta hasta la tierra. ¿Cuál es la distancia en kilómetros y en UA a la que se encuentra la estrella?

Solución.

Datos del ejercicio:

$$t = 4.5 \text{ años}$$

$$C = 300.000 \text{ Km/s}$$

Como $v = \frac{x}{t}$, entonces: $x = v \cdot t$; esto es:

$$x = (300.000 \frac{\text{Km}}{\text{s}})(4.5 \text{ años luz})$$

Ahora bien, un año, en segundos, es:

$$\text{un año} \equiv 31'557.600 \text{ seg}$$

Por tanto, el año luz es:

$$\text{año luz} = (300.000 \frac{\text{km}}{\text{s}})(31'557.600 \text{ seg})$$

$$\text{año luz} = 9.46 \times 10^{12} \text{ km}$$

Como son 4.5 años luz, entonces:

$$4.5 \text{ años luz} \equiv (4.5 \text{ años})(9.46 \times 10^{12} \text{ km})$$

$$4.5 \text{ años luz} \equiv 4.26 \times 10^{12} \text{ km}$$

En UA es:

$$x = \frac{4.26 \times 10^{13} \text{ km}}{1.5 \times 10^8 \text{ Km}}$$

$$x = 28402 \text{ U.A.}$$

Movimiento rectilíneo variado.

Para definir este tipo de movimiento, se requieren dos definiciones:

1. La función de la trayectoria $y = f(x)$ debe ser lineal; es decir, la gráfica es una recta.

2. Para que fuese variado, debe cumplir con que la velocidad cambiase de forma aleatoria o discreta; es decir, habrá varias velocidades, de tal modo que se tendrá una velocidad que representa a todas, que se denomina velocidad media o promedio, así:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N},$$

donde N es el número de eventos o velocidades que se presenten. Si se simplifica, se tiene:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N}$$

Ejemplos.

1. Un autobús urbano, sobre una avenida rectilínea, establece los siguientes recorridos para subir y bajar pasajeros:

$$v_1 = 3 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_3 = 4.5 \frac{m}{s}$$

$$v_4 = 1 \frac{m}{s}$$

$$v_5 = 1.5 \frac{m}{s}$$

Solución.

Con estos valores, se puede calcular la velocidad promedio:

$$\bar{v} = \frac{(3 + 2 + 4.5 + 1 + 1.5) \frac{m}{s}}{5}$$

$$\bar{v} = 2.4 \frac{m}{s}$$

Esto quiere decir que el autobús podía moverse a $2.4m/s$ y hubiera empleado el mismo tiempo.

2. En el ejemplo anterior, se puede plantear al dar tiempos en cada evento, así:

$$v_1 = 3 \frac{m}{s} \quad \text{durante} \quad 10s$$

$$v_2 = 2 \frac{m}{s} \quad \text{durante} \quad 20s$$

$$v_3 = 4.5 \frac{m}{s} \quad \text{durante} \quad 5s$$

$$v_4 = 1 \frac{m}{s} \quad \text{durante} \quad 8s$$

$$v_5 = 1.5 \frac{m}{s} \quad \text{durante} \quad 12s$$

Calcular la velocidad media.

Solución.

Para calcular la velocidad media en estas condiciones, se trata de encontrar la media ponderada:

$$\bar{v} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_N t_N}{t_1 + t_2 + \dots + t_N}$$

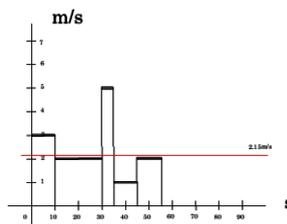


Fig. 2.12. Expresión gráfica de los eventos.

Si se simplifica, se puede escribir como:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i},$$

donde P_i es la parte ponderada de la expresión; en este caso, será el tiempo, de modo que, al remplazar los valores, se tiene:

$$\bar{v} = \frac{3 \times 10 + 2 \times 20 + 4.5 \times 5 + 1 \times 8 + 1.5 \times 12}{10 + 20 + 5 + 8 + 12}$$

$$\bar{v} = \frac{30 + 40 + 22.5 + 8 + 18}{55}$$

$$\bar{v} = 2.15 \frac{m}{s}$$

Este valor también puede calcularse con las proporciones que se dan en cada evento; esto es:

$$\bar{v} = (3 \times 0.18 + 2 \times 0.36 + 4.5 \times 0.09 + 1 \times 0.15 + 1.5 \times 0.22) \frac{m}{s}$$

$$\bar{v} = (0.54 + 0.72 + 0.41 + 0.15 + 0.33) \frac{m}{s}$$

$$\bar{v} = 2.15 \frac{m}{s}$$

Como se ve, las dos formas entregan resultados iguales. En la Fig. 2.12, se pueden apreciar las diferentes velocidades con la duración de cada evento, cuyo promedio es $2.15 m/s$.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

Para definir este tipo de movimiento, se requieren dos definiciones:

1. La función de la trayectoria $y = f(x)$ debe ser lineal; es decir, la gráfica es una recta.

2. La velocidad varía de forma uniforme, sin discreción; es decir, cambia continuamente con el tiempo, bien fuese con aumento o disminución, pero con uniformidad; es decir, hay aceleración constante.

Según (2.5), se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Así, la velocidad se puede escribir como:

$$dv = a dt .$$

Como solución a esta ecuación diferencial, se tiene:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt .$$

Como ya se ha señalado, la aceleración es constante; por tanto, surge de la integración, cuya ecuación queda:

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{t_0}^t dt .$$

Así, la solución es:

$$v - v_0 = a (t - t_0)$$

Si se considera que el tiempo inicial es cero, es decir, se mide directamente con un cronómetro, que se puede ubicar en cero, se tiene:

$$v = v_0 + at \quad (2.7).$$

Con esto se tiene la primera ecuación de la cinemática: la “ecuación de la velocidad”.

Por otra parte, la definición de velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

de la que se puede deducir el desplazamiento:

$$dx = v dt$$

Ahora bien, si se reemplaza la expresión de la velocidad $v = v_0 + at$, se tiene:

$$dx = (v_0 + at) dt .$$

Para solucionar, se integra a lado y lado:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t (v_0 + at) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t at dt$$

Como la aceleración es constante, surge de la integración; así, esto es:

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t^2 - t_0^2) .$$

Si considera que el tiempo inicial se mide con un cronómetro, entonces el tiempo inicial es cero; por tanto:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.8).$$

Esta es la ecuación cinemática del desplazamiento.

Por otra parte, de las dos ecuaciones que definen velocidad y aceleración instantánea, se tiene:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Si se igualan por el tiempo, se puede ver que:

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{a},$$

con lo cual se puede tener:

$$\begin{aligned} adx &= vdv \\ \int_{x_0}^x adx &= \int_{v_0}^v vdv \\ a(x - x_0) &= \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \\ 2a(x - x_0) &= v^2 - v_0^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Y con esta ecuación independiente del tiempo se completa el sistema de ecuaciones cinemáticas. En resumen:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.8)$$

$$v = v_0 + at \quad (2.7)$$

$$2ax = v^2 - v_0^2 \quad (2.9)$$

Con estas tres ecuaciones se puede resolver la mayoría de los ejercicios que correspondan a este nivel.

Ejemplos.

1. Un objeto parte del reposo con una aceleración de 2.5m/s^2 . ¿Cuál será el desplazamiento y la velocidad cuando transcurran 10s?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$a = 2.5\text{m/s}^2$$

$$x = ?$$

$$v = ? \quad t = 10\text{s}$$

Nota. Para todos estos ejercicios, se deben tomar en cuenta las ecuaciones cinemáticas:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$2ax = v^2 - v_0^2$$

1.1 De estas tres ecuaciones, se debe escoger cuál es la más apropiada para responder a la pregunta del ejemplo.

Como pregunta sobre el desplazamiento, la más cercana es la ecuación (2.8): $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$; además, en el enunciado del problema señala que el objeto parte del reposo y no da ningún referente de dónde parte; por tanto, lo que quiere decir es que $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, de modo que la ecuación del desplazamiento se simplifica tanto que solo queda:

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

De esta forma, al remplazar los valores dados en el ejercicio, se tiene:

$$x = \frac{1}{2} (2.5 \frac{m}{s^2}) (10s)^2$$

$$x = 125m$$

1.2 Para calcular la velocidad, se puede observar el sistema de ecuaciones; nótese que la más apropiada es la ecuación (2.7) $v = v_0 + a t$, pero, al advertir que el objeto parte del reposo, entonces la velocidad inicial es nula y la ecuación queda simplificada:

$$v = a t,$$

con lo que, al remplazar los valores dados en el ejercicio, se tiene:

$$v = (2.5 \frac{m}{s^2})(10s)$$

$$v = 25 \frac{m}{s}$$

2. ¿Cuál será el desplazamiento de un objeto que, al partir del reposo, con aceleración de $2,8m/s^2$, llega a adquirir una velocidad de $35m/s$?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$x = ?$$

$$v_o = 0$$

$$a = 2.8m/s^2$$

$$v = 35m/s$$

Del sistema de ecuaciones cinemáticas, se debe elegir una ecuación que esté acorde con los datos que entrega el ejercicio y pueda responder a la pregunta planteada. Como se ve, entre los datos que se entregan en el ejemplo están la aceleración, la velocidad inicial y final. Si se pregunta por el desplazamiento, aquella que cumple con estas exigencias, por denominarla así, es:

$$2ax = v^2 - v_o^2$$

Además, en el ejemplo se señala que parte del reposo; por tanto, la velocidad inicial es cero. Así que el desplazamiento es:

$$2ax = v^2$$

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$x = \frac{(35 \frac{m}{s})^2}{2(2.8 \frac{m}{s^2})}$$

$$x = 218.75m$$

3. Cuando un vehículo lleva una velocidad de 60k/h aplica los frenos de tal modo que se detiene en 50m. ¿Cuál es la desaceleración y el tiempo que necesita el vehículo para detenerse?

Solución.

Cuando las unidades no son del SI, es conveniente empezar por estos datos:

$$v_0 = 60 \frac{km}{h} = \frac{60 \times 1000m}{3600s}$$

$$v_0 = 16.67 \frac{m}{s}$$

Además, la condición para que el vehículo se hubiera detenido significa que la velocidad final es: $v = 0$.

Con estos datos, se debe elegir una de las tres ecuaciones cinemáticas.

3.1 Como una de las preguntas es la aceleración y no se conoce el tiempo, significa que la ecuación a elegir será la única independiente del tiempo: $2ax = v^2 - v_0^2$.

Además, cuando el objeto se detiene, la velocidad final es cero. Entonces, la ecuación finalmente queda: $2ax = -v_0^2$, en la que se puede despejar la aceleración:

$$2ax = -v_0^2$$

$$a = \frac{-v_0^2}{2x}$$

$$a = \frac{-(16.67 \frac{m}{s})^2}{2(50m)}$$

$$a = -2.78 \frac{m}{s^2}$$

El valor es negativo, como se esperaba, por ser una desaceleración, donde la velocidad va disminuyendo hasta llegar a cero.

3.2 Para calcular el tiempo, hay dos opciones: utilizar la primera o la segunda de las ecuaciones cinemáticas; sin embargo, la segunda es más fácil de usar: $v = v_0 - at$, de la que se puede despejar el tiempo; si se recuerda que la velocidad final es nula: $v = 0$:

$$v = v_0 - at$$

$$t = \frac{v - v_0}{-a}$$

$$t = \frac{-16.67 \frac{m}{s}}{-2.78 \frac{m}{s^2}}$$

$$t = 6.0s$$

4. En el ejercicio anterior, calcular la velocidad y el tiempo en la mitad del recorrido.

Solución.

En este tipo de preguntas, se está tentado a establecer proporciones lineales (reglas de tres), pero se debe recordar que hay funciones cuadráticas y, por tanto, se deben seguir las ecuaciones cinemáticas.

4.1 Calcular la velocidad en la mitad del recorrido. La ecuación que permite calcularla directamente es la ecuación independiente del tiempo: $2ax = v^2 - v_0^2$, donde se despeja la velocidad:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax_{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax_{\frac{1}{2}}}$$

$$v = \sqrt{(16.67 \frac{m}{s})^2 - 2(2.78 \frac{m}{s^2})(25m)}$$

$$v = 11.79 \frac{m}{s}$$

Muy diferente a la mitad de la velocidad inicial, como, de pronto, se hubiera pretendido responder.

4.2 Conocidas las dos velocidades, sobre todo la velocidad en la mitad del recorrido, resulta muy sencillo calcular el tiempo al utilizar la segunda ecuación cinemática: $v = v_0 - at$, en la que se puede despejar el tiempo, así:

$$v = v_0 - at$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$t = \frac{(11.79 \frac{m}{s}) - (16.67 \frac{m}{s})}{-2.78 \frac{m}{s^2}}$$

$$t = 1.76s$$

Igual observación que en el caso anterior: el resultado es muy diferente a la mitad del tiempo total.

5. Un vehículo lleva una velocidad de 80Km/h y acelera a razón de $0.8m/s^2$ a lo largo de 120m. ¿Calcular el tiempo transcurrido en dicho recorrido?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$v_0 = 80 \frac{Km}{h} = 22.22 \frac{m}{s}$$

$$a = 0.8m/s^2$$

$$x = 120m$$

$$t = ?$$

Con estos datos y con una de las tres ecuaciones cinemáticas, se puede responder a la pregunta; en este caso, justamente es la ecuación (2.8): $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$, donde se conocen el desplazamiento, la velocidad y la aceleración; la posición inicial no hace falta: $x_0 = 0$; por tanto, se puede despejar el tiempo de:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - x = 0$$

Como se puede ver, la ecuación (2.8) tiene un término de segundo grado para el tiempo. Las ecuaciones de segundo grado tienen una solución en común:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde $a = \frac{a}{2}$, $b = v_0$, y $c = x$; por otra parte, la ecuación da dos soluciones: generalmente una positiva y otra negativa, en que, de acuerdo a lo que se está preguntando, se debe escoger cuál es la más pertinente; en este caso, como se pregunta sobre el tiempo, no tendrá ningún sentido un tiempo negativo; por tanto, ya es muy sencillo elegir la respuesta; al remplazar valores, se tiene:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_i = \frac{-(22.22) \pm \sqrt{22.22^2 + 4(0.4)(120)}}{(0.8)}$$

$$t_i = \frac{-22.22 \pm \sqrt{685.73}}{0.8}$$

$$t_i = \frac{-22.22 \pm 26.19}{0.8}$$

$$t_1 = 4.96s$$

$$t_2 = -60.5s$$

Como ya se señaló, el tiempo negativo no tiene sentido; por tanto, el resultado esperado es 4.96s, tiempo que necesitó el evento acelerado. Como comprobación, si se ubica el tiempo en la ecuación del desplazamiento, debe dar los 120 m.

6. Un cuerpo se encuentra en $x = 196.25\text{m}$ cuando han transcurrido $t = 15\text{s}$ y alcanzado una velocidad $v = 15.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$; si la aceleración es de $a = 0.5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ¿cuál fue la posición cuando $t_0 = 0\text{s}$?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$x = 196.25\text{m}$$

$$t = 15\text{s}$$

$$v = 15.5\text{m/s}$$

$$a = 0.5\text{m/s}^2$$

$$x_0 = ? \text{ en } t = 0\text{s}$$

Entre los datos que entrega el ejemplo, se destaca la pregunta ¿cuál es la posición inicial?; es decir $x_0 = ?$; entonces, a partir del sistema de ecuaciones cinemáticas, se tiene:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$2ax = v^2 - v_0^2$$

Como se puede ver, en la ecuación (2.8) aparece x_0 , pero antes se debería calcular v_0 ; por tanto, en este caso, ninguna de las ecuaciones proporciona el dato de forma inmediata, así que de la ecuación (2.7) se puede despejar v_0 ; esto es:

$$v_0 = v - at$$

$$v_0 = (15.5 \frac{m}{s}) - (0.5 \frac{m}{s^2})(15s)$$

$$v_0 = 8.0 \frac{m}{s}$$

Con este dato, ya se puede calcular la posición inicial x_0 ; entonces, de la ecuación de la posición (2.7):

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x_0 = x - v_0t - \frac{1}{2}at^2$$

$$x_0 = (196.25m) - (8.0 \frac{m}{s})(15s) - \frac{1}{2}(0.5 \frac{m}{s^2})(15s)^2$$

$$x_0 = 20.0m$$

7. Un cuerpo se desplaza de acuerdo a la siguiente función: $x = 5t^2 + 3t + 1.5$; encontrar la aceleración, la velocidad inicial, el desplazamiento inicial, la función de la velocidad y la velocidad a los 5s; todas las unidades están en SI.

Solución.

Para hallar los valores solicitados, se puede establecer una comparación con la ecuación del desplazamiento (2.8).

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 1.5 + 3t + 5t^2$$

Por tanto: $x_0 = 1.5m$, $v_0 = 3 \frac{m}{s}$ y, al final: $a = 10 \frac{m}{s^2}$

Para encontrar la función de la velocidad, se puede proceder con la misma metodología de comparación con la ecuación cinemática de la velocidad:

$$v = v_0 + at$$

$$v = 3 + 10t$$

De igual forma para la función del desplazamiento:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 1.5 + 3t + \frac{1}{2}10t^2$$

Sin embargo, en este tipo de ejercicios, cuando exigen un poco más, se requiere utilizar los elementos más básicos del cálculo diferencial. Así:

Como la definición de velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Entonces, se tendría que derivar respecto al tiempo:

$$v = \frac{d}{dt}(5t^2 + 3t + 1.5)$$

$$v = 5\frac{d}{dt}t^2 + 3\frac{dt}{dt}$$

$$v = 10t + 3$$

Y, por último, como se acostumbra a escribir, la ecuación de la velocidad es: $v = 3 + 10t$.

Y el valor de la velocidad a los 5s es:

$$v = 3 + 10t$$

$$v = 3 + 10(5)$$

$$v = 53 \frac{m}{s}$$

8. Un cuerpo extraño se mueve con una aceleración que cambia con el tiempo, de acuerdo a la siguiente función: $a = 5t$. Encontrar la función de la velocidad y el desplazamiento.

Solución.

Para este tipo de problemas, no hay forma de comparar con las ecuaciones de la cinemática, puesto que no se tiene aceleración variando con el tiempo; entonces, es necesario utilizar el cálculo integral en su forma más básica:

Como $a = \frac{dv}{dt}$, entonces se despeja la velocidad:

$$dv = a dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t 5t dt$$

$$v = v_0 + \frac{1}{2}5t^2$$

Y para el desplazamiento se parte de: $v = \frac{dx}{dt}$, donde se despeja el desplazamiento:

$$dx = v dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}5t^2) dt$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}5t^3$$

En este caso, el desplazamiento resultó ser una función cúbica, donde la constante 5 debe tener las unidades para que hubiera una coherencia dimensional.

2.8 Gráficas de las ecuaciones cinemáticas

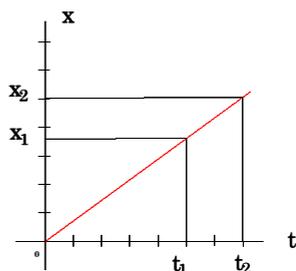


Fig. 2.13. Gráfica de una función lineal

Como las ecuaciones cinemáticas son función del tiempo significa que se pueden graficar cuando en el sistema de referencia este el tiempo así:

Desplazamiento en el movimiento rectilíneo uniforme.

Como se puede ver en la Fig. 2.13, la gráfica que se tiene es: $x = f(t)$;

como en este caso la velocidad permanece uniforme, entonces:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Esta es la razón por la que se denomina uniforme: la gráfica que se obtiene es lineal; es decir, para variaciones del desplazamiento iguales, se tienen variaciones del tiempo iguales.

En la Fig. 2.14 se muestra el área bajo la recta paralela al eje del tiempo t , que representa, como la velocidad, que a medida que transcurre el tiempo permanece constante.

Por otra parte, el área bajo la recta corresponde al desplazamiento. Esto es:

$$\Delta x = v\Delta t$$

Por supuesto, para una velocidad dada, si el tiempo es grande, entonces se tendrá también un desplazamiento grande; es decir, hay una proporcionalidad lineal.

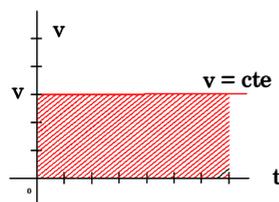


Fig.2.14. Área bajo la recta.

Desplazamiento en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Como la función del desplazamiento es $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$, entonces, para un ejemplo real, se puede presentar de la siguiente forma: $x = 0.5 + 0.8t + 0.15t^2$; así, la función está describiendo el comportamiento

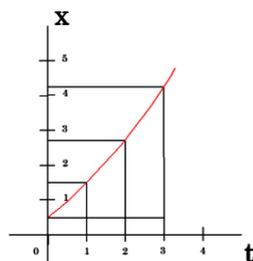


Fig. 2.15. Gráfica de la función del desplazamiento.

del objeto en el tiempo y, para poder graficarla, se requiere construir una Tabla:

t	0	1	2	3
x	0.5	1.45	2.7	4.25

Con los valores encontrados en la tabulación, se construye la Fig. 2.15, cuyo resultado es una parábola: la curva de color rojo, cuyo punto de partida es diferente de cero.

Velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Dada la función de la velocidad $v = 0.8 + 0.3t$, encontrar la gráfica.

Solución.

Para poder graficarla, se requiere elaborar una tabla en la que se pueda tabular la función:

t	0	1	2	3
v	0.8	1.1	1.4	1.7

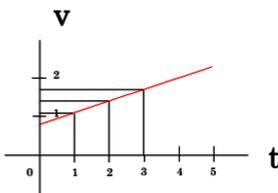


Fig. 2.16. Gráfica de la función de la velocidad.

Con los resultados en la tabla se obtiene la Fig. 2.16, en la que se puede apreciar en color rojo, con un valor inicial, cuando el tiempo $t = 0$, la velocidad, que es $v_0 = 0.8 \frac{m}{s}$.

Obsérvese que calcular el área bajo la recta es encontrar el desplazamiento; en este caso, sería calcular primero el área del rectángulo entre la velocidad inicial y el tiempo de 3s; es decir:

$$A_1 = 0.8 \times t$$

$$A_1 = 0.8 \times 3$$

$$A_1 = 2.4$$

Ahora, el área del triángulo $A_2 = \frac{b \times h}{2}$; donde la base es el tiempo de 3s, la altura es:

$$1.7 - 0.8 = 0.9$$

$$A_2 = \frac{3 \times (1.7 - 0.8)}{2}$$

$$A_2 = 1.35$$

Si a esto le agregamos el área del rectángulo, se tiene:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 2.4 + 1.35$$

$$A = 3.75$$

Que es el valor del desplazamiento.

Aceleración en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Dada la aceleración $a = 0.3 \frac{m}{s^2}$, graficar la aceleración en función del tiempo. Así, la gráfica sería como la que se tiene en la Fig. 2.17; como se ve, el valor de la gravedad permanece constante a lo largo del tiempo.

El área bajo la recta correspondería a la velocidad final:

$$v = (0.3 \frac{m}{s^2})(3s)$$

$$v = 0.9 \frac{m}{s}$$

Ejemplo.

Un objeto parte del reposo con aceleración de $2.5m/s^2$ durante 3s, luego acelera a razón de $-1.2m/s^2$ hasta que el objeto se detiene. Elaborar las gráficas de la

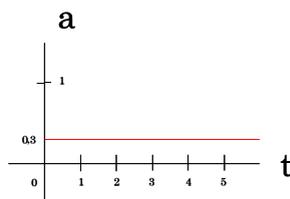


Fig. 2.17. Gráfica de la aceleración.

aceleración, la velocidad y el desplazamiento.

Solución.

El problema que se plantea implica dividir en dos partes: en la primera corresponde resolver con aceleración positiva y en la segunda parte con aceleración negativa o desaceleración.

1a. Según el problema, el objeto parte del reposo; por tanto, las condiciones iniciales son:

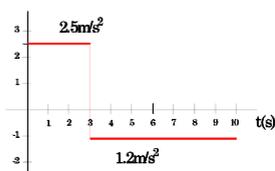


Fig. 2.18. Aceleración positiva y negativa.

$$t_0 = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

Así, las ecuaciones cinemáticas quedan:

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

$$v = at$$

$$a = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

En la Fig. 2.18 se puede ver la gráfica de la aceleración positiva de $2.5m/s^2$ y la aceleración negativa de $-1.2m/s^2$; además, por información del ejemplo, el evento va hasta cuando el objeto se detenga; es decir, la velocidad final llegue a cero, información que sirve para calcular el tiempo de ese evento.

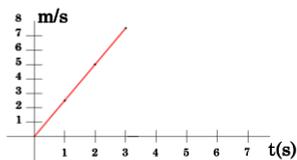


Fig. 2.19. Gráfica de la ecuación cinemática de la velocidad, primera parte.

2a. Gráfica de la velocidad cuando se tiene la aceleración positiva.

Como el objeto parte del reposo, entonces la ecuación que ya se ha planteado es: $v = at$; con base en esta ecuación se elabora una tabulación:

v	2.5	5.0	7.5
t	1	2	3

Como se puede ver en la Fig. 2.19, la velocidad parte del reposo (0, 0) hasta completar los 3s, cuando alcanza una velocidad máxima de 7.5m/s.

2b. Para la parte b de la velocidad, es decir cuando hay aceleración negativa, se debe tener en cuenta que ya se tiene una velocidad inicial, justamente la velocidad máxima de la parte inicial; esto es: 7.5m/s, con lo cual la ecuación cinemática es: $v = v_0 - g\Delta t$; con los valores que se tiene, la ecuación queda:

$$v = 7.5 \frac{m}{s} - 1.2 \frac{m}{s^2} \Delta t$$

La variación del tiempo, $\Delta t = t_i - t_0$, donde $t_0 = 3s$; esta nueva escala se puede observar tanto en la Fig. 2.20, en la segunda escala, o en la tabulación de los datos.

Por otra parte, según la información del ejemplo, la parte dos termina cuando la velocidad llega a cero: esto es: $0 = 7.5 - 1.2\Delta t$, de la cual se despeja el tiempo, y esto queda:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{7.5}{1.2} \\ t_i - t_0 &= 6.25s \\ t_i &= 6.25 + t_0 \end{aligned}$$

Como $t_0 = 3s$, entonces:

$$\begin{aligned} t_i &= 6.25 + 3 \\ t_i &= 9.25 \end{aligned}$$



Fig. 2.20. Parte a y b de la velocidad.

Así que este será el mayor valor que se tendrá en cuenta y, con base en la ecuación de la velocidad, se elabora la tabulación:

v	6.3	5.1	3.9	2.7	1.5	0.3	0
Δt	1	2	3	4	5	6	6.25

Como se puede ver en la Fig. 2.20, en la gráfica de la velocidad se han unido las dos partes y se puede apreciar que, cuando el tiempo es 6.25s, equivalente a 9.25s en la escala original, la velocidad llega a cero. Por otra parte, el área bajo la curva corresponde al desplazamiento: 34.68 m.

3a. Desplazamiento. Para la primera parte, el cuerpo parte del reposo; por tanto, la ecuación cinemática queda:

$$x = \frac{1}{2} at^2; \text{ con los datos}$$

entregados por la información del ejemplo, se tiene:

$$x = \frac{1}{2} (2.5 \frac{m}{s^2}) t^2; \text{ para graficarla,}$$

se elabora la Tabla de tabulación con estos datos:

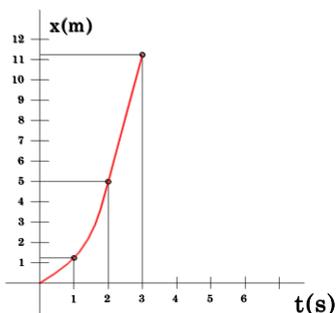


Fig. 2.21. Gráfica de la función del desplazamiento de la parte a.

x	1.25	5	11.25
t	1	2	3

En la Fig. 2.21 y en la tabulación, se puede ver que el objeto con esta aceleración alcanza un valor máximo de 11.25m y una velocidad de 7.5m/s.

3b. Debido a que hay unos valores iniciales tanto de desplazamiento como de velocidad inicial, entonces la ecuación cinemática del desplazamiento se puede escribir:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

Por otra parte, también se debe tener en cuenta el tiempo; como ya se señaló en la parte b de la velocidad, en el proceso se parte como si fuera un evento nuevo; además, el tiempo siempre seguirá midiéndose desde que inició el evento;

así que la ecuación será: $x = x_0 + v(t_i - t_0) - \frac{1}{2} a(t_i - t_0)^2$,

donde $t_0 = 3s$ y t_i es el conteo original a partir del tiempo tomado como inicial; esto es:

$$t_4 - t_0 = 4 - 3 = 1$$

$$t_5 - t_0 = 5 - 3 = 2$$

$$t_6 - t_0 = 6 - 3 = 3$$

$$t_7 - t_0 = 7 - 3 = 4$$

$$t_8 - t_0 = 8 - 3 = 5$$

El resultado de esta diferencia de tiempo se puede ver en la Tabla de tabulación o en la figura en la escala del tiempo. Al incluir los valores en la ecuación, se tiene:

$$x = 11.25m + (7.5m/s)\Delta t - 0.6(\Delta t)^2,$$

con lo cual se puede elaborar la tabulación:

x	18.15	23.85	28.35	31.65	33.75	34.68
Δt	1	2	3	4	5	6.25

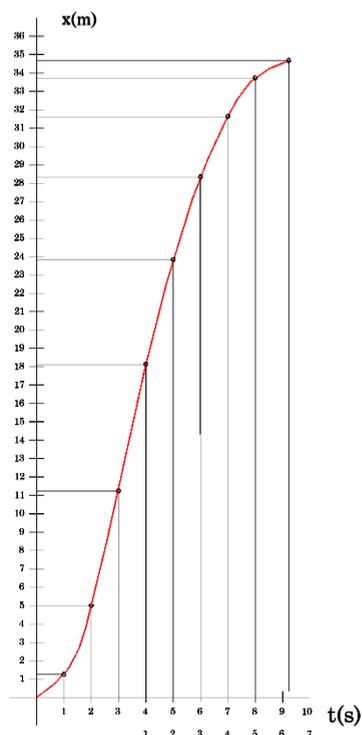


Fig. 2.22. Gráfica del desplazamiento de la primera y segunda parte del ejemplo.

En la Fig. 2.22 se puede ver la unión de las dos partes del desplazamiento, tanto para aceleración positiva como para aceleración negativa.

Aporte de la Edad Media a la Física

Hallar la distancia recorrida por un objeto que tiene velocidad variable uniforme fue un problema de mucha discusión en el siglo XIV; al final, lo resolvieron, alrededor del año 1350, unos alumnos del Merton College de Oxford, de modo que la ecuación durante mucho tiempo se denominó

Regla de Merton: $x = \frac{(v_0 + v)}{2} t$, mientras que otros científicos intentaban desarrollar mediante gráficas la unión de los dos métodos, lo que constituyó un gran avance en tiempos medievales.

Al conocer la ecuación cinemática de la velocidad $v = v_0 + at$ y al remplazarla en la Regla Merton, se tiene:

$$x = \frac{(v_0 + v_0 + at)t}{2}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Esta es la ecuación cinemática del desplazamiento.

2.9 Velocidad relativa. Cuando se viaja en un vehículo en el que no se siente un movimiento extraño más allá del movimiento en línea recta, se tiene la sensación de que las cosas se mueven; cuando hay un encuentro con otro vehículo en sentido contrario, da la sensación de alta velocidad y, sin embargo, si los dos vehículos viajan en la misma dirección, sentido e igual magnitud, se observa que los dos vehículos pareciera que no se movieran como efectivamente lo hacen el uno respecto al otro, tanto que los pasajeros pueden hasta saludarse de mano. Así que, en este sentido, la velocidad resultante entre los dos vehículos se ha restado, pero, en sentido contrario, las velocidades se suman; es decir, si los dos vehículos viajan a 60 km/h , la velocidad relativa será de 120 m/s ; así:

Cuando viajan en sentidos contrarios:

$$v_r = v_1 + v_2$$

$$v_r = (60 \frac{\text{Km}}{\text{h}}) + (60 \frac{\text{Km}}{\text{h}})$$

$$v_r 120 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Y cuando se viaja en el mismo sentido:

$$v_r = v_1 - v_2$$

$$v_r = (60 \frac{Km}{h}) - (60 \frac{Km}{h})$$

$$v_r = 0$$

Este efecto también se observa tanto en el vector desplazamiento como en el vector aceleración.

Ejemplos.

1. En una competencia de atletismo de larga distancia, las dos punteras, separadas por solo 20m, entran a la recta final, una recta de 200m. Su esfuerzo ha llegado al límite, de tal forma que lo único que pueden hacer es mantener la velocidad que llevan: la primera puede sostener una velocidad de 4m/s y la segunda logra mantener una velocidad de 4.5m/s. ¿Será que la segunda atleta le da alcance en lo que falta para la meta? Si es así, ¿qué tiempo emplea para darle alcance?, ¿cuánto habrá recorrido cada atleta y qué tiempo le habrá sacado la ganadora a la segunda?

Solución.

Descripción de datos:

Como se ve en la Fig. 2.23, las dos atletas entran a la recta final de 200m separadas por una distancia de 20m; sin duda, de mantener la marcha, en algún lugar la atleta que entra detrás le va a dar alcance; el asunto es saber si en $200m - 20m = 180m$ que quedan de pista, son suficientes para darle alcance y ganar la competencia.

Cada atleta tiene su ecuación cinemática, así:

$$x_1 = v_1 t$$

$$x_2 = v_2 t$$

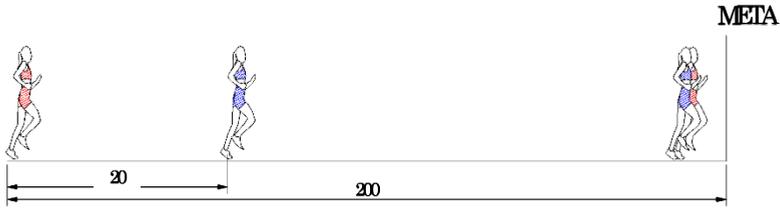


Fig. 2.23. Recta final, de 200 m; las atletas entran con diferencia de 20 metros, pero la segunda es un poco más veloz.

Por otra parte, a partir de la Fig. 2.23 se puede plantear que el recorrido de la segunda atleta, justamente cuando le da alcance a la primera atleta, será:

$$x_2 = d + x_1$$

Al combinar las tres ecuaciones, se obtiene el tiempo empleado para darle alcance:

$$\begin{aligned} v_2 t &= d + v_1 t \\ (v_2 - v_1) t &= d \\ t &= \frac{d}{v_2 - v_1} \end{aligned}$$

Obsérvese que, en este caso, se tiene una diferencia de velocidades $v_2 - v_1$, lo cual da una velocidad relativa entre las dos atletas. Al remplazar los valores que entrega el ejercicio, se obtiene el tiempo:

$$\begin{aligned} t &= \frac{20m}{(4.5 - 4) \frac{m}{s}} : \\ t &= 40s \end{aligned}$$

Este es el tiempo que tarda la segunda atleta en darle alcance a la primera; ahora, falta saber si los 180m que quedaban de pista son suficientes para alcanzarla; para esto es necesario calcular lo que recorre la primera atleta en 40 segundos:

$$x_1 = (4.0 \frac{m}{s})(40s)$$

$$x_1 = 160 m$$

Así que, aún le faltan 20m para que se termine la pista y atravesar la meta; entonces, ¿cuánto tiempo le falta a la segunda atleta para cruzar la meta?

$$t_2 = \frac{20m}{4.5 \frac{m}{s}}$$

$$t_2 = 4.44s$$

Ahora bien, el tiempo que necesita la primera atleta para cruzar la meta, que está a 20m, es:

$$t_1 = \frac{20 m}{4 \frac{m}{s}}$$

$$t_1 = 5s$$

O sea, a la segunda atleta le tomó una diferencia de tiempo:

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

$$\Delta t = (5 - 4.44)s$$

$$\Delta t = 0.56s$$

Esto quiere decir que las dos atletas pasaron la meta muy cerca la una de la otra, con solo 1s de diferencia, pero ganó la que entró en segundo lugar a la pista final, o sea la segunda 2.

2. Estos son dos motociclistas, sobre una pista rectilínea, separados por una distancia de $100m$ uno detrás de otro, con máquinas de diferente potencia, como se puede ver en la Fig. 2.24. ¿Qué tiempo tarda el joven (motociclista 2) en darle alcance a la jovencita (motociclista 1)? ¿Qué distancias recorren? ¿Y qué velocidad adquieren en el momento del sobrepaso, si parten del reposo y las máquinas pueden acelerar a razón de $0,8m/s^2$ y $1,2m/s^2$?

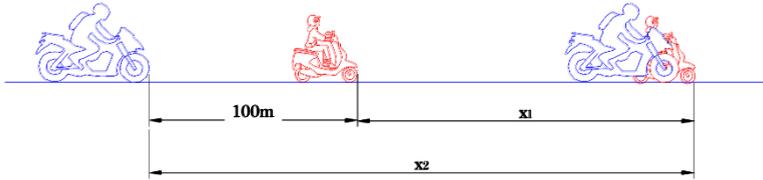


Fig. 2.24. Disposición de los motociclistas al iniciar y finalizar, justamente cuando le da alcance.

Solución.

Análisis de los datos:

El desplazamiento de la jovencita 1 será x_1 y al desplazamiento del joven 2 se le denominará x_2 , y así, como ambos parten del reposo: $x_0 = v_0 = 0$, se tiene:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Además, a partir de la gráfica se puede deducir que $x_2 = d + x_1$, donde d es la distancia que separa a los dos motociclistas; así que, al combinar estas tres ecuaciones, se tiene:

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 = d + \frac{1}{2} a_1 t^2$$

El tiempo que transcurre hasta que el motociclista 2 le dé alcance es el mismo en ambos; por tanto, al factorizar el $\frac{1}{2}$, queda:

$$a_2 t^2 = 2d + a_1 t^2$$

$$(a_2 - a_1)t^2 = 2d$$

$$t^2 = \frac{2d}{a_2 - a_1}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 100m}{(1.2 - 0.8) \frac{m}{s^2}}}$$

$$t = 22.36s$$

Este es el tiempo que se necesita para darle alcance a la jovencita, pero obsérvese que hay una expresión donde las aceleraciones se están restando $a_2 - a_1$: esta es la aceleración relativa entre los dos.

Con el tiempo calculado, se pueden encontrar los recorridos de cada motociclista. Para 1, se tiene:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (0.8 \frac{m}{s^2}) (22.36s)^2$$

$$x_1 = 200m$$

Mientras que el motociclista 2 debe recorrer, de acuerdo a la ecuación de la figura:

$$x_2 = d + x_1$$

$$x_2 = 100m + 200m$$

$$x_2 = 300m$$

Es decir, los $100m$ más que separaban a los motociclistas.

También podemos calcular la velocidad de cada uno, así:

Velocidad de la jovencita:

$$v_1 = a_1 t$$

$$v_1 = (0.8 \frac{m}{s^2})(22.36s)$$

$$v_1 = 17.89 \frac{m}{s} = 64.4 \frac{Km}{h}$$

Mientras que el segundo motociclista adquiere una velocidad de:

$$v_2 = (1.2 \frac{m}{s^2})(22.36s)$$

$$v_2 = 26.83 \frac{m}{s} = 96.59 \frac{Km}{h}$$

3. Dos vehículos, una tracto-mula y un automóvil, de $22m$ y $3m$ de largo respectivamente, viajan sobre una carretera rectilínea con velocidades de $40Km/h$ y $65Km/h$. ¿Qué tiempo emplea el automóvil para poder rebasar por completo a la tracto-mula, si los dos vehículos mantienen la velocidad constante?

Solución.

Análisis de los datos:

En la Fig. 2.25, se puede observar el instante en que el vehículo pequeño inicia el sobrepaso y también cuando ha terminado el sobrepaso.



Fig.2.25. Disposición de los vehículos antes y después del sobrepaso.

Así, las ecuaciones cinemáticas, dado a que tienen velocidades constantes, son:

$$x_1 = v_1 t$$

$$x_2 = v_2 t$$

Por otra parte, a partir de la Fig. 2.25 se puede observar que el vehículo pequeño recorre x_2 , que se puede expresar como:

$$x_2 = d_1 + x_1 + d_2$$

Al combinar las tres ecuaciones, se tiene:

$$v_2 t = d_1 + v_1 t + d_2$$

De donde se puede calcular el tiempo:

$$t = \frac{d_1 + d_2}{v_2 - v_1}$$

$$t = \frac{(22 + 3)m}{(65 - 40) \frac{Km}{h}}$$

$$t = \frac{25m}{6.94 \frac{m}{s}}$$

$$t = 3.6s$$

El recorrido que hace el vehículo grande es:

$$x_1 = v_1 t$$

$$x_1 = (40 \frac{Km}{h})(3.6s)$$

$$x = (11.11 \frac{m}{s})(3.6s)$$

$$x_1 = 40m$$

El recorrido que realiza el vehículo pequeño es:

$$x_2 = v_2 t$$

$$x_2 = (65 \frac{m}{s})(3.6s)$$

$$x_2 = (18.06 \frac{m}{s})(3.6s)$$

$$x_2 = 65.02m$$

4. Con base en el ejercicio anterior, el vehículo pequeño ahora tiene aceleración de $0.4m/s^2$ al iniciar el sobrepaso; las preguntas son las mismas que las del problema anterior.

Solución.

Análisis de datos:

Entonces las ecuaciones cinemáticas son: para el vehículo grande, con MRU, y para el vehículo pequeño, con MRUA y, además, con velocidad inicial. Esto es:

$$x_1 = v_1 t$$

$$x_2 = v_{02} t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

De igual forma, de acuerdo a la figura, se tiene:

$$x_2 = d_1 + d_2 + x_1$$

Al combinar estas ecuaciones, se tiene:

$$v_{02} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 = d_1 + d_2 + v_1 t$$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + (v_{02} - v_1) t - d = 0$$

Donde $d = d_1 + d_2$ y $v_r = v_2 - v_1$; así, se tiene:

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + v_r t - d = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado, cuya solución general es:

$$t_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al efectuar los remplazos pertinentes, se tiene:

$$t_i = \frac{-v_r \pm \sqrt{v_r^2 + 4\left(\frac{a_2}{2}\right)(d)}}{a_2}$$

$$t_i = \frac{-6.94 \pm \sqrt{6.94^2 + 4(0.2)(25)}}{0.4}$$

$$t_i = \frac{-6.94 \pm 8.26}{0.4}$$

$$t_1 = 3.29s$$

$$t_2 = -38s$$

De los dos resultados, ya se sabe que se debe tomar el valor positivo, pues un valor de tiempo negativo no tiene sentido; por tanto, el vehículo pequeño tarda 3.29s en sobrepasar, tiempo que resulta un poco menor al que se obtuvo cuando lo hacía con velocidad constante.

5. Consideremos dos vehículos con velocidad constante de 50 y 65Km/h sobre una carretera rectilínea, separados 1Km, y que, además, viajan en sentido contrario. ¿Cuánto tiempo tardan para cruzarse? ¿Con qué velocidad lo hacen y cuánto habrá recorrido cada vehículo?

Solución.

Análisis de los datos:

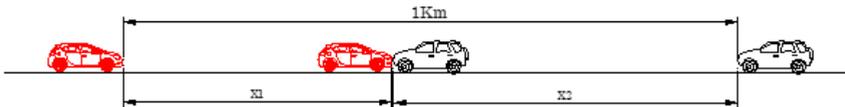


Fig. 2.26. Disposición de los vehículos.

Como se puede ver en la Fig. 2.26, los vehículos se encuentran: el de la izquierda será el vehículo 1 y el de la derecha el vehículo 2, de tal forma que las ecuaciones cinemáticas son:

$$x_1 = v_1 t$$

$$x_2 = v_2 t$$

A partir de la gráfica se tiene que la suma de los dos recorridos es: $x_1 + x_2 = 1Km$

Así, como ya se ha realizado, combinamos las tres ecuaciones y se tiene:

$$v_1 t + v_2 t = 1Km$$

$$t(v_1 + v_2) = 1000$$

$$t = \frac{1Km}{v_1 + v_2}$$

Como se puede ver en este caso, las velocidades se están sumando, así que la velocidad relativa será mayor que la que llevan los vehículos.

$$t = \frac{1Km}{(50 + 65) \frac{Km}{h}}$$

$$t = \frac{1Km}{115 \frac{Km}{h}}$$

$$t = \frac{1000m}{31.94 \frac{m}{s}}$$

$$t = 31.3s$$

En efecto, la velocidad relativa es de 115km/h, lo que se podría entender también como la velocidad con la que se acercan los dos vehículos, razón por la cual el tiempo para encontrarse es de solo 31.3s.

Para el Vehículo 1, el recorrido que realiza es:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= v_1 t \\
 x_1 &= \left(50 \frac{\text{Km}}{\text{h}}\right)(31.3\text{s}) \\
 x_1 &= \left(13.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(31.3\text{s}) \\
 x_1 &= 434.76\text{m}
 \end{aligned}$$

Par el vehículo 2:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= v_2 t \\
 x_2 &= \left(65 \frac{\text{Km}}{\text{h}}\right)(31.3\text{s}) \\
 x_2 &= \left(18.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(31.3\text{s}) \\
 x_2 &= 565.14\text{m}
 \end{aligned}$$

La suma de los dos recorridos da como resultado un kilómetro: $434.76 + 565.14 = 1000$

6. Dos vehículos viajan por carreteras rectilíneas que convergen en un punto; entre sí, las carreteras forman un ángulo de 35° ; si los vehículos viajan a 30 y 40Km/h respectivamente, ¿cuál es la velocidad de acercamiento y a qué distancia deben estar para que se encuentren justamente en la intercepción después de 20s ?

Solución.

Análisis de los datos: como se puede ver en la Fig. 2.27, los dos vehículos se acercan a la intersección, lo que implica que el vehículo B se acerca al vehículo A , o también se puede decir que el vehículo A se acerca al vehículo B ; todo depende de dónde se mire; en general los dos vehículos se acercan.

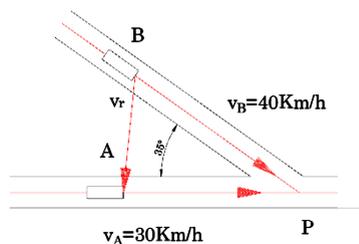


Fig.2.27 Disposición de los vehículos en las carreteras que forman un ángulo de 35°

La intersección se establece en el punto P, de modo que el triángulo formado por los vectores velocidad ABP con el ángulo de 35° en el punto P permite calcular la velocidad relativa de acercamiento v_r , con utilización del teorema del coseno:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 35}$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$v_r = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2(30)(40)\cos 35}$$

$$v_r = 23.11 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

$$v_r = 6.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ahora bien, para encontrarse en el punto de intersección, el vehículo A debe recorrer:

$$x_A = v_A t$$

$$x_a = (8.33 \frac{\text{m}}{\text{s}})(20\text{s})$$

$$x_A = 166.67\text{m}$$

Y el vehículo B:

$$x_B = v_B t$$

$$x_B = (11.11 \frac{\text{m}}{\text{s}})(20\text{s})$$

$$x_B = 222.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A partir de este ejercicio, se pueden revisar los siguientes casos:

6.1 Si el ángulo $\alpha = 0^\circ$, entonces el teorema del coseno queda:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 0}$$

Como $\cos 0 = 1$, entonces:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B}$$

$$v_r = \sqrt{(v_A - v_B)^2}$$

$$v_r = v_A - v_B$$

Este caso corresponde al primer ejercicio, donde las velocidades se restan para obtener la velocidad resultante.

6.2 Si el ángulo $\alpha = 180^\circ$, entonces el teorema del coseno queda:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \text{Cos}180}$$

Como $\text{Cos}180 = -1$, entonces:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B}$$

$$v_r = \sqrt{(v_A + v_B)^2}$$

$$v_r = v_A + v_B$$

Este caso corresponde al ejercicio 5, donde las velocidades se suman para obtener la velocidad resultante.

6.3 Si el ángulo $\alpha = 90^\circ$, entonces el teorema del coseno queda:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \text{Cos} 90}$$

Como $\text{Cos} 90 = 0$, entonces:

$$v_r = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$

Esto corresponde al teorema de Pitágoras, donde los vectores velocidad forman un ángulo recto; por tanto, la velocidad resultante es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

2.10 Caída libre de objetos

Este tema tiene una amplia historia; por ahora solo es preciso remontarse a los sabios griegos, en particular a Aristóteles (340 a. C.), filósofo que planteaba que los cuerpos más pesados caen primero que los livianos al desarrollar conjeturas de especulación por considerar que los cuerpos terrestres están compuestos por cuatro elementos, cada uno en su lugar natural, uno encima de otro; estos eran, en su orden: tierra, agua, aire y fuego. Cuando este orden se perturba, cada elemento vuelve a su lugar natural que, a su vez, depende de las proporciones que contiene el objeto. De esta forma, la conjetura no es absurda; por ejemplo, las llamas se levantan en el aire, las burbujas de aire se levantan en el agua, y las piedras, constituidas de tierra, caen en el aire y en el agua. Aristóteles también creía que, tras un tiempo de caída, los cuerpos adquieren una velocidad constante, que es *proporcional al peso*. Como se puede ver, cuando los objetos caen en el agua, una piedra grande adquiere una velocidad constante mayor que una pequeña; de modo precipitado, Aristóteles extendió la afirmación a la caída de los cuerpos en el aire.

Juan Filipón (500 d. C.) señaló: “Si dejas caer desde una misma altura dos pesos, uno de los cuales es muchas veces más pesado que el otro, verás que la razón de los tiempos requeridos para el movimiento no depende de la razón de los

pesos y que, en cambio, la diferencia entre los tiempos es muy pequeña”. [Benson p.87]



Fig. 2.28. Catedral y Torre inclinada, en Pisa (Italia). Fuente: el autor (2008).

En 1586, el matemático holandés Simón Steven dejó caer desde lo alto dos bolas de plomo, una de ellas

diez veces más pesada que la otra, y notó que los impactos sobre una tabla en el suelo no se distinguían uno del otro; también, se dice que en el mismo año Galileo Galilei dejó caer de lo alto de la Torre de Pisa (Fig. 2.28), dos bolas de hierro de diferente peso; si así fue, no pasa de ser una repetición del experimento de Steven, pues el pensamiento de Galileo sobre la caída de los cuerpos no difería mucho de Aristóteles, y no existe constancia histórica de que esto hubiera ocurrido. Sin



Fig. 2.29. Torre Asinelli, en Bolonia, de construcción medieval, de 97 metros de alto. Fuente: Cabezas (2017).

embargo, el astrónomo y jesuita italiano Giovanni Battista Riccioli (1598-1671) sí realizó el experimento en 1644, en la Torre Asinelli de Bolonia (Fig. 2.29), resultados que se describieron en el *Almagestum Novum* (1651). En principio, Riccioli lo hizo para contradecir y demostrar que Galileo había mentado, pero tras efectuar el experimento en serio, le dio la razón; así que la primera vez que se describe el experimento donde se pudo calcular la aceleración gravitacional fue en dicha torre de 97 m de altura, para encontrar un valor de 9.6m/s^2 , un valor muy bueno para entonces.

El verdadero mérito de Galileo fue llevar este fenómeno al laboratorio y observar con lentitud, al utilizar un plano inclinado; allí se dio cuenta de que, en intervalos de tiempos iguales, las distancias recorridas eran proporcionales con el cuadrado de la distancia, y la velocidad aumenta de forma proporcional; casi dos décadas le llevó para definir que la

aceleración es: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, en vez de: $a = \frac{\Delta v}{\Delta x}$; más tarde, Robert

Boyle, con el invento de la bomba para generar vacío, demostró que una moneda y una pluma en el vacío caen al mismo tiempo; en 1971, el astronauta David Scott repitió el experimento en la superficie lunar; en esta ocasión, debido a la televisión internacional, millones y millones de televidentes observaron el experimento, cuando dejó caer al mismo tiempo un martillo y una pluma.²

A Galileo lo acusaron de herejía, con posibilidad de condena a pena de muerte; sin embargo, por influencias ante la Santa Sede, se confiscaron y quemaron todos sus estudios sobre el movimiento, la astronomía, entre otros, y lo condenaron a casa por cárcel; en su juicio, Galileo declaraba: “Sin embargo, sigue girando”, para referirse al movimiento de la tierra alrededor del sol.

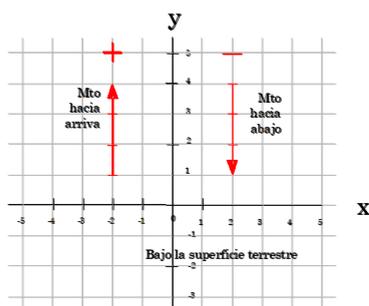


Fig. 2.30. Sistem de referencia.

Tabla 2.5. Valora de la velocidad a medida que el tiempo pasa y el cuerpo cae.

t	g	t	v
1s	-9.81 m/s ²	1s	-9.81m/s
2s	-9.81 m/s ²	2s	-19.62 m/s
3s	-9.81 m/s ²	3s	-29.43 m/s
4s	-9.81 m/s ²	4s	-39.24 m/s
5s	-9.81 m/s ²	5s	-49.05 m/s

Hay muchas anécdotas sobre este sabio italiano, que estableció las leyes de la cinemática y, sobre todo, el tratamiento del movimiento de los cuerpos cuando caen libremente.

Por otra parte, en cualquier lugar del planeta, cuando los cuerpos caen, se dirigen hacia el centro de la tierra, de tal modo que la superficie de la tierra forma parte del sistema de referencia; tal como se puede ver en la Fig. 2.30, cuando los

² Experimento de David Scott. <https://www.youtube.com/watch?v=BNEI9wop1KM>

vectores desplazamiento y velocidad apunten hacia la superficie, serán negativos; en sentido contrario, serán positivos; la aceleración gravitacional o gravedad terrestre siempre apuntará hacia abajo y, por tanto, se la considera negativa, cuyo valor aceptado por la oficina de pesas y medidas es de -9.81m/s^2 , lo cual quiere decir que, cuando cae libremente, un cuerpo aumentará su velocidad en dicha cantidad, de acuerdo a $v = at$; al darse que la velocidad inicial es “0”, por partir del reposo, como se puede ver en la Tabla 2.5, el signo negativo se debe al sentido del vector “dirigido hacia abajo”; esto también muestra que la velocidad varía de manera uniforme, es decir la aceleración es constante, *“afirmación válida para alturas relativamente pequeñas, como valores de laboratorio que no pasan de 3m; allí la gravedad se puede considerar constante”*; para alturas mayores, se entiende que la aceleración gravitacional varía, como se va a estudiar luego.

Ahora bien, ya es hora de preguntarse: ¿cuáles son las ecuaciones cinemáticas del movimiento de caída libre de los cuerpos?

Para responder a esta pregunta, se parte de las ecuaciones cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado.

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.8)$$

$$v = v_0 + at \quad (2.7)$$

$$2ax = v^2 - v_0^2 \quad (2.9)$$

Como el eje en el que se va a medir es y , entonces las ecuaciones quedan:

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0,y} + gt$$

$$2gy = v_y^2 - v_{y0}^2$$

Se debe recordar que, siempre que se remplace el valor de la gravedad, es -9.81m/s^2 (negativo).

De esta forma, las ecuaciones quedan listas para resolver ejercicios de caída libre.

Ejemplos.

1. De lo alto de un edificio se deja caer un objeto que tarde 3.5s en llegar al piso. a) ¿Cuál es la altura del edificio?
b) ¿Con qué velocidad golpea el objeto el piso?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$t = 3.5\text{s}$$

$$g = -9.81\text{m/s}^2$$

$$v = ?$$

Dejar caer un objeto significa partir del reposo; por tanto, $v_0 = 0$; también, se considera que la posición inicial $y_0 = 0$; si esta posición no se tiene en cuenta, las ecuaciones cinemáticas quedan:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = gt$$

$$2gy = v_y^2$$

1.1 Ahora bien, la primera pregunta es calcular la altura del edificio, lo que significa que la ecuación a utilizar es la 2.8, modificada; esto es:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = -\frac{1}{2}(9.81 \frac{m}{s^2})(3.5s)^2$$

$$y = -60.09m$$

El valor negativo significa que el desplazamiento del objeto lo hizo de arriba abajo; ese recorrido corresponde a la altura del edificio.

1.2 Para calcular la velocidad, la ecuación más apropiada será la de la velocidad:

$$v_y = gt$$

$$v_y = (-9.81 \frac{m}{s^2})(3.5s)$$

$$v_y = -34.34 \frac{m}{s}$$

Una vez más el valor es negativo, pues significa que el vector velocidad se dirige hacia abajo.

2. Desde un edificio de 85 metros de altura se deja caer un objeto. ¿Qué tiempo tarda en llegar al piso? ¿Con que velocidad llega al piso? ¿Qué velocidad lleva al pasar por la mitad de la altura del edificio?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$h = 85\text{m}$$

$$t = ?$$

$$v = ?; \quad v_{h/2} = ?$$

2.1 Para calcular el tiempo, si se conoce la altura, significa que la más indicada es la ecuación del desplazamiento:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(-85\text{m})}{-9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$t = 4.16\text{s}$$

Recuerde que el valor de la altura del edificio es negativo pues se está recorriendo de arriba hacia abajo.

2.2 Para calcular la velocidad, resulta muy sencillo si se conoce el tiempo de caída; entonces:

$$v_y = gt$$

$$v_y = (-9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(4.16\text{s})$$

$$v_y = -40.81\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Una vez más negativo por estar el vector velocidad dirigido hacia abajo.

2.3 Para calcular la velocidad en la mitad del recorrido, sería $85\text{m}/2 = 42.5\text{m}$; no hay más ecuaciones que tengan velocidad y desplazamiento que la (2.9), modificada; esto es:

$$2gy = v_y^2$$

$$v_y = \sqrt{2gy}$$

$$v_y = \sqrt{2(-9.81 \frac{m}{s^2})(-42.5m)}$$

$$v_y = 28.88 \frac{m}{s}$$

Por estar cayendo, el valor del desplazamiento es negativo; de lo contrario, la respuesta se indeterminaría, al tener un valor negativo dentro de la raíz.

3. De lo alto de un edificio se deja caer un objeto; un reloj electrónico mide el tiempo que necesita el objeto para atravesar una ventana de 1.8m de alto, localizada en el tercer piso: tarda 0.05s. ¿Cuál es la altura del edificio? Nota. Cada piso se considera de 2.5m.

Solución.

Análisis de datos:

Si cada piso tiene 2,5m, entonces el borde inferior de la ventana está a $3 \times 2.5 = 7.5m$; por tanto, la altura del edificio será:

$$H = (h + 1.8 + 7.5)m$$

$$H = h + 9.3m$$

Aquí h será la altura del edificio desde el borde superior de la ventana hasta la cornisa. La forma de calcular h no es tan explícita; sin embargo, el objeto, cuando cae, al pasar por el borde superior de la ventana lleva una velocidad, y al pasar por el borde inferior, que está a 1.8m lleva otra velocidad; por tanto, se denominará v_0 a la velocidad cuando pasa por el borde superior y v a la velocidad final, al pasar por el borde inferior. Como se conoce que el tiempo empleado en atravesar

el vano de la ventana es $0.05s$, entonces: $v = v_0 + gt$; a partir de aquí podemos decir:

$$v - v_0 = gt$$

$$v - v_0 = (-9.81 \frac{m}{s^2})(0.05s)$$

$$v - v_0 = -0.49 \frac{m}{s}$$

Por otra parte, se conoce la altura de la ventana, que es el recorrido que hace el objeto en los $0.05s$; por tanto, la ecuación independiente del tiempo permite encontrar: $2gh = v^2 - v_0^2$; a partir de aquí podemos decir:

$$v^2 - v_0^2 = 2(-9.81 \frac{m}{s^2})(-1.8m)$$

$$v^2 - v_0^2 = 35.32 \frac{m^2}{s^2}$$

Al combinar las ecuaciones: $v - v_0 = -0.49$ y $v^2 - v_0^2 = 35.32$, se puede deducir la velocidad inicial:

$$v^2 - (v + 0.49)^2 = 35.32$$

$$v^2 - v^2 - 0.98v - 0.24 = 35.32$$

$$-0.98v = 35.32 + 0.24$$

$$v = \frac{35.56}{-0.98}$$

$$v = -36.28 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad con que el objeto pasa por el borde superior de la ventana, y es negativo porque cae; ahora, la velocidad final se convierte en velocidad cuando el objeto cae desde la terraza y permite calcular la altura del edificio; ahora, como el cuerpo se deja caer, parte del reposo o, lo que

es lo mismo, la velocidad inicial en la terraza del edificio es nula. Entonces, de la ecuación independiente del tiempo, se tiene: $2g y = v^2$.

Por tanto, la altura del edificio es:

$$y = h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{(36.28m)^2}{2(-9.81\frac{m}{s^2})}$$

$$h = -67.09m$$

Es negativa, porque la medida es de arriba hacia abajo. Ahora bien, como la altura del edificio es H , entonces:

$$H = h + 9.3m$$

$$H = (67.09m) + (9.3m)$$

$$H = 76.39m$$

Esta es la altura del edificio, sobre la que se preguntaba.

4. Ahora consideremos que se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de $20m/s$, como se puede ver en la Fig. 2.31. Calcular la altura a la que llega el objeto y cuánto tiempo permanece en el aire.

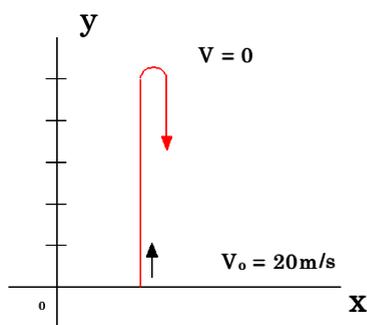


Fig. 2.31. Esquema del movimiento de un objeto cuando se lanza hacia arriba y luego cae.

Solución.

Análisis de los datos:

Cuando un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial llegará hasta cierta altura y luego empezará a caer, pero lo más importante es que, cuando hubiera llegado a la parte más alta, la altura máxima, en dicho punto, la velocidad se llega a cero; es decir, el cuerpo se detiene, para empezar un movimiento de caída libre.

Ahora bien, como se pide calcular la altura máxima conociendo únicamente la velocidad inicial, entonces de las tres ecuaciones de cinemática se elige la ecuación independiente del tiempo:

$$2gy = v^2 - v_0^2$$

Como se dijo, en la parte más alta la velocidad llega a cero, entonces:

$$2gy_M = -v_0^2$$

$$y_M = \frac{-v_0^2}{2g}$$

$$y_M = \frac{-(20 \frac{m}{s})^2}{2(-9.81 \frac{m}{s^2})}$$

$$y_M = 20.39m$$

Esta es la altura máxima a la que el objeto puede llegar; es positiva, porque se mide de abajo hacia arriba.

Para calcular el tiempo que permanece en el aire, se utilizará la segunda ecuación: $v = v_0 + gt$; así que el tiempo de subida será justamente cuando la velocidad final se anula; entonces:

$$0 = v_0 + gt_s$$

$$t_s = \frac{-v_0}{g}$$

$$t_s = \frac{-20 \frac{m}{s}}{-9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$t_s = 2.04s$$

Este es el tiempo que el objeto emplea para subir hasta la altura máxima; para calcular el tiempo que permanece en el aire o tiempo de vuelo, es necesario calcular el tiempo de bajada; como después de alcanzar la altura máxima empieza una caída libre a partir del reposo: $v_0 = 0$, entonces, la ecuación más apropiada para calcular el tiempo de bajada o caída, conociendo la altura máxima, será a partir de la ecuación: $y = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$, de la que se puede despejar el tiempo, así:

$$y_M = \frac{1}{2}gt_c^2$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2y_M}{g}}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2(-20.39m)}{-9.81 \frac{m}{s^2}}}$$

$$t_c = 2.04s$$

Como se puede comprobar, el tiempo de caída es el mismo tiempo que el objeto emplea en llegar a la altura máxima.

5. Desde lo alto de un edificio de $60m$ de altura, se deja caer un objeto. ¿Qué tiempo emplea para pasar por el frente de una ventana de $1,5 m$ de alto, que se encuentra a $10m$ del piso?

Solución.

Análisis de los datos:

Como se puede ver en la Fig. 2.32, de forma ampliada, el alto de la ventana de $1.5m$, con el borde inferior a $10m$ del suelo y, además, la altura h del edificio se toma desde el borde superior de la ventana a la cornisa de la edificación. Como el objeto se deja caer, entonces la velocidad inicial es nula: $v_0 = 0$. Así que, para encontrar la velocidad final, se puede utilizar la ecuación independiente del tiempo: $2gh = v^2 - v_0^2$; esto es:

$$v = \pm\sqrt{2gh},$$

donde $h = 60m - 1.5 - 10m = 48.5m$; al remplazar, se tiene:

$$v = \pm\sqrt{2(-9.81 \frac{m}{s^2})(-48.5m)}$$

$$v = -30.85 \frac{m}{s}$$

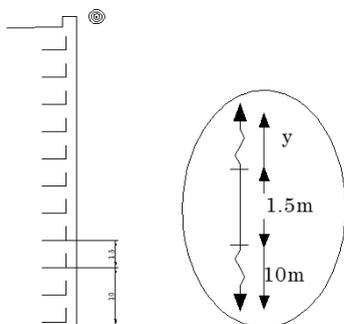


Fig. 2.32. Esquema del objeto cayendo por el frente de una ventana de una edificación.

Esta es la velocidad en el borde superior de la ventana; el signo negativo del desplazamiento de $48.5m$ se debe a que el objeto se desplaza de arriba hacia abajo, de igual manera la velocidad; con esta velocidad ya se puede calcular la velocidad en el borde inferior

de la ventana, a partir de la ecuación (3) $2gy = v^2 - v_0^2$; entonces:

$$v = \pm \sqrt{2gy + v_0^2}$$

$$v = \pm \sqrt{2(-9.81 \frac{m}{s^2})(-1.5m) + (-30.85 \frac{m}{s})^2}$$

$$v = -31.32 \frac{m}{s}$$

Conocidas las dos velocidades, ya se puede calcular el tiempo τ o tiempo que se necesita para atravesar el alto de la ventana; esto es: a partir de la segunda ecuación cinemática $v = v_0 + gt$, como ya se conocen las dos velocidades, se puede calcular el tiempo τ , por ser pequeño:

$$\tau = \frac{v - v_0}{g}$$

$$\tau = \frac{(-31.32 \frac{m}{s}) - (-30.85 \frac{m}{s})}{-9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$\tau = \frac{-0.47 \frac{m}{s}}{-9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$\tau = 0.05s$$

Este es el tiempo que emplea el objeto en pasar por el frente de la ventana de $1.5m$ de alto, cuando cae desde lo alto del edificio.

6. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto, $0.75s$ más tarde se lanza un objeto con una velocidad de $-8.5m/s$. Calcular a qué altura del edificio el segundo objeto le da alcance al primero.

Solución.

Como se trata de desplazamientos verticales, las ecuaciones cinemáticas para cada objeto son:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$y_2 = -v_{02} t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$$

Como se puede ver, el segundo objeto tiene velocidad inicial; además, los tiempos que transcurren son t_1 y t_2 , de tal forma que: $t_2 = t_1 - \tau$; así, las ecuaciones quedan:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$y_2 = -v_{02} (t_1 - \tau) + \frac{1}{2} g (t_1 - \tau)^2$$

Como en algún lugar los objetos van a estar a la misma altura, entonces lo que queda es igualar estas dos ecuaciones:

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = -v_{02} (t_1 - \tau) + \frac{1}{2} g (t_1 - \tau)^2$$

Al resolver el binomio, se tiene:

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = -v_{02} (t_1 - \tau) + \frac{1}{2} g (t_1^2 + \tau^2 - 2t_1 \tau)$$

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = v_{02} t_1 - v_{02} \tau + \frac{1}{2} g t_1^2 + \frac{1}{2} g \tau^2 - g t_1 \tau$$

$$v_{02} \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = (v_{02} - g \tau) t_1$$

$$t_1 = \frac{v_{02} \tau - \frac{1}{2} g \tau^2}{v_{02} - g \tau}$$

Cuando se remplazan los valores dados en el ejercicio, se tiene:

$$t_1 = \frac{v_{02}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2}{v_{02} - g\tau}$$

$$t_1 = \frac{(-8.5 \frac{m}{s})(0.75s) - \left(\frac{-9.81 \frac{m}{s^2}}{2}\right)(0.75s)^2}{(-8.5 \frac{m}{s}) - (-9.81 \frac{m}{s^2})(0.75s)}$$

$$t_1 = \frac{-3.62}{-1.14}$$

$$t_1 = 3.18s$$

Este es el tiempo del primer objeto cuando lo alcanza el segundo; con este valor, queda sumamente sencillo calcular el recorrido de los dos objetos (de arriba abajo).

Con la primera ecuación cinemática, a partir del reposo:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(-9.81 \frac{m}{s^2})(3.18s)^2$$

$$y_1 = -49.60m$$

El segundo objeto también debió haber recorrido igual distancia:

$$y_2 = v_{02}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

Como $t_2 = t_1 - \tau$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$y_2 = v_{02}(t_1 - \tau) + \frac{1}{2}(gt_1 - \tau)^2$$

Al remplazar los valores del ejercicio, se tiene:

$$y_2 = (-8.5 \frac{m}{s})(3.18s - 0.75s) + \frac{1}{2}(-9.81 \frac{m}{s^2})(3.18s - 0.75s)^2$$

$$y_2 = -49.60m$$

Como se presuponía, los desplazamientos de los objetos son iguales.

2.11 Movimiento curvilíneo o en el plano

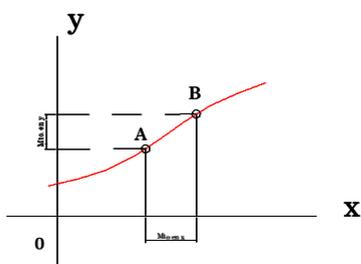


Fig. 2.33. El objeto que se mueve por la trayectoria de color rojo tiene proyecciones en x y en y .

Cuando un objeto se mueve bajo la referencia de dos ejes, se dice que el movimiento es en el plano, como lo que ocurría cuando el ratón se movía en el plano (x, y) o la cucaracha en el plano (y, z) .

Por ahora consideremos el plano (x, y) , así que el objeto se mueve bajo una trayectoria

cualquiera $f = y(x)$ y, como se puede ver en la Fig. 2.33, ese movimiento tiene proyecciones tanto en el eje x como en el eje y , movimientos proyectados que se realizan de forma independiente. Por esta razón, el eje x manifiesta un tipo de movimiento uniforme o acelerado y, de igual modo, ocurre en el eje y , con lo que se puede decir que hay dos observadores, uno en cada eje, cuyas mediciones son totalmente independientes. Este es el caso del nadador de la Fig. 2.34, que quiere atravesar el río; aquí se presentan dos eventos: la velocidad del agua del río es totalmente independiente de la velocidad del nadador que

quiere pasar del punto A al punto B ; sin embargo, la corriente del río arrastra al nadador y lo lleva hasta el punto B' , así que, en el eje x , se tiene el movimiento del agua del río, y en el eje y el movimiento del nadador; de los dos movimientos resulta el movimiento real del nadador, que lo lleva al punto B' , separado una distancia d del punto inicial B a donde quería llegar.

En este caso, tanto el movimiento del agua del río como el nadador pueden describirse por un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), así que la velocidad resultante será la suma vectorial de las velocidades del nadador y del agua del río; esto es:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_n + \vec{v}_R,$$

tratamiento que se debe efectuar como a cualquier vector; es decir:

Magnitud:

$$v_r = \sqrt{v_n^2 + v_R^2}$$

Dirección: $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{v_n}{v_R}$

Sentido: Depende de los valores que tomen las componentes en x y en y .

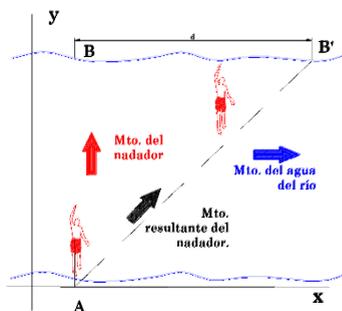


Fig. 2.34. Nadador arrastrado por la corriente de un río, cuando pretende atravesarlo.

En un ejemplo sencillo, supongamos que la velocidad de las aguas de un río es $4m/s$ y la del nadador que quiere atravesar el río es de $1.2m/s$. Calcular la velocidad resultante y la distancia d , si el río tiene un ancho de $3m$.

Solución.

Como la velocidad resultante se define por: $\vec{v}_r = \vec{v}_n + \vec{v}_R$, entonces no queda sino remplazar valores; se tiene el vector inicialmente: $\vec{v}_r = 1.2i + 4j$

$$\begin{aligned} \text{Magnitud del vector: } \vec{v}_r &= \sqrt{1.2^2 + 4^2} \\ v_r &= 4.18 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dirección: } \theta &= \text{Tan}^{-1} \frac{1.2}{4} \\ \theta &= 16^\circ 41' \end{aligned}$$

Sentido. Las dos componentes son positivas, entonces está en el primer cuadrante del sistema de referencia (x, y) .

$$\text{b) Como el ancho del río es de } 3m, \text{ entonces: } d = \frac{e}{\text{Sen}\theta}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} d &= \frac{3m}{\text{Sen}16^\circ 41'} \\ d &= 10.45m \end{aligned}$$

Esta es una distancia muy considerable, si se compara con el ancho del río, de solo $3m$ (la corriente del río arrastró al nadador).

Movimiento parabólico (lanzamiento de proyectiles)

El hombre y sus cercanos primates siempre han lanzado objetos, generalmente para defenderse de un posible agresor; este ha sido su medio de defensa más primigenio. Cuando los objetos se lanzan y forman un ángulo con la horizontal, describen una curva o, lo que es lo mismo, se mueven por una

trayectoria curva. Si se tomara la sombra, tanto en el eje x como en el eje y , se vería como esta sombra, en x avanza y en y , sube y baja, así que, con estos elementales indicios, ya podemos describir qué tipo de movimiento es el que se realiza en cada eje, tal como se puede ver en la Fig. 2.35.

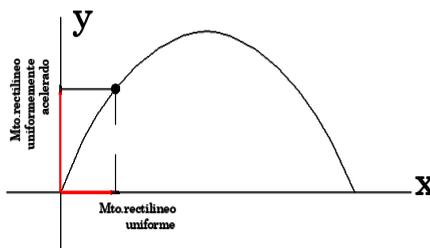


Fig. 2.35. Movimiento parabólico de un objeto cuando se lanza con un ángulo de elevación.

Consideremos las sombras del objeto en el eje x , y en el eje y . En el caso de la sombra en el eje x , la sombra se mueve con movimiento rectilíneo; además, no hay ninguna aceleración horizontal que llevara a que el movimiento fuera acelerado o desacelerado. Por tanto, es un movimiento rectilíneo uniforme, que responde a la ecuación:

$$x = v_x t ,$$

única ecuación cinemática para el MRU.

La sombra en el eje y tiene una característica especial: la sombra sube y luego baja; es decir, el movimiento estaría sujeto a la aceleración gravitacional; por tanto, las ecuaciones cinemáticas para este eje serían:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} + g t$$

$$2gy = v_y^2 - v_{y0}^2$$

Como se puede observar, son las mismas de la caída libre de objetos.

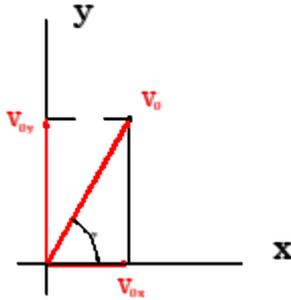


Fig. 2.36. Descomposición vectorial de la velocidad inicial.

Ahora bien, el vector velocidad inicial forma un ángulo con el eje x , de tal forma que, al descomponer el vector velocidad inicial, como se puede ver en la Fig. 2.36, se tiene que las proyecciones en cada eje son:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Al remplazar estas ecuaciones en las ecuaciones cinemáticas, tanto del eje “ x ” como del eje “ y ”, se tiene:

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (2.10)$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.11)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta + g t \quad (2.12)$$

$$2gy = v_y^2 - (v_0 \sin \theta)^2 \quad (2.13)$$

Con este grupo de ecuaciones, se puede calcular un gran número de ejercicios de este tipo; por ejemplo: tiempo de subida, tiempo de bajada, tiempo de vuelo, altura máxima, alcance máximo, velocidad en cualquier parte del recorrido y ecuación de la trayectoria.

b) Tiempo de subida (*Tiempo empleado en alcanzar la altura máxima*). De las 4 ecuaciones, hay una que es la más apropiada; en este caso, en el punto más alto, la velocidad proyectada en el eje y vale 0; es justamente cuando el objeto empieza a caer; por tanto, se elige la ecuación 3; esto es:

$$v_y = v_0 \text{Sen } \theta + gt$$

Cuando la velocidad en y es 0, entonces se obtiene el tiempo de subida t_s , así:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 \text{Sen } \theta + gt_s \\ t_s &= \frac{-v_0 \text{Sen } \theta}{g} \end{aligned} \quad (2.14)$$

a) Tiempo de bajada. En el movimiento de caída libre, en el ejercicio 4, se analizó este punto, donde quedó demostrado que el tiempo de subida y el tiempo de bajada o caída son iguales. Por tanto:

$$t_b = \frac{-v_0 \text{Sen } \theta}{g}$$

b) Tiempo de vuelo. Se refiere al tiempo que permanece el objeto en el aire, después de que lo lanzaron; será la suma del tiempo de subida y el tiempo de bajada. Esto es:

$$\begin{aligned} t_v &= t_s + t_b \\ t_v &= \frac{-v_0 \text{Sen } \theta}{g} - \frac{v_0 \text{Sen } \theta}{g} \\ t_v &= \frac{-2v_0 \text{Sen } \theta}{g} \end{aligned}$$

Todo lo que es tiempo es positivo, pero se debe recordar que el valor de la gravedad es negativo.

a) Altura máxima. Para que el objeto llegue a la altura máxima, al utilizar la ecuación de desplazamiento, se debe cumplir justamente el tiempo de subida:

$$y_M = h = v_0 \text{Sen} \theta \cdot t_s + \frac{1}{2} g t_s^2$$

Al remplazar el tiempo de subida, se tiene:

$$y_M = h = v_0 \text{Sen} \theta \cdot \left(\frac{-v_0 \text{Sen} \theta}{g} \right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{-v_0 \text{Sen} \theta}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{-v_0^2 \text{Sen}^2 \theta}{g} + \frac{v_0 \text{Sen}^2 \theta}{2g}$$

$$h = \frac{-v_0^2}{2g} \text{Sen}^2 \theta \quad (2.15)$$

De esta forma, está la ecuación lista para calcular la altura máxima.

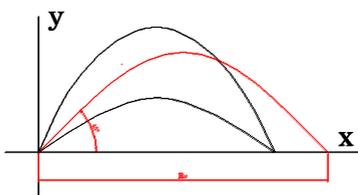


Fig. 2.37 Tres trayectorias en las que se puede ver que la trayectoria a 45° es la de mayor alcance.

a) Alcance. Es la máxima distancia que el objeto lanzado alcanza a recorrer en el eje x ; aquí también hay un punto clave: esta distancia se alcanza justamente cuando se hubiera cumplido el tiempo de vuelo; entonces, al combinar la ecuación cinemática del eje x con el

tiempo de vuelo, se tiene en:

$$x = v_0 \text{Cos} \theta \cdot t$$

Al remplazar el tiempo de vuelo, se obtiene el alcance, así:

$$x_M = R = v_0 \cos \theta \left(\frac{-2v_0 \sin \theta}{g} \right)$$

$$R = \frac{-2v_0^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{g}$$

Por la identidad trigonométrica donde $2\cos \theta \cdot \sin \theta = \sin 2\theta$, al remplazar, se tiene:

$$R = \frac{-v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (2.16)$$

Ahora bien, como se puede ver en la expresión matemática, se tiene un arco doble; en el caso de las funciones trigonométricas seno y coseno, el máximo valor que alcanzan es 1 y esto se da justamente cuando el ángulo es de 90° ; entonces, en este caso, el mayor valor de θ es 45° , para que $2\theta = 90$ y se tuviera el mayor valor de la función seno; esto es:



Fig. 2.38. Siluetas de salto perfecto de un atleta ideal.

$$R_M = \frac{-v_0^2(1)}{g}$$

Así que es interesante que cuando el lanzamiento se hace a 45° , se obtiene el mayor alcance; en la Fig. 2.37 se puede ver cómo al disponer un ángulo por encima de los 45° , se gana altura, pero se pierde desplazamiento y, de igual forma, si el lanzamiento se hace por debajo de los 45° , se pierde altura y se pierde alcance. Esto es lo que los atletas de salto largo saben y deben practicar hasta el cansancio para memorizar la



Fig. 2.39. Salto perfecto de un canguro.

posición, para que, de esta forma, sus músculos, en el momento del salto, lo efectuaran de modo apropiado (Fig. 2.38). En la naturaleza hay animales diseñados para desplazarse a saltos; su estructura ósea y muscular disponen el ángulo perfecto para que pudieran avanzar con mayor rapidez y de forma apropiada, como lo hacen los canguros; las crías de canguro no tienen que practicar, pues sus ancestros, hace millones de años, lo efectuaron por ellos, y hoy lo llevan en sus genes, por lo cual sus saltos son perfectos desde un comienzo (Fig. 2.39).

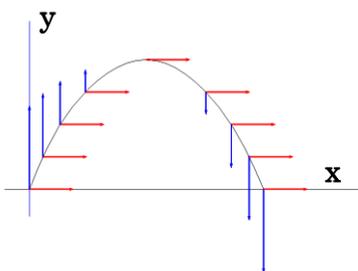


Fig. 2.40. Esquema de las componentes de las velocidades en los ejes (x,y) .

a) Velocidad. La velocidad del objeto en cualquier parte de la trayectoria siempre va a estar compuesta de dos componentes, tanto en el eje x como en el eje y , tal como se puede ver en la Fig. 2.40; en este caso, la velocidad proyectada en x es v_x (de color rojo). Como se ve, permanece constante en

cualquier parte por tratarse de un movimiento rectilíneo uniforme, mientras que, en el eje y , la velocidad v_y es uniformemente variable, por ser un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado; como se puede ver en la parte izquierda de la parábola, en la Fig. 2.40, la velocidad es positiva, y del lado derecho de la parábola es negativa; por

tanto, de acuerdo a las ecuaciones cinemáticas de las velocidades, se tiene que,

para el eje x :

$$v_x = v_0 \cos \theta .$$

Y para el eje y :

$$v_y = v_0 \sin \theta + gt$$

Como la velocidad resultante es la combinación de las dos velocidades, entonces:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y ,$$

cuya magnitud se expresa como:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta + gt)^2}$$

El ángulo disminuye a medida que el objeto va subiendo, hasta que, en la parte más alta, cuando se hubiera cumplido el tiempo de subida, la velocidad en y llega a 0, mientras que la velocidad en x se mantiene constante, como se puede ver en la siguiente demostración:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_s^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 \left(\frac{-v_0 \sin \theta}{g} \right)^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 \sin^2 \theta}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 (1 + \sin^2 \theta)}$$

Ahora bien, la identidad trigonométrica fundamental que se encuentra en el paréntesis es $-\text{Cos}^2\theta$, pero como el coseno es una función par, entonces:

$$v = \sqrt{v_0^2 \text{Cos}^2\theta}$$

$$v = v_0 \text{Cos}\theta$$

Que es lo que se debía esperar: en la parte más alta solo queda la velocidad horizontal, que se mantiene constante durante toda la trayectoria.

b) Función o ecuación de la trayectoria. Como el movimiento se realiza en el plano, entonces la función de la trayectoria se puede decir que, en general, es:

$$y = f(x).$$

Ahora bien, las ecuaciones cinemáticas del desplazamiento en ambos ejes son:

$$y = y_0 + v_0 \text{Sen}\theta \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_0 \text{Cos}\theta \cdot t$$

Si de la ecuación cinemática del desplazamiento en x se despeja el tiempo y se reemplaza en la ecuación del desplazamiento en y , se tiene:

$$t = \frac{x}{v_0 \text{Cos}\theta}$$

Al reemplazarlo en y , se tiene:

$$y = y_0 + v_0 \text{Sen}\theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \text{Cos}\theta} \right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \text{Cos}\theta} \right)^2$$

$$y = y_0 + \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2\theta} x^2$$

Por definición $\text{Tan}\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$, entonces, al remplazarlo, se tiene:

$$y = y_0 + \text{Tan}\theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2\theta} x^2 \quad (2.17)$$

Como se puede ver, esta es la ecuación de la trayectoria que corresponde a una parábola de la forma $y = Ax + Bx^2$ y de allí su nombre de movimiento parabólico, puesto que, al poner los valores y en especial el valor de la gravedad $-9.81m/s^2$, la parábola toma una forma invertida, tal como se mueven los objetos cuando se los lanza con un ángulo de elevación. Galileo fue el primero en demostrar que los objetos, cuando se los lanza en ausencia de la resistencia del aire, describen una parábola. Ahora bien, si se toma en cuenta el rozamiento, la curva deja de ser una gráfica simétrica y se convierte en una curva denominada balística, lo que lleva a que el alcance fuese menor que el teórico estudiado, tal como se puede ver en la Fig. 2.41.

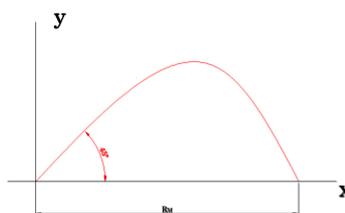


Fig. 2.41. Curva balística cuando se toma en cuenta el rozamiento con el aire.

Ejemplos.

1. Se lanza un objeto con un ángulo de elevación de 40° y una velocidad inicial de 12m/s . Calcular: a) tiempo de subida, b) tiempo de vuelo, c) altura máxima, d) alcance, e) velocidad en la mitad de la trayectoria, f) Ecuación de la trayectoria.

Solución.

Para responder a estas preguntas, solo se deben utilizar las ecuaciones encontradas en cada interrogante, así:

a) Tiempo de subida:

$$t_s = \frac{-v_0 \text{Sen}\theta}{g}$$

$$t_s = \frac{-(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \text{Sen}40}{-9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$t_s = \frac{(-12 \frac{\text{m}}{\text{s}})(0.64)}{-9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$t_s = 0.78\text{s}$$

b) Tiempo de vuelo:

$$t_v = 2t_s$$

$$t_v = 1.56\text{s}$$

c) Altura máxima:

$$h = \frac{-v_0^2 \text{Sen}^2 \theta}{2g}$$

$$h = \frac{-(12 \frac{m}{s})^2 (0.41)}{2(-9.81 \frac{m}{s^2})}$$

$$h = 3.01m$$

d) Alcance:

$$R = \frac{-v_0^2 \text{Sen} 2\theta}{g}$$

$$R = \frac{-(12 \frac{m}{s})^2 \text{Sen}(2 \times 40)}{-9.81 \frac{m}{s}}$$

$$R = 14.46m$$

e) Velocidad en la mitad de la trayectoria. Corresponde a la parte más alta; en este punto, no hay velocidad en y solamente en x , por tanto:

$$v_x = v_0 \text{Cos} \theta$$

$$v_x = (12 \frac{m}{s}) \text{Cos}(40)$$

$$v_x = 9.19 \frac{m}{s}$$

f) Ecuación de la trayectoria:

$$y = y_0 + \text{Tan} \theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2 \theta} x^2.$$

Como no se tiene punto inicial, entonces: $y_0 = 0$

$$y = \text{Tan}\theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2\theta} x^2$$

$$y = \text{Tan}(40) \cdot x + \frac{(-9.81 \frac{m}{s^2})}{2(12 \frac{m}{s})^2 \text{Cos}^2(40)} x^2$$

$$y = 0.84x - 0.06x^2$$

2. Un jugador de fútbol, que se encuentra a $30m$ de frente a la portería, patea un balón con una velocidad de $22m/s$ con un ángulo de elevación de 8° . ¿Podrá hacer un gol?

Solución.

Para responder esta pregunta, se puede utilizar la ecuación de la trayectoria:

$$y = y_0 + \text{Tan}\theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2\theta} x^2$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$y = \text{Tan}(8) \cdot 30 - \frac{9.81}{2 \cdot 22^2 \text{Cos}^2(8)} 30^2$$

$$y = 4.216 - 9.301$$

$$y = -5.071m$$

Con esta respuesta se puede asegurar que no hay gol, pues la pelota pica antes de llegar a la portería; así que se podría preguntar: ¿con que velocidad debe patear para que hubiera el gol en una portería de $2,5m$ de alta?

A partir de la misma ecuación:

$y = \text{Tan} \theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \text{Cos}^2 \theta} x^2$, se puede calcular la velocidad:

$$2.5 = 30 \cdot \text{Tan} 8^\circ - \frac{9.81}{2v_0^2 \text{Cos}^2 8^\circ} 30^2$$

$$v_0 = 51.22 \frac{m}{s} \approx 183.6 \frac{Km}{h}$$

Se hubiera producido el gol, si hubiera pateado Ronny Heberon Furtado de Araújo (Ronny), quien ostenta el registro mundial por patear un balón de fútbol, al que le imprime una velocidad de más de 200 kilómetros por hora. El disparo de tiro libre, por parte del jugador del Sporting de Portugal, fue inatajable para el cancerbero rival.

3. De lo alto de un edificio de 80m se lanza un objeto con una velocidad de 40m/s y un ángulo de elevación de 37°. Calcular el alcance respecto a la vertical del lanzamiento.

Solución.

Como el alcance en x corresponde al movimiento rectilíneo uniforme, donde se tiene $x = v_0 \text{Sen} \theta \cdot t$, por tanto el alcance máximo se encontrará si se tiene el tiempo de vuelo; es decir: $R = v_0 \text{Sen} \theta \cdot t_v$; ahora bien, para calcular el tiempo de vuelo se requiere calcular el tiempo de subida y el tiempo de bajada: $t_v = t_s + t_b'$, pero el tiempo de bajada se toma desde la parte más alta a la que llega el objeto; por ahora, el tiempo de subida es:

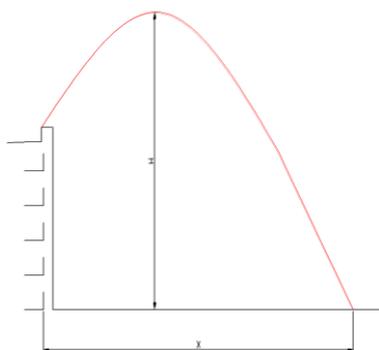


Fig. 2.42. Esquema del lanzamiento del objeto desde lo alto de una edificación.

$$t_s = \frac{-v_0 \text{Sen} \theta}{g}$$

$$t_s = \frac{(-40 \frac{m}{s}) \text{Sen} 37}{-9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$t_s = 2.45s$$

Se puede calcular el tiempo de bajada desde el punto más elevado, para lo cual necesitamos conocer la altura máxima desde el punto de lanzamiento:

$$h = \frac{-v_0^2 \text{Sen}^2 \theta}{2g}$$

$$h = \frac{(-40 \frac{m}{s})^2 \text{Sen}^2 (37)}{2(-9.81 \frac{m}{s^2})}$$

$$h = 29.54m$$

Con este valor se puede calcular la altura desde donde cae el objeto, que será la altura del edificio, más lo que alcanzó el objeto (Fig. 2.42):

$$H = h + 80$$

$$H = 29.54 + 80$$

$$H = 109.54m$$

Con este valor, se puede calcular el tiempo de caída o bajada como si fuera una simple caída libre:

$$t_b = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t_b = \sqrt{\frac{2(-109m)}{-9.81 \frac{m}{s^2}}}$$

$$t_b = 4.71s$$

Por tanto, el tiempo de vuelo es la suma de los dos tiempos que el objeto permanece en el aire:

$$t_v = t_s + t_b$$

$$t_v = 2.45s + 4.71s$$

$$t_v = 7.16s$$

Ahora bien, el desplazamiento será:

$$R = v_0 \cos \theta \cdot t_v$$

$$R = (40 \frac{m}{s}) \cos(37) \cdot (7.16s)$$

$$R = 228.73m$$

Una forma más expedita para calcular el alcance es a partir de la ecuación de la trayectoria; esto es:

$$y = y_0 + \tan \theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2,$$

de la cual se despejará x para poder calcular el alcance. Así:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x - y = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado en la que, al remplazar los valores, se tiene:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x - y = 0$$

$$-0.005x^2 + 0.75x - 80 = 0$$

Para solucionar esta ecuación, se requiere utilizar la fórmula cuadrática:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_i = \frac{-0.75 \pm \sqrt{0.75^2 + 4(0.005)(80)}}{-0.01}$$

$$x_i = \frac{-0.75 \pm 1.471}{-0.01}$$

$$x_1 = +222.1m$$

$$x_2 = -72.1m$$

De estas dos repuesta que da la solución cuadrática, sin duda solo la positiva tiene sentido, donde vemos que es igual a la distancia calculada por el primer método.

4. Desde una plataforma móvil, como se ve en la Fig. 2.43, con velocidad de $40Km/h$, se dispara un proyectil con una velocidad de $33m/s$ y un ángulo de elevación de 50° . Calcular el alcance cuando el disparo se efectúa en el mismo sentido del desplazamiento de la plataforma; b) en sentido contrario; c) cuando el disparo se efectúa en sentido ortogonal al movimiento de la plataforma.

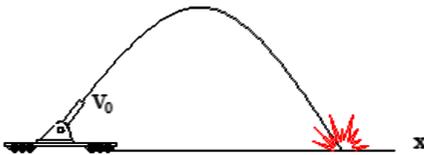


Fig.2.43. Esquema del lanzamiento del proyectil desde la plataforma en movimiento.

Solución.

En cuanto al alcance del proyectil, cuando se lanza en la misma dirección en la que se

mueve la plataforma, la velocidad relativa en el eje x resulta de la suma vectorial de la velocidad proyectada en el eje x del movimiento parabólico y la velocidad de la plataforma; esto es:

$$v_x = v_{0x} + v_p$$

Así que el alcance es:

$$R = v_x t_v, \text{ donde: } t_v = -\frac{2v_0 \text{Sen} \theta}{g}; \text{ al remplazar, se tiene:}$$

$$R = (v_0 \text{Cos} \theta + v_p) \left(\frac{-2v_0 \text{Sen} \theta}{g} \right)$$

$$R = (33 \text{Cos} 50^\circ + 11.11) \frac{2 \cdot 33 \cdot \text{Sen} 50}{9.81}$$

$$R = 166.58m$$

a) Alcance cuando el lanzamiento se efectúa en sentido contrario al movimiento de la plataforma. Esto significa que: $v_x = v_{0x} - v_p$; así que, al remplazar, se tiene:

$$R = (v_0 \text{Cos} \theta - v_p) \frac{2v_0 \text{Sen} \theta}{g}$$

$$R = (33 \text{Cos} 50^\circ - 11.11) \frac{2 \cdot 33 \cdot \text{Sen} 50}{9.81}$$

$$R = 52.06m$$

Como se puede ver, en este caso, el alcance es mucho menor que en el primero, debido a que se realiza en sentido contrario.

b) Calcular el alcance cuando el proyectil se lanza de forma ortogonal al movimiento de la plataforma. Aquí hay dos alcances: el primero es el resultado del movimiento parabólico y el segundo corresponde al alcance debido a la plataforma.

Esto es: $R = R_x i + R_y j$, donde: $R_x = v_x t_v$ y $R_y = v_p t_v$; al remplazar, se tiene:

$$\begin{aligned}
 R &= (v_x t_v) i + (v_p t_v) j \\
 R &= (21.21 \times 5.154) i + (11.11 \times 5.154) j \\
 R &= 109.316 i + 57.261 j \\
 r &= \sqrt{109.316^2 + 57.261^2} \\
 r &= 123.4 m
 \end{aligned}$$

Se ha puesto el alcance en minúscula para enfatizar en que el alcance es un vector y, por tanto, en este caso se debe obtener la magnitud.

Dirección:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \text{Tan}^{-1} \frac{57.261}{109.316} \\
 \theta &= 27^\circ 38'
 \end{aligned}$$

5. Sobre la base de una colina, como se ve en la Fig. 2.44, cuya pendiente es 15° , se lanza un proyectil hacia la colina con un ángulo de elevación 35° y una velocidad $11 m/s$. ¿Cuál es la distancia sobre la colina donde cae el proyectil?

Solución.

Como se ve en la Fig. 2.44, el proyectil se lanza desde la base de la colina y, por supuesto, el impacto se efectúa sobre la colina unos metros arriba, que es

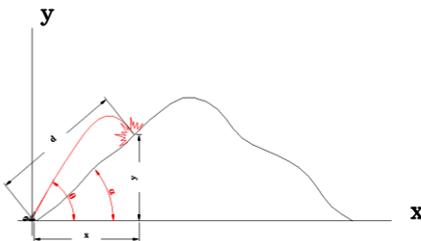


Fig. 2.44. Esquema del lanzamiento de un proyectil sobre la base de una colina.

justamente la distancia que se debe calcular.

A partir de la gráfica, se tiene:

$Tan\alpha = \frac{y}{x}$; además, la ecuación de la trayectoria es:

$y = Tan\theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 Cos^2\theta} x^2$; al combinar estas dos ecuaciones,

se tiene:

$$Tan\alpha = \frac{Tan\theta \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 Cos^2\theta} x^2}{x}$$

$$Tan\alpha = Tan\theta + \frac{g}{2v_0^2 Cos^2\theta} x$$

$$x = \frac{2v_0^2 Cos^2\theta (Tan\alpha - Tan\theta)}{g}$$

$$x = \frac{2 \times 11.11^2 Cos^2 35 (Tan 35 - Tan 15)}{9.81}$$

$$x = \frac{162.38 \times .432}{9.81}$$

$$x = 7.3m$$

Como este valor solo es la proyección en el eje x , tal como se ve en la Fig. 2.44, entonces se puede decir que: $Cos\alpha = \frac{x}{d}$,

de donde:

$$d = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$$d = \frac{7.3}{\cos 15}$$

$$d = 7.56m$$

Esta es la distancia sobre la superficie de la ladera.

Movimiento semiparabólico, tiro horizontal

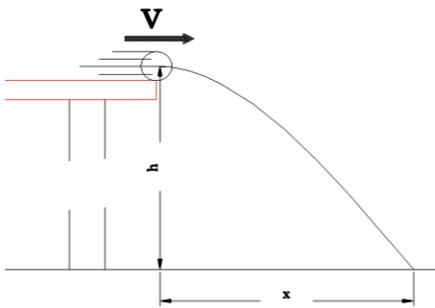


Fig. 2.45. Esquema de una esfera que rueda por la superficie de una mesa, cae y describe una parábola.

Cuando una esfera escapa después de rodar por la superficie de una mesa, como se ve en la Fig. 2.45, cae a una distancia x ; el movimiento corresponde exactamente a lo que ocurre cuando un objeto se lanza hacia arriba con un ángulo de elevación: una vez adquirida la altura máxima, el objeto

empieza a caer y la trayectoria que describe, como ya se vio, es una parábola; se recuerda que en dicho punto no hay velocidad en el eje y , solo en el eje x ; de igual forma, en el tiro horizontal solo hay velocidad en el eje x ; es decir: v_x ; por tanto, se asegura que ese lanzamiento se efectúa con un ángulo de elevación de 0° , así que la ecuación de la trayectoria se escribe:

$$y = \tan 0^\circ \cdot x + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 0^\circ} x^2$$

Como $\tan 0^\circ = 0$ y $\cos 0^\circ = 1$, entonces la ecuación de la trayectoria queda:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (2.18)$$

Y, como tal, la ecuación representa media parábola, en la que se debe tener en cuenta el valor negativo de la gravedad.

Ejemplos.

1. Una esfera escapa del borde de la superficie de una mesa de $1.2m$ de alto con una velocidad de $12m/s$. Calcular el alcance desde la proyección del borde de la mesa al piso, con el punto de impacto en el piso.

Solución.

Como el alcance se representa por x , entonces se despeja x a partir de la ecuación de la trayectoria; esto es:

$$x = \sqrt{\frac{2v_0^2 y}{g}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2(12 \frac{m}{s})^2 (-1.2m)}{-9.81 \frac{m}{s^2}}}$$

$$x = 5.94m$$

2. Un avión vuela a 10.000 pies de altura y a $780Km/h$, como se ve en la Fig. 2.46; debe dejar caer una bomba, sobre un blanco conocido. ¿Con qué ángulo de la mira de la cabina el piloto debe accionar el disparador para que el proyectil caiga sobre el blanco?

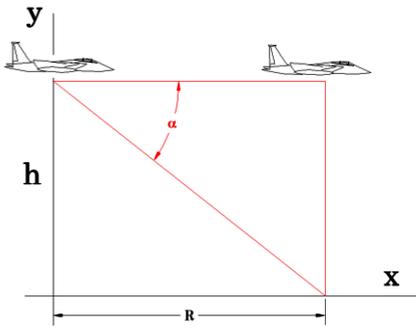


Fig. 2.46. Ángulo por debajo de la horizontal, con el cual se ve el objetivo.

Solución.

De acuerdo con la Fig. 2.46, cuando el avión vuela horizontalmente, el objetivo puede observarse justamente bajo el ángulo α y allí el piloto debe accionar el disparador, que consiste en dejar caer el explosivo; ahora bien, para calcular dicho

ángulo, a partir de la Fig. 2.46, se tiene:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{h}{x}$$

Y como x es el alcance, al remplazar, se tiene:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{h}{\sqrt{\frac{2v_0^2 y}{g}}}$$

Como h se da en pies, se deberá convertirlos a metros: $1\text{Pie} = 0.3048\text{m}$; por tanto, 10.000 pies equivalen a 3.048m ; además, $780\text{Km/h} = 216.67\text{m/s}$; con estos datos, al remplazar en la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Tan } \alpha &= \frac{3.048}{5401.15} \\ \alpha &= 29^\circ 26' \end{aligned}$$

3. En un tiro parabólico hay un ángulo, que permite que la altura máxima fuera igual al desplazamiento, como se ve en la Fig. 2.47. ¿Cuál es el ángulo?

Solución.

Como la condición señala que la altura máxima y el desplazamiento fuesen iguales, entonces:

La altura máxima es:

$$h = \frac{v_0^2 \text{Sen}^2 \theta}{2g}.$$

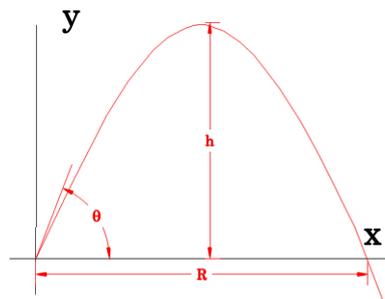


Fig. 2.47. Ángulo en el que la altura máxima y el desplazamiento son iguales.

El alcance es: $x = \frac{v_0^2 \text{Sen} 2\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{g}.$

Al igualar estas dos expresiones:

$$\frac{v_0^2 \text{Sen}^2 \theta}{2g} = \frac{2v_0^2 \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta}{g}$$

$$\frac{\text{Sen} \theta}{\text{Cos} \theta} = 4$$

$$\text{Tan} \theta = 4$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} 4$$

$$\theta = 75^\circ 57'$$

De forma bastante curiosa, el ángulo donde se da que el alcance y la altura máxima son iguales es tal como se muestra en el resultado y como se puede apreciar en la Fig. 2.47; además, el ángulo es independiente de la velocidad; es decir,

siempre que se efectuara un lanzamiento con este ángulo de elevación, se va a dar la igualdad de la altura y el alcance.

2.12 Movimiento Circular

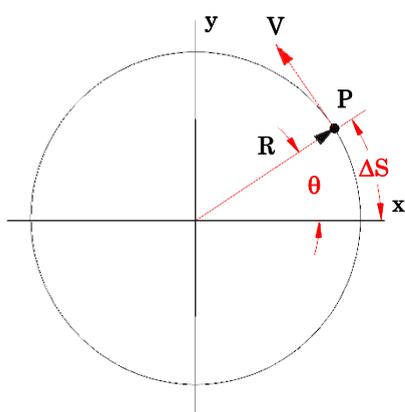


Fig. 2.48. Esquema del movimiento circular.

En la vida diaria encontramos objetos que se mueven de forma circular; es decir, dan vueltas a un punto, como es el caso de la rueda de una bicicleta; siempre en casa hay electrodomésticos que tienen algo que gira, como en la licuadora, en la lavadora, el ventilador, etc. Si se analiza un punto

cualquiera que gira alrededor de un punto, como lo que se puede ver en la Fig. 2.48, el punto P, que se encuentra a la distancia R del centro de giro, define una trayectoria:

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia, y de allí la denominación de movimiento circular.

El radio vector R que define la posición del punto P describe el ángulo θ respecto al eje x , de tal modo que cada cierto tiempo habrá una variación del ángulo, a lo que se le denomina velocidad angular; esto es:

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} .$$

Se debe leer que la velocidad angular es la variación del ángulo respecto a la variación del tiempo. Como el ángulo se mide en radianes y el tiempo en segundos, entonces las unidades de la velocidad angular son: *radianes/segundo*, pero, como los radianes no son unidades operativas, por tanto, se debe utilizar la denominación para distinguirla, mas no para operar con otras unidades.

Movimiento circular uniforme

En este caso, se tiene un objeto que da vueltas respecto a un centro y siempre lo hace con el mismo ritmo; es decir, no aumenta ni disminuye; la velocidad angular se mantiene constante, esto es: para variaciones de ángulos, se tienen variaciones de tiempos iguales:

$$w = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{t_1 - t_0}.$$

También:

$$w = \frac{\Delta\theta}{\Delta T}.$$

Ahora bien, cuando la variación angular corresponde a una vuelta, es decir: $\Delta\theta = 2\pi$, a la variación del tiempo $\Delta t = T$ se la denomina periodo; por tanto, se puede escribir que la velocidad angular es:

$$w = \frac{2\pi \text{ rad}}{T \text{ s}}.$$

Al escribirse la velocidad angular así, se la denomina frecuencia angular. Por otra parte, se puede decir que el periodo es el tiempo empleado en dar una vuelta o por unidad de vuelta; esto se puede escribir como:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Lo contrario al periodo es la frecuencia natural, que se refiere al número de vueltas en la unidad de tiempo:

$$f = \frac{n}{t}.$$

De modo que la frecuencia natural se mide en $\frac{1}{s} = \text{Hertz}$, unidad no operativa, en honor al científico alemán Heinrich Rudolf Hertz, que se denota como **Hz**.

A partir de las dos expresiones, se concluye que:

$$T \cdot f = 1.$$

Además, al combinar estas expresiones, se tiene que la velocidad angular se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{t/n} = \frac{2\pi n}{t} \\ \omega &= 2\pi f \quad (2.19) \end{aligned}$$

De esta forma, la frecuencia angular queda en términos de la frecuencia natural.

Velocidad tangencial

Denominada también lineal o circunferencial. Del movimiento rectilíneo uniforme, se tiene que la velocidad es:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

donde Δx es el desplazamiento *lineal* y Δt es el tiempo empleado en dicho desplazamiento.

De acuerdo con la Fig. 2.49, se deduce que Δx se puede asociar con Δs y, cuanto más pequeño fuese el ángulo, mejor la aproximación.

Geoméricamente, se puede decir que:

$\Delta s = \Delta\theta \cdot R$. De modo que, al combinar con la velocidad lineal, se tiene:

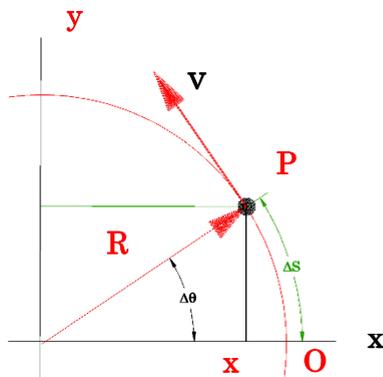


Fig. 2.49. Velocidad lineal o tangencial a la trayectoria.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} R$$

Como $w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, entonces la velocidad lineal queda:

$$v = wR.$$

Ahora bien, como se puede ver en la Fig. 2.49, la velocidad lineal es un vector, de tal forma que el producto del radio vector y la velocidad angular también lo es, así que la velocidad lineal también se puede escribir como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{R} \quad (2.20)$$

De acuerdo con la definición de producto vectorial, resulta claro que, para que esto existiera, tanto el radio vector como la velocidad angular deben ser vectores, lo que implica que, si la velocidad lineal es el resultado del producto vectorial, entonces, el vector velocidad angular está saliendo del libro; así que, al seguir la Ley de la mano derecha, el dedo índice corresponde a la velocidad angular que, en este caso, sale del libro, el radio vector corresponde al dedo anular y el pulgar corresponde a la velocidad lineal.

Por otra parte, esta relación es muy importante para poder unir el movimiento rectilíneo con el movimiento circular.

Con estas expresiones, ya se pueden plantear algunos ejemplos.

Ejemplos.

1. Un objeto sigue una trayectoria circular, de tal forma que se ha movido de modo constante a 15.7 radianes en solo 5 segundos. ¿Cuál es la velocidad angular?

Solución.

Como $w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, entonces lo que queda es remplazar:

$$w = \frac{15.7 \text{ rad}}{5 \text{ s}}$$

$$w = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$w \cong \pi \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

2. La etiqueta de un motor advierte que es de 1800 RPM. Calcular la frecuencia natural, la velocidad angular y el periodo.

Solución.

La especificación RPM quiere decir revoluciones por minuto; entonces, el motor da 1800 vueltas en un minuto.

a) Como frecuencia es: $f = \frac{n}{t}$, al remplazar, se tiene:

$$f = \frac{1800 \text{ vueltas}}{60 \text{ s}}$$

$$f = 30 \frac{1}{\text{s}}$$

Vueltas, ciclos o revoluciones no son unidades operativas; simplemente sirven para determinar o nombrar algo.

b) La velocidad angular, en términos de la frecuencia, se puede escribir como:

$w = 2\pi f$; entonces, al remplazar, se tiene:

$$w = 2\pi 30 \text{ s}^{-1}$$

$$w = 188 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La respuesta es *radianes/s*, porque la velocidad angular siempre se da en estas unidades.

c) Para calcular el periodo, se debe recordar que este periodo es inverso a la frecuencia. Esto es:

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{30 \frac{1}{s}}$$

$$T = 0.03s$$

Esto significa que, para dar una vuelta, se necesitan tres centésimas de segundo.

3. Un ciclista se desplaza sobre una pista a razón de $40Km/h$; si las ruedas de su bicicleta son de 85 cm de diámetro, calcular la velocidad angular, la frecuencia, el periodo y el número de vueltas en 1.5 min .

Solución.

Como no todos los datos están en el SI, entonces habrá que convertir, así:

$40Km/h$ es equivalente a $11.11m/s$ y el radio de las ruedas de la bicicleta es $0.43m$; con estos datos, se puede calcular la velocidad angular a partir de la velocidad lineal; esto es:

$$v = wR$$

a) Por lo cual se despeja la velocidad angular:

$$w = \frac{v}{R}$$

$$w = \frac{11.11 \frac{m}{s}}{0.43m}$$

$$w = 25.84 \frac{rad}{s}$$

b) Para calcular la frecuencia a partir de la velocidad angular, se utiliza:

$$w = 2\pi f$$

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

$$f = \frac{25.84 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi}$$

$$f = 4.11 \text{s}^{-1}$$

c) Para calcular el período, se debe recordar que es el inverso de la frecuencia; por tanto:

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{4.11 \text{s}^{-1}}$$

$$T = 0.24 \text{s}$$

d) Para calcular el número de vueltas que dan las ruedas de la bicicleta en 1.5 min , se procede, primero, a calcular cuántos segundos hay en 1.5 min ; esto es:

$$1.5 \times 60 = 90 \text{s}$$

Con este valor, tomamos la ecuación con la frecuencia, el periodo o la velocidad angular, con lo que se puede establecer el cálculo del número de vueltas:

$$f = \frac{n}{t}$$

$$n = f t$$

Remplazando los valores se tiene:

$$n = (4.1s^{-1})(90s)$$

$$n = 369.9 \text{ vueltas}$$

4. Las ruedas de un juguete son de 1.5 cm de radio ¿Con qué velocidad se desplaza, si se logra que las ruedas den 15 vueltas en $1,5 \text{ s}$?

Solución.

Según los datos que da el ejemplo, se puede calcular inmediatamente la frecuencia; esto es:

$$f = \frac{n}{t}$$

$$f = \frac{15 \text{ vueltas}}{1.5s}$$

$$f = 10s^{-1}$$

Ahora bien, la velocidad angular, en términos de la frecuencia, es:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi(10s^{-1})$$

$$\omega = 62.83 \frac{\text{rad}}{s}$$

Como ya se tiene la velocidad angular, se puede calcular la velocidad lineal, así:

$$v = \omega R$$

$$v = (0.015m)(62.83 \frac{\text{rad}}{s})$$

$$v = 0.94 \frac{m}{s}$$

5. En la pista de un velódromo, el ciclista *Fernando Sosa* rompió el récord mundial de 500 m en solo 35.042 s . a) ¿Cuál

fue la velocidad del desplazamiento del ciclista?, b) ¿Cuál fue su velocidad angular?, c) ¿Cuántas vueltas dieron las ruedas, si tenían un diámetro de 105 cm ?

Solución.

a) Para calcular la velocidad lineal, es suficiente con los datos dados en el ejemplo. Esto es:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{500m}{35.042s}$$

$$v = 14.269 \frac{m}{s}$$

Lo que equivale a $v = 51.367 \frac{Km}{h}$

b) Para calcular la velocidad angular, se procede a partir de la velocidad lineal, así:

$$v = wR$$

$$w = \frac{v}{R}$$

$$w = \frac{14.269 \frac{m}{s}}{0.525m}$$

$$w = 27.18 \frac{rad}{s}$$

c) Para calcular el número de vueltas de las ruedas de 105 m de diámetro en los $500m$ de recorrido, es necesario, primero, calcular el perímetro de las ruedas; como el perímetro de la circunferencia es $p = 2\pi r$, entonces, al remplazar el valor del radio, se tiene:

$$p = 2 \pi r$$

$$p = 2 \pi \left(\frac{1.05m}{2} \right)$$

$$p = 3.299m$$

Ahora bien, el número de vueltas es:

$$n = \frac{\Delta x}{p}$$

$$n = \frac{500m}{3.299m}$$

$$151.56 \text{ vueltas}$$

Transmisión del movimiento circular

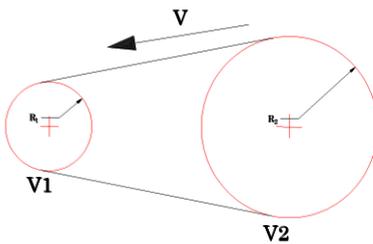


Fig. 2.50. Esquema de la transmisión del movimiento circular mediante una banda flexible o cadena, como la de bicicleta.

En la técnica mecánica moderna hay un alto porcentaje de mecanismos en los que siempre se incluye un engranaje, es decir, una junta de ruedas unidas por una banda, o por simple rozamiento, en el que, para mejorar la tracción, pueden tener dientes que engranan

entre, sí como se puede ver en la Fig. 2.50: una banda flexible une a dos ruedas de radio R_1 y R_2 ; como las ruedas se unen por la banda, que tiene una velocidad lineal v , entonces la velocidad lineal de la rueda 1 y 2 también es igual:

$$v_1 = v_2$$

Ahora bien, como la velocidad lineal, en términos de la velocidad angular, es: $v = w R$, por tanto, al remplazar, se tiene:

$$w_1 R_1 = w_2 R_2 \quad (2.21)$$

A partir de aquí, se pueden deducir todas las posibilidades de cambio respecto a las diferentes formas de expresar la velocidad angular, así:

En términos de la frecuencia: $w = 2\pi f$, entonces:

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 R_1 &= 2\pi f_2 R_2 \\ f_1 R_1 &= f_2 R_2 \end{aligned}$$

Cuando la velocidad angular está en términos del número de vueltas: $w = \frac{2\pi n}{t}$

Entonces, la igualdad queda:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi n_1}{t_1} R_1 &= \frac{2\pi n_2}{t_2} R_2 \\ n_1 R_1 &= n_2 R_2 \end{aligned}$$

Esta relación es muy importante en la aplicación técnica. Por último, en términos del periodo, como $w = \frac{2\pi}{T}$, entonces la igualdad queda:

$$w_1 R_1 = w_2 R_2$$

$$\frac{2\pi}{T_1} R_1 = \frac{2\pi}{T_2} R_2$$

$$\frac{R_1}{T_1} = \frac{R_2}{T_2}$$

Ejemplos.

1. En un sistema de transmisión circular de banda y ruedas de $0.25m$ y $0.08m$ de radio respectivamente, la rueda pequeña gira a razón de 35 rad/s . ¿Qué velocidad angular tiene la rueda grande?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$R_2 = 0.25m$$

$$R_1 = 0.8m$$

$$w_1 = 35 \text{ rad/s}$$

Con los datos que se tiene, se puede utilizar la ecuación de igualdad de velocidades angulares. Así:

$$w_1 R_1 = w_2 R_2 .$$

Al remplazar valores que da el ejercicio, se tiene:

$$(35 \frac{\text{rad}}{\text{s}})0.25 m) = w_2 0.08 m .$$

Como el diámetro es el doble del radio y se encuentra en igualdad de condiciones en ambos lados, entonces no hace falta reducirlo al tamaño del radio; por tanto, al despejar la velocidad angular, queda:

$$w_2 = \frac{8.75 \frac{m}{s}}{0.08m}$$

$$w_2 = 109.38 \frac{rad}{s}$$

2. Se necesita reducir la frecuencia de rotación del eje de un motor, cuya especificación es de *1750 RPM*, a *40 vueltas por minuto*; si la polea del eje del motor es de *2 pulgadas*, ¿de qué diámetro debe ser la polea a utilizar?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$f_1 = 1750 \text{ RPM}$$

$$f_2 = 40 \text{ RPM}$$

$$\phi_1 = 2 \text{ Pulg}$$

$$\phi_2 = ? \text{ Pulg}$$

Como se señaló, el diámetro es el doble del radio; entonces: $\phi = 2R$; así que la ecuación a utilizar es:

$$f_1 \phi_1 = f_2 \phi_2$$

De aquí se despeja ϕ_2 :

$$\phi_2 = \frac{f_1}{f_2} \phi_1$$

$$\phi_2 = \frac{(1750 \text{ RPM})}{40 \text{ RPM}} (2 \text{ pul})$$

$$\phi_2 = 87.5 \text{ Pul}$$

En muchos casos de la ingeniería mecánica, las poleas se convierten en piñones y las correas en cadenas; para

reducir tamaño se eliminan las cadenas y los piñones se engranan unos a otros, como lo que ocurre en la caja de cambios de los automóviles y vehículos de tracción motorizada en general (Fig. 2.51).



Fig. 2.51. a) Piñones de engrane con cadena (bicicletas, motocicletas, etc.) b) Caja de engrane de taladro eléctrico manual, los piñones establecen contacto entre ellos para transmitir el movimiento.

Se entenderá que tanto cadenas como piñones de contacto deben tener las separaciones entre dientes iguales entre el par que se transmiten o más; lo único que cambia es el diámetro primitivo de la rueda. La separación entre dientes, como se ve en la Fig. 2.52, en el lenguaje de ingeniería mecánica se conoce como paso axial: $p_x = \Delta x$. Ahora, como el perímetro de una circunferencia es $p = 2\pi R$, en términos del paso axial, se puede expresar como:

$$p = N p_x$$

Así que, al igualar, se tiene:

$$2\pi R = N p_x.$$

De donde la constante $2\pi = \frac{N p_x}{R}$.

Como la velocidad angular es: $w = \frac{2\pi n}{t}$, al remplazar la constante en la velocidad angular, se tiene:

$$w = \frac{N p_x n}{R t}$$

Pero como $f = \frac{n}{t}$, entonces la velocidad angular se expresa como:

$$w = \frac{N p_x}{R} f$$

Al acoplar dos engranajes, deben calzar de tal modo que no puede haber saltos ni trancones, solo deben girar con el mínimo rozamiento entre ellos. Esto es:

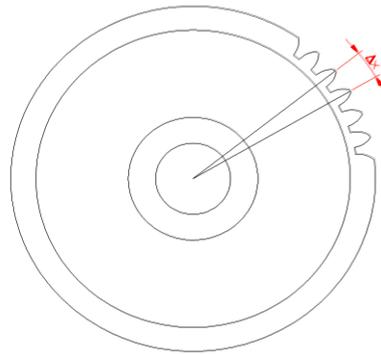


Fig. 2.52. Esquema de una rueda dentada, en el que se ve el paso axial.

$$w_1 R_1 = w_2 R_2$$

$$R_1 \frac{N_1 p_x f_1}{R_1} = R_2 \frac{N_2 p_x f_2}{R_2}$$

Si se cancelan los términos correspondientes, se tiene:

$$N_1 f_1 = N_2 f_2$$

Más todas las combinaciones que se pudieran efectuar.

Ejemplos.

1. El sistema de transmisión del movimiento circular de una bicicleta está conformado por piñones y plato. ¿Qué frecuencia adquiere el piñón de 12 dientes que se acopla mediante cadena a un plato de 56 dientes, si esta gira a razón de $0,75$ vueltas en un segundo?

Solución.

Datos:

$$N_1 = 12 \text{ dientes}$$

$$N_2 = 56 \text{ dientes}$$

$$f_2 = 0.75 \text{ vueltas /s}$$

Entonces, de la ecuación: $N_1 f_1 = N_2 f_2$, se despeja f_1 ; esto es:

$$f_1 = \frac{N_2 f_2}{N_1}$$

$$f_1 = \frac{56}{12} 0.75$$

$$f_1 = 3.5 \text{ vueltas/s}$$

Esta es la frecuencia que tiene la rueda por estar acoplado el piñón a la rueda.

2. Un ciclista logra pedalear a razón de 1.25 rev/s , si tiene una relación de 56 a 12 dientes y el diámetro de la rueda es de 1.05m . ¿Cuál es la velocidad del desplazamiento del ciclista y qué tiempo necesita para recorrer 1Km ?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$N_2 = 56 \text{ dientes}$$

$$N_1 = 12 \text{ dientes}$$

$$f_2 = 1.25 \text{ rev/s}$$

$$\Phi = 1.05\text{m} \rightarrow R = 0.53\text{m}$$

$$v = ?$$

$$\Delta t = ? \text{ en } 1 \text{ Km}$$

Al igual que en el caso anterior de la ecuación: $N_1 f_1 = N_2 f_2$, se despeja la frecuencia.

Esto es:

$$f_1 = \frac{N_2 f_2}{N_1}$$

$$f_1 = \frac{56}{12} 1.25$$

$$f_1 = 5.83 \text{ vueltas/s}$$

Como el piñón se encuentra acoplado a la rueda, entonces esta también tiene la misma frecuencia, así que la velocidad lineal es: $v = R w$, pero la velocidad angular también se puede escribir en términos de la frecuencia: $w = 2\pi f$; así que, al remplazar, se tiene:

$$v = 2R\pi f$$

$$v = 2(0.53m)\pi (5.83 \frac{rev}{s})$$

$$v = 19.41 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad lineal o de desplazamiento del ciclista, equivalente a $70Km/h$.

El tiempo que se necesita para efectuar el recorrido de $1 Km$, con la velocidad de desplazamiento:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\Delta t = \frac{1000m}{19.41 \frac{m}{s}}$$

$$\Delta t = 51.52s$$

Este es el tiempo, aproximado a 1 minuto, para efectuar el recorrido de $1 Km$.

3. En un engranaje de piñones de cierta máquina se tienen 2 ruedas dentadas de 80 y 15 dientes respectivamente. ¿Cuál será la salida en la rueda grande, si a la pequeña se acopla una armadura de poleas con un factor de $\gamma = 8.5$ al eje de un motor de $1750 RPM$?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$N_1 = 15$$

$$N_2 = 80$$

$$\gamma = 8.5$$

$$f_1 = 1750 \text{ RPM}$$

$$f_3 = ?$$

De acuerdo a la ecuación de frecuencias, se tiene:

$$N_1 f_1 = N_2 f_2$$

Por tanto, f_2 es:

$$f_2 = \frac{N_1}{N_2} f_1$$

Como el factor de escala es $\gamma = 8.5$, lo que significa que $\frac{N_2}{N_1} = 8.5 \text{ veces}$, entonces f_2 es:

$$f_2 = \frac{f_1}{\gamma}$$

$$f_2 = \frac{1750}{8.5}$$

$$f_2 = 205.88 \text{ RPM}$$

Ahora bien, con el juego de piñones, se tiene:

$$f_3 = \frac{N_2}{N_3} f_2$$

$$f_3 = \frac{15}{80} 205.88$$

$$f_3 = 38.6 \text{ RPM}$$

2.13 Aceleración centrípeta

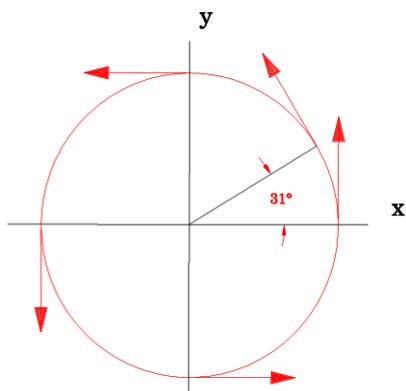


Fig. 2.53. Cambio de la dirección y el sentido del vector velocidad lineal o tangencial.

A partir del concepto de aceleración, $a = \frac{dv}{dt}$, se ve claramente que la aceleración proviene de operar el vector velocidad con el escalar tiempo; ahora bien, para que un vector se mantuviera constante, debe cumplir que tanto la magnitud, como la dirección y el sentido deben permanecer constantes en el tiempo y

en el espacio; con que una de estas propiedades falle, el vector pierde su identidad.

En el caso del movimiento circular uniforme, a pesar de que la magnitud de la velocidad tangencial se mantiene constante, no ocurre lo mismo con la dirección y el sentido; obsérvese, en la Fig. 2.53, que el vector velocidad lineal cambia continuamente y, solo cuando ha dado una vuelta completa, el vector coincide, razón por la cual la velocidad lineal tiene variación a medida que pasa el tiempo; al analizar de forma más puntual, como se puede ver en la Fig. 2.54, el vector velocidad lineal varía continuamente. En el triángulo BCD, el lado DC corresponde a la variación de la velocidad Δv .

Ahora bien, los triángulos OAB y BCD son triángulos semejantes, por ser triángulos isósceles (los triángulos isósceles tienen dos lados iguales); es decir, el lado BC es igual a BD por ser la magnitud de la velocidad lineal, y en el triángulo OAB los lados OA y OB son iguales, por ser el mismo

radio de la circunferencia o trayectoria del movimiento. Así que, por ser semejantes, se puede establecer que:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OB}{BC}$$

Si remplazamos, se tiene:

$$\frac{\Delta S}{\Delta v} = \frac{R}{v}$$

Por tanto: $\Delta v = \frac{v}{R} \Delta S$

Como la aceleración también se define como

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \text{entonces, al}$$

remplazar Δv , se tiene:

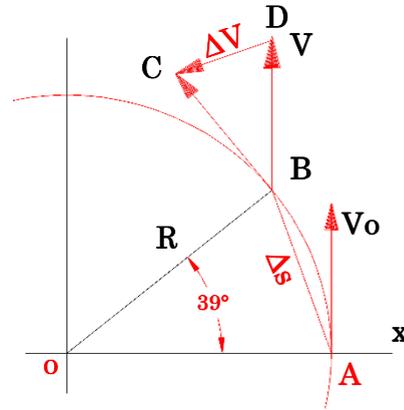


Fig. 2.54. Variación de la velocidad tangencial a medida que recorre la trayectoria circular.

$$a = \frac{v}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Ahora bien, entre más pequeño sea el ángulo, ΔS se aproximará a Δx ; entonces, se puede decir que $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ es, por definición, velocidad. Así que:

$$a = \frac{v}{R} v$$

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (2.22)$$

Esta aceleración se conoce como *aceleración centrípeta* y es la causante para que se dé el movimiento circular; obsérvese que se dirige hacia al punto donde gira; en el caso del giro que realiza un vehículo, la dirección de las llantas delanteras obligan al cuerpo a girar a la derecha o izquierda según sean las curvas en la carretera.

En la ingeniería moderna, las curvas de la carretera no deben ser circulares para evitar la monotonía al conducir, así que son de tipo espiral, es decir siempre habrá un radio de curva diferente tanto al entrar a la curva como al salir; sin embargo, también se presenta la aceleración centrípeta, es decir la dirección de las ruedas delanteras de un vehículo obligan a dar la curva al lado que fuese necesario.

Ejemplos.

1. ¿Cuál es la aceleración centrípeta que siente una puntilla clavada en la superficie de la rueda de un vehículo?, si el radio de la rueda es 0,45m, y se desplaza con una velocidad lineal es de 60Km/h

Solución.

Datos del ejemplo:

$$R = 0.45\text{m}$$

$$v = 60\text{Km/h} = 16.67\text{m/s}$$

Con los datos obtenidos, se puede aplicar directamente la ecuación de la aceleración centrípeta:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$a = \frac{(16.67m/s)^2}{0.45m}$$

$$a = 617.53 \frac{m}{s^2}$$

Como se puede ver, esta es una cantidad bastante grande si la comparamos con la aceleración gravitacional; resulta que es aproximadamente 63 veces la gravedad; de llegarse a soltar, se convierte en un proyectil que saldría disparado de forma tangencial.

2. La rueda de una máquina de afilar cuchillos o esmeril gira a razón de $1800RPM$. ¿Cuál es la aceleración centrípeta en la superficie de la rueda, si el diámetro es de $25cm$?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$f = 1800RPM = 30v/s$$

$$\phi = 25cm \rightarrow R = 0.12.5m$$

De acuerdo a la ecuación $a = \frac{v^2}{R}$, se reescribirá a la velocidad lineal en términos de la velocidad angular. Como la velocidad angular es: $v = \omega R$, si remplazamos, se tiene:

$$a = \frac{(wR)^2}{R}$$

$$a = R w^2$$

$$a = R(2\pi f)^2$$

$$a = (0.125m)(2 \times \pi \times 30rev/s)^2$$

$$a = 4441.32 \frac{m}{s^2}$$

Las chispas que salen de las ruedas de los esmeriles adquieren una aceleración tan grande que las obliga a despegarse de la superficie y salir; con la velocidad lineal que tienen, por supuesto, son verdaderos proyectiles que salen de forma tangencial.

Aceleración centrípeta en el movimiento curvilíneo en general

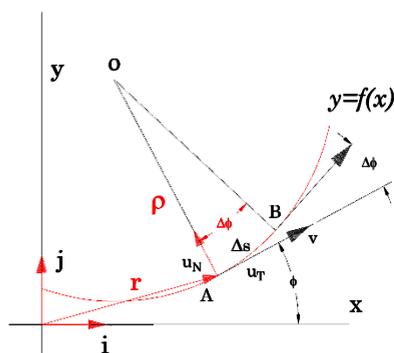


Fig. 2.55. Aceleración tangencial y normal.

En una trayectoria curvilínea cualquiera y en cualquier punto de la trayectoria, la aceleración centrípeta se presenta por ser la causante de seguir la curva, tal como se puede ver en la Fig. 2.55.

La trayectoria de la curva se da por la función $y = f(x)$; el objeto que sigue la trayectoria en el punto A lleva una velocidad lineal v ; en dicho punto hay dos vectores ortogonales: u_N : el vector normal a la curva con sentido hacia el centro de la curva y el vector unitario u_T , vector tangente a la curva; entre el vector normal y la tangente obviamente forman un ángulo recto (90°); lo mismo ocurre en el punto B.

Así, como la velocidad es: $v = vu_T$, entonces la aceleración es: $a = \frac{d(vu_T)}{dt}$; al extender la derivada, se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{du_T}{dt}v; \text{ a partir de aquí, se tiene:}$$

$$a = au_T + \frac{du_T}{dt}v$$

Es evidente que el primer término es la aceleración tangencial; en cambio, se debe deducir a qué corresponde el segundo término: $a = \frac{du_T}{dt}v$; a partir de la Fig. 2.55, se puede

ver que tanto el vector unitario u_T como el vector normal u_N tienen componentes en x y en y , así que:

$$u_T = \text{Cos } \phi i + \text{Sen } \phi j$$

$$u_N = \text{Cos } \left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)i + \text{Sen } \left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)j$$

Al resolver la expresión trigonométrica referente al vector normal, se tiene:

$$u_N = \text{Cos } \frac{\pi}{2} \text{Cos } \phi - \text{Sen } \frac{\pi}{2} \text{Sen } \phi + \text{Cos } \frac{\pi}{2} \text{Sen } \phi + \text{Sen } \frac{\pi}{2} \text{Cos } \phi$$

Ahora bien: como $\text{Cos } \frac{\pi}{2} = 0$ y $\text{Sen } \frac{\pi}{2} = 1$, entonces:

$$u_N = -\text{Sen } \phi i + \text{Cos } \phi j$$

Por otra parte, la derivada respecto al tiempo del vector unitario tangencial es:

$$\begin{aligned}\frac{du_T}{dt} &= \frac{d}{dt}(\text{Cos}\phi i + \text{Sen}\phi j) \\ \frac{du_T}{dt} &= -\text{Sen}\phi \frac{d\phi}{dt} i + \text{Cos}\phi \frac{d\phi}{dt} j \\ \frac{du_T}{dt} &= (-\text{Sen}\phi i + \text{Cos}\phi j) \frac{d\phi}{dt}\end{aligned}$$

Como se puede ver, lo que se halla dentro del paréntesis solo es el vector unitario u_N ; por tanto:

$$\frac{du_T}{dt} = u_N \frac{d\phi}{dt}.$$

Ahora bien: $\frac{d\phi}{dt}$ es la velocidad angular W respecto al punto de congruencia de los radios ρ ; entonces: $\frac{du_T}{dt} = (u_N)w$; de modo que esta velocidad tiene dirección u_N .

Como en la ecuación general de la aceleración $a = au_r + \frac{du_T}{dt}v$, para la segunda parte, la aceleración es:

$$a = wu_Nv$$

Al organizar los términos y designar a la aceleración como aceleración normal, se tiene:

$$a_N = wv u_N$$

Como la velocidad angular se la puede expresar como $w = \frac{v}{\rho}$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} u_N$$

Esta expresión corresponde a la ya conocida aceleración centrípeta, de modo que la aceleración en general de la partícula es:

$$a = au_T + \frac{v^2}{\rho} u_N .$$

La aceleración de una partícula, cuando está moviéndose sobre una trayectoria curvilínea, es:

$$a = au_T + au_N$$

Es decir, en un movimiento curvilíneo siempre habrá una aceleración tangencial y una aceleración centrípeta o normal.

En el caso del movimiento circular uniforme, la velocidad lineal se puede expresar como $a = \frac{dv}{dt}$, y como la velocidad lineal es $\mathcal{X} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, entonces: $a = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})}{dt}$; como se trata del movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante; por tanto, sale del paréntesis; esto es: $a = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$; así, la aceleración centrípeta es $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$.

Al remplazar la velocidad lineal, se tiene:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad (2.23)$$

2.14 Movimiento circular acelerado

Al recordar que en el movimiento rectilíneo acelerado las ecuaciones cinemáticas eran:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$2ax = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

En el movimiento circular, el desplazamiento es el ángulo θ , la velocidad es w y como aceleración angular se tiene: $\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$; si introducimos estos cambios, se tienen estas ecuaciones:

$$\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$2\alpha\theta = w^2 - w_0^2$$

$$\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Además, el desplazamiento es $x = R\theta$; la velocidad lineal: $v = R w$, y la aceleración tangencial se expresa como: $a = R\alpha$

Con estas ecuaciones podemos relacionar el movimiento de traslación y el movimiento de rotación.

Ejemplos.

1. Un vehículo parte del reposo y en solo $5s$ adquiere una velocidad de $30Km/h$. Si tiene unas ruedas de $80cm$ de diámetro, ¿cuál es la aceleración angular?

Solución.

Datos del ejercicio:

$$t = 5s$$

$$v = 30Km/h = 8.33m/s$$

$$\phi = 80Cm \quad R = 0.40m$$

Para calcular la aceleración angular, primero se calcula la aceleración tangencial:

$$v = v_0 + at$$

Como el vehículo parte del reposo, entonces la velocidad inicial es cero:

$$v = at$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$a = \frac{8.33m/s}{5s}$$

$$a = 1.67 \frac{m}{s^2}$$

Ahora bien, como la aceleración tangencial es: $a = R\alpha$, entonces la aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$\alpha = \frac{1.67 \frac{m}{s^2}}{0.4m}$$

$$\alpha = 4.18 \frac{rad}{s^2}$$

2. Un ciclista parte del reposo y en solo $15s$ logra pedalear a razón de $1.25vueltas/s$; si las ruedas de su bicicleta tienen un diámetro de $90cm$, ¿cuál es la aceleración lineal, si el factor de amplificación es $\gamma = 3.43veces$?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$f = 1.25vueltas/s$$

$$t = 15s$$

$$R = 0.45m$$

$$\gamma = 3.43$$

Con estos datos, la frecuencia en la rueda es:

$$f_2 = \gamma f_1$$

$$f_2 = 3.43 \times 1.25v/s$$

$$f_2 = 4.29v/s$$

Ahora, la velocidad lineal de la rueda es:

$$v = R\omega$$

$$v = (0.45m)(2 \times \pi \times 4.29v/s)$$

$$v = 12.12m/s \equiv 43.64Kms$$

Como parte del reposo, la velocidad inicial es cero; por tanto, la aceleración lineal es:

$$v = v_0 + at$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$a = \frac{12.12m/s}{15s}$$

$$a = 0.81m/s^2$$

La aceleración lineal que adquiere el ciclista es un valor nada despreciable.

2.15 Movimiento relativo

En tiempos remotos se consideraba a la tierra como algo estacionario por excelencia, donde otros cuerpos como el sol, las estrellas, los planetas y demás se movían; se consideraba movimientos absolutos respecto a la tierra.

Sin embargo, desde el tiempo de Copérnico, se empezó a pensar que también la tierra se mueve y que el sol permanece quieto, estacionario. Al observar con su telescopio, Galileo descubrió que en la tenue luz de la Vía Láctea (camino de leche) hay infinitas estrellas que no se percibían; desde entonces, formamos parte de esa inconmensurable masa de estrellas; se dice que el Sol no está solo, que es parte de esa masa de miles de estrellas que conforman la galaxia; por tanto, el Sol también se mueve alrededor del centro de la galaxia. Así que No hay nada absoluto, los movimientos conocidos siempre son relativos a unos sistemas de referencia, que se consideran estables.

Cuando se viaja en un vehículo, el pasajero se convierte en un observador que puede ver cómo los objetos que están fuera del vehículo se mueven, se alejan o se acercan; un observador externo ve como el vehículo se aleja o se acerca; ambos tienen la razón respecto a sus sistemas de referencia.

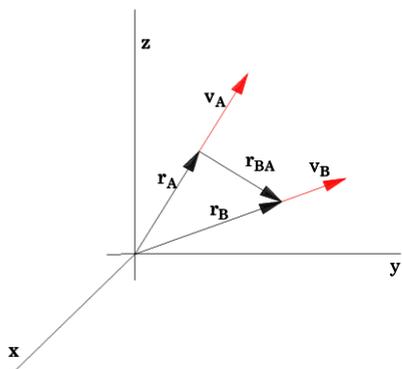


Fig. 2.56. Esquema vectorial de dos móviles que parten con diferente dirección desde un punto en común.

desplazamiento r_A y r_B ; por supuesto que después de t segundos, al haber partido del mismo punto, los dos cuerpos se encuentran separados por una distancia r_{BA} , donde $r_{BA} = r_B - r_A$, lo que se ha denominado variación en el desplazamiento de los dos cuerpos.

Ahora bien, si esto se mide respecto al tiempo, se encuentra la velocidad de separación de los cuerpos; como:

$$v_A = \frac{dr_A}{dt} \text{ y } v_B = \frac{dr_B}{dt}$$

Entonces, la variación del desplazamiento entre los dos cuerpos se puede describir como:

$$v_{BA} = \frac{dr_{BA}}{dt}$$

Velocidad relativa.

En la Fig. 2.56 se pueden ver dos observadores que viajan en diferente dirección; los cuerpos A y B tienen vectores de

Si dicha variación es constante, entonces:

$$v_{BA} = \frac{r_B - r_A}{t}$$

Cómo $r_{BA} = r_B - r_A$ y $-r_{AB} = r_A - r_B$, entonces:
 $r_{BA} = -r_{AB}$; si se mide respecto al tiempo, se tiene:

$$v_{BA} = \frac{dr_{BA}}{dt}$$

$$v_{AB} = \frac{dr_{AB}}{dt}$$

Esto significa que: $v_{BA} = -v_{AB}$

Es decir que: $v_{BA} = v_B - v_A$ y $v_{AB} = v_A - v_B$.

Ejemplo

Dos vehículos viajan por carreteras que parten de un punto en común, como se indica en la Fig. 2.57; se separan y forman un ángulo de 50° . Si los vehículos viajan a 50 km/h y 60 km/h , ¿cuál es la velocidad relativa que los separa, tanto v_{BA} cómo v_{AB} ?

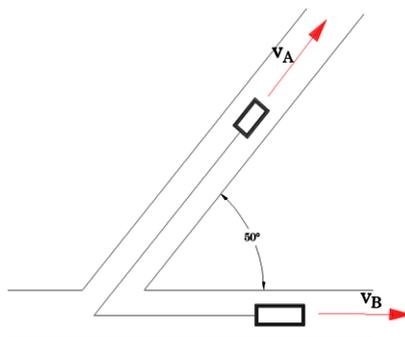


Fig. 2.57. Esquema de dos carreteras, por las cuales se movilizan dos vehículos.

Solución.

Es conveniente utilizar el Teorema del coseno para calcular la velocidad relativa. Así:

$$v_{BA}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 50$$

$$v_{BA}^2 = 50^2 + 60^2 - 2 \times 50 \times 60 \times \cos 50$$

$$v_{BA}^2 = 2500 + 3600 - 3856.7$$

$$v_{BA} = 47.36 \text{ km/h}$$

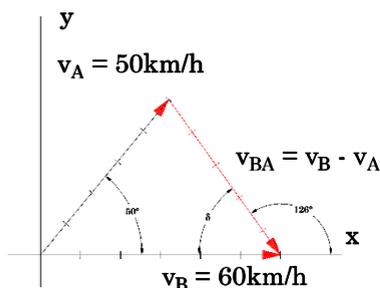


Fig. 2.58. Esquema vectorial de las velocidades de los vehículos.

El observador que está en el vehículo B observará que el vehículo A se aleja a razón de 47.36 km/h , mientras que el observador del vehículo A observará que el vehículo B se aleja con una velocidad de -47.36 km/h .

Para calcular la dirección del vector relativo, se puede utilizar el Teorema del seno, de acuerdo a la Fig. 2.58; esto es:

$$\frac{v_{BA}}{\text{Sen}50} = \frac{v_A}{\text{Sen}\delta}$$

con lo cual se puede despejar el $\text{Sen}\delta$; esto es:

$$\delta = \text{Sen}^{-1} \frac{v_A \text{Sen}50}{v_{BA}}$$

$$\delta = \text{Sen}^{-1} \frac{50 \times 0.77}{47.36}$$

$$\delta = 54^\circ 22'$$

Este ángulo está respecto al eje x y corresponde al ángulo interno del triángulo; por tanto, el ángulo externo corresponde al ángulo suplementario; es decir:

$$\alpha = 180^\circ - 54^\circ 22'$$

$$\alpha = 125^\circ 37'$$

Movimiento relativo de traslación o galileano.

Hay muchos ejemplos en los que se puede ver este efecto relativo; por ahora, consideremos el caso de un observador localizado al borde de una carretera y otro localizado dentro de un vehículo que viaja en la carretera rectilínea; ambos ven un ave que vuela de forma paralela a la carretera y con igual sentido al observador del vehículo.

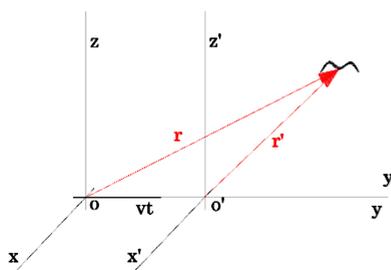


Fig. 2.59. Esquema de los dos sistemas de referencia que avistan un ave en vuelo.

En la Fig. 2.59 se puede observar el ave que ven los dos observadores: el estacionario o fijo y aquel que está en el vehículo con velocidad constante.

El sistema (x, y, z) corresponde al sistema estacionario o fijo; el observador está al borde de la carretera; el sistema (x', y', z') es el móvil, o sea el que viaja por la carretera con velocidad constante. El ave en vuelo es un sistema móvil, que tiene velocidad constante y se encuentra a una distancia vt del observador fijo; por tanto, el observador fijo puede medir la posición del ave mediante el vector posición r , y el observador móvil lo puede efectuar mediante el vector posición r' de tal modo que, de acuerdo con el esquema vectorial, se tiene:

$$r = vt + r'$$

Por tanto, la velocidad del ave es:

$$\frac{dr}{dt} = v + \frac{dr'}{dt}$$

(2.24)

$$V = v + v'$$

Esta expresión permite calcular la aceleración del ave.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv'}{dt}$$

$$a = a'$$

El resultado señala que la aceleración que mide el observador fijo es la misma que mide el observador móvil; no hay aceleración en el sistema primado debido a que tiene velocidad constante, entonces la aceleración del ave pueden medirla el observador fijo o el observador móvil y, en ambos casos, el resultado es el mismo.

Ejemplo.

Supongamos que se produce una explosión; por otra parte, se sabe que la velocidad del sonido es de $340m/s$ cuando la temperatura del medio es de $25^{\circ}C$. Entonces, calcular esta velocidad por un observador que se mueve radialmente a la explosión: a) alejándose; b) acercándose, siendo que el observador se mueve a razón de $90Km/h$.

Solución.

a) Cuando se acerca, como $v = 90km/h = 25m/s$, entonces, cuando se acerca, se tiene: $V = v + v'$; al remplazar:

$$V = 340m/s + 25m/s$$

$$V = 365m/s$$

b) Cuando se aleja, sería:

$$V = v - v'$$

$$V = 340m/s - 25m/s$$

$$V = 315m/s$$

Movimiento relativo entre sistemas de traslación y rotación

En muchas situaciones de la vida diaria nos podemos encontrar sometidos a dos movimientos: uno de rotación y otro de traslación. Para estudiar este caso, se considerará que sobre el movimiento de rotación se realiza el movimiento de traslación. Por tanto, se debe considerar una plataforma rotante con velocidad angular constante; por

otro lado, el sistema de traslación puede ser una pelota que sale de forma radial desde el centro y apunta a un punto en la periferia de la plataforma rotante; así, la pregunta es: ¿la pelota sí llegará al punto que se apunta desde el centro?

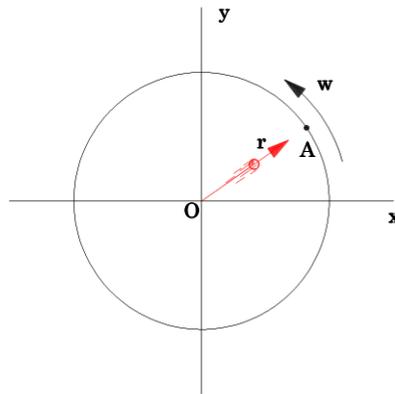


Fig. 2.60. Plataforma que gira con velocidad angular constante y una pelota que se mueve radialmente, también con velocidad uniforme.

Esto resulta similar al movimiento en dos dimensiones, donde un nadador que quiere llegar al otro lado de la orilla del río, justamente a un punto que ve desde la orilla de donde inicia la travesía; en este caso, al nadador lo arrastra la corriente del agua; en el caso de la plataforma rotante, como en la Fig. 2.60, ocurre algo similar, solo que, a medida que la pelota se aleja del centro, la corriente que experimenta es

mayor, y así seguirá aumentando hasta el final, para dar como resultado una huella en la plataforma, como la de una espiral; la pregunta es: ¿cuál es la fuerza que lleva a que apareciera esta trayectoria curvada en la plataforma, tal como se puede ver en la Fig. 2.61?

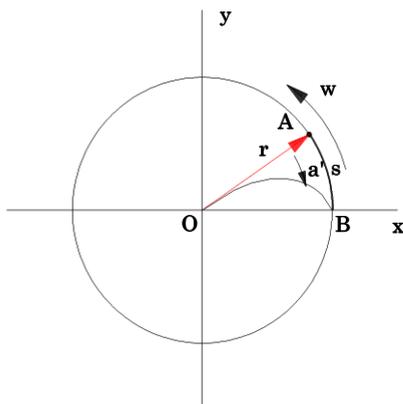


Fig. 2.61. Trayectoria que deja la pelota que rueda sobre la plataforma con velocidad angular constante.

La velocidad de la plataforma es constante, pero la velocidad lineal o tangencial crece con el radio; esto es: $v = \omega r$; además, se considera que la velocidad de la pelota es mayor que la velocidad lineal en cualquier punto del radio de la plataforma; por tanto: como la velocidad es $v = \frac{s}{t}$, al combinar estas dos

ecuaciones, se tiene:

$$s = (\omega r)t.$$

Ahora bien, como se puede ver en la Fig. 2.61, la trayectoria de la pelota se curva debido a una fuerza que aparece a medida que aumenta el radio; por tanto, se podría decir que responde a un movimiento acelerado; esto es:

$$s = \frac{1}{2} a' t^2.$$

En tramos pequeños, se podría igualar con el arco que se forma en la periferia de la plataforma, así:

$$(\omega r)t = \frac{1}{2} a' t^2.$$

Al despejar la aceleración, se tiene: $a' = \frac{2wr}{t}$; ahora

bien, como $\frac{r}{t} = v$, que es la velocidad lineal, entonces la aceleración primada es:

$$a' = 2 w v$$

Esta es la aceleración causante de que la huella que deja la pelota sobre la plataforma giratoria fuese una curva; a esto se lo denomina **aceleración de Coriolis**. Como se puede ver en la ecuación, depende del valor de la velocidad angular y de la velocidad lineal de la pelota.

Ahora bien, la velocidad general que adquiere la pelota es:

$$V = v' + v,$$

donde v' es la velocidad resultado del movimiento transversal de la pelota, y v es la velocidad lineal o tangencial de la plataforma justamente en el sitio donde se encuentra la pelota. Por tanto, esto se puede escribir como:

$$V = v' + w r.$$

Por otra parte, la aceleración centrípeta es: $a = \frac{V^2}{r}$; entonces, al remplazar se obtiene la aceleración de todo el sistema:

$$a = \frac{(v' + w r)^2}{r}.$$

Al resolver el binomio, se tiene:

$$a = \frac{v'^2 + 2wrv + w^2 r^2}{r}$$

$$a = \frac{v'^2}{r} + 2wv + w^2 r$$

Si se simplifica, se tiene:

$$a = a' + 2wr + w^2 r \quad (2.25),$$

donde el primer término corresponde a la aceleración de la pelota, el segundo término es la aceleración de Coriolis y el tercer término corresponde a la aceleración centrípeta.

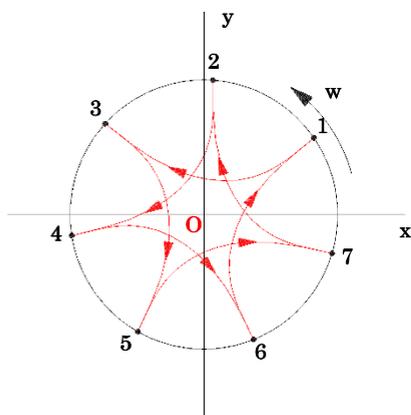


Fig. 2.62. Trayectorias de un péndulo de Foucault.

Péndulo de Foucault

En 1851, el físico francés Jean – Bernard - Léon Foucault, bajo el concepto de la aceleración de Coriolis que se presenta en el hemisferio norte, por

encima del paralelo 60, lo consideró como una gran plataforma giratoria con velocidad angular constante; así que una partícula que se moviera con dirección meridional y en sentido hacia el ecuador experimenta una aceleración que lleva a que la trayectoria se curvaba siempre a la derecha, sin importar si lo hacía hacia el ecuador o desde el ecuador hacia el polo norte o sur, así que un buen péndulo que tuviera un significativo momento de inercia, oscilará libremente, con lo cual se podrá notar que, cada vez que lo hace, la trayectoria pareciera modificar el plano de oscilación.

Al liberarlo, el péndulo de Foucault tenía una masa de 28Kg y una longitud de 70m; el péndulo osciló libremente sin cambiar de plano de oscilación, pero, conforme pasaba el tiempo, cambia la tierra por la rotación constante; la explicación de Foucault fue contundente y clara, para quedar demostrada por primera vez la rotación de la tierra; como se ve en la Fig. 2.62, la primera posición del péndulo es en 1, desde aquí llega a 5, 7, 2, 4, 6 y retorna al punto de partida 1, justo cuando se hubieran cumplido las 24 horas.

Cauces de los ríos en los hemisferios. Igualmente ocurre en los cauces de los ríos cuya dirección fuese meridional y tuvieran sentido hacia el ecuador o hacia los polos; ocurre que el lado derecho del cauce siempre está más socavado que el izquierdo para el Polo Norte, y derecho para el Polo Sur; porque el lado recibe más agua o soporta más presión que la orilla contraria (Fig. 2.63).



Fig. 2.63. Fotografía espacial de la tierra; obsérvese el gran remolino en el Polo Sur. Fuente: NASA.

Rieles de carrileras del hemisferio norte y sur. Otro caso es lo que ocurre con los rieles de los trenes que tuvieran dirección meridional, pues se ha observado que hay un mayor desgaste en el lado derecho que en el lado izquierdo, para el Polo Norte, y lo contrario para el Polo Sur.

Formación de grandes remolinos en las nubes, tanto en el Polo Norte como en el Polo Sur

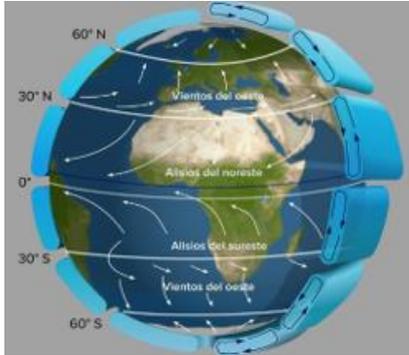


Fig. 2.64. Vientos preponderantes en el hemisferio norte y sur. Fuente: <https://www.tiempo.com/ram/465781/los-tropicos-se-estan-ampliando/>

Dada la radiación solar en la zona ecuatorial, el aire se calienta y, por tanto, se torna más liviano, lo que genera una corriente de ascenso; una vez alcanzada una determinada altura, el aire se desplaza hacia las zonas polares, donde cae en forma de aire frío; desde aquí se dirige hacia el ecuador para conformar la gran turbulencia primigenia, que no es más que una corriente

de convección natural.

Como la tierra permanece girando, y el aire en las zonas polares se traslada sobre la superficie terrestre en dirección meridional, la combinación de estos dos movimientos genera en movimiento la aceleración de Coriolis y, como resultado, la turbulencia primigenia se divide en tres turbulencias menores, conocidas como células, como se ve en la Fig. 2.64: desde el ecuador hasta el paralelo 30, se forma la célula de Hadley y se forman los vientos alisios. Dentro de los continentes, prevalecen en las zonas planas, pero, al chocar con montañas, se deforman las turbulencias y se conforman los vientos de continente y montaña, que tienen otra dinámica, que no se tratará en este nivel.

Las turbulencias forman dos cinturones: en el paralelo 30 está el cinturón de alta presión, mientras que en el paralelo 60 se presenta un cinturón de baja presión; al igual como ocurre en la línea ecuatorial, cosa similar ocurre en el hemisferio sur.

Capítulo 3

Dinámica



Fuente: https://www.cat.com/es_US/products/new/equipment/dozers/medium-dozers/15969751.html

Desde la época de los griegos, la gran pregunta era por qué se mueven los objetos después de impulsarlos; según Aristóteles, había dos tipos de movimientos: el movimiento natural y el movimiento violento, como es el caso de lanzar un objeto. El asunto es: ¿qué le pasa al objeto después de que lo lanzan? ¿Por qué sigue moviéndose? La conjetura aristotélica señalaba que el aire se encargaba de empujar al objeto; muchos años pasaron con esta idea hasta cuando, al fin, Newton (1642-1727) puso las cosas en su sitio.

Según Newton, el asunto del movimiento de los cuerpos se fundamenta en las tres leyes fundamentales: que se conocen como Leyes de la dinámica: Ley de la Inercia, Ley de la fuerza, Ley de la acción y reacción.

3.1 Leyes de la Dinámica

Primera Ley. Inercia: “Propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en el estado natural que se encuentran bien sea de reposo o movimiento rectilíneo uniforme”

Esto se puede sentir y ver muy bien cuando se viaja en un bus urbano: si el conductor del bus acelera, las personas que se aseguran de la barra horizontal del techo tienden a quedarse y, al contrario, si el conductor frena el bus, los pasajeros tienden a irse hacia adelante. De igual forma, si en un vehículo de competición, las llantas patinan al arrancar, el cuerpo que conforma el vehículo tiende a quedarse y, al contrario, cuando ya ha adquirido una buena velocidad y frena con brusquedad, el vehículo tiende a resbalar unos buenos metros.

Estos y muchos más fenómenos de inercia se presentan en la vida cotidiana; resulta fácil descubrir en qué momento se está cambiando de estado, pero resulta muy complicado saber si se está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, cuando no hay puntos de referencia; por ejemplo, cuando se viaja en un avión en un día en el que no hay turbulencia, se puede tomar una taza de café y no percibir el menor movimiento, salvo si se mira a través de la ventana para darse cuenta que se está moviendo a gran velocidad, la tierra se está

moviendo, y no justamente en movimiento rectilíneo uniforme; la trayectoria de la tierra alrededor del sol es elíptica, pero no se percibe que nos movemos con velocidad promedio de 30.000m/s, unos 30Km/s o 108.000Km/h; por supuesto, esta velocidad extraordinaria es mayor que cualquier velocidad de proyectiles disparados por tanques de guerra, que alcanzan unos 1.800m/s.

Ahora bien, infortunadamente, en la mayoría de los accidentes siempre se presenta la inercia, ya fuesen accidentes automovilísticos o simples caídas cotidianas. Los planetas llevan millones de años girando alrededor del sol y así seguirán haciéndolo por otros millones de años debido a la inercia.

Segunda Ley. Fuerza. Para que un objeto cambie su estado natural de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, se necesita una fuerza que, aplicada al objeto, modifique su estado natural; así, los estados de transición de reposo a movimiento o de movimiento a reposo se logran por la acción de una fuerza externa.

Por ejemplo, cuando el conductor de un bus frena, en este caso la fuerza externa se produce entre la superficie de la llanta y la superficie de la vía, por lo que los pasajeros tratan de irse hacia adelante; si la barra no se ha asegurado bien, puede soltarse debido a la fuerza inercial que los pasajeros establecen contra la barra.

En el caso de un avión, con vuelo horizontal, los motores generan mucha fuerza para mantener la misma velocidad; de lo contrario, por efecto del rozamiento con el aire, el avión perdería velocidad y terminaría por caer al igual que lo hace un aeromodelo; en este caso, las fuerzas que generan los motores evitan que el avión se frene; es decir, evitan la desaceleración, de modo que, mientras está en movimiento uniforme, los pasajeros del avión no sienten nada, pareciera como si el avión estuviera en reposo.

Tercera Ley. Acción y Reacción. En el caso de la fuerza que generan los motores del avión para mantenerlo en

movimiento rectilíneo uniforme y evitar que el aire lo frenara, la fuerza que producen los motores se equilibra con la fuerza de rozamiento del aire, de la misma forma como el piso soporta el peso de una persona o de un objeto; así que la ley se puede establecer así: “a toda fuerza se opone otra de igual intensidad y de sentido contrario”. Con esto queda claro que no existe una sola fuerza; siempre habrá un par de fuerzas, denominadas de acción y reacción.

Siempre que hubiera cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme se presentarán las tres Leyes de la Newton o de la dinámica; así, hay una respuesta al porqué del movimiento o reposo de los cuerpos.

Ahora bien, ya que las tres leyes se han establecido de forma cualitativa, es necesario establecerlas de modo cuantitativo; para esto, es necesario plantear esta definición:

3.2 Momentum o cantidad de movimiento.

Todos los cuerpos poseedores de masa, que estén en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, tienen una cantidad de movimiento, definido como:

$$P = mv \quad (3.1)$$

Como se ve, la cantidad de movimiento, al igual que la velocidad, es un vector que depende de la masa, algo que hasta el momento no se había planteado; así, un objeto de masa pequeña, pero con una gran velocidad, como un proyectil, tiene tanto momentum como otro de gran masa, pero con poca velocidad.

En el caso de una ballena azul, el animal más grande del planeta, que llega a tener unos 180.000 kilogramos de masa y desplazarse a unos 45Km/h, es decir unos 12.5m/s, su momentum sería:

$$P = mv$$

$$P = (180.000Kg)(12.5 m/s)$$

$$P = 2'250.000 Kg \frac{m}{s}$$

Con este valor, es un peligro que llegara a golpear a una nave o embarcación pequeña. En el caso de un proyectil cuya masa es de unos 250Kg, pero la velocidad es 1800m/s:

$$P = mv$$

$$P = (0.25Kg)(1800m/s)$$

$$P = 450Kg \frac{m}{s}$$

Con esta cantidad de movimiento, el proyectil puede causar daño al mejor acorazado. Así que se pueden redefinir las leyes de la dinámica con base en el momentum.

Inercia. La tendencia de los cuerpos a permanecer en el estado natural en el que se encuentran. En términos del momentum, podemos describir esto como la tendencia que tienen los cuerpos a tener el momentum constante $P = cte$; si están en reposo, el momentum será cero y, si está en movimiento, será constante, lo que implica que no cambia la velocidad puesto que la masa tampoco lo hace.

Fuerza. Para que un cuerpo cambie su estado natural, se necesita de una fuerza; esto implica que hay una variación del momentum lineal en el tiempo, o sea:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Cuando se lleva el tiempo al límite y el momentum es una función continua, entonces se tiene:

$$F = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}$$

Entonces, la fuerza se define como:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (3.2)$$

Ahora bien, como $P = mv$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

A partir de esta expresión, se pueden presentar tres casos para estudiar:

1. Si la masa permanece constante, entonces, se tiene:

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

Como $\frac{dv}{dt} = a$ es la aceleración, al remplazar, se tiene:

$$F = ma \quad (3.3)$$

Esta expresión se encuentra en los textos de Física de educación secundaria y permite deducir las unidades con las que se va a medir la fuerza, en el caso del SI:

$$[F] = [Kg] \left[\frac{m}{s^2} \right] = N \quad \text{Newtons}$$

En el sistema CGS, se tiene: $[F] = [Gm] \left[\frac{Cm}{s^2} \right] = D \quad \text{Dinas}$

Ahora bien, la pregunta es: ¿cuántas dinas tiene un newton?

$$N = Kg \frac{m}{s^2}$$

$$N = 10^3 Gm \frac{10^2 Cm}{s^2}$$

$$N = 10^5 D$$

Entonces, un Newton equivale a *100.000 Dinas*.

2. Si la velocidad permanece constante:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (3.4)$$

$$F = v \frac{dm}{dt}$$

En este caso, la masa está cambiando, mientras la velocidad se mantiene constante; un ejemplo de esto lo constituyen las gradas y rampas eléctricas, con carga o sin ella, que siempre están moviéndose a la misma velocidad.

En la Fig. 3.1, se ven los dos sentidos, de subir y bajar, de un par de escaleras mecánicas: las escaleras de la derecha se ven cargadas de gente que las utilizan, mientras en el lado izquierdo se ven casi vacías; sin embargo, ambos sentidos se mueven con la



Fig. 3.1. Escaleras mecánicas en el Aeropuerto Internacional de Bogotá.

Fuente: Gente de cañaveral (2016).

misma velocidad (aunque, en ocasiones, para ahorrar energía, cuando no hay usuarios, el sistema se ralentiza).

Por supuesto que los motores generan mucha más fuerza cuando las gradas están cargadas y, sobre todo, cuando suben con usuarios; el cálculo se hará con el número máximo de personas por peldaño y esto por el número de peldaños activos. De igual forma ocurre con ascensores que se desplazan con igual velocidad, con carga o sin ella.

3. En este caso, se tendrá en cuenta cuando tanto la velocidad como la masa varían; esto es:

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (3.5)$$



Fig. 3.2. Lanzamiento de un transbordador espacial.
Fuente: NASA.



Fig. 3.3. Desplazamiento del pulpo mediante un chorro de agua.
Fuente: Kok (2007).

Como se puede ver, las dos variables son susceptibles de cambiar en el tiempo; un ejemplo muy apropiado de este caso es el vuelo de cohetes: estos móviles parten del reposo y cambian la velocidad a medida que queman el combustible, con lo cual varía la masa, tal como se puede observar en la Fig. 3.2, correspondiente al lanzamiento de un transbordador espacial. En esta gráfica, se puede ver la cantidad de gas, resultado de la combustión del hidrógeno líquido y el oxígeno, con lo cual logran el cohete principal y el transbordador despegar de la plataforma: más de 2000 toneladas de peso, donde el tanque principal, lleno de combustible líquido, convierte, en solo 120 segundos, todo el

combustible en gases que impulsan a la nave. En la vida acuática, también se tienen ejemplos de este tipo de desplazamiento, pues la mayoría de los cefalópodos lo utilizan para poder desplazarse con rapidez; en la Fig. 3.3, se observa el escape o desplazamiento de un pulpo, después de expulsar un fuerte chorro de agua; cuando se siente en peligro, lo hace y suelta un poco de tinta para perderse entre el agua manchada. Como se puede ver, hay una variación de la masa al expulsar el agua, y variación de la velocidad al pasar del reposo al movimiento.

Acción y Reacción. Como a toda fuerza se opone otra de igual intensidad, pero de sentido contrario, decimos que:

$$F_1 = -F_2 \quad (3.6)$$

El signo menos indica el sentido contrario, pero la magnitud de la fuerza es igual. Ahora bien, debido a que la

fuerza se define como: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, entonces la tercera ley se puede escribir así:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta p_2}{\Delta t}$$

Como la fuerza de reacción aparece justamente cuando se aplica la acción, entonces el tiempo en ambos lados es el mismo; por tanto, la tercera ley de la dinámica quedará:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (3.7)$$

Por otra parte, debido a que toda variación se puede expresar como: $\Delta p_1 = p_{1a} - p_{1b}$, esto queda:

$$p_{1a} - p_{1b} = -(p_{2a} - p_{2b})$$

$$p_{1a} - p_{1b} = p_{2b} - p_{2a}$$

A partir de la expresión (3.7), la variación Δp_1 significa antes de la interacción, y Δp_2 significa después; ahora bien, antes de la interacción presenta dos situaciones: al iniciar y al finalizar la interacción; lo mismo ocurre después de la interacción: hay dos situaciones a tener en cuenta.

3.3 Conservación del momentum lineal.

En el caso de tener varias partículas que interactúen, se debería considerar la suma de los momentos individuales; como se puede ver en la Fig. 3.4, antes de la explosión, el objeto tiene el momentum P ; ahora bien, después de la explosión quedan muchos perdigones y cada uno tiene un momentum, de tal modo que al efectuar la sumatoria de los momentos de cada uno de los perdigones, sin tener en cuenta la energía adicional que le imprimen los explosivos, la cantidad total sería igual al

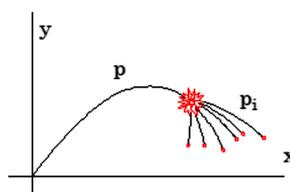


Fig. 3.4. trayectoria de los perdigones de la explosión.

momentum de la bomba antes de la explosión; entonces, aquí tenemos un antes igual a un después; esto es:

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta p_i \quad (3.8)$$

Movimiento de los cuerpos. En la vida diaria encontramos situaciones que nos llevan a pensar cómo se mueven los cuerpos o por qué se mueven o por qué no se mueven. En los talleres industriales, se puede observar que grandes y pesadas máquinas se anclan al piso con enormes pernos, sobre bases de concreto, y nos preguntamos ¿por qué? La respuesta inmediata es: “Para que no se volteen”, pero, si ya están en su sitio, ¿por qué tendrían que voltearse? Por ejemplo, en el caso de un torno de metales, de no estar anclado al piso no podría hacer girar un cuerpo excéntrico y pesado; en poco tiempo habría volteado la máquina y producido graves daños. Entonces, ¿qué hace el anclaje de los cuerpos al piso? Por otra parte, si el cuerpo a trabajar es pequeño, comparado con la masa del torno, no existiría ningún problema en trabajarlo, por excéntrico que fuera. En este caso, se está comparando la masa de los dos cuerpos y, sin duda, el cuerpo de mayor masa con poca velocidad tendría un gran momentum lineal, mientras que el cuerpo de masa pequeña debería tener una velocidad grande, para poder igualar al cuerpo grande; por seguridad, es mejor anclar la máquina a tierra y, así, la pieza que se pone para que la maquina podrá soportarse mejor; es como si comparáramos la masa de la pieza con la masa de la tierra; esto no es más que conservación del momentum lineal. A partir de (3.7), se tiene:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

$$p_1 = -p_2$$

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

Esto también se ve en el deporte del boxeo y de la lucha libre: los competidores deben llegar a la confrontación con igual peso; en muchos casos, las peleas se han perdido antes

de entrar al cuadrilátero, porque el contendiente supera el peso permitido; de modo que, si las masas son iguales, solo queda por comparar la velocidad y la agilidad de los competidores, lo que resulta de un buen entrenamiento y del talento deportivo.

Ahora bien, en el caso del movimiento de los diferentes vehículos, como se puede ver en la Fig. 3.5, donde se tiene un coche halado por un caballo, un tipo de transporte que ha acompañado a la humanidad por muchos siglos, de un vehículo motorizado de la edad postmoderna, un buque transatlántico igualmente muy moderno, un avión de pasajeros Airbus A320 y el Apolo 11, con el que Michael Collins orbitó la luna para que Neil Armstrong y Edwin F. Aldrin llegaran a caminar sobre la superficie de la luna por primera vez en la historia de la humanidad, el 20 de julio de 1969, en cada uno de los movimientos de estos vehículos se presentan las tres Leyes de la dinámica, pero mucha atención con la tercera Ley. En el primer caso, del coche halado por el caballo, en un punto cualquiera de las cuerdas con las que el caballo hala el coche van a estar presentes las fuerzas de acción y reacción; es decir, $F_1 = -F_2$; por tanto, las dos fuerzas son iguales aun en las puntas de los cascos; así, regresamos a la pregunta anterior: ¿por qué se mueve?

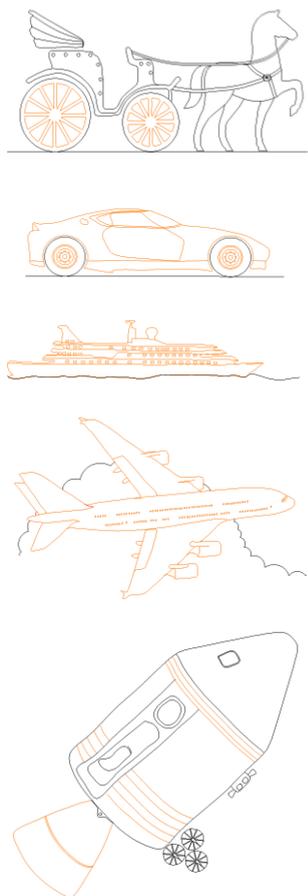


Fig. 3.5. Cuatro casos donde se presenta el movimiento debido a la conservación del momentum lineal.

En el caso del vehículo de alta gama, en el punto donde establecen contacto las ruedas de tracción con la carretera se tendrá igual situación: la acción será igual a la reacción y, sin embargo, se logra desplazar.

En el caso del buque, los motores que lo impulsan logran echar agua hacia atrás mientras el buque se desplaza hacia adelante, pero la situación es la misma, la tercera ley de la dinámica sigue igual: $F_1 = -F_2$, así que tanta fuerza ejercen los motores para impulsar el agua hacia atrás, como esta responde con igual intensidad.

En el caso del avión, Airbus A380, la interacción es con el aire: para que la nave lograra alcanzar una velocidad considerable para mantenerse en el aire, los cuatro motores Roll Royce, que tienen 900 HP, que impulsan al avión a desplazarse hacia adelante, pero el aire también acciona contra los motores con una fuerza igual y de sentido contrario.

En todos estos casos, siempre hay una interacción con un medio, bien fuera la tierra, el pavimento, el agua y el aire. En el caso de la Apolo 11, no hay medio con el que pudiera interactuar, pues la nave se desplaza en el vacío; entonces, aquí se pregunta: ¿dónde se impulsa? Quizá aquí está la respuesta para todos los casos; pues bien, los gases expulsados por la tobera, comparados con la masa de la nave, son de masa insignificante, pero la velocidad es muy grande; entonces, a partir del principio de conservación del momentum, se dice:

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

Al considerar que la velocidad v_2 es la velocidad de la nave, se tiene:

$$v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2} \quad (3.9)$$

Como $m_1 < m_2$, entonces, para que hubiera una velocidad significativa en la nave $v_1 \gg v_2$; es decir la velocidad de los gases debe ser muy grande.

Nota. *este análisis solo es válido para entender el principio del movimiento; luego se analizará el movimiento del cohete.*

Con base en esto, ya resulta muy sencillo entender el movimiento del avión: aunque interactúa con el aire, los motores empujan tanto aire a gran velocidad, que le permite avanzar bajo las mismas condiciones de la ecuación (3.9); igual ocurre con el buque; en el caso del automóvil de carreras, como sus llantas no patinan sobre la superficie de la carretera, entonces se está frente a una balanza de la masa del automóvil de 1500 Kg y la masa de la tierra de 5.972×10^{24} Kg; sin duda, al avanzar el auto, la tierra retrocede en una cantidad proporcional a la diferencia de masa; lo mismo ocurre en el caso del coche de caballos: los cascos, al prenderse en la tierra, avanzan para llevar a que la tierra retrocediera una cantidad proporcional a la diferencia de las masas; así, aunque la tercera Ley de Newton es $\sum_{i=0}^n F_i = 0$, el momentum lineal permite el movimiento;

entonces, ahora se entiende por qué las máquinas deben anclarse al piso: esto es para que la máquina trabajara como un apéndice de la tierra, de modo que el cuerpo irregular que girara o que tuviera que moverse, lo hará versus la masa de la máquina y de la tierra.

En el caso de la caída libre, el objeto cae porque la tierra lo atrae, pero, por la tercera Ley de la dinámica, $F_1 = -F_2$, con la misma fuerza con que la tierra atrae al cuerpo, este también atrae a la tierra con la misma fuerza, así que, matemáticamente, resulta muy claro que, mientras el cuerpo cae, la tierra sube a su encuentro, pero, en la práctica, este resultado está muy lejos de ocurrir debido al gran tamaño de la tierra comparado con el tamaño del objeto en referencia, pero si el cuerpo fuera tan grande como la tierra, el movimiento resultaría algo similar a lo que ocurre

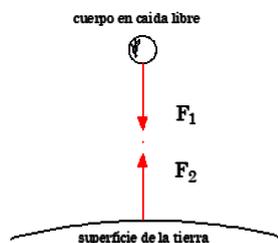


Fig. 3.6. Diagrama de fuerzas de un cuerpo en caída libre.

con la luna: a pesar de que el tamaño de la luna es menor, ya es considerable para que la tierra también se moviera, así que tierra y luna rotan entre sí y, de acuerdo con el tamaño de los planetas, hay un punto en común donde rotan entre sí; a esto se lo denomina centro de masa entre los dos planetas; si se compara con la masa del sol, la tierra se mueve, y no el sol (Fig. 3.6).

3.4 Fuerzas ficticias y verdaderas

Como la definición de la fuerza es la variación del momentum en función del tiempo: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, cuando se está

dentro de un bus de pasajeros, estos se resisten al cambio del momentum; cuando por alguna causa el conductor decide frenar, la respuesta a este evento la muestran los pasajeros que tienden a salir proyectados a través del parabrisas; es decir, sienten una fuerza hacia adelante; bueno, esta fuerza es el resultado del cambio de la velocidad que los frenos establecen, por lo que se considera una fuerza ficticia, resultado del cambio del momentum; así, los frenos pueden ser la fuerza de acción y la reacción s la que sienten los pasajeros en el interior del vehículo; similar cosa ocurre cuando el vehículo pasa del reposo al movimiento.

Sin embargo, en la naturaleza se encuentran cuatro fuerzas, cuya índole se investiga desde hace mucho tiempo:

Fuerza gravitacional. Sir Isaac Newton, en 1665, recluido en Woolsthorpe, condado de Lincolnshire, a 100 Km de Londres por la pandemia de la peste negra que azotaba al mundo por esos tiempos, un desafortunado suceso histórico para la salud de la humanidad, se concentró en la investigación y, en 1687, dio a conocer el libro resultado de estas investigaciones: los *Principia*, en el que se establece la ley por la cual los planetas se encuentran en sus órbitas y por la cual los objetos caen a la tierra con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; esto es, la teoría de la gravitación universal, con la cual finalizaron tantas especulaciones:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.10)$$

Donde γ se conoce como la constante de Cavendish, cuyo valor se dio a conocer en 1798; $\gamma = 6.674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$; m_1 y m_2 son las masas de los planetas o cuerpos en referencia y r^2 es la distancia que los separa.

Por la tercera Ley de la dinámica, se establece que: $F_1 = -F_2$; entonces,

$$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 a .$$

Si m_1 es la masa del planeta, se tiene:

$$a = -\gamma \frac{m_2}{r^2}$$

Esta aceleración no es más que la gravedad de la tierra, y se la denota como g :

$$g = -\gamma \frac{m_2}{r^2}$$

En el caso de la tierra, la masa es $m = 5.972 \times 10^{24} kg$, y el radio de la tierra, en promedio: $r = 6.731 \times 10^6 m$; al remplazar estos valores:

$$g = -(6.674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}) \frac{5.972 \times 10^{24} kg}{(6.731 \times 10^6 m)^2}$$

Con estos cálculos, se tiene un valor aproximado del valor de la gravedad, sin considerar los accidentes geográficos ni los materiales de la tierra.

El valor aceptado por la Oficina de Pesas y Medidas es: $g = -9.81 \frac{m}{s^2}$.

Todos los cuerpos que tuvieran masa se consideran sometidos a la gravedad; por tanto, tienen peso; esto es:

$$\begin{aligned} F &= ma = -mg \\ \text{peso} &= -mg \end{aligned} \quad (3.11)$$

El signo menos se utiliza para recordar que el peso de los cuerpos se dirige hacia el centro de la tierra, es decir, hacia abajo, en nuestro sistema de referencia sobre la superficie de la tierra.

Fuerza electromagnética. James Clerk Maxwell (1831-1859) formuló la teoría clásica del electromagnetismo y dejó muy claro los fenómenos de la electricidad y el magnetismo; sin embargo, Charles Agustín Coulomb (1736-1806) había encontrado la fuerza eléctrica de atracción y repulsión de cargas eléctricas:

$$F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3.12),$$

donde K es la constante de Coulomb $K = 8.97 \times 10^9 \frac{m^2 N}{C^2}$,

Q_1 y Q_2 son la carga de las partículas en referencia y, por último, r^2 es la distancia entre las cargas. La fuerza puede ser de atracción, en caso de que las cargas fuesen de signo contrario, y de repulsión en caso de tener igual signo. Las cargas pueden ser vitrosas o cargas positivas, y resinosas, cuando son de signo negativo.

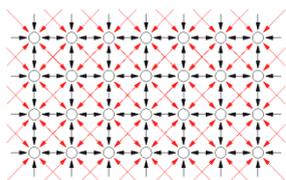


Fig. 3.7. Esquema de la disposición de los componentes microscópicos de un material.

Como todos los cuerpos se conforman de cristales, moléculas y átomos, en estas dimensiones se mantienen la forma y la rigidez precisamente debido a la fuerza eléctrica entre sus componentes microscópicos y sub microscópicos; en la Fig. 3.7, una distribución muy sencilla sobre cómo podrían distribuirse los componentes microscópicos. Las distancias entre

las moléculas tienden a ser constantes y cualquier variación que se pudiera presentar originará la elasticidad de los materiales; en muchos casos, estas distancias pueden variar con la temperatura, por lo que se estaría refiriendo, de forma macroscópica, a una dilatación térmica.

Fuerza nuclear débil. El francés Antoine Henri Becquerel (1852-1908) la descubrió, casi de forma ocasional, mientras estudiaba la fluorescencia del sulfato doble de uranio y potasio, cuando encontró revelada una película fotográfica que se había guardado en la oscuridad cerca de un trozo de uranio. Esos experimentos los continuaron los esposos Pierre y Marie Curie, quienes descubrieron dos elementos mucho más radioactivos que el uranio, nombrados radio y polonio, por lo cual recibieron el Premio Nobel; recuérdese que Marie Curie fue la primera mujer en recibir dos Premios Nobel.

De acuerdo con el modelo atómico de Arnold Sommerfeld, dos partes conforman el átomo: la estructura electrónica y el núcleo; aquí se origina la radioactividad, tanto natural como inducida; en el primer caso, hay materiales que, de forma espontánea, expulsan partículas alfa o núcleos de hidrógeno, y beta o neutrones; con el tiempo, estas desintegraciones radioactivas de núcleos inestables producen una transmutación química, o sea, se convierten en otro elemento químico con núcleo más liviano y estable, como es el caso del radio, el elemento más radioactivo de la naturaleza.

Así que la fuerza existente en el núcleo de estos elementos es la causa de la emisión espontánea, lo que genera tanta energía, que la convierte en la tercera fuerza de la naturaleza.

Fuerza nuclear fuerte. El científico alemán Albert Einstein (1879-1955), en 1905 publicó los cuatro artículos más célebres de la Historia de la Física: Efecto fotoeléctrico, Determinación de las dimensiones moleculares (movimiento browniano), Electrodinámica de los cuerpos en movimiento o relatividad especial, y Equivalencia de la masa y la energía: $E = \Delta mc^2$, que prácticamente fue una consecuencia de la teoría de la relatividad especial. En diciembre de 1938, al

inicio de la Segunda Guerra Mundial, el grupo de estudios de Otto Hahn, Fritz Strassmann, Lisa Meitner y Otto Frisch le informaron al mundo científico que era posible la fisión nuclear y por primera vez se comprobaba la ecuación de la energía de Einstein.

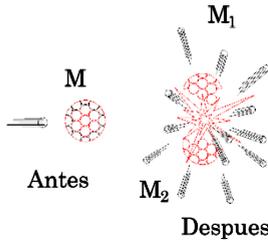


Fig. 3.8. Esquema aproximado de una fisión nuclear.

En la Fig. 3.8 se puede ver un esquema aproximado de una fisión nuclear, donde una partícula de masa M , posiblemente un neutrón provisto de alta velocidad, golpea un núcleo de algún material fácil de fisiónar, como el radioisótopo de uranio 235; como resultado de la colisión, el núcleo se parte en dos, desprende mucha energía y nuevas partículas; lo sorprendente está en

que la suma de las masas parciales es menor que la masa del núcleo antes de la colisión; es decir:

$$M > m_1 + m_2 .$$

El faltante de la masa Δm es justamente lo que se convierte en energía, de acuerdo a la ecuación de Einstein $E = \Delta mc^2$; con base en estos resultados, otra de las predicciones de Einstein se cumplía y así comienza una carrera armamentística para llegar a obtener la bomba atómica. Los Estados Unidos ganaron en esta carrera y, el 6 de agosto de 1945, a las 8:15 de la mañana explotó, en los cielos de Hiroshima, una bomba de uranio; la explosión dejó más de 80.000 muertos; luego, el 9 de agosto, en Nagasaki, una bomba de plutonio explotaba, con similares resultados.

Con estos resultados, queda claro que la fuerza que hay en el interior de los núcleos es lo más grande que tenemos en la naturaleza.

Peso. El peso de los cuerpos se ha discutido por tantos años, hasta cuando, con la teoría de la gravitación universal, se

aclaró todo. El peso no es más que la fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos; su valor depende del valor de la masa; o sea:

$$peso = w = -mg \quad (3.13)$$

El signo negativo indica que el peso siempre se dirige hacia abajo; por ahora, las unidades son las mismas de la fuerza: Newton y Dina.

Fuerza elástica. Cuando se refiere a este tipo de fuerza, de inmediato se piensa en resortes, los que, posiblemente, fuesen la mejor representación que se tuviera sobre fuerza elástica; solo se debería conocer la representación matemática.

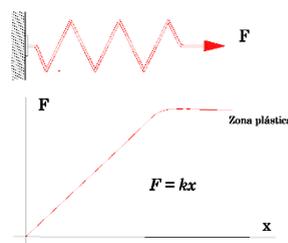


Fig. 3.9. Expansión de un resorte y gráfica de la respuesta del resorte.

Se conoce con la denominación de **Ley de Hooke**:

$$F = -k x \quad (3.14)$$

Cuando a un resorte se le aplica una fuerza expansiva, el resorte responde de forma contraria, al seguir la tercera Ley de la dinámica; por el contrario, si la fuerza es compresora, el resorte se resiste a perder longitud, de modo que el signo menos de la función no es más que la respuesta del resorte; por tanto, la ecuación (3.14) representa la fuerza elástica en un resorte (Fig. 3.9).

La constante k , o constante de proporcionalidad, representa la constante de elasticidad del resorte, cuyas unidades de medida son: $[k] = \frac{N}{m}$

Nota. En general, se acostumbra a dibujar la gráfica con pendiente positiva, cuando, en realidad, debe ser negativa. Por otra parte, la Ley de Hooke es una función lineal, pero se debe entender que esto se limita, pues un resorte no puede ser infinitamente elástico; por tanto, se refiere a una zona de

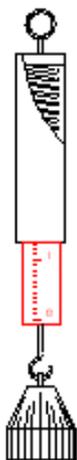


Fig. 3.10. Esquema de un dinamómetro.

elasticidad; por fuera de esta zona, el material se comporta como un plástico y no podrá regresar a su forma original, como sí lo efectúa cuando trabaja en la zona elástica; es decir, un resorte es elástico mientras trabaja en la zona elástica, pero, si se estira más de lo normal, el resorte se va a deformar; en esta situación, el resorte no podrá recobrar su forma original, “el resorte se ha dañado”.

La Ley de Hooke se aplica en todos los sistemas que utilizan resortes para medir fuerzas; ya fuesen básculas con sistemas mecánicos análogos o digitales, siempre habrá un resorte que trabaja en la zona línea o elástica; tal como se puede ver en la Fig. 3.10, en un dinamómetro que puede medir el peso mg del cuerpo, que está sujeto en su parte baja, el valor lo da según la escala enumerada y calibrada en algún tipo de unidades de medida de la fuerza, bien pueden ser newtons, dinas o cualquier otro tipo de unidades.

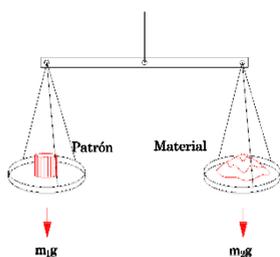


Fig. 3.11. Balanza de brazos iguales.

Peso y masa. Con muchísima frecuencia se confunde el peso con la masa; sin embargo, desde la antigüedad se conoce un instrumento que permite comparar el peso de los cuerpos con uno conocido como pesa patrón: este es la balanza romana de brazos iguales (Fig. 3.11), que se conforma por una barra suspendida del centro; de los extremos se cuelgan

los platos o soportes en los que se coloca la pesa patrón y el material a comparar; cuando la balanza alcanza el equilibrio, es decir, la barra se encuentra de forma horizontal, nos da a

entender que el material tiene igual peso que la pesa patrón. Se entiende que, para lograr el equilibrio, se debería poner o quitar material con sumo cuidado, de modo que, cuando está en equilibrio, el peso del plato A es igual al peso del plato B; esto es:

$$m_1 g = m_2 g .$$

En esta igualdad, se puede observar que se cancela la gravedad; por tanto:

$$m_1 = m_2 .$$

Entonces, en definitiva; la balanza de brazos iguales compara la masa del cuerpo patrón con la masa del material; por tanto, al desaparecer la aceleración gravitacional, desaparece el concepto de fuerza o de peso.

En el caso del dinamómetro, que se podría calibrar con la pesa patrón de la balanza, puede dar fracciones del peso patrón; así, tendríamos dos instrumentos que podrían darnos medidas iguales. Ahora bien, supóngase que los dos instrumentos se ubican en un avión: al iniciar el vuelo, los dos instrumentos están marcando lo mismo, pero, a medida que el avión va ganando altura, la gravedad comienza a disminuir y con ello también el peso que midiera el dinamómetro; así que este instrumento dará un valor menor que al iniciar el vuelo, mientras la balanza sigue en equilibrio, debido a que la gravedad en el plato 1 es igual a la gravedad del plato 3, esto ya basta para señalar que el dinamómetro siempre va a dar valores acordes a la gravedad; por tanto, depende de la aceleración gravitacional, de modo que marca una fuerza, “un vector” denominado peso; la balanza mide masa y la masa es un “escalar”; obsérvese que si el avión llegara al punto en que la gravedad tiende a cero, el dinamómetro marcaría cero en su escala, mientras que la balanza seguiría mostrando la barra en equilibrio.

Ahora bien, las unidades de medida para la balanza son los kilogramos masa, y se denotarán como Kg, mientras que

la medida del peso es el kilogramo fuerza o kilopondio, al que se denota como Kgf, cuyo equivalente con el newton es:

$$1\text{kgf} = mg$$

$$1\text{kgf} = (9.81 \frac{m}{s^2})(1\text{kgm})$$

$$1\text{kgf} = 9.81\text{kgm} \frac{m}{s^2}$$

$$1\text{kgf} = 9.81 N$$

Nota. *El kilogramo fuerza se utilizará para medir fuerza y el kilogramo masa para medir cantidad de masa, de modo que, cuando una persona se pesa en una báscula: ¿qué mide?*

La Oficina de Pesas y Medidas de cada Estado y de cada ciudad debe garantizar que las básculas de cualquier tipo deben calibrarse según la fuerza de gravedad del lugar; no podría ser que una báscula calibrada con la gravedad de Pasto funcionara bien en Tumaco; en este caso, la báscula en Tumaco mediría más, por estar bajo el efecto de una gravedad mayor; esto al tendero le convendría, pero el comprador siempre estaría en desventaja. Así que, si se mide el peso en una báscula que se encuentre bien calibrada, no habría problema si, al pesarse en una báscula una persona y le marca 45 kilos de peso, se debe a que ese peso tiene.

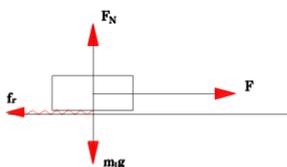


Fig. 3.12. Esquema de las fuerzas presentes en un bloque de masa constante.

Fuerza de rozamiento. Cuando hay dos superficies, en la que una se desliza sobre la otra, se presenta una fuerza que dificulta el libre movimiento; además, esta fuerza depende de la calidad de las superficies y del tipo de material; en mecánica, esta dificultad se logra disminuir con la ayuda de

lubricantes secos o húmedos en medio de la junta; ahora bien, por más perfectas que se encuentren las superficies, siempre se va a necesitar de una fuerza para poder deslizar una sobre la otra; en la Fig. 3.12, se puede apreciar que la fuerza de rozamiento entre las dos superficies siempre se opondrá a la

fuerza que se aplique para poder mover el bloque; como al peso del bloque se opone la fuerza normal que, por definición, siempre será normal a la superficie, y el peso siempre será vertical, establecida esta aclaración, se define la fuerza de rozamiento como:

$$f_r = -\mu F_N \quad (3.15)$$

En este caso, como $F_N = mg$, entonces:

$$f_r = -\mu mg,$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento que, como ya se dijo, depende de la calidad de las superficies y del tipo de material; además, es un número adimensional que puede tomar los valores $0 < \mu < 1$, razón por la cual se suele presentar en términos de porcentaje; por ejemplo, 30%, o simplemente 0.3.

Ejemplos.

¿Qué fuerza se necesita para deslizar un cuerpo de 12 N sobre una superficie horizontal, si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 30\%$?

Solución.

A partir de la ecuación de rozamiento $f_r = -\mu F_N$, como se trata de una superficie horizontal, entonces la fuerza de rozamiento se puede expresar como:

$$\begin{aligned} f_r &= -\mu mg \\ f_r &= - (0.30)(12N) \\ f_r &= -3.6N \end{aligned}$$

El signo menos surge porque toda fuerza de rozamiento se opone al sentido de la fuerza que se aplica.

Entendiéndose que la fuerza es la causa del movimiento, entonces la fuerza de rozamiento es la causa para que no

hubiera movimiento; de hecho, la fuerza de rozamiento forma parte de las fuerzas disipativas y genera calor, que se pierde; es decir, se trata de una de las fuerzas no recuperables; por tanto, un objeto en movimiento, debido a la acción de rozamiento termina por detenerse y, por esta razón, en cierta medida **no es posible tener móviles perpetuos**.

Por otra parte, el rozamiento, así como es perjudicial para el movimiento, también permite que hubiera movimiento; este es el caso de las ruedas de tracción de un vehículo sin rozamiento, que resbalaría continuamente sin lograr impulsar al vehículo; de igual forma, sin rozamiento no lograríamos caminar ni lograr coger o asegurar objetos.

Así que, para caminar, asegurar objetos con las manos, que las ruedas de un vehículo traccionen sobre la superficie de una carretera, se necesita que hubiera mucho rozamiento.

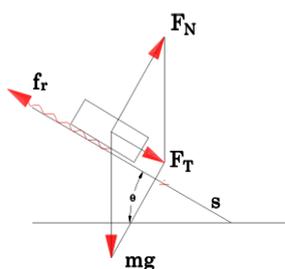


Fig. 3.13. Esquema de fuerzas que se presentan en un plano inclinado.

Clases de rozamiento. En mecánica, se encuentran dos tipos de rozamientos: uno cinético y otro estático; en la vida cotidiana, se encuentra con este tipo de situaciones, como es el caso de mover un objeto pesado; es muy difícil lograr moverlo, pero, una vez se moviera, es más fácil mantener el movimiento, situación que muestra la presencia de dos tipos

de rozamiento, donde el coeficiente de rozamiento estático es mayor que el coeficiente de rozamiento cinético; esto es:

$$\mu_c \leq \mu_e$$

En la Fig. 3.13, se muestran las fuerzas presentes en un bloque que se desliza sobre un plano inclinado con un ángulo de elevación θ , que se puede ir aumentando muy lentamente, hasta encontrar que la fuerza tangencial F y la fuerza de rozamiento fuesen iguales; en este momento, basta con unos golpecitos sobre la superficie para que la vibración permitiera

que el bloque se deslizara con movimiento rectilíneo uniforme; en este caso, se está frente al coeficiente de rozamiento cinético; de no dar los golpecitos, el bloque demoraría más en resbalar o, lo que es lo mismo, lo haría, pero en un ángulo mayor; así, se está frente a un coeficiente de rozamiento estático; de forma experimental, se pueden calcular los coeficientes de rozamiento a partir de la tangente del ángulo; luego, se explicara por qué es la tangente

$$\mu = \tan\theta \quad (3.16).$$

Frenos ABS

Por experiencia, se sabe que cuando se trata de desplazar o mover un mueble pesado, iniciar el movimiento es difícil, pero resulta un poco más fácil cuando el mueble se logra mover; aquí se está pasando de un rozamiento estático a un coeficiente de rozamiento cinético.

En el caso de los frenos de los vehículos, inicialmente eran sistemas hidráulicos, neumáticos o mecánicos, que activaban un sistema en la rueda de modo que las zapatas llevaban a pararla; si la frenada era fuerte, las ruedas se deslizaban y dejaban una huella en el asfalto, lo que permitía hacer un cálculo retrospectivo para saber qué velocidad llevaba el vehículo, por si ocurre un siniestro. Con frecuencia se oía decir que, cuando las ruedas se bloqueaban, es decir, se detenían, se perdía el control del vehículo, pues este se deslizaba sin que hubiera forma de detenerlo o controlarlo.

La técnica moderna de los vehículos ha desarrollado los frenos ABS (sistema de frenos antibloqueo) justamente, con lo que significa que aquellos vehículos que tienen este sistema nunca bloquean sus ruedas cuando se frenan, por brusca que fuese la detención: entonces, ¿cómo frenan?

Cuando la rueda gira libremente sobre la superficie de las carreteras tienen coeficiente de rozamiento estático entre las superficies de la rueda y la carretera, pero, si la rueda se bloquea, entra en un rozamiento cinético, un coeficiente de

menor valor que el estático; por eso los vehículos en estas condiciones se salen de control; entonces, el sistema inteligente de los frenos ABS detecta cuándo la rueda se detiene; inmediatamente, se desactiva el sistema de frenado, y así no se detiene. Con este sistema de frenado, los vehículos se han tornado mucho más seguros, no se salen tan fácilmente de control y la acción de detenerse se logra en la menor distancia; en definitiva, el sistema es más seguro.

3.5 Sistemas inerciales

Los sistemas inerciales se caracterizan por que en ellos se cumplen las Leyes de Newton sin ninguna transformación; es decir, se cumplen como si se estuviera en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme; la tierra es casi un sistema inercial; pese a que la trayectoria alrededor del sol es una elipse muy grande para nuestros sistemas de referencia, sin embargo nadie ha sentido que nos estamos moviendo; solo se experimenta cómo pasa el tiempo entre el día y la noche; sin embargo, al menos en el laboratorio, sistemas inerciales pueden mostrar que la tierra gira, como es el caso del péndulo de Foucault.

Análisis de fuerzas en Sistemas inerciales. De acuerdo con la primera Ley de la dinámica, cuando se refiere a la tendencia de los cuerpos a permanecer en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, sabemos que, en cualquiera de los dos casos, las tres Leyes de Newton se aplican sin ninguna transformación, razón por la cual resultaba tan difícil saber si nos movemos o no, pues, de no ser por la Astronomía, se hubiera demorado unos años más para poder concluir. En el caso de tener fuerzas aplicadas a un sistema inercial, se anulan; esto es:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (3.17).$$

Aplicaciones.

1. De acuerdo a la Fig. 3.14, el cuerpo tiene un peso de $10N$. Calcular la tensión de la cuerda, si la fuerza F que se aplica logra separarla de la pared hasta formar un ángulo de 30° .

Solución.

En el punto P deben concurrir todas las fuerzas que se apliquen a la cuerda. Como el sistema está en reposo, entonces se trata de un sistema inercial, lo que indica que la solución del problema parte de la ecuación (3.17):

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

Ahora bien, resulta que, de acuerdo con la Fig. 3.14, hay fuerzas tanto en el eje y como en el eje x ; por tanto, se debe aplicar el mismo concepto del sistema inercial para cada eje; esto es:

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n F_y = 0$$

i. Entonces, al aplicar al eje x , se tiene:

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0$$

$F - T_x = 0$; como $T_x = T \text{ Sen } \theta$, por tanto $F = T \text{ Sen } 30$; es decir: $F = 0.5T$ (1)

ii. Para el eje y , se tiene: $\sum_{i=1}^n F_y = 0$; esto es:

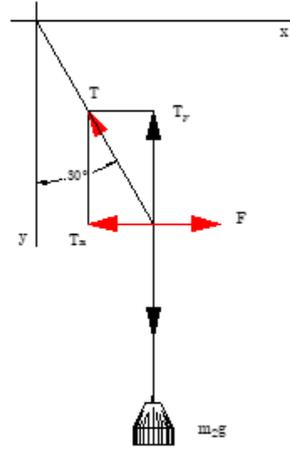


Fig. 3.14. Composición de fuerzas concurrentes.

$$T_y - mg = 0$$

Ahora bien, como $T_y = T \cos \theta$, entonces:

$$T \cos 30 - mg = 0$$

$$0.866T = mg$$

$$T = \frac{mg}{0.866}$$

$$T = \frac{10N}{0.866}$$

$$T = 11.547N$$

Con este valor de la tensión, se puede calcular la fuerza a partir de la ecuación (1)

$$F = 0.5T$$

$$F = 0.5(11.547N)$$

$$F = 5.774N$$

2. Sobre un plano inclinado de 35° de elevación se encuentra un bloque de 15 N de peso. ¿Cuál es la fuerza mínima que se necesita para mover el bloque cuesta arriba sin considerar la fuerza de rozamiento?

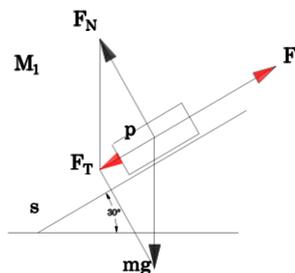


Fig. 3.15. Esquema de fuerzas concurrentes sobre un bloque, sin considerar fuerza de rozamiento.

Solución.

La palabra mínima es una clave para pensar de inmediato que se trata de un sistema inercial y que, por tanto, la solución a este tipo de problemas es: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$; ahora bien, en el punto P

de la Fig. 3.15, donde se aplican todas las fuerzas, así: la fuerza tangencial F_T y la fuerza normal F_N que, en función del peso, son:

$$F_N = mg \cos\theta$$

$$F_T = mg \sin\theta$$

Sobre la superficie S están la fuerza que interesa conocer F y la fuerza tangencial; no hay nada más, por tanto:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$F - F_T = 0$$

$$F = mg \sin\theta$$

$$F = (15N) \sin 35$$

$$F = 8.6N$$

3. ¿Cuál es la fuerza mínima para desplazar un bloque de $15N$ sobre una superficie horizontal, con un coeficiente de rozamiento del 25%?

Solución.

La palabra clave es mínima fuerza; por tanto, es un sistema inercial; así que se parte de: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$; al deslizar sobre

la superficie horizontal, la única fuerza que se opone a la fuerza que se necesita para movilizarlo es la fuerza de rozamiento (Fig. 3.16), por tanto:

$$F - f_r = 0$$

Ahora bien, se define la fuerza de rozamiento como:

$$f_r = \mu F_N \quad (3.18),$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento y F_N es la fuerza normal a la superficie; de modo que, al remplazar los valores dados en el ejercicio, se tiene:

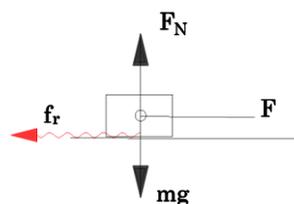


Fig. 3.16. Esquema de fuerzas de un bloque que se desliza por una superficie, con rozamiento.

$$F = \mu F_N$$

$$F = 0.25(15N)$$

$$F = 3.75N$$

4. Calcúlese la fuerza mínima que se necesita para desplazar un bloque que pesa $20N$ por una superficie cuya pendiente es del 70% y genera un coeficiente de rozamiento del 0.15 .

Como el punto clave es calcular la fuerza mínima, entonces el punto de partida es: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$; ahora bien, las únicas fuerzas que se oponen a la fuerza en referencia son la fuerza tangencial y la fuerza de rozamiento; por tanto, la ecuación queda:

$$F - f_r - F_T = 0.$$

Así, la fuerza de rozamiento es: $f_r = \mu F_N$; a su vez, la fuerza normal es: $F_N = mg \cos \theta$ y la fuerza tangencial $F_T = mg \sin \theta$; por tanto, y de acuerdo a la Fig. 3.17, queda:

$$F - \mu mg \cos \theta - mg \sin \theta = 0$$

$$F = \mu mg \cos \theta + mg \sin \theta$$

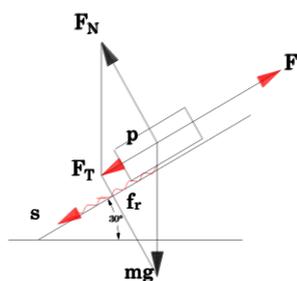


Fig. 3.17. Esquema de fuerzas en un bloque que se desliza sobre una superficie, con pendiente positiva y rozamiento.

Aquí no conocemos el ángulo; sin embargo, el problema establece que hay una pendiente del 70% ; esto significa que en una rampa se tienen dos catetos: uno horizontal y otro vertical; entonces, mientras el horizontal es de $100m$, el vertical tiene $70m$; por tanto: $\tan \theta = \frac{70}{100}$; esto es: $\tan \theta = 0.7$; por ende, el ángulo es:

$$\theta = \tan^{-1} 0.7$$

$$\theta = 35^\circ$$

Al conocer el ángulo, se lo reemplaza en la ecuación general y se tiene:

$$F = \mu mg \cos \theta + mg \operatorname{Sen} \theta$$

$$F = mg(\mu \cos \theta + \operatorname{Sen} \theta)$$

$$F = (20 N)(0.15 \cos 35 + \operatorname{Sen} 35)$$

$$F = 13.93 N$$

5. La posición de la cabeza de un estudiante en actividad de estudio es como la de la Fig. 3.18. ¿Cuál es la fuerza de contacto en la articulación *atlanto-occipital*, si la cabeza pesa en promedio $4,5 \text{ Kp}$ y la fuerza muscular para mantenerla en esa posición, a 35° con la horizontal, es $5,4 \text{ Kp}$?

Solución.

El punto de partida es el mismo:

$\sum_{i=1}^n F_i = 0$, pero como hay componentes, entonces se aplicaría a cada eje; esto es: $\sum_{i=1}^n F_x = 0$ y

$\sum_{i=1}^n F_y = 0$. Según la Fig. 3.19, en el

eje x están las componentes de la fuerza muscular y de la fuerza de contacto; esto es:

$$f_{mx} - f_{cx} = 0$$

La fuerza muscular en x es $f_{mx} = f_m \cos 35$ de modo que:

$$f_m \cos 35 - f_{cx} = 0$$

$$f_{cx} = (5.4 \text{ kp}) \cos 35$$

$$f_{cx} = 4.423 \text{ kp}$$

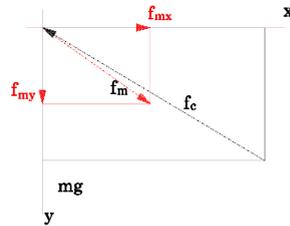


Fig. 3.18. Esquema de fuerzas que concurren a un punto en común.

Ahora, para el eje y : $\sum_{i=1}^n F_y = 0$; las fuerzas que están en el eje y son las componentes de la fuerza muscular, de contacto y el peso de la cabeza; esto es: $f_{cy} - f_{my} - mg = 0$.

La fuerza muscular es: $f_{my} = f_m \text{Sen}35$; al remplazar, se tiene:

$$f_{cy} - f_m \text{Sen}35 - mg = 0$$

$$f_{cy} = f_m \text{Sen}35 + mg$$

$$f_{cy} = (5.4kp)\text{Sen}35 + 4.5kp$$

$$f_{cy} = 7.597kp$$

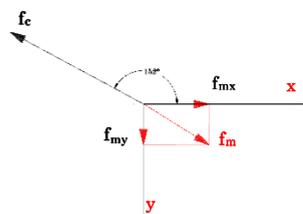


Fig. 3.19. Esquema de la fuerza de contacto resultante.

Como se trata de vectores, entonces, una vez conocida la suma de las componentes, se calcula la magnitud:

$$f_c = \sqrt{f_{cx}^2 + f_{cy}^2}$$

$$f_c = \sqrt{4.42^2 + 7.59^2}$$

$$f_c = 8.791kp$$

Para la dirección:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{f_{cy}}{f_{cx}}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{7.597}{4.423}$$

$$\theta = 59^\circ 47'$$

Para el sentido del vector, de acuerdo a la gráfica, se puede observar que se encuentra en el segundo cuadrante; por tanto: $\theta = 149^\circ 47'$.

6. De acuerdo a las condiciones de la Fig. 3.20, calcular las tensiones $T1$ y $T2$.

Solución.

Como las tensiones no son más que fuerzas, las componentes en cada eje son:

$$\sum_{i=1}^n T = 0.$$

- a) Para las componentes en x : $\sum_{i=1}^n T_x = 0$; esto es:

$$T_{2x} - T_{1x} = 0$$

De acuerdo a los ángulos que se muestran en la gráfica:

$$T_{1x} = T_1 \cos 40 \quad \text{y} \quad T_{2x} = T_2 \cos 35.$$

Entonces:

$$T_2 \cos 35 - T_1 \cos 40 = 0$$

$$T_2 = \frac{T_1 \cos 40}{\cos 35} \quad 1$$

Esta ecuación se convierte en la ecuación (1) del sistema de ecuaciones.

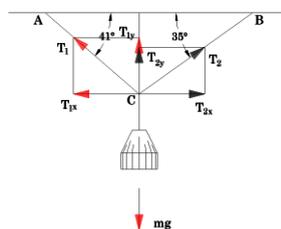


Fig. 3.20. Esquema de fuerzas que se desarrollan en el montaje de cuerdas.

- b) Para las componentes en el eje y : $\sum_{i=1}^n T_y = 0$; esto es:

$$T_{1y} + T_{2y} - mg = 0$$

De acuerdo a los ángulos de la gráfica, se tiene: $T_{1y} = T_1 \sin 40$ y $T_{2y} = T_2 \sin 35$; al remplazar, se tiene:

$$T_1 \sin 40 + T_2 \sin 35 - mg = 0 \quad (2)$$

Al remplazar en (1) y en (2), se tiene:

$$T_1 \text{Sen}40 + \frac{T_1 \text{Cos}40}{\text{Cos}35} \text{Sen}35 - 50N = 0$$

$$T_1 (\text{Sen}40 + \text{Cos}40 \text{Tan}35) = 50N$$

$$T_1 = \frac{50N}{\text{Sen}40 + \text{Cos}40 \text{Tan}35}$$

$$T_1 = 42.4N$$

Para T_1 , se utiliza la ecuación (1); esto es:

$$T_2 = \frac{T_1 \text{Cos}40}{\text{Cos}35}$$

$$T_2 = 42.4 \frac{\text{Cos}40}{\text{Cos}35}$$

$$T_2 = 39.651N$$

3.6 Sistemas acelerados. A diferencia de los sistemas inerciales, las Leyes de la dinámica en estos sistemas necesitan de transformaciones, lo que significa que el observador capta cualquier situación de un sistema acelerado. Y cualquier fuerza que genera un sistema acelerado no solo produce el movimiento, sino también produce aceleración; a partir de allí, se define como:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a \quad (3.19),$$

donde m_s es la masa del sistema acelerado.

Análisis de fuerzas en sistemas acelerados

Carril de Fletcher. Se trata de dos masas unidas por un hilo inextensible; además, el hilo pasa por la garganta de una polea sin rozamiento; se espera que se dé el movimiento por la acción de la masa m_2 ; entonces, el sistema acelerado, al seguir la cuerda desde la masa m_2 es la misma masa (Fig. 3.21); esto es:

Solución.

$$m_2 g = m_s a$$

Como $m_s = m_1 + m_2$, entonces:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a .$$

De modo que la aceleración es:

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (3.3.1)$$

En el caso de tener $m_1 = 250 \text{ Gm}$ y $m_2 = 150 \text{ Gm}$, la aceleración es:

$$a = \frac{(0.15 \text{ kg})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{(0.15 \text{ kg})(0.25 \text{ kg})}$$

$$a = 3.68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

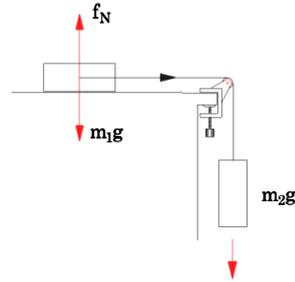


Fig. 3.21. Esquema de fuerzas en un sistema acelerado. Carril de Fletcher.

ii. Considerar rozamiento entre la superficie donde se desliza la masa m_1 ; al seguir la cuerda, al peso de la masa m_2 se opone la fuerza de rozamiento de la masa m_1 con la superficie (Fig. 3.22); entonces, el sistema queda;

$$m_2 g - f_r = m_s a .$$

Como $f_r = \mu F_N$, entonces queda:

$$m_2 g - \mu m g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \quad (3.20)$$

Si a las masas del ejemplo anterior se les suma el coeficiente de rozamiento $\mu = 0.3$:

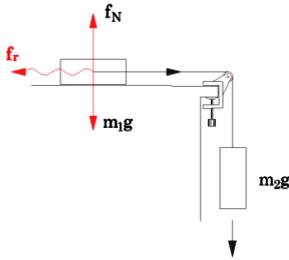


Fig. 3.22. Esquema de fuerzas cuando hay rozamiento en la superficie.

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{(0.15\text{kg}) - 0.3(0.25\text{kg})}{(0.15\text{kg}) + (0.25\text{kg})} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 1.84 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Máquina de Atwood. Se trata de dos masas unidas por una cuerda inextensible y flexible que cuelgan de una polea ideal y sin rozamiento; al pasar la cuerda por la garganta, tal como se puede ver en la Fig. 3.23,

la m_2 es ligeramente mayor que la m_1 ; por tanto, se presentará el movimiento hacia la derecha; es decir la masa m_2 cae, mientras que la masa m_1 sube; así que el sistema queda:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a.$$

Desde el peso de la m_2 , al seguir la cuerda se encuentra el peso de la m_1 ; entonces, el sistema queda:

$$m_2 g - m_1 g = m_s a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Con los valores de las masas de las aplicaciones anteriores, se tiene:

$$a = \frac{0.25 - 0.15}{0.25 + 0.15} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 2.45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

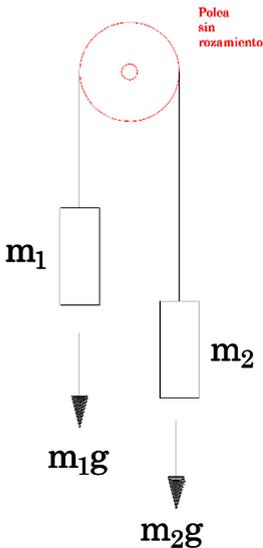


Fig. 3.23. Esquema de fuerzas cuando hay rozamiento en la superficie.

Plano inclinado. Como en los casos anteriores, se trata de dos masas unidas por una cuerda inextensible y flexible, de tal modo

que la m_1 se desliza sin rozamiento sobre la superficie del plano inclinado y la m_2 cuelga desde la garganta de una polea ideal y sin rozamiento, tal como se puede ver en la Fig. 3.24, de modo que la masa m_2 es lo suficientemente pesada como para generar el movimiento en la dirección en que cae. A partir del concepto de sistema acelerado, se sabe:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$$

Cuando se parte del peso de la masa m_2 y sigue la cuerda, se encuentra la fuerza tangencial debido al peso de m_1 ; de modo que la ecuación queda:

$$m_2 g - F_T = m_s a$$

Ahora bien, la fuerza tangencial es $F_T = m_1 g \text{Sen} \theta$; al remplazar, se tiene:

$$m_2 g - m_1 g \text{Sen} \theta = m_s a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \text{Sen} \theta}{m_2 + m_1} g$$

Ahora, se puede considerar el mismo problema, pero con rozamiento. Entonces, las fuerzas que se encuentran a lo largo de la cuerda son: el peso de m_2 , la fuerza tangencial y la fuerza de rozamiento; de modo que el sistema queda:

$$m_2 g - m_1 g \text{Sen} \theta - \mu m_1 g \text{Cos} \theta = m_s a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \text{Sen} \theta - \mu m_1 \text{Cos} \theta}{m_2 + m_1} g$$

Esta expresión es una forma general de las anteriores; así:

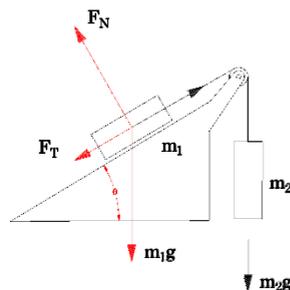


Fig. 3.24. Esquema de fuerzas en un plano inclinado, sin rozamiento.

i. Si el ángulo es 0, es decir está sobre una superficie horizontal, entonces $\text{Sen } 0 = 0$ y $\text{Cos } 0 = 1$, de modo que la ecuación queda:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_2 + m_1} g$$

Este caso corresponde al carril de Fletcher, relacionado con el rozamiento.

ii. Si el ángulo es 90° , entonces: $\text{Sen } 90 = 1$ y $\text{Cos } 90 = 0$.

La ecuación queda:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Este caso corresponde a la máquina de Atwood.

Como aplicación numérica, solo queda utilizar la fórmula general; en caso de tener valores como: ángulo del plano inclinado 37° , coeficiente de rozamiento en la superficie 30% $m_1 = 150\text{Gm}$ y $m_2 = 250\text{Gm}$, con estos valores, se tiene:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \text{Sen} \theta - \mu m_1 \text{Cos} \theta}{m_2 + m_1} g$$

$$a = \frac{(0.25\text{kg}) - (0.15\text{kg}) \text{Sen} 37 - (0.3)(0.15\text{kg}) \text{Cos} 37}{(0.25\text{kg}) + (0.15\text{kg})} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 3.04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Con esta aceleración, si el sistema parte del reposo, la velocidad que alcanza a los 1.5s es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = (3.04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(1.5\text{s})$$

$$v = 4.55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplos.

1. En la Fig. 3.25, se puede apreciar que se tiene un plano inclinado a favor y una superficie horizontal; además, las dos superficies producen rozamiento, en estas condiciones: $m_1 = 150Gm$, $m_2 = 250gm$, $m_3 = 300gm$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.2$ y ángulo de elevación del plano inclinado $\theta = 30^\circ$.

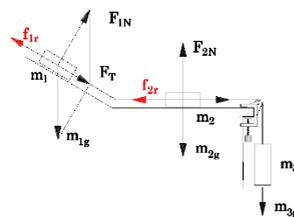


Fig. 3.25. Esquema de fuerzas en un sistema acelerado, con plano inclinado a favor y fuerzas de rozamiento.

Solución.

Para aplicar la ecuación general de los sistemas acelerados, se parte de la posición m_3 y, seguir la cuerda, en el camino se encuentran la fuerza de rozamiento de m_2 y m_1 ; además, está la fuerza tangencial debido a m_1 que, en este caso, está a favor del movimiento, de modo que:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$$

El sistema se conforma así:

$$\begin{aligned} m_3 g - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g \cos \theta + m_1 g \sin \theta &= m_s a \\ a &= \frac{m_3 g - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g \cos \theta + m_1 g \sin \theta}{m_1 + m_2 + m_3} g \\ a &= \frac{0.3 - 0.2 \times 0.25 - 0.3 \times 0.15 \times \cos 30 + 0.15 \sin 30}{0.15 + 0.25 + 0.3} 9.81 \frac{m}{s^2} \\ a &= 4.06 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

2. Considerar un sistema de doble plano inclinado, como el que se tiene en la Fig. 3.26, de acuerdo con estas condiciones: $\theta_1 = 30^\circ$, $m_1 = 200Gm$, $\mu_1 = 30\%$, $\theta_2 = 40^\circ$

$$m_2 = 800Gm \text{ y } \mu_2 = 35\%$$

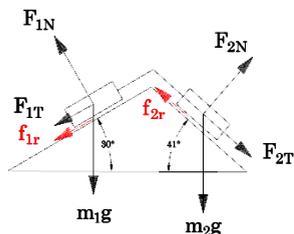


Fig. 3.26. Esquema de fuerzas de un sistema de doble plano inclinado.

Solución.

Como en todo sistema acelerado, se parte de:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$$

Para encontrar las fuerzas implicadas al seguir la cuerda desde la m_2 , se encuentran estas fuerzas:

$$F_{2T} - f_{2r} - F_{1T} - f_{1r} = (m_1 + m_2)a$$

Ahora bien, las fuerzas en el plano 2 son:

$F_{2T} = m_2 g \text{Sen} \theta_2$, y $f_{2r} = \mu_2 F_{2N} = \mu_2 m_2 g \text{Cos} \theta_2$; en el plano 1, las fuerzas son: $F_{1T} = m_1 g \text{Sen} \theta_1$ y $f_{1r} = \mu_1 F_{1N} = \mu_1 m_1 g \text{Cos} \theta_1$; al replazar, se tiene:

$$m_2 g \text{Sen} \theta_2 - \mu_2 m_2 g \text{Cos} \theta_2 - m_1 g \text{Sen} \theta_1 - \mu_1 m_1 g \text{Cos} \theta_1 = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 (\text{Sen} \theta_2 - \mu_2 \text{Cos} \theta_2) - m_1 (\text{Sen} \theta_1 + \mu_1 \text{Cos} \theta_1)}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{0.2 (\text{Sen} 40 - 0.25 \text{Cos} 40) - 0.8 (\text{Sen} 30 + 0.3 \text{Cos} 30)}{0.2 + 0.8} 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$a = 2.06 \frac{m}{s^2}$$

Calcular la tensión de la cuerda. A menudo se pide calcular las tensiones, y ocurre que en la industria es indispensable calcular tensiones de la cuerda que halan cuerpos pesados; por esta razón, es muy importante saber cómo hacerlo en estos sistemas acelerados. Debe ser claro que la cuerda, cuando está en un sistema inercial, responde al peso de los cuerpos y a las fuerzas de rozamiento, pero, en el caso de estos sistemas acelerados, la cuerda debe responder al peso o su descomposición, al rozamiento y, sobre todo, a la aceleración que el sistema desarrolla, y aquí se le debe reconocer una mayor importancia.

i. En el caso del carril de Fletcher (Fig. 3.27), como ya lo sabemos, la

solución al sistema es: $\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$;

en este caso, entre las fuerzas, al seguir la cuerda, encontramos el peso de la masa m_2 y la tensión causante de mover a la m_1 , de modo que esto es:

$$T = m_1 a$$

Como la aceleración ya se conoce:

$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$, al combinarlas, se

tiene:

$$T = \frac{m_1 m_1}{m_1 + m_2} g .$$

ii. En el caso de la máquina de Atwood, la aceleración es:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

De modo que, al seguir la cuerda, se encuentra que a la masa m_1 la acelera la tensión T . Por tanto:

$$T - m_1 g = m_1 a .$$

Al combinar las dos ecuaciones, se tiene:

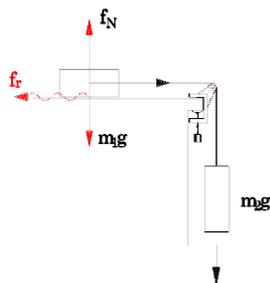


Fig. 3.27. Esquema del carril de Fletcher, con el sistema de masas, donde el movimiento es afectado por la fuerza de rozamiento.

$$T - m_1 g = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$T = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + m_1 g$$

$$T = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1 \right) m_1 g$$

$$T = \left(\frac{m_2 - m_1 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right) m_1 g$$

$$T = \frac{2m_2 m_1}{m_1 + m_2} g$$

iii. En el caso del sistema de doble plano, la aceleración es:

$$a = \frac{m_2(\text{Sen}\theta_2 - \mu_2 \text{Cos}\theta_2) - m_1(\text{Sen}\theta_1 + \mu_1 \text{Cos}\theta_1)}{m_1 + m_2} g$$

Entonces, para calcular la tensión en medio de las dos masas o en cualquier punto de la línea de acción del movimiento, se deben tener en cuenta las fuerzas que quedan detrás de la tensión; esto es, en el caso del ejercicio en mención, calcular la tensión en medio de las dos masas; entonces, las fuerzas son:

$$T - F_{T1} - f_{r1} = m_1 a .$$

Al combinar las dos ecuaciones, tenemos:

$$T = m_1 g \text{Sen}\theta_1 + \mu_1 m_1 g \text{Cos}\theta_1 + m_1 \left(\frac{m_2(\text{Sen}\theta_2 - \mu_2 \text{Cos}\theta_2) - m_1(\text{Sen}\theta_1 + \mu_1 \text{Cos}\theta_1)}{m_1 + m_2} g \right)$$

Si se lo desea, se puede simplificar más. Por lo general, estos resultados son de este tipo, un poco largos, pero solo queda remplazar los valores que se entregan en el ejemplo.

3.7 Aplicaciones

Caída de gotas de agua con rozamiento.

Un caso muy particular es la caída de gotas de agua de un aguacero o caída de goticas de agua; en este caso, se está frente a fuerzas de rozamiento o de fricción en fluidos. Cuando se forma la gota de agua, en principio tiene forma esférica; con un cálculo especial se demuestra que la fuerza de fricción del aire sobre la gota es: $f_r = -k\eta v$, donde la constante k es: $k = 6\pi R$; si la gota de agua es esférica, a esta expresión se la conoce con el nombre de Ley de Stokes; η es el coeficiente de viscosidad, depende de la fricción y aparece cuando hay velocidad; la viscosidad se mide en poises.

De modo que el sistema es acelerado por partir del reposo y empezar a aumentar la velocidad a medida que va cayendo; por tanto, partimos de:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$$

Ahora bien, entre las fuerzas que están presentes, tenemos: la fuerza de rozamiento, el empuje positivo que lleva el aire contra la gotica de agua y el peso, de modo que esto se puede expresar como:

$$E - f_r - mg = ma \quad (3.21),$$

donde $E = \rho_a g V$ es el empuje del aire sobre la gota de agua, $f_r = -k\eta v$ es la fuerza de rozamiento del aire sobre la superficie de la gota de agua, mg es el peso de la gota; a su vez, la masa de agua se puede expresar como: $m = \rho_g V$, donde ρ_g es la densidad del agua y V el volumen de la gotica de agua.

Como resulta que la gota de agua, cuando comienza a caer tiene un movimiento acelerado, pero llega un momento en que no aumenta la velocidad debido al rozamiento y en

adelante sigue con movimiento uniforme, es decir, deja de ser un sistema acelerado y pasa a ser un sistema inercial, por tanto, la ecuación queda:

$$E - f_r - mg = 0 \quad (3.22)$$

Al remplazar las fuerzas, se tiene:

$$E - k\eta v - mg = 0$$

$$k\eta v = E - mg$$

Cuando se despeja la velocidad, se tiene:

$$v = \frac{1}{k\eta} (E - mg)$$

Si se remplazan el empuje y la masa de la gota de agua, se tiene:

$$v = \frac{1}{k\eta} (\rho_a g V - \rho_g g V)$$

$$v = \frac{Vg}{k\eta} (\rho_a - \rho_g)$$

A esta expresión se la conoce con el nombre de velocidad límite de caída; el volumen de la gota de agua corresponde de forma muy aproximada a una esfera; se dice aproximada, porque, en realidad, la gota, cuando cae, adquiere una forma aerodinámica. En el caso que se está tratando, el volumen corresponde al de una esfera; es decir: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; por tanto, la ecuación queda:

$$v = \frac{4\pi r^3 g}{3(6\pi r)\eta} (\rho_a - \rho_g) \quad (3.23)$$

$$v = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_a - \rho_g)$$

Ahora bien, volvamos al comienzo, cuando se tenía un sistema acelerado, cuando la gota empieza a caer:

$$E - f_r - mg = ma .$$

Como la definición de la aceleración es: $a = \frac{dv}{dt}$, entonces, al remplazar, se consigue:

$$E - f_r - mg = m \frac{dv}{dt}$$

Entre el empuje y el peso se tiene una fuerza resultante $F = E - mg$, de modo que, al remplazar, queda:

$$F - k\eta v = m \frac{dv}{dt} .$$

A partir de esto se puede desarrollar una ecuación de la velocidad, así:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (F - k\eta v) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k\eta}{m} \left(v - \frac{F}{k\eta} \right) \\ \frac{dv}{d\left(v - \frac{F}{k\eta} \right)} &= -\frac{k\eta}{m} dt \end{aligned}$$

Para solucionar la ecuación planteada, al integrar, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{dv}{d\left(v - \frac{F}{k\eta} \right)} &= \int_0^t -\frac{k\eta}{m} dt \\ \ln\left(v - \frac{F}{k\eta} \right) - \ln\left(v_0 - \frac{F}{k\eta} \right) &= -\frac{k\eta}{m} t \\ \frac{\left(v - \frac{F}{k\eta} \right)}{\left(v_0 - \frac{F}{k\eta} \right)} &= e^{-\frac{k\eta}{m} t} \end{aligned}$$

$$v = \frac{F}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{k\eta} \right) e^{-\frac{k\eta t}{m}} \quad (3.24)$$

Esta es la ecuación que rige el movimiento en general y, como se ve, la velocidad aumenta a medida que pasa el tiempo, pero de forma finita; cuando el tiempo es muy grande, desaparece el segundo término y queda únicamente el primero; es decir:

$$v = \frac{F}{k\eta} ,$$

pero como se dijo: $F = E - mg$, entonces, al remplazarla, se tiene: $v = \frac{E - mg}{k\eta}$; ahora bien, como el empuje es: $E = \rho_a g V$, al remplazar, queda:

$$v = \frac{gV}{k\eta} (\rho_a - \rho_g) \quad (3.25)$$



Fig. 3.28. Ascensores panorámicos en el interior de un moderno edificio inteligente. Fuente: Erhard-Haus.

Este resultado es el mismo que ya se había obtenido cuando se partió de un sistema inercial.

Movimiento del ascensor. El ascensor de edificios tiene los dos movimientos: de subida y de bajada; en cada uno de

ellos, los usuarios manifiestan sentir el efecto del movimiento acelerado justamente cuando inicia el movimiento; después de unos segundos, la máquina adquiere una velocidad constante, momento en el cual el usuario no percibe el movimiento (Fig. 3.28).

i. En este primer caso, se analizará el movimiento acelerado del ascensor y la reacción de los usuarios en el interior; el solo hecho de partir del reposo lleva a que el

movimiento fuese acelerado; por tanto, el sistema a considerar (Fig. 3.29) es:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$$

Las fuerzas actuantes son: la fuerza normal del ascensor y el peso:

$$F_N = ma - mg$$

$$F_N = m(a + g)$$

La aceleración se especifica por la potencia de la máquina; por tanto, interesa conocer la fuerza normal.

Por ejemplo, si la aceleración del ascensor es de $1.2m/s^2$ y el peso de un usuario es de $70kg$, calcular la fuerza normal que el usuario percibe:

$$F_N = 70kg(1.2 \frac{m}{s^2} + 9.81 \frac{m}{s^2})$$

$$F_N = 770.7N$$

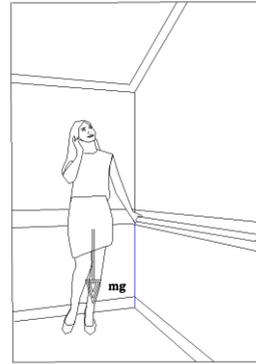


Fig. 3.29. Peso de la usuaria del ascensor afectado por la aceleración del ascensor en el momento en que inicia el movimiento, tanto hacia arriba como hacia abajo.

Como se puede ver, el nuevo peso de $770.7N$ que adquiere el usuario, en el momento de iniciar el ascenso, es mayor del que tendría normalmente en reposo $686.7 N$, de modo que todo el cuerpo experimenta este aumento; por supuesto, las vísceras al igual que los músculos del abdomen no están preparados para experimentar un súbito cambio de peso, que se manifiesta con una sensación desagradable, sobre todo si es por primera vez.

ii. En el segundo, caso se analizará el movimiento acelerado del ascensor y los usuarios cuando, a partir del reposo, el ascensor empieza el descenso; en este caso, las fuerzas actuantes en el movimiento acelerado son:

$$-F_N - mg = m_s a$$

$$F_N = m(g - a)$$

Al igual que en el caso anterior, la especificación técnica del ascensor indica que tiene una aceleración de $1.2m/s^2$. Por tanto:

$$F_N = 70km(9.81 \frac{m}{s^2} - 1.2 \frac{m}{s^2})$$

$$F_N = 602.7N$$

De modo que el peso resultante es menor, razón por la cual la experiencia que se tiene es la de sentir un vacío, que resulta en que las vísceras se tornan más livianas y los músculos del abdomen e intercostales, acostumbrados a mantener el tono muscular adecuado, sencillamente las aprietan y llevan hacia arriba, una sensación desagradable, similar a los deseos de vomitar.

3.8 Tercera ley de Newton.

La tercera Ley, expresada como acción y reacción, donde las dos fuerzas son de igual intensidad y de sentido opuesto, se formula como:

$$F_1 = -F_2 ,$$

donde el signo menos (-) es precisamente el carácter contrario de la fuerza de reacción; al aplicar la definición de fuerza, se tiene:

$$\frac{dp_1}{dt_1} = - \frac{dp_2}{dt_2}$$

Debido a que en la interacción el tiempo que transcurre es exactamente el mismo, es decir, el tiempo aparece en el instante en que se aplica la fuerza de acción y termina cuando desaparece la fuerza, por tanto, la fuerza de reacción pasa por los mismos instantes. De modo que el tiempo es el mismo y, por tanto, se lo puede cancelar; además, como resulta independiente del tiempo, se podría expresar el diferencial como un simple incremento; o sea:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (3.26).$$

A esto se lo denomina conservación del momentum lineal, uno de los principios universales.

Ejemplos

1. Un bloque de madera de masa m_2 se encuentra sobre una superficie horizontal, sin rozamiento. Un proyectil de masa m_1 se dirige hacia el bloque de madera con una velocidad v_1 , hasta impactarlo. ¿Cuál es el resultado del impacto del proyectil sobre el bloque?

Solución.

Partimos del principio de conservación del momentum lineal:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

Ahora bien, aquí hay dos momentos: un antes y un después del impacto. Para cada cuerpo, esto es:

$$m_{1a}v_{1a} + m_{1d}v_{1d} = -(m_{2a}v_{2a} + m_{2d}v_{2d})$$

Resulta que el bloque de madera, antes del impacto, tiene velocidad 0; por tanto:

$$m_{1a}v_{1a} = 0$$

Después del impacto, el proyectil se introduce en el bloque y, al final, queda sin velocidad, de modo que:

$$m_{1d}v_{1d} = 0.$$

Pero, además, el proyectil, al incrustarse en el bloque de madera, se vuelve una sola cosa, de modo que esto queda así:

$$m_{1a}v_{1a} = -(m'_{2d}v_{2d}),$$

donde $m' = m_1 + m_2$; por tanto, la expresión se puede escribir como:

$$m_{1a}v_{1a} = -(m_1 + m_2)v_{2d}.$$

Con esta expresión final, se puede calcular la velocidad del proyectil, si se conoce la velocidad del sistema de masas:

$$v_{1a} = -\frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_{2d}.$$

De forma numérica, se supone que la masa del bloque es $3000Gm$, la masa del proyectil de $250Gm$ y la velocidad del sistema es $2.7m/s$; entonces, al remplazar, se tiene:

$$v_{1a} = -\left(\frac{3000 + 250}{250}\right)Gm(2.7 \frac{m}{s})$$

$$v_{1a} = 35.1 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad del proyectil.

2. Sobre una pequeña embarcación de $180kgm$, un estudiante de $50kgm$, después de estar en reposo, se desplaza a lo largo de la embarcación con una velocidad de $2.0m/s$ respecto a ella. ¿Qué movimiento adquiere la embarcación, sin considerar rozamiento alguno?

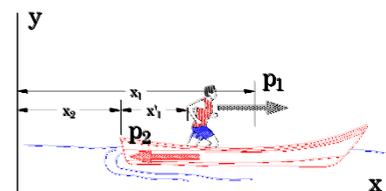


Fig. 3.30. Esquema del sistema estudiante/embarcación.

Solución.

De acuerdo al principio de conservación del momentum lineal: $\Delta p_1 = -\Delta p_2$; cuando el estudiante y la embarcación están en reposo, el momentum lineal es nulo. Ahora bien,

si el estudiante camina a lo largo de la embarcación, el momentum del sistema estudiante y embarcación seguirá siendo nulo. De acuerdo a la Fig. 3.30, la posición del estudiante respecto al extremo izquierdo de la embarcación es x'_1 , la posición del joven respecto al sistema de referencia la posición del joven respecto al sistema de referencia (x, y) es

x_1 y, por último, la posición de la embarcación respecto al sistema de referencia (x, y) es x_2 , de tal modo que:

$$x_1 = x_2 + x'_1$$

La cantidad de movimiento o momentum lineal del estudiante y embarcación es:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

Por otra parte, el tiempo que transcurre tanto para el estudiante como para la embarcación, desde el mismo momento en que el estudiante decide caminar a lo largo de la embarcación, es el mismo y permite determinar la velocidad del estudiante y la embarcación, así:

$$v_1 = v_2 + v'_1$$

Al combinar las ecuaciones, se tiene:

$$m_1(v_2 + v'_1) + m_2v_2 = 0$$

$$m_1v_2 + m_1v'_1 + m_2v_2 = 0$$

Al factorizar la velocidad de la embarcación respecto al sistema de referencia, se tiene:

$$v_2 = -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)v'_1.$$

Así, se obtiene que la embarcación responde con una velocidad de sentido contrario a la del estudiante, de tal forma que, si la masa del estudiante resulta insignificante respecto a la embarcación, la velocidad es muy baja, pero si la masa del estudiante es significativa respecto a la embarcación, esta se moverá más. Esto es: si la masa de la embarcación y del estudiante son las que se ha planteado en el ejemplo, entonces se tiene:

$$v_2 = -\left(\frac{180}{50+180}\right)2.0\frac{m}{s}$$

$$v_2 = -1.56\frac{m}{s}$$

Resulta negativo debido al sentido contrario de la velocidad del estudiante, y un valor menor debido a la diferencia de masas.



Fig. 3.31. Balistocardiógrafo: aparato para medir la cantidad del movimiento de la sangre por las arterias. Fuente: Kohden (s.f.).

Balistocardiógrafo.

Es un aparato utilizado por cardiólogos y sirve para analizar el movimiento corporal generado por el movimiento de la sangre, de modo que, de forma indirecta, el aparato sirve para analizar la cantidad de movimiento de la sangre dentro de las arterias, en general en la principal, que es la aorta; cuando el corazón bombea cierta cantidad de

sangre, lo hace con velocidad de aproximadamente a $0.33m/s$, lo cual genera un momentum lineal que puede registrarse de forma amplificada a través de sensores colocados sobre la cama o plataforma sin rozamiento (Fig. 3.31).



Fig. 3.32. Lanzamiento del cohete Space X, con el que se inicia una nueva era de vuelos espaciales.
Fuente: Nasa,
<https://rosemarynews.com/mision-ee-uu-europa-monitorea-oceanos-del-mundo/>

Lanzamiento de un cohete.

En la Fig. 3.32 se puede ver el lanzamiento de un cohete; en este caso, se trata del lanzamiento del cohete Space X; a bordo lleva la capsula Dragón, misión que se convierte en el primer vuelo tripulado en el que el cohete es de una empresa privada.

Para que el cohete pudiera levantar las 550 toneladas, de las cuales casi el 80% es combustible que se debe quemar casi en su totalidad en el

momento del lanzamiento, esto significa que, a medida que el cohete gana en altura, la masa cambia al quemarse el queroseno como combustible principal, que se convierte en gases expulsados a gran velocidad por las toberas de los motores; esto, expresado matemáticamente, es:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

Ahora bien, mientras el cohete va quemando el combustible, en general la masa disminuye en un diferencial de masa dm , contrario a lo que ocurre con la velocidad, que aumenta en un diferencial de velocidad dv ; de modo que el principio de conservación del momentum queda (Fig. 3.33):

$$(m - dm)(v_1 + dv) = -v_2 dm .$$

Al resolver el producto de los paréntesis, se tiene:

$$mv_1 - dm v_1 + m dv - d m dv = -v_2 dm .$$

En esta expresión se puede llegar a que el producto $d m dv = 0$; así, la expresión queda:

$$m v_1 + m dv = -v_2 dm + dm v_1$$

$$p + m dv = (v_2 - v_1) dm$$

donde el paréntesis representa la velocidad relativa entre la velocidad de los gases y la velocidad de la nave, de modo que: $(v_2 - v_1) = v_r$; entonces, la expresión se puede escribir como:

$$p + m dv = -v_r dm .$$

Por otra parte, si se mide respecto al tiempo, la expresión queda:

$$\frac{p}{dt} + m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} .$$

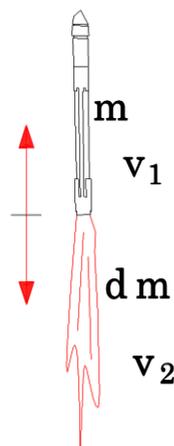


Fig. 3.33. Esquema de las partes involucradas en la conservación del momentum, mientras el cohete esté impulsándose.

Como $F = \frac{dp}{dt}$, a su vez la fuerza es: $F = ma$; por tanto, se puede escribir como:

$$-ma = v_r \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt}$$

$$-a = \frac{v_r}{m} \frac{dm}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

En este caso, la aceleración de la expresión corresponde a la aceleración gravitacional g ; de esta forma, se puede escribir como:

$$-gdt = v_r \frac{dm}{m} + dv$$

$$-\int_0^t gdt = \int_{m_0}^m v_r \frac{dm}{m} + \int_{v_0}^v dv$$

$$-gt = v_r \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) + v - v_0$$

Al organizar los términos, se tiene:

$$v = v_0 - v_r \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - gt \quad (3.27).$$

Como se puede ver en la expresión, la velocidad depende fundamentalmente del logaritmo de la razón entre la masa inicial y la masa que queda.

Impulso y fuerzas impulsoras. Como se ha visto, la definición de fuerza es: $F = \frac{dp}{dt}$, de donde el momentum se puede expresar como: $dp = Fdt$; cuando la fuerza se aplica durante un tiempo se le da el nombre de impulso y, como se puede ver, tiene las mismas unidades del momentum, de modo que esto se puede escribir como:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (3.28)$$

Si la fuerza es constante, sale de la integral y la expresión se puede escribir como:

$$I = F(t_2 - t_1).$$

Ejemplo.

En el juego de golf, una pelota pesa aproximadamente $46Gms$; si el bastón con el que se golpea la pelota lo hace con una velocidad de $75m/s$, ¿cuál es el impulso y la fuerza que imprime el bastón a la pelota en $0,5ms$? Tiempo que dura el contacto.

Solución.

Como el impulso es lo mismo que cantidad de movimiento o momentum, entonces:

$$I = Ft = mv$$

$$I = mv$$

$$I = (46Gm)(75m/s)$$

$$I = 3.45Kgm \frac{m}{s}$$

Con base en estos resultados, se puede calcular la fuerza que le imprime el bastón a la pelota durante los $0.5ms$ que dura el contacto entre el bastón y la pelota.

$$F = \frac{I}{t}$$

$$F = \frac{3.45Kgm \frac{m}{s}}{0.0005s}$$

$$F = 6900N$$

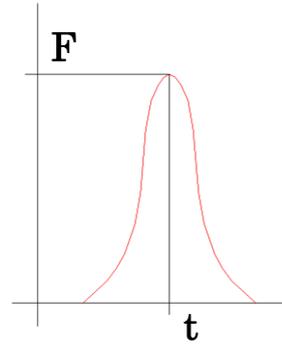


Fig. 3.34. Curva de la evolución de la fuerza en función del tiempo.

Cabe anotar que la interacción de la cabeza del bastón con la pelota, es de muy corto tiempo; además, la fuerza que se genera no está constante, pues crece y decrece con el tiempo y pasa por un máximo; la deformación de la pelota durante el tiempo de contacto muestra que se han generado fuerzas muy grandes durante este brevísimo tiempo.

3.9 Leyes de la dinámica en el movimiento circular.

Órbita de un satélite (Fig. 3.35). Para que el satélite esté en órbita, debe estar en equilibrio, de tal forma que resulta similar a estar en un estado inercial, donde:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0.$$

Ahora bien, cabe preguntarse, ¿cuáles son las fuerzas actuantes en el satélite para que permanezca en órbita?

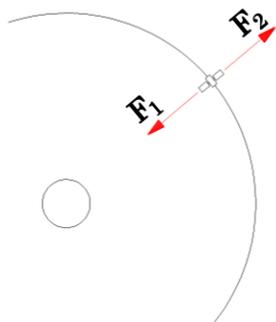


Fig. 3.35. Órbita de satélite.

De acuerdo con la tercera Ley de Newton deben estar presentes dos fuerzas (acción y reacción) $F_1 = -F_2$, o, lo que resulta lo mismo: $F_1 + F_2 = 0$; entonces, ¿cuál es la fuerza F_1 y la fuerza F_2 ? Las fuerzas en referencia son: por una parte, la fuerza centrífuga dirigida hacia la parte exterior de la órbita:

$$F_1 = m_s \frac{v^2}{r},$$

donde m_s es la masa del

satélite, v es la velocidad tangencial o lineal del satélite en órbita y r es el radio de la órbita, de modo que, en este caso, la órbita es una circunferencia.

Ahora, dirigida hacia adentro de la órbita está la fuerza centrípeta; en este caso, es la fuerza gravitacional $F_2 = -\gamma \frac{m_T m_s}{r^2}$, donde m_T es la masa de la tierra y r es el radio

de la órbita, de modo que, al remplazar en la ecuación del sistema inercial, se tiene:

$$m_s \frac{v^2}{r} = -\gamma \frac{m_T m_s}{r^2}.$$

A partir de esta relación, se puede calcular la velocidad lineal o tangencial después de cancelar la masa y un radio de la órbita del satélite (Fig. 3.35) es:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_T}{r}} \quad (3.29),$$

donde la velocidad tangencial es proporcional a la raíz cuadrada del radio donde está orbitando el satélite.

Como ejemplo: Se supone que la estación espacial se encuentra a 400km de altura sobre la tierra; se pregunta ¿con qué velocidad se mueve?

Solución.

El radio de la tierra es: $r_T = 6731\text{ km}$, equivalente a $r_T = 6731.000\text{ m}$, y la estación está orbitando a 400 km , lo que equivale a 400.000 msnm (metros sobre el nivel del mar); de modo que el radio de la órbita es: $r_o = r_T + h$; esto es:

$$\begin{aligned} r_o &= (6731.000 + 400.000)\text{ m} \\ r_o &= 7131.000\text{ m} \end{aligned}$$

Masa de la tierra $m_T = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}$.

Además, como la constante gravitacional es: $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$, entonces, al remplazar estos valores, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{7131 \times 10^3}}$$

$$v = 7472.63 \frac{m}{s}$$

Velocidad equivalente a: $v = 26901 \frac{km}{s}$.

A partir de este valor se puede calcular la velocidad angular:

$$w = \frac{v}{r}$$

$$w = \frac{7472.63 \frac{m}{s}}{7.131 \times 10^6 m}$$

$$w = 1.0 \times 10^{-3} \frac{rad}{s}$$

Con esta velocidad, la estación logra darle casi 14 vueltas a la tierra en 24 horas.

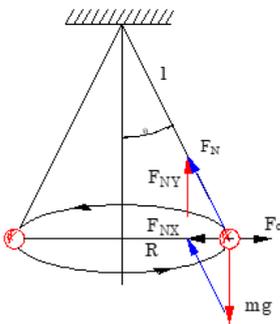


Fig. 3.36. Esquema de un péndulo cónico.

Péndulo cónico. Este tipo de péndulo consta de una cuerda de longitud l y un cuerpo de masa m que, en vez de oscilar, da vueltas respecto a la vertical que forma la cuerda cuando está en reposo. Como en el caso anterior, para que el péndulo logre establecer un círculo alrededor de la vertical, se necesita de un sistema inercial;

esto es: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$.

Ahora, una vez más, respecto a las fuerzas implicadas en este sistema, por un lado está la fuerza centrífuga, y actúa

como fuerza centrípeta la proyección de la tensión de la cuerda; esto es:

Fuerza centrífuga: $F_c = m_p \frac{v^2}{r}$, donde m_p es la masa del péndulo y r el radio de la órbita circular; en este caso, la masa de la cuerda resulta insignificante respecto a la masa del cuerpo suspendido.

A partir de la Fig. 3.36, se tiene que: $\tan \theta = \frac{F_{N_x}}{mg}$, donde F_{N_x} es la proyección de la tensión sobre el eje x , de tal forma que: $T_x = m_p g \tan \theta$; como las tensiones solo son unas fuerzas, entonces, se puede escribir como: $F_x = m_p g \tan \theta$.

Ahora bien, de acuerdo al sistema inercial, se tiene:

$$\begin{aligned} F_c - F_x &= 0 \\ F_c &= F_x \\ m_p \frac{v^2}{r} &= m_p g \tan \theta \end{aligned}$$

En esta expresión, se puede cancelar la masa del péndulo y, al despejar la velocidad, se tiene:

$$v^2 = rg \tan \theta.$$

En esta expresión se tienen dos variables difíciles de medir: el radio de giro y el ángulo; si se escribe el radio en términos de la longitud, es: $\text{Sen} \theta = \frac{r}{l}$, de modo que: $r = l \text{Sen} \theta$, y para calcular el ángulo se procede así:

A partir de la velocidad angular: $w = \frac{v}{r}$, que se puede escribir como: $w^2 = \frac{v^2}{r^2}$, se tiene:

$$w^2 = \frac{rg \operatorname{Tan} \theta}{r^2}$$

$$w^2 = \frac{g \operatorname{Tan} \theta}{r}$$

$$w^2 = \frac{g \operatorname{Sen} \theta}{l \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta}$$

$$w^2 = \frac{g}{l \operatorname{Cos} \theta}$$

Con lo cual, para calcular el ángulo a partir de la longitud, gravedad y velocidad angular, se tiene:

$$\operatorname{Cos} \theta = \frac{g}{l w^2}$$

$$\theta = \operatorname{Cos}^{-1} \frac{g}{l w^2}$$

Así queda resuelto el problema en todas sus variables.

Ejemplo.

En un péndulo cónico, si la longitud es de $1.2m$ y gira con un periodo de $2.5s$, ¿cuál es el ángulo que forma la cuerda con la vertical?

Solución.

$$l = 1.2m$$

$$T = 2.5s$$

Como la velocidad angular es: $w = \frac{2\pi}{T}$, entonces:

$$w = \frac{2\pi \operatorname{rad}}{2s}$$

$$w = 3.1416 \operatorname{rad} / s$$

Este valor permite calcular el ángulo:

$$\cos \theta = \frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{lw^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{g}{(1.2m)(3.1416rad)^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.828$$

$$\theta = 34^\circ 4'$$

Peralte. Cuando las curvas de las carreteras se construyen bien, tienen una leve inclinación hacia adentro: a esto se lo conoce como peralte, lo que permite que los vehículos que pasan por la curva tuvieran más estabilidad y no resbalaran al dar la curva; esta construcción se puede apreciar mucho mejor en los autódromos o pistas, donde circulan carros de carreras, como los carros de la Fórmula 1 y otros. La inclinación hacia la parte interna de la curva

permite que los vehículos que la transitan no resbalen; por tanto, la curva se torna más segura. Sin tener en cuenta el rozamiento, el vehículo, en el momento de transitar sobre la curva en condiciones favorables, es como si estuviera en un

sistema inercial; es decir: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$.

Según la Fig. 3.37, las fuerzas involucradas aquí son, por una parte y hacia afuera la fuerza centrífuga y en sentido contrario, es decir, hacia adentro, está la proyección de la fuerza normal a la superficie; esto es:

$$\text{Fuerza centrífuga: } F_c = m \frac{v^2}{r}.$$

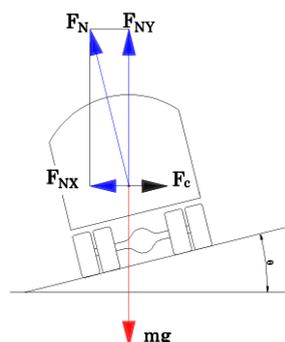


Fig. 3.37. Esquema de un camión, visto por detrás, sobre una curva peraltada.

La proyección de la fuerza normal sobre el eje x es:

$$\text{Tan}\theta = \frac{c.o}{c.a}, \text{ por tanto:}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{F_{NX}}{mg}$$

$$F_{NX} = mg\text{Tan}\theta$$

Al incluir las fuerzas en la ecuación del sistema inercial, se tiene:

$$F_{NX} - F_c = 0$$

$$mg\text{Tan}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = r g\text{Tan}\theta$$

$$v = \sqrt{rg\text{Tan}\theta} \quad (3.30)$$

Según la velocidad programada para la vía, se calcula el ángulo, que también depende del radio de curvatura.

Ejemplo.

1. ¿Qué velocidad puede desarrollar un vehículo en una curva de $50m$ de radio, con un peralte de $\theta = 8^\circ$?

Solución.

Para este ejercicio, solo se debe aplicar la ecuación deducida; es decir:

$$v = \sqrt{rg\text{Tan}\theta}$$

$$v = \sqrt{(50m)(9.81\frac{m}{s^2})(\text{Tan}8^\circ)}$$

$$v = 8.30\frac{m}{s}$$

$$v = 30\frac{km}{h}$$

2. Cuando se trata de construir una carretera, los ingenieros constructores parten de unas condiciones en las que el contratante requiere que la carretera fuese rápida; por tanto, se propone una velocidad de tránsito promedio como, por ejemplo, $80\text{Km}/h$. Con este dato, los ingenieros deben construir curvas en las que los vehículos pueden transitar sin ningún problema y mantener la misma velocidad, de modo que, para una curva de 120m de radio, ¿qué ángulo de peralte debe tener? (Fig. 3.38).

Solución. A partir de la ecuación $v = \sqrt{rg \tan \theta}$, se debe despejar el ángulo; por tanto:

$$v^2 = r g \tan \theta$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{r g}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v^2}{r g}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(120\text{m})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}$$

$$\theta = 22^\circ 45'$$

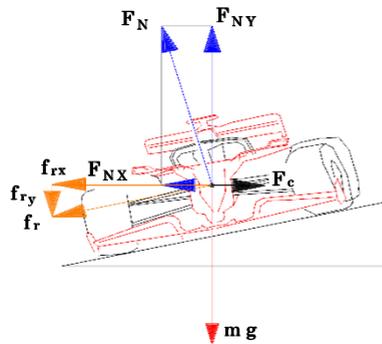


Fig. 3.38. Vehículo de carreras de Fórmula 1 sobre una curva peraltada.

Peralte con rozamiento. Para resolver este tipo de peralte, se requiere observar la Fig. 3.39, en la que se ve claramente la descomposición de las fuerzas, lo que invita a pensar cómo es el sistema de fuerzas en un punto dado sobre la curva y así se puede entender que, para que el vehículo saliera de la curva sin ningún problema de derrape, en dicho punto el vehículo debe estar en un sistema inercial respecto al

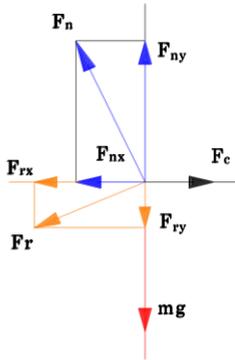


Fig. 3.39. Esquema de fuerzas que se presentan en un peralte, con rozamiento.

radio de la curva; es decir: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$

; ahora bien, para facilitar, las fuerzas a analizar se descomponen en los ejes ($y ; x$), por lo que el sistema inercial estará bajo las

ecuaciones: $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$ y $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$

, de modo que las fuerzas presentes son: la fuerza normal a la superficie y la fuerza de rozamiento, con sus proyecciones hacia los ejes ($x ; y$); esto es:

En el eje x está la fuerza centrífuga dirigida hacia la derecha, contra la fuerza centrípeta definida por la proyección de la normal, y la proyección de la fuerza de rozamiento; esto es:

$$\text{Fuerza centrífuga: } F_c = m \frac{v^2}{R} .$$

Fuerza normal en x : $F_{Nx} = F_N \text{Sen} \theta$. Así, la fuerza de rozamiento en x : $F_{rx} = F_r \text{Cos} \theta$.

Entonces, de acuerdo con: $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$, se tiene:

$$m \frac{v^2}{R} - F_N \text{Sen} \theta - F_r \text{Cos} \theta = 0$$

$$F_N \text{Sen} \theta + F_r \text{Cos} \theta = m \frac{v^2}{R}$$

Como la fuerza de rozamiento es: $F_r = \mu F_N$, al remplazar, se tiene:

$$F_N (\text{Sen}\theta + \mu \text{Cos}\theta) = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

Ahora bien, sobre el eje y : $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$, se tiene:

Peso del automóvil: mg , fuerza normal en y :
 $F_{Ny} = F_N \text{Cos}\theta$.

Fuerza de rozamiento en y $F_{ry} = F_r \text{Sen}\theta$

Entonces, de acuerdo con: $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$, se tiene:

$$F_N \text{Cos}\theta + F_r \text{Sen}\theta - mg = 0$$

Una vez más, como la fuerza de rozamiento es: $F_r = \mu F_N$, al remplazar, se tiene:

$$\begin{aligned} F_N \text{Cos}\theta + \mu F_N \text{Sen}\theta - mg &= 0 \\ F_N (\text{Cos}\theta + \mu \text{Sen}\theta) &= mg \end{aligned} \quad (2)$$

Al combinar (1) y (2), se tiene:

$$\frac{mg}{\cos\theta - \mu\text{Sen}\theta} (\text{Sen}\theta + \mu\text{Cos}\theta) = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = Rg \left(\frac{\text{Sen}\theta + \mu\text{Cos}\theta}{\text{Cos}\theta - \mu\text{Sen}\theta} \right) \quad (3.31)$$

$$v = \sqrt{Rg \left(\frac{\text{Sen}\theta + \mu\text{Cos}\theta}{\text{Cos}\theta - \mu\text{Sen}\theta} \right)}$$

Para un ejemplo numérico, se supone que la curva tiene un radio de $200m$, la superficie genera un coeficiente de rozamiento de 48% con un ángulo de inclinación de 11° . Entonces, la velocidad de tránsito es:

$$v = \sqrt{(200m)(9.81 \frac{m}{s^2}) \left(\frac{\text{Sen}11 + 0.48\text{Cos}11}{\text{Cos}11 - 0.48\text{Sen}11} \right)}$$

$$v = 38,2 \frac{m}{s}$$

$$v = 137.5 \frac{km}{h}$$

1. Calcular el ángulo de inclinación de un motociclista, sin rozamiento (véase Fig. 3.40).



Fig. 3.40. Fuerzas en un motociclista, al dar una curva. Fuente: Cantabria (2022).

Solución.

En un punto de una pista plana, por donde transita el motociclista, se presentan estas fuerzas:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0;$$

entonces: $F_{Nx} = F_N \text{Sen}\theta$ y

$$F_c = m \frac{v^2}{R}.$$

$$\text{Esto es: } F_N \text{Sen}\theta - m \frac{v^2}{R} = 0.$$

Y en el eje y , se cumple que: $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$; es decir: $F_{Ny} = F_N \text{Cos}\theta$, y el peso mg , de modo que se tiene: $F_N \text{Cos}\theta - mg = 0$; al dividir las ecuaciones tanto para x como para y , se tiene:

$$\frac{F_N \text{Sen}\theta}{F_N \text{Cos}\theta} = \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Como interesa el ángulo, entonces:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{v^2}{Rg}.$$

Como el ángulo de inclinación es con respecto a la vertical, es decir el eje y , que corresponde al ángulo del peralte, por tanto, la fórmula para calcular es la misma del peralte.

Como ejemplo, si la velocidad del motociclista es de $80k/h$ y realiza una curva de $250m$ de radio, el ángulo de inclinación es:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{v^2}{Rg}$$

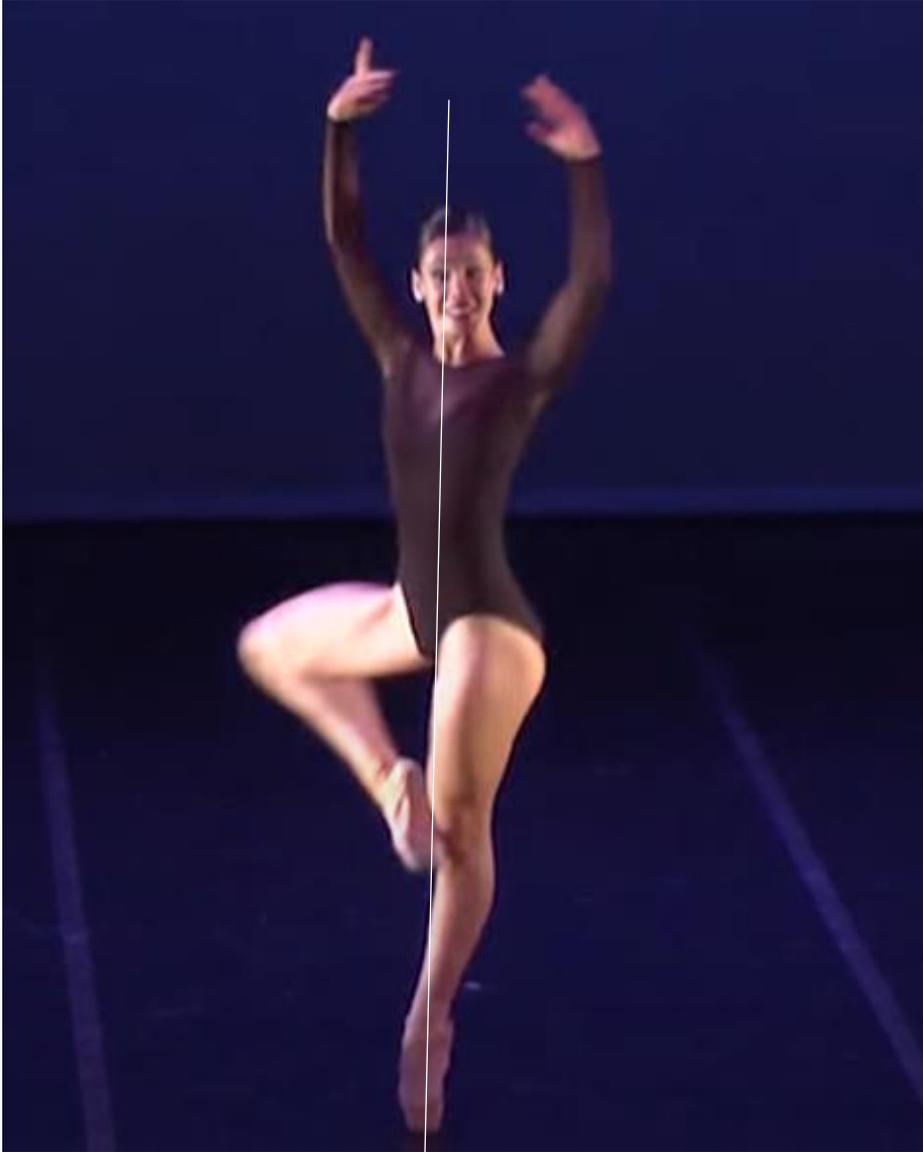
$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{(22.22 \frac{m}{s})^2}{(250m)(9.81 \frac{m}{s^2})}$$

$$\theta = 11^\circ 22'$$

Ahora bien, se puede calcular el ángulo respecto al eje x ; en este caso, se debe calcular el complemento del ángulo de inclinación; es decir: $\alpha = 90^\circ - \theta$.

Capítulo 4

Dinámica de la rotación



Fuente: Corpus Danza (2018).

4.1 Dinámica de la rotación para una partícula

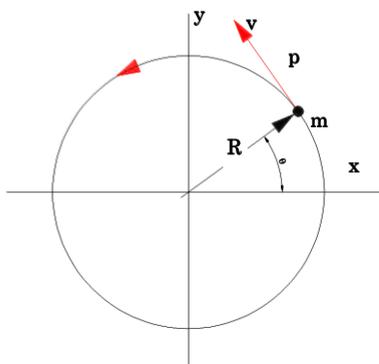


Fig. 4.1. Partícula de masa m , que gira alrededor del centro de giro a una distancia R .

Como se ve en la Fig. 4.1, la partícula de masa m gira alrededor del centro de giro a una distancia R , lo que genera un movimiento circular, pero debido a que la partícula tiene masa, entonces, la partícula también tiene inercia; más aún, la partícula posee velocidad lineal, por tanto, la partícula tiene momentum lineal, es decir:

$$P = mv .$$

Ahora bien, dado que tiene movimiento circular con radio R , la partícula adquiere una nueva propiedad, que es el **momentum angular**:

$$L = R \times P \quad (4.1).$$

Por definición del producto vectorial, el radio vector que actúa sobre el vector momentum lineal P siempre será perpendicular, es decir:

$$L = R_{\perp} P ,$$

donde $R_{\perp} = R \text{ Sen } \theta$; por tanto, el momentum angular se expresa:

$$L = R P \text{ Sen } \theta .$$

Ahora bien, como $P = mv$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$L = m(R \times v) \quad (4.2).$$

En el caso del movimiento circular, la velocidad lineal se expresa como: $v = R \omega$, de tal forma que, al remplazar, se tiene:

$$L = mR^2\omega \quad (4.3),$$

donde la expresión mR^2 se conoce como **momentum inercial**, esto es:

$$I = mR^2 \quad (4.4)$$

Entonces, el momentum angular se podría escribir como:

$$L = I \omega \quad (4.5).$$

Ahora bien, en esta expresión, el momentum angular depende del momentum de inercia y de la velocidad angular; además, por conservación del momentum angular, este vector debe permanecer constante, entonces, cuando el momentum de inercia disminuye, la velocidad angular aumenta y viceversa.

Esto se puede ver en el caso de los bailarines de ballet, cuando adquieren velocidades de rotación; de forma espectacular, pueden

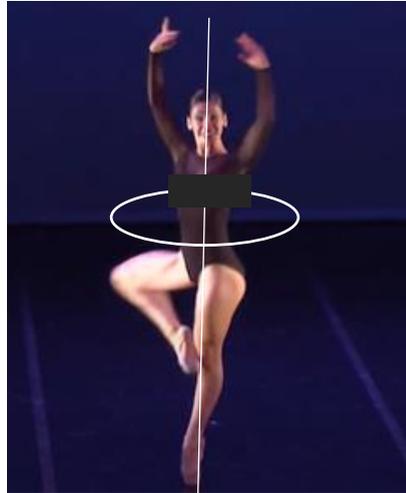


Fig. 4.2 Giros en el ballet. Margot Franch Collier de la Marliere - Optimist (XIII Concurso Nacional de Ballet, primer lugar). Fuente: Corpus Danza (2018).

llevar los brazos hacia la vertical de su cuerpo después de haber iniciado la rotación con los brazos abiertos; para disminuir la velocidad, vuelven a abrir los brazos con la exquisita belleza propia de este arte. Aquí el asunto está en saber distribuir la masa de los brazos: cuando se realiza el proceso de estirarlos, la masa se distribuye con el cuadrado del radio de los brazos,

pero, al llevarlos a la vertical de rotación, como se ve en la Fig. 4.2, el momentum de inercia disminuye drásticamente por tener el radio al cuadrado R^2 , cantidad que debe compensarse con el aumento de la velocidad angular.



Fig. 4.3. Huracán Florence. Fotografía tomada desde la Estación Espacial Internacional de la NASA. Fuente: Nasa 2018, <https://worldview.earthdata.nasa.gov/>

En la naturaleza se presentan fenómenos que, en la mayoría de las ocasiones, resultan trágicos, como son los huracanes; año tras año se presentan estos fenómenos tanto en el hemisferio norte como en el hemisferio sur, donde se les llama tifones; se originan inicialmente al acercarse grandes masas de aire con diferente temperatura, lo que genera de inmediato corrientes de convección natural, lo que lleva a que las masas

comiencen a girar: mientras una sube, otra baja; al final, el movimiento se desarrolla en un plano horizontal; la velocidad aumenta a medida que se acercan al centro de giro, al extremo de volverse muy peligrosos, tal como se puede ver en la Fig. 4.3 del huracán Florence, del 2018 de categoría 4, con vientos sostenidos de 185 Km/h , con lo que arrastra grandes cantidades de agua, en forma de lluvias torrenciales.

También se tienen las trombas marinas, que pueden succionar agua directamente desde la superficie del mar y, en ocasiones, se ha informado sobre la succión de peces, que luego caen en forma de lluvia.

Resulta muy divertido observar la superficie del agua de una piscina en las primeras horas de un día soleado: una cantidad de remolinos de diferente tamaño se pueden observar; a medida que el agua se calienta, en la superficie formando vórtices; también, se puede ver en una olla al calentar agua y, si se pone un poco de café, se observarán los diferentes movimientos aleatorios producto de corrientes de convección natural.



Fig. 4.4. Remolino captado por **George Haller**, del Instituto Federal de Tecnología en Zurich, y **Francisco Beron-Vera**, de la Universidad de Miami en Florida, han encontrado gigantescos remolinos de hasta 150 kilómetros de diámetro en las aguas turbulentas del **Océano Atlántico**; así lo publica Technology Review. Fuente: *Mar ciencia e innovación* (2015).

En los mares, tanto del hemisferio norte como del hemisferio sur, se forman grandes remolinos, como se ve en la Fig. 4.4. Enormes masas de agua empiezan a circular una respecto de la otra y aumenta la velocidad a medida que la distancia disminuye hacia el centro; en principio, las masas de agua, al rotar una respecto de la otra, se cargan de momentum de inercia; ahora bien, a medida que se acercan al centro de giro pierden radio de giro, lo que lleva a que la velocidad angular aumente para mantener el momentum angular igual a cuando inició el movimiento de rotación, lo que genera fuertes y peligrosas corrientes de circulación que terminan en un vórtice, que se traga todo lo que se encuentre en la superficie, así como lo hacen



Fig. 4.5. Huevo cocido que gira en una de sus puntas. Fuente: el autor.

los huracanes cuando se tragan los escombros, como resultado de la destrucción que dejan a su paso. En Japón, se encuentra el remolino conocido como Naruto, hoy un lugar turístico de gran espectacularidad; el fenómeno se presenta dos veces al día por el encuentro de las aguas del mar del Japón y el Océano Pacífico.³

Muchos ejemplos se presentan en la vida diaria y el lector debe encontrar otros fenómenos interesantes resultado de la conservación del momentum angular. En casa se puede efectuar este experimento, muy ilustrativo sobre este asunto de conservación del momentum angular; se trata de llevar a que girara un huevo en el extremo agudo: si el huevo esta cocido, se logra con gran facilidad, pero si está crudo, no es posible; la explicación está en que el huevo crudo, al llevarlo a girar, distribuye su masa en el interior, lo que lleva a que el momentum de inercia aumentase (al aumentar el radio de distribución de la masa) y no alcanzara la velocidad angular suficiente, lo que no ocurre con el huevo cocido que, al hacerlo girar con el solo impulso de los dedos, como la masa de su interior se encuentra más compacta, por estar cocido, el momentum de inercia no cambia y, por tanto, el solo impulso de los dedos es suficiente para lograrlo. Así que se puede decir que el momentum angular es para el movimiento rotacional lo que el momentum lineal es para el movimiento de traslación.

Entonces, cabe preguntarse: ¿qué pasa si el momentum angular cambia con el tiempo?

$$\frac{dL}{dt} = ?$$

Como el momentum angular es un vector, cambiarlo implica modificar su dirección, magnitud y sentido, lo cual

³ (https://www.chushikokuandtokyo.org/spot_36/?language=es)

significa que debe existir una fuerza para que se efectuara dicho cambio, a lo que se denomina **momentum de una fuerza**:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad (4.6).$$

Ahora bien, veamos a qué es igual el momentum de una fuerza, o torque:

Como el momentum angular es: $L = R \times P$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(R \times P)}{dt}.$$

Al resolver, se tiene:

$$\frac{dL}{dt} = R \frac{dP}{dt} + P \frac{dR}{dt}.$$

Si se trata del movimiento circular, el radio permanece constante; entonces: $\frac{dR}{dt} = 0$; además, como el momentum lineal es: $P = mv$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= R \frac{d(mv)}{dt} \\ \frac{dL}{dt} &= Rm \frac{dv}{dt} + Rv \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

Si la masa permanece constante, entonces: $\frac{dm}{dt} = 0$; así, el asunto queda:

$$\frac{dL}{dt} = Rm \frac{dv}{dt}.$$

Más aún, como $\frac{dv}{dt} = a$, la aceleración, al remplazar, se tiene:

$$\frac{dL}{dt} = R m a .$$

Y, por último, $m a = F$, entonces toda la expresión queda reducida a:

$$\frac{dL}{dt} = R F .$$

Esto corresponde a cuando la fuerza es perpendicular al radio de giro; para cualquier otra dirección de la fuerza, será la proyección perpendicular sobre el radio de giro; esto es:

$$\begin{aligned} \tau &= R F_{\perp} \\ \tau &= R F \text{ Sen}\theta \end{aligned}$$

Esta expresión corresponde a la primera definición del producto vectorial, visto en el Capítulo 1. De aquí se deduce que el torque o momentum de la fuerza es el producto vectorial del radio y la fuerza:

$$\tau = R \times F \quad (4.7),$$

y, como tal, es un vector cuya dirección es siempre perpendicular al plano de rotación y el sentido lo define hacia donde la fuerza lleva a rotar; es decir, si la rotación es en el sentido de las manecillas de un reloj, el vector es negativo y, en caso contrario, el vector se considera positivo, o sea, sale del plano de rotación, o se puede decir que sale de la “hoja del libro”.

Así, se podría decir que el torque es para el movimiento rotacional lo que la fuerza es para el movimiento de traslación.

Por otra parte, si se considera que la fuerza es: $F = ma$, donde la aceleración $a = R\alpha$, para el movimiento circular, se tiene:

$$\tau = RmR\alpha,$$

lo que, al final, se puede expresar como: $\tau = R^2m\alpha$, pero ya se sabe que: R^2m es el momentum de inercia I ; además, $\alpha = Ra$, entonces se tiene:

$$\tau = I\alpha \quad (4.8).$$

Esta expresión se establece como la segunda Ley de Newton para el movimiento de rotación, de modo que la fuerza es para el movimiento de traslación como el torque o momentum de una fuerza es para el movimiento de rotación.

Momento de una fuerza o Torque

Se puede analizar un tema tan cotidiano como abrir y cerrar una puerta; para su mayor comprensión, se considerará una vista superior (vista desde arriba).

En una vista de planta, en el accionar de una puerta, como se puede observar en la Fig. 4.6, la fuerza de color azul actúa sobre la puerta a una distancia R del punto de giro; como la fuerza que actúa sobre la puerta lo hace con un ángulo de inclinación θ respecto al radio o plano de la puerta,

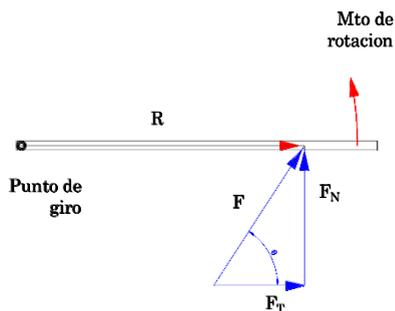


Fig. 4.6. Vista en planta de una puerta.

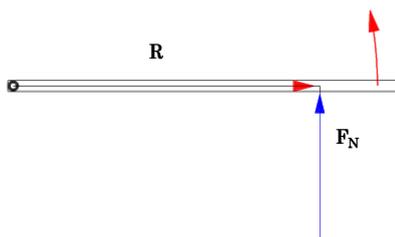


Fig. 4.7. Esquema de vectores que actúan sobre la puerta.

entonces la fuerza se descompone en dos fuerzas: una perpendicular o normal y otra tangencial al plano de la puerta. Por tanto, ahora cabe analizar cuál de las dos fuerzas causa el movimiento de rotación de la puerta. En la Fig. 4.7, se puede apreciar que, sin duda, es la fuerza que cae de forma perpendicular al plano de la puerta; es decir que: $\tau = R F_{\perp}$, pero la fuerza perpendicular al plano de la puerta solo es el cateto opuesto al ángulo; es decir: $F_{\perp} = F \text{ Sen} \theta$; por tanto, al remplazar, se tiene: $\tau = R F \text{ Sen} \theta$, expresión que solo es el módulo o magnitud de la ecuación (4.7) y, por ende, se puede expresar con letras minúsculas, así:

$$\tau = r f \text{ Sen} \theta \quad (4.9).$$

Como la función trigonométrica $\text{Sen} \theta$ está entre (0) y (± 1), entonces el máximo valor que puede alcanzar es 1 y, por el contrario, el mínimo será 0, lo que implica que el momentum de una fuerza también estará variando según fuese el ángulo de aplicación de la fuerza, así:

i. Si la fuerza cae perpendicularmente, es decir, el ángulo es de 90° , y la función trigonométrica $\text{Sen}(90^\circ) = 1$, la expresión (4.9) quedará:

$$\tau = r f .$$



Fig. 4.8. Esquema de fuerza paralela al plano de la puerta

ii. Si la fuerza es paralela al plano de la puerta (fig. 4.8), significa que el ángulo entre la fuerza y el plano de la puerta es 0. Por tanto,

$\text{Sen}(0^\circ) = 0$, de modo que el momentum de la fuerza también es $\tau = 0$; es decir, este tipo de fuerza, aplicada de esta forma, no logrará abrir la puerta; lo único que puede lograr es arrancarla de sus puntos de giro. Entonces, para abrir o cerrar

una puerta de forma segura y sin mayor esfuerzo, se debe aplicar la fuerza de forma perpendicular y lo más retirada posible del punto de giro.

Ejemplos.

1. ¿Cuál es el torque que se tiene al aplicar una fuerza de $200N$ a 45° del radio de giro de una puerta de $1,2m$ de ancho?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$R = 1.2m$$

$$F = 200N$$

$$\theta = 45^\circ$$

Al aplicar la ecuación (4.9), se tiene:

$$\tau = RF \text{Sen } \theta .$$

Si se rempazan los valores que se dan en el ejemplo, se tiene:

$$\tau = (1.2m)(200N)\text{Sen}(45^\circ)$$

$$\tau = (240Nm)0.7071$$

$$\tau = 169.68Nm$$

2. Sobre un brazo de palanca de $2.5 m$ de largo se logró establecer un torque de $7523Nm$ al aplicar una fuerza de $5000N$. ¿Con qué ángulo se aplicó la fuerza?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$\tau = 7523Nm$$

$$F = 5000N$$

$$\theta = ?$$

De acuerdo con la ecuación (4.9), se puede despejar el ángulo, así:

$$\tau = RF \text{Sen} \theta$$

$$\text{Sen} \theta = \frac{\tau}{RF}$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \frac{\tau}{RF}$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \frac{7523 \text{Nm}}{(2.5\text{m})(5000\text{N})}$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1} 0.602$$

$$\theta = 37^\circ$$

Comparación entre el movimiento de traslación y el movimiento de rotación.

Sistemas inerciales en la rotación

Así como ocurre en el movimiento de traslación, los sistemas inerciales se presentan cuando se está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme; es decir, en un estado inercial; en el movimiento de rotación, también se presentan estados de reposo o movimiento circular uniforme; es decir, un estado de inercia en la rotación, de tal modo que todos los torques que confluyen a un mismo punto suman cero. Esto es:

$$\sum_{i=0}^n \tau_i = 0 \quad (4.10).$$

Las palancas acompañan a la humanidad desde hace mucho tiempo; el sabio griego Arquímedes las estudió de forma muy cuidadosa y entendió el poder que se tiene con una palanca bien aplicada; solía decir: “Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo”.

Se las puede clasificar en tres grupos:

Palancas de primer género.

En la Fig. 4.9, se puede ver una barra que puede girar sobre la base triangular; el segmento de color rojo, debido a la fuerza F_1 , gira hacia la izquierda,

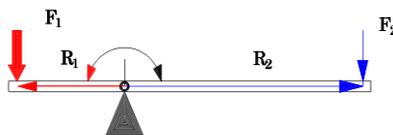


Fig. 4.9. Esquema de una palanca de primer género.

lo que se considera positivo; por tanto, el torque debido a la fuerza F_1 también es positivo y lo contrario ocurre en el segmento de color azul que, debido a la fuerza F_2 , gira hacia la derecha o en el sentido de las manecillas del reloj, lo que se considera negativo; por ello el torque, en dicho sentido, también será negativo. Así que en el punto de giro se cumple

que: $\sum_{i=0}^n \tau_i = 0$; si se desglosa, se tiene: $\tau_1 = R_1 F_1$ de torque hacia la izquierda, y $\tau_2 = -R_2 F_2$ de torque hacia la derecha o negativo; esto es:

$$\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Al remplazar, se tiene:

$$R_1 F_1 - R_2 F_2 = 0$$

$$R_1 F_1 = R_2 F_2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Así, este grupo de ecuaciones permite deducir la fuerza 1 o la fuerza 2 a partir de conocer las distancias donde se aplican esas fuerzas; es decir:

$$F_2 = \frac{R_1}{R_2} F_1 \quad (4.11).$$

La relación de los radios de giro corresponde al factor de amplificación o reducción, que en muchos casos se conoce como ventaja mecánica de la palanca,

Ejemplo

Si $R_1 = 15\text{cm}$ y $R_2 = 1.8\text{m}$, ¿qué fuerza hay en el extremo corto cuando se aplica una fuerza de 80N ?

Solución.

$$R_1 = 0.15$$

$$R_2 = 1.8\text{m}$$

$$F_2 = 80\text{N}$$

$$F_1 = ?$$

Entonces, se busca la fuerza 1; esto es:

$$F_1 = \frac{R_2}{R_1} F_2$$

$$F_1 = \frac{1.8}{0.15} 80\text{N}$$

$$F_1 = 960\text{N}$$

Como se puede ver, la fuerza que resulta es muy grande comparada con la fuerza de entrada.

Palanca de segundo género.

En este tipo de palancas, el punto de giro se encuentra en el extremo de la primera fuerza, lo que deja un brazo de acción muy grande para

la segunda fuerza que, en este caso, actúa de abajo hacia arriba para poder establecer un efecto sobre la primera fuerza. Así que la ecuación (4.11) se puede utilizar para este caso (Fig. 4.10):

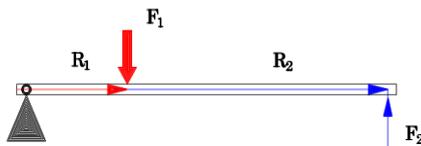


Fig. 4.10. Esquema de una palanca de segundo género.

$$F_2 = \frac{R_1}{R_2} F_1$$

Ejemplo.

Al utilizar los datos del ejemplo anterior, se tiene:

Solución.

$$R_1 = 0.15$$

$$R_2 = 2.15m$$

$$F_2 = 80N$$

$$F_1 = ?$$

El segundo radio es mayor que en el caso anterior, debido a que el centro de giro está en el extremo de la barra. Así que, al remplazar valores, se tiene:

$$F_1 = \frac{R_2}{R_1} F_2$$

$$F_1 = \frac{1.95}{0.15} 80N$$

$$F_1 = 1040N$$

Como se puede ver, la primera fuerza es superior, en el caso del primer ejemplo, debido a que el segundo radio es el total de la barra.

Cuando se pide calcular la segunda fuerza a partir de la primera, en cursos básicos de Física se denominan palancas de tercer género. En la vida cotidiana, se tienen muchos ejemplos de este tipo de palancas; resulta muy interesante captar cómo en el cuerpo humano, nuestros huesos, junto a las articulaciones, forman parte de palancas formidables, responsables de todos nuestros movimientos.

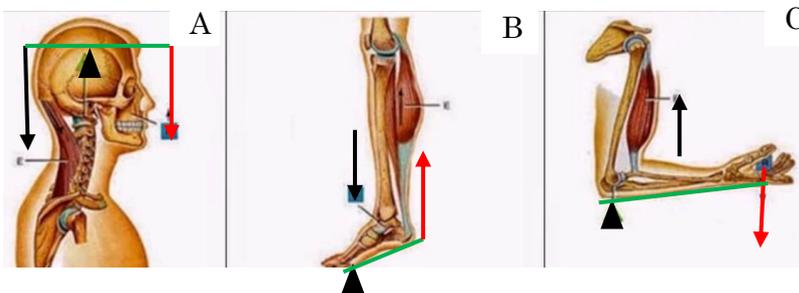


Fig. 4.11. Palancas en el cuerpo humano. Fuente: <https://pin.it/lfG0BpA>

En la Fig. 4.11 se puede ver, en el recuadro A, una palanca de primer género, en que el peso de la cabeza pivotea sobre la articulación atlanto-occipital sostenida por los músculos del cuello. En la Fig. 4.11B se tiene una palanca de segundo género, que se presenta cuando la persona lleva a que su peso pivote en la punta de los pies; el peso se descarga en la articulación del tobillo; la fuerza muscular, debido a los gemelos, lleva a que se levante el cuerpo; por último, como variación a la segunda, se tiene la palanca en el antebrazo: el punto pivotante es sobre la articulación del codo; el peso que sostiene en la mano corresponde a la carga y la fuerza muscular debida al bíceps mantiene el antebrazo en posición horizontal.

Ejemplo.

En la Fig. 4.13 se puede observar al joven intrépido de 75kg de peso que camina sobre el andamio falso; se pregunta ¿hasta dónde puede caminar, si el extremo opuesto de 1.2m del tablón se encuentra asegurado con dos bultos de cemento de 50Kg cada uno?

Solución.

Datos del ejemplo:

$$R_1 = 1.2\text{m}$$

$$F_1 = 2 \times 50\text{Kg} = 100\text{Kg}$$

$$F_2 = mg = 75\text{kg}.$$

Entonces, como

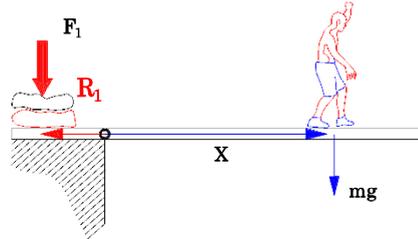


Fig. 4.13. Muchacho que caminando por un andamio falso.

$$\sum_{i=1}^n \tau = 0, \text{ se tiene: } \tau_1 - \tau_x = 0; \text{ es decir:}$$

$$R_1 F_1 = xmg$$

$$x = \frac{R_1 F_1}{mg}$$

$$x = \frac{(1.2\text{m})(100\text{Kg})}{75\text{kg}}$$

$$x = 1.6\text{m}$$

Si avanza un centímetro más, ya no hay ninguna garantía.

La balanza

Como se puede ver en la Fig. 4.14, ha sido uno de los instrumentos más antiguos utilizados para

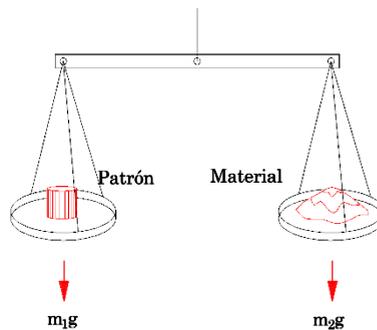


Fig. 4.14. Balanza de brazos iguales.

medir la masa. Desde entonces, sigue siendo un instrumento muy confiable, utilizado en muchas partes del mundo, especialmente en zonas rurales; la única exigencia del instrumento es la simetría en sus brazos y el peso en los platos para cargar la masa patrón y la masa a comparar, de modo que todo el sistema debe estar de acuerdo con la ecuación (4.10):

$$R_1 F_1 = R_2 F_2$$

A partir de aquí, se tiene que la fuerza es el peso de las cargas comprometidas; entonces:

$$R_1 m_1 g = R_2 m_2 g .$$

Por simetría en el instrumento, los dos radios deben ser iguales, como se puede ver en la Fig. 4.15; por tanto:

$$m_1 = m_2 .$$

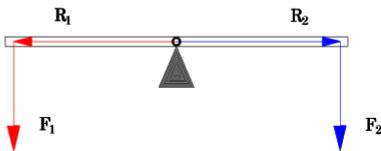


Fig. 4.15. Esquema básico de una balanza de brazos iguales.

Así, el instrumento compara la cantidad de masa; si la “pesa” o medida patrón colocada en uno de los platos de la balanza está bien calibrada y el instrumento es idóneo, la comparación que establece

con dicha masa patrón es correcta.

La balanza romana

Es un instrumento muy antiguo, basado en la balanza de brazos iguales; sirve para medir masas muy grandes con masas patrón pequeñas, para lo cual se tiene una configuración del sistema asimétrica; este mecanismo se utiliza mucho en el campo hasta la fecha; probablemente en la época romana tuvo su desarrollo, razón por la cual lleva ese

nombre; en el extremo corto se coloca la carga a medir que, por lo general, es grande (Fig. 4.16).

En el campo, donde uno de los variados usos es el peso de granos en bultos, arrobas o quintales, se cuelgan del gancho que, a su vez, puede variar la distancia al punto de giro, con lo cual, al disminuir la distancia o radio l permitiera ubicar mayor carga. Por otra parte, el brazo mayor, donde se ubica la pesa patrón a diferente distancia del

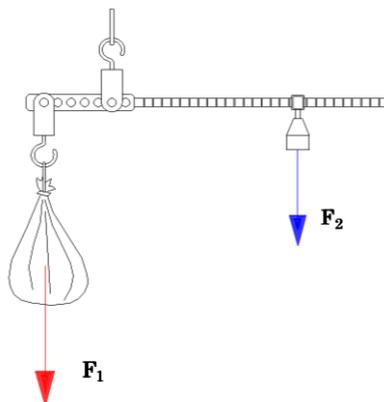


Fig. 4.16. Esquema de una balanza romana.

punto de giro, permite equilibrar toda la barra, con el fin de lograr que la barra quedase en equilibrio y de forma horizontal; es decir:

$$R_1 F_1 = R_2 F_2 ,$$

donde F_1 es la carga a medir y F_2 es la masa patrón; así, la carga es:

$$peso = \frac{R_2}{R_1} F_2 .$$

Con base en este principio de utilizar una balanza de brazos desiguales, la técnica ha desarrollado incontables instrumentos de medida de pesos y masas, como se puede ver en la Fig. 4.17.



Fig. 4.17. Báscula mecánica para pesos grandes, báscula digital para pesos grandes, báscula digital para pesos pequeños, báscula moderna, pero mecánica para control de peso de las personas. **Fuente.** Zeus equipos (s.f.), Amazon (s.f.)

De igual forma, existen básculas para pesar la carga de camiones, instaladas al borde de carreteras y en bodegas.

4.2 Poleas y aparatos afines

Las poleas son un instrumento utilizado por la humanidad desde hace mucho tiempo en la marina, exclusivamente en los sistemas para izar las velas de los barcos, y en muchos otros casos, como la construcción; el autor del invento se desconoce, pero, después de que Arquímedes (250 a. C.) las estudió, fue mucho más sencilla la aplicación y clasificación.

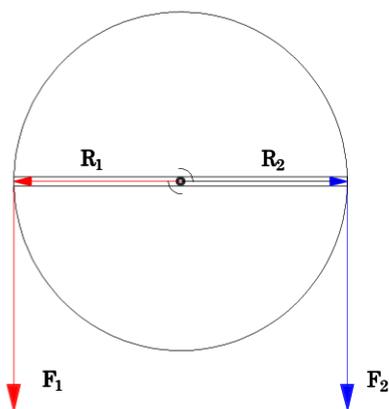


Fig. 4.18. Esquema de una polea. fija.

tal forma que, al aplicar una fuerza F_1 a R_1 , se produce un torque τ_1 positivo, y la F_2 sobre el R_2 , produce el torque τ_2 negativo, de modo que, en el punto de giro, se cumple:

Polea simple. Se trata de una rueda con eje, para que pudiera girar libremente, y una garganta sobre la periferia de la rueda, para que pudiera correr la cuerda, de tal modo que cambia de sentido la fuerza, tal como se puede ver en la Fig. 4.18: en ella se puede ver que la polea es una extensión de una palanca de brazos iguales R_1 y R_2 , de

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i = 0 \quad (4.12).$$

En este caso, solo hay dos torques; es decir:

$$\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 \\ R_1 F_1 &= R_2 F_2 \end{aligned}$$

Como los radios son iguales, por tratarse de la misma rueda, entonces:

$$F_1 = F_2.$$

Así, las fuerzas son iguales, pero de sentido contrario; por tanto, este sistema puede servir para levantar cargas, mientras el sistema de rueda estuviera anclado al cielo raso de una habitación o simplemente ubicada por encima de donde se necesite levantar la carga.

Polea móvil. Se trata de un sistema de rueda o polea que está junto a la carga y se trata de levantar con el extremo libre de la cuerda, mientras que el otro está fijo al cielo raso o un punto en lo alto. En la Fig. 4.19, se muestra un esquema de este tipo de polea; ahora bien, cuando en la cuerda se aplica la fuerza F_2 , actúa sobre el punto A como si fuera una palanca de brazo (AB) o r_2 , mientras que la carga se aplica a una distancia (AC) o r_1 (de color rojo); por tanto, los torques se aplican sobre el

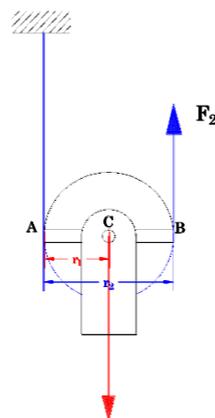


Fig. 4.19. Esquema de polea móvil.

punto A y no sobre el punto C, donde gira la polea. Así, en el punto A se tiene: $\sum_{i=1}^2 \tau_i = 0$; esto es: el torque debido a la fuerza 2 es positivo, mientras que el torque debido a la carga es negativo:

$$\tau_2 - \tau_1 = 0$$

De modo que:

$$r_2 F_2 = r_1 F_1 .$$

Como r_2 es el diámetro de la polea, es el doble de r_1 , radio de la polea; por lo tanto:

$$2r_1 F_2 = r_1 F_1 .$$

De tal modo que la relación de las fuerzas es:

$$F_2 = \frac{1}{2} F_1 .$$

Como se puede constatar, la F_2 es solo la mitad de la carga o F_1 ; es decir, que este sistema de poleas ayuda mucho en la aplicación que se tuviera.

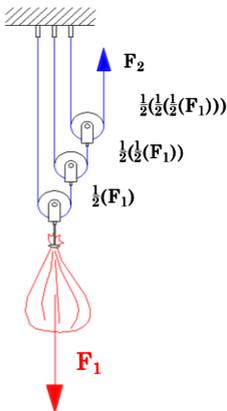


Fig. 4.20. Esquema de poleas móviles ubicadas en serie.

Aparejo potencial. Este sistema de poleas no es más que la combinación de varias poleas móviles, como se puede ver en la Fig. 4.20.

A la carga o F_1 , cuando la arrastra la fuerza 2 de la primera polea ya es la mitad de la carga; así, la segunda polea tiene por carga únicamente la mitad; ahora la fuerza para arrastrar esta carga es la mitad de la mitad y así

sucesivamente, de tal modo que, al depender del número de poleas móviles, será la ayuda en la F_2 . Esto es:

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} F_1 \right) \right)$$

Es decir, que depende del número de poleas. Para sintetizar, se tiene:

$$F_2 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 F_1$$

$$F_2 = \frac{F_1}{2^3} \quad (4.14)$$

Como se ve, la fuerza necesaria para levantar la carga se reduce en comparación con la carga, Ahora bien, debe considerar que, además de disminuir la fuerza para levantar, también se pierde en el recorrido.

Aparejo factorial. Consiste en tener un grupo de poleas móviles ubicadas en una armadura rígida; cada polea gira, porque le pasa la cuerda; al final, se puede apreciar que, en total, hay 6 cuerdas de las que cuelga la carga; es decir, que cada cuerda realmente solo carga la sexta parte de la carga; así, cada polea móvil reduce la mitad de la carga; si se tienen 3 ruedas, entonces: $2 \times 3 = 6$, que equivale a las 6 cuerdas que sostienen la carga (Fig. 2.21):

$$F_2 = \frac{1}{2 \times 3} F_1 \quad (4.15)$$

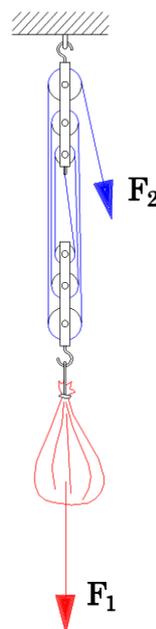


Fig. 4.21. Esquema de un sistema de aparejo factorial.

En general, si hay n ruedas, el factor de reducción de

fuerza es: $\frac{1}{2 \times n}$.

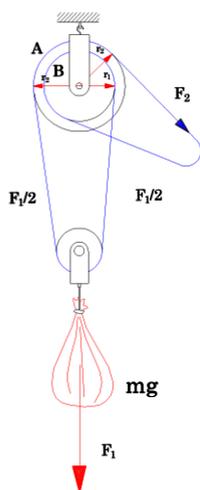


Fig. 4.22. Esquema de aparejo diferencial.

Estos sistemas se utilizaron y utilizan en los aparatos para izar las velas de barcos veleros y en muchos otros sistemas de levantar cargas pesadas.

Aparejo diferencial. Este sistema lo conforman tres ruedas, dos de ellas con un eje en común y adheridas una a la otra, provistas de estrías en la garganta de las poleas para albergar una cadena sin fin en vez de cuerda lisa; los eslabones de la cadena engranan perfectamente sobre las ruedas de tal modo que no hay posibilidad de patinar la cadena sobre la garganta de las poleas; por otra parte, una rueda que también puede tener estrías opera de polea móvil y está muy

cerca a la carga y es, en definitiva, la que carga el peso de la carga, tal como se puede ver en la Fig. 4.22. Por otro lado, el sistema debe estar muy bien anclado en la parte superior, desde donde cuelgan el sistema y carga.

Como la cadena da la vuelta por la polea móvil y al conjunto de poleas, donde una es más grande que la otra con muy poco, en general, al medir el perímetro sobre la garganta estriada, la mínima diferencia es de un eslabón; así, en el punto de giro del conjunto de poleas, se tiene:

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i = 0; \text{ esto es: torques a la derecha positivos y a la}$$

izquierda negativos, así: $r_2\left(\frac{F_1}{2}\right) - r_1\left(\frac{F_1}{2}\right) - r_2F_2 = 0$; al organizar los términos, se obtiene:

$$\frac{F_1}{2}(r_2 - r_1) = r_2F_2$$

$$F_2 = F_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{2r_2} \right) \quad (4.16),$$

donde la mínima diferencia entre los dos radios lleva a que la fuerza F_2 fuese también pequeña comparada con la carga, lo que significa que el sistema puede levantar grandes cargas con un mínimo de esfuerzo, razón por la cual el sistema se utiliza, por ejemplo, en la industria de la construcción, donde se levantan cargas muy considerables; en talleres. En la actualidad, a estos sistemas los han remplazado aparatos eléctricos. Para tener una idea de lo que pueden levantar, desarrollemos este ejemplo:

Ejemplo.

En un sistema de diferencial, se tienen dos ruedas cuyos radios son 20 y 19 cm, respectivamente. ¿Qué fuerza se necesita para poder levantar una carga de 2500N?

Solución.

Al aplicar la fórmula (4.16), se tiene:

$$F_2 = F_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{2r_2} \right)$$

$$F_2 = 2500 \left(\frac{0.2 - 0.19}{2 \times 0.2} \right)$$

$$F_2 = 62.5N$$

Como se puede ver, es muy grande la diferencia entre lo que el sistema puede levantar y la fuerza que levanta dicha carga F_2 .

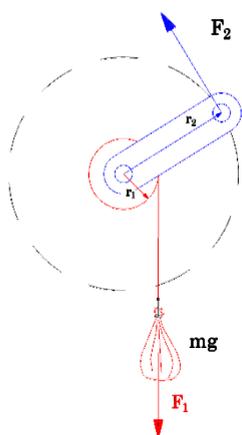


Fig. 4.23. Esquema de un sistema de torno.

Torno. Dentro de las máquinas simples, es una de las más antiguas y usadas en el mundo; en nuestros campos, aún se encuentran los famosos aljibes, con el brocal, provisto del manubrio para sacar el agua del fondo del pozo, construido de forma artesanal, pero muy funcional y práctico (Fig. 4.23). El asunto consiste en que, en el punto de giro, se aplica la ecuación de equilibrio de torques, lo cual en adelante funcionará como si fuera una palanca simple; esto es:

$$r_2 F_2 = r_1 F_1,$$

de donde:

$$F_2 = \frac{r_1}{r_2} F_1 \quad (4.17)$$

Esta es una ecuación similar a la de una palanca, con la diferencia que los radios son constantes, lo que implica que, cuando gira, los radios siempre estarán constantes; por tanto, la fuerza de la carga se mantiene constante, pues la manila de la que cuelga el balde se envuelve sobre un tambor.

4.3 Aplicaciones

¿Qué fuerza se necesita para levantar una carga de $15000N$? Resolver con los sistemas vistos.

i. Polea fija. En este caso, la polea lo único que hace es cambiar de sentido a la fuerza, de modo que:

$R_2 F_2 = R_1 F_1$; como R_1 y R_2 son iguales, entonces: $F_1 = F_2$; es decir, para que se pudiera levantar la carga, se necesita de una fuerza equivalente a la carga; es decir: $F_2 = 15000 \text{ N}$.

ii. Polea móvil. De acuerdo con la ecuación del sistema, se tiene:

$$F_2 = \frac{1}{2} F_1 .$$

Por tanto, al remplazar los valores:

$$F_2 = \frac{1}{2} 15000 \text{ N}$$

$$F_2 = 7500 \text{ N}$$

iii. Aparejo potencial. De acuerdo con la ecuación del sistema, se tiene:

$$F_2 = \frac{1}{2^3} F_1 .$$

Por tanto, al remplazar los valores:

$$F_2 = \frac{1}{8} 15000 \text{ N}$$

$$F_2 = 1875 \text{ N}$$

iv. Aparejo factorial. De acuerdo con la ecuación del sistema, se tiene:

$$F_2 = \frac{1}{2 \times 3} F_1$$

$$F_2 = \frac{1}{6} 15000 \text{ N}$$

$$F_2 = 2500 \text{ N}$$

v. Aparejo diferencial. Con poleas de 0.1cm y 0.09cm respectivamente. De acuerdo con la ecuación del sistema, se

$$\text{tiene: } F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2 \times r_2} F_1.$$

Por tanto, al remplazar los valores:

$$F_2 = \left(\frac{0.1 - 0.09}{2 \times 0.1} \right) 15000N$$

$$F_2 = 750N$$

vi. Torno. Con un cilindro de 0.1cm y brazo de 35cm . De acuerdo con la ecuación del sistema, se tiene:

$$F_2 = \frac{r_1}{r_2} F_1$$

$$F_2 = \frac{0.1}{0.35} 15000N$$

$$F_2 = 4285N$$

Con los resultados obtenidos, se puede elaborar una Tabla, en la que se compara la eficiencia de cada sistema, como se ve en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Comparación de la fuerza aplicada en los diferentes sistemas mecánicos.

Orden	Sistema	F_1 o Carga.	F_2 o fuerza aplicada.
1	Aparejo diferencial	15000N	750N
2	Aparejo potencial	15000N	1875N
3	Aparejo factorial	15000N	2500N
4	Torno	15000N	4285N
5	Polea móvil	15000N	7500N
6	Polea fija.	15000N	15000N

Como se puede ver, el aparejo diferencial resulta el mejor sistema, puesto que con él solo se necesita aplicar una fuerza de $750N$ para levantar la carga.

Nota. Tanto el aparejo diferencial como el torno dependen de los diámetros que tengan, lo mismo que los aparejos dependen del número de poleas que estén en juego.

Como resumen y una forma de comparar las leyes de la dinámica en el movimiento de traslación con el movimiento de rotación, es como se puede ver en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Comparación de conceptos dinámicos entre el movimiento de traslación y de rotación.

MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN		MOVIMIENTO DE ROTACIÓN	
Momentum lineal	$P = mv$	Momentum angular	$L = I \omega$
Fuerza	$F = \frac{dP}{dt}$	Torque	$\tau = \frac{dL}{dt}$
Fuerza, cuando el cuerpo tiene masa constante.	$F = ma$	Torque, cuando el momentum de inercia es constante.	$\tau = I\alpha$
Sistema inercial	$\sum_{i=0}^n F_i = 0$	Sistema inercial	$\sum_{i=1}^n \tau_i = 0$
Sistema acelerado	$\sum_{i=0}^n F = ma$	Sistema acelerado.	$\sum_{i=0}^n \tau_i = I\alpha$

4.4 Dinámica de la rotación en el cuerpo rígido

La principal característica de un cuerpo sólido es la invariancia en la forma durante el movimiento de traslación y de rotación; sin embargo, el cuerpo sólido puede estar representado por un punto en el cual se aplican las leyes conocidas; este punto se denomina centro de masa; cuando el cuerpo tiene una forma regular resulta muy sencillo encontrarlo, pero cuando el cuerpo tiene forma irregular o compleja, como es el caso de una silla, encontrar el centro de masa resulta complicado; de modo que, para este acápite, se

iniciará con el análisis de centros de masa, primero de forma discreta, es decir de cuerpos regados como si fueran puntos y, luego, de cuerpos continuos.

Centros de masa, caso discreto

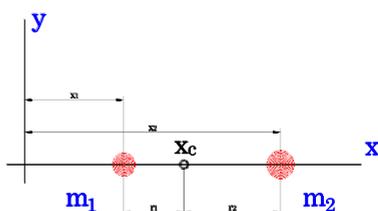


Fig. 4.24. Esquema de la ubicación del centro de masa de dos masas.

Considérese que hay dos cuerpos en el eje x separados $(x_2 - x_1)$, cuyas masas son m_2 y m_1 ; entonces, existe un punto en x_c que representa al centro de masa c_m , cuya única coordenada sería x_c , donde se cumpla que:

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i = 0 ; \text{ esto es (Fig. 2.24):}$$

$$r_1 m_1 = r_2 m_2 ,$$

donde $r_1 = x_c - x_1$ y $r_2 = x_2 - x_c$; por tanto, al remplazar, se tiene:

$$(x_c - x_1)m_1 = (x_2 - x_c)m_2 .$$

Al operar con los paréntesis, se tiene:

$$x_c m_1 - x_1 m_1 = x_2 m_2 - x_c m_2$$

$$x_c (m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Se deduce de aquí que el punto del centro de masa para el eje x es:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Y, en general, se puede escribir como:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.18).$$

Igual análisis tanto para el eje y como para el eje z; es decir, también se tienen expresiones como:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{y} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.19)$$

Ejemplos.

1. Sean las masas tal como se puede ver en la Fig. 4.25; para este grupo de masas, cuya magnitud y posición se puede ver en la Tabla 4.3:

Tabla 4.3. Coordenadas de distribución de las masas.

masas	magnitud	coordenadas
m ₁	50Gm	(1,3)
m ₂	80Gm	(2,2)
m ₃	40Gm	(1,1)
m ₄	30Gm	(3,1)
m ₅	100Gm	(3,3)
m ₆	35Gm	(5,2)

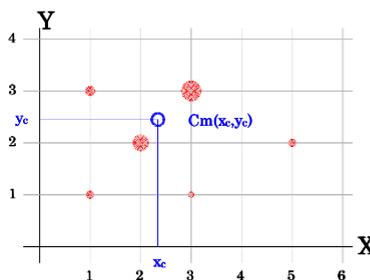


Fig. 4.25. Esquema del centro de masa de seis masas de diferente magnitud.

Solución.

Con la ecuación (4.19), cuyos resultados serán las coordenadas del centro de masa, así:

$$c_m = (x_c ; y_c).$$

Al utilizar las ecuaciones (4.19), tanto para x como para y , se tiene:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 80 + 1 \times 40 + 3 \times 30 + 3 \times 100 + 5 \times 35}{50 + 80 + 40 + 30 + 100 + 35} = \frac{795}{335} = 2.375$$

$$x_c = 2.375$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{3 \times 50 + 2 \times 80 + 1 \times 40 + 1 \times 30 + 3 \times 100 + 2 \times 35}{50 + 80 + 40 + 30 + 100 + 35} = \frac{750}{335} = 2.239$$

$$y_c = 2.239$$

Con los valores de las coordenadas, en x y en y , ya se puede ubicar el centro de masa; es decir:

$$C_m = (x_c; y_c)$$

$$C_m = (2.375; 2.239)$$

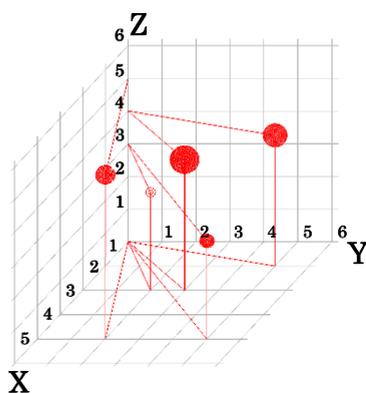


Fig. 4.26. Distribución de las masas en un espacio tridimensional.

2. Considerar un sistema tridimensional tal como se puede ver en la Fig. 4.26 con las especificaciones de acuerdo a la tabla de valores.

Tabla 4.4 Coordenadas 3D de distribución y magnitud de las masas.

masas	magnitud	coordenadas
m_1	40Gm	(4, 2, 5)
m_2	20Gm	(2, 2, 3)
m_3	60Gm	(2, 3, 4)
m_4	30Gm	(4, 5, 3)
m_5	55Gm	(1, 5, 4)

Solución.

Como el sistema está en tres dimensiones, se deberán encontrar las tres ordenadas: x_c, y_c, z_c ; entonces:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i m_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} = \frac{4 \times 40 + 2 \times 20 + 2 \times 60 + 4 \times 30 + 1 \times 55}{40 + 20 + 60 + 30 + 55} = \frac{495}{205} = 2.41$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i m_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} = \frac{2 \times 40 + 2 \times 20 + 3 \times 60 + 5 \times 30 + 5 \times 55}{40 + 20 + 60 + 30 + 55} = \frac{725}{205} = 3.53$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^5 z_i m_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} = \frac{5 \times 40 + 3 \times 20 + 4 \times 60 + 3 \times 30 + 4 \times 55}{40 + 20 + 60 + 30 + 55} = \frac{810}{205} = 3.95$$

De modo que las coordenadas del centro de masa son:

$$c_m : (x_c, y_c, z_c)$$

$$c_m : (2.41, 3.53, 3.95)$$

En este punto se encuentra el centro de masa, punto abstracto que representa a todas las masas; es como si el sistema tuviera un solo punto donde se concentra la masa.

Centro de masa, caso continuo. En el caso de tener cuerpos irregulares cuya densidad es homogénea, como en el caso de una roca o un pedazo de hierro, el centro de masa se definirá como si fuera una extensión del caso discreto, donde se deben encontrar las coordenadas en los tres ejes

$c_m : (x_c, y_c, z_c)$, solo que ahora se calcula en un caso continuo; al llevar al límite (4.18) y (4.19), se tiene:

$$x_c = \frac{\int_a^b x dm}{\int_a^a dm} \quad y_c = \frac{\int_a^b y dm}{\int_a^a dm} \quad z_c = \frac{\int_a^b z dm}{\int_a^a dm}$$

Ahora bien, como $\rho = \frac{m}{V}$, de donde se sabe que $dm = \rho dV$, si se reemplaza el diferencial de masa, queda:

$$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV} \quad y_c = \frac{\int y dV}{\int dV} \quad z_c = \frac{\int z dV}{\int dV} \quad (4.20)$$

Realmente estas integrales son complejas, por tratarse de volúmenes que se deberían calcular, resulta más sencillo cuando se trata de cuerpos superficiales, donde lo que se tiene es área; este es el caso del siguiente ejemplo.

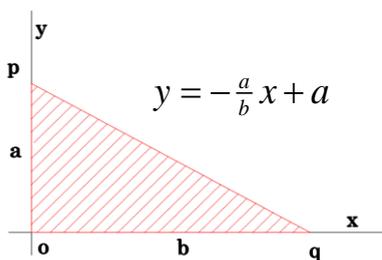


Fig. 4.27. Lámina a la que se debe calcular el centro de masa.

Ejemplo. Como se trata de una lámina donde el espesor resulta insignificante respecto a las magnitudes del área, se debe trabajar únicamente sobre la superficie; de acuerdo a la Fig. 4.27, encontrar el centro de masa.

Solución

Al no tener en cuenta el espesor, solo queda analizar la superficie en x y en y :

$$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \text{y} \quad y_c = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (4.21)$$

Para resolver estas ecuaciones, es conveniente resolver por separado las integrales del numerador y denominador; por tanto, para resolver la ecuación de x_c , se puede empezar por el denominador; en general, el área se calcula así: $A = y \cdot x$; entonces, un diferencial de área lo da: $dA = y \, dx$; por tanto, $\int dA = \int y \, dx$, donde se debe remplazar el valor de y dado en la Fig. 4.27; es decir: $\int dA = \int_0^b (-\frac{a}{b}x + a) \, dx$; ahora bien, para resolver, se puede separar, y así se tiene: $\int dA = \int_0^b -\frac{a}{b}x \, dx + \int_0^b a \, dx$; esto es: $\int dA = -\frac{a}{2b}b^2 + ab$, de modo que:

$$\int dA = \frac{1}{2} ab .$$

Por otra parte, para resolver el numerador de la ecuación (4.21), es decir: $\int x dA$. Ahora bien, como $\int dA = \int y \, dx$, entonces: $\int x dA = \int x(y \, dx)$; por tanto, si se reemplaza lo correspondiente a la función, se tiene: $\int x dA = \int_0^a x(-\frac{a}{b}x + a) \, dx$; si se destruye el paréntesis, se tiene: $\int x dA = \int_0^a -\frac{a}{b}x^2 \, dx + \int_0^a ax \, dx$, y al solucionar cada parte, se tiene: $\int x dA = -\frac{a}{3b}b^3 + \frac{1}{2}ab^2$, y como resultado final, se tiene: $\int x dA = ab^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$, de modo que:

$$\int x dA = \frac{1}{6} ab^2.$$

Al remplazar estos resultados en la ecuación (4.21), se tiene:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int x dA}{\int dA} \\ x_c &= \frac{\frac{1}{6} ab^2}{\frac{1}{2} ab} \\ x_c &= \frac{1}{3} b \end{aligned}$$

Así, ya se tiene el valor de la coordenada del centro de masa en el eje x ; con un proceso igual, se puede calcular la coordenada del centro de masa en el eje y ; esto es:

La ecuación (4.21) se refiere a la coordenada en el eje y ; es decir: $y_c = \frac{\int y dA}{\int dA}$; siempre se empieza por el denominador.

De modo que, como $A = xy$, entonces un diferencial será: $dA = xdy$; es decir que: $\int dA = \int xdy$; ahora bien, a partir de la función que se tiene en la Fig. 4.26: $y = -\frac{a}{b}x + a$, de donde se despeja x y se obtiene: $x = -\frac{b}{a}y + b$, función que se coloca en la integral; esto es: $\int dA = \int (-\frac{b}{a}y + b)dy$; al resolverlo, se obtiene:

$$\int dA = \frac{1}{2} ab.$$

Por otra parte, para resolver el numerador de la ecuación (4.21), es decir: $\int ydA$. Entonces, como $\int dA = \int xdy$, se tiene: $\int ydA = \int y(xdy)$; al remplazar el valor de la función, se tiene: $\int ydA = \int y(-\frac{b}{a}y + b)dy$; al resolver, queda:

$$\int ydA = \frac{1}{6}a^2b.$$

Por tanto, el valor de la coordenada en y queda:

$$y_c = \frac{\int ydA}{\int dA}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{6}a^2b}{\frac{1}{2}ab}$$

$$y_c = \frac{1}{3}a$$

Así se ha concluido el cálculo de las coordenadas del centro de masa, de modo que dicho punto está en:

$$c_m : (x_c, y_c)$$

$$c_m : \left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a\right)$$

Resultado que se puede ver en la Fig. 4.28.

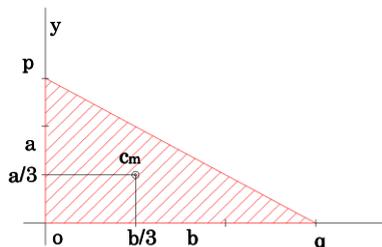


Fig. 4.28. Esquema de la localización del centro de masa de la figura atacado en rojo.

Cuando los objetos tienen formas más complejas, el cálculo del centro de masa también resulta complicado; sin embargo, se puede desarrollar una forma práctica para encontrar el centro de masa; por ejemplo, en el caso de un bate

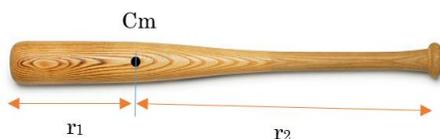


Fig. 4.29. Localización del centro de masa en un bate de béisbol. Fuente: <https://www.amazon.com/-/es/Adhesivo-decorativo-para-pared-b%C3%A9isbol/dp/B00GSWNG4G>

suspender justamente por debajo de donde se encuentra el centro de masa. Cuando un jugador de béisbol ha ganado experiencia, siempre logra golpear la pelota en dicho punto; así resultará el mejor golpe y no habrá los molestos cimbrones

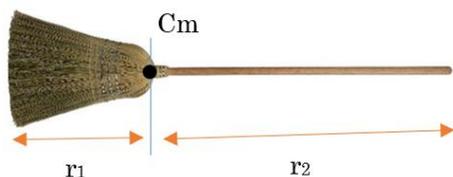


Fig. 4.30. Localización del centro de masa en una escoba. Fuente: <https://newtonbroom.com/wound-corn-brooms/>

en las manos. También, resulta muy curioso encontrar el centro de masa de una escoba (Fig. 4.30); de la misma forma que en el bate, si se logra ubicarla horizontal sobre un soporte, de tal modo que se quede en equilibrio, muy seguramente quede suspendida en el centro de masa, pero algo curioso ocurre ahora: si se cortan justamente en el punto de equilibrio, los pesos de los dos cuerpos no son iguales; el pedazo más pequeño siempre pesará más. ¿A qué se deberá esto? A partir de la Fig. 4.31, se puede notar que los pesos están en la siguiente relación: $m_1 g \geq m_2 g$.

Ahora bien, un cuerpo sólido se caracteriza por estar conformado por muchísimas partículas, cuya separación entre ellas se mantiene constante en el tiempo, razón por la cual la forma se mantiene por largo tiempo, hasta cuando fuerzas externas deformen su figura y su densidad.

de béisbol, a pesar de tener una forma regular, no es tan sencillo su cálculo, pero si se lo logra ubicar horizontalmente sobre un soporte de tal modo que quede en equilibrio, significa que se lo ha logrado

de la misma forma que en el bate, si se logra ubicarla horizontal sobre un soporte, de tal modo que se quede en equilibrio, muy seguramente quede suspendida en el centro de masa, pero algo curioso ocurre ahora: si se cortan justamente en el punto de equilibrio, los pesos de los dos cuerpos no son iguales; el pedazo más pequeño siempre pesará más.

De modo que es el momento de la fuerza o torque lo que permite el equilibrio y no el peso; obsérvese que un pedazo es más grande que el otro, lo que lleva a que tuviera mayor radio; esto compensa a lo que le falta de masa.

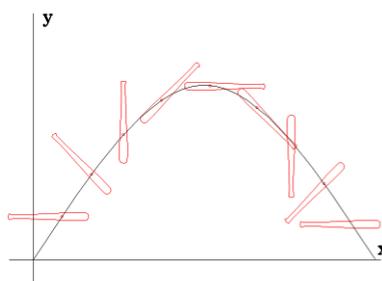


Fig. 4.31. Trayectoria parabólica del centro de masa de un bate.

Cuando un cuerpo sólido se lanza por los aires, su movimiento se somete a dos movimientos: uno de traslación y otro de rotación.

i. En el movimiento de traslación, cada partícula que lo conforma describe líneas rectas paralelas entre sí durante un tiempo determinado.

ii. Si las trayectorias de las partículas que conforman el cuerpo sólido describen líneas curvas y en ocasiones cerradas, con centros de giro y demás, seguro que el cuerpo rígido tiene movimiento de rotación; más aún, cuando el cuerpo gira libremente, es decir, cuando se lo lanza, el centro de giro de las partículas que conforman al cuerpo rígido es el mismo centro de masa.

Ahora bien, cuando se dan los dos movimientos o más, las trayectorias de las partículas se tornan un tanto complejas y, más aún, si la trayectoria es una curva, como se puede ver en la Fig. 4.32. Sin embargo, el centro de masa sigue la

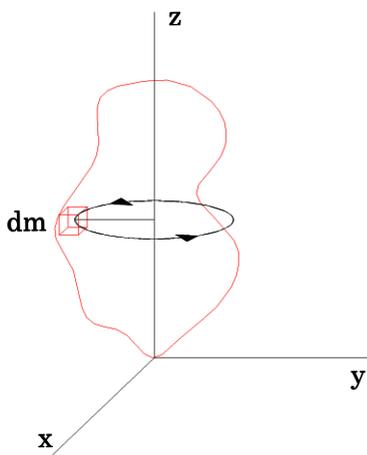


Fig. 4.32. Rotación de un cuerpo. sólido

trayectoria que define el movimiento; este es el caso de la trayectoria parabólica que sigue el centro de masa del bate o cualquier otro cuerpo regular o irregular.

Como ya se dijo, cuando un cuerpo rígido gira, lo hace sobre el centro de masa para mantener el equilibrio, así que cada partícula que lo conforma posee momentum angular respecto al eje de giro dependiendo de la distancia a la que se encuentre; la suma de estas cantidades da como resultado el momentum angular del sólido, de modo que el momentum angular para una partícula es: $L_i = R_i \times P_i$; ahora bien, el momentum lineal de la partícula es: $P_i = m_i v_i$, de tal modo que el momentum angular se escribiría: $L_i = r_i m_i v_i$. Además, la velocidad lineal o tangencial es: $v_i = r_i \omega_i$, razón por la cual se tiene que: $L_i = r_i^2 m_i \omega_i$.

Momentum de Inercia. Caso discreto.

Como ya se ha dicho, el momentum de inercia de una partícula componente de un cuerpo sólido se puede expresar como $i_i = r_i^2 m_i$; por tanto, el momentum angular también se podría escribir como: $L_i = i_i \omega_i$; ahora bien, si el objeto se formara por partículas que se puedan contabilizar, el

momento angular total sería: $L = \sum_{i=1}^n l_i$; es decir:

$$L = \sum_{i=1}^n I_i \omega_i,$$

donde el momentum de inercia es $I_i = r_i^2 m_i$ y, por tanto, el momentum de inercia total es:

$$I = \sum_{i=1}^n r_i m_i; \text{ según esto, para calcular el momentum}$$

angular es necesario conocer el momentum de inercia, que se puede presentar tanto para casos discretos como para casos continuos.

Caso discreto del momento de inercia.

Caso donde se deben considerar partículas separadas que pueden girar respecto a un punto, con lo cual ganan momentum de inercia:

$$I = r^2 m.$$

Si es más de una partícula la que conforma un volumen, entonces el momentum de inercia será:

$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i,$$

donde la sumatoria reúne todo el conjunto de partículas.

Ejemplos.

1. Calcular el momentum de inercia del sistema de masa distribuida de acuerdo a la Fig. 4.33 en el centro del triángulo que forman las masas.

Solución.

Como el momentum de inercia es: $I = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$, de acuerdo a

la Fig. se tiene: $I = d^2 m_1 + d^2 m_2 + d^2 m_3$; es decir:

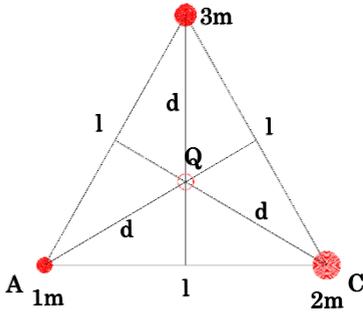


Fig. 4.33. Distribución de masas triangular que giran en el centro geométrico.

$$I = d^2(m_1 + m_2 + m_3).$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$I = d^2(1 + 2 + 3)m$$

$$I = 6d^2m$$

Ahora, el asunto es calcular d , para lo cual se tiene que el ángulo interno de un triángulo equilátero es de 60° , de modo que en

cualquier lado del triángulo se tiene: $\cos 30^\circ = \frac{l/2}{d}$, de tal forma

que, al despejar d , se tiene:

$$d = \frac{l}{2\cos 30^\circ}$$

$$d = \frac{l}{2(0.86)}$$

$$d^2 = \frac{l^2}{3}$$

Y remplazando se tiene:

$$I = 6m \left(\frac{l^2}{3} \right)$$

$$I = 2ml^2$$

2. El mismo triángulo del ejemplo anterior, pero ahora el triángulo va a girar sobre

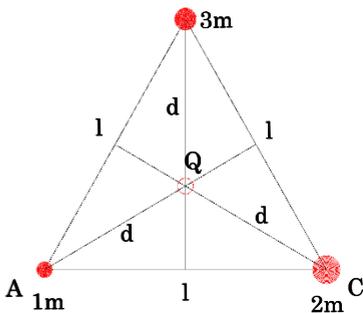


Fig. 4.34. La distribución de masas triangular que gira en el vértice de la menor masa.

el vértice A. Esto es: $I = \sum_{i=1}^n I_i$; o sea: $I = \sum_{i=1}^n m_i l_i^2$; al remplazar

los valores, se tiene:

$$I = 1m(0) + 2ml^2 + 3ml^2$$

$$I = 5ml^2$$

Si comparamos este resultado con el anterior, se aprecia que es mayor, lo que significa que es más difícil hacerlo girar y de igual forma detenerlo; esto es tener mayor momentum de inercia (Fig. 4.34).

3. Considerar la siguiente distribución de masas iguales localizadas en un hexágono que giran en el centro geométrico (Fig. 4.35).

Solución

Como el momentum de

inercia es: $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$,

ahora bien, el radio de la circunferencia que circunscribe al hexágono

tiene como radio r ; entonces, las masas se encuentran a la misma distancia del centro de giro; esto es:

$$I = 3m_1 r_1^2 + 3m_2 r_2^2 + 3m_3 r_3^2 + 3m_4 r_4^2 + 3m_5 r_5^2 + 3m_6 r_6^2$$

$$I = 18mr^2$$

4. Considérese el mismo ejemplo anterior, pero el sistema de masa gira sobre uno de los vértices del hexágono, como se puede ver en la Fig. 4.36.

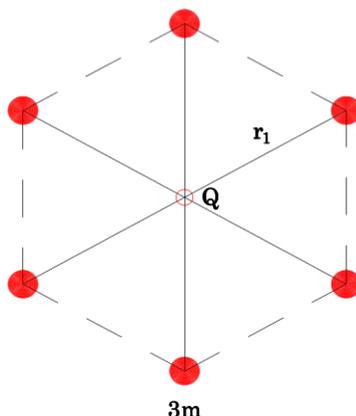


Fig. 4.35. Distribución de masas hexagonal que giran en el centro geométrico.

Solución.

En este caso, las distancias de las masas al punto de giro son variables y definidas por r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 , a las que se debe encontrar su valor a partir de la distribución.

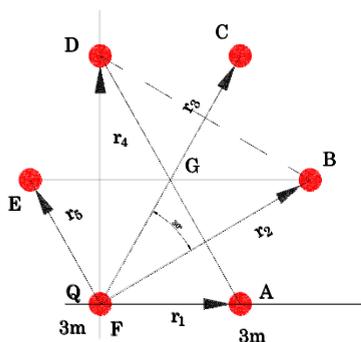


Fig. 4.36. Distribución de masa hexagonal que gira en uno de sus vértices.

r_1 : obsérvese que el triángulo AGF es un triángulo equilátero; por tanto, r_1 corresponde al radio de la circunferencia que circunscribe al hexágono; r_2 corresponde al triángulo equilátero FBD; por tanto, en el triángulo rectángulo FQG se puede establecer:

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\frac{r_2}{2}}{\frac{r_3}{2}}$$

el doble del radio de la

circunferencia, entonces: $r_3 = 2r$; por tanto: $\text{Cos}\alpha = \frac{r_2}{2r}$, de

modo que $r_2 = 2r \text{Cos}\alpha$; ahora bien, como $\alpha = 30^\circ$, entonces:

$$r_2 = 1.73r .$$

Para calcular r_4 simplemente obsérvese el triángulo FBD que, como ya se dijo, es un triángulo equilátero; por tanto, sus lados son iguales, de modo que r_2 es igual a r_4 . Para calcular r_5 , se puede observar el triángulo FAG, similar al triángulo FGE; por tanto: $r_1 = r_5 = r$. Con todos estos resultados, se tiene:

$$I = \sum_{i=1}^5 m_i r_i^2$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2$$

$$I = 3m(r)^2 + 3m(1.73r)^2 + 3m(2r)^2 + 3m(1.73r)^2 + 3m(r)^2$$

$$I = 3mr^2 + 9mr^2 + 12mr^2 + 9r^2 + 3mr^2$$

$$I = 36mr^2$$

Como se puede ver, el momentum de inercia es mayor que el anterior, a pesar de que las masas y la distribución son iguales.

5. Calcular el centro de masa y el momentum de inercia respecto al punto (0, 0), si cada masa vale 3 unidades de masa m (Fig. 4.37).

Solución.

a) Se define centro de masa como $Cm; (x_{cm}; y_{cm})$ Por

tanto, la coordenada como la ordenada del centro de masa se

$$\text{define como: } x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} .$$

Entonces, al desarrollar, se tiene:

$$x_{cm} = \frac{3m \times 2 + 3m \times 1 + 3m \times 2 + 3m \times 2 + 3m \times 3 + 3m \times 3 + 3m \times 4 + 3m \times 5 + 3m \times 6 + 3m \times 6}{3m + 3m +}$$

$$x_c = \frac{102}{30}$$

$$x_c = 3.4$$

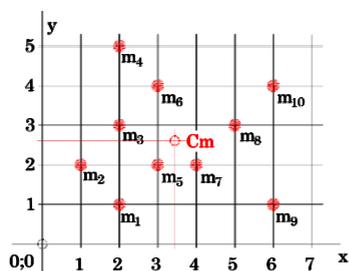


Fig. 4.37. Distribución de masas respecto al punto (0, 0).

Para calcular la ordenada, se procede con la ecuación:

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \text{ de tal forma que, al remplazar, se tiene:}$$

$$y_{cm} = \frac{3m \times 1 + 3m \times 2 + 3m \times 3 + 3m \times 5 + 3m \times 2 + 3m \times 4 + 3m \times 2 + 3m \times 3 + 3m \times 1 + 3m \times 4}{3m + 3m + 3m}$$

$$y_{cm} = \frac{81m}{30m}$$

$$y_{cm} = 2.7$$

De modo que estos valores corresponden a las coordenadas del centro de masa; esto es:

$$Cm; (3.4 ; 2.7).$$

b) Calcular el momentum de inercia. Aquí hay tres posibilidades de establecer el cálculo del momentum de inercia:

i. En primera instancia, se calculará el momentum de inercia de cada masa respecto al punto de origen (0,0) y, luego, se suma, así:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i ; \text{ es decir: } I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 .$$

Ahora bien, como las masas tienen igual valor y, además, para calcular el radio a partir de las coordenadas de cada masa se utiliza la ecuación: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por tanto, el momentum de inercia es:

$$I = 3m[(2^2 + 1^2) + (1^2 + 2^2) + (2^2 + 3^2) + (2^2 + 5^2) + (3^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2) + (4^2 + 2^2) + (5^2 + 3^2) + (6^2 + 1^2) + (6^2 + 4^2)]$$

$$I = 3m(5 + 5 + 13 + 29 + 13 + 25 + 20 + 34 + 37 + 52)$$

$$I = 699Kg \text{ m}^2$$

ii. Calcular el momentum de inercia respecto al centro de masa. Esto es como si las masas girasen alrededor del centro de masa, de modo que la distancia de las masas al centro de masa, cuyas coordenadas ya se calcularon como (3,4; 2,7), serán los radios de giro de cada masa, al punto de coordenadas del centro de masa; es decir: $r_i^2 = (x_i - x_{cm})^2 + (y_i - y_{cm})^2$. Para resolver estas operaciones y disminuir el riesgo de equivocación, es mejor construir una Tabla de cálculo en la que se pueda calcular, como se ve en la Tabla 4.5. Así:

Tabla 4.5. Tabulación de coordenadas para el cálculo del radio respecto al centro de masa.

masa	x	y	x _{cm}	y _{cm}	□x	□y	□x ²	□y ²	r ²
1	2	1	3,4	2,7	-1,4	-1,7	1,96	2,89	4,85
2	1	2			-2,4	-0,7	5,76	0,49	6,25
3	2	3			-1,4	0,3	1,96	0,09	2,05
4	2	5			-1,4	2,3	1,96	5,29	7,25
5	3	2			-0,4	-0,7	0,16	0,49	0,65
6	3	4			-0,4	1,3	0,16	1,69	1,85
7	4	2			0,6	-0,7	0,36	0,49	0,85
8	5	3			1,6	0,3	2,56	0,09	2,65
9	6	1			2,6	-1,7	6,76	2,89	9,65
10	6	4			2,6	1,3	6,76	1,69	8,45
									44,5

Como el momentum de inercia es: $I = \sum_{i=1}^{10} m_i r_{ci}^2$, esto es:

$$I = 3 \left(\sum_{i=1}^{10} r_{ci}^2 \right)$$

$$I = 3(44.5)$$

$$I = 133.5 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

i. Calcular el momentum de inercia al considerar que el centro de masa gira alrededor del punto de giro; esto es: $I_{00} = MR_{cm}^2$; y como $M = 30m$ y $R_c = \sqrt{3.4^2 + 2.7^2} = 4.34$, así que, al remplazar, se tiene:

$$I_{00} = (30Kg)(4.34^2 m^2)$$

$$I_{00} = 565.5kg \cdot m^2$$

Nota. Como se puede observar, el mayor momentum de inercia encontrado se da cuando las masas giran alrededor del punto de origen de las coordenadas $(0,0)$ y el menor cuando giran respecto al centro de masa, de tal modo que es sencillo deducir que la suma de los dos momentum de inercia de menor valor es igual al de mayor valor:

$$I_{oo} = I_{cm} + I_{oocm}$$

$$I_{oo} = (133.5 + 565.5)Kg \cdot m^2 +$$

$$I_{oo} = 699Kg \cdot m^2$$

Como se ve, el resultado es igual al obtenido en el literal *i*.

Como conclusión de esto, se tiene que el momentum de inercia de un sistema discreto de masas, respecto al punto de origen en el plano, es igual al momentum de inercia del sistema de masas que giran respecto al punto del centro de masas más el momentum de inercia del sistema de masas, representado por su centro de masa que gira respecto al punto de origen.

4.5 Momentum de inercia en casos continuos

“Momentum de inercia de un sólido”

En un caso continuo, la masa se puede expresar como un diferencial dm , de modo que la sumatoria se transforma en una integral; es decir, el momentum de inercia se denota como:

$$I = \int r^2 dm \quad (4.22).$$

Resulta que el diferencial de masa se lo puede expresar como: $dm = \rho dV$, de modo que esta expresión se puede escribir como:

$$I = \int_V r^2 \rho dV,$$

por lo que se tiene una integral de volumen que, a su vez, se podría expresar como:

$$I = \int_x \int_y \int_z (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV_{xyz}.$$

Por supuesto, el asunto se torna complejo; sin embargo, si se tratara de encontrar el momentum de inercia de una figura en la que solo hay superficie, como puede ser el caso de una lámina muy delgada comparada con las dimensiones de largo y ancho, esta expresión quedaría: $I = \int_x \int_y (x^2 + y^2) \rho_{xy} dS_{xy}$, y más aún, si se tratara de un cuerpo longitudinal en que el diámetro sería insignificante respecto a la longitud, el asunto se podría escribir como:

$$I = \int_x x^2 \rho_x dx \quad (4.23),$$

donde ρ_x sería la densidad lineal.

Ejemplos.

Momentum de inercia de una varilla.

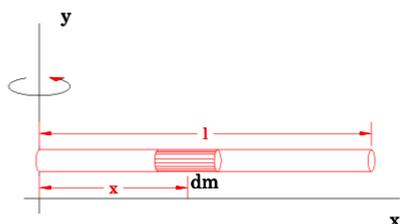


Fig. 4.38. Varilla que gira en uno de los extremos.

1. Calcular el momentum de inercia de una varilla rígida, muy delgada y larga, cuya longitud es l y m es su masa, que gira en uno de sus extremos (Fig. 4.38).

Solución.

En este caso se trata de una varilla cuya dimensión de espesor o diámetro es despreciable respecto a la longitud; por tanto, para abordar el ejemplo, se parte de:

$$I = \int_x x^2 \rho_x dx.$$

Como la densidad lineal se supone que es constante a lo largo de la varilla, entonces, se puede tratar la integral, así:

$$I = \rho_x \int_0^l x^2 dx; \text{ al solucionar, se tiene: } I = \rho_x \frac{1}{3} l^3. \text{ Como } \rho_x = \frac{m}{l}, \text{ al remplazar, queda: } I = \frac{1}{3} ml^2.$$

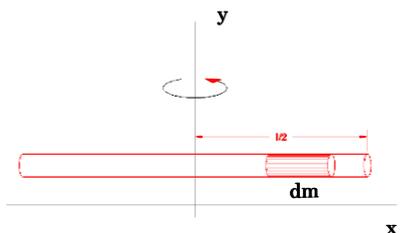


Fig. 4.39. Esquema de varilla que gira en el centro de su longitud.

2. Calcular el momentum de inercia de una varilla cuando gira en el centro de su longitud (Fig. 4.39).

Solución.

Como se acabó de ver, el momentum de inercia de una varilla que gira en uno

de sus extremos es $I = \frac{1}{3} ml^2$; entonces, la longitud ahora es:

$\frac{l}{2}$; por tanto, al remplazar, se tiene:

$$I = \frac{1}{3} m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{1}{12} ml^2$$

3. **Momentum de inercia de un volante.** Calcular el momentum de inercia de un volante o anillo delgado de masa m y radio R respecto al centro geométrico del anillo (Fig. 4.40).

Solución.

A partir de: $I = \int R^2 dm$, el

diferencial de masa se puede expresar en términos de la densidad

de superficie $\frac{m}{s}$, y un

diferencial del largo de la circunferencia ds , así:

$dm = \frac{m}{s} ds$, pero $ds = R d\theta$, de tal modo que, al remplazar todo

esto, queda:

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{m}{s} R d\theta .$$

Como la integral queda en términos de θ , los extremos irán de 0 a 2π ; además, el radio, el perímetro s y la masa m son constantes que salen de la integración, por lo que esto queda así:

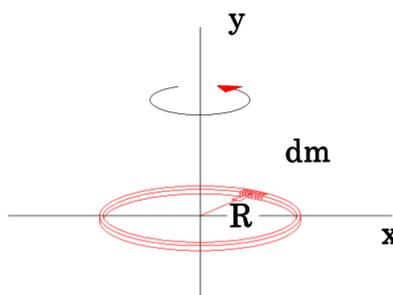


Fig. 4.40 Esquema de anillo o aro girando sobre su centro geométrico.

$$I = \frac{mR^3}{s} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I = \frac{mR^3}{2\pi R} 2\pi$$

$$I = mR^2$$

Así que este resultado corresponde al momentum de inercia de un anillo; se puede extender el mismo resultado para un cilindro hueco de paredes muy delgadas, es decir, un tubo de longitud l que gira sobre su eje axial.

4. Momentum de inercia de un disco. Calcular el momento de inercia de un disco de radio r y espesor e .

Solución.

Para responder a este problema, considérese que el disco se lo puede dividir en anillos concéntricos, cuyo volumen es un diferencial de volumen dV ; así, como $I = \int r^2 dm$, el diferencial de masa se puede expresar como: $dm = \rho dV$; al remplazar, se tiene: $I = \int r^2 \rho dV$; ahora bien: el diferencial de volumen se puede considerar como un anillito de espesor e , cuya longitud es $2\pi r$, y un ancho del anillo de dr .

Con todo esto, el diferencial de volumen se expresa como: $dV = 2\pi r e dr$, de tal modo que, al remplazar, se tiene:

$$I = \int_0^R 2\pi \rho e r^3 dr$$

$$I = 2\pi \rho e \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho e R^4$$

Ahora bien, πR^2 es el área del círculo del disco, por tanto esta área por el espesor e es el volumen del disco V , así que: $I = \frac{1}{2} \rho V R^2$; más aún, la densidad por el volumen es la masa, así: $m = \rho V$, que, al remplazar, se tiene:

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$

El momentum de inercia de un disco puede extenderse a un cilindro con el solo hecho de aumentar el espesor e del disco, hasta alcanzar una longitud l , para convertirse así en una varilla que gira sobre el eje axial de la varilla.

4.6 Teorema de Steiner

Cuando se trata de encontrar el momentum de inercia de cuerpos cuya geometría es más complicada, resulta también complejo su cálculo. En 1746, **Jakob Steiner**, geómetra reconocido, dio el visto bueno después de haber comprobado el Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner, propuesto años antes por **Daniel Cristian Ludolph Lemus** (1780-1863).

De acuerdo a la geometría propuesta en la Fig. 4.39, se asume que el eje z es el eje de rotación y pertenece al sistema tridimensional original; a la distancia a se encuentra el sistema tridimensional correspondiente al centro de masa, donde el eje z_c rota respecto al eje z del

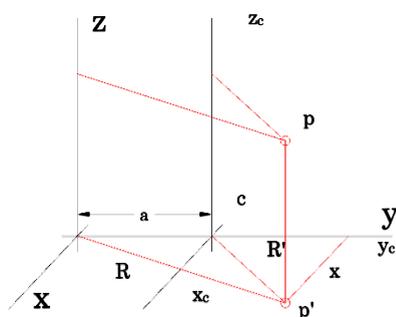


Fig. 4.41. Esquema de un punto P del cuerpo en referencia.

sistema original y conserva el paralelismo en cualquier momentum. De esta forma, se tiene el sistema original formado por los ejes (x, y, z) y el sistema del centro de masa del objeto (x_c, y_c, z_c) ; un punto cualquiera del cuerpo, al que se lo ha denotado como P , gira alrededor del eje z , tiene una proyección sobre el plano (x, y) ; el punto denotado por P' es la proyección que se encuentra a R del centro del origen del sistema original y a R' del sistema del centro de masa, razón por la cual $R^2 = x^2 + y^2$, pero como el origen del sistema del centro de masa se encuentra a una distancia a , entonces: $R^2 = x^2 + (a + y_c)^2$; al resolver este sistema, queda:

$$R^2 = x^2 + a^2 + y_c^2 + 2ay_c$$

$$R^2 = x^2 + y_c^2 + a^2 + 2ay_c$$

Ahora bien, si $x = x_c$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$R^2 = x_c^2 + y_c^2 + a^2 + 2ay_c.$$

De lo que se puede concluir de acuerdo a lo que se puede ver en la Fig. 4.41, la ecuación se puede escribir como:

$$R^2 = R_c^2 + a^2 + 2ay_c.$$

Ahora bien, como el momentum de inercia se define como $I = MR^2$, se puede entender que a la masa del cuerpo la forman muchísimas partículas, de tal modo que $M = \sum_{i=1}^n m_i$; por tanto, el momentum de inercia se lo puede expresar como:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R^2$$

$$I = \sum_{i=1}^n m_i (R_c^2 + a^2 + 2ay_c)$$

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_c^2 + \sum_{i=1}^n m_i a^2 + \sum_{i=1}^n m_i 2ay_c$$

Como se dijo: $M = \sum_{i=1}^n m_i$, $y_c = 0$, porque corresponde al mismo centro de masa; por tanto,

$$I = MR_c^2 + Ma^2.$$

Esta expresión también se la puede escribir como:

$$I = I_c + Ma^2 \quad (4.24).$$

Nota. Cuando se calculaba el momentum de inercia de masa discretas, también se llegó a la conclusión, de forma numérica, donde el momentum de inercia del sistema de masas respecto al punto de origen es igual a la suma del momentum de inercia del sistema que gira respecto al centro de masa, más el momentum de inercia del sistema considerado en el centro de masa del sistema respecto al punto de origen.

$$I_{oo} = I_{cm} + I_{oocm}.$$

Ejemplos. Calcular el momento de inercia al utilizar el Teorema de Steiner de alguno de los ejemplos ya desarrollados.

i. Momentum de inercia de una varilla rígida de longitud l y masa m respecto a un eje perpendicular al eje axial en el centro de la varilla.

Solución.

De acuerdo con el Teorema de Steiner: $I = I_{cm} + a^2 M$.

El centro de masa, por simetría, está en el centro de la varilla, y el momentum de inercia en el extremo; de acuerdo al ejemplo 1, es $I = \frac{1}{3} l^2 m$; ahora bien, del centro de masa al extremo hay $\frac{l}{2}$, de modo que, al remplazar, se tiene:

$$\frac{1}{3} l^2 m = I_{cm} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m$$

$$I_{cm} = \frac{1}{3} l^2 m - \left(\frac{l}{2}\right)^2 m$$

$$I_{cm} = l^2 m \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} l^2 m$$

ii. Momentum de inercia de un disco de masa m y radio r cuando gira sobre una superficie.

Solución.

De acuerdo con el Teorema de Steiner: $I = I_{cm} + r^2 m$; entonces, el momentum de inercia de un disco cuando gira en el centro de masa o centro geométrico es: $I = \frac{1}{2} r^2 m$, y el momentum de inercia respecto a un extremo por simetría, donde el parámetro a es el radio r ; por tanto, el momentum de inercia respecto al punto de roce con la superficie es: $I = r^2 m$, de modo que, al aplicar el Teorema de Steiner, se tiene:

$$I = I_{cm} + a^2 m$$

$$I = \frac{1}{2} r^2 m + r^2 m$$

$$I = r^2 m \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right)$$

$$I = \frac{3}{2} r^2 m$$

Este momentum de inercia es mayor que cuando el disco o cilindro gira sobre el eje axial.

i. Momentum de inercia de una esfera maciza que se encuentra unida a una cuerda de masa insignificante y gira respecto a un punto (péndulo).

Solución.

Como el momentum de inercia de una esfera con respecto a su centro de masa es: $I = \frac{2}{5} r^2 m$, entonces, al aplicar el Teorema de Steiner, queda:

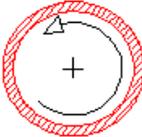
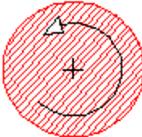
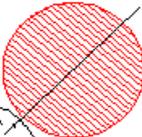
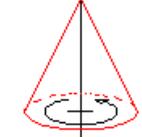
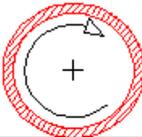
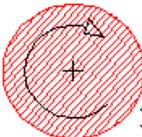
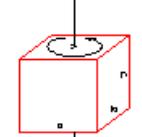
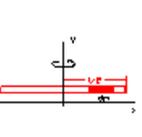
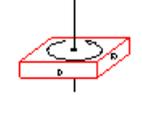
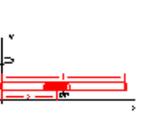
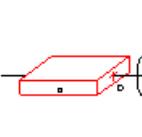
$$I = I_{cm} + l^2 m$$

$$I = \frac{2}{5} r^2 m + l^2 m$$

$$I = m \left(\frac{2}{5} r^2 + l^2 \right)$$

Así, se puede calcular momentum de inercia de cuerpos relativamente regulares de forma relativamente sencilla; en la Tabla 4.6, se muestran diferentes momenta de inercia de varios cuerpos regulares.

Tabla 4.6. Momenta de inercia de algunos cuerpos regulares.

	Anillo o Volante mR^2		Esfera hueca $\frac{1}{4}mR^2$
	Disco $\frac{1}{2}mR^2$		Esfera maciza $\frac{2}{5}mR^2$
	Disco rotación diametral $\frac{1}{4}mR^2$		Cono macizo $\frac{3}{10}mR^2$
	Anillo sobre superficie $2mR^2$		Cilindro en eje axial $\frac{1}{2}mR^2$
	Disco sobre superficie $\frac{3}{2}mR^2$		Cubo $\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
	Varilla gira en el centro $\frac{1}{12}m\left(\frac{l}{2}\right)^2$		Placa rectangular $\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
	Varilla gira en extremo $\frac{1}{3}ml^2$		Placa rectangular $m\frac{b^2}{12}$

Aplicaciones.

Rotación de una rueda por acción de una fuerza.

Rueda o polea en cuya garganta se asegura una cuerda inextensible sin rozamiento; además, la rueda gira libremente sobre su eje cuando se aplica una fuerza sobre la cuerda. ¿Cuál es la fuerza que se debe aplicar sobre la cuerda para que gire la rueda?

Solución.

La rueda o volante se encuentra suspendida de forma ideal, es decir, no hay rozamiento de rodadura ni de la cuerda que se encuentra asegurada a la garganta o superficie de la rueda (Fig. 4.42). Así que la fuerza necesaria para que gire la rueda tiene que actuar sobre el momentum de inercia de la rueda, NO MÁS. De modo que se debe preguntar por la fuerza mínima que cause la rotación.

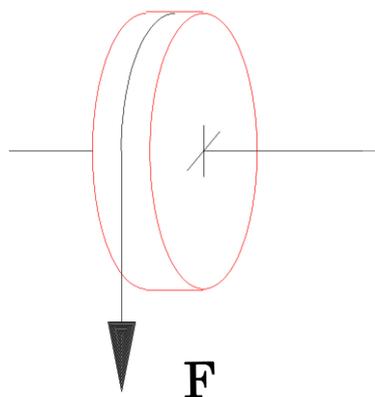


Fig. 4.42. Esquema de volante sin rozamiento, accionado por una fuerza mínima.

Esto lleva a que el problema se lo debe trabajar como un sistema inercial de rotación; esto es:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \text{ donde las fuerzas que actúan son: por una}$$

parte, la fuerza F y, por otra parte, la fuerza inercial F_i ; esto es: El momentum de una fuerza o torque se puede expresar como $\tau = FR$, pero también: $\tau = I\alpha$ (momentum de inercia por aceleración angular), de modo que la fuerza inercial se

puede expresar como: $FR = I\alpha$, de donde: $F_I = \frac{I\alpha}{R}$; por tanto, la expresión del sistema inercial queda:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 F_i &= 0 \\ F - F_I &= 0 \\ F &= F_I \\ F &= \frac{I\alpha}{R}\end{aligned}$$

Ahora bien, el momentum de inercia de un volante es: $I = \frac{1}{2}mr^2$; al remplazar, se tiene:

$$\begin{aligned}F &= \frac{mR^2\alpha}{2R} \\ F &= \frac{mR\alpha}{2}\end{aligned}$$

Si la pregunta es ¿cuál es la aceleración angular del volante?, entonces se despeja y quedará en función de la fuerza aplicada: $\alpha = \frac{2F}{mR}$.

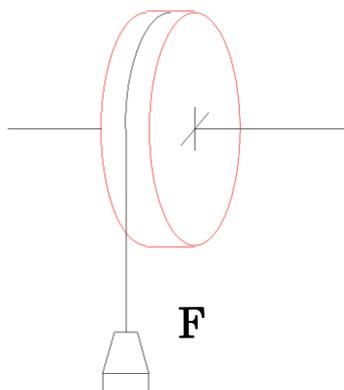


Fig. 4.43. Esquema de volante sin rozamiento, actuado por una carga de peso mg .

Rotación de una rueda por acción de un peso

El mismo caso previo, pero la fuerza, en este caso, es el peso de un cuerpo suspendido.

Solución.

La rueda o volante se encuentra suspendido de forma

ideal; es decir, no hay rozamiento de rodadura ni de la cuerda que se encuentra asegurada a la garganta o superficie de la rueda (Fig. 4.43). Así que la fuerza o peso de la carga suspendida llevará a que gire la rueda; por tanto, tiene que actuar sobre el momentum de inercia de la rueda, NO más. De modo que esto se debe trabajar como un sistema acelerado; esto es:

$$\sum_{i=1}^n F_i = ma .$$

Ahora bien, las fuerzas que actúan sobre el evento son: la fuerza inercial del volante y el peso de la carga. Como en el caso previo, la fuerza inercial es: $F_I = \frac{I\alpha}{R}$, de tal forma que al peso de la carga se opone el momentum de inercia de la rueda; esto es:

$$mg - \frac{I\alpha}{R} = ma .$$

Como el momentum de inercia del volante o rueda es: $I = \frac{1}{2} M R^2$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$mg - \frac{M R}{2} \alpha = ma .$$

Ahora bien, la aceleración tangencial o lineal se puede expresar como: $a = \alpha R$, de tal forma que, al remplazarla, se obtiene:

$$mg - \frac{MR}{2}\alpha = m\alpha R$$

$$mg = \left(m + \frac{M}{2}\right)\alpha R$$

$$\alpha = \frac{mg}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)}$$

Esta aceleración angular corresponde al volante; también se puede calcular la aceleración con que cae la masa o peso, que no es más que la aceleración tangencial o lineal del volante; esto es:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

Rotación de una rueda por acción de su propio peso. Ahora, el volante cae por su propio peso, se desenrolla la cuerda asegurada a la garganta o superficie del volante; este es el caso del juguete de niños y adultos

llamado Yoyo (Fig. 4.44), nombre moderno, como se lo conoce actualmente, que es una evolución del diábolo chino, que parece estar en esta cultura desde 1000 a. C.

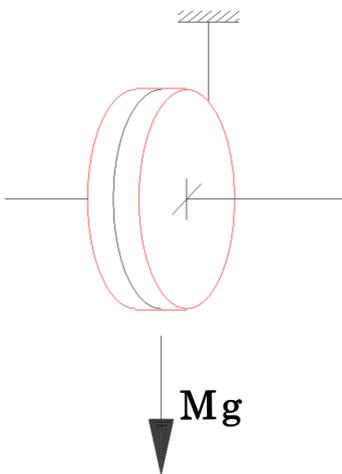


Fig. 4.44. Esquema de un Yoyo físico.

Solución.

Como el cuerpo cae, entonces, se está acelerando; por tanto, el sistema es acelerado, de modo

que: $\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$; en este caso,

la única masa que cae es la del volante; por tanto, la masa del

sistema es la masa del volante $m_s = M$, por lo que la fuerza que se opone al peso del volante es la fuerza de inercia del volante; esto es:

$$Mg - F_i = Ma.$$

La fuerza de inercia, al igual que en el caso previo, es: $F_i = \frac{I\alpha}{R}$ y como el momentum de inercia del volante es $I = \frac{1}{2}MR^2$, entonces la fuerza inercial queda: $F_i = \frac{MR\alpha}{2}$, por lo que, al remplazar en la ecuación general, se tiene:

$$Mg - \frac{MR\alpha}{2} = Ma.$$

En esta ecuación, se puede observar que la masa del volante se cancela; por tanto, este sistema es independiente de la masa; es decir:

$$g - \frac{a}{2} = a$$

$$a = \frac{2}{3}g$$

Como se puede apreciar, la aceleración con que cae el volante es independiente de la masa y del radio; por tanto, solo será un factor del valor de la gravedad.

En el caso del Yoyo, el asunto es un tanto diferente, por estar en juego dos radios: el radio del eje y el radio del volante, por lo que se deja como tarea para el estudiante analizar la caída con y sin impulso.

Máquina de Atwood. Analizar el movimiento de las masas, al considerar el momentum de inercia de la rueda.

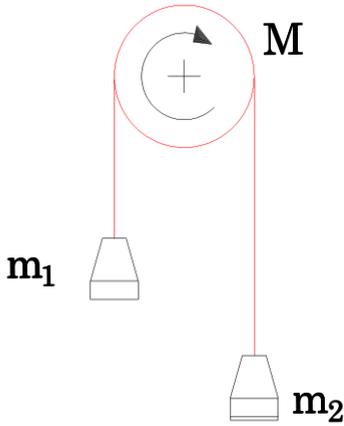


Fig. 4.45. Esquema de máquina de Atwood, con m_2 ligeramente mayor que m_1 .

Solución.

Como se puede ver en la figura 4.45 m_2 es ligeramente mayor que m_1 ; por tanto, el sistema acelerado será en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que se puede establecer lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a .$$

La masa del sistema m_s es: $m_s = m_1 + m_2$, donde

$m_2 > m_1$; la fuerza opositora al peso de la m_2 es el peso de la m_1 y el movimiento del sistema, sin considerar el rozamiento, es la fuerza inercial del volante $F_I = \frac{I\alpha}{R}$; como se sabe, el momentum de inercia del volante es: $I = \frac{1}{2}MR^2$; entonces, la fuerza inercial es: $F_I = \frac{MR}{2}\alpha$; por tanto, al remplazar en la expresión del sistema inercial, queda:

$$m_2g - m_1g - \frac{MR}{2}\alpha = (m_1 + m_2)a$$

Como ya se sabe que la aceleración lineal es: $a = \alpha R$ entonces se puede organizar de la siguiente manera:

$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a + \frac{M}{2} a$$

$$m_2 g - m_1 g = a \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right)$$

$$a = \frac{m_1 + m_2}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right)} g$$

En este caso, el resultado es independiente del radio de la polea; sin embargo, depende de la masa que tuviera el volante.

Velocidad al final de la rampa

Calcular la velocidad de llegada de una esfera, un cilindro macizo y un cilindro hueco, que pueden rodar por un plano inclinado del 30% y caen desde la misma altura (Fig. 4.46).

Solución.

Como los tres cuerpos caen desde la misma altura y por el mismo plano inclinado sin resbalar o patinar, es decir, lo hacen rodando, esto corresponde a un sistema acelerado. Esto es:

- i. Esfera. Como el sistema es acelerado, entonces:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a .$$

La masa del sistema m_s corresponde a la masa de la esfera M ; la fuerza que lleva a que la esfera ruede por el plano inclinado es la fuerza tangencial $F_T = Mg \text{Sen } \theta$, y la única fuerza que se

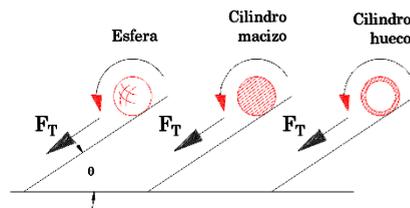


Fig. 4.46. Esquema de tres cuerpos que caen desde la misma altura y en planos idénticos.

opone a esta es la fuerza inercial debido al momentum de inercia de la esfera: $F_I = \frac{I\alpha}{R}$; al remplazar en la expresión del sistema acelerado, se tiene:

$$F_T - F_I = Ma$$

$$Mg\text{Sen}\theta - F_I = Ma$$

Hace falta encontrar cuál es la fuerza inercial de la esfera cuando rueda por la superficie del plano inclinado.

La esfera no voltea sobre su centro de masa; lo hace en el punto de contacto con la superficie del plano inclinado; a partir del Teorema de Steiner, se tiene: $I = I_c + mR^2$; el momentum de inercia de la esfera respecto al centro de masa es: $I = \frac{2}{5}MR^2$; entonces: $I = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$; por tanto:

$$I = Mr^2\left(\frac{2}{5} + 1\right); \text{ en consecuencia, el momentum de inercia de la}$$

esfera, cuando rueda sobre una superficie, es: $I = \frac{7}{5}MR^2$;

ahora bien, la fuerza inercial es: $F_I = \frac{7}{5R}MR^2\alpha$, esto es:

$F_I = \frac{7MR\alpha}{5}$; al remplazar, se tiene:

$$Mg\text{Sen}\theta - \frac{7MR\alpha}{5} = Ma$$

$$g\text{Sen}\theta = a\left(1 + \frac{7}{5}\right)$$

$$a = \frac{5}{12}g\text{Sen}\theta$$

$$a = 0.417g\text{Sen}\theta$$

Ahora bien, si el recorrido es d , la velocidad al final de este será: $v^2 = 2ad$; por tanto, la velocidad es:

$$v^2 = 2(0.417g \text{ Sen}\theta)d$$

$$v^2 = 8.182d \text{ Sen}\theta$$

$$v = 2.86\sqrt{d \text{ Sen}\theta}$$

i. Cilindro macizo. Por tanto, el sistema acelerado,

$\sum_{i=1}^n F_i = M_s a$; al igual que en la esfera, la fuerza tangencial es:

$F_T = Mg \text{ Sen } \theta$, y la fuerza inercial: $F_I = \frac{I\alpha}{R}$; al remplazar en

la expresión del sistema acelerado, se tiene:

$$mg \text{ Sen}\theta - \frac{I\alpha}{R} = Ma .$$

Como el cilindro macizo, al igual que en la esfera, no gira sobre su centro de masa, sino lo hace en el punto de contacto o, mejor, sobre la línea de contacto con la superficie del plano inclinado, el momentum de inercia cuando gira, de acuerdo a lo enunciado según el Teorema de Steiner, es: $I = I_c + mR^2$; como el momentum de inercia de un cilindro respecto al centro de masa es: $I = \frac{1}{2}mR^2$, entonces el Teorema de Steiner queda:

$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$; es decir, el momentum de inercia en la línea

de contacto: $I = \frac{3}{2}mR^2$ Ahora bien, la fuerza inercial es:

$F_I = \frac{3m}{2}a$; al remplazar, se tiene:

$$Mg\text{Sen}\theta - \frac{3}{2}Ma = Ma$$

$$g\text{Sen}\theta = a\left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$g\text{Sen}\theta = \frac{5}{2}a$$

$$a = \frac{2}{5}g\text{Sen}\theta$$

Ahora, si el recorrido es d , la velocidad al final de este será: $v^2 = 2ad$; por tanto, la velocidad final es:

$$v^2 = 2(0.4g \text{ Sen}\theta) d$$

$$v^2 = 7.848d \text{ Sen}\theta$$

$$v = 2.801\sqrt{d \text{ Sen}\theta}$$

iii. Por último se tiene el cilindro hueco que, al igual que en los casos anteriores, corresponde a un sistema acelerado,

$\sum_{i=1}^n F_i = M_s a$; de igual forma, la fuerza tangencial es:

$F_T = mg\text{Sen } \theta$, y la fuerza inercial: $F_I = \frac{I\alpha}{R}$; al remplazar en

la expresión del sistema acelerado, se tiene:

$$mg\text{Sen}\theta - \frac{I\alpha}{R} = Ma.$$

Al igual que en los casos anteriores, como el cilindro hueco no gira sobre su centro de masa ni resbala, sino lo hace en la línea de contacto con la superficie del plano inclinado, entonces, de acuerdo con el Teorema de Steiner: $I = I_c + mR^2$, el momentum de inercia del cilindro hueco que rueda por la

superficie es: en primer lugar, como el momentum de inercia respecto al centro de masa es: $I = mR^2$, al remplazar, se tiene: $I = mR^2 + mR^2$; es decir, el momentum de inercia en la línea de contacto es: $I = 2mR^2$; por tanto, la fuerza inercial es: $F_I = 2mR\alpha$; al remplazar lo que corresponde a la aceleración angular, se tiene: $F_I = 2ma$, de modo que, al remplazar en la ecuación del sistema acelerado, se tiene:

$$Mg\text{Sen}\theta - 2Ma = Ma$$

$$a = \frac{1}{3}g\text{Sen}\theta$$

Ahora bien, si el recorrido es d , la velocidad final es: $v^2 = 2ad$; por tanto, la velocidad final es: $v^2 = 2ad \frac{1}{2}$

Esfera	Cilindro macizo	Cilindro hueco.
$v = 2.86 \sqrt{d\text{Sen}\theta}$	$v = 2.86 \sqrt{d\text{Sen}\theta}$	$v = 2.80 \sqrt{d\text{Sen}\theta}$

$$v^2 = \frac{2}{3}gd\text{Sen}\theta$$

$$v^2 = 6.54d\text{Sen}\theta$$

$$v = 2.55\sqrt{d\text{Sen}\theta}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede comprobar que la esfera llegará primero, seguida del cilindro macizo y de último lo hará el cilindro hueco, tal como se puede ver en la Fig. 4.47; la ventaja de la esfera respecto al cilindro macizo es muy poca, pero respecto al cilindro hueco es mucho más amplia, lo que se puede notar

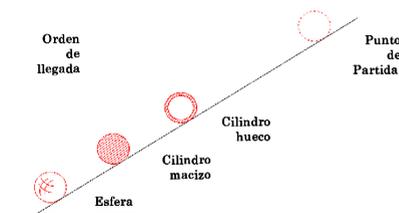


Fig. 4.47. Esquema de la llegada de los tres cuerpos: esfera, cilindro macizo y cilindro hueco.

en la Tabla de valores de la velocidad final; se deja como tarea, analizar un cilindro cuando entra en otro sin dejar espacio, solo la holgura necesaria para que se pudiera deslizar el uno sobre el otro; entonces, ¿qué ocurre cuando, desde el mismo sitio, se deja que bajaran los cuerpos por separado y, luego, cuando conforma un solo cuerpo?

4.7 Análisis vectorial para el movimiento rotacional

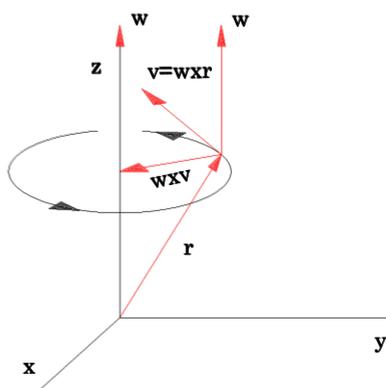


Fig. 4.48. Esquema de vectores en el movimiento rotacional.

Cuando se vio el movimiento circular uniforme, se encontró que hay una aceleración radial, denominada *aceleración centrípeta*, causante de que se diera el movimiento circular; pues bien, esto también se puede demostrar de la siguiente forma: como

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ y, a su vez,}$$

$v = w \times r$, de tal modo que: $a = \frac{d}{dt}(w \times r)$, donde w es la velocidad angular representada por el vector w , que está apuntando hacia arriba en la Fig. 4.46, entonces: $a = w \times \frac{dr}{dt}$;

la velocidad angular es constante por ser un movimiento circular uniforme. A partir de esto se concluye que la aceleración es: $a = w \times v$; tal como se puede ver en la Fig. 4.48, es la aceleración centrípeta dirigida hacia el centro del círculo.

Ahora bien, como $v = w \times r$, entonces, al remplazar, se tiene: $a = w \times (w \times r)$.

En dinámica de la rotación, el momentum angular se

define como: $L = r \times P$; es decir: $L = r \times P = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$, donde

r es el radio vector y P el momentum lineal; además, como $P = mv$, al remplazar, se tiene: $L = (r \times v)m$.

Por otra parte, al derivar el momentum angular respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times P)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times P + r \times \frac{dP}{dt}$$

Como $\frac{dr}{dt} = v$, entonces: $\frac{dL}{dt} = v \times P + r \times \frac{dv}{dt}m$.

¡Atención!: resulta que la velocidad y el momentum están en la misma dirección, por tanto el ángulo entre ellos es cero; o sea que el producto vectorial $v \times P = 0$, entonces:

$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dv}{dt}m$; ahora bien: $\frac{dv}{dt} = a$, entonces: $\frac{dL}{dt} = r \times am$, pero

la fuerza es: $F = ma$, lo que se puede escribir como: $\frac{dL}{dt} = r \times F$

, donde $r \times F = \tau$; por tanto: $\frac{dL}{dt} = \tau$, expresión que se conoce

como Torque o momentum de una fuerza.

Por otra parte, como la aceleración lineal es: $a = r\alpha$,

entonces: $\frac{dL}{dt} = r \times (r\alpha m)$; en el caso del movimiento circular,

se tiene: $\frac{dL}{dt} = r^2 m \alpha$, donde $I = mr^2$, que es el momentum de

inercia; por tanto:

$$\frac{dL}{dt} = I \alpha \quad (4.25).$$

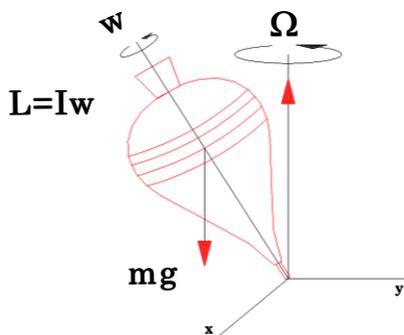


Fig. 4.49. Esquema de un trompo, con movimiento de rotación y precesión.

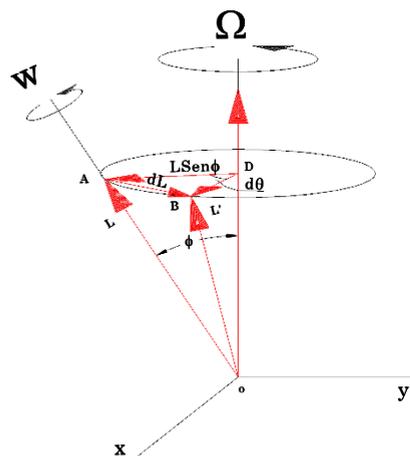


Fig. 4.50. Esquema vectorial de los movimientos del trompo.

Movimiento giroscópico.

Cuando un cuerpo rígido gira adquiere ciertas propiedades que lo tornan especial; por ejemplo, un juguete muy antiguo: el trompo; este objeto puede mantenerse en la punta solo cuando gira; un proyectil mantiene la orientación de su eje debido a la rotación que le imprimen las estrías del cañón; se puede llevar a que girase un huevo cocido en su extremo más agudo; una peonza se mantiene en la punta mientras se encuentra girando, etc. Son muchos los ejemplos que se pueden citar, en los cuales se puede ver o sentir la conservación del momentum angular.

En el caso del trompo, se puede mantener en la punta mientras está girando; si el trompo se

encuentra bien balanceado, casi no se nota que está girando, pues se mantiene muy garboso y firme, pero, a medida que va perdiendo velocidad angular el trompo, aparecen otros movimientos muy típicos: el eje de rotación empieza a girar

sobre un eje vertical, dicho movimiento se denomina **precesión**; si el movimiento de rotación, por efecto de rozamiento, se frena, un nuevo movimiento oscilatorio le aparece al trompo, que, por lo común se lo denomina “cabeceo”, aunque la denominación correcta es: **nutación**, cuando el trompo parece que cae y, luego, levanta hasta que definitivamente cae por falta de velocidad angular. En la Fig. 4.49, se puede ver la velocidad angular ω sobre el eje del trompo, mientras que el movimiento de precesión Ω está sobre el eje vertical y el ángulo θ se forma por el eje vertical z y el eje de rotación del trompo; la inclinación se debe al peso del cuerpo mg ; ahora bien, como el momentum angular es: $L = I \omega$, donde I es el momentum inercial, que permanece constante debido a que es un cuerpo sólido, y ω es la velocidad angular que, en este caso, disminuye debido al rozamiento que hay de la punta del trompo contra el piso, razón por la cual los movimientos de precesión y nutación aparecen para sumar y mantener constante el momentum angular, de modo que esto es un evento de conservación.

A partir de la Fig. 4.50, se tiene que en el punto A hay un momentum angular L , y en el punto B, el momentum angular L' ; por tanto, entre el punto A y el punto B se tiene una diferencia del momentum angular; esto es: $L' - L$, pero como la diferencia es muy pequeña, entonces se aproxima a una diferencial así: $L' - L = dL$.

Por otra parte, la velocidad del movimiento de precesión se define como: $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$, y el momentum de una fuerza o torque es: $\tau = \frac{dL}{dt}$; a partir de aquí, se tiene $dL = \tau dt$.

Además, a partir de la Fig. 4.50, se puede ver que: $dL = L \sin \theta d\theta$, y como $d\theta = \Omega dt$, entonces se tiene:

$dL = L \text{Sen} \phi \Omega dt$; a su vez, el momentum de una fuerza es:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = L \text{Sen} \phi \Omega, \text{ entonces: } \tau = L \text{Sen} \phi \Omega; \text{ por tanto, la}$$

velocidad de precesión es:

$$\Omega = \frac{\tau}{L \text{Sen} \phi}.$$

Por otra parte, el momentum de una fuerza se define como: $\tau = mgb$, donde b es la distancia del punto de giro al centro de masa; $L \text{Sen} \phi$ es la proyección del momentum angular sobre el eje vertical o z , pero, también, dicha proyección no es más que un producto vectorial; esto es: $\Omega L \text{Sen} \phi = \tau$, por lo que, en general, queda:

$$\Omega \times L = \tau \quad (4.26).$$

Esta expresión resulta muy útil, puesto que se puede comparar con $\tau = W \times P$ del movimiento circular, pues ambas expresiones representan lo mismo, de forma vectorial.

Como el trompo precece alrededor de z , entonces, respecto a este eje se tiene que tanto la velocidad angular como

la de precesión se suman: $w + \Omega$, con lo cual se da la tendencia de mantener el momentum angular constante, precesión que aparece cuando el trompo, debido al peso, genera un torque; además, por efecto de rozamiento, pierde velocidad angular, un nuevo movimiento oscilatorio aparece, que lleva a que el trompo



Fig. 4.51. Brújula giroscópica. Fuente: Stahlkocher (2005).

cayera y levantara; este movimiento oscilatorio de **nutación** también genera un momentum angular paralelo a z , que contribuye con la conservación del momentum angular.

Sistemas mecánicos que aprovechan estas propiedades son los pilotos automáticos de aviones y barcos; se los conoce como brújula giroscópica; como se puede ver en la Fig. 4.51, en el interior se puede ver claramente uno de los volantes; de hecho, son tres, a los que, al observar con atención, se los puede distinguir; cada volante mantiene el momentum angular constante y, debido a que la montura está en una unión de cardan de tres anillos concéntricos, esto permite que giren libremente, de tal modo que a la brújula de un avión, cuando va a iniciar el vuelo, se le dan las coordenadas hacia donde se va a realizar el vuelo, momento en el cual se orientan los giróscopos de forma independiente; una vez, iniciado el vuelo, la brújula giroscópica mantiene la posición inicial; mediante mecanismos electro- mecánicos se podía observar en el tablero de mandos del avión la dirección que debe mantener durante el vuelo; este es un bello artefacto, fruto de la micromecánica de los años 50. En la actualidad, a este sistema se lo ha reemplazado por sistemas electrónicos de geoposicionamiento satelital: GPS (Sistema de Posicionamiento Global).

Aparato vestibular y piloto automático

Aunque en la naturaleza no se han encontrado sistemas vivos con movimiento circular con eje de giro, se han arreglado para hacer lo mismo sin tener eje de rotación; los sistemas vestibulares que hay en

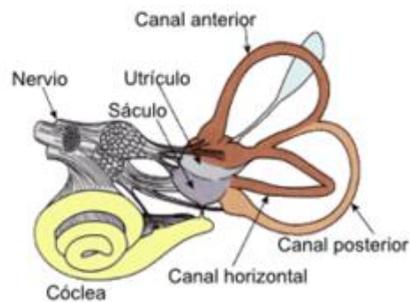


Fig. 4.52. Esquema del aparato vestibular y el oído interno. Fuente: Haslwanter (2010).
[/wiki/Girocomp%C3%A1s#/media/Archivo:Kreiselkompass_Schnitt_Ansch%C3%BCtz.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Girocomp%C3%A1s#/media/Archivo:Kreiselkompass_Schnitt_Ansch%C3%BCtz.jpg)

los oídos de mamíferos y de muchos animales que necesitan orientación espacial, como en las aves (Fig. 4.52). El sistema consiste en tubos semicirculares localizados en los planos (x, y) , (y, z) , y (z, x) llenos de endolinfa, líquido del sistema anatómico. Por inercia, el líquido se mantiene en reposo, mientras que los tubos semicirculares se mueven según el movimiento del individuo; en la base de los semicírculos hay células ciliadas especializadas para detectar el mínimo movimiento; en este caso, se mueven sobre el líquido por el movimiento relativo y dan la sensación de movimiento; el nervio auditivo y de equilibrio lleva la señal codificada al cerebro y, a su vez, decodifica la señal para dar la sensación de movimiento y la correspondiente orientación aprendida durante el crecimiento del individuo; cualquier señal contraria a esta se entenderá como desequilibrio o vértigo.

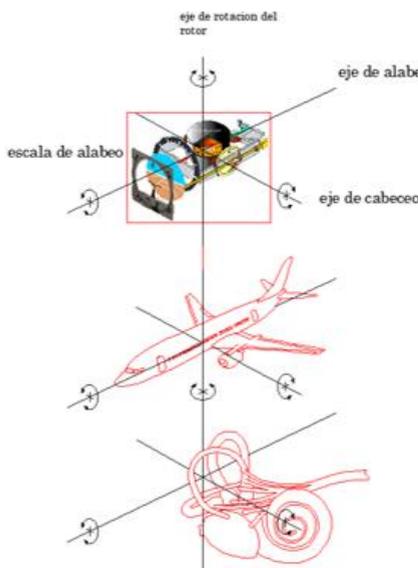


Fig. 4.53. Montaje de brújula giroscópica, avión y aparato vestibular (autor).

En la Fig. 4.53, se ha realizado un montaje en que se puede apreciar un compás de navegación aérea o brújula giroscópica, aparato que puede orientar el rumbo de los aviones, mecanismo muy utilizado hasta antes de existir los satélites de posicionamiento geodésico; hoy, a los aviones los han equipado con GPS, pero el invento de la brújula giroscópica fue determinante en la navegación aérea. Ahora bien, la naturaleza, desde que empezó a formar la

vida, desarrolló los sistemas de orientación y equilibrio y, por

evolución, llegó hasta los mamíferos; en cada oído se encuentra el aparato vestibular que, igual a la brújula giroscópica, que define la orientación de los aviones, el aparato vestibular orienta la marcha con un punto de referencia, nos mantiene erguidos y perfectamente entrega la señal al cerebro cuando inicia o termina el movimiento; en realidad, no hay ingeniería que lo iguale y menos que lo supere. En la Fig. 4.53 se puede ver la correspondencia de los ejes de giro con los centros de los semicírculos ciliados; en el lenguaje de la aviación, el eje x controla el movimiento de alabeo o rotación del fuselaje, movimiento que se logra con los alerones; el eje y controla el movimiento de cabeceo o de picada o levante de la nariz del avión, que se realiza con los alerones de cola; y el eje z controla el movimiento de rotación, que se logra con el timón.

Un individuo normal puede realizar una marcha a ciegas en dirección recta, cosa que no logra un individuo con anomalía en el oído; de igual forma, al viajar en un vehículo vendado los ojos, perfectamente se puede sentir si el vehículo gira hacia la derecha o la izquierda, pero si el movimiento se mantiene, el aparato vestibular deja de enviar la señal y solo vuelve a ser perceptible al detener el movimiento.

Por desventura, los aparatos vestibulares pueden dar una falsa alarma de movimiento, lo que se convierte en molestos mareos, algo que los médicos llaman “vértigo”, o cuando, por diferencia de temperaturas, se presentan corrientes de convección al interior de los canales, puede provocar igual mareo; este es el caso de fiebres altas o simplemente, cuando se hubieran ingerido altas dosis de alcohol, la combustión de este en el interior del organismo eleva la temperatura respecto al medio ambiente y la diferencia de temperatura provoca una corriente de convección que puede generar una falsa alarma de movimiento de rotación sobre el eje z .

4.8 Estática

En la naturaleza, los objetos, como casas, edificios y demás, se encuentran en reposo respecto a las personas que los observan, de modo que, para que esto ocurriera, los edificios y demás cuerpos que se encuentran quietos deben cumplir con:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \quad (4.27).$$

Es decir, que tanto la suma de fuerzas como la suma de momentum de fuerza o torque, son nulas; esto es: un sistema inercial, tanto para el movimiento de traslación como de rotación. Ahora bien, tanto la fuerza como el momentum se expresan en tres dimensiones, como lo que ocurre en un punto o nodo donde se unen columnas y vigas de una estructura cualquiera.

A partir de este simple planteamiento se basa el estudio de la estática, con la que se pueden construir edificios y puentes como elementos rígidos; bueno, en el análisis complejo de estructuras se utiliza un principio de análisis plástico, que utilizan los ingenieros especializados en cálculo estructural.

Ejemplos:

1. Calcular las fuerzas que se descargan en las bases A y B que soportan una viga homogénea de $700N$ de peso y $7m$ de longitud de forma regular, tal como se puede ver en la Fig. 4.54.

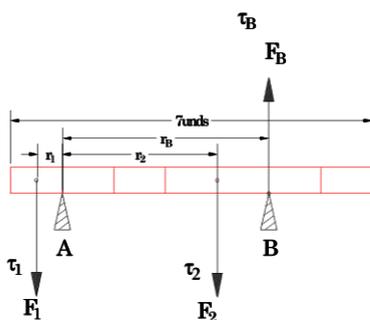


Fig. 4.54. Esquema de la viga soportada sobre dos bases: A y B.

Solución.

Como se considera una barra o viga homogénea de $700N$ de peso, y con una longitud de $7m$, entonces, cada segmento de la viga pesa $100N$ y mide $1m$ de longitud; a esto se lo denomina valor unitario. Con base en estas unidades, se establece el cálculo de los centros de masa de los segmentos a cada lado de la base que se escogiera como centro de giro. Al aplicar los conceptos de estática ya enunciados, se tiene:

i. Del primer concepto de estática: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$. Como el

peso es negativo, entonces las fuerzas F_A y F_B , que aparecen en las bases A y B, son positivas; esto es:

$$\begin{aligned} F_A + F_B - mg &= 0 \\ F_A + F_B &= mg \quad (1) \\ F_A + F_B &= 700N \end{aligned}$$

ii. Del segundo concepto de estática: $\sum_{i=1}^n \tau_i = 0$, se tiene lo

siguiente: como los torques hacia la izquierda son positivos y a la derecha son negativos, entonces, en la Fig. 4.54, se puede ver que el torque τ_1 , es decir, si la viga gira sobre la base A, el centro de masa del elemento de la izquierda de la base A lleva a que gire en sentido contrario a las manecillas del reloj; o sea, el torque τ_1 y τ_B son positivos y el torque τ_2 es negativo, por lo que, de acuerdo con el concepto de estática para torques, se tiene:

$$\tau_1 + \tau_B - \tau_2 = 0.$$

Una vez más, en la Fig. 4.52, se puede apreciar que los radios de giro donde se aplican las fuerzas son: r_1 , r_2 y r_B , con lo cual los torques quedan expresados de la siguiente forma:

$$r_1 F_1 + r_B F_B - r_2 F_2 = 0$$

De donde, la fuerza F_B se puede expresar como:

$$F_B = \frac{r_2 F_2 - r_1 F_1}{r_B}.$$

Al remplazar valores, se tiene:

$$F_B = \frac{(3m)(600N) - (0.5m)(100N)}{4m}$$

$$F_B = 437.5N$$

Con el valor encontrado para F_B , se puede calcular F_A ; esto es: como $F_A + F_B = 700N$, entonces:

$$F_A = 700 - 437.5$$

$$F_A = 262.5N$$

Con estos resultados se tienen los valores de las cargas sobre las bases A y B.

2. Calcular las fuerzas que se descargan en las bases A y B que soportan una viga homogénea de $7500N$ de peso y $8m$ de longitud, de forma irregular, tal como se puede ver en la Fig. 4.55.

Solución.

En la Fig. 4.55 se puede ver la viga formada por 30 bloques unitarios de $250N$, lo que significa que la viga tiene un peso

de $7500N$, peso que se distribuye entre las bases A y B; es decir, las fuerzas F_A y F_B ; esto es:

i. Primer concepto de estática: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$; es decir:

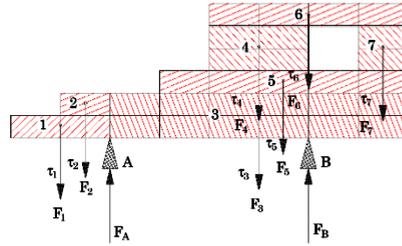


Fig. 4.55. Esquema de viga irregular.

$$F_A + F_B = mg$$

$$F_A + F_B = 7500N$$

ii. De acuerdo al segundo concepto: $\sum_{i=1}^n \tau_i = 0$, se debe aclarar que en cada bloque unitario, al que se lo denominará la unidad de peso, estas unidades conforman otros bloques más grandes, como se puede ver en la Fig. 4.53, zonas tachadas tanto a la izquierda de la base A como a la derecha; cada bloque tiene su propio centro de masa, donde está el vector peso distinguido como: F_1, F_2, F_3 , etc. Debido a que estos vectores fuerza están a una distancia del centro de giro r_1, r_2, r_3 , etc., conforman su respectivo torque o momentum de la fuerza respecto al centro de giro en la base A.

Cuando se trata de varios momenta de fuerza a computar, es conveniente hacerlo en una Tabla de Excel, para que los cálculos no corran riesgo de equivocaciones, tal como se puede ver en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7. Tabulación de masa de bloques y radios de giro para encontrar los torques.

Bloque	Can. de bloques	Peso del bloque en N	Radio del punto de giro al centro de masa	Torque o momentum de fuerza	Símbolo del torque
1	2	500	-1	-500	t_1
2	1	250	-0.5	-125	t_2
3	12	3000	3	9000	$-t_3$
4	4	1000	3	3000	$-t_4$
5	5	1250	3.5	4375	$-t_5$
6	4	1000	4	4000	$-t_6$
7	2	500	5.5	2750	$-t_7$
8		F_B	5	$5F_B$	t_B

De acuerdo con el principio de estática: $\sum_1^n \tau_i = 0$, los torques en cuestión son los que aparecen en la Tabla, así:

$$\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 - \tau_6 - \tau_7 + \tau_B = 0.$$

La suma de los torques de 1 a 7 se puede deducir de la Tabla, de modo que:

$$\tau_B = 22500Nm$$

$$(5m)F_B = 22500Nm$$

$$F_B = \frac{22500}{4}N$$

$$F_B = 5625N$$

Como ya se conoce el peso total que soportan las dos bases, entonces el cálculo de la carga sobre la base A es:

$$F_A + F_B = 7500 N.$$

Entonces:

$$F_A = (7500 - 5625)$$

$$F_A = 1875N$$

3. Calcular la fuerza de contacto de la viga con el muro y la tensión de la cuerda que la soporta, tal como se puede ver en la Fig. 4.56, si el peso de la viga es de $2500N$.

Solución.

Como en los casos anteriores, se parte de los conceptos de estática:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = 0.$$

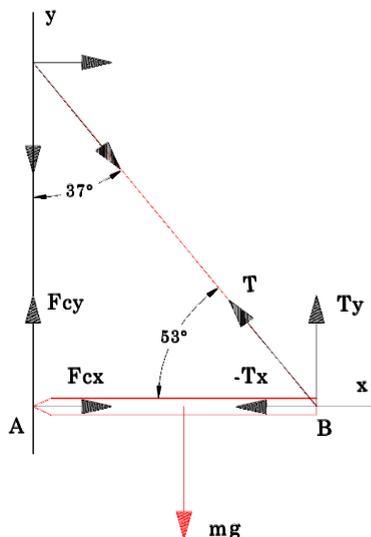


Fig. 4.56. Esquema de la viga soportada sobre la pared.

Al aplicar estos conceptos, se tiene:

i. Con el primer concepto: $\sum_{i=1}^n F_i = 0$, la fuerza se descompone tanto en y como en x , así:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0.$$

Para el eje x , se tiene:

i.a $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$. En el eje x están la fuerza de contacto,

orientada hacia la derecha; por tanto, es positiva; y la fuerza descompuesta de la tensión dirigida hacia la izquierda, que es negativa. Así:

$$F_{cx} - T_x = 0,$$

donde $T_x = T \cos 53$, de tal modo que esto se puede escribir como:

$$F_{cx} - T \cos 53 = 0$$

$$F_{cx} = T \cos 53$$

$$F_{cx} = 0.6T$$

i.b $\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$ En el eje y está el peso dirigido hacia abajo

que, por tanto, es negativo, y la componente de la tensión dirigida hacia arriba; esto es:

$$F_{cy} + T_y - mg = 0,$$

donde $T_y = T \sin 53$, de tal modo que esto se puede escribir como:

$$F_{cy} + T \sin 53 - mg = 0$$

$$F_{cy} + T \sin 53 = mg$$

Si se remplace el valor del peso, se tiene:

$$F_{cy} + T \sin 53 = 2500N$$

$$F_{cy} = 2500N - T \sin 53$$

$$F_{cy} = 2500N - 0.8T$$

Con los resultados conseguidos, se tiene un sistema de ecuaciones, así:

$$\begin{aligned} F_{cx} &= 0.6T \\ F_{cy} &= 2500 - 0.8T \end{aligned} \quad (1)$$

El sistema tiene más de dos variables, por tanto, no es posible desarrollarlo; para esto, hace falta el segundo concepto de estática.

ii. $\sum_{i=1}^n \tau_i = 0$: el torque se aplica en el punto de giro y, en

este caso, ese punto es el punto de contacto, es decir, en el punto A. Entonces, la componente de la tensión en y produce un momentum de fuerza de tipo positivo y el peso de la viga genera el momentum contrario; de esta forma:

$$\tau_T - \tau_{mg} = 0$$

$$\tau_T = \tau_{mg}$$

$$\tau_T = lT_y \quad \text{y} \quad \tau_{mg} = \frac{l}{2}mg ; \text{ esto es:}$$

$$lT_y = \frac{l}{2}mg$$

$$T_y = \frac{2500N}{2}$$

$$T_y = 1250N$$

Y como $T_y = T \text{Sen } 53$, entonces la tensión es:

$$T = \frac{T_y}{\text{Sen}5}$$

$$T = \frac{1250N}{0.8}$$

$$T = 1565N$$

Si se reemplaza este valor en las ecuaciones (1), se pueden calcular los valores de las fuerzas de contacto; esto es:

$$F_{cx} = 0.6(1565N)$$

$$F_{cy} = 2500 - 0.8(1565N)$$

Cuyo resultado es:

$$F_{cx} = 939N$$

$$F_{cy} = 1248N$$

Así, la magnitud de la fuerza de contacto es:

$$f_c = \sqrt{939^2 + 1248^2}$$

$$f_c = 1561N$$

La dirección de la fuerza es:

$$\delta = \text{Tan}^{-1} \frac{f_{cy}}{f_{cx}}$$

$$\delta = \text{Tan}^{-1} \frac{1248}{939}$$

$$\delta = \text{Tan}^{-1} 1.329$$

$$\delta = 53^\circ$$

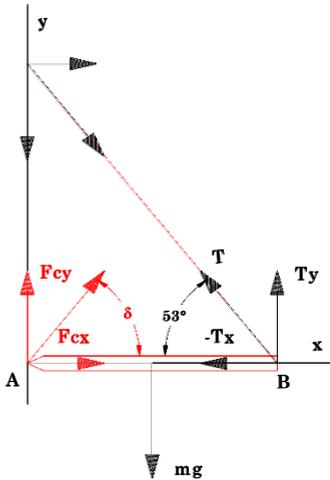


Fig. 4.57. Esquema de la fuerza de contacto.

Bueno, el ángulo de la fuerza de contacto es igual al ángulo que forma la tensión con la viga, esto debido a la homogeneidad de la viga, razón por la cual el centro de masa se encuentra en el centro, como se puede ver en la Fig. 4.57; de no ser así, el ángulo de la fuerza de contacto también cambiaría.

4. Considerar una viga que se encuentra horizontal, suspendida en los extremos A y B por dos cuerdas, como se ve en la Fig. 4.58. Si el peso de la viga es $mg=360N$, calcular el valor de T_1 , T_2 y el peso del cuerpo que cuelga en el extremo A.

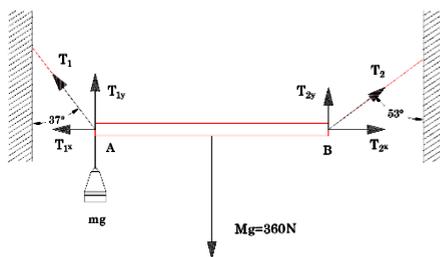


Fig. 4.58. Esquema de viga suspendida por cuerdas.

Solución.

Como en los casos anteriores, es necesario tener las sumas en x , y , y τ o momento de fuerza igual a cero. Esto es:

$$\sum_{i=1}^n T_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n T_y = 0, \quad \sum_{i=1}^n \tau = 0$$

i. Al aplicar el primer concepto, se tiene:

$\sum_{i=1}^n T_x = 0$. Las tensiones con dirección a la derecha son positivas y en sentido contrario serán negativas, de modo que:

$T_{2x} - T_{1x} = 0$. De acuerdo con la disposición de los ángulos, las funciones trigonométricas son:

$$T_2 \text{Sen}53 - T_1 \text{Sen}37 = 0$$

$$T_2 = \frac{0.6T_1}{0.8}$$

$$T_2 = 0.752T_1$$

ii. Con el segundo concepto, las cosas quedan así:

$$\sum_{i=1}^n T_y = 0. \text{ Las componentes de las tensiones se dirigen}$$

hacia arriba y, por tanto, son positivas, mientras que el peso de la viga y del cuerpo son negativos; esto es: $T_{2y} + T_{1y} - mg + Mg = 0$. De acuerdo con la disposición de los ángulos, queda así:

$$T_1 \cos 37 + T_2 \cos 53 = 360N + mg$$

$$0.8T_1 + 0.6T_2 = 360N + mg$$

iii. Con el tercer concepto aplicado sobre el punto A, queda así: $\sum_{i=1}^n \tau = 0$, donde los torques o momento de fuerza hacia la izquierda son positivos y hacia la derecha serán negativos. Por tanto:

$$\tau_{Ty} - \tau_{Mg} = 0$$

$$lT_{2y} = \frac{l}{2} Mg$$

$$T_2 \cos 53 = \frac{Mg}{2}$$

$$T_2 = \frac{Mg}{2 \cos 53}$$

$$T_2 = \frac{360}{1.2}$$

$$T_2 = 300N$$

Ahora bien, a partir de ii., se tiene:

$$T_1 = \frac{T_2}{0.75}$$

$$T_1 = \frac{300}{0.75}$$

$$T_1 = 400N$$

Al ubicar los valores encontrados en la ecuación, se tiene:

$$T_1 \cos 37^\circ + T_2 \cos 53^\circ = 360\text{N} + mg$$

$$0.8T_1 + 0.6T_2 = 360\text{N} + mg$$

$$mg = 0.8T_1 + 0.6T_2 - 360\text{N}$$

$$mg = (0.8)(400\text{N}) + (0.6)(300\text{N}) - 360\text{N}$$

$$mg = 140\text{N}$$

5. En la Fig. 4.59, se puede observar una viga sin peso "ideal", inclinada, que se encuentra suspendida por cuerdas que generan las tensiones T_1 , T_2 , y T_3 , a las que se debe encontrar su valor.

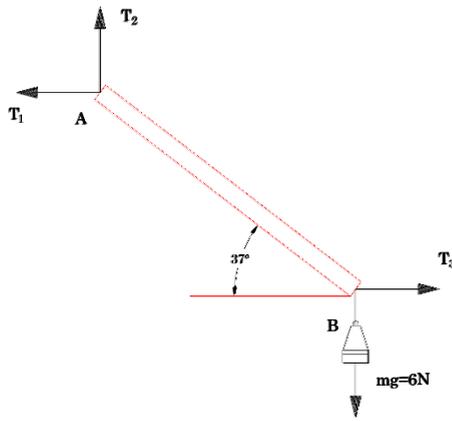


Fig. 4.59. Esquema de la viga inclinada.

Solución.

Como ya se sabe, se deben tener en cuenta los dos postulados; para el caso de la fuerza, es necesario tener en cuenta los dos ejes:

$$\sum_{i=1}^n T_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n T_y = 0, \quad \sum_{i=1}^n \tau = 0$$

i. Las tensiones en el eje x son: $T_3 - T_1 = 0$; como están sobre el eje x , no tienen componentes; por tanto, la ecuación queda como está.

ii. La única fuerza hacia arriba es T_2 y hacia abajo está el peso; esto es:

$$T_2 - mg = 0, \text{ por tanto:}$$

$$T_2 = mg$$

$$T_2 = 6N$$

ii. Para el torque o momentum se considera que el punto

A es donde gira: $\sum_{i=1}^n \tau = 0$. Entonces, el torque negativo lo constituye el peso y el torque positivo lo constituye la fuerza: F_3 . El torque debido a la tensión T_3 es: $\tau_{T_3} = dT_3 \text{Sen } 37^\circ$; al igualar estas expresiones, se tiene:

$$\tau_{mg} = \tau_{T_3}$$

$$dmg \text{Sen } 53^\circ = dT_3 \text{Sen } 37^\circ$$

$$T_3 = \frac{0.8}{0.6} 6N$$

$$T_3 = 8N$$

Como $T_1 = T_3$, entonces $T_1 = 8N$ y, por último, la $T_2 = 6N$.

6. Según la Fig. 4.60, la escalera tiene un peso Mg y soporta el peso mg de una mujer que se encuentra a una distancia x del punto O ; además, hay una fuerza de rozamiento con el piso, definida por el coeficiente de rozamiento μ . Calcular los valores de: F_y , F_x , y f_r , y ¿cuál será el peso máximo que puede soportar el sistema sin que hubiera riesgo de resbalar?

Solución.

De acuerdo a lo anterior, los postulados son:

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_y = 0, \quad \sum_{i=1}^n \tau = 0.$$

i. $\sum_{i=1}^n F_x = 0$. Las únicas fuerzas

en x son: f_r y F_x , de modo que:

$$f_r - F_x = 0; \text{ por tanto: } f_r = F_x;$$

ahora bien, como la fuerza de

rozamiento es: $f_r = -\mu F_N$, pero

$F_N = F_y$, de modo que:

$$F_x = \mu F_y \quad (1).$$

ii. $\sum_{i=1}^n F_y = 0$. Como las

fuerzas que se dirigen hacia arriba son positivas y las contrarias son negativas, entonces:

$$\begin{aligned} F_y - Mg - mg &= 0 \\ F_y &= Mg + mg \end{aligned} \quad (2).$$

iii. $\sum_{i=1}^n \tau = 0$. Como ya se sabe, hay torques positivos y

negativos, cuando son en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, al tomar como referencia el punto A, lugar de contacto con el piso. De modo que: $\tau_x = lF_x \text{Sen } \theta$, y los

torques negativos: $\tau_{Mg} = \frac{l}{2} Mg \text{Cos } \theta$ y $\tau_{mg} = xmg \text{Cos } \theta$;

entonces, el sistema queda:

$$\begin{aligned} \tau_x - \tau_{Mg} - \tau_{mg} &= 0 \\ \tau_x &= \tau_{Mg} + \tau_{mg} \end{aligned}$$

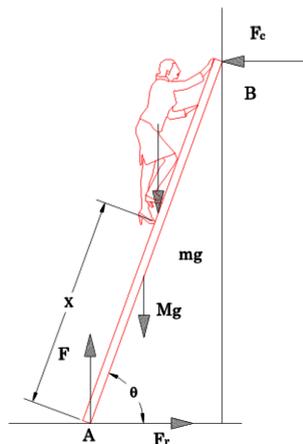


Fig. 4.60. Esquema de fuerzas sobre los puntos de contacto de una escalera.

Al remplazar estos momentums, se tiene:

$$lF_x \text{Sen}\theta = \frac{l}{2} Mg \text{Cos}\theta + xmg \text{Cos}\theta$$

$$F_x = \frac{\text{Cos}\theta}{l \text{Sen}\theta} \left(\frac{l}{2} Mg + xmg \right)$$

$$F_x = \frac{\text{Cot}\theta}{l} \left(\frac{l}{2} Mg + xmg \right)$$

$$F_x = \text{Cot}\theta \left(\frac{Mg}{2} + \frac{x}{l} mg \right)$$

Ahora, según las ecuaciones (1) y (2):

$$\mu Mg + \mu mg = \text{Cot}\theta \frac{Mg}{2} + \text{Cot}\theta \frac{xmg}{l}$$

$$\mu mg - \text{Cot}\theta \frac{xmg}{l} = \text{Cot}\theta \frac{Mg}{2} - \mu Mg$$

De donde se puede despejar mg :

$$mg = \frac{Mg \left(\frac{\text{Cot}\theta}{2} - \mu \right)}{\mu - \frac{x \text{Cot}\theta}{l}} \quad (3).$$

Al multiplicar por $\text{Tan}\theta$ arriba y abajo, se tiene:

$$mg = \frac{Mg \left(\frac{\text{Cot}\theta}{2} \text{Tan}\theta - \mu \text{Tan}\theta \right)}{\mu \text{Tan}\theta - \frac{x \text{Cot}\theta}{l} \text{Tan}\theta}$$

$$mg = \frac{Mg \left(\frac{1}{2} - \mu \text{Tan}\theta \right)}{\mu \text{Tan}\theta - \frac{x}{l}}$$

En (3), si $\mu \geq \frac{x \cot \theta}{l}$, nunca resbalará, pero, de lo contrario, la mujer está en serio riesgo.

Otra pregunta que puede surgir es: ¿cuál es el ángulo respecto a x , para que la escalera está segura?

$$\begin{aligned} \mu Mg + \mu mg &= \cot \theta \frac{Mg}{2} + \cot \theta \frac{xmg}{l} \\ \cot \theta &= \frac{\mu(Mg + mg)}{\frac{Mg}{2} + \frac{xmg}{l}} \end{aligned}$$

También:

$$\tan \theta = \frac{\frac{M}{2} + \frac{xm}{l}}{\mu(M + m)}$$

4.9 Equilibrio respecto a un punto de suspensión

Cuando un cuerpo se encuentra en equilibrio, significa que todas las fuerzas y torques que concurren a él suman cero; esto es:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \tau_i = 0;$$

en estas condiciones, una edificación, cualquiera que fuera, se puede afirmar que se encuentra en equilibrio o que está en pie. Lo contrario significaría que el objeto o edificación está en riesgo de caer.

Los cuerpos pueden estar en: equilibrio estable, inestable y neutro.

Ahora bien, el tipo de equilibrio depende de cómo se encuentre el centro de masa respecto al punto de suspensión o puntos de sustentación.

1) Cuando es posible hablar de puntos de suspensión o sustentación en un cuerpo, se pueden establecer estos casos de equilibrio:

Equilibrio estable. Se presenta cuando el centro de masa está por debajo del punto de suspensión. Este es el caso de un péndulo o todo aquel objeto que cuelga, donde el centro de masa está debajo del punto de suspensión.

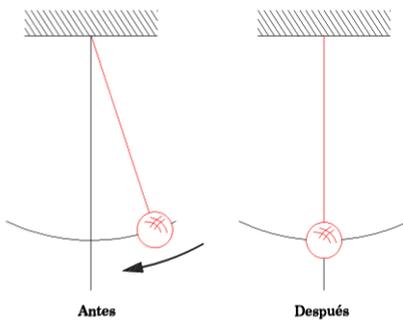


Fig. 4.61. Antes péndulo en desequilibrio y, después de un tiempo, el péndulo llega al punto de equilibrio.

En la Fig. 4.61 se puede apreciar un péndulo que se encuentra en desequilibrio; tras varias oscilaciones, el péndulo queda en reposo y ocupa el punto de equilibrio; en dicho punto tiene el menor potencial posible; por fuera de esta posición, el péndulo se encuentra en desequilibrio y, en general,

cualquier cuerpo que tuviera condiciones similares.

Las antiguas cunas indígenas de bebés se suspendían de lo alto de la casa, de modo que se podía mecer sin dificultad y encontrar el reposo en posición segura; los columpios de los niños también son un ejemplo típico de este caso de equilibrio.

Equilibrio inestable. Se presenta cuando el centro de masa se encuentra por encima del punto de suspensión. Como se puede ver en la Fig. 4.62, el centro de masa en un lápiz, al ubicarlo de forma vertical soportado en la punta, el centro de masa está muy por encima de este punto, lo que lo lleva a un estado netamente inestable, casi imposible de mantener en

dicha posición; se dice casi imposible debido a que la tecnología actual ha desarrollado máquinas muy precisas que podrían hacerlo, así fuese momentáneamente en posición vertical; sin embargo, no es posible que una persona lo hiciera al valerse de su pulso.

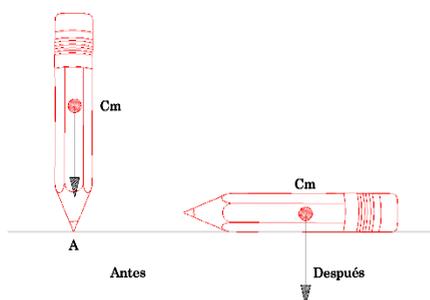


Fig. 4.62. El centro de masa de un lápiz por encima del punto de suspensión no le permite estar en equilibrio.

El lápiz, una vez colocado en posición vertical, al mínimo movimiento puede volcar y el centro de masa buscar la posición más estable que, en este caso, es la recostada.

Equilibrio neutro o indiferente. Este estado de los cuerpos resulta tan interesante, que la posición del cuerpo respecto a la superficie es inmutable, como se puede ver en la Fig. 4.63, donde la esfera de material homogéneo siempre va a estar en el centro geométrico de la esfera y, por tanto, siempre va a estar a igual distancia de la superficie “horizontal o equipotencial”; el punto Q puede estar en cualquier posición, y continuar en equilibrio neutro, todo esto debido a la esfericidad y homogeneidad de la esfera.

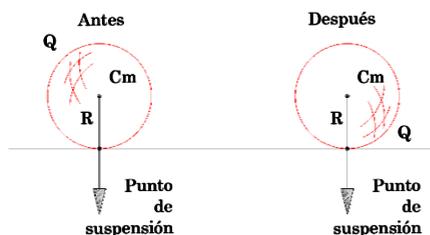


Fig. 4.63. Centro de masas de la esfera sobre el centro geométrico de la esfera homogénea.

4.10 Equilibrio de un sólido. Cuando los puntos de suspensión o sustentación dejan de serlo y pasan a ser superficies, también se los puede clasificar en tres categorías:

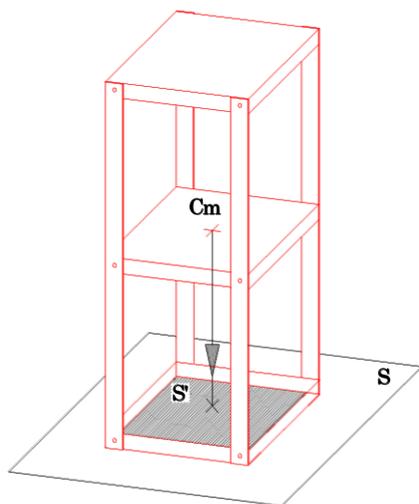


Fig. 4.64. La proyección del centro de masa sobre el área de sustentación.

Equilibrio estable. Un cuerpo o un edificio se encuentran en equilibrio estable cuando la proyección del centro de masa que está por encima cae dentro del área de sustentación (Fig. 4.64).

Tanto cuerpos como edificios deben tener un área de sustentación que permita mantener el estado de equilibrio; en el caso de los edificios altos, los cimientos, que

definen el área de sustentación, aún se incrustasen en el suelo previamente alistado; aquellos edificios de área grande, comparada con la altura, estarán en mejores condiciones de estabilidad que los esbeltos; de igual forma, en los objetos, como en el caso de una silla, el área de sustentación se define por los cuatro puntos que conforman el contacto de las patas con el piso, la persona a salvo. En los vehículos de carreras, es todo un reto tener el centro de masa lo más cerca posible de la superficie de la pista, lo que les asegura estabilidad en las curvas a alta velocidad.

Equilibrio inestable. Este tipo de equilibrio en sólidos, como en el caso de edificios, es imposible, pues no pueden mantenerse en pie cuando la proyección del centro de masa esta por fuera del área de sustentación (Fig. 4.65). Otro caso puede ser cuando una persona se recuesta demasiado sobre una silla y, si la proyección del centro de masa queda por fuera del área de tolerancia, la desgracia de caer se asegura.

En el caso de edificaciones, debido a que los cimientos están bajo el nivel del suelo, se permite que se presentase una tolerancia mayor; es decir, el centro de masa puede estar ligeramente por fuera del área de tolerancia y aun seguir inclinado, pero en pie; por supuesto que, en estos casos, no puede ser habitable y solo esperar a su demolición.

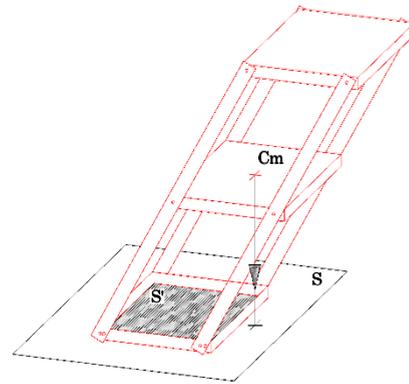


Fig. 4.65. Proyección del centro de masa por fuera del área de tolerancia.



Fig. 4.66. El autor, en una fotografía curiosa de todo turista, mientras trata de sostener con sus manos la torre inclinada de Pisa.

En la Fig. 4.66 se puede apreciar al autor mientras sostiene la torre inclinada de Pisa en Italia (fotografía de todo turista); allí se aprecia la inclinación que tiene desde los tiempos de Galileo.

Equilibrio neutro. Se presenta cuando el cuerpo se encuentra suspendido en el centro de masa o cuando la proyección esté en el límite, sin posibilidad de salir de esta frontera.

En la Fig. 4.67 se puede ver un giróscopo gigante, del laboratorio de la Universidad de Nariño, en el multitaller, mientras gira y se suspende sobre el centro de masa, debido al momentum angular; cuando el giróscopo se encuentra justamente suspendido en el centro de masa, se mantendrá girando en dicha posición por largo tiempo.



Fig. 4.67. Giróscopo gigante, suspendido sobre el centro de masa.

Fuente: fotografía del autor.

Paradoja de equilibrio.

Una paradoja es algo que, según el sentido común, parece desafiar las leyes de la naturaleza, cumple con todas las leyes establecidas; de alguna forma se camufla u oculta; como se ve en la Fig. 4.68, la avecita se puede mantener en equilibrio estable en la punta del pico; resulta sorprendente verla,

porque da la sensación de que caerá, pero el peso realmente lo tiene en la punta de las alas camuflado por la pintura o el material con el que se ha construido.



Fig. 4.68. Paradoja de la avecita.
Fuente: <https://es.aliexpress.com/i/1005003300188232.html?gatewayAdapt=Msite2Pc>



Fig. 4.69. Maqueta de avión Airbus A380, soportado en el extremo de un soporte.
Fuente: fotografía del autor.

En el caso del avión, como se lo puede ver en la Fig. 4.69, se trata de una maqueta de un Airbus A 380 comercial, que se encuentra suspendida en la punta de un alambre; todo el cuerpo está libre, pero el sobrepeso que cuelga en el alambre lo puede mantener en esa posición.

Capítulo 5

Trabajo y Energía

Fuente: Shutterstock.



Introducción

El trabajo es una expresión utilizada desde hace mucho tiempo y que se refiere al oficio que los hombres y animales hacen para poder *transformar*, ya fuese con la labranza de la tierra, construcción de armas para defenderse de depredadores o construcción de herramientas para extender el cuerpo en tamaño y fuerza. Esa ha sido la principal preocupación del hombre desde que inició su lucha de sobrevivencia en este planeta.

La transformación de algo lleva a que una forma o una posición final la separe de su punto de partida y entre más fuese la diferencia, se puede decir que más trabajo causa efectuar la transformación. Las primeras herramientas que nos muestran los científicos nos parecen muy elementales, pero se debe entender lo complicado que debió ser, por no disponer de herramientas para llevar a cabo la transformación, como un ciclo ocurre que para elaborar una herramienta se necesita otra; así que, ¿cuál de las dos fue primero?

Parece que las primeras herramientas fueron piedras, unas más duras que otras, de tal modo que, a golpe, el *homo habilis* trabajó hasta obtener un objeto que le permitía extender el accionar de su cuerpo.

En adelante, todo ha sido trabajo: transformar el alimento mediante el fuego para que resultase más fácil de digerir, laborar la tierra para poder cultivar, trabajar la arcilla para poder tener utensilios y levantar muros para proteger a su descendencia de la inclemencia del tiempo y de los depredadores.

En el siglo XVII, se utilizó el poder del vapor para realizar trabajo; este hito cambió la Historia de la humanidad,

pues el vapor reemplazó a la fuerza muscular del hombre y de animales en una proporción de 1 a 8; por supuesto que hubo despido masivo de trabajadores; en aquel entonces, Inglaterra se enfrentó a dos desafíos: primero a la problemática social que se desató por el despido masivo de trabajadores y, por otra parte, a impulsar la nueva tecnología, muchísimo más eficiente que la tradicional.

Hoy el mundo se encuentra enfrentado a la cuarta revolución industrial: 4G; según el Foro Económico Mundial realizado en 2022, más de 75 millones de puestos de trabajo desaparecerán y se reemplazarán por las máquinas con inteligencia artificial.

5.1 Trabajo

En Física, el trabajo no es más que la sistematización del concepto que por años ya se tenía sobre “transformar” de posición, de forma, de estado, etc., pero todo esto se puede condensar en referirse a una *transformación de potencial*.

El trabajo a estudiar será para **fuerzas conservativas**, como en el caso de la fuerza gravitacional, en la que se define el trabajo como:

$$w = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr \quad (5.1).$$

Por supuesto que esta expresión merece una explicación muy cuidadosa:

i. Si se trata de una fuerza constante y la posición inicial es cero, entonces la expresión queda reducida a:

$$w = \vec{F} \cdot \vec{r}.$$

De acuerdo a la expresión, la fuerza se mide en Newton y la distancia en metros; por tanto, el producto de: *Newtons · metros = Julios* .

En el sistema sexagesimal, la fuerza se mide en dinas y la distancia en centímetros, por lo que el resultado es: *Dinas por centímetro es Ergios*.

Ahora bien, se puede encontrar la equivalencia entre Julios y Ergios:

$$1 \text{ julio} = 1 \text{ Newton por } 1 \text{ metro}$$

$$1 \text{ Julio} = 10^5 \text{ Dinas por } 10^2 \text{ centímetros}$$

$$1 \text{ Julio} = 10^7 \text{ Ergios.}$$

Por ahora se manejarán estas dos unidades muy importantes, ampliamente utilizadas.

ii. El producto entre la fuerza y el desplazamiento es un producto escalar; así que ¡mucha atención!, pues el trabajo es una magnitud escalar. Por tanto, la expresión se puede escribir así:

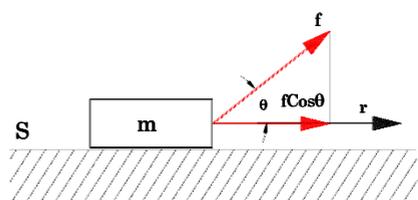


Fig. 5.1. Proyección de la fuerza sobre el vector desplazamiento.

$$w = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$w = f r \text{ Cos} \theta$$

Como se puede ver, $f \text{ Cos} \theta$ es la proyección de la fuerza sobre el vector desplazamiento r , única causante de producir el trabajo con

el que se establece el movimiento, tal como se puede ver en la Fig. 5.1.

Esto permite establecer dos casos extremos, que la misma definición de la función coseno permite.

ii.a. Cuando la fuerza y el vector desplazamiento son colineales o se superponen (Fig. 5.2), es decir, cuando el ángulo entre ellos es cero, entonces la fuerza se superpone sobre el vector desplazamiento, con lo que se desarrolla el máximo trabajo; igual situación ocurre cuando el ángulo entre los dos vectores es de 180° , el coseno es -1 y, por tanto, se tiene: $w = -f r$.

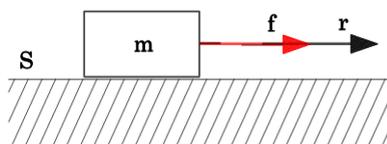


Fig. 5.2. Vectores fuerza y desplazamiento colineales.

En el caso de un montacargas o ascensor, el peso de la carga o de las personas se dirige hacia abajo si el desplazamiento se dirige hacia arriba, como se puede ver en la Fig. 5.3; el trabajo desarrollado en este proceso es máximo. Así:

$$w = -(-mg)(r)$$

$$w = mgr$$

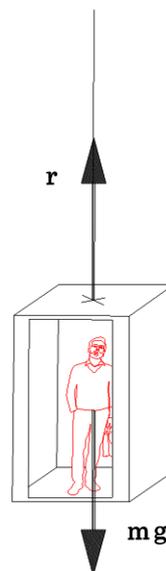


Fig. 5.3. Ascensor: al subir la máquina desarrolla el máximo trabajo.

De modo que este proceso, que lo efectúa un motor generalmente eléctrico, es positivo; en caso contrario, o sea cuando el ascensor baja, el desplazamiento y el peso forman un ángulo de cero grados; en este caso, el trabajo es negativo:

$$w = -mgr .$$

El movimiento realizado es hacia abajo; la naturaleza cobra el trabajo realizado, lo que significa que el ascensor llegará al punto de partida; por supuesto, la máquina tiene un freno que le permite bajar con velocidad controlada.

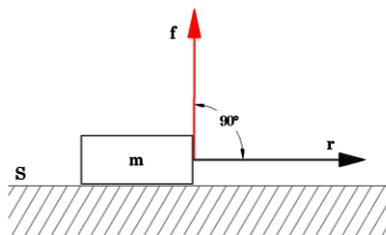


Fig. 5.4. Entre el vector desplazamiento y fuerza se ha formado un ángulo de 90° .

ii.b. Cuando la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo de 90° , esto es:

$$w = f r \text{Cos}90^\circ$$

$$w = 0$$

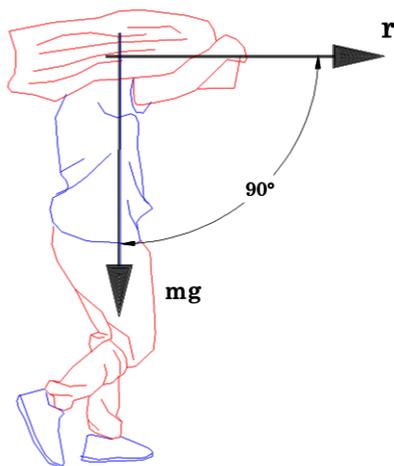


Fig. 5.5. Ángulo de 90° entre el vector desplazamiento y peso de la carga.

Como se puede ver en la Fig. 5.4, la fuerza, en este caso, no participa en el movimiento y, por tanto, no hace trabajo, de modo que el trabajo es nulo.

A partir de esto, se tiene que hay trabajo cuando se tiene una proyección de la fuerza sobre el vector desplazamiento.

Una situación típica de este caso se puede ver en la Fig. 5.5: el trabajador carga al hombro un bulto de algún material; como el desplazamiento y el peso

forman un ángulo de 90° , en este caso el $\text{Cos}90 = 0$, con lo cual el trabajo también es 0; por tanto, **NO hay trabajo**; sin embargo, una advertencia de este tipo al trabajador: no es

nada agradable, pero así es: mientras el trabajador esté en un plano horizontal al transportar la carga, NO realiza trabajo; cuando se habla de transportar, se refiere a llevar de un lado a otro; es decir, aquí no se contabiliza cuando levanta o baja la carga.

Para demostrarle al trabajador que él no realiza trabajo alguno, se puede ubicar la misma carga sobre una patineta o algo parecido, sin tomar en cuenta rozamiento alguno; así, la carga puede transportarse a cualquier parte de la superficie horizontal.

A la superficie horizontal también se la denomina superficie equipotencial, por lo que, con las fuerzas conservativas, mientras se está en la superficie equipotencial, *no se hace trabajo*. Así que la fuerza gravitacional no trabaja sobre la carga que el hombre lleva en la Fig. 5.5, igual que se explica que si una avecilla se ubica sobre una cuerda de alta tensión (Fig. 5.6), mientras no toca otra cuerda, el ave está en una superficie equipotencial y, en esa condición, la corriente eléctrica no realiza trabajos sobre el ave, pero si, por desgracia, el animalito toca con sus alas otra cuerda de transmisión, siente la descarga eléctrica.

Caso contrario ocurre cuando el trabajador lleva una carga cuesta arriba, como se puede ver en la Fig. 5.7: a cada paso que da, cambia de superficie equipotencial, de modo que con cada paso prácticamente realiza un trabajo que, en general, se definiría como:



Fig. 5.6. Unas aves descansan sobre cuerdas de alta tensión. Fuente: <https://www.amazon.com/-/es/20220211-LCZ-BedSweSWHH02244MDAABST/dp/B09SHJSMQF>

$$w = f r \cos \theta .$$

Por ejemplo, si se considera una carga de 450 N que se desplaza unos 20 m y con un ángulo de 30° , se tiene:

$$w = (-450\text{ N})(20\text{ m})\cos 30$$

$$w = (-9000\text{ Nm})(-0.866)$$

$$w = 7794.229\text{ Julios}$$

Este es un trabajo bastante considerable para los músculos del hombre y eso sin contar con el trabajo que tiene que efectuar para movilizar su propio peso.

iii. Ahora queda por analizar la integral de la expresión

$$w = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr .$$

Se trata de una integral de Riemann; es decir, es una forma

de definir la integral de una función sobre un intervalo, como el área localizada bajo la curva de dicha función, tal como se puede ver en la Fig. 5.8, donde hay infinitas áreas infinitesimales, que representan trabajos infinitesimales y solo al contabilizar toda el área se tiene el trabajo comprendido entre los extremos, definido por r_1 y r_2 ; en el caso de la fuerza

conservativa, como la gravitacional, el peso es constante y, por tanto, sale de la integral;

esto es: $w = F \int_{r_1}^{r_2} dr$; la solución

de esta expresión es: $w = F(r_2 - r_1)$, lo cual muestra justamente el área bajo la función entre los extremos r_2 y r_1 .

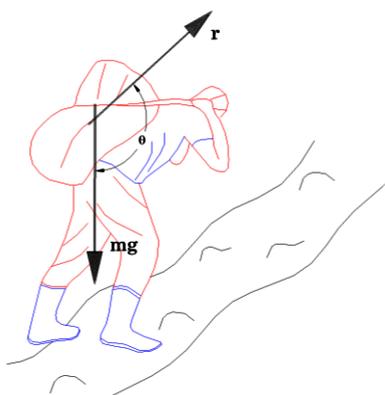


Fig. 5.7. Un hombre lleva una carga cuesta arriba.

En esta expresión se puede ver que, una vez conocida la función de la

fuerza, el trabajo depende de los extremos; en el caso de escalar una montaña, el trabajo que se efectúa contra la fuerza gravitacional depende de los dos extremos; es decir, de donde sale y a donde llega, sin

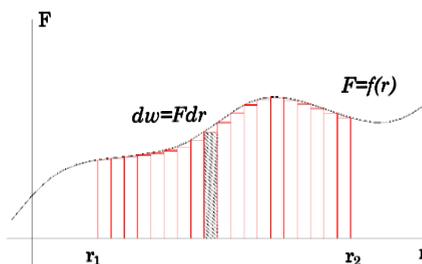


Fig. 5.8. Área bajo la curva o función $F=f(r)$.

importar el camino por donde se hiciera el recorrido; en la Fig. 5.9 se pueden ver tres posibles caminos (*a*, *b*, *c*) para pasar de la superficie horizontal 1 a la 2; en la topografía de terrenos, a cada superficie horizontal se la denomina una curva de nivel, de modo que el trabajo que se realiza al escalar una montaña se da cuando se pasa de una curva de nivel a otra, sin importar el camino elegido. Solo depende de la posición inicial y final.

Ahora bien, una vez realizado el trabajo de subida, el trabajo de bajada es:

$$w = \int_{r_2}^{r_1} F dr .$$

Como se puede ver, lo único que ha cambiado son los extremos de la integral, pues, en este caso, la integral va de r_2 a r_1 ; es decir, cuando la fuerza es constante, se tiene:

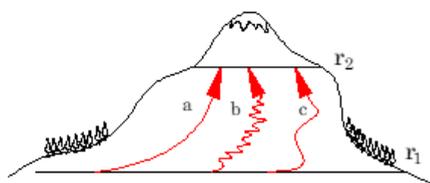


Fig. 5.9. Esquema de una montaña con dos curvas de nivel, r_1 y r_2 .

$$w = F(r_1 - r_2) .$$

Como r_2 es mayor que r_1 , entonces el trabajo es negativo, pero de igual valor que cuando se subió la montaña; de modo que el trabajo total para subir y bajar la montaña, al llegar a la misma curva de nivel o equipotencial es “cero”, pues la naturaleza no se queda con nada ni tampoco da más de la cuenta. En símbolos matemáticos, subir y bajar significa una integral cerrada, que va desde r_1 hasta r_2 y, luego, regresa a r_1 ; esto es:

$$w = \oint_{r_1 r_2} F dr = 0 \quad (5.2).$$

No sobra advertir que, en este caso, se ha contabilizado únicamente la fuerza conservativa de la gravitación; si esto se le dice a un escalador o montañista, seguramente quedará desconcertado y va a alegar que ha realizado un enorme esfuerzo al subir y bajar una montaña y, en verdad, así es, pero esto se debe a que la fuerza muscular no es de tipo conservativo; por tanto, el trabajo realizado con este tipo de fuerza se pierde a cada paso que se da, ya fuese al subir o bajar.

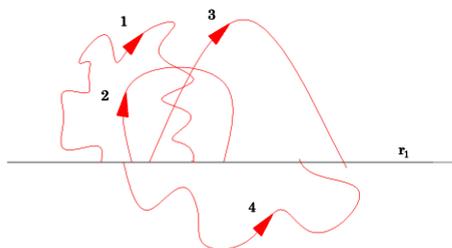


Fig. 5.10. Tres posibles caminos, de los infinitos que hay.

De igual forma, como en el caso de escalar la montaña hay innumerables caminos para subir, también los hay para bajar; en resumidas cuentas, en un camino cerrado hay múltiples caminos que siempre llegan al mismo punto de

partida: el trabajo contabilizado será nulo. En la Fig. 5.10, se muestran cuatro caminos, de los infinitos que hay, donde se sale de una curva de nivel y se llega a la misma; no importa si

es el mismo punto de partida o no, importa que fuese la misma curva de nivel, superficie horizontal o superficie equipotencial.

Ejemplos.

1. Calcular el trabajo que se realiza para pasar, de un piso a otro de una residencia, un objeto cuyo peso es de $250N$, si la diferencia de altura es de $2.50m$, por tres caminos diferentes: vertical, rampa de 30° y gradas.

Solución.

i. Sobre el camino vertical, para calcular el trabajo solo se necesita aplicar la fórmula de la integral: $w = \int_0^{2.5} F dr$; como la fuerza es constante, que, en este caso, es el peso, entonces sale de la integral y solo queda: $w = F(2.5m)$; al remplazar la fuerza, se tiene:

$$w = (250N)(2.5m)$$

$$w = 625Nm$$

$$w = 625 \text{ julios}$$

ii. En cuanto al trabajo realizado por la rampa de 30° , de acuerdo a la ecuación establecida, se tiene: $w = \int_0^d F' dr$; aquí se presentan dos incógnitas: d y F' ; para encontrar estas variables, se procede así:

Para calcular la distancia de la rampa d , se tiene:

$$\text{Sen}30 = \frac{2.5m}{d}, \text{ de modo que } d = \frac{2.5}{\text{Sen}30}; \text{ esto es:}$$

$d = \frac{2.5}{0.5} = 5m$; por otra parte, el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de 60° , por lo que: $F' = F \cos 60$; al remplazar esto en la ecuación fundamental, se tiene:

$$w = \int_0^5 F \cos 60 dr$$

$$w = (250N)(\cos 60)(5)$$

$$w = 625 \text{ julios}$$

iii. Calcular el trabajo que se necesita para subirlo por las gradas. Para esto, es necesario conocer el número de peldaños que hay, con un paso de contra huella de 16.7 cm por cada uno. De modo que: $N = \frac{2.5m}{0.167m} = 15$ escalones o peldaños. Ahora, el trabajo es:

$$w = \sum_{i=1}^{15} F \Delta r_i ; \text{ o sea:}$$

$$w = ((250n)(0.167m) + (250n)(0.167m) + .. + 15 \text{ veces})$$

$$w = 41.75 \text{ julios} \times 15$$

$$w = 625 \text{ julios}$$

Como conclusión se tiene que todos los trabajos son iguales; es decir, se cumple lo que se había dicho respecto a que el trabajo es independiente del camino; solo depende de los extremos.

2. Calcular el trabajo que realiza el motor de un vehículo al subir por una cuesta, cuya pendiente de la vía es del 8%, a una velocidad de $40 \frac{km}{h}$ durante 25 segundos, si el vehículo tiene un peso de 7357 N.

Solución.

De forma hipotética, asumimos que la velocidad es constante; por tanto, permite calcular la distancia recorrida en ese tiempo. Como la velocidad es de $40 \frac{km}{h}$, que equivalente a: $v = 11.11 \frac{m}{s}$, con esto se puede calcular la distancia:

$$d = (11.11 \frac{m}{s})(25sg)$$

$$d = 277.75m$$

Como la pendiente de la carretera tiene un valor del 8%, entonces: $Tan^{-1}0.08 = 4^{\circ}34'$.

Por tanto, el trabajo en estas condiciones es:

$$w = mgdCos\theta$$

$$w = (7357N)(277.78m)(0.07991)$$

$$w = 162745.6 \text{ julios}$$

3. Sea una fuerza de $F = 6t$; la fuerza se da en Newtons, que actúa sobre una partícula de 2kg de masa; si la partícula parte del reposo, calcular el trabajo efectuado por dicha fuerza durante los 5 primeros segundos.

Solución.

Como el trabajo se define como: $w = \int_{r_1}^{r_2} Fdr$, entonces, la fuerza se da como: $F = 6t$; al remplazar en la ecuación del

trabajo, se tiene: $w = \int_{r_1}^{r_2} 6t dr$; en las condiciones en que se encuentra, no es posible solucionar, pues la integral debe estar en función de una variable; esto es:

Como la fuerza es $F = ma$ y la fuerza en el problema se da en términos del tiempo, entonces, $ma = 6t$, de donde la aceleración es: $a = \frac{6t}{m}$; además, la aceleración se define como:

$a = \frac{dv}{dt}$; por tanto: $dv = \frac{6t}{m} dt$ y, como solución a esta ecuación,

se tiene: $v = \frac{6t^2}{m}$; a su vez, la velocidad es: $v = \frac{dr}{dt}$; así, se

tiene: $\frac{dr}{dt} = \frac{3t^2}{m}$, de donde $dr = \frac{3t^2}{m} dt$, que, al remplazar en la ecuación del trabajo, queda:

$$w = \int_0^5 6t \left(\frac{3t^2}{m} dt \right)$$

$$w = \int_0^5 \frac{18t^3}{m} dt$$

$$w = \frac{18t^4}{4m} (5)$$

$$w = 1406.25 \text{ julios}$$

5.2 Potencia

Cuando se dio la primera Revolución Industrial en Inglaterra, en 1750, todo fue más rápido, la máquina reemplazó al músculo humano y animal, se logró elaborar más productos en la misma jornada de trabajo; por tanto, se tuvo que calcular la potencia con la que las máquinas hacen las cosas. Así se definió que el trabajo realizado en función del tiempo era:

$$P = \frac{dw}{dt} \quad (5.3).$$

Las unidades que se necesitan son: para el trabajo, julios y, para el tiempo, se utilizan los segundos; por tanto: $\frac{\text{julios}}{\text{segundos}} = \text{wattios}$. La denominación de esta unidad en honor a James Watt.

Por otra parte, como el trabajo es: $dw = Fdx$, al remplazar, se tiene: $P = \frac{Fdr}{dt}$, pero $\frac{dr}{dt} = v$, entonces, se tiene:

$$P = Fv \quad (5.4).$$

Otras unidades de la potencia son: el caballo de fuerza (horse power, hp), donde $1hp = 746 \text{ watts}$.

Esta equivalencia es muy útil para realizar conversiones, en el caso de los motores eléctricos, a gasolina, etc.

Ejemplos

1. Una máquina levanta, con velocidad constante, un cuerpo de 10 kg de masa hasta una altura de 20 m en solo 5 segundos ¿Cuál es la potencia?

Solución.

Como $w = Fh$ y $F = mg$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$P = \frac{w}{t}$$

$$P = \frac{mgh}{t}$$

$$P = \frac{(10kg)(9.81 \frac{m}{s^2})(20m)}{5s}$$

$$P = 392.4 \text{ wtt}$$

También, como $1hp = 746w$, entonces se tiene que hay una potencia de: $P = 0.525hp$.

2. ¿Cuál es la potencia que genera el motor de un automóvil cuya masa es de 735 kg , que se desplaza con velocidad constante de $72 \frac{km}{h}$ por una carretera, cuyo coeficiente de rozamiento es del 20% ?

Solución.

El rozamiento pertenece a fuerzas no conservativas, o sea, estas fuerzas se disipan y son las causantes de la gran pérdida de potencia de motores.

La fuerza se da por: $f = \mu F_N$, donde F_N es la fuerza normal; en este caso, es el peso del vehículo:

$$P = \mu m g v$$

$$P = (0.2)(735kg)(9.81 \frac{m}{s^2})(20 \frac{m}{s})$$

$$P = 28841 \text{ wtt}$$

Equivalente a 38.66 hp .

3. Se pide que una máquina levante objetos; si el trabajo empleado es de *5000 julios*, ¿hasta qué altura puede subir una masa de 100kg con velocidad constante?

Solución.

Como $w = F r$ y $P = F v$, entonces:

$$h = \frac{w}{mg}$$

$$h = \frac{5000 \text{ julios}}{(100 \text{ kg})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}$$

$$h = 5.1 \text{ m}$$

5.3 Trabajo y Energía

De la misma forma como se trató en el trabajo, se analizará para fuerzas conservativas.

Cundo se realiza un trabajo al levantar objetos de una superficie equipotencial 1 a otra 2, se tiene: $w_{12} = -mgr_{12}$, donde a r_{12} se lo puede denominar altura h_{12} , y el signo menos (-) se debe a la gravedad, que es negativa; por tanto, el trabajo se puede escribir como: $w_{12} = -mgh_{12}$; el trabajo se realiza durante la acción, pero una vez hubiera terminado, la acción el trabajo se denominará: **Energía Potencial:**

$$U = -mgh \quad (5.5).$$

Ahora bien, como siempre se tienen dos extremos, entonces se puede decir que la variación de la energía potencial es:

$$\Delta U = mgh_1 - mgh_2 \quad (5.6).$$

Por lo que la variación de la energía potencial representa al trabajo que se ha realizado; esto es:

$$w_{12} = \Delta U \quad (5.7).$$

Ahora bien, como una vez se hubiera realizado el trabajo y se hubiera ganado energía potencial, el cuerpo puede caer, la pregunta es: ¿qué ocurre cuando cae?

Como el cuerpo se encuentra a cierta altura, es decir, en una superficie equipotencial “2” en la caída, el cuerpo pasa a la superficie equipotencial “1”, o sea cae desde una altura h ; en Cinemática, se tenía la ecuación independiente del tiempo:

$$-2gh = v_f^2 - v_0^2, \text{ donde, si se despeja } h, \text{ es: } h = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2g}, \text{ con lo}$$

que, al remplazarlo en la energía potencial, se tiene:

$$\Delta U = mg \frac{v_0^2}{-2g} - mg \frac{v_f^2}{-2g}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

A la expresión $\frac{1}{2}mv^2$ se la denomina **energía cinética**; es decir:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.8).$$

Así que el trabajo que se efectúa sobre el objeto para llevarlo hasta la superficie “2”, adquiere allí **energía potencial**; cuando cae, está devolviendo el trabajo que se efectuó para llevarlo hasta la superficie “2” y, cuando ha llegado a la superficie “1”, lo hace con velocidad: a esto se lo

denomina **energía cinética**, en cantidades iguales al trabajo y a la energía potencial.

Ejemplo.

Se lleva un objeto de $50N$ de peso hasta una altura de $2.5m$. Calcular el trabajo, la energía potencial y la energía cinética, cuando el objeto cae.

Solución.

a) Calcular el trabajo. Como el trabajo se define: $w_{12} = F_i r_{12}$, entonces, al remplazar valores, se tiene:

$$w_{12} = (50N)(2.5m)$$

$$w_{12} = 125 \text{ julios}$$

b) Energía Potencial. Esta energía se define como: $U = mgh$, de modo que los valores que se tienen son los mismos: mg , que representa el peso o la fuerza, y h es la altura; por tanto, al remplazar los valores, se tiene:

$$U = mgh$$

$$U = (50N)(2.5m)$$

$$U = 125 \text{ julios}$$

c) Energía cinética. Para calcular esta expresión, falta encontrar la velocidad cuando llega al piso y la masa del cuerpo. Esto es: $v = \sqrt{2gh}$; el signo menos de la gravedad se cancela con el signo menos de h que, en este caso, también es negativo, porque está cayendo. Entonces:

$$v = \sqrt{2(-9.81)(-2.5m)}$$

$$v = 7 \frac{m}{s}$$

La masa del cuerpo es:

$$m = \frac{mg}{g}$$

$$m = \frac{50N}{9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$m = 5.1kg$$

De modo que, si reemplazamos estos resultados en la energía cinética, se tiene:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}(5.1kg)(7 \frac{m}{s})^2$$

$$E_k = 125 \text{ julios}$$

Como se puede ver, los tres resultados son iguales; por tanto, se puede decir que:

$$w_{12} = U = E_k .$$

A esto se lo conoce como el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

5.4 Conservación de la energía

A mediados del siglo XIX, Rudolf Clausius y Lord Kelvin enunciaron el principio de la conservación de la energía como primer principio de la Termodinámica; desde entonces, los físicos han encontrado muchas formas para demostrar que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma, como ocurría en los ejemplos anteriores, donde se ha visto la conservación mediante el trabajo, la energía potencial y la

cinética, que permanecieron constantes; en esta instancia, se debe aclarar que es muy evidente la conservación de la energía entre cinética y potencial, a lo que se denomina energía total mecánica; esto es:

$$E_T = E_k + U \quad (5.9).$$

Este es el caso de un péndulo, que se encuentra en las posiciones O, A y B. La lenteja o cuerpo del péndulo tiene dos extremos bien definidos: la posición O y la posición A. En la posición O, el péndulo tiene la menor energía potencial respecto al piso, y en la posición B, el péndulo está lo más alejado del piso, por tanto, tiene la mayor energía potencial (Fig. 5.11); ahora bien, donde hay mayor energía potencial, hay la menor energía cinética, y donde hay la menor energía potencial, hay la mayor energía cinética; en el punto O hay la mayor velocidad, que le permite obtener la mayor energía cinética, de modo que:

$$U_b = E_{kO}.$$

Así como la energía potencial máxima se encuentra en el punto B, la energía cinética máxima está en el punto O.

En el punto intermedio A, el péndulo tiene energía potencial y energía cinética, de tal forma que la energía total mecánica es igual a la suma de la energía cinética y la energía potencial; esto es:

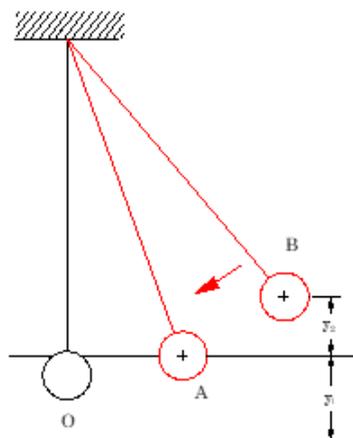


Fig. 5.11. Péndulo, en el que se tienen tres posiciones, con tres tipos de energías diferentes.

$$E_T = E_{kO} = U_B = E_{kA} + U_A.$$

De modo que:

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_{y_1} \quad (5.10).$$

Este es el ***Principio de conservación de la energía***: los extremos corresponden a las energías máximas, como es el caso de la energía potencial en el punto B: $U_B = mgy_B$, y en el punto de equilibrio, por donde la lenteja tiene la máxima velocidad: $E_k = \frac{1}{2}mv_O^2$.

Cualquiera de estas dos energías es igual a la suma de las energías potencial y cinética

en el punto A.

Por otra parte, en la naturaleza se tienen muchas formas de energía, como es el caso de la energía luminosa, calorífica, sonora, etc. Son energías disipativas; es decir, energías que se pierden; ahora bien, si se está en un sistema cerrado, ninguna energía se pierde, pero, en el caso de tener la naturaleza abierta, obviamente estas energías se disipan o se pierden, no se pueden recuperar. En general, el principio de la conservación de la energía se podría escribir como:

$$E_T = U + E_K + Q_{otra\ forma\ de\ energía}.$$

Ejemplo.

1. En una planta hidroeléctrica, como se ve en la Fig. 5.12, se tiene: el embalse o represa, que es la parte donde se acumula el agua y forma lagos que inundan tierras y en ocasiones pueblos, debido a que el nivel se encuentra mucho más alto que las máquinas donde se produce la electricidad; esta represa posee energía potencial U . El ducto por donde

sale el agua a gran velocidad tiene energía cinética: E_K . Ahora bien, esta energía cinética lleva a que giren las ruedas hidráulicas, que pueden ser de tipo Pelton o Francis. Cualquiera que fuera, convierte la energía cinética del agua en energía cinética de rotación de la turbina y del eje del generador eléctrico, donde se

transforma en energía eléctrica debido a la Ley de Faraday:

$v_E = -\frac{d\phi}{dt}$. La diferencia de potencial eléctrico v_E depende de

la variación del campo magnético respecto a la variación del tiempo. Esta energía se transmite por los cables de alta tensión hasta una subestación de transformación y distribución, que la lleva hasta los hogares, en los que hará funcionar hornos, estufas y demás electrodomésticos; en los miles de hogares, desde las ollas en las estufas se desprende gran cantidad de vapor de agua, que hará parte de la nube, de la que caerá nuevamente y hará parte de la represa, y así sucesivamente, de forma indefinida.

2. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial vertical de 8 m/s . ¿Cuál es la altura a la que llega el objeto?

Solución.

A partir del principio de conservación de la energía, se tiene: $E_M = U_M$, con lo que se quiere decir: que la energía

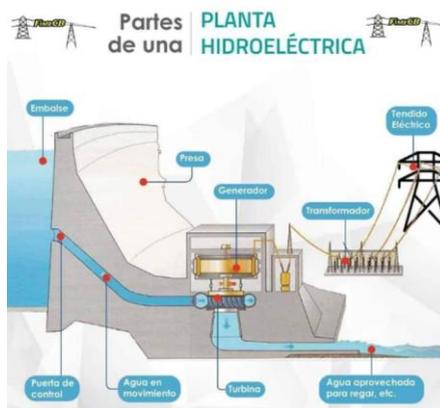


Fig. 5.12. Esquema de una hidroeléctrica. Fuente: Consorcio de ingeniería eléctrica (2021).

cinética máxima es igual a la energía potencial máxima; o sea, la energía que se adquiere por la altura; esto es:

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = mgh_M.$$

Como se puede ver, se cancela la masa y, por tanto, se tiene la altura a la que llega el cuerpo:

$$h_M = \frac{v_M^2}{2g}$$

$$h_M = \frac{(8m/s)^2}{2(9.81m/s^2)}$$

$$h_M = 3.26m$$

3. Desde lo alto de un plano inclinado, un cuerpo se desliza. Calcular la velocidad con que el cuerpo llega al final del plano inclinado: a) sin rozamiento y b) con rozamiento.

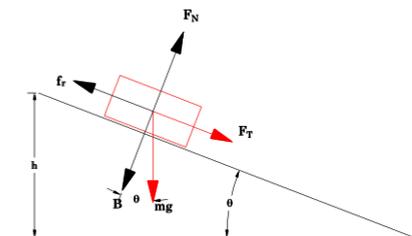


Fig. 5.13. Cuerpo de masa m , que se desliza en un plano inclinado.

Solución.

a) Sin rozamiento (Fig. 5.13). El cuerpo cae desde una altura h , con la cual tiene una energía potencial, y llega al final de la rampa

con energía cinética, esto es:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

De donde: $v = \sqrt{2gh}$; ahora bien, si el recorrido es d , entonces: $\text{Sen}\theta = \frac{h}{d}$, de donde: $h = d\text{Sen}\theta$, de modo que:

$$v = \sqrt{2gd\text{Sen}\theta}.$$

Si $\theta = 35^\circ$ y $d = 1\text{m}$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$v = \sqrt{2(9.81\text{m/s}^2)(1\text{m})(\text{Sen}35^\circ)}$$

$$v = 3.35\text{m/s}$$

b) Cuando hay rozamiento, con: $\mu = 15\%$.

El principio de conservación de la energía se puede establecer como: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + w_s$, donde w_s es el trabajo que se efectúa para vencer el rozamiento. Entonces: $w_s = f_r d$ y $f_r = \mu F_N$; a su vez, la fuerza normal es: $F_N = mg\text{Cos}35^\circ$; al remplazar todo esto, se tiene:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + d\mu mg\text{Cos}35^\circ$$

$$v = \sqrt{2(gd\text{Sen}35^\circ - d\mu g\text{Cos}35^\circ)}$$

$$v = 2.97\text{m/s}$$

El efecto del rozamiento lleva a que el cuerpo se frene un poco y, por tanto, llega con menor velocidad que en el caso a).

5.5 Conservación del momentum y la energía

En la Física básica, estos dos principios se mantienen siempre constantes, lo que permite solucionar una gran cantidad de ejemplos. Para empezar, analicemos los choques, una forma de interacción entre dos cuerpos.

Choque elástico

Se define así cuando la energía cinética total, antes de la interacción o choque, es igual a la energía después de la interacción.

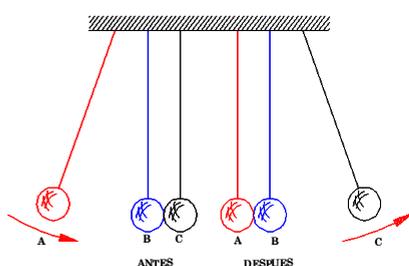


Fig. 5.14. Péndulos, en choques elásticos.

En la Fig. 5.14, se puede ver el antes y después de la interacción. Antes, el péndulo A está en desequilibrio y, al caer, golpea al péndulo B, que se encuentra junto al péndulo C; como la masa de los péndulos y la longitud es exactamente igual, el momentum del péndulo A se transmite hasta llegar al péndulo C: ¿qué ocurre después? El péndulo C sale de su posición de equilibrio hasta llegar a una altura equivalente a la altura de donde partió el péndulo A. Al regreso, el péndulo C golpea al péndulo B y ahora el péndulo A sale de su posición de equilibrio; una de las cosas más interesante es que siempre se observarán dos péndulos en absoluta quietud; al final, el sistema se detiene, lo que indica que, en el proceso, se pierde algo de energía. De modo que la conservación de la energía es:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_a u_A^2 + \frac{1}{2}m_B u_B^2 \quad (5.11).$$

Antes de la interacción Después de la interacción

El momentum es:

$$m_A v_A = m_B u_B \quad (5.12).$$

De las dos expresiones, se puede factorizar la masa; esto es:

$$\begin{aligned} m_A (v_A^2 - u_A^2) &= m_B (u_B^2 - v_B^2) \\ m_A (v_A - u_A) &= m_B (u_B - v_B) \end{aligned}$$

Al dividir las dos ecuaciones, se tiene:

$$\frac{v_A^2 - u_A^2}{v_A - u_A} = \frac{u_B^2 - v_B^2}{u_B - v_B}.$$

Al multiplicar en cruz y cancelar lo correspondiente, se tiene:

$$v_A - v_B = -(u_A - u_B).$$

Antes Después

Ahora, si la velocidad de B antes es cero, entonces, lo que queda es:

$$v_A = u_A.$$

Después de la interacción, la velocidad del péndulo A se torna cero.

Choque semi-elástico.

En el caso anterior, se dijo que, después de un tiempo pronunciado, el sistema queda en reposo, lo que se debe a que hay algo de pérdida de energía, de modo que, en los choques

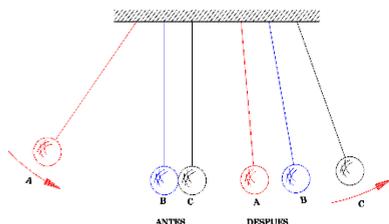


Fig. 5.15. Choque inelástico de las esferas.

inelásticos, esto es mucho más evidente y la última ecuación del caso anterior se debe escribir como:

$$v_A - v_B = -e(u_A - u_B) \quad (5.13),$$

donde e es la constante de proporcionalidad que, en este caso, se denomina coeficiente de restitución. De modo que se lo puede entender como el coeficiente de la relación de lo que ocurre después, respecto a lo que ocurría antes:

$$e = \frac{u_B - u_A}{v_A - v_B} : \frac{\text{Después}}{\text{Antes}}$$

Este coeficiente debe estar entre 1 y 0; en este caso, es menor a 1 y mayor a 0. De ser 1, se tendría un choque elástico y, de ser 0, se tiene un choque inelástico.

En la Fig. 5.15, se puede apreciar que las esferas de los péndulos, después de la interacción que establece el péndulo A, todas se mueven y llegan a diferentes alturas, pues el sistema en estas condiciones es de tipo semi-elástico y el movimiento terminará lo más pronto posible.

En la Fig. 5.16, se puede ver como el balón, al rebotar, no alcanza la altura de donde inició, de modo que el balón, en cada rebote, pierde altura, hasta que el proceso termina por dar N rebotes en que, al llegar a la parte más alta, la velocidad es cero. Por tanto, se puede decir que: $v_i = \sqrt{2gh_i}$; en $i+1$ rebotes más tarde, será: $v_{i+1} = \sqrt{2gh_{i+1}}$; por tanto, el coeficiente de restitución será:

$$e = \frac{v_{i+1}}{v_i}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_{i+1}}}{\sqrt{2gh_i}}$$

Por lo que, al final, se tiene:

$$e = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}}$$

Como h_{i+1} es menor que h_i , el coeficiente va a ser menor de 1; así: $e \leq 1$.

Ahora bien, el coeficiente mide la propiedad conjunta de la elasticidad del balón y de la superficie; por ejemplo, para una superficie de acero o vidrio, el coeficiente es de 0.95 o más, muy por encima de pelotas de hule y superficie de madera u otro material.

Al lector se deja determinar si la altura de los rebotes define una función lineal o no.

Choques inelásticos.

Un choque inelástico es aquel en que, después de la interacción, los dos cuerpos quedan en uno solo; como se puede ver en la Fig. 5.17, el péndulo balístico consiste en un bloque de un material como

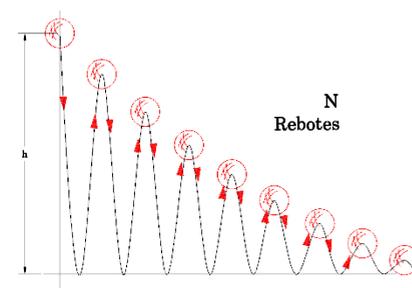


Fig. 5.16. Pelota que rebota, con pérdida de altura en cada rebote.

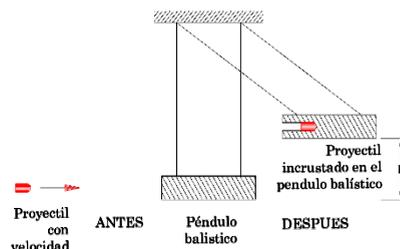


Fig. 5.17. Esquema de un péndulo balístico, para calcular la velocidad del proyectil.

caucho u otro parecido, al que se le hace llegar un proyectil con alta velocidad, así que antes el péndulo se encuentra en reposo y solo el proyectil está con velocidad; después del impacto, el proyectil se incrusta en el bloque balístico, lo que significa que ahora en la masa del bloque está la masa del proyectil y esta ha llegado hasta una altura h ; entonces, se tiene:

$$mv_A + Mu_A = (m + M)v_D.$$

Como la velocidad del bloque antes es cero, entonces:

$$mv_A = (m + M)u_D.$$

Por tanto, la velocidad del proyectil es:

$$v_A = \frac{m + M}{m} u_D.$$

Ahora bien: de acuerdo a la Ley de conservación de la energía, se tiene que la energía cinética del proyectil más la masa del proyectil es igual a la energía potencial del bloque con masa del proyectil dentro de él, así:

$$\frac{1}{2}(m + M)u^2 = (m + M)gh.$$

A partir de aquí se tiene que la velocidad es:

$$u = \sqrt{\frac{2(m + M)gh}{m}}.$$

Ejercicios.

1. Una esfera cae desde una altura de $10m$; se entiende que el coeficiente de restitución es del 80% . Calcular la altura del primer rebote.

Solución.

Se calcula la velocidad con que cae la esfera: $v_0 = \sqrt{2gh}$; al remplazar valores, se tiene:

$$v_0 = \sqrt{2(9.81m/s^2)(10m)}$$

$$v_0 = 14.01m/s$$

La velocidad de rebote será:

$$v_1 = 0.8 \cdot v_0$$

$$v_1 = 0.8(14.01m/s)$$

$$v_1 = 11.21m/s$$

Con esta velocidad, se calcula la altura a la que puede llegar la pelota:

$$h = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$h = \frac{(11.21m/s)^2}{2(9.81m/s^2)}$$

$$h = 6.4m$$

Como se puede apreciar, la nueva altura corresponde al primer rebote y es menor que la altura desde donde cayó por primera vez.

2. Se impacta, con un proyectil de $120g$, a un péndulo balístico de $2Km$ y se observa que, después del impacto, el péndulo balístico, en su nuevo movimiento de oscilación, llega hasta una altura de $0.1m$. ¿Cuál es la velocidad del proyectil?

Solución.

La velocidad del sistema se puede calcular en:

$$u = \sqrt{\frac{2(m+M)gh}{m}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2(0.12+2)(9.81)(0.1)}{0.12}}$$

$$u = 5.89m/s$$

Una vez conocida la velocidad del bloque, se puede calcular la velocidad del proyectil:

$$v_A = \frac{m+M}{m}u_D$$

$$v = \frac{0.12+2}{0.12}5.89$$

$$v = 104.06m/s$$

De modo que la velocidad del proyectil es: $104.06m/s$.

5.6 Energía en la rotación

En el movimiento circular, también se tiene energía cinética y potencial, dependiente del sistema que se tuviera.

En el caso de la energía cinética de un volante o rueda que se encuentra girando, la velocidad lineal o tangencial es $v = r\omega$, de modo que, si se reemplaza en la ecuación de la energía cinética para el movimiento de traslación, se tiene:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_M^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Ahora bien, como la expresión $m r^2 = I$ es el momentum de inercia, entonces queda:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5.14).$$

Por otra parte, se debe entender que para llevar a rotar un volante o cualquier cuerpo se necesita hacer un trabajo; a partir de la definición de trabajo, se tiene: $\Delta w = F \Delta r$; la superficie sobre el perímetro del volante es el arco, de tal forma que un elemento de arco es: $\Delta s = r \Delta \theta$; perfectamente, se puede llevar a coincidir $\Delta r = \Delta s$, y cuanto más pequeño fuese, mucho más preciso; entonces, se puede escribir como:

$$\Delta w = F r \Delta \theta .$$

Además, $F r$ es torque τ , de modo que la expresión al fin queda:

$$\Delta w = \tau \Delta \theta .$$

Al llevar al límite la expresión, se puede escribir así:

$$w = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta .$$

Como en el movimiento de traslación, en este caso también se puede decir, si el torque τ es constante, entonces: $w = \tau(\theta_2 - \theta_1)$; si se considera que el primer ángulo es cero, entonces se tiene: $w = \tau \theta$.

5.7 Potencia en la rotación

Por definición de potencia, para el movimiento de traslación se tiene: $P = \frac{\Delta w}{\Delta t}$; ahora bien, se demostró que el trabajo es: $\Delta w = \tau \Delta \theta$; por tanto, al remplazar en la ecuación de potencia, se tiene:

$$P = \frac{\tau \Delta \theta}{\Delta t}.$$

Además, $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega$ es la velocidad angular; por tanto, la potencia queda:

$$P = \tau \omega \quad (5.15).$$

La potencia para el movimiento de rotación es torque por velocidad angular.

Ejemplos.

1. En un disco de 1 kg de masa y 2 m de radio, al que se le aplica una fuerza de 10 N durante 5 seg , ¿cuál es la aceleración angular, el desplazamiento y la velocidad angular?

Solución.

a) Como $\tau = I\alpha$, entonces: $\alpha = \frac{\tau}{I}$; además, $\tau = F r$, de modo que, al remplazar, se tiene:

$$\alpha = \frac{F r}{\frac{1}{2} m r^2}$$

$$\alpha = \frac{(2m)(10N)}{(1kgm)(2m)}$$

$$\alpha = 10rad / seg$$

b) Desplazamiento.

A partir de la ecuación cinemática del movimiento de rotación, se tiene: $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$; entonces, al remplazar se tiene:

$$\theta = \frac{1}{2} (10rad / seg)(5seg)^2$$

$$\theta = 125rad$$

c) Velocidad angular final. A partir de la ecuación cinemática para el movimiento de rotación, se tiene: $2\alpha\theta = w^2$; al remplazar valores, se tiene:

$$w = \sqrt{2\alpha\theta}$$

$$w = \sqrt{2(10rad / seg)(125rad)}$$

$$w = 50rad / seg$$

d) Energía cinética. A partir de la expresión de energía cinética para el movimiento de rotación, es:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) (50 \text{ rad / seg})^2$$

$$E_k = 2500 \text{ julios}$$

5.8 Energía de traslación y rotación

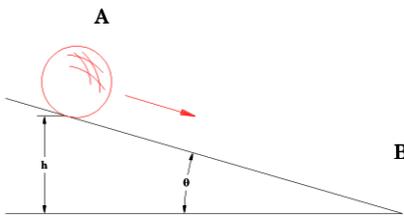


Fig. 5.18. Esfera que rueda por un plano inclinado.

Esta energía se acerca más a la realidad de la energía que tiene una llanta cuando rueda sobre una superficie cualquiera, pues, en este caso, la rueda tiene energía cinética de rotación; además, tiene

energía cinética de traslación, en el caso de una esfera que rueda cuesta abajo de un plano inclinado, tal como se ve en la Fig. 5.18, después de haber salido desde una altura h .

Por conservación de la energía, se tiene:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Para que se pudiera encontrar la velocidad final al terminar la rampa, se tiene:

$$\omega = \frac{v}{r}, \text{ y si se trata de una esfera, entonces el}$$

momentum de inercia es: $I = \frac{2}{5} mr^2$; por tanto, al remplazar,

se tiene:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Capítulo 6

Gravitación universal



Fuente: <https://pixabay.com/hu/photos/hely-bolyg%C3%B3-f%C3%B6ld-p%C3%A1lya-%C3%A9-g-1201086/>

6.1 Introducción

Miles de años habían pasado desde cuando el hombre de Mesopotamia, o quizá antes, se preguntará sobre la naturaleza que lo rodeaba; en las noches oscuras libres de nubes, vio figuras de animales, que se formaban con el inconmensurable número de estrellas y así las bautizaron, de esta forma surgió el Zodíaco; bautizaron también la gran mancha lechosa, a la que le dieron el nombre de Vía Láctea (camino de leche).

Sin tener otra respuesta más que su propia imaginación, creyeron en dioses, con lo cual se inició el camino de las religiones: hubo un dios para cada circunstancia natural; así, por ejemplo, a los fenómenos del aire los relacionaron con el dios Eolo, el fuego lo representaba el dios Hefestos, etc.

Con el transcurrir del tiempo, distinguieron entre planetas y estrellas, a los que les dieron el nombre de: Sol, Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, a los que consideraron en rotación alrededor de la tierra junto con las estrellas y todo cuerpo celeste que se avistaba en el firmamento; era prácticamente un mandato religioso; sin embargo, Heráclito de Ponto (440 a. C.) y Aristarco de Samos (310-280 a. C.), antiguos griegos, lanzaron la idea de ubicar al sol en el centro y a los



Fig. 6.1. Esfera armilar del año 1200.
Fuente: Landmark (s.f.).

planetas girando a su alrededor; fue la primera vez en la Historia de la humanidad en que se planteó un sistema heliocéntrico, pero, ante creencias y fanatismos filosóficos, la idea no prosperó y solo fue una opinión.

Cuando los conocimientos científicos habían llegado hasta Ptolomeo (150 d. C.) parecía estar todo claro; solo había que mejorar y tener calendarios más exactos para poder predecir los eclipses de Sol y de Luna; así surgió el calendario Juliano (40 a. C.); sin embargo, a partir del movimiento planetario, en especial el movimiento de Marte, pues al observarlo a lo largo de un año, se puede apreciar que, en ese movimiento, el planeta en algún momento empieza a retroceder por unos días y luego recupera su avanzada, los modelos mecánicos de esferas armilares muy complejas lograban reproducir de forma aproximada el movimiento planetario y solar, sin embargo este sistema permitía visualizar el movimiento geocéntrico del sol y de los planetas, el sistema cada vez se tornaba más complejo, hasta el punto de tener más de 48 esferas concéntricas (Fig. 6.1).

Hubo que esperar a Copérnico (1473-1543) para que volviera a proponer el modelo heliocéntrico, con el cual fue mucho más sencillo entender el movimiento retrógrado del planeta Marte y demás movimientos celestes; en seguida, en 1583, se inició el cambio del calendario juliano al calendario gregoriano, mucho más preciso y actual calendario que se maneja en todo el mundo (Fig. 6.2).

Para saldar las dificultades que empezaron a presentarse por las creencias y los nuevos vientos de la ciencia, Tycho Brahe (1546-1601), después de publicar la observación de lo que hoy sería la primera supernova en el cielo de Casiopea, propuso un nuevo modelo planetario para saldar las diferencias, una combinación del sistema geocéntrico y heliocéntrico, en que el sol es el centro para la rotación de los planetas, pero este, a su

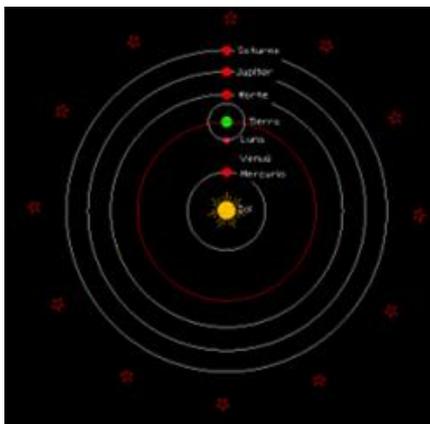


Fig. 6.2. Sistema planetario de Copérnico.

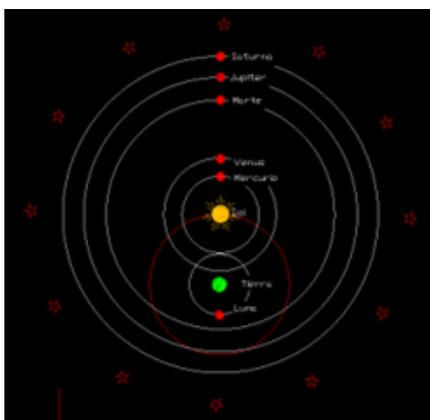


Fig. 6.3. Sistema planetario de Tycho Brahe.

vez, rota en torno a la tierra, como se puede ver en la Fig. 6.3: aquí la luna y el sol orbitan directamente en torno a la tierra y, para comprobar su sistema, decide construir el mayor observatorio astronómico de la época en la Isla Hveen, con cuadrantes muy grandes, lo que le permitió efectuar las mejores observaciones, con lo cual pudo corregir los datos con los que se hacían los cálculos; a su grupo de colaboradores llegó un joven matemático muy juicioso, Johannes Kepler (1531-1630), a quien, a la muerte de Brahe, la familia de este decidió que debería continuar con la obra.

Kepler, seguidor de Ptolomeo y respetuoso con la filosofía de Platón, estaba convencido de que, por fin, podría decir quién tenía la verdad; sin embargo, fiel a los resultados obtenidos en sus cálculos, descubrió algo sorprendente.

6.2 Leyes de Kepler

Estas se consideran que son leyes experimentales, pues quien quisiera y cuando pudiera, las podría deducir tras tener

datos de por lo menos un año de observación; en el caso de Kepler, fueron muchos datos de varios años los que analizó y encontró: en primer lugar, se dio cuenta de que las órbitas de los planetas no son circulares; por tanto, se alejaba de los postulados de Platón y, en su lugar, esas órbitas son elípticas.

Observó, casi como conclusión de la primera, que la línea que une al sol con los planetas barre áreas iguales en tiempos iguales y, si la órbita es una elipse, el planeta no conserva la misma velocidad todo el tiempo, otro paradigma en que se rompe con la teoría del griego Platón.

Y, por último, encuentra una relación matemática en la que el cuadrado del periodo de rotación es proporcional al cubo de la distancia; así que esto es un sistema en que el periodo de un planeta se puede calcular a partir de conocer las distancias y el periodo de otro.

De esta forma, Kepler publicó su trabajo en 1609, en la obra *Astronomía nova*. A partir de allí:

1) El movimiento de los planetas es periódico y se efectúa en órbitas elípticas en las que el sol ocupa uno de los focos de la elipse.

2) El radio vector de un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales en cualquier parte de la órbita. (El área comprendida entre los puntos ABO es igual al área CDO) de la Fig. 6.4.

3) El cuadrado del periodo de rotación planetaria es

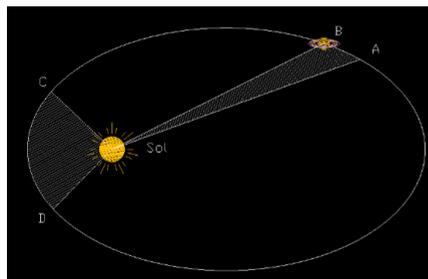


Fig. 6.4. Órbita elíptica y áreas iguales en tiempos iguales.

proporcional al cubo de la distancia sol-planeta; esto es:
 $T^2 = k r^3$.

Un ejemplo de esta tercera Ley es: El periodo de rotación de la Tierra es: 365.25 días; la distancia de la tierra al Sol es: 149.5 millones de kilómetros; el periodo de rotación de Marte es 687 días; la distancia del Sol a Marte es 227.9 millones de kilómetros, de modo que:

la tercera Ley se puede escribir como: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$; entonces,

se tiene:

$$\frac{365.25^2}{687^2} = \frac{149.5^3}{227.9^3}$$

$$0.283 = 0.282$$

Como se puede ver, la relación entre los cuadrados de los periodos de rotación entre la Tierra y Marte es igual al cociente entre los cubos de las distancias Tierra-Marte. De esta forma se confirma que esto es un ***sistema planetario***.

Ahora queda planteada una pregunta: ¿por qué los planetas giran alrededor del Sol y la Luna gira alrededor de la Tierra?

6.3 Concepto de fuerza a distancia

El concepto de fuerza de contacto se había planteado desde Aristóteles y no había cabida para fuerzas en el espacio; los planetas y demás cuerpos se movían, porque ese era el movimiento natural; cualquier cosa que se le hiciera mover debía haberse sometido a un movimiento violento.

William Gilbert (1540-1603) se dedicó a estudiar los fenómenos del magnetismo y encontró el fenómeno de atracción y repulsión de los imanes a distancia; es decir, la existencia de una fuerza a distancia, con lo cual se rompía otro paradigma de la Física de Aristóteles; más aún, propuso que los cuerpos caían debido a la atracción de un gran imán que existe en el interior de la tierra, o algo similar; además, logró medir que esa fuerza disminuye con el cuadrado de la distancia.

6.4 Ley de la Gravitación Universal

Sir Isaac Newton (1642-1723), tras postular las tres leyes de la dinámica: Inercia, Fuerza, Acción-reacción, tímidamente propuso que existía una fuerza a distancia proporcional con el producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado

de la distancia: $F_g = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (1665); esta Ley se aplicó para

calcular la órbita del cometa Halley por Newton y Edmund Halley, quien, a su vez, fue el promotor y financiador para la publicación de los *Principia*, de Newton; desde entonces, la Ley se ha aplicado para calcular órbitas, descubrir otros planetas y responder a muchas preguntas sobre la mecánica celeste; sin embargo, en su momento se presentaba una gran discusión entre Robert Hooke y Christopher Wren, quienes, por separado, habían combinado la tercera Ley de Kepler $T^2 = kr^3$ para órbitas circulares y concluir que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Una vez Christiaan Huygens demostró que la aceleración centrípeta se puede

escribir como: $a = w^2 r$, entonces la fuerza será: $F = mw^2 r$. Ahora bien, la velocidad angular en función del periodo se

puede escribir como: $w = \frac{2\pi}{T}$; por tanto, la fuerza queda:

$F = m \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) r$; al combinar con la Ley de Kepler, se tiene:

$F = m \left(\frac{4\pi^2}{kr^3} \right) r$, con lo cual se llega a: $F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$, de modo que, en efecto, la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia: $f \propto \frac{1}{r^2}$, razón por la cual Hooke reclamó la paternidad de la Ley de gravitación universal, pero, al final, Newton la publicó, y se lo considera el descubridor de la ley de la Gravitación universal.

Al considerar dos cuerpos puntiformes que se encuentran separados por una distancia r , se genera entre ellos una fuerza de atracción que resulta proporcional al producto entre las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (6.1).$$

Con la tercera Ley de Newton, la fuerza es la misma, si se mide de 1 a 2 o de 2 a 1, siempre y cuando siga la línea de acción entre los dos cuerpos.

La constante de proporcionalidad γ se conoce como constante de Cavendish; en 1798, Henry Cavendish inventó una balanza de torsión, con la que pudo calcular el valor:

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Principio de superposición

La fuerza neta gravitacional que experimenta un cuerpo en el espacio es el resultado de todas las fuerzas existentes debido a la fuerza gravitacional de otros cuerpos (Fig. 6.5 y 6.6), de tal forma que se puede escribir como:

$$F = F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1n} \quad (6.2).$$

De modo que la fuerza resultante sobre el objeto es la resultante de la suma vectorial de la interacción por parejas.

Ejemplo.

Supóngase que hay tres grandes cuerpos que actúan sobre un cuarto, al que habrá que calcular la fuerza neta. Supóngase que las fuerzas existentes son:

$F_{12} = 5.6 \times 10^{-10} \text{ N}$, $F_{13} = 6 \times 10^{-10} \text{ N}$ y $F_{14} = 3.5 \times 10^{-10} \text{ N}$; al

llevar a coincidir en un sistema cartesiano la distribución de las fuerzas, quedaría:

Solución

Como si fuera un sistema

inercial $\sum_{i=1}^n F_i = 0$, una vez

localizadas en el sistema cartesiano, se tiene:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0; \quad \text{por tanto:}$$

$$F_x + F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0; \text{ según}$$

la Fig. 6.6, se tiene:

$$F_x = F_{13x} - F_{12x}.$$

Al remplazar, se tiene:

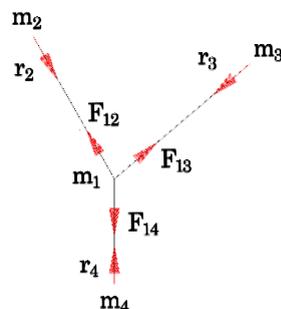


Fig. 6.5. Esquema de fuerzas gravitacionales.

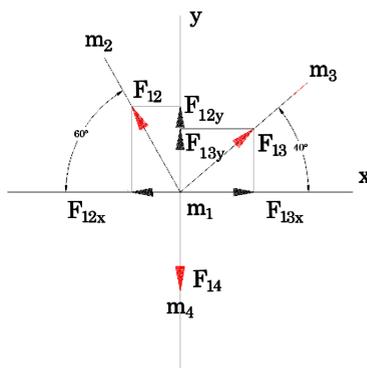


Fig. 6.6. Esquema de las componentes de las fuerzas gravitacionales.

$$F_x = F_{13}\text{Cos}40 - F_{12}\text{Cos}60$$

$$F_x = (6 \times 10^{-10} \text{ N}) \times 0.77 - (5.5 \times 10^{-10} \text{ N}) \times 0.5$$

$$F_x = 1.87 \times 10^{-10} \text{ N}$$

De igual forma, para el eje y : $F_y = F_{12y} + F_{13y} - F_{14y}$; al remplazar los valores, se tiene:

$$F_y = (5.5 \times 10^{-10} \text{ N})\text{Sen}60 + (6 \times 10^{-10} \text{ N})\text{Sen}40 - (3.5 \times 10^{-10} \text{ N})$$

$$F_y = 5.12 \times 10^{-10} \text{ N}$$

La magnitud de la fuerza se dará por: $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$; entonces, al remplazar los valores, se tiene:

$$f = \sqrt{1.87^2 + 5.12^2} \times 10^{-10} \text{ N}$$

$$f = 5.45 \times 10^{-10} \text{ N}$$

Para calcular la dirección, se tiene: $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{f_y}{f_x}$; al remplazar los valores, se tiene:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{5.45}{1.87}$$

$$\theta = 69^\circ 56'$$

Y se encuentra dirigida hacia el primer cuadrante.

6.5 Aceleración gravitacional o gravedad

La segunda Ley de la dinámica establece que la fuerza para masas constantes se puede escribir como: $F = ma$; para este caso, la aceleración será la gravedad; por tanto, la fuerza será: $F = -mg$, que se definía como peso del cuerpo. Así que

cuando un cuerpo cae, es porque pesa y, de acuerdo con la tercera Ley de Newton, también hay una fuerza que el cuerpo, cuando cae, atrae a la tierra, como se puede ver en la Fig. 6.7. Ahora bien, si la tierra no se mueve en la práctica, se debe al gran tamaño, comparado con el cuerpo; si este creciera tanto como la tierra, pues, entonces, los dos se moverían igual

De tal forma que al peso $F_g = -m_1g$ habrá que igualarlo con la fuerza gravitacional ya conocida:

$F = \gamma \frac{m_1 M_T}{r^2}$; al igualar, se tiene:

$$\gamma \frac{m_1 M_T}{r^2} = -m_1 g .$$

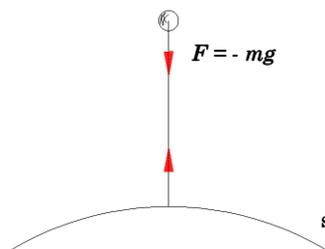


Fig. 6.7 Caída de un cuerpo libre

Después de cancelar m_1 , se puede despejar la gravedad; esto es:

$$g = -\lambda \frac{M_T}{r^2} \quad (6.3).$$

Y, como se puede apreciar, la gravedad disminuye con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra. En promedio, se considera que el radio de la tierra es: $r = 6371 \text{ Km}$; así que, para este valor, la gravedad es:

$$g = -\gamma \frac{M}{r^2}$$

$$g = 6.67 \times 10^{-11} \frac{5.98 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6)^2}$$

$$g = -9.82 \frac{m}{s^2}$$

Para cálculos rápidos, los ingenieros pueden utilizar una fórmula con la que se puede estimar la gravedad a cualquier altura:

$$g_h = g_0 \left(\frac{r_e}{r_e + h} \right)^2 \quad (6.4),$$

donde:

r_e es el radio medio de la tierra 6371 Km

h es la altura del lugar donde se quiere calcular la gravedad

g_0 es la gravedad al nivel del mar.

Ejemplo.

Calcular la gravedad a una altura sobre el nivel del mar de 2525 m .

Solución.

Simplemente, al remplazar en la ecuación (6.4):

$$g_h = 9.8 \left(\frac{6371000}{6371000 + 2525} \right)^2$$
$$g_h = 9.79 \text{ m/s}^2$$

Este valor corresponde a la gravedad en la ciudad de San Juan de Pasto.

Al considerarse una esfera homogénea en el centro de la esfera, la gravedad vale cero, debido a que todos los vectores se anulan.

En el caso de la tierra, que no es una esfera homogénea, ni de forma ni de material, no se puede referir a un solo centro, sino existen: el centro geométrico, el centro de gravedad, y el centro de masa, tres puntos que no coinciden; esta es la razón de la deriva continental (desplazamiento del continente americano hacia el occidente y el continente africano hacia el oriente) causante de la formación de la cordillera americana; cada vez que hay un micro desplazamiento, en la superficie se presentan terremotos; a nivel de todo el planeta, a diario se presentan temblores de todas las magnitudes.

Por tanto, debido a que la tierra no es una esfera perfecta, pues es achatada en los polos y lo contrario en el ecuador, entonces la gravedad, por este hecho, cambia de valor; además, si se considera la aceleración centrífuga, que es mayor en el ecuador y nula en los polos, los cálculos cuidadosos han mostrado que a la gravedad, al tomar en cuenta solo este factor de la latitud, se la puede expresar como:

$$g_{\varphi} = 9.780327(1 + 0.0053024\text{Sen}^2\varphi - 0.0000058\text{Sen}^22\varphi) \frac{m}{s^2} \quad (6.5).$$

Con esta expresión, se han podido calcular los valores de la gravedad en los paralelos; como se muestra en la Tabla 6.1, esta es la variación del valor de la gravedad a medida que cambia el ángulo del paralelo.

PARALELO	GRAVEDAD m/s ²
20	9.7863
40	9.8016
60	9.8191
80	9.8306
90	9.8321

Tabla 6.1. Valor de la gravedad de acuerdo al ángulo.

Resulta mucho más complicado cuando se toma en cuenta la posición de la Luna, pues el valor de la gravedad en la superficie terrestre también

cambia y esta es la razón de existencia de las mareas, que se presentan en todos los mares, ya que prácticamente el agua sigue el movimiento de la luna; por tanto, el mar sube cuando

la Luna esta encima del lugar y, en el lado opuesto de la marea, por estabilidad, también se levanta, pero en menor cantidad, para formar la marea baja y la marea alta una vez cada 12 horas.

Las Oficinas de Pesas y Medidas de los diferentes países conocen sobre estos cambios, con los cuales pueden calibrar las máquinas, sobre todo aquellas para pesar materiales, combustibles, alimentos, etc. y es de su responsabilidad mantener el control y calibración para todo tiempo.

6.6 Energía potencial gravitacional

Cuando se estudió la energía, se concluyó que la energía potencial es: $U = mgh$. Ahora bien, una diferencia de trabajo es igual a un diferencial de energía potencial; esto es:

$$dw = du_p = Fdr .$$

En este caso, la fuerza corresponde a la fuerza gravitacional $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$; por tanto, al remplazarla, se tiene:

$$dU = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$U = \gamma m_1 m_2 \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$U = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right)$$

$$U = \gamma m_1 m_2 \left(0 - \frac{1}{r} \right)$$

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (6.6)$$

Entonces, la energía potencial es inversa con la distancia y directamente proporcional al producto de las masas; ahora bien, el radio es función de x, y, z ; por tanto, se expresa como:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; por ende, la energía potencial se escribe:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

con lo cual se puede decir que hay una energía potencial para cada eje, así:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \gamma m_1 m_2 \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \gamma m_1 m_2 \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \gamma m_1 m_2 \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

A su vez, estas expresiones pueden quedar como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma m_1 m_2 \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \gamma m_1 m_2 \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma m_1 m_2 \frac{z}{r^3}$$

Ahora bien, se define gradiente de la energía potencial a:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U \quad (6.7),$$

donde la expresión ΔU se lee como gradiente de la energía potencial, lo mismo que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) U,$$

donde al operador de derivadas parciales $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ se lo denomina operador Nabla. Así que el operador Nabla producto escalar con la energía potencial, se define como gradiente de la energía potencial.

Entonces:

$$\nabla U = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\Delta U = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Así, lo que se tiene es que el gradiente de la energía potencial es la fuerza gravitacional:

$$\nabla U = -F \quad (6.8).$$

Esto muestra que la fuerza gravitacional es una fuerza conservativa generada por cuerpos homogéneos; sin embargo, la tierra no lo es, pero, para grandes distancias, los cuerpos se comportan como si fueran cuerpos puntiformes homogéneos; este es el caso de la gravedad del Sol en relación con los planetas y demás; cada estrella, que solo es un pequeño punto

en el universo difunde su fuerza de gravedad a distancia, con lo que atrae a todo lo que se encuentre a su alrededor; aquello que cae en dirección a la estrella, pues no tendrá más opción que caer, pero, en dicha complejidad del movimiento, habrá algunos que caen y forman ángulos de inclinación, con lo cual podrán escapar a la caída directa; en consecuencia, el objeto entraría a una órbita cerrada o abierta, según fuese el caso: si es cerrada, el objeto orbitará por siempre, como si se tratara de una caída sin fin.

6.7 Órbitas planetarias y de satélites

Cuando se lanzan objetos verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial v_0 , se espera que el cuerpo vuelva a caer tiempo después, tiempo que puede ser grande cuanto mayor sea la velocidad inicial, lo que indica que, entre mayor velocidad, el cuerpo puede llegar a mayor altura y, por tanto, habrá mayor tiempo de vuelo; se pregunta ¿cuál será la velocidad en la que el cuerpo se tarde tanto en regresar, que prácticamente su retorno se torna eterno?: a esta velocidad se la denomina **velocidad de escape**, pues el cuerpo ha escapado de la acción gravitacional terrestre.

Para el caso de la acción terrestre, la velocidad de escape se puede calcular con el principio de la conservación de la energía: energía cinética y energía potencial gravitacional. Así:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mM}{r} \quad (6.9).$$

De donde se puede despejar la velocidad y se tiene: $v^2 = \frac{2\gamma M}{r}$; ahora, al remplazar los valores de M , r , γ , se tiene:

$$v^2 = \frac{(6.62 \times 10^{-11} \frac{m^2 N}{kg^2})(5.98 \times 10^{24} Kg)}{6.37 \times 10^6 m}$$

$$v = 11.13 \frac{km}{s}$$

De modo que, para velocidades mayores a este valor, el cuerpo no tiene retorno; parece ser pequeño, pero son *11.13* Km los que debe recorrer el objeto en un solo segundo; resulta una velocidad tan grande, que no hay un cañón que pudiera disparar proyectiles con esta velocidad; la mayor velocidad alcanzada se ha calculado en *2500m/s* o *2.5 Km/s*, que corresponde a *7.4* veces la velocidad del sonido, y la velocidad de escape está calculándose en casi *33* veces la velocidad del sonido; es decir, *33* Mach. Debe tenerse en cuenta que esto se ha calculado sin tener presente el rozamiento con el aire.

Ahora bien, se supone que en vez de que el disparo fuese vertical, se puede pensar que tuviera un ángulo de inclinación, lo que de inmediato se convierte en un tiro parabólico, como se lo denominó en el Capítulo 2; el cuerpo llega hasta cierta altura y empieza a caer, por supuesto lejos de considerar el rozamiento con el aire.

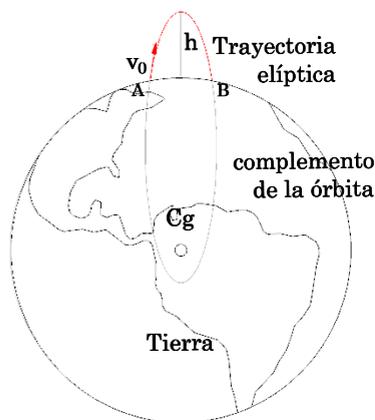


Fig. 6.8. Órbita elíptica en un lanzamiento de un proyectil transoceánico.

Así, el proyectil tiene una altura máxima y un alcance horizontal; la trayectoria se consideró una parábola.

Ahora bien, si al proyectil se lo dota de mayor velocidad, sin considerar el rozamiento con el aire, se tiene que el proyectil adquiere mayor altura y mayor alcance;

además, se debe considerar que, para un disparo de este tipo, la gravedad no es constante y varía con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra, como ya se ha visto; en este caso, la trayectoria ya no es una parábola, como se vio en el Capítulo 2, sino una *elipse*, como se ve en la Fig. 6.8, donde uno de los focos es el centro de gravedad del planeta.

Pero, si aún se sigue aumentando la velocidad, se alcanza una elipse más abierta, más grande, que puede estar hipotéticamente por dentro del planeta, con lo cual el objeto lanzado caerá a la superficie y, si la velocidad se aumenta, la trayectoria estará circunnavegando a la

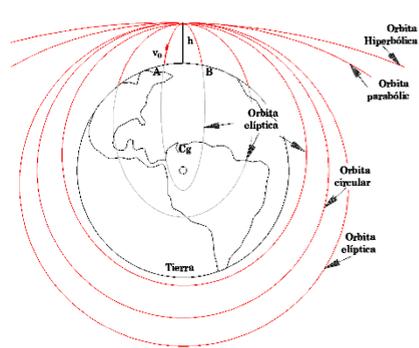


Fig. 6.9. Órbitas de acuerdo a la velocidad de lanzamiento del proyectil.

esfera del planeta; en este caso, el proyectil ya no caerá a la tierra, pero, si aún se sigue aumentando la velocidad inicial del objeto, llegará un momento cuando los dos ejes de la elipse son iguales y se convierte en una circunferencia; el cuerpo ha entrado en una órbita circular; aquí hay un gran campo para explorar órbitas elípticas hasta llegar a un límite, en que la órbita se convierte en una parábola; en este caso, el objeto no tendrá regreso; de igual forma ocurre si la velocidad inicial del objeto es tal que la órbita se convierte en una hipérbola y, al igual que en el caso anterior, son órbitas por una sola vez; es decir, no habrá retorno, tal como se puede ver en los diferentes tipos de órbitas del proyectil en la Fig. 6.9.

En la realidad, resulta un problema muy complejo poder determinar la trayectoria orbital de los planetas y satélites, asunto que queda por fuera de estas notas; sin embargo,

considerar órbitas circulares es mucho más sencillo, pero el problema es ideal.

Por ahora, considérese la energía cinética y potencial que se presenta en una órbita:

$$U = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} = cte.$$

Como el planeta o satélite, además de la traslación, rota sobre sí mismo, entonces:

$$U = \frac{1}{2}m(v^2 + rw^2) - \gamma \frac{mM}{r} = cte.$$

Por otra parte, el momentum angular se puede escribir como: $L = r \times p = r \times mv$; ahora bien, $v = v_r i_r + r w i_\theta$; al remplazarlo, se tiene: $L = r \times m(v_r i_r + r w i_\theta)$.

Por tanto, el vector unitario i_r está en la dirección del vector r y, por ende, el producto vectorial $r \times i_r = 0$; por ello: $L = mr^2 w i_\theta$; este vector, que es normal al plano de rotación, se conserva constante en magnitud y dirección en todo tiempo; la velocidad angular no necesariamente permanecerá constante, puede variar cuando varíe el radio, así: $w = \frac{L}{mr^2}$, donde L y m son constantes, y puede variar inversamente con el cuadrado del radio. Si se sustituye la expresión, se tiene:

$$U = \frac{1}{2}m \left(v_r^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - \gamma \frac{mM}{r}.$$

Esto se puede escribir como:

$$U - \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r}.$$

En esta expresión U y L son constantes; por tanto, quedan por variar v_r y r ; al efectuar una simplificación como: $a = \frac{L^2}{2m}$ y $b = \gamma mM$ y al sustituir, se tiene:

$$U - \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} \quad (6.10).$$

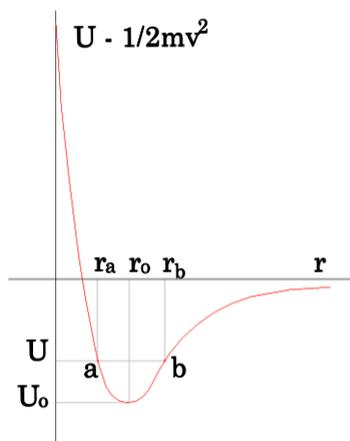


Fig. 6.10. Trayectorias orbitales permitidas y no permitidas.

Como a y b son constantes, entonces las funciones $\frac{a}{r^2}$ y $\frac{b}{r}$ se pueden graficar en función de r ; tal como se puede ver en la Fig. 6.10, se tiene un *pozo de potencial*, donde r_0 es el punto estable.

6.8 Secciones cónicas

En la Fig. 6.11 se tiene un cono doble, resultado de llevar a girar a una recta alrededor de la línea axial del eje, de tal modo que una serie de planos cortan o se intersecan con el cono doble; estos planos son 1, 2, 3, y 4; las intersecciones de estos planos generan las diferentes figuras geométricas, así:

Sección circular

Cuando la intersección del plano 1 con el cono, donde el eje del cono es normal al plano, se tiene una circunferencia.

Sección elíptica

Se da en la intersección del plano 2 con el cono; con un ángulo que fuese menor a 90° y mayor a cero, se desarrolla una elipse.

Sección parabólica

Si la intersección del plano 3 con el cono se presenta de tal forma que el plano fuese paralelo a la generatriz del cono.

Sección hiperbólica

Se da cuando se da la intersección del plano 4 con partes del cono, de tal modo que el plano es paralelo con el eje axial del cono.

Construcción de las secciones cónicas.

Circunferencia

Para construir una circunferencia, es muy sencillo: con un compás o simplemente una cuerda, con un punto fijo como centro y a cierta distancia, asegurar un lapicero y rayar a lo que dé el radio de la circunferencia. Responde a la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (6.11).$$

Para dibujar una elipse, se necesitan dos puntos fijos; es decir, por los focos F y F' se pasa un cordón cerrado; en el punto P está el bolígrafo o cualquier sistema de trazado; a continuación, se hará el trazo, que sigue las distancias dadas por $F'P$ y FP , como se puede ver en la Fig. 6.12.

Forma general de estudiar las cónicas

Es posible definir a la elipse, la parábola y la hipérbola en términos de distancia a un punto y una recta fija, de modo que una función cónica es un lugar geométrico formado por los

puntos del plano H, de forma tal que el cociente de las distancias a un punto y una recta fijas es constante. El punto fijo se denominará foco de la cónica y la recta fija directriz; ahora bien, al cociente, que es constante, se lo denomina excentricidad y se representa como se puede ver en la Fig. 6.13.

Como la relación $\frac{BP}{AP}$ es la denominada excentricidad e , entonces:

$$BP^2 = (x - 2p)^2 + y^2$$

$$BP = \sqrt{(x - 2p)^2 + y^2}$$

De acuerdo a la Fig. 6.13, se puede decir:

$$\frac{\sqrt{(x - 2p)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

(6.12).

A partir de lo cual, se puede desarrollar:

$$(x - 2p)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

$$x^2(1 - e^2) + 4p(p - 1) + y^2 = 0$$

$$x^2(1 - e^2) - 4px + 4p^2 y^2 = 0$$

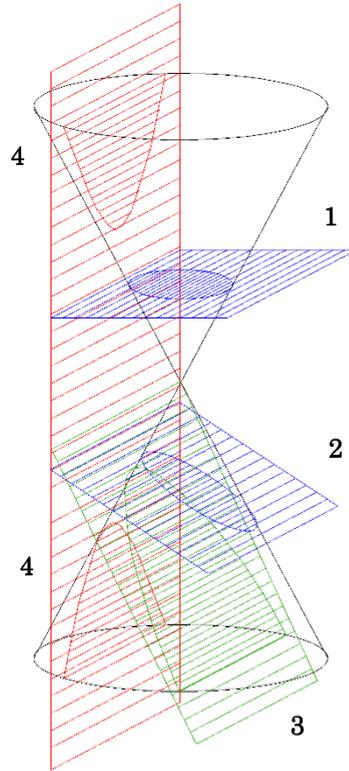


Fig. 6.11. Secciones cónicas. 1) circunferencia, 2) elipse, 3) parábola, 4) hipérbola.

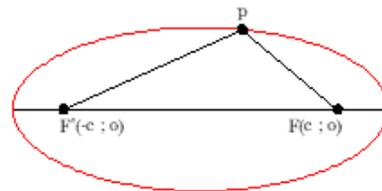
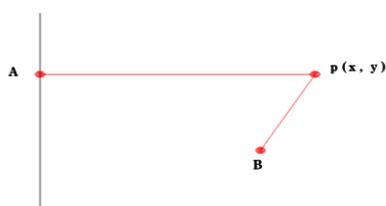


Fig. 6.11. Secciones cónicas. 1) circunferencia, 2) elipse, 3) parábola, 4) hipérbola.

Sobre esta última expresión, se deben efectuar estas consideraciones:

1. Si $e=1$, entonces la ecuación $x^2(1-e^2)-4px+4p^2y^2=0$ queda:



$$-4px + 4p^2 + y^2 = 0$$

$$y^2 = 4p(x - p)$$

Al efectuar una sustitución donde: $x' = x - p$ y $y' = y$

Fig. 6.13. Condiciones de excentricidad. Al final, se tiene:

$$y'^2 = 4px'^2 \quad (6.13).$$

Esta ecuación corresponde a una parábola.

2. Si $0 \leq e \leq 1$, al sustituir en la expresión $x^2(1-e^2)-4px+4p^2y^2=0$, y al simplificar se tiene:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (6.14).$$

Esta ecuación corresponde a una elipse.

3. Si $e \geq 1$, al sustituir en la ecuación general $x^2(1-e^2)-4px+4p^2y^2=0$, se tiene:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (6.15).$$

Esta ecuación corresponde a una hipérbola.

Bajo los tres considerandos se generan las órbitas planetarias y satelitales.

6.9 Órbitas planetarias y de satélites

Órbita circular

Por facilidad, se considera que el satélite va a orbitar a la tierra en órbita circular; ahora, se busca ¿cuál es la condición para que el satélite se encuentre en una órbita circular?

Como se puede ver en la Fig. 6.14, el satélite se halla frente a dos fuerzas: por una parte, la acción de la fuerza gravitacional y, por otra, hacia fuera, la fuerza centrípeta (por dirigirse hacia afuera se la denominará centrífuga); esto es:

$$F_c - F_g = 0 ,$$

que es una condición de equilibrio estable; ahora, la fuerza centrípeta es: $F_c = mw^2r$ y, por otra parte, la fuerza gravitacional.

Entonces:

$$mw^2r = \gamma \frac{mM}{r^2} .$$

De tal modo que la velocidad angular es:

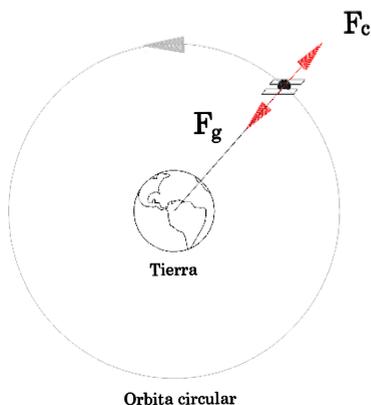


Fig. 6.14. Órbita circular de la estación espacial

$$w = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \quad (6.16).$$



Fig. 6.15. Estación espacial orbitando a la tierra. Fuente: Shutterstock, fotografías libres.

Ejemplo.

Considérese el caso de la estación espacial que, generalmente, se encuentra orbitando a una altura de 400Km sobre el nivel del mar; entonces, ¿cuáles deben ser la velocidad angular, el periodo y la velocidad lineal? (Fig. 6.15).

Solución.

El radio de la tierra es 6371Km ; por tanto, la estación está a una distancia del centro de la tierra de $r = 6771000\text{ m}$; la masa de la tierra es:

$$M = 5.98 \times 10^{24}\text{ kg} \text{ y } \gamma = 6.67 \times 10^{-11}\text{ m}^2\text{ N kg}^{-2}.$$

$$w = \frac{1}{6.77 \times 10^6} \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{6.77 \times 10^6}}$$

$$w = 0.001134 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Debido a que el periodo se define como: $T = \frac{2\pi}{w}$, entonces, al remplazar, se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{0.001134}$$

$$T = 5538.98 \text{ seg}$$

$$T = 96.31 \text{ min}$$

$$T = 1.53 \text{ Horas}$$

Al viajar a una velocidad lineal de:

$$v = wr$$

$$v = (0.001134)(6731)$$

$$v = 7.67 \text{ km/s}$$

Este es un valor muy aproximado a los reales, debido a que se está considerando una órbita circular perfecta.

6.10 Gravedad cero entre la luna y la tierra

Como la gravedad disminuye con la altura o con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra, de acuerdo a la Fig. 6.16, se ve cómo va disminuyendo hasta el punto donde prácticamente se torna cero. Sin embargo, esto no es necesario; si se efectúa el cálculo a lo largo de la línea de acción entre tierra y luna, allí actúan las dos gravedades de la tierra y de la luna, punto en donde se anulan y, por tanto, se deberá encontrar dicho punto.

De acuerdo a la Fig. 6.17, se puede ver que hay un punto en que las dos gravedades, tanto de la tierra como de la luna, se suman, pero dado el sentido contrario se anulan, por lo que se obtiene como resultado gravedad cero;

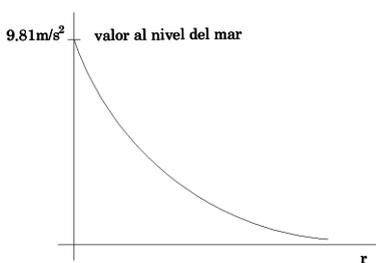


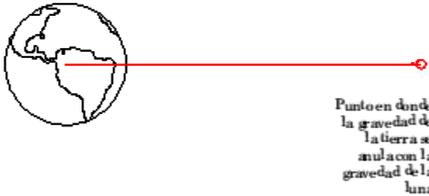
Fig. 6.16. Decadencia de la gravedad con el cuadrado de la distancia.

para encontrarlo, se igualarán las dos fuerzas de gravedad; esto es:

$$F_{gT} = F_{gL}$$

$$\gamma \frac{M_T}{r_T^2} = \gamma \frac{M_L}{r_L^2}$$

$$M_T r_L^2 = M_L r_T^2$$



Por otra parte, en la Fig., se puede ver que $s = r_T + r_L$; es decir que $r_T = s - r_L$; por tanto, al remplazar, se tiene:

Fig. 6.17 Línea de acción entre la tierra y la luna en donde está el punto muerto de la gravedad.

$$(s - r_L)^2 = \frac{M_T}{M_L} r_L^2$$

$$(M_T - M_L)r_L^2 + 2sM_L r_L - s^2 M_L = 0,$$

donde:

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kgm}$$

$$M_L = 0.073 \times 10^{24} \text{ kgm}$$

$$s = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

Al remplazar estos valores, se tiene que $r_L = 38.290 \text{ km}$, donde la acción del radio de la tierra es:

$$r_T = 384000 - 38400$$

$$r_T = 345.710 \text{ km}$$

Esto quiere decir que, en una línea de acción tierra-luna, a 345.000 kilómetros del centro de la tierra, la gravedad es nula.

6.11 Campo gravitacional

Cuando un objeto de masa M se encuentre a una distancia r de la tierra, experimenta una fuerza atractiva mg (peso) en cualquier lugar del espacio circundante de la tierra; los físicos plantean modelos matemáticos de esta singular cosa de la naturaleza a la que se denomina campo gravitacional: el valor de este campo se define por $g = \gamma \frac{M}{r^2}$, donde ya se ha dicho que la magnitud del vector disminuye con el cuadrado de la distancia y la dirección pasa por el centro de la tierra; en el universo, todo parece encontrarse organizado por esta propiedad intrínseca de la materia: la luna gira alrededor de la tierra una vez cada 28 días, que es como una caída libre continua; el sistema solar, formado por el Sol y 9 planetas, que están orbitando al Sol; a su vez, en la mayoría de los planetas hay satélites.

Ahora bien, el Sol, con sus planetas, satélites y cometas, responde a un campo gravitacional proveniente del centro de la galaxia, lo que lleva a que girase alrededor de este una vez cada 230.000 años, en un viaje a 828.000 Km/h (recuérdese que, en la Historia de la humanidad, solo se tienen registros desde hace 15.000 años), al igual como lo hacen los cien mil millones de estrellas, lo que significa que cada punto luminoso que se ve en el cielo oscuro, por más tenue que fuese, es una estrella de nuestra galaxia; la Vía Láctea siempre se acompañará de planetas; la galaxia más cercana a nosotros es Andrómeda, que se la conoce como M31; es posible verla a simple vista en las noches oscuras y limpias de humedad, cerca de la constelación de Pegaso.

De modo que, en el centro de la galaxia, hay una poderosa masa que produce fuerza gravitacional para mantener unida a la masa de estrellas; sin embargo, a la fecha, los físicos siguen buscando cuál es la naturaleza de la fuerza gravitacional; desde Newton, Einstein se ha preguntado: ¿qué origina que un cuerpo grande atraiga a otro?

Referencias

- Alonso, M. y Finn, E. J. (1970). *Física: Campos y Ondas* (Vol. 1). Fondo Educativo Interamericano.
- Amazon. (s.f.). *Escala de peso mecánico de alta precisión, para adultos, saludable, para baño, báscula retro para el hogar, antideslizante, gran área, resistente plataforma de metal de 264.6 lbs de capacidad, color azul.* <https://www.amazon.com/-/es/precisi%C3%B3n-saludable-antideslizante-resistente-plataforma/dp/B07K8JWQ9B>
- Benjismo89 (2008). *El ayuntamiento de Sèvres, Hauts-de-Seine, Francia.* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:S%C3%A8vres_-_Town_hall_-_2.jpg
- Berlina y Erhard Haus, L. (2016). *Imagen de Ascensores.* Pixabay. <https://pixabay.com/es/photos/ascensores-berlina-1598431/>
- Borowitz, S. y Bornstein, L. A. (1968). *A Contemporary View of Elementary Physics.* McGraw-Hill.
- Bronson, R. (1973). *Ecuaciones diferenciales modernas.* Serie Schaum. Mc Graw Hill.
- Bruno-Alfonso, A. y Florêncio, A. S. (2004). Uma discussão sobre as densidades de energia em ondas mecânicas unidimensionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(3), 247-250.
- Cabezos, P. (2017). *Torre Grisenda Bolonia* [Imagen]. https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Torre_Grisenda_Bolonia.jpg

- Cantabria. (2022). DGT pone en marcha una campaña autonómica de control y vigilancia de motocicletas. *Cantabria Noticias*.
<https://www.cantabriatv.es/articulo/actualidad/dgt-pone-marcha-campana-autonomica-control-vigilancia-motocicletas/20220521162028026515.html>
- Cat. (s.f.). *Tractor topador D6 empujando suciedad*.
https://www.cat.com/es_US/products/new/equipment/dozers/medium-dozers/15969751.html
- Consortio de ingeniería eléctrica. (2021). Central hidroeléctrica [Facebook]. <https://www.facebook.com/304540563780650/posts/755501628684539/>
- Corpus Danza. (2018). Margot Franch Collier de la Marliere - Optimist (XIII Concurso Nacional de Ballet/1 er lugar cat C) [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=r3gq9mbed40>
- Cromer, A. H. (1981). *Física para las ciencias de la vida y la salud*. Reverté.
- Díaz, J. L., Jiménez Moreno, J. M. y López Rodríguez, M. (1982). *La física en problemas. Las magnitudes físicas*. Alhambra.
- Evans, B. (s.f.). El sol siguió saliendo: recordando la misión no volada de Columbia, 35 años después. *Americaspace*.
<https://www.americaspace.com/2021/03/06/the-sun-kept-rising-remembering-columbias-unflown-mission-35-years-on/>
- Ferdinand, P. B. (1988). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática* (6ª ed.). Mc Graw Hill.

- Ferdinand P. B. (1988) *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica* (6ª ed.). Mc Graw Hill.
- Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, S. (1971). *Lecturas de física* (Vol. I). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, S. (1987). *Lecturas de física* (Vol. II). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Frish, S. y Timoreva, A. (s. f). *Curso de Física General* (Tomo I). MIR.
- Frish, S. y Timoreva, A. (1968). *Curso de Física General* (Tomo II). MIR.
- Frish, S. y Timoreva, A. (1977). *Curso de Física General* (Tomo III). MIR.
- Gente de cañaverál. (2016). *Piden el arreglo de las escaleras eléctricas.* <https://www.gentedecanaverál.com/2016/12/piden-el-arreglo-de-las-escaleras-electricas/>
- González Ibeas, J. (1974). *Introducción a la Física y biofísica.* Alhambra.
- Haslwanter, T. (2010). *Sistema vestibular.* <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VestibularSystem.png>
- Hauser, W. (1969) *Introducción a los principios de Mecánica.* UTEHA.
- Kohden, N. (s.f.). *Balístocardiógrafo.* <https://benthamopen.com/FULLTEXT/TOBEJ-4-201/FIGURE/F5/>

- Kok, A. (2007). *Pulpo vulgar*. Wikimedia Commons.
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Octopus3.jpg>
- Landau, L. y Ajieser, A. (1973). *Física General*. MIR.
- Landmark. (s.f.). *Esfera Armilar Tolomeo Brass*.
<https://www.landmark.com.ar/esfera-armilar-tolomeo-brass/p>
- León, F. (2018). Los trópicos se están ampliando. *Meteored*.
<https://www.tiempo.com/ram/465781/los-tropicos-se-estan-ampliando/>
- Lucero, E. (2015). *Libélula en vuelo* [Imagen].
<https://canonistasargentina.com/foro/index.php?threads/lib%C3%A9lula-en-vuelo.6807/>
- Maiztegui, A. y Sábato, J. A. (1974). *Introducción a la Física* (Tomos I). Kapelusz.
- Maiztegui, A. y Sábato, J. A. (1988). *Introducción a la Física* (Tomo II). Kapelusz.
- McKelvey, J. P. y Grotch, H. (1981) *Física para Ciencias e Ingeniería* (Tomo I). Harla.
- Mar ciencia e innovación. (2015). *Remolinos en los océanos*.
<https://www.panoramanautico.com/remolinos-en-los-oceanos/19/>
- Nasa. (2018). *Hurricane Florence on September 11, 2018*.
<https://worldview.earthdata.nasa.gov/>
- Pixabay. (2019). *Electricidad y Mono* [Imagen].
<https://pixabay.com/es/photos/india-electricidad-mono-4393149/>

- Pexels. (2015). *Autopista* [Imagen].
<https://www.pexels.com/es-es/foto/autopista-calle-ciudad-cruce-614/>
- Ramani, M. (2018). La fascinante historia de cómo Francia creó el sistema métrico decimal y está por redefinir el peso de un kilogramo. *BBC*.
<https://www.bbc.com/mundo/vert-tra-45845628>
- Rodairuña. (s.f.). *Ruedas dentadas, engranajes y husillos de bolas*. <https://www.rodairuna.com/products/sprockets/>
- Roederer, J. G. (2002). *Mecánica elemental*. Eudeba.
- Serway, R. A. y Jewett, J. R. (2009). *Física para ciencias e ingeniería, con Física Moderna* (7ª ed.). Cengage Learning.
- Stahlkocher. (2005). *Corte de la esfera de un girocompás Anschütz*. https://es.wikipedia.org/wiki/Girocomp%C3%A1s#/media/Archivo:Kreiselkompass_Schnitt_Ansch%C3%BCtz.jpg
- Swokowski, E. W. (1989). *Calculo con Geometría Analítica* (2ª ed.). Grupo editorial Iberoamericana.
- Tinoco, M. (s.f.). Metrología dimensional a través del tiempo. <https://www.timetoast.com/timelines/metrologia-dimensional-a-traves-del-tiempo>
- Tipler, P. A. (1995). *Física*. Reverté.
- Venegas, J. M. (1962). *Texto de Física* (Tomo I). Norma.
- Venegas, J. M. (1962). *Texto de Física* (Tomo II). Talleres de la litografía Colombia.

- Viennot, L. y Rozier, S. (1994). Pedagogical Outcomes of Research in Science Education: Examples in Mechanics and Thermodynamics. En P. Fensham., R. F. Gunstone y R. T. White. (Eds.). *The content of Science: A Constructivist Approach to its Teaching and Learning* (pp. 237-254). The Falmer Press.
- Watson, W. (1950). *Curso de Física*. Labor.
- Young, H. D. y Freedman, R. A. (2009). *Física Universitaria* (Tomo I). Pearson.
- Zeus equipos. (s.f.). Bascula de piso trumax resolucion 77506 SIC. <https://www.zeusequipos.com/product/bascula-de-piso-trumax-resolucion-77506-sic/>

Autor

LUIS APHRANIO PORTILLA SALAZAR



Nació en Pupiales, el 25 de agosto de 1956. Hijo de Carlos Julio Portilla R. y Laurentina Salazar. Menor de ocho hermanos, inició sus estudios en la Escuela urbana de Varones de su ciudad natal; el bachillerato lo realizó en el Colegio de los Hermanos Maristas de Ipiiales; se graduó como Licenciado en Matemáticas y Física, área mayor Física, en la Universidad de Nariño; como Ingeniero Industrial de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Pasto; se especializó en Empresas Constructoras, en el convenio de la Universidad de Nariño y Universidad del Valle; Especialista en Docencia Universitaria, con la Universidad de Nariño, y Doctor en Ciencias de la Educación, con Rudecolombia, de la que forma parte la Universidad de Nariño; asimismo, realizó estudios en el campo de Análisis de Estructuras, como también en Estadística.

êditorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: 2024
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Este libro es el resultado de más de 35 años de experiencia docente a nivel universitario con las asignaturas de: física I, II, III, Biofísica, Termodinámica, Óptica y Mecanismos, dirigidas tanto a estudiantes de la carrera de física como a servicios que el departamento de física otorga.

La experiencia adquirida como docente más la formación académica adquirida durante todos estos años me ha permitido elaborar estas notas de clase siguiendo una línea de construcción del conocimiento, razón por la cual, el libro está conformado por seis capítulos que son: Introducción con álgebra de vectores, Cinemática, Dinámica, Dinámica de la rotación, trabajo y energía y Gravitación Universal. Los conceptos analizados y demostrados en el primer capítulo son la base para el siguiente y así sucesivamente, esto ayuda al estudiante y en general al lector tener una lectura fluida, además el lenguaje utilizado es muy sencillo y cotidiano así que no hay palabras ni términos exigentes que en muchas ocasiones entorpecen la comprensión de lo expuesto.

Por otra parte, los procesos de demostraciones y ejercicios matemáticos se han desarrollado casi en su totalidad, entendiendo que nuestros estudiantes y lectores en muchos casos llegan con algunas deficiencias en matemáticas.



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1984



Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 00022 - JUNIO 11 DE 2023



Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño