TAREAS PARA PROMOVER LA ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN, USANDO EL CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS LAL MEDIANTE EL CABRI II PLUS

JEFFERSON HELBERTH FERNÁNDEZ URBANO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2019

TAREAS PARA PROMOVER LA ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN, USANDO EL CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS LAL MEDIANTE EL CABRI II PLUS

JEFFERSON HELBERTH FERNÁNDEZ URBANO

Proyecto presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2019

NOTA DE RESPONSABILIDAD

"Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo de grado con responsabilidad exclusiva de sus autores"

Artículo 1° del acuerdo N°324 de octubre 11 de 1966, emanada del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Nota de aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

San Juan de Pasto, 26 de Junio de 2019

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi madre por su apoyo incondicional, su paciencia y su colaboración de corazón que siempre me ha brindado.

Agradezco a mis familiares por su apoyo para la culminación de este proyecto.

En particular, a las siguientes personas que me colaboraron en este proceso:

A mi asesor de tesis y profesor ***Edinsson Fernández Mosquera***, por su paciencia, colaboración, sus consejos y apreciaciones en el desarrollo de este proyecto.

A mis compañeros de la carrera y amigos por su apoyo y en particular a: ***David Chaucanes***, ***Ángela Trejo*** y ***Steban Albardo*** por los aportes a este trabajo de grado.

A los Estudiantes de grado noveno que participaron en la indagación, pertenecientes al colegio Liceo de la Universidad de Nariño, por su buena actitud y disposición, de igual forma a los directivos del colegio, por permitirme ejecutar la secuencia de tareas en el colegio.

RESUMEN

Este trabajo de indagación se realizó con el propósito de promover los procesos argumentativos al trabajar con tareas diseñadas y puestas en acto bajo el marco de la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) en el contexto de la congruencia de triángulos en la Geometría Plana, en particular, usando tareas acerca del postulado de congruencia Lado Ángulo Lado (LAL), en donde se integra el Ambiente de Geometría Didáctico (AGD) Cabri Géomètre II Plus como un instrumento mediador semiótico y en particular algunas de las herramientas que tiene como el *arrastre* y la *medida*, para la exploración de construcciones geométricas y así fomentar la producción de *signos personales* y con la intervención del docente poder guiarlos a *signos matemáticos*.

Las experimentaciones de las cuatro tareas diseñadas por el docente-indagador tienen como base el *Ciclo Didáctico* y se pusieron a prueba con estudiantes de la Institución Educativa (IE) Liceo de la Universidad de Nariño, obteniendo algunos datos para un posterior análisis bajo las teorías de la Unidad Cognitiva y la TMS. Con los cuales se logró observar que los estudiantes utilizan los conocimientos previos y las construcciones realizadas como argumentos para justificar los resultados obtenidos en las diferentes tareas. De esto se pudo comprobar que la secuencia de tareas favoreció la producción de argumentos y conjeturas, y en particular los acercó al proceso de la demostración.

PALABRAS CLAVES: congruencia de triángulos, secuencia de tareas, Teoría de la Mediación Semiótica, unidad cognitiva, geometría plana, Ambiente de Geometría Didáctica Cabri Géomètre II Plus, problemas abiertos, ciclo didáctico.

ABSTRACT

This research work was carried out with the purpose of promoting argumentative processes when working with designed tasks and put into action under the framework of the Theory of Semiotic Mediation (TMS). In the context of the congruence of triangles in the Plane Geometry, in particular using tasks related to the postulate of congruence Side Angle Side (SAS), where the Environment of Didactic Geometry (EDG) Cabri Géomètre II Plus is integrated as a mediating semiotic instrument and in particular some of the tools as the dragging and the measure for the exploration of constructions and thus encourage the production of personal signs and with teacher's intervention being able to guide these mathematical signs.

The experiments of the four tasks designed by the teacher-researcher are based on the Didactic Cycle and were tested with students of the Educational Institution Liceo de la Universidad de Nariño, obtaining some data for subsequent analysis under the theories of the Cognitive Unit and the TMS. Because of this, it was possible to observe that students use the previous knowledge and the made constructions as arguments to justify the results obtained in the different tasks. From this it was possible to verify that the sequence of tasks favored the production of arguments and conjectures, and in particular brought out them closer to the process of demonstration.

KEY WORDS: Congruence of triangles, sequence of tasks, theory of mediation, cognitive unit, plane geometry, environment of didactic geometry, Cabri Géomètre II Plus, open problems, didactic cycle.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Los procesos de argumentación y demostración son importantes en las matemáticas, dado que permiten establecer una relación lógica de argumentos entre una idea inicial y una conclusión. El uso de estos procesos ha permitido el desarrollo de sistemas axiomáticos con reglas bien establecidas con el fin de crear conocimientos articulados, con los cuales se establecen los postulados, definiciones, nociones comunes, proposiciones, teoremas, problemas y mediante la justificación generar en las personas un conocimiento lógico-deductivo, el cual es parte esencial en la creación de la demostración, un claro ejemplo de esto es el desarrollo y trabajo de la Geometría Euclidiana.

Actualmente, se pueden encontrar investigaciones en donde la demostración es un proceso que se puede aprender en el ámbito escolar cuando se integran los Ambientes de Geométrica Dinámica (AGD)[1] de una forma adecuada en el aula de clase, además existen indagaciones acerca de la inclusión de la demostración en las clases de matemáticas, con el fin de fomentar en los estudiantes un pensamiento lógico-deductivo, debido a que en el documento de Mariotti (2006) se pueden evidenciar dificultades en los alumnos cuando se les exige una actividad matemática de demostración..

En la actualidad, los AGD como el Cabri Géomètre II Plus[2], posibilitan a los estudiantes el desarrollo de procesos de razonamiento y de pensamiento lógico-deductivo, cuando el profesor de matemáticas diseña unas tareas apropiadas para este ambiente informático tal y como lo señalan Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006). Existen tareas muy específicas que fomentan la argumentación y demostración, las cuales permitirían relacionar los conocimientos matemáticos prácticos con los teóricos, llevando a los alumnos a una mayor comprensión de estos, cuando se

---

[1] En este trabajo se tomó a los AGD como un artefacto (software), el cual permite usar y promover el conocimiento matemático, en particular el geométrico.
[2] De aquí en adelante se utiliza Cabri para hacer referencia al software Cabri Géomètre II Plus

desea generar pensamiento geométrico, y de esta manera, revelar características específicas de la demostración y justificación en Matemáticas.

Desde el punto de vista curricular, el Ministerio de Educación Nacional, MEN (2006), en el ámbito de la Geometría Escolar, entre los grados octavo y noveno, es usual enseñar el tema de la congruencia triángulos así como la comparación entre estas figuras geométricas, especialmente, los criterios de congruencia de triángulos y sus usos, tal como el Lado Ángulo Lado (LAL), los cuales en la mayoría de libros de textos escolares, son estudiados solo por medio de ejemplos, como se puede ver en "Matemáticas 2000" de Villegas (2000), en el cual se presentan estos temas de una manera tradicional, mediante definiciones y ejemplos estáticos, sin favorecer los procesos de argumentación y demostrativos señalados arriba, y sin integrar las tecnologías digitales en estas clases.

Teniendo en cuenta lo antes mencionado, en esta indagación se realizó un estudio acerca de cómo los alumnos de grado noveno de la IE Liceo de la Universidad de Nariño, pueden desarrollar procesos de argumentación vinculadas con la matemática, en particular, con la Geometría Plana y aproximarse al proceso de la demostración, mediante tareas diseñadas para trabajar en el Cabri y relacionadas con el criterio de congruencia LAL.

Por consiguiente, en este documento se observarán los siguientes aspectos centrales como son: los Aspectos Generales, el Marco Teórico, la Metodología adoptada y los análisis previos, la experimentación, análisis de los resultados y las conclusiones.

En el primer capítulo, *Aspectos Generales*, se abordan los antecedentes, el planteamiento del problema y justificación, y lo objetivos. En primera instancia se hace un breve recorrido de las investigaciones realizadas cuando se integra el AGD Cabri en el aula de matemáticas por medio de tareas para el estudiante, y cómo se han utilizado estos ambientes para promover los procesos de la demostración, por lo cual se presentan algunos artículos que tratan acerca de dos grandes aspectos: el primero, sobre aspectos relacionados con la demostración en el ámbito escolar, y el segundo, acerca de la estrecha unión que existe entre los procesos de argumentación y de demostración al integrar los AGD usando las herramientas propias de los mismos.

En cuanto a la *Justificación*, se dan a conocer las razones por las cuales ésta indagación puede llegar a colaborar exitosamente con el cúmulo de investigaciones en el ámbito educativo con respecto a la demostración en secundaria, debido a que este tema ha sido discutido con un gran interés a nivel mundial. Posteriormente, se exhibe la *Formulación del Problema*, con la intención de analizar el proceso continuo de los estudiantes al pasar de la producción de conjeturas[3] a la demostración, presentando el problema propuesto para esta indagación. Posteriormente se muestra el objetivo general y los dos objetivos específicos como apoyo a este general para poder dar respuesta a la pregunta de esta indagación.

Para el *Marco Teórico* adoptado, se seleccionaron tres enfoques para trabajar. En el primero está la Dimensión Cognitiva, en donde se expresan los conceptos referentes a la argumentación y la demostración, así como las teorías a trabajar: la *Unidad Cognitiva* (UC), que proporciona una posible relación entre los procesos de la producción de conjeturas y la demostración; y la *Teoría de la Mediación Semiótica* (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2010) la cual permite aprovechar las potencialidades semióticas de un artefacto, en este caso el AGD Cabri, al integrarlo como mediador para el desarrollo de un determinado conocimiento.

En la segunda, se encuentra la Dimensión Didáctica, en donde se presenta la teoría del *Ciclo Didáctico*, cuyo principal interés es describir los procesos semióticos que realizan los estudiantes cuando interactúan con un artefacto en el desarrollo de tareas diseñadas, en las cuales se guie al estudiante hacia un conocimiento matemático. Y en tanto a la tercera categoría está la Dimensión Matemática, en donde se encuentra el desarrollo de la temática respecto a los triángulos, la congruencia de ángulos y la congruencia de triángulos. Por último, se presenta la articulación que puede haber entre estos marcos escogidos.

En el capítulo tres, se encuentra la *Metodología* en donde se aborda la *etnografía* como estudio de método cualitativo y su relación con el *ciclo didáctico*, para posteriormente dar a conocer los

[3] Para mayor referencia acerca de la conjetura y la definición a tener en cuenta para esta indagación ir al índice 2.1.2.

criterios de diseño, la descripción, los objeticos y algunas posibles soluciones de las actividades a trabajar con el AGD Cabri.

En el cuarto capítulo, se exhiben las características de la institución en donde se llevó a cabo la experimentación de la secuencia de tareas diseñadas, así como los resultados obtenidos. En el quinto capítulo se encuentra el *Análisis de los Resultados* de las tareas, en donde se exhibe una rejilla de análisis para los procesos desarrollados por los estudiantes.

Por último, se encuentran las *Conclusiones*, en donde se presenta una síntesis a partir de las soluciones dadas a la secuencia de actividades aplicadas, para mostrar los resultados obtenidos con forme a los objetivos planteados y así dar respuesta a la pregunta de esta indagación. Por último, aquí se presentan algunas preguntas en relación con ésta indagación que surgen de los resultados y conclusiones obtenidas.

CAPITULO I

ASPECTOS GENERALES

Gracias a los avances tecnológicos, se han desarrollado diferentes softwares, como por ejemplo para la educación relacionada con conocimiento geométricos o de cálculo tal como los AGD y los CAS, y junto a esto se desarrollaron diferentes investigaciones acerca de los procesos desarrollados en las aulas con el fin de fomentar tanto el uso de estas tecnologías en las aulas de clase y promover los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este capítulo se presentarán algunos de los antecedentes bibliográficos relacionados con el uso del Cabri y sus de las herramientas para el aprovechamiento e identificación de algunas características en la creación de conocimientos vinculados con la demostración, los cuales han dado una orientación a esta indagación. En particular, entre los artículos que se darán a conocer se encuentran algunas características de la producción de conocimientos al trabajar con tareas y problemas abiertos diseñados por el docente para manipulan diferentes figuras e incentivar así la exploración, verificación en dichas figuras y fomentar así la creación con un conocimiento razonable de carácter geométrico en los estudiantes.

1.1 ANTECEDENTES

En los años recientes se han realizado diversas investigaciones educativas en donde se integran las tecnologías como los AGD y los CAS en las aulas de clase, con los cuales se puede promover los procesos de enseñanza y aprendizaje de ciertos conocimientos de una manera diferente a la tradicional[4]. De igual forma, el uso de estas tecnologías al estar relacionados con artefactos de la vida cotidiana de los estudiantes, pueden estimular su interés hacia los conocimientos.

En particular, en las investigaciones (De Villiers, 1993; Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010; Maschietto & Trouche, 2010; Melo, Draghi & Saldivia, 2015; Sinclair & Robutti, 2013; Díaz & Zuluaga, 2013; Toro, 2014) se puede identificar

[4] La forma de enseñanza tradicional, se hace referencia a la forma de enseñanza en donde el docente da la temática y algunos ejemplos del tema a tratarse en clase.

que entre los usos de los AGD está el promover los procesos de razonamiento matemático relacionados con algunos de los conocimientos geométricos. Esta estimulación se la realiza mediante actividades en donde los estudiantes puedan interactuar con el AGD para determinar la solución a un problema.

Entre las temáticas que se han destacado en estas investigaciones en donde se utilizan los AGD se encuentra la inclusión de la demostración en las aulas de clase, con el fin de favorecen el desarrollo del razonamiento, el cual está relacionado con los procesos de conjeturación, justificación, argumentación y demostración. El trabajo con actividades en donde se trabaje con el razonamiento puede permitir la comprensión y el desarrollo del conocimiento matemático en los estudiantes. (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Un artículo que permite ver los inicios de investigaciones en donde se integran los temas de la demostración en las aulas de clase es el de De Villiers (1993), en donde se pone en evidencia algunas dificultades y preguntas que se tienen por parte de los estudiantes, tales como: ¿Por qué tenemos que demostrar?, y la identificación de la demostración como solo una verificación, observando que los estudiantes no fueron capaces de comprender que la demostración puede tener la función de verificar, explicar, sistematizar, descubrir y comunicar.

Sin embargo, esto fue cambiando gracias a la evolución de los AGD y junto con ellas las investigaciones e indagaciones donde se realiza una inclusión de la demostración en el aula de clase. Esto es mencionado en Laborde et al. (2006), quienes afirman que los AGD han evolucionado de tal forma que permiten una relación más directa entre las figuras geométricas y su manipulación, de esta forma se creó un progreso de las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje basados en Geometría y la construcción de figuras dinámicas, favoreciendo de igual forma a la elaboración de tareas que promuevan la conjeturación y la demostración.

En tanto a las cualidades que se pueden destacar de los AGD se encuentra el artículo de Mariotti (2006), quien presenta a los AGD como ambientes que promueven el razonamiento y resolución de problemas, ya que favorece la comprensión de un conocimiento matemático con sus relaciones existentes entre figuras y el uso adecuado de las herramientas del ambiente. De similar manera, Sinclair y Robutti (2013) enfatizan sobre el papel de la exploración de figuras geométricas mediante el uso de las herramientas de *arrastre* y *medida* del AGD Cabri, ya que estas ayudan a identificar vínculos de dependencia entre las figuras, y así obtener conjeturas, las cuales son importantes para el proceso demostrativo.

Complementando lo anterior, Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002), resaltan cómo los AGD junto con tareas diseñadas, dan la posibilidad al usuario de manipular y arrastrar de una manera más directa objetos geométricos, y mediante la observación de estos movimientos, identificar algunas de las propiedades geométricas de estas figuras, permitiendo la creación de conjeturas y razonamientos. Debido a estas características de los ambientes, los autores realizaron una clasificación acerca de los diferentes tipos arrastres que se pueden presentar al trabajar con tareas diseñadas en los AGD, tales como: el errático (o Wandering, en inglés), el guiado, por medio de un lugar geométrico oculto (o Dummy Locus, en inglés) y el de prueba.

Un ejemplo del enlace entre las tareas diseñadas y la interacción con el AGD es el trabajo de grado de Díaz y Zuluaga (2013), quienes realizaron una investigación, de cómo los estudiantes resolvían tareas usando el AGD Cabri, con el fin de identificar dificultades acerca del desarrollo de una demostración relacionadas con el uso de circunferencias. Otro ejemplo es el de Melo, Draghi y Saldivia (2015), en donde se plantearon actividades para que el estudiante realizara construcciones de triángulos tanto en el ambiente de lápiz y papel como en el AGD GeoGebra, y poner en acto diferentes conocimientos adquiridos que le permitieran verificar si dos triángulos son congruentes por medio de los criterios de congruencia.

Gracias a las diversas investigaciones realizadas, se han categorizado aquellas que tratan acerca de temas alrededor de la demostración en la Geometría Escolar, tal como se indica en Mariotti (2006), donde se establecen tres líneas de investigación: el estado de la demostración en la escuela; las principales dificultades que enfrentan los estudiantes en relación con la demostración y sus posibles orígenes; y cómo los docentes pueden intervenir didácticamente para evitar las dificultades que presentan los alumnos. En este mismo artículo se hace una distinción entre los términos que se estilan en esta temática como son: argumentación, prueba y demostración y la relación que existe entre ellos, en la producción de una demostración.

De igual forma, años más tarde en Sinclair & Robutti (2013)[5], categorizaron las investigaciones en dos campos primordiales: La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría usando un AGD; y la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Este trabajo de grado se ubica en la intersección de estos dos campos, puesto que se realizó un diseño de tareas donde se utilice un AGD, las cuales puedan fomentar los procesos de conjeturación y argumentación, permitiendo así hacer un acercamiento al proceso de la demostración.

La información encontrada en estas investigaciones, sirvió como base para tener en claro el tema de indagación, ampliar el campo conceptual, y los fundamentarnos para desarrollar las tareas didácticas del proyecto.

[5] En este artículo se realiza una recopilación de artículos desde el año 2001 al 2013, poniendo en evidencia la evolución del uso de los AGD en las aulas de clase, esto en beneficio de los procesos que tiene que ver con la demostración.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

Desde la época de los griegos clásicos, con sus respectivos métodos de exploración para la creación de nuevas ideas matemáticas, se ha buscado la forma de poder explicarlas, por medio de una validez estructurada (Toro, 2014). Obteniéndose así, la creación de postulados, teoremas, definiciones, nociones comunes y todo un sistema axiomático con unas reglas establecidas para crear conocimientos articulados que se pueden justificar, formando un *conocimiento lógico-deductivo*, el cual es parte esencial en la creación de la demostración en las matemáticas y en particular de la Geometría Euclidiana[6].

Tomando como base las diferentes investigaciones consultadas (De Villiers, 1993; Arzarello et al., 2002; Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010; Maschietto & Trouche, 2010; Melo et al, 2015; Sinclair & Robutti, 2013; Díaz & Zuluaga, 2013; Toro, 2014) se puede evidenciar el interés de incluir la demostración en la Educación Matemática escolar. En donde se identificó el uso de la Geometría Euclidiana junto con los AGD para desarrollar y justificar soluciones de una manera lógica con base en las construcciones geométricas realizadas.

Este tipo de investigaciones donde se integran los procesos de demostración en las aulas de clase son necesarias, ya que como lo afirma Mariotti (2006), ayudan al docente a identificar y evitar dificultades presentadas por los estudiantes con los procesos involucrados en la demostración, fomentando el uso de la argumentación y conceptos, llevando a los alumnos a una mayor comprensión del tema tratado.

En este mismo sentido, se pude resaltar que en la Educación Matemática en Colombia de acuerdo con el MEN (2006), se pretende desarrollar en los estudiantes un *pensamiento matemático* que les permita solucionar diferentes problemas y más aún poder justificar estas soluciones de manera adecuada y de igual modo formar personas que sean matemáticamente competentes en donde unos de sus procesos generales es: “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino

[6] La geometría Euclidiana es también conocida como la geometría plana, la cual tiene un sistema axiomático del que se hablará más adelante.

hacia la demostración" (p. 51), en donde se ven claramente que los estudiantes desarrollan procesos relacionados con la demostración y la capacidad de usarlos al enfrentarse a problemas matemáticos y en particular geométricos.

Asimismo, los AGD como el Cabri, vistos desde las investigaciones (Sinclair & Robutti, 2013; Arzarello et al, 2002, Mariotti 2006) desempeñan un papel muy importante para el desarrollo de procesos cognitivos del *pensamiento matemático*, esto se debe a que los alumnos pueden: Explorar, conjeturar, argumentar, validar, y crear una posible demostración. Y desde el MEN (2006):

> Estos ambientes informáticos, […] permiten reorganizaciones curriculares, pues no sólo realizan de manera rápida y eficiente tareas rutinarias, sino que también integran diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.). Todo esto facilita a los alumnos centrarse en los procesos de razonamiento propio de las matemáticas […] (p, 75).

Dejando en claro que el uso de los AGD pone en práctica los conceptos, fomentando el proceso de razonamiento matemático. Este razonamiento según Toro (2014), tiene que ver con formular hipótesis, hacer conjeturas, usar hechos conocidos, justificar estrategias y procedimientos, utilizar argumentos propios para exponer ideas, entre otros. Los cuales están estrechamente relacionados con la demostración como se podrá ver en el marco teórico.

De igual forma en las investigaciones (Arzarello et al., 2002; Díaz & Zuluaga, 2013; Mariotti, 2006; Mariotti, 2010; Maschietto & Trouche, 2010; Sinclair & Robutti, 2013; Toro, 2014) se destaca que los estudiantes utilizan el Cabri para realizar construcciones en donde apliquen sus conocimientos de la Geometría Escolar en la solución de tareas y a partir de estas construcciones argumenten, conjeturen y puedan demostrar.

Teniendo en cuenta lo anterior, la intención de este trabajo de grado es contribuir en investigaciones de cómo el docente puede orientar el tema de la demostración en el ámbito escolar, en particular, usando el AGD Cabri y la temática del *criterio de congruencia de triángulos LAL*, en donde se utilicen argumentos y se realice un análisis de las soluciones a tareas usando la TMS.

Además, mediante estas se ayudaría a desarrollar en los alumnos un pensamiento lógico-deductivo desde las hipótesis a las conclusiones, es decir, que se partirá desde *significados personales* para llegar a *significados matemáticos*[7] de una comunidad.

De lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cómo la solución de las tareas planteadas permitirá a los estudiantes desarrollar procesos lógico-deductivos de argumentación, para que ellos los utilicen y así acercarse a una posterior demostración?*

---

[7] Los conceptos de significados personales y significados matemáticos se darán a conocer en el Marco teórico en la teoría de la mediación semiótica en el índice 2.1.6.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 General

- Analizar una secuencia de tareas diseñadas para promover el proceso de argumentación en estudiantes de grado noveno alrededor del criterio de congruencia de triángulos LAL en el AGD Cabri Géomètre II Plus.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Diseñar y aplicar una secuencia de tareas teniendo en cuenta la TMS, donde se propicie procesos de argumentación y conjeturación en los estudiantes utilizando el Cabri.

- Reconocer la utilidad de estas tareas en el proceso de argumentación de los estudiantes, bajo la metodología de ciclo didáctico.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

En esta indagación el marco teórico se desarrolla bajo una perspectiva socio-cultural, basada en el enfoque constructivista Vygotskiano, donde el conocimiento de un individuo y su medio se construyen partes importantes para el aprendizaje de conocimientos esenciales, tal como lo menciona Herrera (2013) "donde el conocimiento de un individuo se construye propiamente de la interacción con su experiencia social y cultural en el medio que lo rodea" (p. 28).

Ya que el propósito en esta indagación se centra en la propuesta de actividades que propicien los procesos de conjeturación y argumentación, con el fin de que los estudiantes comprendan la aplicación y uso del criterio de congruencia de triángulos LAL, con el fin de realizar un acercamiento a lo que es la demostración, este marco teórico se explica desde tres dimensiones: la cognitiva, la didáctica y la matemática, con la cuales se pretende lograr los objetivos planteados.

En la primera, la *dimensión cognitiva*, se presentan dos teorías que van de la mano, por un lado, la *Teoría de la Unidad Cognitiva* la cual identifica e interpretar la relación y continuidad cognitiva dada en los procesos de producción de conjeturas y de la demostración, en la resolución de actividades donde se usen *Problemas Abiertos*; por otro lado está la *Teoría de la Mediación Semiótica* (TMS), en donde el estudiante usa un artefacto como mediador semiótico, en este caso el Cabri, aprovechando el potencial semiótico descubierto por el profesor para desarrollar pensamientos matemáticos, en particular, el geométrico.

En tanto que la segunda la *dimensión didáctica*, se encuentra el *Ciclo Didáctico* el cual se fundamenta en la creación de una secuencia de situaciones diseñadas basadas en las interacciones con el artefacto y las sociales para desarrollar significados personales y guiarlos en un entorno social a significados matemáticos asociándolo a un conocimiento matemático.

Por último, se encuentra la *dimensión matemática*, en donde se expone el marco teórico geométrico, en particular, el de la Geometría Euclidiana, enfocándose en el caso del criterio de congruencia de triángulos LAL, reaccionándolo con el uso de los AGD en las aulas de clase.

2.1 DIMENSIÓN COGNITIVA

En las últimas décadas, en las investigaciones acerca de trabajos de enseñanza y aprendizaje de la demostración en las aulas de clase, se ha identificado que existen muchos inconvenientes (Mariotti, 2006), como el entender cuál es la importancia de la demostración en el conocimiento matemático. Sin embargo, se han seguido desarrollando más de ellas con el propósito de identificar características que permita la integración de la demostración y su importancia en la producción de conocimientos matemáticos.

Gracias a las diversas investigaciones (Arzarello et al., 2002; Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010; Maschietto & Trouche, 2010; Sinclair & Robutti, 2013; Díaz & Zuluaga, 2013; Toro, 2014) acerca de la inclusión de la demostración en las aulas de clase usando los AGD, se ha identificado que el incluir actividades donde los estudiantes solucionen problemas estimulando la interacción con el AGD, se puede fomentar el desarrollo de los procesos relacionados con la demostración (Díaz & Zuluaga, 2013; Mariotti, 2006; Mariotti, 2010; Mariotti, 2013; Maschietto & Trouche, 2010), los cuales son: la argumentación, la conjetura, la prueba[8] y la justificación[9].

Al tener en cuenta las tres líneas de investigación clasificadas por Mariotti (2006), esta indagación se encamina en la tercera línea, es decir, que el propósito es ayudar a los alumnos a comprender y desarrollar un pensamiento matemático para justificar y usar adecuadamente el criterio de congruencia de triángulos LAL con ayuda del AGD Cabri.

2.1.1 Importancia de la demostración

Cuando se habla de la demostración en un sentido matemático, se hace referencia a la estrecha relación que existe entre un postulado o teorema y la teoría en donde él cobra sentido. En esta relación se destaca el uso de la teoría para poder estructurar la demostración, la cual se basa en un

[8] La prueba en esta indagación se entendió como el proceso desarrollado por los alumnos para llegar a construir la demostración.
[9] La justificación fue considerada como el proceso argumentativo que ayuda a validar la conjetura usando la teoría establecida por una comunidad.

sistema de enunciados organizados que justifican el postulado o teorema. Como lo menciona Mariotti (2006) la transmisión del conocimiento se dá con argumentos lógicos, los cuales dieron paso a la demostración. Esto realza tanto la importancia de los argumentos como el sistema estructurado en la cultura matemática, obteniendo la creación de postulados, teoremas, definiciones y conocimientos articulados que se pueden justificar.

Como se mencionó anteriormente, se evidencia la existencia de dificultades al trabajarla demostración en las aulas de clase. Sin embargo, el docente puede trabajar justificaciones de las soluciones desarrolladas en actividades con los AGD, las cuales se basadas en una teoría.

2.1.2 Conjetura, argumentación y demostración

Como se ha mencionado con anterioridad, la argumentación es un proceso esencial en la producción del conocimiento matemático, el cual ayuda a la producción de la justificación de la conjetura, así como a la demostración. Por lo anterior, para esta indagación se ha tenido en cuenta los siguientes conceptos: la *argumentación* se entendió como el proceso en donde se emplean medios retóricos con el fin de convencerse a sí mismo o a otra persona de la veracidad o falsedad de una afirmación en particular (Mariotti, 2006, 2010); la *conjetura* es comprendida como la idea concluyente expresada de manera escrita o verbal, la cual se tiene como resultado de la observación y argumentación de ideas basadas en los *arrastres* de las construcciones geométricas de las soluciones a las tareas en el AGD Cabri.

En tanto que la *demostración* como lo mencionan Díaz y Zuluaga (2013) puede verse como un tipo particular de *argumentación*, ya que, al comparar estos dos términos, se lo puede realizar desde: la *caracterización funcional* en donde su relación está dada por la finalidad, uso y función en un discurso y, por otro lado, está la *caracterización estructural* en donde la argumentación y demostración se relaciona en términos de estructuración lógica de enunciados.

Por lo tanto, la *demostración* se tomó como la *secuencia lógica de argumentos* que unen la premisa o hipótesis y la conclusión, los cuales se derivan de la validez teórica[10] previa (Mariotti, 2006), en particular, para esta indagación, serán los conocimientos adquiridos en clase y las conclusiones de las tareas propuestas.

2.1.3 Demostración en el ámbito escolar

Los procesos de demostración son muy importantes en la enseñanza escolar, puesto que posibilitan en mayor parte la comprensión del conocimiento matemático, debido a que permite que el estudiante verifique la veracidad de un enunciado, donde se dan las razones del por qué dicha veracidad (Díaz & Zuluaga, 2013). Dentro de las características de la demostración se encuentran las funciones de verificación exploración, sistematización, descubrimiento y construcción las cuales dependen del uso que se le quiera dar.

En este mismo sentido, en Mariotti (2006) se afirma que, al trabajar la demostración en la enseñanza escolar, se asocian a la demostración dos elementos significativos, los cuales son: La primera es la *función de explicación*, la cual se relaciona con el por qué es verdad la proposición, y es fundamental, ya que proporciona el apoyo necesario para comprensión. Y la segunda es la *función de aceptación*, relacionada con veracidad de la proposición, exigiendo una validación basada en un marco teórico. Sin embargo, el trabajar con la función de aceptación ocasiona más dificultad, puesto que en esta se ven involucrados el uso de enunciados los cuales deben ser consecuentes y tener relaciones lógicas, es decir, son usados para organizar una demostración.

2.1.4 Unidad cognitiva

La Unidad Cognitiva (UC) es usada en el ámbito de la enseñanza escolar para reconocer una continuidad entre la conjetura y la demostración final. A pesar que estos dos conceptos tienen sus diferencias, la característica que tiene la UC es que se centra en el uso de los procesos argumentativos asociados a la producción de la conjetura y en la producción de una demostración.

---

[10] Aquí la valides teórica se hace referencia al uso de la teoría geométrica tomada en cuenta.

Por lo cual, la UC es usada como modelo que permite interpretar y analizar la relación entre las producciones de conjeturas y de demostraciones (Mariotti, 2006; Díaz & Zuluaga, 2013)

Como lo menciona Mariotti (2006), Teniendo en cuenta la definición de teorema matemático, es posible trazar una correspondencia entre los sistemas de referencia usados en la conjetura y los usados en la demostración matemática, es decir, entre el *sistema de las concepciones* de la que emerge una conjetura y dentro del cual se formula apoyándose con argumentos explícitos, y *la teoría*, donde se toman en cuenta los conocimientos, teoremas y definiciones disponibles en que se produce la demostración.

Lo anterior, quiere decir que la UC busca relacionar los procesos argumentativos desarrollados por los estudiantes en la justificación de una conjetura los cuales puedan ser usados para la producción de la demostración. En la unidad cognitiva UC se pone en evidencia las potencialidades de ciertas actividades con respecto a la iniciación de los estudiantes en la demostración, las cuales deben incluir la solución de problemas abiertos debido que su estructura y forma permite fomentar la generación de conjeturas por parte de los estudiantes (Díaz & Zuluaga, 2013).

2.1.5 Acerca de problemas abiertos

Básicamente los problemas abiertos se caracterizan por ser problemas que se les presentan a los estudiantes, los cuales no deben revelar posibles soluciones. Ellos tienen el potencial de generar una duda, la cual promueva en el estudiante la necesidad de resolverla. Por lo cual, lo que se busca al implementar estos tipos de problemas en el Cabri, para que él realice configuraciones a la construcción geométrica por medio de arrastres[11] para que observe y determine una relación condicional entre las figuras de la construcción e identificar propiedades entre ellas y así obtener una conjetura.

Cuando los estudiantes buscan posibles soluciones a los problemas abiertos, tienen que desarrollar una compleja actividad argumentativa la cual les permite producir conjeturas en un

[11] Más adelante en el índice 2.1.6.3, se habla del Cabri y de sus herramientas como el arrastre y la medida.

nivel intuitivo. A partir de estas conjeturas, el estudiante puede llegar a un nivel teórico[12], generando una organización de los enlaces de las conjeturas, teniendo en cuenta los elementos relacionados con el marco teórico, y así obtener una declaración mediante una cadena lógica. Cuando se une la producción de la conjetura con la teoría, se favorece la continuidad entre la argumentación y a demostración (Díaz & Zuluaga, 2013).

Así los problemas abiertos permiten la exploración y propician las conjeturas, permitiendo validar sus propios argumentos usando la teoría matemática, por ello los problemas abiertos actúan como un puente para establecer la relación entre el nivel intuitivo y el nivel teórico. Esta relación se representa en la Ilustración 1.

Ilustración 1. Problemas abiertos como puentes

En otras palabras, los problemas abiertos ayudan a que los alumnos se aproximen al proceso demostrativo al relacionar el nivel intuitivo con el nivel teórico. A continuación, se dan algunas características generales de los problemas abiertos (Díaz & Zuluaga, 2013; Herrera, 2013):

- El enunciado no debe presentar ningún método o indicación de una posible solución.
- Los problemas abiertos deben tener varias soluciones posibles.
- Debe generar controversias entre los estudiantes.
- Deben partir de una situación que permita la exploración, la argumentación y la validación de argumentos
- Con ellas se generan acerca de si es verdadero o falso un hecho, permitiendo ver si hay una solución o no al problema.
- Su objetivo es encontrar el hecho y las hipótesis que justifiquen el hecho.

[12] El nivel teórico hace referencia al contexto teórico o la teoría que se utilizaría para el proceso de la demostración.

Cuando el estudiante busca la solución de un problema abierto, él se enfrenta a una actividad argumentativa basadas en los procesos de observación y justificaciones acerca de los hechos que ocurren en la interacción con el artefacto propician un pensamiento espontaneo, esto posibilita la producción de argumentos y conjeturas y al continuar dicho proceso de justificación de una manera formal se fomenta la producción de la demostración (Díaz & Zuluaga, 2013). Cuando el estudiante organiza los enlaces obtenidos de la generación de conjeturas con el maco teórico, le permiten modificar los pensamientos espontáneos a declaraciones en forma de una cadena lógica, es decir, hacía un pensamiento matemático aceptado (Herrera, 2013). Esto proporciona una relación entre el nivel intelectual y el nivel teórico que favorece la continuidad entre la argumentación y la demostración.

El uso de los argumentos que se presentan en la producción de conjeturas, deben tener como referencia el marco teórico, ya que esto propicia la relación de dichos argumentos con la demostración y su estructura formal, recordando que toda demostración se basa en un marco teórico. Es por ello, que es necesario que los estudiantes sean introducidos a un marco teórico, para ello la noción de instrumento de mediación semiótica permite articular la experiencia y la teoría.

2.1.6 Teoría de la Mediación Semiótica

Los seres humanos utilizan artefactos, ya sea con un propósito practico en vida cotidiana o también con un fin a nivel cognitivo, es decir, como ayuda para solucionar un determinado problema (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). En la educación se puede identificar el uso de diferentes artefactos, entre ellos están: el papel, el lápiz, el tablero, ábaco, el computador, etc.

Desde el punto de vista de Vygotsky, en el desarrollo cognitivo de un individuo es importante tanto la relación del sujeto con lo social y cultural, debido a que el ser humano ha sido social por naturaleza, como el funcionamiento cognitivo de los artefactos como elementos de aprendizaje (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Denise & Zuluaga, 2013), esto hace referencia a que el desarrollo cognitivo se basan en procesos semióticos, en donde la interacción social y los estímulos de la interacción con el artefacto son primordiales.

Dentro del uso de algunos artefactos culturales en la actividad humana, se resalta la posibilidad que estos tienen para mediar un conocimiento matemático, en donde se interactúa con el artefacto (como el Cabri) cuando se desarrolla una actividad, y este permite internalizar[13] algunas herramientas usadas en la solución y sean convertirlas en signos o herramientas psicológicas (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Denise & Zuluaga, 2013). En otras palabras, un artefacto pude mediar un conocimiento matemático, si este relaciona el sujeto (alumno) y el conocimiento matemático y si desarrolla procesos cognitivos acerca de los usos de las herramientas usadas en la tarea.

En el proceso de mediación de un conocimiento se fomenta el uso de procesos semíticos y de signos (Mejía, 2014). No obstante, también hay que destacar que al generar un conocimiento en un aula de clase es fundamental el medio y la interacción social que se desea establecer entre los alumnos, por lo cual es importante crear un escenario adecuado para desarrollar la demostración en el aula, en donde se utilicen artefactos socio-culturales, para interactuar con estos y generar procesos semióticos para un aprendizaje.

En esta propuesta de indagación se interesa en el marco de la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), la cual teniendo en cuenta lo dicho por Mariotti (2010), tiene como objetivo describir cómo el profesor puede explotar el uso de artefactos para fomentar los procesos de enseñanza y aprendizaje, donde se permite hacer una interpretación de las soluciones realizadas por los estudiantes a las tareas planteadas donde se usó el artefacto, en particular el Cabri y cómo la interacción con sus herramientas podrían desarrollar un conocimiento matemático. De igual forma, la TMS busca destacar el papel que juega el docente cuando se desea favorecer el proceso de aprendizaje al integrar AGD en las aulas de clase (Mejía, 2014), ya que él debe preparar las tareas previamente con un determinado fin.

En la mediación se destacan dos tipos de usos de herramientas: la primera la *herramienta técnica* , la cual es la misma herramienta en si del AGD (artefacto), ésta se orienta desde exterior,

[13] El proceso de internalización es visto como el proceso de construcción de un conocimiento individual que se basa en experiencias que son compartidas socialmente. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

permitiendo hacer modificaciones del medio o constructo; y la segunda es la *herramienta psicológica*, la cual se orienta internamente, puesto que es la internalización de la herramienta técnica por parte del sujeto (Díaz & Zuluaga, 2013; Herrera, 2013), en otras palabras, esta herramienta hace referencia al pensamiento generado cuando es usada con un determinado objetivo.

En tanto al artefacto como lo mencionan Díaz y Zuluaga (2013), en la TMS se toma a un artefacto como un *instrumento de mediación semiótica*, cuando un docente lo usa con una intención didáctica a través de una tarea diseñada la cual le permita mediar un contenido matemático, es decir, que el artefacto permita establecer una relación entre los procesos desarrollados con él y los conocimientos matemáticos. De igual forma, la TMS busca que el artefacto se use, con el fin de crear signos que se promueven en la interacción y uso de sus herramientas durante el desarrollo de las tareas diseñadas.

Estos signos o herramientas psicológicas se pueden diferenciar entre: los *significados personales* que son obtenidos por el del estudiante durante la interacción con el artefacto en el uso de la herramienta técnica y las intervenciones guiadas por un profesor, estos pueden ser llevarlos hacia *significados matemáticos*, los cuales están relacionados con los conocimientos matemáticos, para crear un aprendizaje (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Esta evolución de significados es aprovechada por el docente para explotar los procesos semióticos usados, con el fin de mediar un conocimiento matemático, en donde se utiliza un artefacto como medio. Los signos producidos por los estudiantes se pueden dividir en tres categorías (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mejia, 2014):

i) *signos del artefacto*, se refieren al contexto del uso del artefacto, refiriéndose a menudo a la acción realizada con él y surgen precisamente en la interacción con el artefacto. Aquí se pueden incluir los signos verbales y no verbales (como los gestos o dibujos).
ii) *signos matemáticos*, relacionados con el contenido matemático, es decir, con los significados matemáticos, los cuales son parte de lo enseñado en el aula de clase y son objeto del proceso de mediación semiótica organizada por el profesor

iii) *signos pivote,* son los signos que permiten relacionar los signos de los artefactos con los signos matemáticos, facilitan la conexión entre el contexto del artefacto y el contexto matemático que se está usando en una tarea. Aquí se hace referencia a las acciones realizadas con el artefacto como también al lenguaje natural y al dominio matemático, es decir, que estos signos pueden ser flexibles en tanto al lenguaje usado mientras se conserve el contexto en que se use.

En resumen, los signos producidos por los estudiantes pueden ilustrar sus significados personales, los cuales pueden ser guiados a signos matemáticos, que son asociados a significados matemáticos tales como una definición o teorema. Es así como en la TMS el aprendizaje puede ser visto como la evolución de signos, al tener en cuenta el uso del artefacto para desarrollar un contenido matemático en particular, en donde el profesor debe propiciar esa evolución de signos y conocer de antemano el potencial semiótico del artefacto empleado

2.1.6.1 Potencial semiótico del artefacto.

El potencial semiótico se estudia en la conexión dada entre el artefacto y la tarea, ya que no solo es importante cómo el estudiante usa el artefacto para desarrollar una tarea, sino también, cómo es utilizada por el maestro para generar un aprendizaje (Mariotti, 2013). Es por esto que el potencial semiótico de un artefacto se puede observar en la articulación entre el significado personal que se da al resolver una tarea específica y el significado matemático al usar el artefacto con un cierto objetivo. En la Ilustración 2, se puede observar el vínculo entre el artefacto y una tarea planteada, en donde se establecen dos relaciones semióticas: una entre el artefacto y la tarea, y la segunda entre el artefacto y el conocimiento matemático.

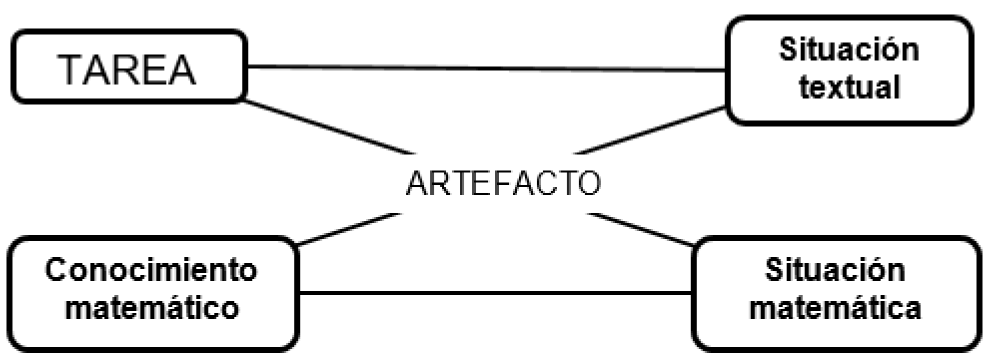


Ilustración 2. Polisemia del artefacto. Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p.753.

Estas relaciones permiten identificar que el artefacto es usado por un lado para solucionar una tarea planteada usando una situación textual que bien puede ser textos escritos, gestos, dibujos y cualquier signo se utiliza para dar sentido y comunicar el procedimiento (Maschietto & Trouche, 2010), pero también el artefacto es usado con el fin de evocar conocimientos matemáticos, al establecer situaciones matemáticas que permitan conectar algunos procesos del desarrollo de la tarea con dichos conocimientos.

Como se mencionó anteriormente, un artefacto se identifica como *instrumento mediador semiótico*, si permite que la producción de *significados personales* sea guiada por el profesor hacia la creación de *significados matemáticos* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2013), es decir, que el experto puede utilizar al artefacto como una herramienta que permita a los estudiantes la conexión de sus significados personales con significados matemáticos, tal como se observa en la Ilustración 3.

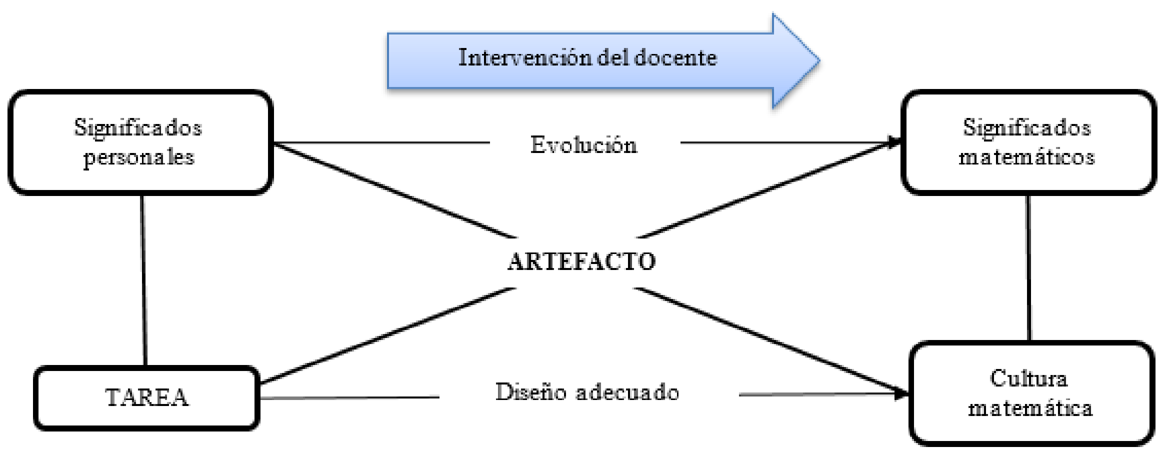


Ilustración 3. Artefacto como instrumento mediador semiótico.

Teniendo en cuenta lo anterior, en esta indagación se consideró a los *significados personales* como aquellas ideas concluyentes y los argumentos que los estudiantes pueden establecer como resultado de la interacción con el Cabri en busca de una solución a las tareas planteadas, por ejemplo, aquellas ideas que se obtienen al usar la herramienta de arrastre en las construcciones geométricas. Como consecuencia de las discusiones sociales acerca de la veracidad de las conjeturas y argumentos, se van modificando cada vez a una estructura más matemática, permitiendo así la construcción de los *significados matemáticos* que son el resultado de poder expresar estas ideas como enunciados de una manera ordenada y a su vez con una estructura lógico-deductiva, esta última estructura es lo que se conoce como lo culturalmente aceptado. La evolución de los significados personales permite reconocer la continuidad entre la conjetura y la demostración, al tener en cuenta la evolución hacia una estructura de demostración.

2.1.6.2 Potencial semiótico del AGD Cabri

Gracias a diversas investigaciones (Arzarello et al., 2002; Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010, 2013; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Maschietto & Trouche, 2010; Sinclair & Robutti, 2013; Díaz & Zuluaga, 2013; Toro, 2014, Melo.et al., 2015) sugieren que la integración de los AGD en las aulas de clase, al usarlos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de algunos conocimientos geométricos, se favorece la compresión de algunos conceptos matemáticos y el desarrollo del razonamiento geométrico.

Teniendo en cuenta que el artefacto empleado para esta indagación es el AGD “Cabri Géomètre II Plus”, este fue el instrumento de mediación semiótica, el cual tiene herramientas que permiten la exploración de figuras como el *arrastre* y la *medida* (Sinclair & Robutti, 2013), las cuales pueden ser aprovechadas por el docente para promover la producción de significados personales y significados matemáticos cuando se busca la solución de una tarea.

Como lo mencionan Bartolini y Mariotti (2008), entre las funciones básicas que se tienen en los AGD, en particular el Cabri, es la creación de objetos geométricos (trazos gráficos) en la pantalla por medio de herramientas de construcción como: punto, segmento, recta, triángulo, compás, etc. y la posibilidad de que el sujeto (estudiante) pueda moverlos, haciendo parte de los diferentes usos que se pueden realizar en la pantalla. A continuación, se mencionarán algunas herramientas características del Cabri, como el arrastre y la medida.

2.1.6.3 Acerca del arrastre y la medida

EL arrastre de objetos permite al usuario mediante el mouse seleccionar uno o más objetos (geométricos) y moverlos en el espacio de la pantalla. Cuando el arrastre es usado se cambia el aspecto figurativo de una construcción realizada, pero las relaciones que se realizaron entre las figuras construidas se mantienen. Esto hace que el estudiante pueda observar las características de una figura de manera visual y los conceptos que se trabajan en un registro discursivo.

Como lo menciona Baccaglini-Frank y Mariotti (2010), el arrastre se vuele útil en la solución de problemas abiertos, ya que permite la exploración de las construcciones realizadas para identificar cualidades mediante dos posibles movimientos con el arrastre: El primero el *movimiento directo*, que hace alusión a la variación o movimiento que tiene un objeto base[14] en el plano, cuando a este se le aplica el arrastre, él está sujeto a la construcción de la figura realizada (Baccaglini-Frank &Mariotti, 2010; Díaz y Zuluaga, 2013) y el segundo el *movimiento indirecto:* es el movimiento que tienen un objeto cuando se realiza el arrastre en el objeto base, permitiendo al usuario identificar la relación de dependencia (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Estos dos movimientos permiten identificar una trayectoria o camino que cumple el objeto base por parte del arrastre.

Es así que el principal uso del arrastre es para identificar vínculos que pueden existir de dependencia o independencia entre las figuras geométricas de la construcción realizada, lo cual se convierte en una característica para aprovechar los problemas abiertos, al promover las conjeturas a partir de la interpretación de estos movimientos como relaciones condicionales de dependencias lógicas.

Por ello, cuando se trabaja con una actividad o tarea en el Cabri, la función de arrastre permite reconocer, por un lado, algunas propiedades geométricas que se mantienen al mover algunas figuras, permitiendo interpretar la exploración de estos cambios como dependencias lógicas, y por otro lado, fomentar el uso e interpretación de argumentos (nivel teórico) por parte de los estudiantes que le permita justificar la validez de dicha propiedad ayudando a vincular una premisa

[14] El objeto base o también llamado punto base es un objeto libre o semilibre si está vinculado a un objeto, que se puede arrastrar por cualquier parte de la pantalla o a lo largo del objeto que esté vinculado (Baccaglini-Frank &Mariotti, 2010; Díaz y Zuluaga, 2013).

con una conclusión (Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Díaz & Zuluaga, 2013).

Gracias a las mismas investigaciones (Arzarello et al., 2002; Laborde et al., 2006; Mariotti, 2006, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Díaz & Zuluaga, 2013) donde se hizo un análisis acerca del arrastre, se pueden identificar las modalidades de arrastre que tiene Cabri, las cuales pueden fomentar y enriquecer el proceso de la producción de conjeturas y su vinculación con la demostración, al trabajar con los problemas abiertos. Entre las modalidades de arrastre se encuentra el *arrastre* vago (wandering/random dragging), el *arrastre* mantenido (maintaining dragging), el *arrastre* con traza activa (dragging with trace activated) y el *arrastre* de prueba (dragging test) (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

- *Arrastre* vago, hace alusión a un arrastre aleatorio de un punto base alrededor de la pantalla, cuyo fin es buscar configuraciones o regularidades destacables de la construcción geométrica en Cabri.
- *Arrastre* sostenido, consiste en un arrastre continuo o de manera sostenida de un punto base, de tal manera que se mantenga una cierta propiedad geométrica sobre la figura.
- *Arrastre* con traza activa, este arrastre da la opción de mover un punto base con una traza[15], la cual deja un rastro de donde se está realizando dicho arrastre.
- Prueba de *arrastre*, es una prueba que se hace sobre los puntos base de una construcción para verificar si fue realizada correctamente o no, en otras palabras, para observar si la construcción o reconstrucción de una figura realizada mantiene las propiedades deseadas.

El uso de estas modalidades de arrastre proporciona un apoyo y complemento en el trabajo de buscar soluciones a actividades de problemas abiertos en los AGD, promoviendo la creación de conjeturas y argumentos a partir de la exploración de características de la construcción, tal como lo mencionan Díaz y Zuluaga (2013):

---

[15] En Cabri existe una herramienta o función denominada “traza” que permite hacer visible una trayectoria del desplazamiento realizado a un objeto geométrico a lo largo de la pantalla

> …estás modalidades de arrastre permiten hacer un seguimiento de los argumentos que han sido usados para la producción de la conjetura y los argumentos que permitan generar una demostración, como medios que sugieran la validación matemática de los resultados de los argumentos empíricos dadas en las exploraciones dinámicas. (p 48).

Esto permite observar que los usos de las modalidades de arrastre ofrecen un rico potencial semiótico, las cuales pueden ser aprovechadas por el docente para ayudar a desarrollar significados matemáticos relacionados con la noción de declaración condicional

Por otro lado, de manera complementaria a las características del uso del arrastre también se encuentra la medida. Esta herramienta, al igual que el arrastre es una herramienta muy destacable de los AGD, que puede ser utilizada de diferentes maneras de acuerdo al tipo de exploración, es decir, que su uso está ligado al arrastre realizado por el usuario en la resolución de problemas abiertos.

El uso de la medida se caracteriza por la opción de medir partes destacables o importantes en la estructura creada con el fin de identificar dependencias de carácter cualitativo o comprobar si la construcción cumple una determinada característica, como la igualdad de longitud de segmentos o ángulos, y si es el caso reconstruir la figura. La medida puede generar una visión más profunda de las figuras y sus características, permitiendo la creación y evolución de significados personales a significados matemáticos, al fomentar la formulación de conjeturas, su validación por medio de la comparación de medidas y así ser usadas para elaborar una demostración (Sinclair & Robutti, 2013).

Al igual que el arrastre, la medida también tiene sus modalidades como se describen en Sinclair y Robutti (2013), entre las que se puede encontrar las modalidades: (wandering measuring) *medición* vaga, (guided measuring) *medición* guiada, (perceptual measuring) *medición* perceptual, (validation measuring) medición de validación, (proof measuring) *medición* de demostración.

- *Medición vaga*: este tipo de medición está conectada con el arrastre vago, ya que, aquí usándolo junto con una medición a algunos elementos de la construcción, se realiza una exploración al azar para buscar algunas relaciones cuantitativas.
- *Medición guiada:* aquí se hace referencia al uso del arrastre con el fin de obtener y observar una situación particular, basándose en las posibles modificaciones de una o varias medidas.
- *Medición perceptual*: se hace referencia al uso de la medida para comprobar una valides de una intuición acerca de una propiedad.
- *Medición de validación*, su uso es muy similar a la prueba de arrastre y consiste en utilizar la medida con el fin de comprobar una conjetura y determinar si es aceptada o rechazada.
- *Medición de prueba:* esta modalidad no es muy usada, ya que es usada para hacer una validación de la demostración desde el punto de vista experimental

Con el uso de estas modalidades se promueve la creación de conjeturas ya que permite observar y comprar los datos, esto a su vez favorece la relación del nivel intuitivo y el nivel teórico. Sin embargo, el uso de esta herramienta no implica que se logre una conjetura correcta, se ha identificado que esta puede llevar a los estudiantes a conclusiones erróneas o conflictos. Esto se debe a que las medidas que se presentan en el AGD son aproximaciones debido a la limitación de pixeles en la pantalla, por consiguiente, el alumno puede tener problemas en la unión entre el *nivel intuitivo* y el *nivel teórico*. No obstante, aquí se debe resaltar el papel del docente como aquel que plantea adecuadamente las tareas en el AGD y posibles intervenciones para evitar conflictos con el objetivo deseado cuando se usan las diferentes herramientas del AGD.

2.1.6.4 Papel del docente

En tanto al docente, él tiene un papel importante, ya que cuando integra el artefacto como mediador semiótico, lo hace con una intencionalidad, la cual es la producción de significados por los alumnos, los cuales se relacionen con el cocimiento matemático (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Díaz & Zuluaga, 2013). Puesto que el artefacto en si solo es un objeto y su uso no designa la producción de ideas matemáticas, es por esto que los docentes tienen un objetivo didáctico cuando se emplean en las aulas de clase.

Con el fin de aprovechar dicho artefacto y evocar algunos conocimientos matemáticos, en este caso para la geometría, el docente debe diseñar tareas adecuadas para de manera controlada donde se relacione el uso del artefacto con un conocimiento en particular, y con el ámbito de la cultura matemática. Es aquí donde es importante que el docente considere el potencial semiótico del artefacto y de los posibles procesos semióticos que pueden desarrollar los estudiantes, para así con sus intervenciones guiar a los significados personales que emergen del uso del artefacto a significados matemáticos y que se encuentran vinculados con la producción de las soluciones a las tareas. Lo anterior permite reconocer al docente como un mediador semiótico.

Al tener en cuenta lo mencionado anteriormente, es como el docente puede explotar los procesos semióticos que se asocian a la integración del artefacto como mediador semiótico de un conocimiento. De manera complementaria a todo lo mencionado referente al docente, él debe considerar una metodología que le permita clasificar los momentos a desarrollar en las tareas. Para esta indagación se tomó en cuenta el ciclo didáctico como herramienta metodológica, la cual permitió ordenar las distintas actividades que se plantearán a los alumnos, y de la cual se hablara a continuación.

2.2 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Ya que la TMS se centra en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la producción de los significados personales que se producen en la interacción con un artefacto, y como este puede ser llevado a un conocimiento matemático. En esta indagación se abordó y analizó una perspectiva didáctica que permitiera el diseño y construcción de una secuencia de tareas con problemas abiertos vistos desde el *ciclo didáctico*, el cual tiene una estrecha relación con la TMS.

2.2.1 Ciclo didáctico

El *ciclo didáctico* es visto como una estructura de secuencias de tareas de enseñanza para los estudiantes, en donde se describen los procesos semióticos usados por ellos en el desarrollo de actividades donde se integran artefactos, es decir, que se crean circunstancias que conllevan al estudiante a resolver problemas utilizando un determinado artefacto, en donde se trabaja con situaciones que permitan la creación de signos individuales, para luego producir signos colectivos que se reconocen en una comunidad matemática[16].

En la secuencia de tareas a plantear se debe encaminar al estudiante a la resolución de problemas abiertos en donde se fomenta la producción de argumentos y conjeturas, permitiendo a su vez vincular al usuario con una teoría, propiciando la continuidad entre un pensamiento espontaneo hacia el pensamiento matemáticamente aceptado. Por lo cual es en donde el alumno puede experimentar una situación similar a la de un investigador matemático, al intentar probar o analizar teoremas o postulados (Herrera, 2013)

En el ciclo didáctico como lo menciona Herrera (2013), se aprovecha las relaciones que existen entre el artefacto, las actividades y el conocimiento matemático. Por un lado, el artefacto con la actividad, cuando se busca proporcionar una solución a las actividades planteadas y, por otro lado, el artefacto con el conocimiento matemático, al construir conocimientos basados en la experimentación con el artefacto. Esto permite ver al artefacto como un instrumento de mediación semiótica para la construcción de conocimientos, en nuestro caso particular conocimientos geométricos.

En tanto a la estructura del ciclo didáctico se tienen en cuenta tres momentos asociados con distintos tipos de tareas a desarrollar con un artefacto, cuyo objetivo es que el docente ayude a transformar los significados personales, en significados matemáticos (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2013). En Bartolini Bussi y Mariotti (2008), se explican dichos momentos relacionados con las actividades. A continuación, se presenta una breve descripción de ellos:

- *Actividades con los artefactos*: en donde los alumnos se enfrentan a tareas que deben ser desarrolladas con el artefacto, permitiendo promover la aparición de signos

[16] Se entendió como comunidad matemática al grupo de personas quienes usan sus conocimientos matemáticos para dar solución a problemas planteados, en este caso son los estudiantes junto con el docente quien los dirige.

específicos relacionados con el uso del artefacto y sus herramientas particulares. Por lo general, se usan para iniciar el ciclo didáctico.

- *Producción individual de signos*: estas actividades se centran en la producción de procesos semióticos, en donde los estudiantes se enfrentan de forma individual a actividades, las cuales son relacionadas con la producción escrita sobre las experiencias y reflexiones que se dieron en el desarrollo de la actividad.

- *Producción colectiva de signos*: Este momento presentarán discusiones colectivas particulares, que se tomarán como discusiones matemáticas, en las cuales se destaca al maestro, puesto que debe guiar estas discusiones para llevar los significados personales adquiridos a significados matemáticos, considerando las contribuciones de los estudiantes y explorando las potencialidades semióticas del artefacto.

En la Ilustración 4, se muestra las relaciones de los momentos anteriormente mencionados como ejes de una secuencia de enseñanza, los cuales como lo mencionan Bartolini Bussi y Mariotti (2008), forman un ciclo, ya que el vínculo entre los tres momentos nunca supone una linealidad, pero si una interrelación mutua y cíclica, y los cuales constituyen el orden en cómo se trabajó la secuencia de las tareas diseñadas, con el fin de generar significados matemáticos.

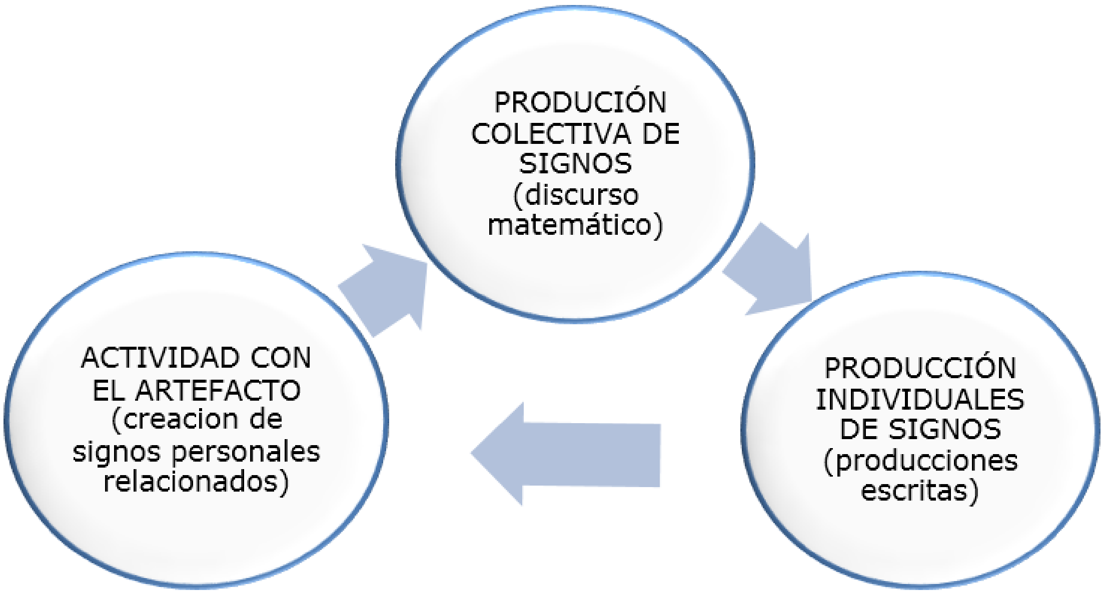


***Ilustración* 4.** Característica del ciclo didáctico.

Cabe resaltar que el ciclo didáctico permite estructurar la secuencia de enseñanza, proporcionando un marco tanto para el diseño como para el análisis de las distintas actividades puestas en acción en el escenario educativo (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

En cuanto al diseño de las tareas a trabajar, como se ha mencionado anteriormente, se tuvo en cuenta la Geometría Euclidiana, particularmente, el uso del criterio LAL de congruencia de triángulos, por lo cual, estos fueron fundamentales, ya que con ellos se plantearon las situaciones para el registro y su posterior análisis de los procesos desarrollados por los estudiantes, así como las relaciones que se establecieron con el artefacto y la evolución (con posibles intervenciones del docente) de los significados personales hacia significados matemáticos presentados por parte de los estudiantes.

2.3 DIMENSIÓN MATEMÁTICA

La demostración matemática hace parte de un sistema deductivo el cual consta de axiomas, conceptos, definiciones, postulados, teoremas, lo cual forma una estructura esencial para la creación y justificación de nuevos conocimientos, así como la articulación entre ellos (De Villiers, 1993). Al trabajar con la demostración en las aulas de clase, es necesario tener en cuenta la temática para el diseño de las tareas y su propósito, el cual es la construcción del conocimiento matemático y dar una comprensión de cómo se desarrolla, al promover la exploración comunicación, explicación y razonamiento.

Al trabajar con la geometría euclidiana en las aulas de clase, se favorecer a la construcción del conocimiento matemático, ya que se puede vincular la creación de figuras geométricas y sus posibles vínculos con la teoría, generando una experticia científica que le permita la creación de un nuevo conocimiento. Particularmente, como lo menciona Herrera (2013), la UC usa experiencias relacionadas con la geometría, con el fin de fomentar por un lado la producción de conjeturas que conecten un sistema de conceptos con las técnicas correspondientes a una teoría y, por otro lado, la necesidad de incluir y crear una demostración para la justificar la veracidad de un conocimiento nuevo.

En relación con lo anterior, en este trabajo de indagación se tomó en cuenta la necesidad de desarrollar en los estudiantes un sentido de la argumentación en la producción de soluciones a problemas propuestos, en donde se conecte la teoría (geometría euclidiana) vista por los alumnos con el conocimiento que se desea generar, para que los argumentos de los alumnos les ayuden a validar la veracidad de la solución, y a su vez observen la importancia de la argumentación y su vínculo con la demostración en los procesos de validación de un conocimiento. Y que a geometría es muy amplia de trabajar, se toma el tema de los criterios de congruencia de triángulos, en particular el criterio LAL.

2.3.1 Acerca de la geometría

Un aspecto general de la geometría es tener un fuerte vínculo con otros dominios matemáticos, otras ciencias y con la vida cotidiana, permitiendo relacionar los conocimientos con aspectos más cercanos a los alumnos. Como lo mencionan Camargo y Acosta (2012), en la geometría existe una mutua dependencia entre lo empírico y lo teórico, la cuales se pueden vincular con experiencias individuales o grupales para favorecer la producción del conocimiento, mientras que el uso de la geometría se vincula con la solución a problemas, interpretar hechos, dar explicaciones a sucesos, realizar obras de arte, entre otros.

En los inicios de la geometría, las antiguas culturas como la babilonia y la egipcia usaban aplicaciones prácticas aplicadas a la construcción y la agrimensura, dado que este último se encarga de la medición y cálculo de áreas de terrenos, de esto se obtienen el nombre de geometría γεωμετρία "medición de la tierra" (γῆ (gê), "tierra", y μετρία (metría), "medición"). Durante el surgimiento de civilizaciones importantes como la china, india, egipcia, griega, maya y azteca, esta ayudó en la solución de problemas prácticos como la medición de longitudes, área y volúmenes y sus relaciones con la tierra (Camargo & Acosta, 2012), un ejemplo de ello es en el antiguo Egipto, quienes podían calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y tenían conocimiento para calcular de forma los volúmenes de prismas rectos y de forma muy aproximada a los cilindros (Cardenas, 2013).

Lo anterior se debe a que estas figuras eran usadas por ellos para la creación de pirámides y esculturas. Una muestra de esto se puede ver con la evolución de la urbanización de Mesopotamia y Egipto, en donde se dan las primeras aplicaciones de lo que se conoce como el teorema de Pitágoras, quienes ya argumentaban que las construcciones con el fin de guardar equilibrio deberían tener ángulos rectos con respecto a los cimientos de la construcción. Para establecer este ángulo recto usaban una cuerda de doce nudos como se presenta en la Ilustración 5, dichos nudos eran equidistantes y formando un triángulo como se muestra en la siguiente figura.

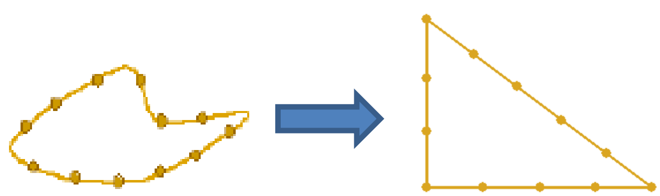


Ilustración 5. Triángulo rectángulo con la cuerda de doce nudos.

Posteriormente con los griegos, quienes implementaron el uso de la regla y compás para crear construcciones geométricas, le dan una nueva evolución, hacia una forma de disciplina científica en donde se comienza a dar un interés por fundamentar y crear un conocimiento de forma deductiva. Uno de los primeros matemáticos griegos es Thales de Mileto (VI a.C), quien, gracias a sus actividades y viajes como comerciante, logró viajar a Egipto y adquirir gran parte del conocimiento e interés por la geometría. A él se le atribuye los siguientes hechos geométricos (Cardenas, 2013):

1. Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales.
2. La suma de los ángulos de un triángulo es equivalente a dos rectos.
3. Los dos ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
4. En dos rectas que se cortan, los ángulos opuestos son iguales.
5. Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia, de forma que uno de sus lados coincida con el diámetro de la misma, es rectángulo.

En la Ilustración 6, se observa una imagen que representa el cuarto hecho geométrico, es decir que se presentan cuáles son los ángulos congruentes formados por dos rectas secantes

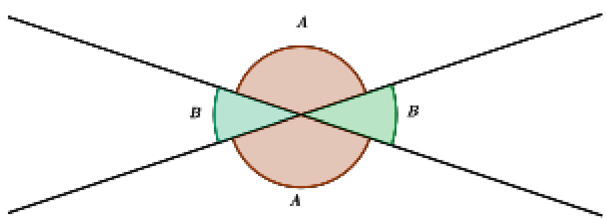


Ilustración 6. Ángulos opuestos por vértice.

A Thales también se le atribuyen importantes teoremas para la semejanza de triángulos, y de segmentos proporcionales. Otros personajes que se también se destacan por aportar grandes desarrollos teóricos de las proporciones son: los pitagóricos, quienes enunciaron y demostraron el Teorema de Pitágoras, el cual ya era aplicado con anterioridad por los babilonios; y a Eudoxo de Cnidos (390 – 337 a.C,).

Con lo anterior se dan los primeros desarrollos de la geometría euclidiana, la cual se basa en un sistema axiomático y los cuales se encuentran registrados en los Elementos de Euclides, hacia el año 300 a.C. Euclides (IV a.C), es la persona que recopiló, sintetizó y puso orden a gran parte de los conocimientos matemáticos desarrollados de la época en su libro Los Elementos, en donde se encuentran las definiciones, postulados, nociones comunes y teoremas fundamentales para el estudio tanto de la Geometría Plana, la teoría relacionada con las razones y la teoría sobre triángulos y polígonos semejantes distribuidos de la siguiente forma: Los primeros seis libros tratan sobre Geometría Plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el libro X sobre las magnitudes irracionales o inconmensurables y los tres últimos sobre geometría de poliedros y otros sólidos (Cardenas, 2013).

La característica más resaltante de Geometría de los Elementos es que se fundamenta en un sistema axiomático, en donde se utilizan ideas intuitivas, de percepción y abstractas, convirtiéndose en un sistema importante de racionalización (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Pero años más tarde debido al estudio acerca de los postulados y de los posibles conocimientos presentados en los elementos de Euclides, se comienzan a dar nuevas ideas relaciones en la comparación de triángulos como el uso del término congruencia partiendo de la semejanza, así como de la reorganización de la estructura de los axiomas, postulados y teoremas de la geometría. Un ejemplo de nuevos libros acerca de la geometría es la obra de David Hilbert llamada "Fundamentos de Geometría", en donde se encuentran nuevos grupos de axiomas con los cuales se podían demostrar los teoremas fundamentales de Euclides. Particularmente, en la propuesta de Hilbert se encuentra el siguiente axioma de las rectas paralelas:

- Axioma de las paralelas (axioma de Euclides): sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a la recta a.

Al tener en cuenta las condiciones en este axioma se obtiene la definición de lo que es una recta paralela a una recta a que pasa por el punto A, garantizando que dicha recta es única. De igual forma se encuentra un teorema destacable para esta indagación el cual permite identificar la congruencia de los ángulos formados entre dos paralelas y una tercera cortante, el cual se describe a continuación y una representación de él en la Ilustración 7.

- **Teorema:** cuando dos paralelas son cortadas por una tercera recta, los ángulos correspondientes y alternos son iguales. Y recíprocamente la congruencia de los ángulos correspondientes o alternos tienen como consecuencia que las rectas son paralelas

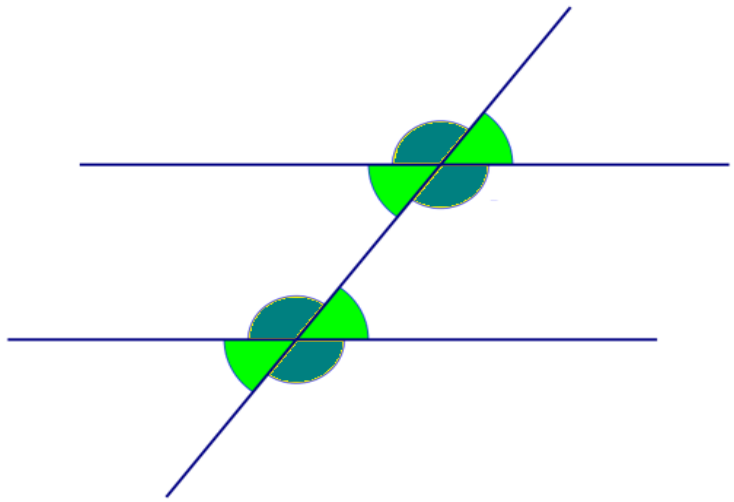


Ilustración 7. Ángulos congruentes formados por dos rectas paralelas y una tercera cortante.

Lo anterior nos da una introducción hacia lo que es la congruencia de objetos geométricos planos, para lo cual se toma en cuenta las relaciones entre las figuras y el sistema axiomático.

2.3.2 Acerca de la congruencia en el plano

La congruencia o igualdad entre dos figuras geométricas planas (ejemplo triángulos), de acuerdo con la teoría de Euclides está conectada con un proceso abstracto que es el de poder superponer una sobre otra (Camargo & Acosta, 2012). Pero este proceso es complejo de realizar. En tanto con la teoría de David Hilbert está relacionada con el proceso de comparación de medidas de longitud tanto de lados y ángulos de dos figuras, las cuales deben ser iguales al formar parejas entre la primera y la segunda imagen (Melo et al, 2015; Cadenas, 2013; Hilbert, 1996).

Como consecuencia de esto, usando la teoría de Hilbert (1996), se puede decir que si se tienen dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y sus respectivas longitudes AB y CD. Si $AB = CD$, entonces los segmentos son llamados congruentes y se escribe $\overline{AB} \cong \overline{CD}$[17] (Cardenas, 2013). Posteriormente a esto se presentan los siguientes teoremas:

[17] El uso del símbolo ≅ es usado en la geometría plana para referirse a la comparación de dos objetos escritos por su a la izquierda y derecha de este símbolo, los cuales son congruentes.

- **Teorema:** La congruencia de dos segmentos es reflexiva: Todo segmento es congruente con sí mismo, es decir $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
- **Teorema:** La congruencia de segmentos es simétrica: Si un segmento $\overline{AB}$es congruente con otro segmento$\overline{A'B'}$, ($\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$), entonces $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$
- **Teorema:** La congruencia de segmentos es transitiva. Si un segmento $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y a la vez este segmento es congruente con otro $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$; se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$.

Se puede establecer una articulación fundamental entre la medida y los segmentos, usando una correspondencia donde se identifique que a cada segmento con un número positivo al que se llamó medida. En tanto a la congruencia de ángulos, intuitivamente se puede decir que, si dos ángulos tienen la misma amplitud, entonces estos ángulos son congruentes. Un axioma que permite combinar la longitud de segmentos y la congruencia de lados es:

- Axioma: Si $A; B; C$ son tres puntos que no pertenecen a una misma recta y $A'; B'; C'$ son otros tres puntos no pertenecientes a una misma recta y si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$; $\measuredangle BAC \cong \overline{B'A'C'}$, entonces $\Delta ABC \;\cong\; \Delta A'B'C'$:

Entre los teoremas que se pueden observar en la congruencia de ángulos están: Teorema 2.4, que describe la idea transitiva entre la congruencia de ángulos:

- Teorema: Si los ángulos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle A'O'B'$ son congruentes a un tercero $\measuredangle A''O''B''$; entonces $\measuredangle AOB$ es congruente con el ángulo $\measuredangle A'O'B'$; es decir, dos ángulos congruentes a un tercero son congruentes entre sí.

Con lo mencionado anteriormente al comparar dos triángulos es válido pensar que, si uno se puede superponer sobre el otro, entonces estos dos triángulos son congruentes. Ahora si se usan las ideas de la congruencia de segmentos y de ángulos explicados anteriormente, es posible establecer la congruencia de triángulos, de la siguiente manera: Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se definen como congruentes si sus respectivos lados y ángulos son congruentes. Es decir:

- $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ si existe una correspondencia entre los vértices A y A', B y B', C y C' tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$; $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$, y $\measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A'$:

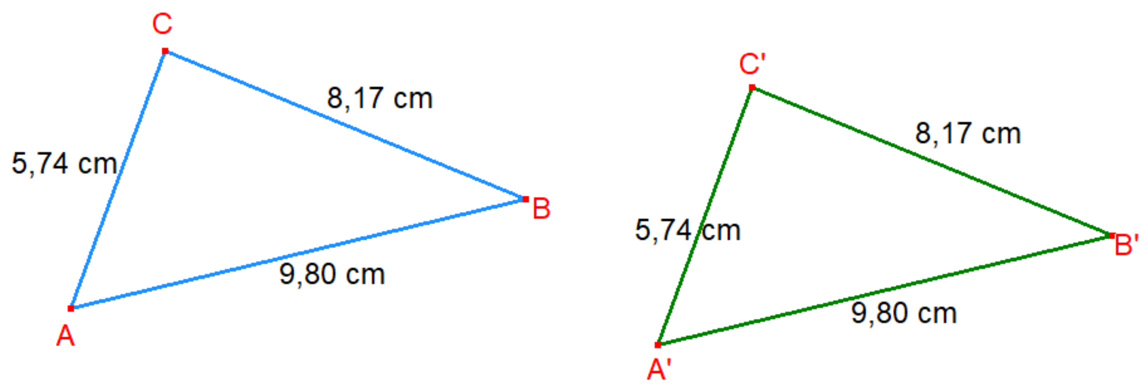


Ilustración 8. Definición de triángulos congruentes.

De lo anterior se obtienen los teoremas que permiten establecer los criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) en donde se puede garantizar la congruencia de los triángulos limitando algunas condiciones iniciales o congruencias de la definición anterior. Dichos teoremas son presentados a continuación (Cardenas, 2013):

- **Teorema LAL:** Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen dos lados congruentes, y el ángulo que se forma entre ellos también es congruente, entonces los dos triángulos son congruentes, es decir, Si los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ satisfacen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

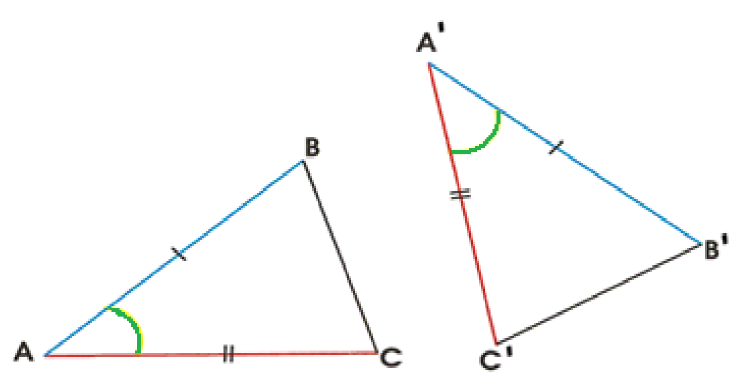


Ilustración 9. Congruencia LAL.

- **Teorema ALA**: si los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta A'B'C'$ satisfacen las congruencias, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

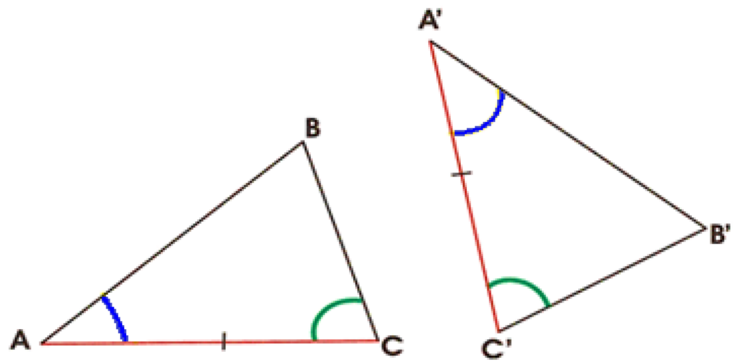


Ilustración 10. Congruencia ALA.

- **Teorema LLL**: Si en los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta A'B'C'$ se tienen las congruencias $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

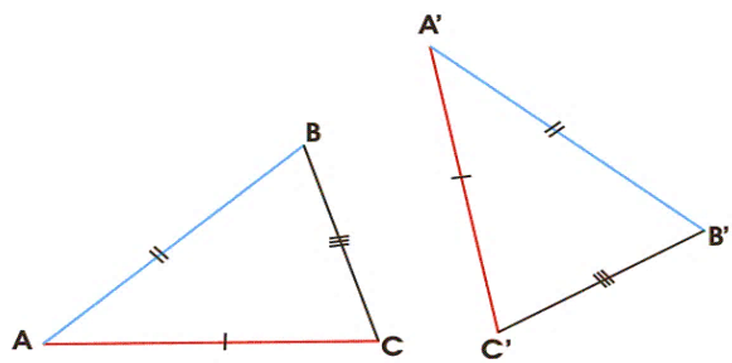


Ilustración 11. Congruencia LLL.

2.3.3 La geometría y los AGD

De acuerdo con el MEN (2006) estos criterios de congruencia son trabajados en la educación colombiana entre los grados 8 y 9, en donde se presentan como postulados[18] y para ser trabajados en clase se recurre a ejemplos y ejercicios con imágenes estáticas acerca de sus aplicaciones y relaciones necesarias para ser usados, con los que se espera que el estudiante sea capaz de justificar la aplicación de estos criterios[19].

Pero lo anterior no estimula las relaciones de lo empírico y lo teórico de la geometría, que como se dijo con anterioridad favorecen la producción del conocimiento. En particular, como lo menciona Camargo y Acosta (2012), hoy en día se ve la necesidad de enseñar la geometría fundamentada en la producción de experiencias empíricas debido a que es esencial para fomentar el razonamiento matemático en los estudiantes

En las aulas de clase se ha enseñado la geometría euclidiana usando papel y lápiz, realizando construcciones geométricas con regla y compás (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). No obstante, se tienen algunas dificultades al trabajar conceptos geométricos con estas herramientas, ya que aquí se obtienen construcciones estáticas. Pero gracias a los diferentes desarrollos de paquetes computacionales de geometría dinámica desarrollados en las últimas décadas, como el AGD Cabri, los cuales permiten realizar construcciones geométricas de carácter no estático, es decir, donde los objetos pueden ser modificados y que se basan en el sistema de regla y compás.

Debido al potencial de los AGD en la experimentación y sobretodo con su tratamiento visual (De Villiers, 1993, Mariotti, 2006; 2013) han promovido el desarrollo de investigaciones sobre la introducción de estas tecnologías digitales en las aulas clases de matemáticas, creando teorías sobre su implementación para fomentar la argumentación en los estudiantes. Esto se debe a que ellos permiten trabajar con objetos abstractos haciéndolos más plausibles (De Villiers, 1993; Mariotti, 2006), logrando establecer un vínculo más favorable entre el objeto abstracto y la teoría, y a su vez fomentar la construcción de un conocimiento significativo (Camargo & Acosta, 2012).

[18] La palabra Postulado hace referencia a una verdad que es aceptada ante una comunidad y no es demostrada en el ámbito escolar.
[19] Esto es basado en las imágenes que se presentan en el libro escolar Matemática 2000.

Con lo anterior se puede ver que los estudiantes pueden crear un conocimiento geométrico que tenga una estructura deductiva.

Por lo mencionado, cuando se plantea el uso de un AGD se realiza con un determinado objetivo, para lo cual es necesario tener en cuenta todo lo mencionado en el marco teórico, como lo es la UC, la TMS, de manera articulada como se presenta a continuación:

2.4 ARTICULACIÓN DE LOS MARCOS TEÓRICOS

Las dimensiones teóricas presentados anteriormente aportan elementos importantes que permiten complementarse para observar el proceso de la producción de una conjetura hasta su posible demostración que abre paso a introducir a los estudiantes a los procesos demostrativos, para la comprensión de los conocimientos matemáticos, en particular del criterio de congruencia LAL.

La TMS y la UC desde la dimensión cognitiva, aportan características relevantes que se complementan para dar cuenta de una continuidad en el proceso de la conjetura a la demostración desarrollada por el estudiante, mediante la inclusión y análisis del uso del instrumento de mediación semiótica Cabri y como este posibilita la evolución de significados personales a matemáticos al resolver la secuencia didáctica diseñada usando problemas abiertos. En tanto que el *Ciclo Didáctico* brinda una metodología para el diseño, análisis e implementación de la secuencia de las tareas en donde se usen los problemas abiertos con el fin de estimular la producción de significados.

Y, por último, la dimensión matemática que permite hablar de una teoría construida en donde se evidencia la importancia del proceso argumentativo y demostrativo del conocimiento geométrico y como este se favorece en la interacción de los instrumentos de mediación semiótica y el diseño de la secuencia didáctica.

La articulación de estos marcos genera una propuesta para caracterizar los entornos de aprendizaje que son propicios para generar un pensamiento y discurso matemático en alumnos con el fin de mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

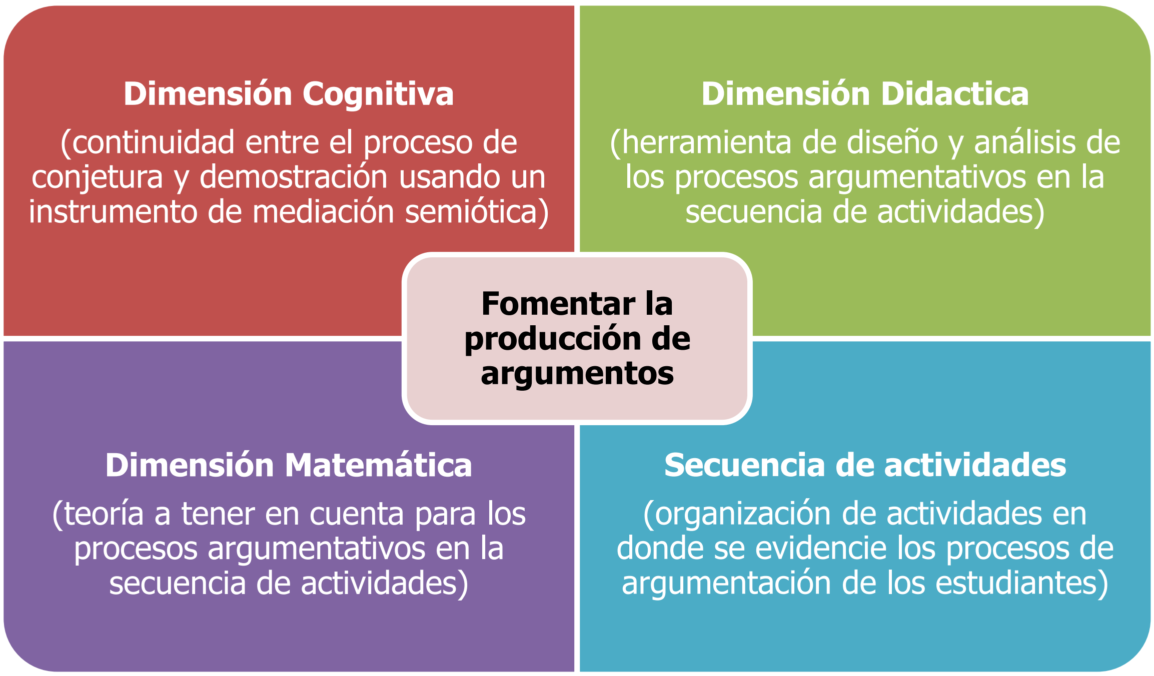


Ilustración 12. Articulación de las dimensiones.

CAPITULO III

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS PREVIOS

En los capítulos anteriores se ha presentado tanto una base teórica como la forma en que se encuentra la problemática educativa a tratar en esta indagación. Por lo cual, en este capítulo se da una breve caracterización de la población, y particularmente, una descripción del tipo de metodología que se desarrolló, seguido de las acciones y etapas que se establecieron en la secuencia de las tareas propuestas.

Para la elaboración y trabajo de las tareas desarrolladas en el aula de clase, se tuvo en cuenta un acercamiento a la *Etnografía,* como metodología adoptada que es de carácter cualitativo y que se puede conectar con el *Ciclo Didáctico*, dado que la primera se centra en la interacción social que se puede producir al trabajar problemas y la segunda que es aquella que sirve como una herramienta para gestionar y ordenar tareas diseñadas. Una particularidad que tiene la *Etnografía* es que aporta datos descriptivos sobre los contextos y creencias de los participantes en el escenario educativo para la recolección de los datos.

Para el diseño de las cuatro tareas, en esta sección de este documento se presentan los criterios que relacionan el *Ciclo Didáctico* y la *Etnografía*. De igual forma se observará la estructura del *Ciclo Didáctico*, donde los estudiantes interactuaron con el AGD y como ellos utilizaron medios de comunicación (escritura y diálogos registrados entre ellos) para que puedan expresar sus ideas matemáticas. Aquí también se hizo una descripción general y un análisis previo de cada una de las tareas diseñadas con el fin de conocer el objetivo y los conocimientos previos que debieron tener los estudiantes, y de igual forma determinar la dirección que debieron seguir las discusiones y soluciones presentadas por ellos.

3.1 METODOLOGÍA

Aquí se han considerado los siguientes componentes para realizar la experimentación de las tareas diseñadas: la *Etnografía* como la metodología cualitativa y el *Ciclo Didáctico* como organizador de la secuencia de las tareas. A continuación, se presenta una breve caracterización de cada uno de ellos y finalmente una sección de cómo se relacionan estas dos y su afinidad con las tareas.

3.1.1 Etnografía

Entre las diferentes metodologías de carácter cualitativo, la *Etnografía* es una de las más antiguas, y menos exploradas (Rivas-Meza, 2006). Sin embargo, ésta ha tenido una revolución en la metodología de las ciencias humanas y sociales, evidenciando un nuevo interés y necesidad por la metodología cualitativa. La *Etnografía* se caracteriza por estudiar, describir e interpretar las relaciones que se pueden formar en un determinado grupo de seres, que bien podría ser una familia, un aula de clase, una empresa, un gremio obrero, e incluso grupos sociales, etc. dentro de los cuales se forman roles o normas de manera interna que pueden explicar la conducta individual o del grupo (Martínez, 1998).

Por lo cual, en la *Etnografía* se busca examinar los modos en que las personas aplican reglas y percepciones de sentido común en sus formas de comunicación al encontrarse en determinadas situaciones, con el fin de poder explicarlas (Martínez, 1998). Con lo anterior, se da a entender que para realizar un estudio bajo la *Etnografía* se debe tener en cuenta las interacciones que se pueden dar entre los sujetos. La *Etnografía* en el ámbito de la educación, al ser una metodología cualitativa se destaca la importancia de ella, puesto que el investigador (bien sea el docente o una persona diferente a él) puede imprimir una intención al escenario a estudiar, el cual mediante la aplicación de actividades adecuadas puede generar una continuidad entre una conjetura y la demostración (Díaz & Zuluaga, 2013).

Tomando en cuenta que en la *Etnografía* educativa, según Díaz & Zuluaga (2013), los estudiantes son considerados como sujetos activos de la investigación, puesto que tienen conocimientos previos y creencias culturales dentro del entorno social, en este caso el escenario escolar. De la misma manera, ellos son responsables de las diferentes acciones y comportamientos que se realizan para la solución de las tareas. En particular, en esta indagación, se estudiarán las acciones de los alumnos tales como los *argumentos* y los *procesos cognitivos* que se puedan dar en las soluciones de las tareas, las cuales se recogerán, registrarán y analizarán con forme a los objetivos propuestos en este trabajo.

Otra característica de la *Etnografía* educativa es su dimensión práctica, en la cual se apoyan los procesos de reflexión y critica para el mejoramiento del aprendizaje, es decir que, lo que se busca es ayudar a crear o fortalecer alternativas teóricas o prácticas, que permita la superación de dificultades y beneficien las intervenciones pedagógicas para un mejor aprendizaje (Díaz & Zuluaga, 2013). Para esta indagación se buscó el mejoramiento del aprendizaje e internalización del conocimiento matemático de la Geometría Euclidiana que los estudiantes podrían desarrollar, en particular, sobre el criterio de congruencia de LAL y las relaciones necesarias para su aplicación, principalmente, sobre el uso de los argumentos emitidos por los estudiantes cuando pretenden generar una prueba de una conjetura.

3.1.2 Ciclo Didáctico

En cuanto al *Ciclo Didáctico*[20], permite generar una estructura para el diseño y análisis de una secuencia de tareas en donde se integra un artefacto, y describir los procesos semióticos usados por los estudiantes en el desarrollo de estas. Estas tareas se deben centrar en el estudiante y asociar su producción a tres tipos de tareas: *Actividades con el artefacto, producción individual de signos*, y *producción colectiva de signos.* A continuación, se presenta una descripción de la unión existente entre la etnografía como metodología cualitativa y el ciclo didáctico como organizador y analizador de los momentos de producción de los estudiantes en el aula.

3.1.3 La etnografía y el ciclo didáctico

Para trabajar esta indagación se tomó un acercamiento a la *Etnografía* y el *Ciclo Didáctico,* las cuales se concentran en los estudiantes y su producción de resultados asociadas a las soluciones de las tareas a trabajar. Por lo tanto, es necesario tener en cuenta las relaciones que se pueden establecer entre ambas. En un primer ámbito, para la *Etnografía* educativa, se resaltan tanto los

[20] El *Ciclo Didáctico* se describió con más detalle en el capítulo del marco teórico, en la sección 2.2.1.

comportamientos como los discursos que se presentan en la interacción con otros individuos, los cuales hacen parte del contexto en el que se desenvuelve el desarrollo del trabajo, así el estudiante hace parte activa de la indagación al participar con medios de comunicación como los gestos de su entorno cultural, y sus argumentos son utilizados en los discursos. Por otra parte, el *Ciclo Didáctico* se caracteriza por formar un orden en las posibles interacciones entre los estudiantes y las tareas: *actividades con los actefactos, producción individual de signos y producción colectiva de signos*, con las que se fomentará la interacción de cada alumno con sus ideas.

Por lo anterior, se puede destacar que en la *Etnografía* y el *Ciclo Didáctico*, se estudian la producción del estudiante tanto individualmente como colectivamente, observando el uso de los medios de comunicación y particularmente, la producción de significados personales y cómo estos son guiados a constituir significados matemáticos utilizando argumentos para la solución de problemas matemáticos, en especial, cuando se quiere establecer un vínculo entre las conjeturas y la demostración de una proposición, para generar un mejor aprendizaje de un saber geométrico: el criterio de congruencia de LAL.

3.2 CARACTERIZACIÓN DE LAS TAREAS

A continuación, se presenta una descripción acerca de los criterios que se tuvieron en cuenta para el diseño de las tareas, las características generales de ellas y las relaciones de cada una con las etapas del *Ciclo Didáctico*:

3.2.1 Criterios del diseño de tareas

Principalmente, las tareas se diseñaron en forma de una secuencia, donde se tomó en cuenta que los estudiantes presentaban manejo poco frecuente del AGD, por lo cual, se efectuó una actividad previa (antes de la experimentación y de la toma de registros y datos) en donde los estudiantes pudieron recordar algunas herramientas de construcción del AGD y sus usos, con el fin de que adquirieran algunos elementos procedimentales y conceptuales para poder enfrentarse a las tareas planteadas. De esto, se consideró trabajar esta secuencia de con la resolución de problemas abiertos, realizando descripciones y justificaciones de las relaciones geométricas descubiertas, basándose en sus experiencias previas.

Debido a que el objetivo de esta indagación fue propiciar el proceso de creación de argumentos por parte de los estudiantes al enfrentase a unas tareas y como estos pueden ser usados en la producción de conjeturas y sus justificaciones, mostrando una estructura lógica, entonces se tuvo en cuenta que el grupo de estudiantes debe estar en constante debate dialógico, por lo que las tareas a trabajar se desarrollaron en parejas. Por otro lado, en estas tareas se estimuló la exploración, la creación y verificación de construcciones geométricas en Cabri, utilizando las herramientas de *arrastre* y *medida*.

Como complemento a esto se les solicitó a los estudiantes un escrito acerca de los procesos desarrollados en las soluciones de cada tarea como: la construcción geométrica, la conclusión de la tarea y los argumentos que les permitieron justificar la conclusión, esto se efectuó por un lado, con el fin de identificar la teoría geométrica utilizada en la solución, y por otro, para salir a defender su idea al realizar una exposición de su solución con lo cual se generó una experiencia similar lo que se hace en una comunidad científica, por ejemplo, en un grupo de geómetras discutiendo la validación de un teorema.

En particular, la Actividad 1, tiene el objetivo recordar e interiorizar en los estudiantes la propiedad matemática: “cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercera recta, los ángulos correspondientes y alternos son iguales. Y recíprocamente, la congruencia de los ángulos correspondientes o alternos tienen como consecuencia que las rectas son paralelas”, mediante la construcción geométrica que los estudiantes deben realizar en el AGD, destacando que esta tarea y su solución fue fundamental para solucionar las posteriores tareas.

Esta primera tarea es la única que se planteó, en donde ***no*** se les exigió una justificación adecuada de por qué la construcción final cumple las condiciones solicitadas, es decir, que el objetivo era recordar algunos conocimientos relacionados con esta tarea. A diferencia de las Actividades 2, 3 y 4 en las que ***si*** se requiere una justificación de las soluciones, dado que en estas tareas se deben utilizar los procesos y las soluciones de las actividades previas. Esto podría facilitar la creación de argumentos geométricos para la justificación por parte de los estudiantes de cada solución ya que utilizarían argumentos anteriormente socializados y aceptados.

A continuación, en la Tabla 1, se presenta una estructura acerca de las situaciones y criterios tomados en cuenta para el diseño a las tareas:

Tabla 1
Criterios de diseño para las tareas.

Criterios	Propósito de Aprendizaje	Se gestionó mediante
1	Generar internalización acerca de los usos de algunas herramientas del Cabri.	Producciones individuales
		Socialización del resultado
2	Uso de las herramientas arrastre y medida para la creación de conjeturas iniciales.	Producciones individuales
3	Soluciones por medio de método de prueba de conjeturas iniciales usando construcciones geométricas.	Producciones individuales
		Socialización del resultado
4	Uso de conocimientos previos para justificar un nuevo conocimiento.	Producciones individuales
		Socialización del resultado

Como se puede observar en la Tabla 1, se presentan los principales propósitos de aprendizaje que se tuvieron en cuenta en la elaboración de las tareas y así mismo, la identificación de los momentos que permitieron la gestión de estos en cada tarea. Por ejemplo, el primer criterio enfatiza en la internalización del uso de algunas herramientas del Cabri, este aprendizaje se llevó a cabo en dos momentos: en la *producción individual*, fomentada por medio de la construcción geométrica y la exploración de la figura construida; y en la *socialización del resultado* donde se presentó la utilización de las herramientas con un determinado propósito. En el caso particular del segundo criterio se consideró que se desarrolló solo en la *producción individual*, ya que es aquí donde se elaboran algunas conjeturas por parte de los estudiantes a partir de las exploraciones.

3.2.2 Descripción de las tareas diseñadas.

En esta sección del documento, se dan a conocer las tareas diseñadas y presentadas ante los estudiantes, mostrando su estructura, los propósitos, los conocimientos previos, la relación que ese puede establecer de cada tarea con el ciclo didáctico y un análisis previo de cada una, donde se expondrán los procesos que se espera que los estudiantes realizarían en las soluciones, esto con el fin de identificar cuáles podrían ser tanto los signos personales como los signos matemáticos que podrían emerger a la hora de realizar las tareas.

En cuanto al diseño de las tareas, se estructuran en forma de secuencia, de tal manera que para la solución se recurra a lo hecho en la anterior, esto con el objetivo de construir elementos y argumentos alrededor de una estructura demostrativa, donde los estudiantes pudieran reconocer la idea inicial o hipótesis y una conjetura o tesis a partir de las exploraciones. De igual forma, se buscó promover la exploración y elaboración de las construcciones para interiorizar características específicas del empleo de algunas herramientas del Cabri, particularmente, las relacionadas con rectas y circunferencias para la creación respectiva de ángulos y segmentos congruentes. Adicional a esto, las tareas se enfocaron en la creación de signos personales y matemáticos en los procesos de búsqueda de las soluciones, y en donde se evidenció el uso de los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes en la creación de argumentos.

Particularmente la estructura de cada una de las tareas, se dividió en tres partes: Parte I, Parte II y Parte III. La Parte I consistió en realizar una construcción geométrica inicial siguiendo instrucciones y utilizando algunas herramientas del Cabri. La Parte II se centró en la exploración de la construcción de la Parte I para la solución de preguntas y la elaboración de una *reconstrucción*[21] junto a su respectiva justificación acerca de porque efectivamente debería cumplir las condiciones solicitadas. Y por último en la Parte III, es en donde se expondrán las soluciones elaboradas por los estudiantes, donde se espera que se den opiniones de los procedimientos utilizados en la solución y si aceptan los procesos presentados. Aquí se espera que los estudiantes participen de manera pasiva quizás por el temor a la confrontación de sus propias ideas, sin embargo, las tareas están diseñadas para que las conclusiones y los resultados sean parecidos entre los grupos, con el fin de evitar discusiones muy complejas y difusas que puedan confundir a los alumnos. Y a partir de estas socializaciones, ellos deben generar una conclusión general de cada tarea.

A continuación, se presentarán las tareas diseñadas para trabajar con los estudiantes, y de cada una de estas, se indicarán los propósitos, los conocimientos previos y un análisis previo. Cabe

[21] La *reconstrucción*, hace referencia a realizar una nueva construcción geométrica similar a la inicial donde cumpla ciertas condiciones, que se solicitan en la tarea que se esté desarrollando.

resaltar que, en el análisis de las tareas, debido a que en la parte III de cada una de ellas, se realizó una socialización de los procesos utilizados para la elaboración de la solución y su justificación, por lo cual no se efectuá un análisis *a priori* de esta parte. De lo anterior, se analizarán las Partes I y II de las tareas mostrando unas posibles soluciones de estas.

3.2.2.1 Actividad 1

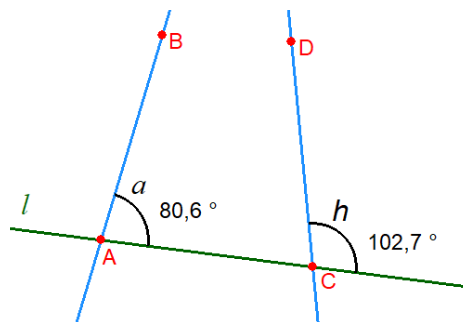
En la Tabla 2, se observa la Actividad 1 presentada a los estudiantes, en la cual se evidencian las partes I, II y III de manera clara, de igual forma se incluye una imagen en la Parte I de una posible construcción para ayudar a los estudiantes en su construcción geométrica inicial al seguir la secuencia de los pasos de la tarea.

Tabla 2
Actividad 1 presentada a los estudiantes

Actividad 1

Parte I

Construcción Geométrica:
(Crea un nuevo archivo y guárdalo como: “guía 1-1”)
Trace una recta $\boldsymbol{l}$, luego coloque un punto $\boldsymbol{A}$ que esté sobre $\boldsymbol{l}$, y otro punto en el plano que esté por fuera de $\boldsymbol{l}$, luego denótelo $\boldsymbol{B}$. Trace la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Construya un punto $\boldsymbol{C}$ sobre la recta $\boldsymbol{l}$ y un punto $\boldsymbol{D}$ fuera de las rectas $\boldsymbol{l}$ y más arriba de donde esté ubicado $\boldsymbol{C}$. Trace la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{CD}}$.



Utilizando las herramientas de Cabri: ***Marcar un ángulo*** y ***Medida de ángulo*****,** marque y mida el ángulo entre las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\boldsymbol{l}$ denotándolo $\boldsymbol{a}$. De igual forma, el ángulo formado por las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ y $\boldsymbol{l}$ denotándolo $\boldsymbol{h}$.

Parte II

Actividad
A continuación, responda por escrito los siguientes puntos, de forma clara y precisa en la hoja de respuestas.

1. ¿Qué puedes afirmar de $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y $\measuredangle \boldsymbol{h}$ de la construcción que realizaste?
2. ¿Qué sucede si arrastras los puntos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$?
3. ¿Qué condiciones piensas que se necesitaría para que $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{h}$ sean de igual medida?

Crea un nuevo archivo y guárdalo como “guía 1-2”.

4. Crea una nueva construcción geométrica donde los ángulos $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{h}$ siempre sean iguales. (describe paso a paso la construcción que realizaste)

5. Si puedes justificar: ¿Por qué la construcción geométrica si funciona? **Parte III** Socialización de las construcciones realizadas. Conclusión general de la Actividad.

Esta primera tarea tiene como propósito promover la construcción y exploración geométrica para motivar discusiones y argumentos geométricos que permitan la creación e identificación de las características necesarias de cuándo dos ángulos son congruentes. Con relación a los conocimientos previos que se requieren para trabajar con esta tarea se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. Comprender e identificar cuando dos rectas son paralelas.
2. Identificación de ángulos congruentes.
3. Utilizar las herramientas del AGD como son las marcas de ángulo y las herramientas de medida.

En cuanto al vínculo de esta tarea con el ciclo didáctico se presenta en la Tabla 3, y allí los vínculos entre las partes de la tarea con los momentos del ciclo didáctico y las reacciones que se espera estimular en cada una de ellas.

Tabla 3
Relación de la Actividad 1 con el ciclo didáctico.

Partes de la tarea	Momentos del Ciclo Didáctico		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
Parte I	El estudiante sigue los pasos de la construcción usando las herramientas que ofrece el AGD.		
Parte II	El estudiante realiza variaciones a los puntos B y D para buscar la solución de algunas preguntas. Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con los	El estudiante debe realizar una construcción en la cual se cumpla que los ángulos a y h sea siempre igual, y escribir los pasos realizados para la solución. Realiza una hipótesis de los resultados obtenidos y se	Se realizan discusiones de posibles construcciones, el procedimiento para la solución, así como el reconocimiento de los objetos geométricos relacionados para crear dos ángulos iguales y las características que

Partes de la tarea	Momentos del Ciclo Didáctico		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
	ángulos correspondientes formados entre dos rectas paralelas y una secante.	intenta argumentar de manera oral y escrita.	permitirían justificar la construcción solicitada.
Parte III	La presentación de la utilización de las herramientas para llegar a la solución obtenida.		Se presentan las soluciones, para tener una debate y llegar una conclusión general.

A continuación, se realiza un análisis previo de la Actividad 1 en donde se presenta lo que se esperó que los estudiantes realicen en el desarrollo y solución de esta tarea, esto con el fin de identificar los posibles signos personales y los signos matemáticos que pueden emerger, de igual forma para poder controlar lo sucedido en la experimentación.

Parte I

En ésta primera parte, los estudiantes deben realizar una construcción siguiendo los pasos descritos y basándose en la imagen presentada como ayuda en la actividad, por lo que se espera que la construcción sea similar a la Ilustración 13 la cual se muestra a continuación.

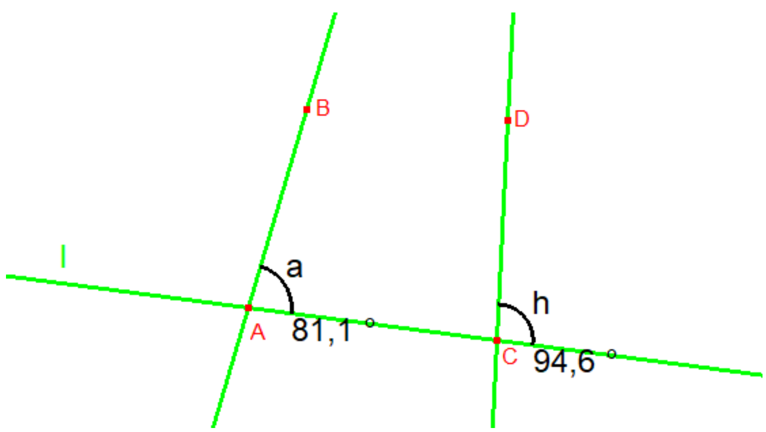


Ilustración 13. Construcción esperada parte I de la actividad 1.

Parte II

En esta segunda parte de la Actividad 1, los estudiantes se enfrentan a responder preguntas con base en los procesos desarrollados en la parte inicial. A continuación, se presenta la Tabla 4, en donde se exhiben las respuestas esperadas a las preguntas formuladas y en ella la Ilustración 14, la cual podría ser una posible construcción final solicitada.

Tabla 4

Solución esperada en Actividad 1

Pregunta	Solución esperada
1	Los ángulos tienen diferentes medidas.
2	al arrastrar el punto B el valor o la medida del ángulo a cambia, y al cambiar de posición el punto D también la medida del ángulo h cambia.
3	Se necesita que los puntos B y D estén en posiciones especiales. Se necesita que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ sean paralelas.
4	1- Se crea la recta l. 2- Se crea el punto A sobre la recta l. 3- Se crea el puno B de forma que esté por arriba de la recta l, es decir, por fuera de l. 4- Con la herramienta recta se crea la recta $\overleftrightarrow{AB}$. 5- Se crea el punto C que esté sobre l y a la derecha de A. 6- Con la herramienta recta paralela se crea la recta m, tomando como reta inicial a $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto C. 7- Se crea al punto D sobre la recta m que este en la parte superior de C. 8- Se crea un puno E sobre l y que este a la derecha de A. 9- Con la herramienta marcar un ángulo y con los puntos B, A y E se crea el ángulo a. 10- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle a$. 11- Se crea un puno F sobre m y que este a la derecha de A. 12- Con la herramienta marca de ángulo y con los puntos D, C y F se crea el $\measuredangle h$. 13- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle h$.

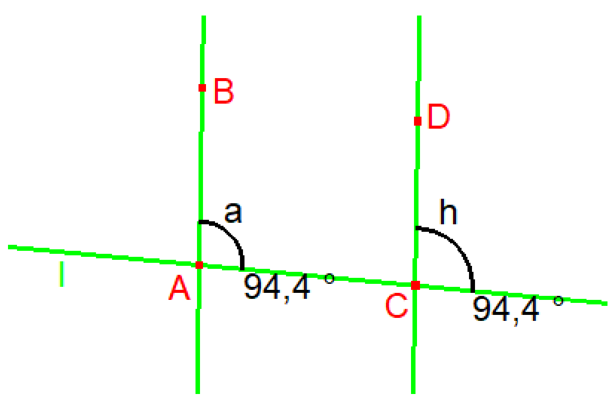


Ilustración 14. Construcción esperada parte II de la Actividad 1.

Pregunta	Solución esperada

5	Esta construcción conserva los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ de igual medida, ya que en ella se crearon estos dos ángulos como ángulos correspondientes, formando dos rectas paralelas que son cortadas por otra recta secante. Por lo tanto, $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ deben medir lo mismo.
6	• Se pueden crear dos ángulos iguales (congruentes) si estos son ángulos correspondientes usando paralelas y una secante que las corte. • En Cabri dos ángulos son iguales si al modificar uno el segundo ángulo también se modifica y siguen teniendo igual medida. • Para marcar y/o medir un ángulo se requieren tres puntos que conformen el ángulo.

3.2.2.2 Actividad 2

En la tabla 5, se observa la Actividad 2 presentada a los estudiantes, en la cual se evidencian las partes I, II y III de manera clara, de igual forma se incluye una imagen en Parte I de una posible construcción para ayudar a los estudiantes en su construcción geométrica inicial al seguir la secuencia de los pasos de la tarea.

Tabla 5
Actividad 2 presentada a los estudiantes

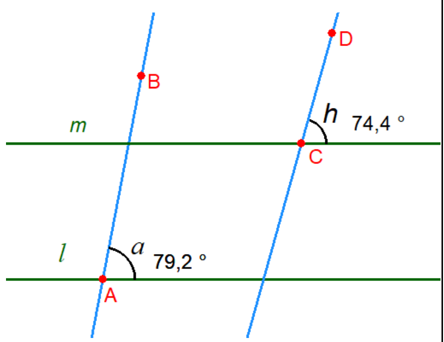
Actividad 2

Parte I

Construcción Geométrica:

(Crea un nuevo archivo y guárdalo como: "guía 2-1")

Trace una recta $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{m}$ **paralelas entre sí,** luego coloque un punto $\boldsymbol{A}$ que esté sobre $\boldsymbol{l}$, y un punto $\boldsymbol{B}$ que esté más arriba de $\boldsymbol{m}$. A continuación Trace la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Ahora crea un punto $\boldsymbol{C}$ sobre la recta $\boldsymbol{m}$ que esté a la derecha de $\boldsymbol{A}$ y un punto $\boldsymbol{D}$ fuera de la recta $\boldsymbol{m}$ que esté más arriba de donde está ubicado $\boldsymbol{C}$, y trace la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{CD}}$**.**



Utilizando las herramientas de Cabri: ***Marcar un ángulo*** y ***Medida de ángulo***, marque y mida el ángulo entre las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\boldsymbol{l}$ denotándolo $\boldsymbol{a}$. De igual forma, el ángulo formado por las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ y $\boldsymbol{m}$ denotándolo $\boldsymbol{h}$.

Parte II
Actividad:

A continuación, responda por escrito los siguientes puntos, de forma clara y precisa en la hoja de respuestas.

1. ¿Qué puedes afirmar de $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y $\measuredangle \boldsymbol{h}$ de la construcción que realizaste?
2. ¿Qué sucede si se arrastras los puntos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$?
3. ¿Qué condiciones piensas que se necesitaría para que $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{h}$ sean de igual medida?

Crea un nuevo archivo y guárdalo como "guía 2-2".

4. Crea una nueva construcción geométrica donde los ángulos $\measuredangle \boldsymbol{a}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{h}$ siempre sean iguales. (describe los pasos de ésta construcción)
5. ¿Qué relaciones crees que hay de esta actividad con la anterior?
6. Justifica: ¿Por qué la construcción geométrica si funciona? (con argumentos)
7. Escribe tus conclusiones generales de esta actividad.

Parte III

Socialización de algunas construcciones con justificaciones y posteriores conclusiones.

Conclusión general de la actividad

Esta segunda tarea tiene como propósito promover la construcción y exploración geométrica para motivar discusiones y argumentos geométricos que permitan la creación e identificación de las características necesarias de cuándo dos ángulos son congruentes en rectas diferentes y su conexión con la Actividad 1. Con relación a los conocimientos previos que se requieren para trabajar con esta tarea se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. Cuando dos rectas con paralelas.
2. Identificación de ángulos congruentes.
3. Utilizar las herramientas de marcas de ángulo y medida del AGD.
4. Cuando dos paralelas son cortadas por una tercera recta, los ángulos correspondientes y alternos son iguales.
5. Transitividad de congruencia (o igualdad) de ángulos.

En tanto a la unión de esta tarea con el ciclo didáctico se presentan en la Tabla 6, y allí los vínculos entre las partes de la tarea con los momentos del ciclo didáctico y las reacciones que se espera estimular en cada una de ellas.

Tabla 6

Relación de la Actividad 2 con el ciclo didáctico

Partes de la tarea	Momentos del Ciclo Didáctico		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
Parte I	El estudiante sigue los pasos de la construcción usando las herramientas que ofrece el AGD,		
Parte II	El estudiante realiza variaciones a los puntos B y D par a buscar la solución de algunas preguntas. Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con el uso de rectas paralelas en el contexto de la geometría plana.	El estudiante identifica las relaciones entre esta actividad y la anterior. El estudiante debe realizar una construcción en la cual se cumpla que los ángulos a y h sea siempre igual. Realiza una hipótesis de los resultados obtenidos y se justifica geométricamente.	Se realizan discusiones de posibles construcciones, el procedimiento para la solución, así como el reconocimiento de los objetos geométricos relacionados para crear dos ángulos iguales y las características que permitirían justificar la construcción solicitada.
Parte III	La presentación de la utilización de las herramientas para llegar a la solución obtenida.		Se presentan las soluciones, para tener una debate y llegar una conclusión general.

A continuación, se realiza un análisis previo de la Actividad 2 en donde se presenta lo que se esperó que los estudiantes realicen en el desarrollo y solución de esta tarea, esto con el fin de identificar los posibles signos personales y los signos matemáticos que pueden emerger, de igual forma para poder controlar lo sucedido en la experimentación.

Parte I

Aquí, los estudiantes deben realizar una construcción similar a la elaborada en la Actividad 1, siguiendo los pasos descritos y basándose en la imagen como ayuda en la hoja de la actividad, por lo que se esperó que la construcción sea similar a la Ilustración 15 presentada a continuación.

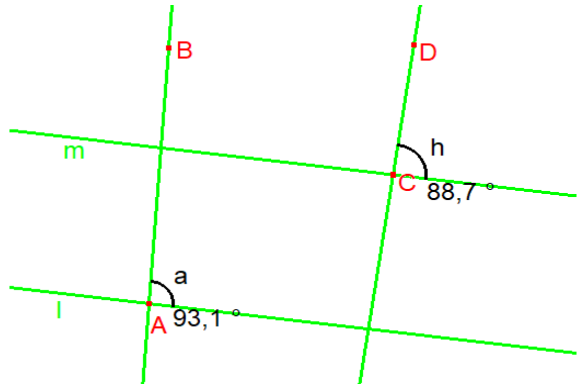


Ilustración 15. Construcción esperada parte I de la Actividad 2.

Parte II

En esta segunda parte de la Actividad 2, los estudiantes se enfrentan a responder preguntas con base en los procesos desarrollados en la parte inicial. A continuación, se presenta la Tabla 7, en donde se exhiben las soluciones esperadas a las preguntas formuladas y en ella la Ilustración 16, la cual podría ser una posible construcción final solicitada.

Tabla 7
Solución esperada en Actividad 2

Pregunta	Solución esperada
1	Los ángulos tienen diferentes medidas. no están en una recta en común.
2	Al arrastrar el punto B el valor o la medida del $\measuredangle a$ cambia, y al cambiar de posición el punto D también la medida del $\measuredangle h$ cambia.
3	Se necesita que los puntos B y D estén en posiciones especiales. Se necesita que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ sean paralelas.
4	1- Se crea la recta l. 2- Con la herramienta recta paralela, se crea la recta m que sea paralela a la recta l y este arriba de l. 3- Se crea el punto A sobre la recta l. 4- Se crea el puno B de forma que esté por arriba de la recta l, es decir, por fuera de l. 5- Con la herramienta recta se crea la recta $\overleftrightarrow{AB}$. 6- Se crea el punto C que esté sobre m que esté a la derecha de A. 7- Con la herramienta recta paralela se crea la recta n, tomando como reta inicial a $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto C. 8- Se crea un punto D sobre la recta n que este en la parte superior de C. 9- Se crea el puno E sobre l y que este a la derecha de C. 10- Con la herramienta marcar un ángulo y con los puntos B, A y C se crea el $\measuredangle a$.

Pregunta	Solución esperada
	11- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle a$. 12- Se crea el puno F sobre m y que este a la derecha de C. 13- Con la herramienta marca de ángulo y con los puntos D, C y F se crea el $\measuredangle h$. 14- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle h$.

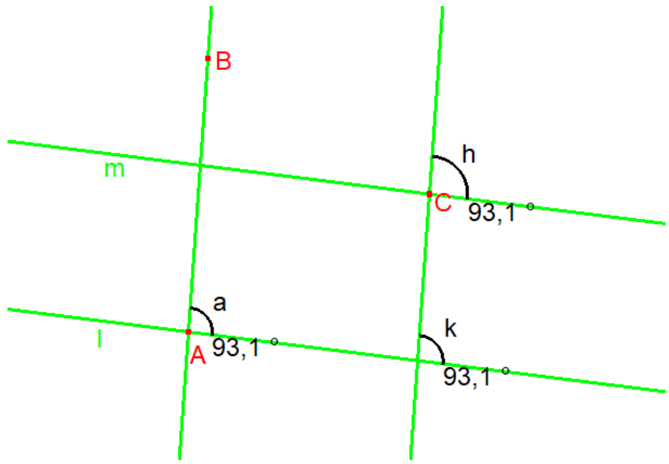


Ilustración 16. Construcción esperada parte II de la Actividad 2.

Pregunta	Solución esperada
5	En ambas actividades se trabaja con la herramienta recta paralela con el fin de crear un ángulo igual a un o inicial.
6	**Construcción auxiliar** sea $\measuredangle k$ el ángulo que es correspondiente al $\measuredangle a$ y que se forma por las rectas l y $\overleftrightarrow{DC}$. Por la Actividad 1, se sabe que al crear dos ángulos correspondientes , los ángulos son iguales, entonces se tiene que $\measuredangle a = \measuredangle k$, y de igual forma se tiene por construcción que $\measuredangle k$ y $\measuredangle h$ son correspondientes, luego $\measuredangle k = \measuredangle h$, entonces se tiene que: $a\measuredangle = \measuredangle k = \measuredangle h$, por lo tanto $\measuredangle a = \measuredangle h$.
6	• Se pueden crear dos ángulos iguales (congruentes) usando dos rectas paralelas iniciales y dos rectas paralelas entre si y que sean secantes a las dos iniciales. • En algunos casos hay que ayudarse por medio de construcciones auxiliares.

3.2.2.3 Actividad 3

En la Tabla 8, se observa la Actividad 3 presentada a los estudiantes, en la cual se evidencian las partes I, II y III de manera clara, de igual forma se incluye una imagen en Parte I de una posible construcción para ayudar a los estudiantes en su construcción geométrica inicial al seguir la secuencia de los pasos de la tarea.

Tabla 8

Actividad 3 presentada a los estudiantes

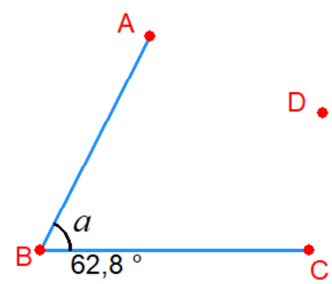
Actividad 3

Parte I

Construcción Geométrica:

(Crea un nuevo archivo y guárdalo como: "guía 3-1")

Trace tres puntos no colineales $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, dibuja los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$. A continuación marca y mide el ángulo formado entre estos segmentos, y denótalo como $\boldsymbol{a}$**.** Crea un punto $\boldsymbol{D}$ que este sobre el plano pero que esté fuera de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$.



Parte II

Actividad

1. Crea una construcción geométrica donde se copien las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ en nuevos segmentos, de tal forma que los nuevos segmentos pasen por el punto $\boldsymbol{D}$, siendo $\boldsymbol{D}$ el vértice donde se unen estos segmentos. Luego denota $\boldsymbol{h}$ al ángulo que se forme entre los nuevos segmentos, el cual debe ser igual al ángulo $\boldsymbol{a}$.
   (describe el paso a paso de esta construcción en la hoja)

A continuacion responda por escrito los siguientes puntos, de forma clara y precisa en la hoja de respuestas.

2. ¿Qué relaciones crees que hay de esta actividad con las anteriores?
3. Justifica: ¿Por qué la construcción geométrica si funciona? (con argumentos)
4. ¿Qué le sucede al ángulo $\measuredangle\boldsymbol{h}$ si se arrastra de manera aleatoria el punto $\boldsymbol{D}$? ¿Y si se arrastra de manera aleatoria los puntos A, B o C?
5. Teniendo en cuenta su respuesta ¿Por qué ocurre esto?
6. Escribe tus conclusiones generales de esta actividad.

Parte III

Socialización de las construcciones y las conclusiones.

Conclusión general de la actividad.

Esta tercera tarea tiene como propósito promover la construcción y exploración geométrica para motivar discusiones y argumentos geométricos que permitan la creación e identificación de las características que garanticen la congruencia de ángulos y los segmentos que lo conforman y su conexión con las actividades anteriores. Con relación a los conocimientos previos que se requieren para trabajar con esta tarea se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. Cuando dos rectas son paralelas.
2. Cuando dos triángulos son congruentes.
3. Cómo crear ángulos congruentes usando rectas.
4. La creación de una recta paralela a una inicial y que pase por un punto.
5. Uso de circunferencias y la herramienta compás para la creación de segmentos iguales

En tanto a la unión de esta tarea con el ciclo didáctico se presentan en la Tabla 9, y allí los vínculos entre las partes de la tarea con los momentos del ciclo didáctico y las reacciones que se espera estimular en cada una de ellas.

Tabla 9
Relación de la Actividad 3 con el ciclo didáctico

Partes de la tarea	**Momentos del Ciclo Didáctico**		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
Parte I	El estudiante sigue los pasos de la construcción usando las herramientas que ofrece el AGD,		
Parte II	El estudiante explora con las herramientas del AGD posibles construcciones para copiar dos segmentos con un punto en común y el ángulo formado entre ellos. Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con el uso de rectas paralelas.	El estudiante identifica las relaciones entre esta actividad y las anteriores. El estudiante identifica las condiciones para copiar dos segmentos y el ángulo formado entre ellos. Realiza una hipótesis de los resultados obtenidos y se justifica de manera geométrica utilizando las conclusiones de actividades anteriores.	Se realizan discusiones de posibles construcciones, el procedimiento para la solución, así como el reconocimiento de los objetos geométricos relacionados para copiar dos segmentos y el ángulo formado entre ellos y las características que permitirían justificar la construcción solicitada.
Parte III	La presentación de la utilización de las		Se presentan las soluciones, para tener una debate y llegar una conclusión general.

Partes de la tarea	Momentos del Ciclo Didáctico		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
	herramientas para llegar a la solución obtenida.		

A continuación, se realiza un análisis previo de la Actividad 3 en donde se presenta lo que se esperó que los estudiantes realicen en el desarrollo y solución de esta tarea, esto con el fin de identificar los posibles signos personales y los signos matemáticos que pueden emerger, de igual forma para poder controlar lo sucedido en la experimentación.

Parte I

En ésta parte, los estudiantes deben realizar una construcción siguiendo los pasos descritos y basándose en la imagen presentada como ayuda en la hoja de la tarea, por lo que se esperó que la construcción realizada por ellos sea similar a la Ilustración 17 exhibida a continuación.

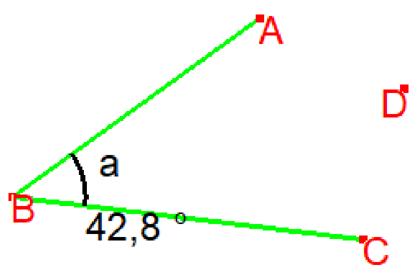


Ilustración 17. Construcción esperada parte I de la Actividad 3.

Parte II

En esta segunda parte de la Actividad 3, los estudiantes se enfrentan a responder preguntas con base en los procesos desarrollados en la parte inicial. A continuación, se presenta la Tabla 10, en donde se exhiben las respuestas esperadas a las preguntas formuladas y en ella la Ilustración 18, la cual podría ser una posible construcción final solicitada.

Tabla 10
Solución esperada en Actividad 3

Pregunta	Solución esperada
1	1- Con la herramienta recta se traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Pregunta	Solución esperada
	2- Con la herramienta recta se traza la recta $\overleftrightarrow{BC}$. 3- Con la herramienta recta paralela trazar la recta l que es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y pase por el puno D. 4- Con la herramienta recta paralela trazar la recta m que es paralela a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y pase por el puno D. 5- Con la herramienta compás se taza la circunferencia $C1$ de centro D y radio el segmento $\overline{AB}$. 6- Se identifica el punto E como el punto de intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta l, el cual debe estar arriba y a la derecha de D. 7- Se oculta el circulo $C1$. 8- Con la herramienta compás se taza la circunferencia $C2$ de centro D y radio el segmento $\overline{BC}$. 9- Se identifica el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta m, el cual debe estar abajo y a la derecha de D. 10- Se oculta el circulo $C2$. 11- Se ocultan las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, l y m. 12- Con la herramienta segmento se crean los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. 13- Con la herramienta distancia o longitud se miden los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. 14- Con la herramienta marcar un ángulo y con los puntos E, D y F se crea el $\measuredangle h$. 15- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle h$.

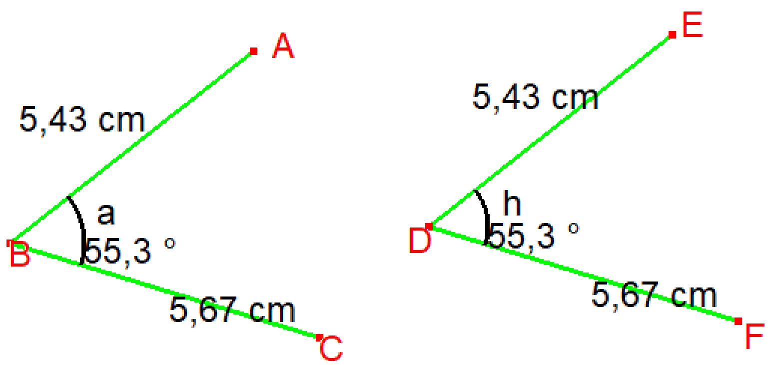


Ilustración 18. Construcción esperada parte II de la Actividad 3.

Pregunta	Solución esperada
2	En las actividades se trabaja con la herramienta recta paralela con el fin de crear un ángulo igual a un o inicial, en este caso en particular teniendo dos segmentos iniciales y también copiándolos.

Pregunta	Solución esperada
3	Ya que A y B son puntos de un segmento, se puede crear la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de igual forma se puede crear la recta $\overleftrightarrow{BC}$, teniendo que el ángulo inicial esta entre las dos rectas como en la Actividad 2. Por la Actividad 2, se sabe que entre dos rectas paralelas y dos rectas paralelas secantes a las iniciales se puede crear un ángulo congruente a uno inicial, es decir, se garantiza la construcción del $\measuredangle h$ congruente al $\measuredangle a$. Ya que la herramienta compás posibilita la creación de una circunferencia con radio la longitud de un segmento, permite conservar la media de dicho segmento, por lo cual se garantiza que las medidas de los segmentos $\overline{ED} \cong \overline{AB}$ y $\overline{DF} \cong \overline{BC}$. Por lo tanto se tiene que $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ son iguales y los segmentos correspondientes son también iguales.
4	Los dos ángulos tienen las mismas medidas, es decir con iguales (congruentes).
5	Porque las figuras usadas en la construcción, como paralelas y círculos con el compás permiten establecer la relación de igualdad entre los ángulos y los lados.
6	Teniendo dos segmentos que forman un ángulo inicial y un punto exterior a estos, se puede crear segmentos de igual medida y con el mismo ángulo.

No obstante, también se pueden presentar otras construcciones como solución creada por los estudiantes, las cuales tienen algunas diferencias con la exhibida anteriormente. A continuación, se dan a conocer otras posibles soluciones tomadas en cuenta, junto con una posible ilustración que las represente:

1) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la derecha o debajo del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la arriba o a la derecha del punto D.

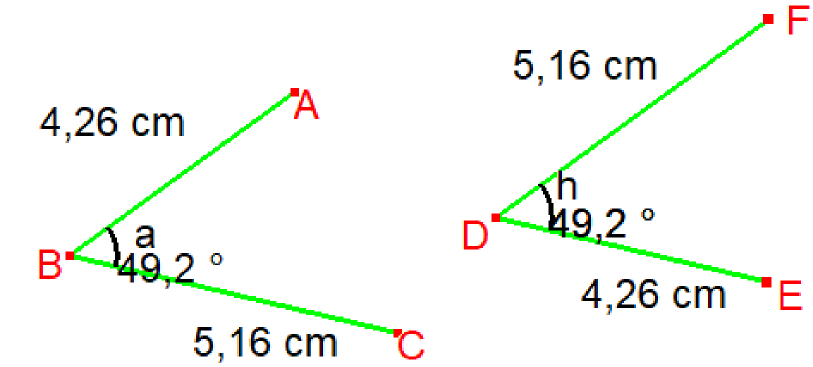


Ilustración 19. Construcción alternativa 1 esperada parte II de la Actividad 3.

2) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la izquierda o arriba del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la abajo o a la izquierda del punto D

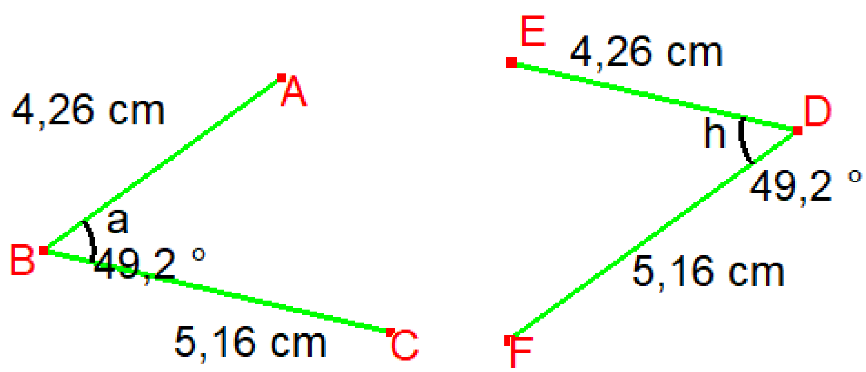


Ilustración 20. Construcción alternativa 2 esperada parte II de la Actividad 3.

3) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la izquierda o debajo del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la arriba o a la izquierda del punto D.

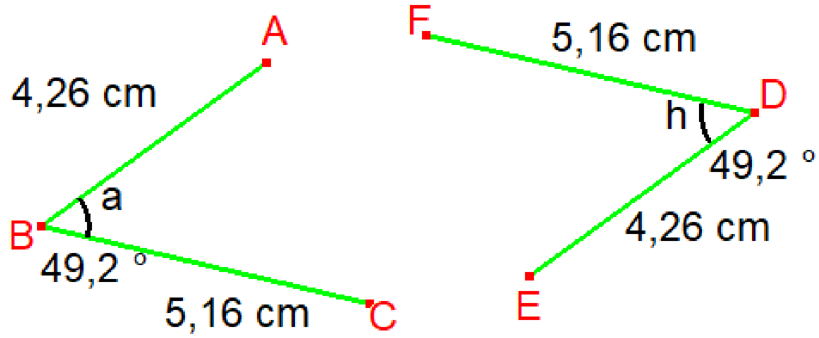


Ilustración 21. Construcción alternativa 3 esperada parte II de la Actividad 3

3.2.2.4 Actividad 4

En la Tabla 11, se observa la Actividad 4 presentada a los estudiantes, en la cual se evidencian las partes I, II y III de manera clara. No obstante, esta actividad a diferencia de las anteriores no se incluye una imagen en Parte I de una posible construcción, esto se hace para que los estudiantes participantes puedan realizar cualquier clase de triángulo en su construcción geométrica inicial.

Tabla 11
Actividad 4 presentada a los estudiantes

Actividad 4 **Parte I** **Construcción Geométrica:** **(Crea un nuevo archivo y guárdalo como: "guía 4-1")** Crea un triángulo $\boldsymbol{ABC}$, y un punto $\boldsymbol{D}$ en el plano fuera del triángulo. **Parte II** **Actividad** 1. Crea una construcción geométrica de un triángulo que sea igual al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ que creaste inicialmente, de tal forma que uno de sus vértices sea $\boldsymbol{D}$. (describe el paso a paso de esta construcción en la hoja). A continuacion responda por escrito los siguientes puntos, de forma clara y precisa en la hoja de respuestas. 2. ¿Qué relaciones crees que hay de esta actividad con las anteriores? 3. Justifica: ¿Por qué la construcción geométrica si funciona? (con argumentos). 4. Escribe tus conclusiones de esta actividad. **Parte III**

Socialización de las construcciones y las conclusiones. Conclusión final por parte del docente.

Esta última tarea tiene como propósito promover la construcción y exploración geométrica para motivar discusiones y argumentos geométricos acerca de las condiciones necesarias para cuándo dos triángulos son congruentes, y su conexión con las actividades anteriores. Con relación a los conocimientos previos que se requieren para trabajar con esta tarea se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. Qué es un triángulo y sus características.
2. Cómo crear ángulos congruentes usando rectas.
3. La creación de una recta paralela a una inicial y que pase por un punto.
4. Uso de circunferencias de igual radio para la creación de segmentos iguales.

En tanto a la unión de esta tarea con el ciclo didáctico se presentan en la Tabla 12, y allí los vínculos entre las partes de la tarea con los momentos del ciclo didáctico y las reacciones que se espera estimular en cada una de ellas.

Tabla 12
Relación de la Actividad 4 con el ciclo didáctico

Partes de la tarea	**Momentos del Ciclo Didáctico**		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
Parte I	El estudiante sigue los pasos de la construcción usando las herramientas que ofrece el AGD.		
Parte II	El estudiante explora con las herramientas del AGD posibles construcciones para crear un triángulo igual (congruente) a uno inicial. Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con el uso de rectas paralelas y la comparación de triángulos.	El estudiante identifica las relaciones entre esta actividad y las anteriores. El estudiante identifica las condiciones para copiar un triángulo inicial. Realiza una hipótesis de los resultados obtenidos y se justifica de manera geométrica utilizando las	Se realizan discusiones de posibles construcciones, el procedimiento para la solución, así como el reconocimiento de los objetos geométricos relacionados para crear dos triángulos iguales y las características que permitirían justificar la construcción solicitada.

Partes de la tarea	Momentos del Ciclo Didáctico		
	Artefacto	**Producción individual**	**Producción colectiva**
		conclusiones de actividades anteriores.	
Parte III	El estudiante explora con las herramientas del AGD posibles construcciones para crear un triángulo igual (congruente) a uno inicial. Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con el uso de rectas paralelas y el uso de triángulos.		Se presentan las soluciones, para tener una debate y llegar una conclusión general.

A continuación, se realiza un análisis previo de esta última tarea en donde se presenta lo que se esperó que los estudiantes realicen en el desarrollo y solución de esta tarea, esto con el fin de identificar los posibles signos personales y los signos matemáticos que pueden emerger, de igual forma para poder controlar lo sucedido en la experimentación.

Parte I

Puesto que en esta tarea no hay ilustración para poderse guiar, es decir, que los estudiantes pueden presentar diferentes construcciones, pero al tener las mismas instrucciones se espera que los estudiantes realicen una construcción similar a la Ilustración 22 que se muestra actuación:

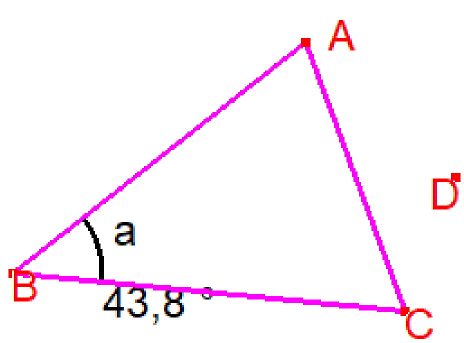


Ilustración 22. Construcción esperada parte I de la Actividad 4.

Parte II

En esta segunda parte de la Actividad 4, los estudiantes se enfrentan a responder preguntas con base en los procesos desarrollados en la parte inicial. A continuación, se presenta la Tabla 13, en donde encontramos las soluciones esperadas a las preguntas formuladas y en ella la Ilustración 23, la cual podría ser una posible construcción final solicitada.

Tabla 13

Solución esperada en Actividad 4

Pregunta	Solución esperada
1	1- Se crean 3 puntos A, B y C no colineales. 2- Con la herramienta triángulo se crea el triángulo ABC. 3- Se marca el ángulo α con los puntos A, B y C, y B como vértice. 4- Se crea el ´punto D. 5- Con la herramienta recta se traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$. 6- Con la herramienta recta se traza la recta $\overleftrightarrow{BC}$. 7- Con la herramienta recta paralela trazar la recta l que es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y pase por el puno D. 8- Con la herramienta recta paralela trazar la recta m que es paralela a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y pase por el puno D. 9- Con la herramienta compás se taza la circunferencia $C1$ de centro D y radio el segmento $\overline{AB}$. 10- Se identifica el punto E como el punto de intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta l, el cual debe estar arriba o a la derecha del punto D. 11- Se oculta el circulo $C1$. 12- Con la herramienta compás se taza la circunferencia C2 de centro D y radio el segmento $\overline{BC}$. 13- Se identifica el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta m, el cual debe estar debajo o a la derecha del punto D. 14- Se oculta el circulo $C2$. 15- Se ocultan las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, l y m. 16- Con la herramienta segmento se crean los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. 17- Con la herramienta triángulo se crea el triángulo EDF. 18- Con la herramienta distancia o longitud se miden los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. 19- Con la herramienta marcar un Ángulo y con los puntos E, D y F se crea el $\measuredangle h$. 20- Con la herramienta medida de ángulo se mide el $\measuredangle h$.

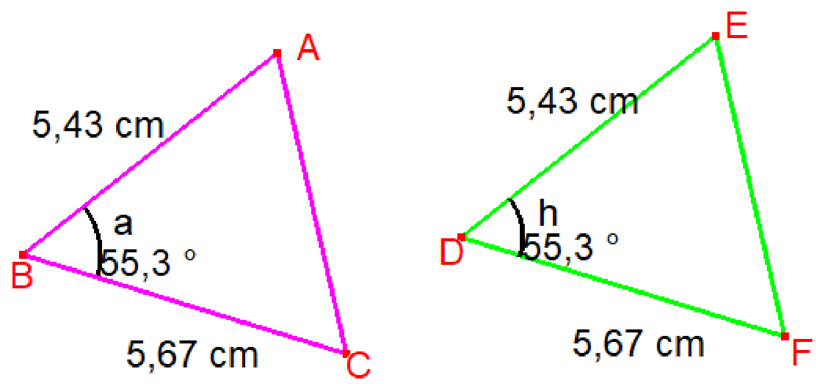


Ilustración 23. Construcción esperada parte II de la Actividad 2

Pregunta	**Solución esperada**
2	En las actividades se puede generar una construcción que permita copiar un ángulo inicial usando paralelas. Esta actividad y la anterior permiten no solo copiar un ángulo sino los segmentos que hay entre tres puntos no colineales.
3	Ya que A, B y C son puntos no colineales, entonces se puede determinar el ángulo a con vértice en B, y teniendo en cuenta el punto D se puede aplicar lo realizado en la Actividad 3, en donde dados unos segmentos iniciales $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y su ángulo interior se pueden copiar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ junto con el $\measuredangle a$ de tal forma que pasen por el punto D. En otras palabras, se pueden copiar los 3 puntos iniciales A, B y C que forman el triángulo inicia teniendo que los puntos E, D y F forman el triángulo EDF, donde $\overline{ED} \cong \overline{AB}$ y $\overline{DF} \cong \overline{BC}$ y $\measuredangle EDF \cong \measuredangle ABC$. Por último, se puede ver que todos los lados del primer triángulo son iguales a los lados del segundo triángulo, de igual forma que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$ son iguales.
4	Teniendo un triángulo inicial se puede copiar uno idéntico a este solo conociendo dos lados y el ángulo que hay entre ellos.

No obstante, también se pueden presentar otras construcciones como solución creada por los estudiantes, las cuales tienen algunas diferencias con la exhibida anteriormente. A continuación, se dan a conocer otras posibles soluciones tomadas en cuenta, junto con una posible ilustración que las represente:

1) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la derecha o debajo del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la arriba o a la derecha del punto D.

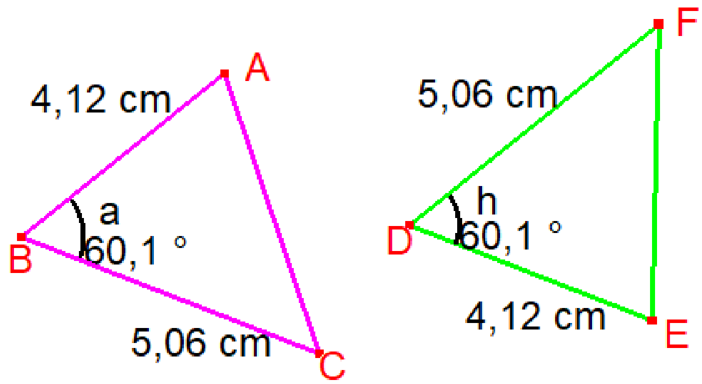


Ilustración 24. Construcción alternativa 2 esperada parte II de la Actividad 4.

2) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la izquierda o arriba del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la abajo o a la izquierda del punto D

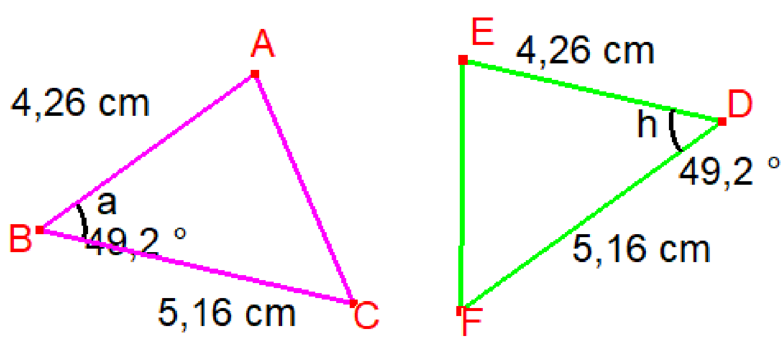


Ilustración 25. Construcción alternativa 3 esperada parte II de la Actividad 4.

3) al construir el punto E como intersección entre la circunferencia $C1$ con la recta m, el cual debe estar a la izquierda o debajo del punto D, y el punto F como el punto de intersección entre la circunferencia $C2$ con la recta l, el cual debe estar a la arriba o a la izquierda del punto D.

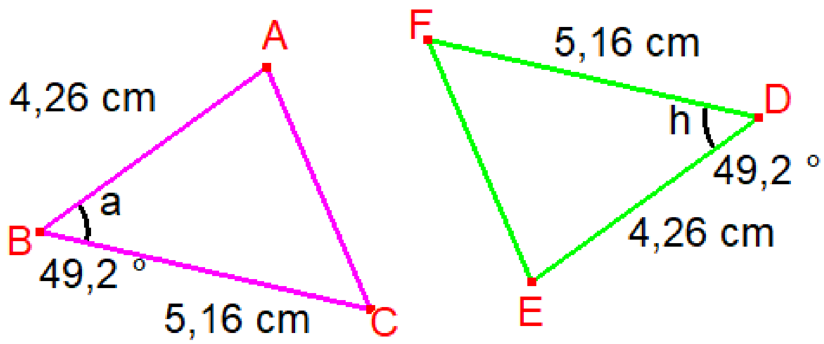


Ilustración 26. Construcción alternativa 4 esperada parte II de la Actividad 4

Después de las anteriores descripciones acerca de las posibles soluciones que se pueden esperar a las tareas planteadas por parte de los estudiantes, en el siguiente capítulo se presenta el contexto de la institución educativa en la cual se recogieron los datos, los elementos que se consideraron para la experimentación y posterior a esto se da una descripción general acerca de los resultados obtenidos en la puesta en acto de las tareas.

CAPITULO IV

CONTEXTUALIZACIÓN Y RESULTADOS

Aquí se realizará una descripción de los aspectos más relevantes de la experimentación de las tareas tal como: las características de la población indagada, una breve descripción de la IE en donde se desarrolló la indagación; los recursos que se tomaron en cuenta.

En cuanto a la descripción de la experimentación se mencionarán los diferentes recursos que hicieron parte de esta indagación como: el espacio utilizado, los medios para la recolección de la información, y posterior a esto se mostrarán los resultados que se obtuvieron por cada una de las tareas puestas en acto, identificando algunos procesos principales de construcción y configuración de estos. Los detalles de cada tarea aparecerán desde las Tabla No. 15 hasta la Tabla No. 22.

4.1 CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN

Con el fin de observar el desarrollo de los posibles procesos argumentativos en un ambiente donde se da una interacción social y cultural, se consideró al estudiante como sujeto activo en la formación de sus conocimientos académicos, al estar en procesos de interacción con otros estudiantes y un docente. A continuación, se presentan algunas características de la IE de los estudiantes que fueron partícipes de esta experimentación.

4.1.1 Liceo de la Universidad de Nariño

El Liceo de la Universidad de Nariño, de acuerdo a lo mencionado por Rosales-Arteaga (2012), es la IE de mayor reconocimiento y trayectoria académica de la región de Nariño, sus inicios se remontan a la época colonial funcionando desde el año 1712 en la cidad de Pasto (Nariño, Colombia) entre las calles 18 y 19 con carrearas 22 y 23, fue el primer colegio republicano del Sur Occidente Colombiano de carácter público creado el 2 de junio mediante decreto 168 de 1827. Debido a su ubicación geográfica en sus primeros años logró educar a diferentes alumnos del norte de Ecuador y de distintas regiones del antiguo Cauca, pero debido a los diferentes conflictos de estas épocas, se debió cerrar sus puertas en varias ocasiones. Hoy en día el Liceo de la Universidad de Nariño está ubicado en la cuidad de Pasto (Nariño, Colombia), en la calle 5 número 32A – 86 Villa Campanela.

Esta IE a través de los años ha tenido diferentes nombres, entre algunos de ellos están: Colegio Académico, Liceo Público de Pasto, Liceo Masculino, Liceo Femenino Colombia, Liceo Integrado de Bachillerato y hoy Liceo de la Universidad de Nariño. Por otro lado, gracias a la dedicación y fomentación del conocimiento de este colegio tuvo la categoría de Universidad, reconocida mediante Decreto 726 de 11 de septiembre de 1889 por el presidente Holguín, con lo cual en el año de 1904 nace la "Universidad de Nariño". Destacando así que el Liceo es una institución destacable en la historia de la cuidad de Pasto (Rosales-Arteaga, 2012).

El Liceo de la Universidad de Nariño es una institución pública dedicada a la educación de diferentes niveles académicos como la transición, básica primaria, básica secundaria y media vocacional, y como lo afirma Rosales-Arteaga (2012), su formación está orientada a formar bachilleres académicamente competentes, con sensibilidad social, espíritu crítico, capacidad de liderazgo y comprometidas con el destino de su entorno. Los principios educativos de ésta IE está basada en el respeto, la responsabilidad, la disciplina, los conocimientos con los que los estudiantes estarán capacitados para participar activamente en el desarrollo económico político, científico y social de la Región y la Nación.

Así mismo, es reconocida a nivel regional y nacional tanto por su trayectoria como por sus últimos logros. Un ejemplo de ello es la mención a la mejor IE oficial del país en la Educación Básica y Media de la modalidad académica por su Índice Sintético de la Calidad Educativa (ISCE) (Yaqueno, 2017). Este reconocimiento se obtuvo gracias a que el puntaje del Liceo de la Universidad de Nariño fue el mayor puntaje a nivel nacional con 9.39 puntos, de 10 posibles en el año 2017. Otro ejemplo, como lo menciona Erazo (2018), es el logro de estar entre los 100 mejores colegios por materia a nivel nacional y en particular logró ubicarse en el 2018 entre los tres mejores colegios públicos de acuerdo al informe Ranking Col- Sapiens 2018. Gracias a este último logro, el Liceo fue reconocido por el MEN, por sus reiterados esfuerzos notables en seguir siendo una de las mejores IE del país en los últimos años (Erazo, 2018).

4.1.2 Características generales de la población

Para llevar a cabo la experimentación de las tareas diseñadas, se tomaron a cuatro estudiantes del Liceo de la Universidad de Nariño del mismo grado noveno (9-1) para facilitar esta interacción social, quienes decidieron ser partícipes de manera voluntaria. Posteriormente, se realizó un dialogo inicial acera de la indagación y las tareas que se querían trabajar con ellos, aclarando que se trabajaría con el AGD Cabri, el cual ya lo conocían y lo habían utilizado en algunas clases previas, pero su utilización no era muy frecuente.

Por lo anterior, se decidió realizar una clase previa a la puesta en acto de las tareas, con el fin de recordar algunas herramientas del AGD. De igual forma, se les informó que para el día de la experimentación de las tareas podrían recurrir a los diferentes conceptos y aprendizajes que han adquirido en el transcurso de las clases, bien sean utilizando los conocimientos geométricos aprendidos, así como la manipulación de las diferentes herramientas del Cabri. A continuación, se realiza una descripción de la experimentación.

4.2 EXPERIMENTACIÓN

Entre los elementos que se tuvieron en cuenta para la organización de la experimentación de tareas planteadas se encontraron los recursos donde se llevó a cabo los procesos de las soluciones, los utilizados para la recolección de la información, y el espacio físico.

En primer lugar, se encuentra el espacio físico en donde se llevó a cabo la experimentación de las tareas diseñadas, el cual fue un aula de informática, en donde se encontraban varios computadores de mesa disponibles, un televisor de 37 pulgadas conectado a una CPU y que fue utilizado para proyectar y exponer los procesos y soluciones realizadas por los estudiantes. En la Foto 1, se observa la distribución que se optó en el aula de informática entre los estudiantes y los recursos.

Foto 1. Distribución en el aula de informática

Para los procesos por parte de los estudiantes se utilizaron los siguientes recursos:

- El AGD Cabri Géomètre II Plus (Versión 1.2.4.8 2001 - 2003).
- El AGD Cabri sin ninguna restricción en su barra de herramientas.
- Fotocopias a manera de hojas de trabajo de las tareas propuestas.
- Hojas en blanco.
- Lapicero.

Para la recolección de la información se utilizaron los siguientes elementos:

- Video grabadora.
- Las hojas de trabajo en blanco diligenciadas por los estudiantes.
- Registro automático[22] del Cabri.
- Archivos de Cabri modificados por los estudiantes.

[22] El registro automático, es una opción exclusiva del Cabri, la cual permite guardar de manera automática un archivo cada vez que se realiza un cambio en la pantalla (en las figuras geométricas proyectadas), bien sea añadiendo, quitando o modificando los objetos geométricos (Gutiérrez, 2005).

La información recolectada a partir de la interacción de los estudiantes con el software permitió registrar las diferentes exploraciones y modificaciones realizadas por ellos en las construcciones. Las anotaciones escritas permitieron identificar algunas ideas iniciales mediante las exploraciones y una posible conclusión. Y como complemento a estas se encuentran los videos (Ver Anexos A y B) de algunas entrevistas hechas a los alumnos acerca de los procesos que estaban realizando en la solución de las tareas y de algunas explicaciones de los resultados obtenidos.

4.2.1 Estructura de la experimentación

La puesta en acto de las tareas se realizó en cuatro sesiones de trabajo (una para cada tarea) y se llevaron a cabo en la misma aula de informática de la IE. Para cada sesión se programó un tiempo aproximado de una hora, en donde se incluyó el tiempo para las diferentes fases de las tareas: las partes de construcción, exploración y la resolución de las preguntas y puntos, hasta la socialización de los resultados de cada una, esperando que en este tiempo se complete satisfactoriamente estas etapas. A continuación, en la Tabla 14 se muestra la distribución de las distintas tareas y el tiempo planeado para cada una.

Tabla 14.
Distribución del tiempo en las tareas.

Sesión	Tiempo	Actividad
1	50: 00	Actividad 1
2	50: 00	Actividad 2
3	1: 00: 00	Actividad 3
4	1: 00: 00	Actividad 4

En cada tarea se realizaron intervenciones por parte del docente-investigador con el fin de identificar, por un lado, cómo se estaban realizando las soluciones a cada tarea; y, por otro lado, la aparición de las posibles ideas, signos personales y signos matemáticos en cada grupo de trabajo, para así analizar y destacar las acciones y explicaciones efectuadas por los alumnos en ellas.

4.2.2 Resultados de la experimentación

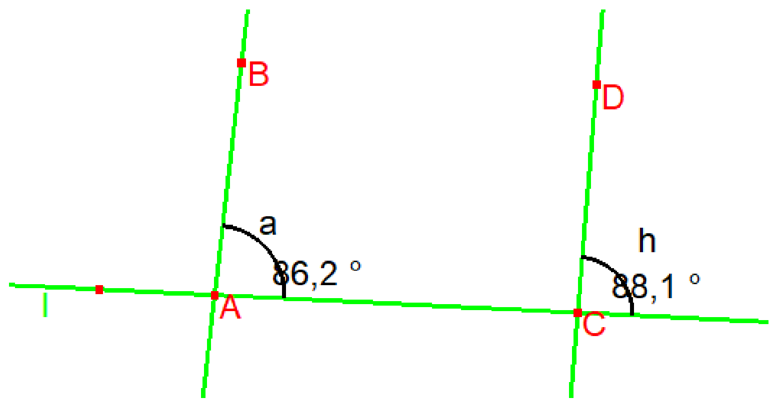
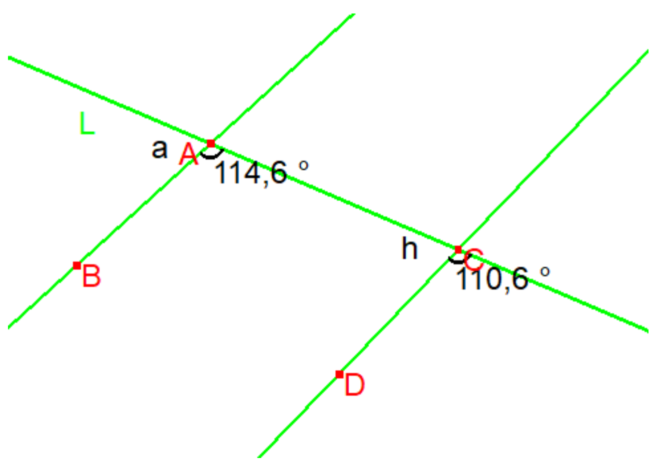
A continuación, se realiza una descripción en forma de tablas de los resultados presentados por los estudiantes a las tareas puestas en acto, en donde se efectuó una separación de lo elaborado por cada grupo de trabajo. Luego se exhiben las soluciones de cada tarea y los procesos realizados en cada una de ellas.

4.2.2.1 Actividad 1

En la primera parte de la primera tarea, los estudiantes realizaron una construcción geométrica de nombre “guía 1-1” siguiendo las instrucciones, y haciendo uso de las herramientas del Cabri, obteniendo los resultados presentados en la Tabla 15:

Tabla 15

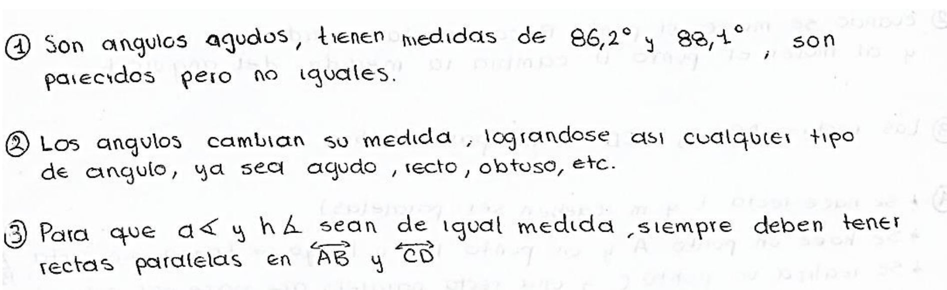
Resultados obtenidos de la Actividad 1 parte 1

	Soluciones
Grupo 1	Los estudiantes al tomar en cuenta la imagen de la hoja de trabajo dada a ellos y tomarla como base, en su construcción realizaron los puntos B y D en la parte superior, tal como se muestra en la siguiente imagen de la elaboración inicial de este grupo 
Grupo 2	En el inicio, los estudiantes tuvieron algunas dudas con las instrucciones de la construcción por lo que su resultado construyeron los puntos B y D en la parte inferior a diferencia del grupo 1, tal como se muestra en la siguiente imagen de lo elaborado por este grupo: 

En la segunda parte de esta tarea, los dos grupos de estudiantes realizaron una exploración sobre los puntos B y D, y al observar que las medidas de los ángulos $\measuredangle a$ o $\measuredangle$h variaban, los motivo a explorar libremente posibles modificaciones de los puntos y de los valores de los ángulos que se habían creado. Posteriormente, con el fin de obtener en la construcción la condición de que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, los estudiantes hicieron uso del arrastre sobre el punto B, y una vez consiguieron ángulos con igual medida, arrastraron el punto D para tener otra medida de $\measuredangle h$, con lo cual volvieron a hacer uso del arrastre sobre el punto B para obtener nuevamente ángulos congruentes. Este proceso se repitió varias veces, hasta fijarse que la condición necesaria es que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (eran paralelas)

Al tener en cuenta estos procesos, los estudiantes respondieron a las preguntas[23] que se les planteo. Y con la característica necesaria, se crea una nueva construcción "guía 1-2" en donde se cumpla siempre la condición que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$. A continuación, en la Tabla 16 se presentan los resultados registrados de este proceso.

Tabla 16
Resultados obtenidos de la Actividad 1 parte 2

	Soluciones
Grupo 1	Teniendo en cuanta los procesos mencionados anteriormente, las respuestas a las preguntas iniciales se consignaron de manera escrita y se muestran a continuación  ① Son angulos agudos, tienen medidas de 86,2° y 88,1°, son parecidos pero no iguales. ② Los angulos cambian su medida, lograndose asi cualquier tipo de angulo, ya sea agudo, recto, obtuso, etc. ③ Para que $a\measuredangle$ y $h\measuredangle$ sean de igual medida, siempre deben tener rectas paralelas en $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ En cuanto a la construcción solicitada, al seguir la revisión de los registros automáticos de sesión guardada de esta tarea, los estudiantes realizaron los siguientes pasos: Crearon una recta l y sobre ésta, un punto A, luego construyeron un punto B fuera de l y crearon la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente construyeron un punto C sobre la recta l y haciendo uso de la herramienta recta paralela tomando inicialmente la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto C, hicieron la recta $\overleftrightarrow{CD}$. Enseguida, con el uso de las herramientas marcar un ángulo y medida de ángulo, construyeron los ángulos: $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$. Luego de esto, al modificar el valor de $\measuredangle a$, observaron que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, con lo cual se fijaron que la construcción cumplía la condición solicitada. A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja

[23] Se hace referencia las preguntas de la Actividad 1 presentadas en la página 63.

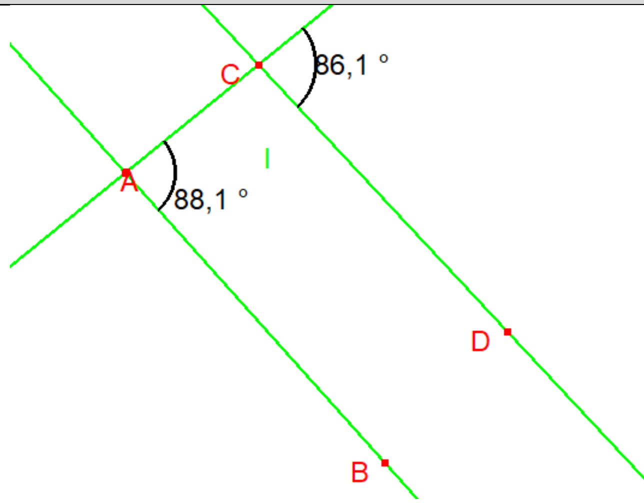
<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>(4) Se realiza una recta l, se coloca un punto A sobre l y otro afuera de l (B). Luego se traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente se hace un punto C sobre la recta l y se forma una recta paralela sobre el punto C. Finalmente se marca y mide los angulos con sus respectivas herramientas sobre las rectas. $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{C}$</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Teniendo en cuanta los procesos mencionados anteriormente, las respuestas a las preguntas iniciales se consignaron de manera escrita y se muestran a continuación

1. Se puede afirmar que la medida del angulo es diferente.
a = 114,6° h = 110,6°.
2. (~~Si se arrastra B el punto no se mueve o desplaza a lo largo de la recta al igual que el punto D.~~)
El angulo a se vuelve difente, al igual quel angulo h.
3. - las rectas $(\overleftrightarrow{A,B})$ $(\overleftrightarrow{C,D})$ son paralelas.

En cuanto a la construcción solicitada siguiendo la revisión de los registros automáticos de sesión guardada de la tarea, los estudiantes realizaron los siguientes pasos:
Crearon una recta l y sobre esta un punto A, luego construyeron un punto B fuera de l. y crearon la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente crearon un punto C sobre la recta l, y un punto D que este fuera de l y realizaron la recta $\overleftrightarrow{CD}$ y por ultimo crearon los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle$h y sus medidas.

A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja:
4. - Crear una recta l
- Creamos una recta $\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{CD}$
- creamos unos angulos los cuales son a = 88,1° y h = 88,1.

A pesar de tener la idea que la condición necesaria era una recta paralela (repuesta del punto 3), no llegaron a realizar la construcción con la condición necesaria, puesto que no siempre se tenía que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$. Tal como se mira en la siguiente imagen de su construcción</td></tr>
</table>

	Soluciones
	 Y al no poder llegar a la construcción con las condiciones necesarias, no pudieron dar una justificación de su proceso para la solución.

En la última parte de la tarea, es decir, en la socialización, los estudiantes del grupo 1 expusieron su solución, cuya construcción cumplía las condiciones necesarias, aclarando una justificación de por qué si funciona esta construcción. Sin embargo, dicha justificación no era correcta. Esta justificación incorrecta quizá se debió a que los estudiantes antes no se habían enfrentado a tareas donde se les solicitara justificaciones de por qué el resultado estaba correcto. En tanto al grupo 2, al observar la solución del grupo 1, presentan su proceso e identifican su error en la creación de la recta $\overleftrightarrow{CD}$, ya que no siempre era paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

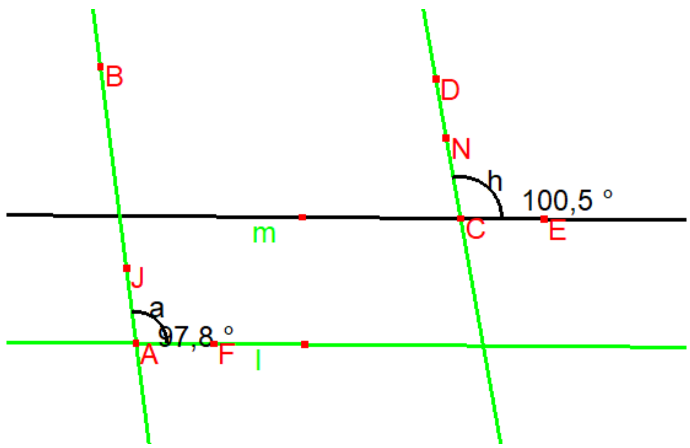
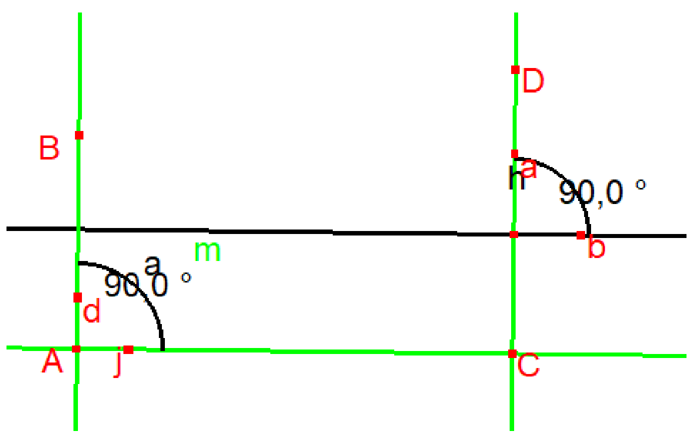
Al final de la tarea, después de que los estudiantes expusieron sus resultados y la posible justificación para esta actividad, se les presentó la justificación correcta, la cual era el teorema: "cuando dos paralelas son cortadas por una tercera recta, los ángulos correspondientes y alternos son iguales. Y recíprocamente la congruencia de los ángulos correspondientes o alternos tienen como consecuencia que las rectas son paralelas[24]". Como parte final de la tarea se realiza la conclusión que si dos rectas paralelas y se tiene otra recta que las corte se forman dos ángulos de medidas iguales, cerrando así la sesión de esta tarea.

[24]Este teorema fue expuesto en la dimensión matemática del marco teórico, en la sección 2.3.1.

4.2.2.2 Actividad 2

En la primera parte de esta segunda tarea, los estudiantes realizaron una construcción geométrica de nombre “guía 2-1” siguiendo las instrucciones, y haciendo uso de las herramientas del Cabri, obteniendo los resultados presentados en la Tabla 17:

Tabla 17
Resultados obtenidos de la Actividad 2 parte 1

	Soluciones
Grupo 1	El resultado de lo elaborado por los estudiantes se puede apreciar en la siguiente imagen, tomando en cuenta que realizaron una construcción similar a la que les apareció en la hoja de trabajo dada: 
Grupo 2	El resultado de lo elaborado por los estudiantes se puede apreciar en la siguiente imagen, tomando en cuenta que realizaron una construcción similar a la que les apareció en la hoja de trabajo dada: 

En la segunda parte de esta tarea, los dos grupos de estudiantes realizaron una exploración sobre los puntos B y D, y al observar que las medidas de los ángulos $\measuredangle a$ o $\measuredangle$h variaban, los motivó a explorar libremente posibles modificaciones de los puntos y de los valores de los ángulos que se habían creado. Posteriormente, con el fin de obtener la condición de que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, los estudiantes hicieron uso del arrastre sobre el punto B, y una vez consiguieron ángulos con igual medida, arrastraron el punto D para tener otra medida diferente de $\measuredangle h$, con lo cual volvieron a hacer uso del arrastre sobre el punto B para obtener nuevamente ángulos congruentes. Este proceso se repitió varias veces, hasta fijarse que la condición necesaria es que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Al tener en cuenta estos procesos, los estudiantes respondieron a las preguntas[25] que se les planteó. Y con la característica necesaria, realizaron una nueva construcción geométrica ("guía 2-2") en donde se cumpla siempre que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$. A continuación, en la Tabla 18 se presentan los resultados registrados.

Tabla 18
Resultados obtenidos de la Actividad 2 parte 2

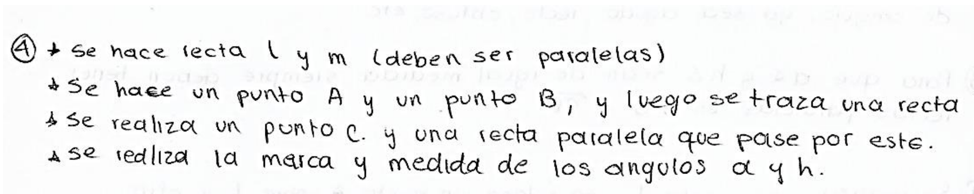
	Soluciones
Grupo 1	Teniendo en cuenta los procesos mencionados anteriormente, las respuestas a las preguntas iniciales se consignaron de manera escrita y se muestran a continuación: ① Son angulos agudos ; el angulo NCE (h) se basa en la recta m y el JAF (a) en la l. ; son pareados pero no iguales. ② cuando se mueve el punto B cambia la medida del angulo a y al mover el punto D cambia la medida del angulo h. ③ Las rectas AB y CD sean paralelas. En lo referente a la construcción solicitada y siguiendo la revisión de los registros automáticos de sesión guardada de esta tarea, los estudiantes realizaron los siguientes pasos: Construyeron las rectas *l* y *m* paralelas entre ellas. A continuación, construyeron un punto *A* sobre *l* y luego un punto *B* fuera de *l*, y así elaboraron la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente crearon un punto C sobre la recta m, y con ello una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que incida por C, la cual

[25] Se hace referencia las preguntas de la actividad 2 presentadas en la página 68.

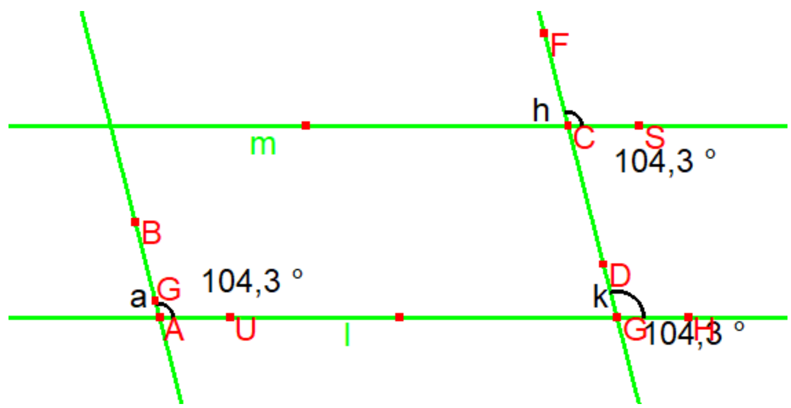
<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>

sería la recta $\overleftrightarrow{CD}$. Enseguida, haciendo uso de las herramientas marcar un ángulo y medida de ángulo, construyeron los ángulos: $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$. Luego de esto, al modificar los valores del $\measuredangle a$ observaron que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, con lo cual se fijaron que la construcción cumplía la condición solicitada.

A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas y un gráfico de la construcción obtenida:



④ + se hace recta l y m (deben ser paralelas)
+ Se hace un punto A y un punto B, y luego se traza una recta
+ Se realiza un punto C. y una recta paralela que pase por este.
+ se realiza la marca y medida de los angulos α y h.



En el gráfico anterior, se puede detallar la construcción de un ángulo adicional, denominado $\measuredangle k$, el cual fue usado en la justificación de su resultado, al establecer que $\measuredangle a \cong \measuredangle k$ y que $\measuredangle k \cong \measuredangle h$, al utilizar la justificación de la tarea previa. Por lo cual, ellos aseguraron que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$ deberían ser congruentes, es decir, utilizaron la propiedad transitiva de la relación de congruencia de ángulos.

A continuación, se muestra las respuestas escritas de las preguntas 5, 6 y 7 de esta actividad:

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>(5) Las rectas deben ser paralelas para obtener la misma medida de los angulos.

(8) Las rectas funcionan puesto a que son paralelas y al ser paralelas van a ser iguales y por lo tanto el angulo siempre sera igual.

(4) Tienen ~~todos sus~~ algunos angulos de una misma medida; el punto B hace que las dos rectas se muevan (b y D), si se mueve la recta I, se mueven las paralelas. Entre 2 paralelas que se cortan a otras 2 paralelas. el angulo h siempre sera igual al angulo A.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Teniendo en cuenta los procesos mencionados anteriormente, las respuestas a las preguntas iniciales se consignaron de manera escrita y se muestran a continuación

1:- Que el angulo a se encuentra en el interior y h se encuentra en el exterior
- El angulo h esta formada en una recta paralela diferente al angulo a.
2:- Si se arrastra el punto B., la medida del angulo cambia. Si se arrastra ~~la~~ el punto D, la medida del angulo cambia.
3:- Las condiciones que (el GA) la recta $\overleftrightarrow{AB}$ sea paralela a la recta $\overleftrightarrow{CD}$

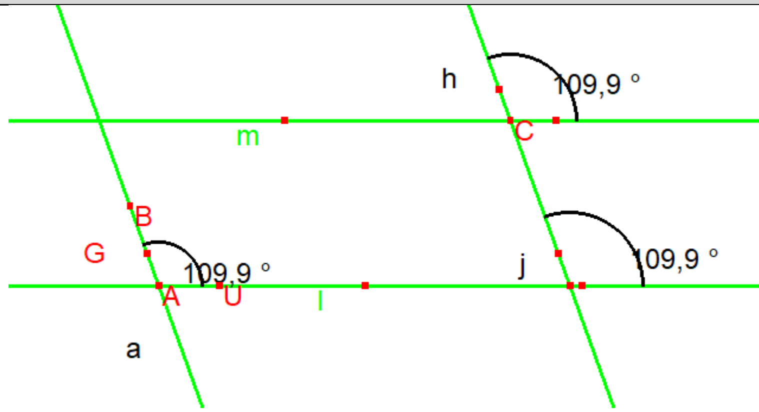
En lo atinente a la construcción solicitada y siguiendo la revisión de los registros automáticos de sesión guardada de la tarea, los estudiantes realizaron los siguientes pasos:

Construyeron las rectas l y m paralelas entre ellas. A continuación, sobre la recta l crearon un punto A y luego un punto B fuera de l. y así elaboraron la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente, produjeron un punto C sobre la recta m, luego hicieron el $\measuredangle a$. En seguida, una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que incida por C, la cual sería la recta $\overleftrightarrow{CD}$ y por último construyeron el $\measuredangle h$. Luego de esto, al modificar los valores del $\measuredangle a$ observaron que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, con lo cual se fijaron que la construcción cumplía la condición solicitada.

A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas y un gráfico de la construcción obtenida

4:- Construccion: (1) Recta $\overleftrightarrow{AB}$, Recta paralela $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto C, luego creación de angulos con igual medida el angulo (a) y el angulo (h)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>



En el gráfico anterior se puede detallar la construcción de un ángulo adicional, denominado $\measuredangle j$, el cual fue usado en la justificación de su resultado, al establecer que $\measuredangle a \cong \measuredangle j$ y que $\measuredangle j \cong \measuredangle h$, al utilizar la justificación de la tarea anterior. Por lo cual, ellos aseguraron que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, es decir, utilizaron la propiedad transitiva de la relación de congruencia de ángulos.

A continuación, se muestra las respuestas escritas de las preguntas 5, 6 y 7 de esta actividad:

5: Relacion de actividad: El uso de las paralelas donde hay una recta que corta con los puntos

6º Justificacion:
Si se tienen dos rectas paralelas y una misma recta que las corta, se formaron dos angulos con la misma medida, angulo a y j son iguales. Luego j y h son iguales, ~~debido a que hay dos paralelas~~ Luego a y h son iguales.

7. Conclusiones: -Al realizar este ejercicio algunos de los angulos son iguales
-las rectas deben ser paralelas o sino no se cumpliria lo de la medida de los angulos

Entre dos paralelas que cortan a otras dos paralelas, el angulo exterior seria igual a un angulo interior

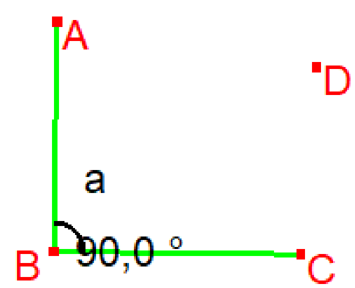
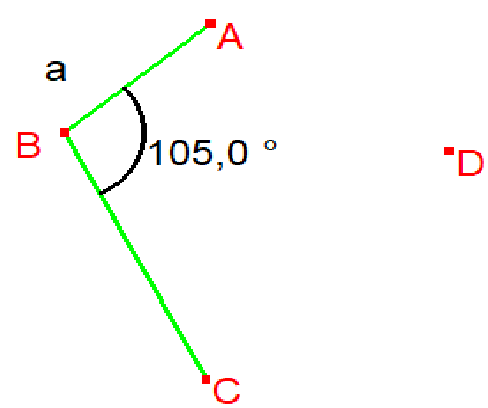
</td></tr>
</table>

En la socialización de esta tarea, los estudiantes de los dos grupos presentaron las soluciones desarrolladas, resaltando que en este caso ambos grupos habían llegado a similares procedimientos geométricos de la construcción, en donde habían utilizado la construcción y la conclusión de la Actividad 1, para la justificación de sus soluciones. Como parte final, llegaron a una conclusión la cual fue: “entre dos rectas paralelas que se corta a otras dos paralelas, se pueden formar ángulos de igual medida”, en particular, los utilizados en la tarea.

4.2.2.3 Actividad 3

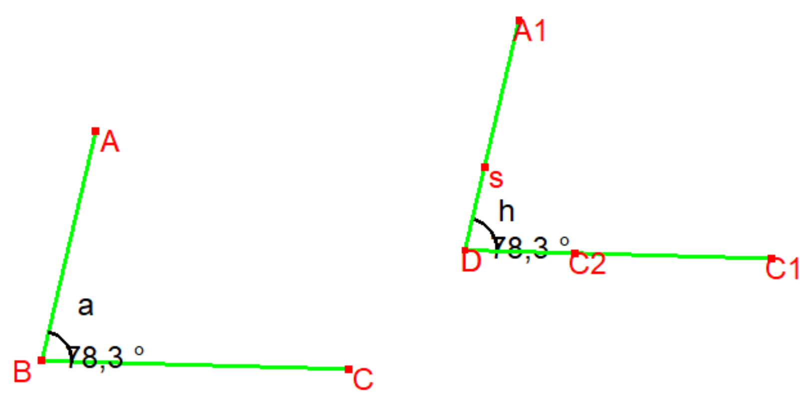
En la primera parte de la Actividad 3, los estudiantes realizaron una construcción geométrica de nombre "guía 3-1" siguiendo las instrucciones, y haciendo uso de las herramientas del Cabri se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 19.

Tabla 19
Resultados obtenidos de la Actividad 3 parte 1

	Soluciones
Grupo 1	Los estudiantes al tomar en cuenta la imagen de la guía y tomarla como base, y seguir los pasos de la construcción, los puntos *A*, *B*, *C* y *D* quedaron distribuidos así: 
Grupo 2	Al igual que el grupo 1, el grupo 2 siguió los pasos para la construcción, y posiblemente al tomar en cuenta la imagen de la guía, obtuvieron inicialmente el resultado presentado en la siguiente imagen: 

En la segunda parte de esta tarea, los dos grupos de estudiantes a partir de la construcción y haciendo uso de las herramientas del AGD, realizaron una nueva construcción geométrica que cumpliese las condiciones solicitadas, para lo cual tuvieron en cuenta los procedimientos de las tareas anteriores. Posteriormente a esto, respondieron las preguntas[26] que se les planteó. A continuación, en la Tabla 20 se presentan los resultados registrados.

Tabla 20
Resultados obtenidos de la Actividad 3 parte 2

	Soluciones
Grupo 1	Al revisar los procesos utilizados por los estudiantes, mediante los registros automáticos de sesión guardada de esta tarea, ellos siguieron los siguientes pasos para su construcción: Crearon una recta m, paralela al segmento $\overline{AB}$ y que pase D, luego elaboraron una recta n, paralela a $\overline{BC}$ y que pase por D, y posterior a esto marcan y miden el ángulo $\measuredangle h$, que era formado por las rectas m y n. A continuación, construyeron una circunferencia con la herramienta compás cuyo radio era el segmento $\overline{AB}$ y con centro el punto D, denominada X_1, de igual forma, elaboraron la circunferencia de radio $\overline{BC}$ y centro el punto D, denominada X_2 y a partir de esto, construyeron el puntos A_1 como intersección de m y X_1, y el punto C_1 como intersección de n y X_2. En seguida a estos procesos, ocultaron las construcciones auxiliares, y construyen los segmentos $\overline{A_1D}$ y $\overline{DC_1}$. Obteniendo como resultado la siguiente imagen:  Como parte final, para realizar una verificación de la construcción se realizaron arrastres aleatorios de los puntos A, B, C y D, identificando que las medidas de los lados y ángulos eran congruentes, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{A_1D}$, $\overline{BC} \cong \overline{DC_1}$ y $\measuredangle a \cong \measuredangle h$.

[26] Se hace referencia las preguntas de la actividad 3 presentadas en la página 73.

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>
A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas

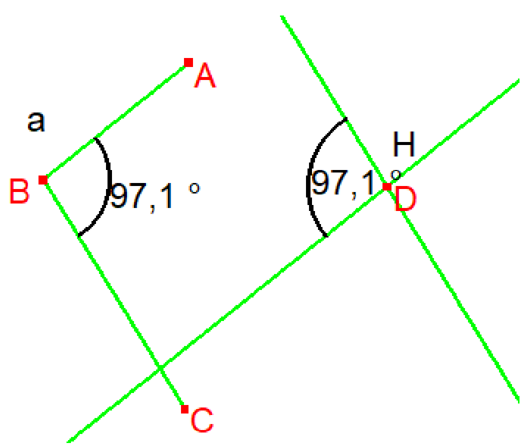
1) Realizamos primero, en el punto D una recta paralela con el segmento $\overleftrightarrow{AB}$ y otra recta paralela con el segmento $\overleftrightarrow{BC}$ y despues marcamos angulos y lo medimos
2) . .

En seguida, se presentan las respuestas escritas a las preguntas 2 a la 7 de esta tarea:

2) Utilizamos rectas paralelas para que tengan un mismo angulo
3). Porque cuando movemos el punto A la paralela a esta se mueve y quedan con un mismo angulo
4). Al angulo h no le sucede nada y si se arrastra de manera aleatoria los pontos A, B. C. hacen que sus paralelas a estos

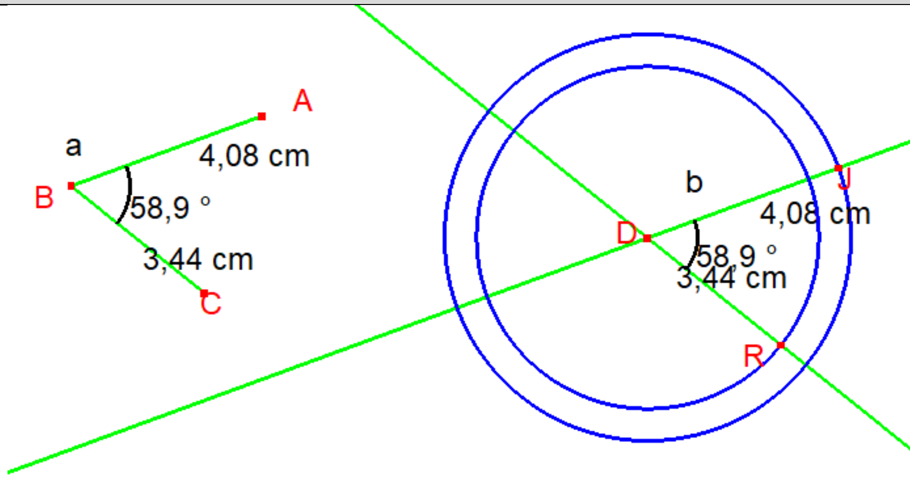
4). Al angulo H ~~no le sucede nada~~ se transfiere pero con las mismas medidas. y si se arrastra de manera aleatoria los puntos. A, B y C. cambia tanto la primera construccion como la segunda ~~debido a la~~
5) la herramienta compaz la cual hace que los primeros segmentos tengan la misma medida que los de la siguiente grafica.

6) La herramienta compas. sirve para que el segmento que creamos principalmente sea el mismo en otra parte.
</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
Este grupo desarrolló inicialmente una construcción donde el $\measuredangle h$ se encontraba del lado izquierdo al punto D, tal como se muestra en la siguiente imagen:

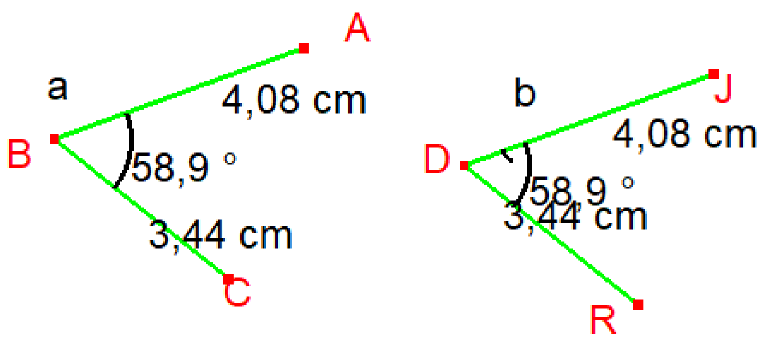


Sin embargo, al seguir la construcción de los segmentos que midiesen igual a las medidas de segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ comenzaron a tener dificultades y se confundieron. Esto hizo que los estudiantes decidieran volver a construir y realizaron una nueva construcción similar a la del grupo 1, así:
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>



Donde los puntos de intersección entre las circunferencias y las rectas fueron nombrados respectivamente como J y R, y el resultado de la construcción elaborada por este grupo se puede observar en la siguiente imagen:



</td></tr>
</table>

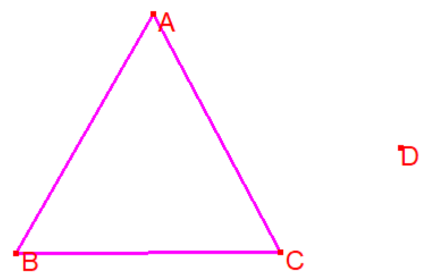
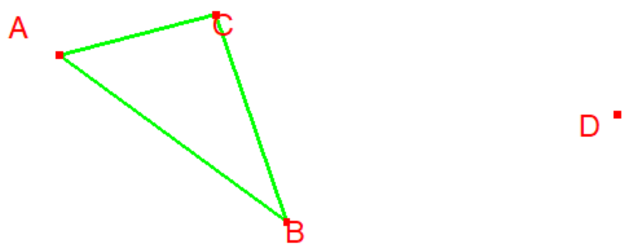
	Soluciones
	Como parte final, para realizar una verificación de la construcción se realizaron arrastres aleatorios de los puntos A, B, C y D, identificando que las medidas de los lados y ángulos eran congruentes, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{JD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DR}$ y $\measuredangle a \cong \measuredangle h$. A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas. 1. Para la construccion usamos una circunferencia en un punto a a partir de un segmento. En seguida, se presentan las respuestas escritas a las preguntas 2 a la 7 de esta tarea: 2. Relacion: tener como base la construccion de las paralelas, donde una es paralela a la otra, aunque ahora utilizamos compás y así ~~[illegible]~~ se dan dos angulos con igual medida 3. Justificacion: - Tener como base las paralelas que nos garantizan la misma medida de los angulos y luego usar la herramienta compás con la cual obtenemos las mismas medidas de los segmentos $\overleftrightarrow{AB}$ con $\overleftrightarrow{JD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ con $\overleftrightarrow{DR}$ 4.- Si arrastro el punto D, la figura realizada se mantiene - Si se arrastra el punto A, la longitud de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{JD}$ cambian al igual que los angulos - Si se arrastra el punto B, cambian las longitudes de toda la figura al igual que la medida del angulo - C, ocurre el cambio de longitud de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DR}$, al igual que la medida del angulo 5º. Ocurre esto puesto que el movimiento que se le da a los puntos produce una variacion sobre las longitudes y medidas de angulo en la figura creada. 6º Conclusiones generales: Que para mantener la longitud de ~~los angulos~~ los segmentos es necesario usar la herramienta compás, al igual que rectas paralelas que pasan por un punto que luego dara lugar a otra figura con mismas longitudes de segmentos y medidas de angulos

En la socialización de los resultados de esta tarea, los grupos participantes llegaron a similares procedimientos e hicieron uso de las herramientas, construcciones y conclusiones utilizadas en las anteriores tareas, y particularmente el uso de las herramientas recta paralela para construir un anguilo congruente a uno inicial; y la herramienta compás utilizada, por un lado, en el proceso de solución para la elaboración de segmentos de igual longitud; y por el otro, para la justificación a esta tarea, al relacionar los segmentos que eran iguales. Como parte final se realizó una conclusión de esta actividad, la cual fue: se puede copiar un ángulo formado por dos segmentos, de manera geométrica, utilizando la herramienta compás del AGD.

4.2.2.4 Actividad 4

En la parte 1 de la Actividad 4, los estudiantes realizaron la construcción geométrica de nombre “guía 4-1” la cual consistía de un triángulo *ABC* cualquiera y un punto *D* y dado que no había una imagen guía, ellos debieron crear cualquier tipo de triángulo haciendo uso de las herramientas del Cabri. Los resultados de esta parte inicial se presentan a continuación en la Tabla 21:

Tabla 21
Resultados obtenidos de la Actividad 4 parte 1

	Soluciones
Grupo 1	
Grupo 2	

En la segunda parte los dos grupos de estudiantes a partir de la construcción y haciendo uso de las herramientas del AGD, crean una construcción que cumpla las condiciones solicitadas, para lo cual tuvieron en cuenta los procedimientos de las actividades anteriores, y a partir de estas respondieron a las preguntas[27] que se les planteo. A continuación, en la Tabla 22 se presentan los resultados registrados.

---

[27] Se hace referencia las preguntas de la actividad 4 presentadas en la página 79.

Tabla 22

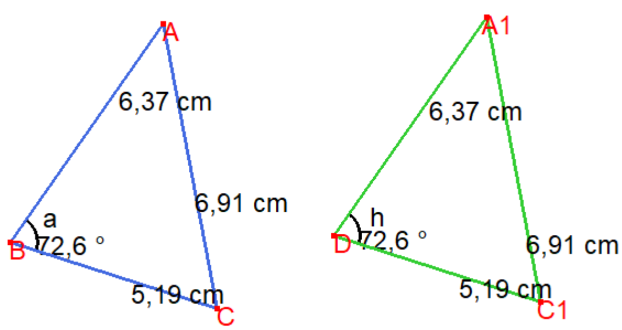
Resultados obtenidos de la Actividad 4 parte 2

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>

A continuación, se presentan los pasos de la construcción geométrica elaborada por los estudiantes, siguiendo la revisión de los registros automáticos de la sesión guardada:

Los estudiantes de este grupo construyeron una recta paralela al lado $\overline{AB}$ y que pasara por D, denominada m, de igual forma una recta paralela al lado $\overline{BC}$ y que pase por D, denominada n. Posteriormente, marcaron y midieron el ángulo $\measuredangle h$ que se formaba entre m y n. A continuación, elaboraron dos circunferencias con la herramienta compás, una de radio el segmento $\overline{AB}$ y centro el punto D, denominada X_1 y la otra de radio $\overline{BC}$ y con centro en D, denominada X_2. A partir de esto, construyeron el puntos A_1 como intersección de m y X_1, y el punto C_1 como intersección de n y X_2 y luego elaboran el triángulo A_1DC_1 y realizan una medición de cada uno de los lados de los triángulos y poder comparar los dos triángulos.

En seguida a esto, ocultan las construcciones auxiliares, obteniendo como resultado la siguiente imagen:



Como parte final, para realizar una verificación de la construcción si cumple las condiciones solicitadas se realizaron arrastres aleatorios de los puntos A, B, C y D, identificando que las medidas de los lados y ángulos eran congruentes, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{A_1D}$, $\overline{BC} \cong \overline{DC_1}$ y $\measuredangle a \cong \measuredangle h$.

A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas.

1 Utilizamos la herramienta triangulo para construir un triangulo ABC. , seguidamente se elige. cualquier punto y se le da el nombre de D.

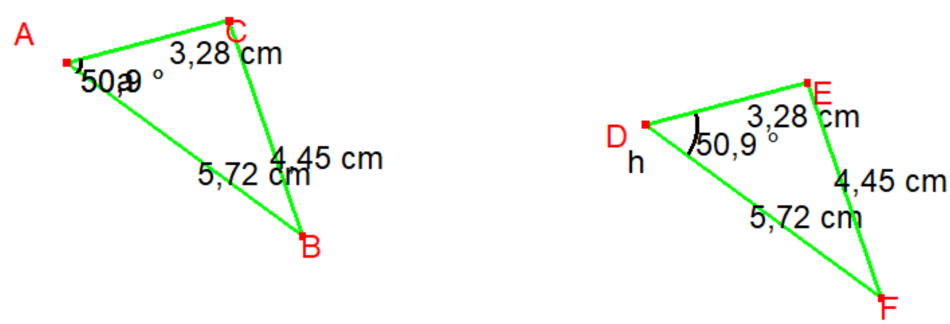
A continuación, se muestra las respuestas escritas de las preguntas 2 al 7 de esta actividad:

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>② Se utilizan paralelas, compas, segmentos y angulos; teniamos un vertice ABC y punto D fuera de este, además del punto D se realizaba una figura similar con las herramientas utilizadas anteriormente.

③ Primero construimos el triangulo ABC con un punto D por fuera, para que en el punto D se pueda realizar un triangulo igual a ABC, utilizando a D como el punto B, igualmente se utilizan paralelas para que el triangulo posea la misma inclinacion. Se utiliza las herramientas marcar y medir angulos. para saber si estos pueden ser geometricamente funcionales.

④ Con la herramienta longitud o distancia podemos comprobar si dos o mas figuras funcionan geograficamente.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>De manera similar, este grupo desarrolló una construcción parecida a la del grupo 1, donde los puntos de intersección entre las circunferencias y las rectas fueron nombrados E y F. Y posteriormente elaboran el triángulo DEF y miden cada uno de sus lados, y el resultado de su construcción se observa en la siguiente imagen:



Como parte final, para realizar una verificación de la construcción si cumple las condiciones solicitadas se realizaron arrastres aleatorios de los puntos A, B, C y D, identificando que las medidas de los lados y ángulos eran congruentes, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$ y $\measuredangle a \cong \measuredangle h$.

A continuación, se presenta el proceso descrito en la hoja de respuestas.

1. Primero que todo se uso las construccion de paralelas unas a otras rectas, luego herramienta compas y midiendo las longitudes que son iguales a las de la primera figura.

A continuación, se muestra las respuestas escritas de las preguntas 2 al 7 de esta actividad:</td></tr>
</table>

	Soluciones
	2. Relacion: El uso de las mismas herramientas que como se dyo anteriormente nos ayudan a conservar las mismas medidas de angulos y longitudes de segmentos 3. Justificacion: Si funciona ya que con base en la construccion con la cual iniciamos triangulo ABC, debe ser igual a DFE, entonces las paralelas nos garantizan en estos dos triangulos las mismas medidas en vertice A y D, luego proseguimos con herramienta compás marcamos segmentos, donde dos indique marcariamos un punto que genera la misma longitud del primero en sus segmentos. 4. Conclusiones: - Con las herramientas, compás y rectas paralelas podemos construir dos triangulos con longitudes de segmentos iguales al igual que la medida del angulo

En la socialización se expone la solución desarrollada por los dos grupos, resaltando que en este caso ambos llegaron a soluciones similares, donde hicieron uso de las construcciones realizadas, por un lado, de la Actividad 2 la utilización de rectas paralelas para formar un ángulo congruente a uno dado en el principio, y por otro lado, de la Actividad 3 la construcción de segmentos congruentes mediante la herramienta compás, y de igual manera sus respectivas conclusiones para justificar el resultado de esta tarea. Como parte final se realizó una conclusión de esta tarea la cual fue: se puede construir un triángulo congruente a uno dado inicialmente.

Para los estudiantes también fue destacable el haber trabajado y retomar varios de los conceptos de la Geometría Plana, al tomar como ayuda las herramientas del AGD tales como Segmento, Distancia, Recta paralela, Circunferencia y Punto de intersección, las cuales le permitieron hacer de manera más interactiva, sus ideas y de igual forma realizar una prueba de estas construcciones y de sus condiciones.

En definitiva, se puede decir que las tareas planteadas en su mayor parte lograron que los alumnos usaran los conocimientos impartidos de forma recurrente en los procesos de construcción y justificación de las soluciones encontradas, lo cual permitió observar que los estudiantes utilizaron las construcciones y conclusiones obtenidas con anterioridad para la solución y justificación de cada tarea. Sin embargo, a la hora de escribir los procesos en la hoja de respuestas, no se nota un registro escrito apropiado como prueba del uso de estos conocimientos y como parte de la justificación de las construcciones.

Cabe resaltar que los estudiantes en la Tarea 1, así como en la Tarea 2, en los procesos de socialización presentaron algunos inconvenientes cuando se les solicitó dar una justificación, pero al comparar con las respuestas en la Tarea 4, se notó una mejoría en la utilización de los conocimientos adquiridos previamente. En consecuencia, se destaca la posibilidad de que los alumnos fueron capaces de elaborar un argumento matemático que les permitió justificar su conclusión (el por qué efectivamente sí funcionaba la construcción).

En el siguiente capítulo, se presentarán los análisis de los resultados de la puesta en acto de las tareas diseñadas, ordenados en una rejilla para agrupar y organizar la información de algunos procesos realizados por los estudiantes y relacionarlos con el marco teórico.

CAPITULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentará un análisis de las soluciones y procesos producidos en la experimentación de las tareas diseñadas, para lo cual se diseñó una rejilla de análisis con el fin de agrupar y organizar la información recolectada de tal manera que exista una articulación entre los resultados obtenidos y las categorías de análisis, es decir, que permita conectar el marco teórico adoptado y los resultados. Para ello se presentarán en cada categoría de la rejilla algunos ejemplos de las tareas y de los procesos gestionados.

5.1 REJILLA DE ANÁLISIS

La rejilla de análisis en esta indagación es usada con el fin de realizar de manera más práctica los análisis a los procesos desarrollados por los estudiantes en las soluciones de las tareas diseñadas, las cuales se dividió en categorías, y principalmente, en éstas se estudiaron los procesos de justificación y los argumentos recolectados en la experimentación. Por lo tanto, para el planteamiento del análisis a las tareas se tuvo en cuenta los siguientes aspectos:

- *Tarea*: Nombre de la tarea.
- *Categoría de Análisis General*: Corresponde a los temas generales que surgen a partir de los enfoques teóricos considerados, los cuales estarán relacionados con los objetivos planteados de esta indagación.
- *Categoría de Análisis Específico*: Corresponde a los subtemas de las categorías teóricas generales.
- *Elementos Constitutivos*: Corresponden a los elementos que se tienen en cuenta dentro de las tareas las cuales están en el marco teórico.
- *Elementos Emergentes*: Corresponden a aquellos elementos que surgen en la interpretación del resultado en la experimentación, el cual no han sido considerado previamente.

- *Producción Individual*: Aquí se analizan tanto los elementos constitutivos como los elementos emergentes en las producciones grupales de los estudiantes (procesos de construcción, discursos escritos y orales de los grupos).
- *Producción colectiva*: En este componente se analizan los elementos obtenidos de manera colectiva de toda la clase, para este caso la socialización y los registros de las conclusiones.

Los componentes mencionados anteriormente, fungieron como fundamentos para conectar el marco teórico con los resultados obtenidos en la experimentación en las etapas del *ciclo didáctico*. Por un lado, las etapas de *actividad con el artefacto* y la *producción individual de signos* se evidencian en las construcciones y exploraciones de las construcciones geométricas solicitadas, en donde se esperó que emerjan *signos personales*; y en el caso del proceso de socialización de los resultados (*producciones colectivas de signos*) vinculados con el surgimiento de *signos matemáticos*.

Con relación a las categorías de Análisis General y Análisis Especifico, lo constituyen aquellos temas o subtemas que se mencionan en el marco teórico, y teniendo en cuenta estos pueden surgir dos tipos de elementos: los *Elementos Constitutivos* que son consecuencias del marco teórico o los *Elementos Emergentes* que se obtienen solo a partir del experimento, es decir, no se tuvieron en cuenta para los posibles resultados. Estos elementos permiten conectar los objetivos de la indagación con el marco teórico propuesto. En la Ilustración 28 se muestra la relación de entre los componentes de esta rejilla de análisis.

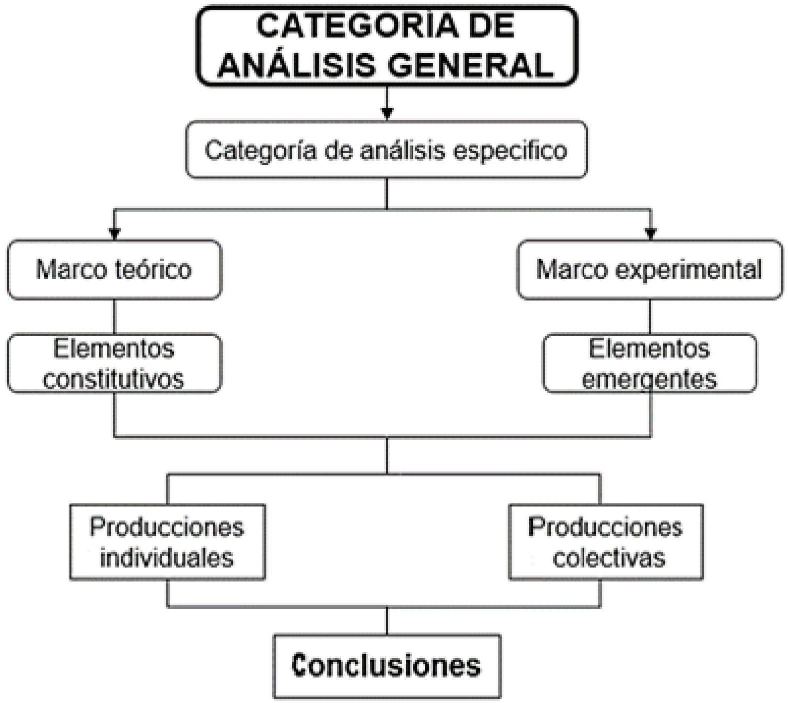


Ilustración 27. Relación entre componentes y la rejilla de análisis. Fuente Díaz y Zuluaga *(2013)*.

A continuación, se realiza una descripción de las categorías de análisis generales, con su respectiva rejilla de análisis.

5.2 CATEGORÍA DE ANÁLISIS GENERAL

En esta categoría se encuentran los resultados que fueron evaluados en la experimentación de las tareas diseñadas, las cuales se ordenaron y categorizaron de la siguiente forma: *continuidad cognitiva*, *herramienta de mediación semiótica y complementariedad de secuencia de actividades bajo el ciclo didáctico*, con las cuales se responde a los objetivos propuestos para esta indagación permitiendo ver a su vez el desarrollo de las tareas diseñadas.

La categoría de análisis de *continuidad cognitiva* pretende evidenciar si en la experimentación se produjeron conjeturas y si estas fueron acercadas a una demostración, recordando que el interés de esa indagación es la producción de argumentos que permitan justificar las soluciones presentadas. Para esta categoría se tuvo en cuenta los distintos apuntes escritos, transcripciones de los registros video gráficos, registros automáticos y las construcciones elaboradas en Cabri, con lo cual se pretende determinar algunos procesos de conjeturación y argumentos usados por los alumnos.

La categoría de análisis de *herramienta de mediación semiótica*, se busca identificar la producción de signos personales y signos matemáticos, así como la evolución del primer al segundo tipo. Para lo cual se recurrió a los diferentes registros y construcciones elaboradas en Cabri, de tal manera que permita ver el uso del Cabri como un *instrumento de mediación semiótica* en la solución de tareas donde se fomente la producción de conjeturas y argumentos.

Estas dos categorías, se encuentran ligadas con los objetivos específicos de la esta indagación, de tal forma que permitirán cumplir con el objetivo general de analizar la secuencia de tareas relacionadas con del criterio de congruencia de triángulos LAL, propuestas para promover el proceso de argumentación en los estudiantes.

5.2.1 Continuidad cognitiva

En esta categoría se pretende identificar la creación tanto de conjeturas como de argumentos que puedan servir para la producción de una posible demostración, aclarando que para esta indagación es de principal interés la elaboración de los argumentos por parte de los estudiantes, en donde se haga uso de conocimientos previos y como ellos los utilizaron para justificar las conjeturas o soluciones producidas en las tareas.

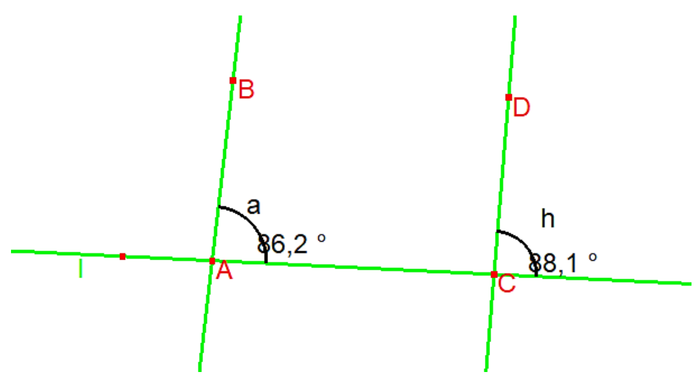
Aquí se encuentran las subcategorías de análisis específicas: *producción de conjeturas* y *producción de demostración* ; y los elementos a tener en cuenta vinculados con el marco teórico, los cuales son: Para la *producción de conjeturas*, se tuvo en cuenta las exploraciones realizadas en las construcciones y las respectivas conjeturas de manera escrita o verbal (extraída de los videos); en cuanto a la *producción de demostración* se tomaron los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar la conclusión y que hicieron parte de la teoría matemática apropiada por ellos.

5.2.1.1 Producción de una conjetura

Esta es una subcategoría de análisis específica en la cual se identifican los elementos que hacen parte de la producción de la conjetura en estas tareas: las exploraciones en el Cabri, la respectiva conjetura de manera escrita o verbal y los conocimientos asociados a las soluciones de la tarea. Puesto que para la creación de las conjeturas es esencial el uso de tareas en donde se trabaje con problemas abiertos. Entonces, en la Tabla 23 se presenta un análisis de la Actividad 1, en donde se propició el uso de este tipo de tareas y los resultados obtenidos.

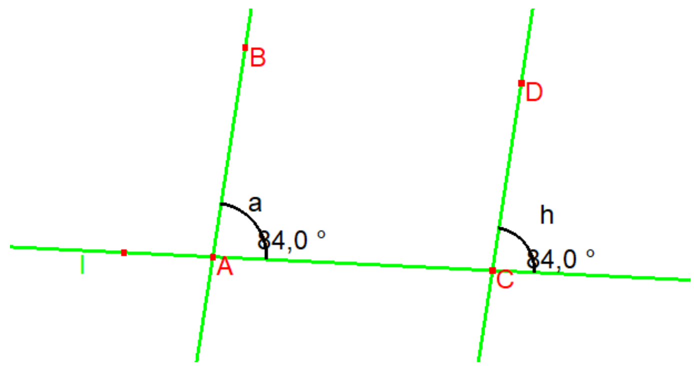
Tabla 23

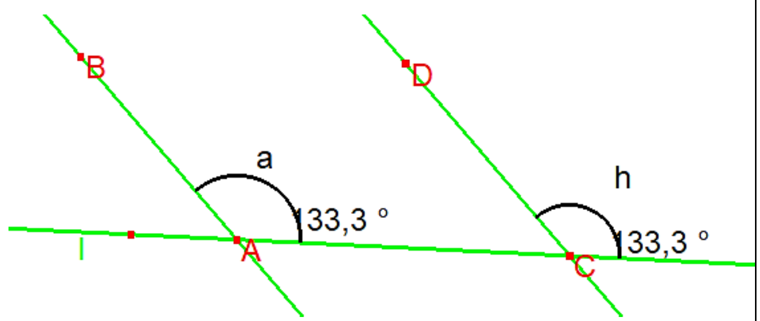
Rejilla de análisis de la Producción de una conjetura en la Actividad 1

<table>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="2">Actividad 1</td></tr>
<tr><td>Categoría de análisis general</td><td colspan="2">Continuidad cognitiva</td></tr>
<tr><td>Categoría de análisis especifico</td><td colspan="2">Producción de una conjetura</td></tr>
<tr><td>Elementos constitutivos</td><td colspan="2">Exploraciones en el Cabri y la conjetura de manera escrita o verbal.</td></tr>
<tr><td>Elementos emergentes</td><td colspan="2">no se encontraron</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producción individual</td><td>Tipo de exploración</td><td>rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>Exploración en el Cabri</td><td>Los estudiantes efectuaron la construcción solicitada


Y a partir de esta se realizaron modificaciones arrastrando el punto B o D en búsqueda de las características necesarias para que los ángulos fuesen iguales.

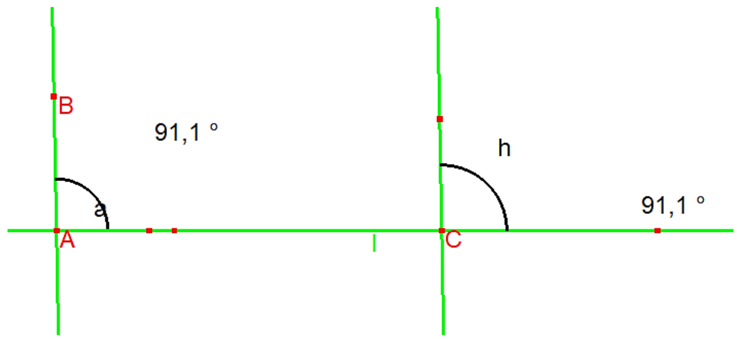
Docente: ¿Cuándo h y a son iguales? (refiriéndose a los ángulos)</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Estudiante: tendríamos que….
Docente: hazme la construcción.
Los estudiantes realizaron la siguiente gráfica


Docente: ¿Qué pasa si yo quiero que este ángulo $\measuredangle a$ no mida 84° sino allí (113.3°), por ejemplo?, ¿Qué pasaría?
Estudiante: (gesto de mover el punto D)


Docente: ¿Qué debe formarse siempre?
Estudiante: Los dos ángulos de igual medida
Docente: Mira más profundo… haz más variaciones
Estudiante: Las rectas paralelas
Docente: ¿Cuáles?
Estudiante: Las $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$

Revisión verbal y grafica del grupo 1</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Sistemas de concepciones</td>
<td>Identifican la representación de un ángulo y sus medidas, teniendo en cuenta que para su creación se requieren dos rectas que sean secantes.
Identifican mediante las medidas cuando dos ángulos son iguales (congruentes).</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Tipo de exploración</td>
<td>Verificación de condición para que los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ siempre sean congruentes.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Construcción</td>
<td>Al tener en cuenta que los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ son iguales cuando las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas, los estudiantes</td>
</tr>
</table>

		del grupo 1 realizaron la siguiente construcción para que $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ sean siempre congruentes: “se realiza una recta l, se coloca un punto A sobre l y un punto (llamado B) fuera de l. Luego se construye la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente se hace un punto C sobre la recta l y se forma una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y pase por el punto C. Finalmente, se marcan y miden los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ con sus respectivas herramientas”  transcripción escrita e imagen de lo producido del grupo 1
	Sistemas de concepciones	Identifica la creación de rectas paralelas teniendo una recta y un punto fuera de la inicial. Identifica la condición de ángulos correspondientes usando paralelas para que dos ángulos tengan las mismas medidas (sean congruentes).
Producción colectiva	tipo de exploración	¿Por qué Rectas paralelas?
	Justificación	**Argumentos errados** **Argumento1:** Porque deben ser paralelas… **Argumento2:** Teorema de Thales.
	Sistemas de concepciones	Identifica la creación de rectas paralelas teniendo una recta y un punto fuera de la inicial. Identifica la condición de ángulos correspondientes usando paralelas para que dos ángulos tengan las mismas medidas (sean congruentes),

En esta actividad inicial, los estudiantes utilizaron las herramientas que proporciona el AGD Cabri para la exploración y comparación de construcciones, tales como: el *arrastre* y la *medida*, las cuales les permitió estudiar diversas casos y circunstancias de manera más fáciles y dinámicas, al modificar la construcción y así poder identificar algunas características específicas. Esto permitió identificar al *arrastre* como una acción recurrente y necesaria para la solución de las tareas propuestas. Por otro lado, se puede ver que las tareas diseñadas estimularon en los alumnos la curiosidad por encontrar la solución y darle una connotación argumentativa.

En particular, en esta tarea ellos lograron conjeturar que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ deben ser paralelas, para que los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ sean siempre iguales (congruentes). Sin embargo, no pudieron dar unos buenos argumentos para justificar este hecho, esto puede deberse a que lo conocimientos requeridos para dicha sustentación, se impartieron a los estudiantes hace un buen tiempo y quizá no eran muy usados. Debido a esto, se recurrió a la necesidad de recordar y aclarar el uso de la creación y características de los ángulos correspondientes cuando se tienen dos rectas paralelas y una recta adicional que las corta.

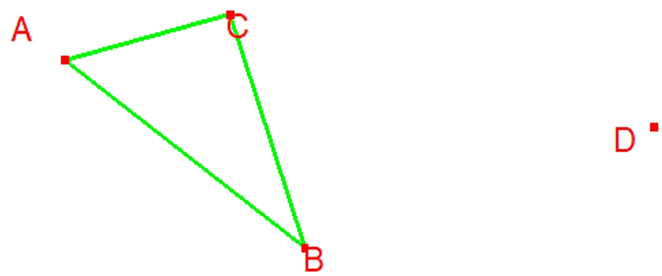
5.2.1.2 Producción de una demostración

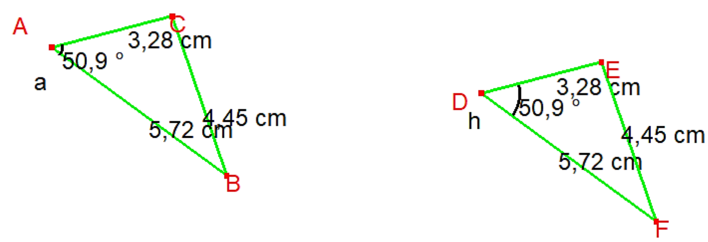
Para esta categoría se tomaron en cuenta la construcción solicitada, los argumentos y la teoría matemática. Dentro de los argumentos se consideró dos tipos de argumentos en relación con la demostración de *carácter funcional* y de *carácter estructural*[28]. Para este caso, solo se efectuó el análisis para el caso de la Actividad 4, con el fin de evidenciar estos argumentos. La rejilla de análisis correspondiente se presenta a continuación en la Tabla 24.

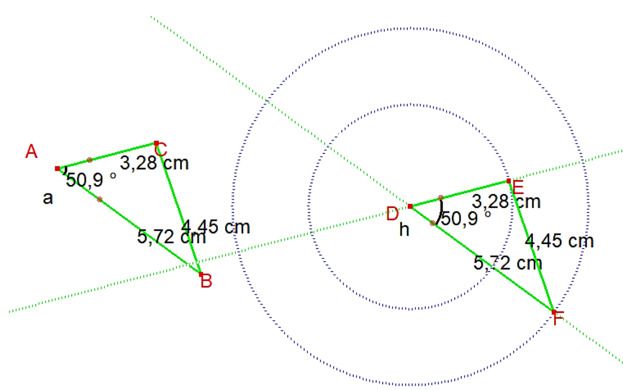
Tabla 24
Rejilla de análisis de la producción de una conjetura en la Actividad 4

Tarea	Actividad 4
Categoría de análisis general	Continuidad cognitiva
Categoría de análisis especifico	Producción de una demostración
Elementos constitutivos	Exploraciones en el Cabri, argumentos.

[28] Para una mayor referencia a los dos tipos de argumentos puede dirigirse al apartado *2.1.2* ya descrito anteriormente en este documento.

<table>
<tr><td>Elementos emergentes</td><td colspan="2">no se encontraron</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producción individual</td><td>Tipo de exploración</td><td>Como crear Triángulos congruentes</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td>Los estudiantes realizaron la construcción solicitada


A partir de esta construcción se efectúan nuevas construcciones para obtener la siguiente imagen:


Mostrando las construcciones auxiliares se tiene la imagen


Docente: ¿Por qué funciona? (la construcción) …
Estudiante: se toma las herramientas de recta paralela para que $\measuredangle CAB$ en D den la misma medida del ángulo (señalando el ángulo formado en el vértice D)</td></tr>
</table>

		(la construcción se hace referencia a las rectas paralelas al segmento $\overline{AB}$ y que pase por D, y la segunda recta paralela al segmento $\overline{BC}$ y que pase por D). **…** **Docente:** listo ¿y ahora?... **Estudiante:** luego marcadas las paralelas, se crea la circunferencia con el compás, seleccionando el segmento (señalando $\overline{AB}$) y luego D, marcando el punto F y se hace el segmento (refiriéndose a $\overline{DF}$) **Docente:** aja! (moviendo la cabeza afirmativamente) **Estudiante:** luego se hace lo mismo para el otro (señalando al segmento $\overline{DE}$) Revisión verbal y grafica del grupo 2
	Sistemas de concepciones	Identifica al triángulo como una unión de segmentos, el uso de una secuencia para crear un triángulo congruente a uno dado inicialmente, el uso de la condición de ángulos correspondientes para crear dos ángulos congruentes, uso del compás para construir sobre una recta un segmento cuya longitud sea congruente a un segmento inicial.
Producción colectiva	Tipo de exploración	¿Por qué los triángulos son iguales?
	Argumentos	**Agumento1:** porque se parecen y tienen medidas de los lados iguales **Argumento2:** porque los segmentos son iguales por construcción, al usar rectas paralelas y compás.
	Sistemas de concepciones	El uso de la condición de ángulos correspondientes para crear dos ángulos congruentes, uso de compás para crear un segmento con una misma longitud a una inicial sobre una recta. La congruencia de dos figuras se obtiene cuando se pueden establecer relaciones entre medidas de longitud tanto de lados y ángulos de dos figuras, las cuales deben ser iguales al formar parejas entre la primera y la segunda imagen, en este caso al comparar si dos triángulos son iguales.

Con respecto a los resultados encontrados en esta categoría de análisis se pudo percibir que los alumnos utilizaron conocimientos previos, tal como el uso de ángulos correspondientes, y el uso de la herramienta compás como herramienta para construir segmentos de igual medida, de tal manera que pudieron usar argumentos que les permitieron justificar por qué razón las partes de los triángulos eran de igual medida. Aquí se puede resaltar que los argumentos dados por los grupos tienen un orden, el cual es el usado en el procedimiento de la construcción y se fundamentó tanto en las construcciones y soluciones como en las actividades anteriores.

Sin embargo, se evidenció la falta del uso de un adecuado lenguaje matemático para el proceso de argumentación en el sentido de la demostración, puesto que ellos recurrieron a un lenguaje más sencillo tanto para explicar los procesos usados como para referirse a los objetos y sus comparaciones, y de igual forma en la presentación textual de estos argumentos. Por lo anterior, se evidencio una falencia en el lenguaje matemático que pudiese comprobar dicho resultado.

Estas dificultades pueden deberse a la posible ausencia de trabajo con la demostración en las aulas de clase en tanto a la forma de escribir matemáticamente los componentes necesarios ó a las posibles deficiencias en las formalizaciones de los conocimientos requeridos para estas tareas; o también la ausencia de un tiempo adecuado para dedicar más trabajo con estas tareas, con el fin de que el docente pueda gestionar una mejor *socialización* y así mejorar la forma de guiar las conjeturas a una demostración.

No obstante, recordando que el interés de esta indagación es la creación de argumentos y conjeturas, se pudo observar que estas tareas fomentan de forma particular el uso de argumentos para justificar el resultado obtenido en la construcción y su dependencia a esta. En relación a los vínculos producidos entre los argumentos y la demostración[29] se identificaron: por un lado, el caso funcional, los estudiantes usan dichos argumentos basados en la exploración de las tareas anteriores para dar la justificación tanto a las construcciones realizadas, así como de las ideas concluyentes. Un ejemplo de esto es el caso de las rectas paralelas utilizado para construir ángulos congruentes. En cuanto a la característica estructural, se evidencia en el uso de argumentos que intentan dar explicación a los resultados obtenidos basándose en las construcciones realizadas, teniendo así una posible base para una estructura que puede ser usada para la demostración teniendo un adecuado lenguaje.

[29] Los vínculos o relaciones que pueden darse ente la argumentación y la demostración se dieron a conocer en el apartado 2.1.2 de este documento.

A continuación, se realiza una descripción de la categoría de análisis general instrumento de mediación semiótica, en donde se reconoce la forma en que el AGD apoyó el crecimiento de los significados personales a significados matemáticos.

5.2.2 Instrumento de mediación semiótica

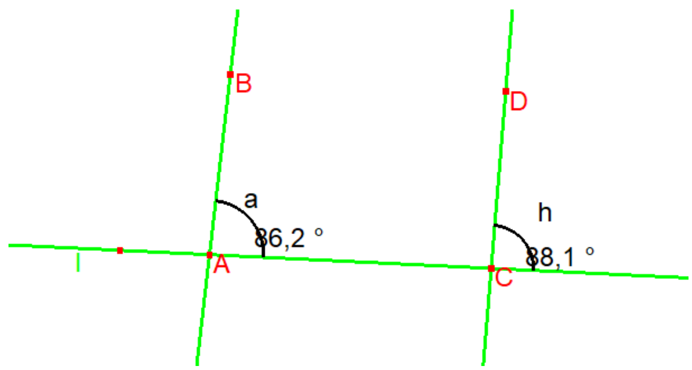
En esta categoría de se da a conocer por qué en esta indagación el AGD se tomó como un instrumento de mediación semiótica, al permitir el reconocimiento de los signos y poder guiar la evolución de los *signos personales* a *signos matemáticos*, para lo cual se consideró dos tipos de vínculos esenciales entre el sujeto y el conocimiento matemático cuando se esté usando este artefacto. Dichas relaciones que se pueden desarrollar por estos tipos de instrumentos son: los *signos personales*, que se obtuvieron de la interacción con el artefacto y son resultado de la búsqueda de la solución a la tarea planteada por el docente; y los *signos matemáticos*, los cuales se acoplan en gran medida con el saber matemático, en el sentido de lo aceptado ante una comunidad matemática.

5.2.2.1 Signos personales

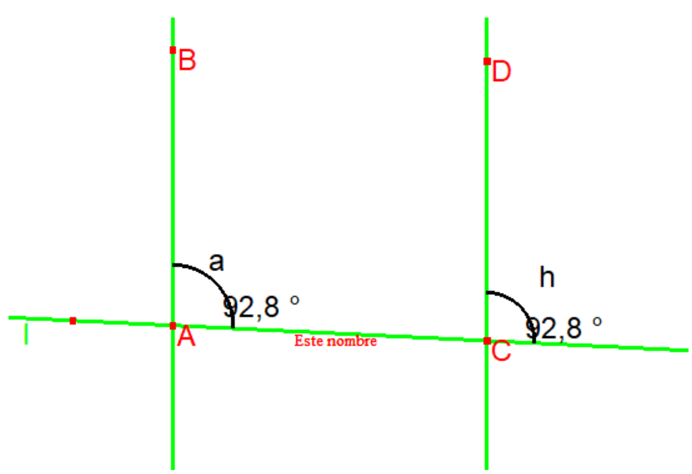
Aquí encontraremos los elementos concernientes a las acciones realizadas por los estudiantes al buscar una solución a las tareas propuestas por el docente-investigador, permitiendo a partir de la interacción con el Cabri la creación de ideas para justificar. A continuación, en la Tabla 25 veremos la rejilla de análisis para la Actividad 4.

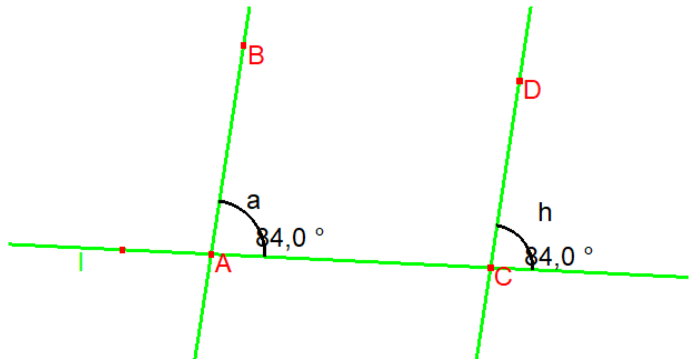
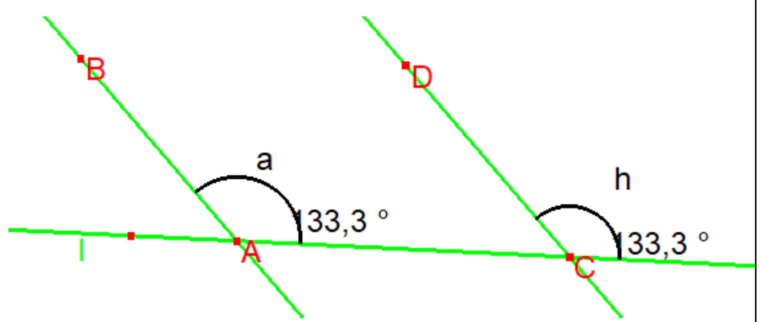
Tabla 25
Rejilla de análisis de la Producción de una conjetura en la actividad 4

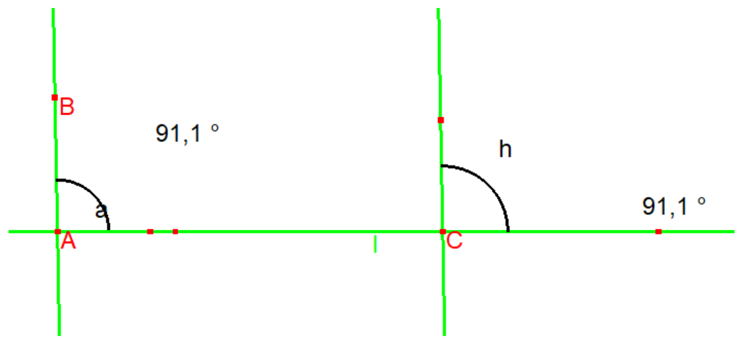
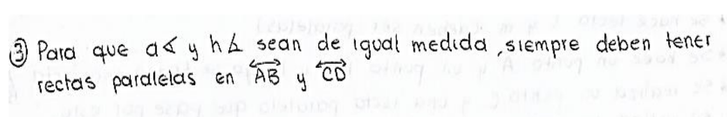
Tarea	Actividad 1
Categoría de análisis general	Instrumento de mediación semiótica
Categoría de análisis especifico	Signos personales

<table>
<tr><td>Elementos constitutivos</td><td colspan="2">Exploraciones en el Cabri, uso del AGD Cabri y la conjetura de manera escrita o verbal.</td></tr>
<tr><td>Elementos emergentes</td><td colspan="2">no se encontraron</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producción individual</td><td>Exploración en Cabri</td><td>rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>Uso del AGD Cabri</td><td>Los estudiantes realizaron la construcción solicitada siguiendo los pasos de la guía y obtienen el siguiente resultado:


Y a partir de ésta, se realizaron modificaciones de arrastre sobre el punto B o D, con el fin de encontrar cuando los ángulos son iguales.

Docente: ¿Cuándo $\measuredangle h$ y $\measuredangle a$ son iguales? (refiriéndose a los ángulos).
Estudiante: tendríamos que….
Docente: hazme la construcción de cuando serian iguales.
Estudiante: (Mueve el punto B y el D variando los ángulos).

</td></tr>
</table>

		Docente: Ahora mueve el punto B a otro lugar… **Estudiante:** (el estudiante mueve el punto B variando la medida del ángulo $\measuredangle a$). **Docente**: ahí está bien. Y ahora para que el otro sea igual ¿qué pasa? (refiriéndose al ángulo $\measuredangle h$). **Estudiante:** Debo mover el D.  **Docente:** ¿Qué pasa si yo quiero que éste ángulo a no mida 84° sino allí (113.3°)?, por ejemplo, ¿Qué pasaría? **Estudiante:** (gesto de mover el punto ***D***)  …. **Docente:** ¿Qué debe formarse siempre? **Estudiante:** Los dos ángulos de igual medida. **Docente:** Mira más profundo… haz más variaciones. **Estudiante:** Las rectas paralelas. **Docente:** ¿Cuáles? **Estudiante:** Las AB y DC. Revisión verbal, escrita y grafica del grupo 1
	Exploración en el Cabri	Verificación de la condición para que dos ángulos ($\measuredangle a$ y $\measuredangle h$) siempre sean iguales
	Uso del AGD Cabri	Al tener en cuenta que los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ son iguales cunado las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas, los estudiantes del grupo 1 realizaron la siguiente construcción para que $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ siempre sean congruentes:

		“se realiza una recta l, se coloca un punto A sobre l y un punto (llamado B) fuera de l. Luego se construye la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente se hace un punto C sobre la recta l y se forma una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y pase por el punto C. Finalmente, se marcan y miden los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ con sus respectivas herramientas”  transcripción escrita del grupo 1
	Conclusión	La conclusión de este grupo fue:  ③ Para que a∢ y h∡ sean de igual medida, siempre deben tener rectas paralelas en $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ Revisión verbal, escrita y grafica del grupo 1
Producción colectiva	Dado que el tipo de signo que se está analizando es el signo personal, es decir, no se realiza un análisis de carácter colectivo.	

Aquí se pudo identificar que existieron herramientas usadas por los estudiantes, entre las cuales se destacan: el arrastre y la medida. Las cuales fueron utilizadas por parte de los estudiantes para identificar las condiciones en que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$ al analizar varios casos, como el caso expuesto, en donde se realizaba un movimiento del punto B realizando una variación del ángulo $\measuredangle a$ y luego el punto D para modificar el ángulo $\measuredangle h$ en donde se identifica el uso de un *arrastre sostenido* junto con una *medida guiada*[30]. Este tipo de herramientas del Cabri, fueron utilizadas por los estudiantes para crear varios ejemplos de cuando $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ tienen igual medida, permitiéndoles identificar la condición necesaria de que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ sean paralelas. Posterior a esto se realiza una

[30] Estos dos tipos de usos de las herramientas de arrastre y medida que se pueden realizar en un AGD Cabri, fueron expuestos en el índice 2.1.6.3.

verificación en una nueva construcción haciendo uso de la *prueba de arrastre* y la *Medición de validación*.

Al tener en cuenta lo anterior, se creó un *signo personal* en los estudiantes que se vincula con una conclusión, el cual fue el proceso usado para construcción ángulos congruentes, posibilitando de igual forma generar un orden condicional para un resultado, permitiendo establecer una relación de hipótesis y tesis, es decir, amar una conjetura de forma condicional. Dicha conclusión fue usada más adelante como un conocimiento previo para obtener una solución a otra actividad, tal como se presentará en la siguiente sección.

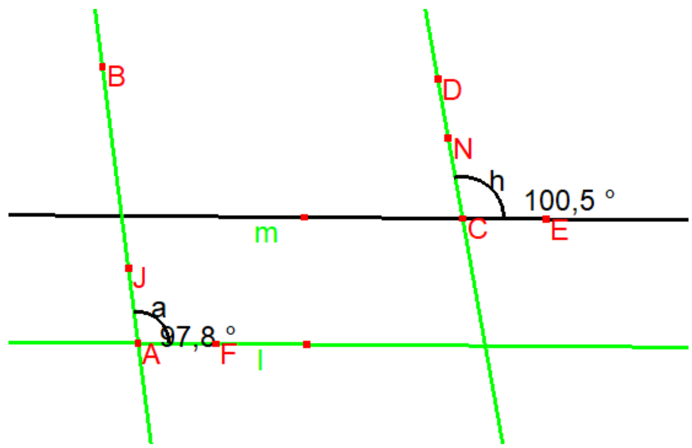
5.2.2.2 Signos matemáticos

En esta categoría se puede observar a los *significados personales* como aquellos elementos que se asocian con la producción de una solución matemática, particularmente como estos son usados para la solución de una nueva actividad y que hacen parte del proceso argumentativo de la justificación de dicha solución. Para ello en esta categoría se consideraron los elementos: signos personales previos y el proceso utilizado para una nueva solución. Cabe resaltar que, al recurrir y utilizar estos significados personales como argumentos para la justificación de los procesos realizados para la justificación, estos fueron tomados como los signos matemáticos. A continuación, en la Tabla 26 se presentan algunos procesos que se identificaron como significados matemáticos.

Tabla 26

Rejilla de análisis de la Producción de una conjetura en la Actividad 2

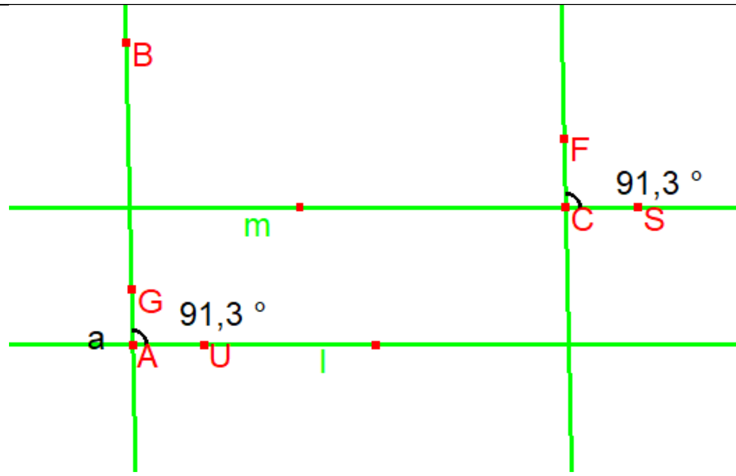
Tarea	Actividad 2
Categoría de análisis general	Instrumento de mediación semiótica
Categoría de análisis específicos	Signos matemáticos
Elementos constitutivos	Significados personales previos, proceso de la solución y justificación

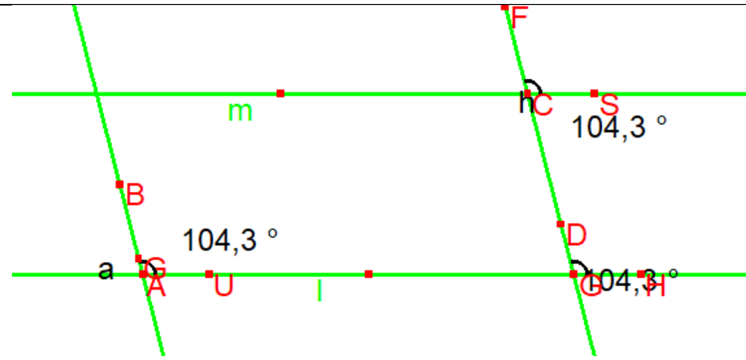
<table>
<tr><td>Elementos emergentes</td><td colspan="2">No se encontraron</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producción individual</td><td>Significado personal previo</td><td>Para que a∢ y h∡ sean de igual medida, siempre deben tener rectas paralelas en $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$</td></tr>
<tr><td>Proceso de la solución</td><td>Los estudiantes realizaron la construcción solicitada siguiendo los pasos de la guía y obtuvieron el siguiente resultado:


Y a partir de ésta, se efectuaron modificaciones al arrastrar el punto B o D, con el fin de encontrar cuando los ángulos $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ son congruentes.

Docente: ¿Cuándo $\measuredangle h$ y $\measuredangle a$ son iguales? (refiriéndose a los ángulos)
Estudiante: “las rectas deben ser paralelas para obtener la misma medida de los ángulos”
…

Los estudiantes realizaronn una nueva construcción con la condición encontrada, obteniendo el siguiente gráfico</td></tr>
</table>

		 **Docente**: ¿Qué relaciones geométricas hay entre esta actividad con la que trabajamos anteriormente? **Estudiante:** se usan rectas paralelas … para que den la misma medida del ángulo. … **Docente**: ¿por qué si funciona? **Estudiante:** porque son paralelas. **Docente**: si, ¿pero porque necesariamente deben ser paralelas? **Estudiante:** mm… … **Docente**: ¿Cuál es la diferencia que hay entre la anterior actividad con esta de aquí? **Estudiante:** que estas tienen … las dos rectas paralelas. … **Docente**: De la actividad uno, ¿Cuáles serían iguales aquí? (indicando el gráfico). **Estudiante:** no era así (señalando el ángulo *a* y un ángulo que no está marcado). … **Docente:** ¿Cómo era la idea? **Estudiante:** el ángulo $\measuredangle a$ y $\measuredangle h$ eran iguales porque bien este ángulo este arriba o de abajo el ángulo iba a ser igual (haciendo referencia al ángulo congruente adicional que se podía construir). **Docente:** dibújame el ángulo adicional que me dices.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

Docente: ¿ahora intenta describirme por qué era? (haciendo referencia a la igualdad de los ángulos a y h)
Estudiante: … porque donde sea que este ubicado como son paralelas van a ser iguales …
Docente: intenta describirme que es lo que hiciste.
Estudiante: … ubicar un a ángulo más, pero ya sabemos que eso iba a dar “104,3”.
Docente: ¿y por qué sabes que era “104,3”?...
Estudiante: esto es igual esto a esto señalando los ángulos a y el nuevo ángulo. y luego con el otro.

Revisión verbal, escrita y grafica del grupo 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producción colectiva</td><td>Justificación De resultados</td><td>Argumento1: porque al mover el punto A o B se modifican los valores de los ángulos.
Argumento2: con el ángulo adicional se pude realizar una relación entre los ángulos.</td></tr>
<tr><td>Conclusiones</td><td>Entre dos rectas paralelas que cortan a otras rectas, el ángulo exterior a un ángulo interior

Revisión verbal, escrita del grupo 2</td></tr>
</table>

Dentro de esta actividad, se evidenció la evolución del *signo personal* de la creación de un ángulo igual usando las rectas paralelas transformándose en un argumento que justifica los resultados de la construcción realizada. A pesar que en un inicio el derecho a la verdad es delegado al Cabri, es decir, no se cuestionaron ¿por qué ocurrieran los sucesos matemáticos?, pero gracias a las intervenciones del docente se pudo evolucionar este signo personal a un signo matemático, al establecer una conexión entre algunos ángulos presentados en el gráfico de tal manera que hubiese una igualdad de mediadas (congruencia) basadas en la conclusión de la tarea anterior. Por ello, al exigirles un mejor argumento a los estudiantes que les permita justificar el por qué $\measuredangle a \cong \measuredangle h$, se evidenció la dificultad del trabajar esta tarea, observando un mayor gasto de tiempo para encontrar una justificación adecuada, lo cual hizo que se tomara un poco más de tiempo para realizar la etapa de la sustentación de las soluciones.

Todo lo expuesto anteriormente acerca de esta categoría, permite afirmar que la integración del artefacto Cabri junto con estas tareas, pueden ayudar a la creación de signos personales y su posible evolución hacia signos matemáticos, al tener en cuenta que los estudiantes pueden hacer uso de las herramientas del artefacto y establecer relaciones a partir de las exploraciones sobre las construcciones geométricas haciendo uso de los conocimientos matemáticos (o socialmente aceptados) previos y por otro lado con el diseño adecuado de tareas para aprovechar adecuadamente estos vínculos. Por lo tanto, para esta indagación se pude decir, que el Cabri actuó como un instrumento de mediación semiótica.

A continuación, se presentarán las conclusiones y posibles recomendaciones como resultado de la elaboración y puesta en práctica de las tareas diseñadas en esta indagación.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES DE LA INDAGACIÓN

En esta sección, se presentarán las conclusiones y las recomendaciones que se obtuvieron a partir de una reflexión sobre la creación, experimentación y análisis de las tareas, tratando los objetivos planteados y la problemática estudiada en esta indagación, en segunda instancia, se mostrarán reflexiones acerca de las tareas y como último, se darán a conocer algunas preguntas abiertas que podrían incentivar otras investigaciones similares a esta indagación.

Aquí se planteó como objetivo general un análisis a una secuencia de tareas diseñadas, las cuales tuvieron el propósito de promover en los estudiantes los procesos de argumentación de tal manera que usen los conocimientos matemáticos y los creados distintos conocimientos que surgieron de las tareas para justificar los resultados, y en particular, permitir un acercamiento a la demostración. Cabe resaltar que estas actividades tuvieron una prueba piloto[31] presentadas a docentes y estudiantes de diferentes instituciones en el evento de Educación Matemática "VIII Congreso Iberoamericano de Cabri 2016", la cual aportó aspectos para el rediseño de esta secuencia de tareas, de igual forma, se tuvo en cuenta los obstáculos que tuvieron algunos participantes de estas pruebas piloto; entre las cuales se encuentra la realización de una actividad previa para recordar y familiarizar el uso de algunas herramientas del AGD Cabri.

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación y los fenómenos que surgieron a lo largo de la experimentación se elaboraron las siguientes conclusiones:

En un primer ámbito, en relación a los avances tecnológicos y la accesibilidad que tienen a estas, las nuevas generaciones, se ve necesario la implementación del AGD Cabri en las aulas de clase, con el fin de diseñar tareas para realizar las clases más llamativas y fomentar diferentes procesos cognitivos relacionados con la matemática, como en este caso, el diseño de tareas para fomentar la argumentación haciendo uso de conocimientos geométricos.

---

[31] Cursillo realizado por el investigador en el VIII Congreso Iberoamericano de Cabri 2016, la evidencia de este se muestra en apartado de los Anexos.

Con respeto al diseño de las tareas y junto a los diferentes procesos de exploración que permite el AGD, realizados en las construcciones de cada tarea y que fueron desarrollados por los estudiantes, permitió que ellos rechacen o afiancen ideas sobre las soluciones necesarias, en particular, las relacionadas con propiedades o teoremas que posiblemente fuesen difíciles de recordar. Además, ya que en esta secuencia de tareas eran usadas de forma recurrente, se estimuló el proceso de internalización de algunas herramientas y las propiedades geométricas relacionadas a estas.

Al tener en cuenta que una de las características que posee al trabajar una tarea de construcción geométrica en los AGD, es permitir obtener diversas representaciones cuando se realiza un arrastre sobre un objeto base. Esto hizo que los participantes dedujeran de forma más concreta, las diferentes características y relaciones que se daban entre las figuras geométricas, y poder utilizar dichas relaciones para la elaboración de su solución, así como la elaboración de una justificación de su resultado.

De igual forma, las opciones de guardar los archivos y los procesos de las construcciones realizados por los estudiantes (registros automáticos), permitió realizar un análisis más detallado que si solo se hubiese tenido en cuenta los registros textuales y de video de cada una de las tareas, puesto que en estos no se podía evidenciar todos los procesos desarrollados para llegar a su solución. En cambio, al hacer uso de los archivos guardados se pudo evidenciar como algunos procesos les fueron de ayuda para llegar a la solución correcta y para la elaboración de su respectiva justificación.

En relación al diseño de estas tareas, se resalta la importancia que tuvieron las tareas al tener la forma de *problemas abiertos*, puesto que al no tener una solución específica los estudiantes se vieron en la necesidad del uso de las diferentes herramientas del Cabri, para hallar la solución a las preguntas y puntos propuestos en cada tarea.

De manera similar, se destaca que estas tareas permitieron a los estudiantes realizar relaciones de la interacción entre la posible manipulación de los objetos construidos y los conocimientos geométricos al vincular las construcciones realizadas con algunos conocimientos previos, que hayan sido aceptados en la experimentación para la elaboración de una solución y su respectiva justificación.

En cuanto a las herramientas de arrastre y medida proporcionadas por el Cabri, se utilizaron en las tareas para fomentar los procesos de argumentación y conjeturación en cada actividad por parte de los estudiantes. En este sentido, fueron muy valiosas para la construcción de ideas intuitivas, *significados personales* y *argumentos* basados en la exploración e identificación de atributos o características invariantes, las cuales tenían una intención del docente-indagador, el cual era fomentar la argumentación y conjeturación a partir de los procesos desarrollados. Al tener esto en cuenta, se evidencia que el AGD fue usado como un *instrumento de mediación semiótica*, puesto que en la secuencia de las tareas se identificó la creación de *signos personales* y cómo estos son guiados por el docente-indagador y utilizados por los estudiantes como *signos matemáticos* en la justificación de las soluciones.

De igual forma, estas herramientas fueron utilizadas por los estudiantes como herramientas de verificación y *validación* de sí las construcciones cumplían las condiciones solicitadas, permitiéndoles así conjeturar y en especial crear argumentos para su justificación matemática, relacionada con la demostración.

Por otro lado, podemos resaltar las intervenciones del docente-indagador en el transcurso de la experimentación de las tareas, puesto que estas guiaron algunos procesos de los alumnos para llegar a una solución adecuada, y evitar que tuviesen dificultades o inconvenientes en los procesos de edificación de los resultados. No obstante, estas intervenciones no permitieron la creación de justificaciones textuales adecuadas, en donde se pudiera notar la comprensión de las relaciones de los conocimientos que intervienen.

En cuanto al análisis de los resultados de las tareas, se pudo observar que la secuencia de las tareas se diseñó adecuadamente, debido a que se lograron desarrollar procesos de conjeturación, argumentación y un acercamiento al proceso de la demostración, al trabajar *problemas abiertos* en donde se establecieran relaciones alrededor de la estructura de los argumentos presentados con los procedimientos elaborados en las construcciones, favoreciendo la elaboración de justificaciones y sus relaciones con el proceso lógico-deductivo de la demostración.

En lo concerniente a la estructura del *Ciclo Didáctico,* el cual fue considerado para la creación de las tareas, para promover mediante sus momentos[32] la interacción con el Cabri, la producción de *signos personales* y de *signos matemáticos*, se favoreció en gran medida a las interacciones sociales, y en especial la creación de conjeturas y la producción de argumentos para la justificación.

Así entonces, se pueden mencionar los beneficios de integrar los AGD como instrumentos de mediación semiótica, en este caso el Cabri, al permitir al docente trabajar en un ambiente, diferentes temas de las clases de matemáticas, de una forma más didáctica y creativa, promoviendo un razonamiento matemático al incentivar la exploración, la creación de conclusiones, argumentos y justificaciones de resultados, con el fin de desarrollar y trabajar con los estudiantes el uso del conocimiento matemático acercándolos al trabajo con la demostración y a su tiempo dar a entender la disciplina del conocimiento matemático.

Preguntas abiertas para mejorar la indagación

Con respecto a lo ocurrido en esta secuencia de tareas propuestas y teniendo en cuenta el margen de investigación para está indagación se proponen las siguientes preguntas de indagación:

- En primer lugar, al tener esta secuencia de tareas solo con un interés de carácter argumentativo y no de carácter demostrativo, con un carácter estructural, se plantea la pregunta ¿Qué marco teórico y que modificaciones se deben tomar en cuenta para las tareas de esta indagación para fomentar la demostración en los estudiantes haciendo uso del postulado (o teoremas) de congruencias LAL?

[32] Los tres momentos del ciclo didáctico son: Actividades con los artefactos, Producción individual de signos y Producción colectiva de signos, los cuales ya se dieron a conocer en el apartado 2.2.1.

- Puesto que en esta indagación se estudió la creación de una secuencia de tareas para trabajar en la congruencia de triángulos utilizando el postulado LAL fomentado los procesos de argumentación, se propone investigar una secuencia de tareas para abordar los otros dos postulados (o teoremas) de congruencia que son Lado-Lado-Lado (LLL) y ángulo lado ángulo (ALA). ¿cómo promover los procesos de conjeturación, argumentación y demostración al trabajar con tareas enfocadas en el tema de congruencia de triángulos, particularmente el postulado LLL o ALA?

- Dado que la aplicación de estas tareas se realizó con estudiantes que ya habían mirado la temática de congruencia de triángulos, los cuales no llegaron al uso del postulado LAL en sí, se fórmula la siguiente pregunta: ¿Es posible trabajar esta secuencia de tareas para el tema de congruencia de triángulos con estudiantes de grados inferiores al grado 8° o que cambios y temas serían necesarios para su trabajo?

- Teniendo en cuenta que estas tareas fueron propuestas para el tema de congruencia de triángulos, y al estar este tema relacionado con la semejanza de triángulos o de figuras geométricas, se sugiere la pregunta: ¿Qué cambios serian pertinentes para trabajar estas tareas con el tema y sus distintos tipos de semejanza de triángulos?

Como parte final de esta indagación, se resalta este trabajo como un aporte a la escasez de investigaciones conforme al uso de la congruencia de triángulos de la Geometría Plana en donde se integren los AGD como el Cabri, para promover los procesos de argumentación y posible demostración matemática, en donde se utilicen los conocimientos previos y de igual forma dar la posibilidad de crear nuevos conocimientos en una clase de matemáticas. En consecuencia, se espera que esta indagación sirva como un posible referente para investigaciones futuras en el ámbito de la Educación Matemática en donde se promueva el uso de las diferentes tecnologías informáticas.

Bibliografía

Arzarello , F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32,* 4-8. Obtenido de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es

Cardenas, D. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica.* (tesis de maestria), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/39409/1/1186559.2014.pdf

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la Demostración en Matemáticas. *Épsilon, 26*, 15-29.

Díaz, D., & Zuluaga, D. (2013). *De la producción de conjeturas a la demostración en un contexto de geometría sintética – analítica: El caso de la circunferencia.* (Tesis de pregrado), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Obtenido de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4791/1/CB-0478777.pdf

Erazo, S. (5 de Abril de 2018). Liceo de la Universidad de Nariño entre los 100 mejores colegios de Colombia. *Udenar Periódico*. Obtenido de https://udenarperiodico.com/liceo-la-universidad-narino-los-100-mejores-colegios-colombia/

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Edits.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (págs. 27-44). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Obtenido de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Herrera, Y. (2013). *Una aproximación a la demostración mediante una secuencia de problemas abiertos desde la teoría de la mediación semiótica.* (Tesis de pregrado). Obtenido de http://hdl.handle.net/10893/4774

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría.* Madrid: CSIC. Obtenido de https://books.google.es/books?id=3VufvuQ6WRwC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* (pp. 275-304). UK: Sense Publisher.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. In G. &. A, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173–204). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2010). Proofs, semiotics and artefacts of information technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 169–190). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education, 45*(3), 441-452.

Martínez, M. (1998). *La investigación cualitativa etnográfica en educación: manual teóico-práctico* (3ra ed.). Mexico, D.F.: Trillas. Obtenido de https://www.academia.edu/33357131/La-investigaci%C3%B3n-cualitativa-etnogr%C3%A1fica-martinez.pdf

Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 42*(1), 33-47.

Mejía, C. (2014). *Proceso de conjeturación en una clase de geometría: El papel del profesor que usa geogebra a la luz de la teoría de la mediación semiótica.* (Tesis de Maestria). Obtenido de http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/1075

Melo, S., Draghi, D., & Saldivia, F. (2015). Enseñando geometría utilizando el Software Dinámico Geogebra. *Informe Científico Técnico UNPA. Universidad Nacional de la Patagonia Austral*, *8*(1), 221-244. Obtenido de http://secyt.unpa.edu.ar/journal/index.php/ICTUNPA/article/view/ICT-UNPA-134-2015

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En M. d. Nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46-95). Bogotá, Colombia. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Rivas-Meza, M. (2006). Reseña de "La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual teórico-práctico" de Miguel. *Educere*, *10*(35), pp. 757-758. Obtenido de https://www.redalyc.org/exportarcita.oa?id=35603520

Rosales-Arteaga, G. (junio de 2012). Liceo Universidad de Nariño 300 años de servicio educativo. *Udenar periodico*(30), pág. 1. Obtenido de https://udenarperiodico.com/wp-content/uploads/periodicos/30.pdf

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. En C. M. A., A. Bishop, C. Keitel, & J. K. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (págs. 571-598). Nueva York: Springer.

Toro, J. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo.* (Tesis de maestría), Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

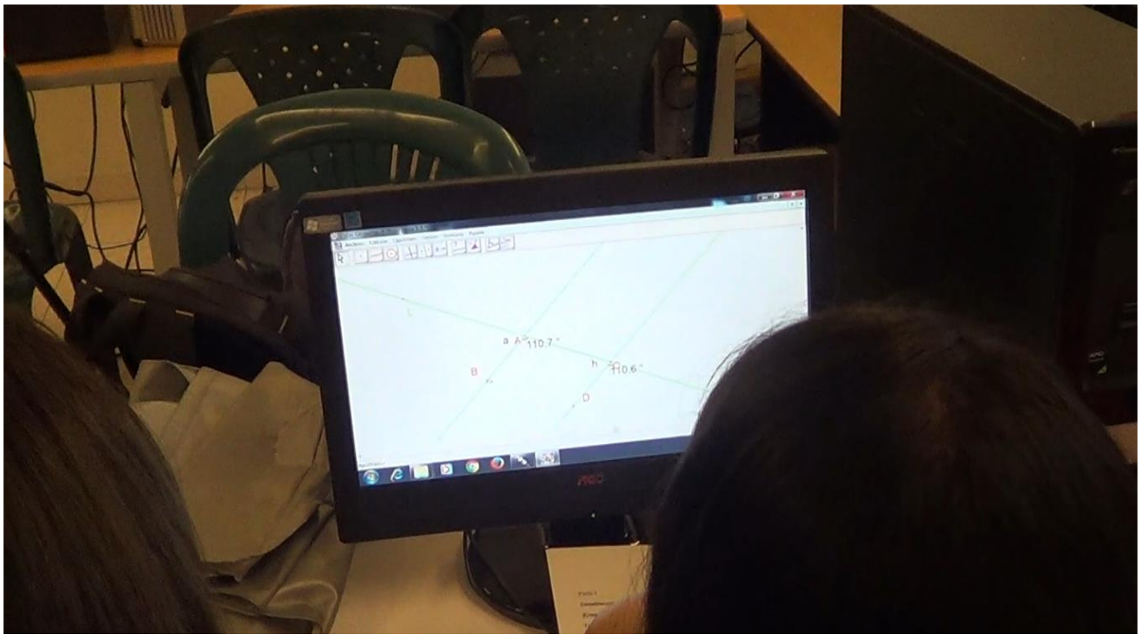
Villegas, M. (2000). *Matemática 2000.* Colombia: Editorial voluntad S.A.

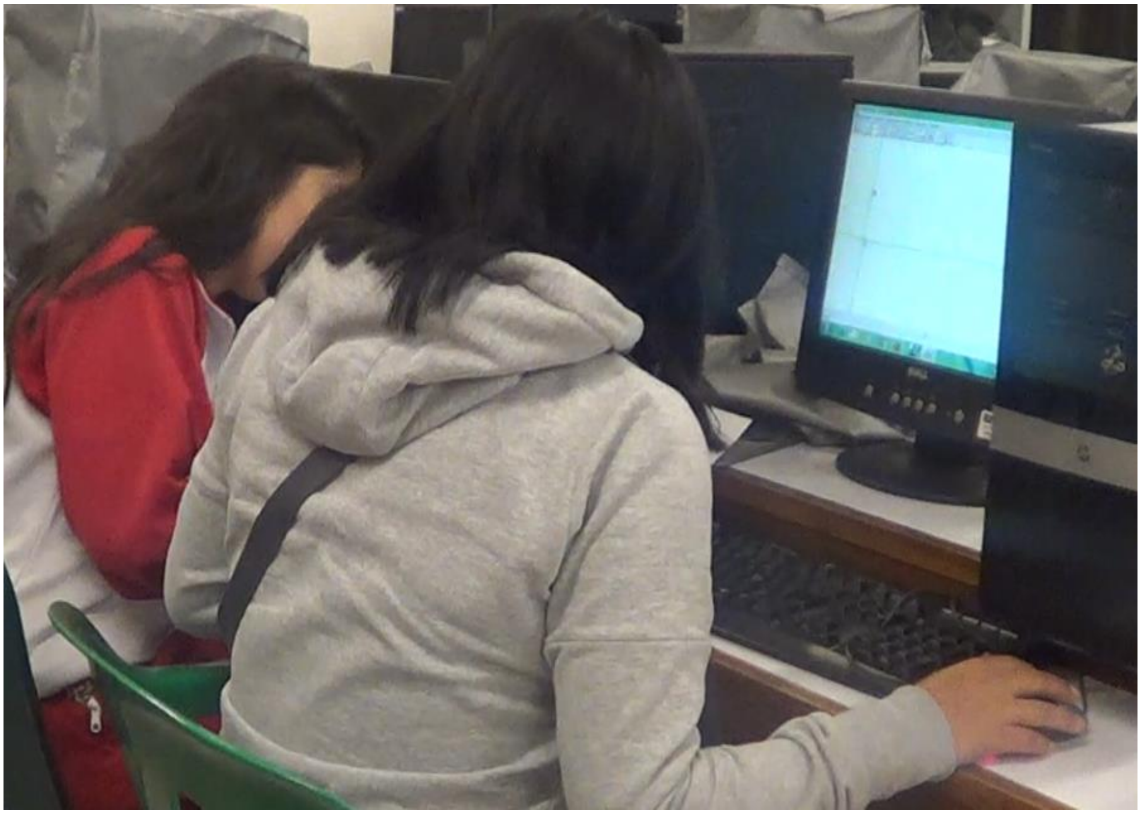
Yaqueno, K. (11 de Mayo de 2017). Liceo de la Universidad de Nariño mejor colegio público del país. *Udenar Periódico*. Obtenido de http://www.udenar.edu.co/liceo-de-la-universidad-de-narino-mejor-colegio-publico-del-pais/

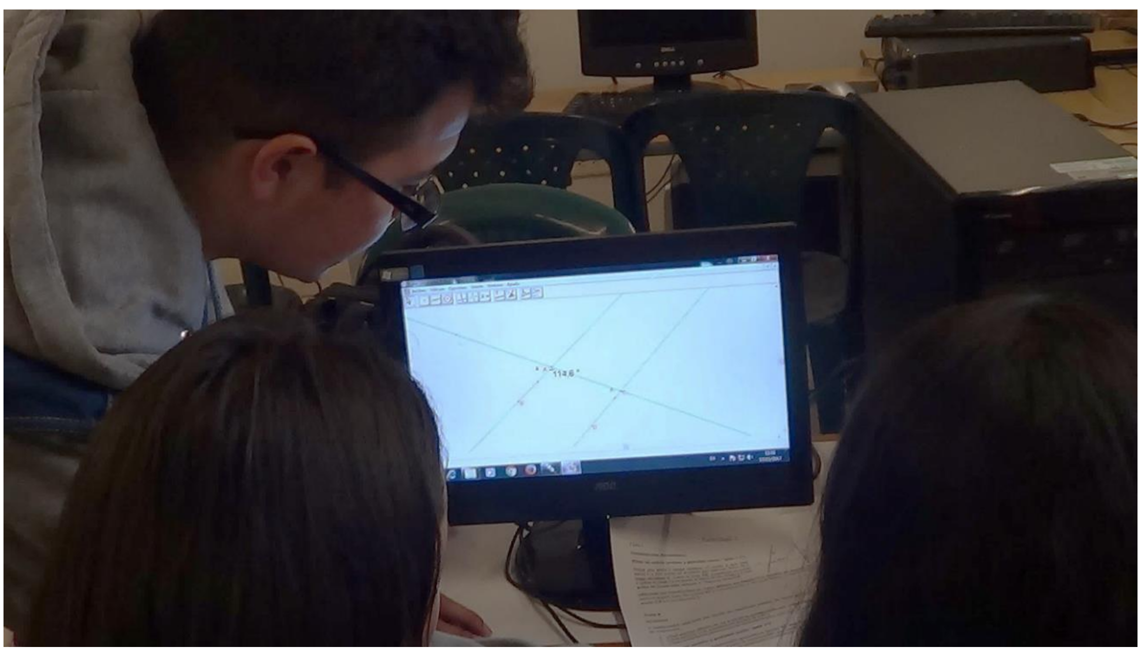
ANEXOS

Anexo A

Registro fotográfico de las Actividades 1 y 2

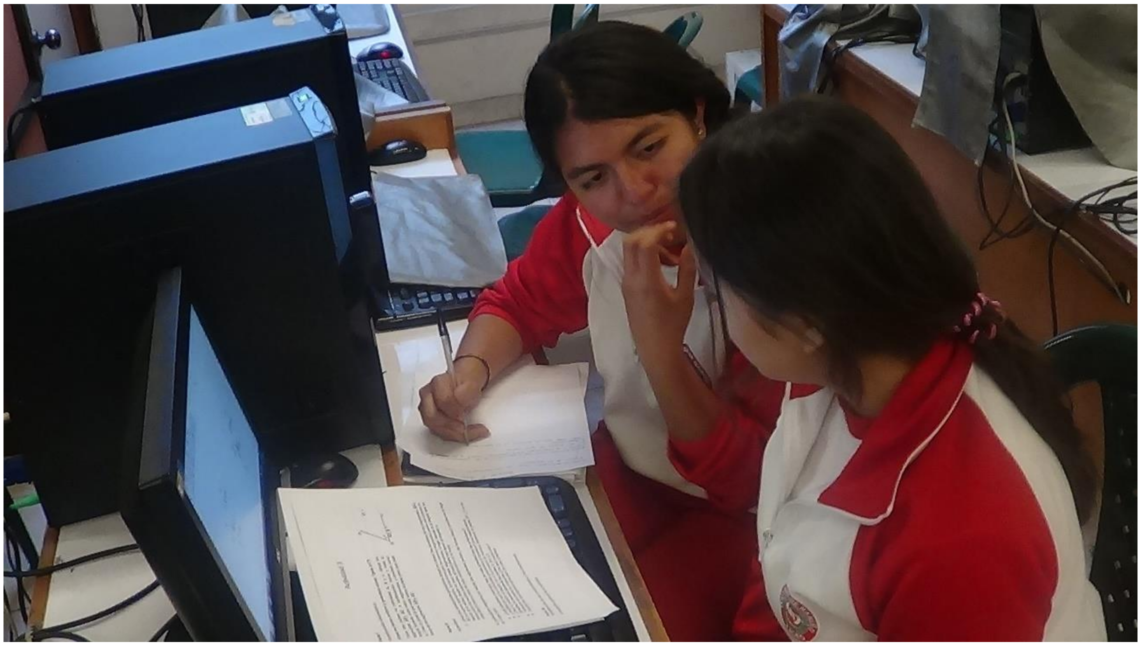


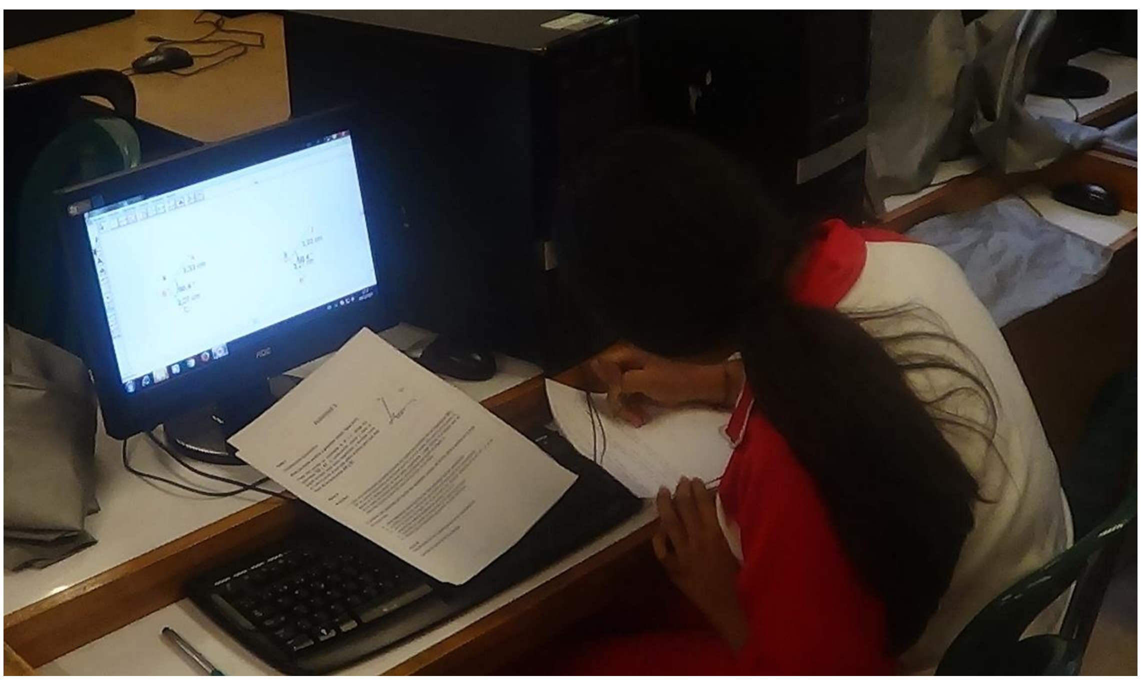




Anexo B

Registro fotográfico de las Actividades 3 y 4





Anexo C

Respuestas de las Actividades 1, 2, 3 y 4 del grupo 1

Maria Fernanda Coral Guerrero
Angie Estefanía Arcos Bastidas.

computador N° 3
(atras)

① Son angulos agudos, tienen medidas de 86,2° y 88,1°, son parecidos pero no iguales.

② Los angulos cambian su medida, lograndose asi cualquier tipo de angulo, ya sea agudo, recto, obtuso, etc.

③ Para que a∢ y h∡ sean de igual medida, siempre deben tener rectas paralelas en $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$

④ Se realiza una recta l, se coloca un punto A sobre l y otro afuera de l (B). Luego se traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Posteriormente se hace un punto C sobre la recta l y se forma una recta paralela sobre el punto C. Finalmente se marca y mide los angulos con sus respectivas herramientas sobre las rectas. $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{C}$

⑤ Tienen el mismo punto de corte (recta l)

① Son angulos agudos ; el angulo $\overset{(b)}{NCE}$ se basa en la recta m y el $\underset{(a)}{JAF}$ en la l. ; son pareados pero no iguales.

② cuando se mueve el punto B cambia la medida del angulo a y al mover el punto D cambia la medida del angulo h.

③ Las rectas AB y CD sean paralelas.

④ * se hace recta l y m (deben ser paralelas)
* Se hace un punto A y un punto B, y luego se traza una recta
* se realiza un punto C. y una recta paralela que pase por este.
* se realiza la marca y medida de los angulos a y h.

⑤ las rectas deben ser paralelas para obtener la misma medida de los angulos.

⑥ Las rectas funcionan puesto a que son paralelas y al ser paralelas van a ser iguales y por lo tanto el angulo siempre sera igual.

⑦ Tienen ~~todos~~ algunos ~~sus~~ angulos de una misma medida; el punto B hace que las dos rectas (b y D). se muevan, si se mueve la recta I, se mueven las paralelas. Entre 2 paralelas que se corten a otras 2 paralelas. el angulo h siempre sera igual al angulo A

Actividad 3. (parte 2).

1) Realizamos primero, en el punto D una recta paralela con el segmento $\overleftrightarrow{AB}$ y otra recta paralela con el segmento $\overleftrightarrow{BC}$ y despues marcamos angulos y lo medimos

2) Utilizamos rectas paralelas para que tengan un mismo angulo

3). Porque cuando movemos el punto A la paralela a esta se mueve y quedan con un mismo angul

④. Al angulo h no le sucede nada y si se arrastra de manera aleatoria los puntos A, B, C. hacen que sus paralelas a estos

4. Al angulo H ~~no le sucede nada~~ se transfiere pero con las mismas medidas. y si se arrastra de manera aleatoria los puntos. A, B y C. cambia tanto la primera construccion como la segunda ~~debido a la~~

5. la herramienta compaz la cual hace que los primeros segmentos tengan la misma medida que los de la siguiente grafica.

6. La herramienta compas. sirve para que el segmento que creamos principalmente sea el mismo en otra parte.

Actividad 4

1. Utilizamos la herramienta triangulo para construir un triangulo ABC. , seguidamente se elige. cualquier punto y se le da el nombre de D.

2. Se utilizan paralelas , compas , segmentos y angulos; teniamos un vertice ABC y punto D fuera de este, además del punto D se realizaba una figura similar con las herramientas. utilizadas anteriormente.

3. Primero construimos el triangulo ABC con un punto D por fuera, para que en el punto D se pueda realizar un triangulo igual a ABC, utilizando a D como el punto B, igualmente se utilizan paralelas para que el triangulo posea la misma inclinacion. Se utiliza las herramientas marcar y medir angulos. para saber si estos pueden ser geometricamente funcionales.

4. Con la herramienta longitud o distancia podemos comprobar si dos o mas figuras funcionan geograficamente.

Anexo D

Respuestas de las Actividades 1, 2, 3 y 4 del grupo 2

Bianei Rosero - Daniela Escobar Computador : Derecho.

Parte II.

1. Se puede afirmar que la medida del angulo es diferente.

$a = 114,6°$ $h = 110,6°$.

2. ~~(Si se arrastra B el punto no se mueve o desplaza a lo largo de la recta al igual que el punto D.)~~

El angulo a se vuelve difente, al igual queel angulo h.

3. - lasan rectas $(\overleftrightarrow{A,B})$ $(\overleftrightarrow{C,D})$ son paralelas.

4. - Crear una recta l
- Creamos una recta $\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{CD}$
- Creamos unos angulos los cuales son $a = 88,1°$ y $h = 88,1$.

5.

Actividad 2-1

2-1

1: -Que el angulo a se encuentra en el interior y h se encuentra en el exterior

- El angulo h esta formada en una recta paralela diferente al angulo a.

2°- Si se arrastra el punto B., la medida del angulo cambia. Si se arrasta ~~ta~~ el punto D, la medida del angulo cambia.

3: Las condiciones que (el GA) la recta $\overleftrightarrow{AB}$ sea paralela a la recta $\overleftrightarrow{CD}$

2-2

4°- Construccion: ① Recta $\overleftrightarrow{AB}$, Recta paralela $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto C, luego creación de angulos con igual medida el angulo a y el angulo h

5°: Relacion de actividad: El uso de las paralelas donde hay una recta que corta con los puntos

6°- Justificacion:
Si se tienen dos rectas paralelas y una misma recta que las corta, se formaron dos angulos con la misma medida, angulo a y J son iguales. Luego J y h son iguales, ~~debido a que hay dos paralelas~~
Luego a y h son iguales.

FINAl 7. Conclusiones: -Al realizar este ejercicio algunos de los angulos son iguales
-las rectas deben ser paralelas osino no se cumpliria lo de la medida de los angulos

Entre dos paralelas que cortan a otras dos paralelas, el angulo exterior sería igual a un angulo interior

Actividad 3º Bianei y Daniela

1. Para la construccion usamos una circunferencia en un punto a al partir de un segmento.

2. Relacion: tener como base la construccion de las paralelas, donde una es paralela a la otra, aunque ahora utilizamos compás y así ~~obtuv~~ se dan dos angulos con igual medida

3. Justificacion:
- Tener como base las paralelas que nos garantizan la misma medida de los angulos y luego usar la herramienta compás con la cual obtenemos las mismas medidas de los segmentos $\overleftrightarrow{AB}$ con $\overleftrightarrow{JD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ con $\overleftrightarrow{DR}$

4. - Si arrastro el punto D, la figura realizada se mantiene
- Si se arrastra el punto A, la longitud de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{JD}$ cambian al igual que los angulos
- Si se arrastra el punto B, cambian las longitudes de toda la figura al igual que la medida del angulo
- C, ocurre el cambio de longitud de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DR}$, al igual que la medida del angulo

5º. Ocurre esto puesto que el movimiento que se le da a los puntos produce una variacion sobre las longitudes y medidas de angulo en la figura creada.

6º Conclusiones generales: Que para mantener la longitud de ~~los angulos~~ los segmentos es necesario usar la herramienta compás, al igual que rectas paralelas que pasan por un punto que luego dara lugar a otra figura con mismas longitudes de segmentos y medidas de angulos

Actividad 4

1. Primero que todo se uso las construccion de paralelas unas a otras rectas, luego herramienta compas y midiendo las longitudes que son iguales a las de la primera figura.

2. Relacion: El uso de las mismas herramientas que como se dijo anteriormente nos ayudan a conservar las mismas medidas de angulos y longitudes de segmentos

3. Justificacion: Si funciona ya que con base en la construccion con la cual iniciamos triangulo ABC, debe ser igual a DFE, entonces las paralelas nos garantizan en estos dos triangulos las mismas medidas en vertice A y D, luego proseguimos con herramienta compás marcamos segmentos, donde dos indique marcariamos un punto que genera la misma longitud del primero en sus segmentos.

4. Conclusiones:

- Con las herramientas, compás y rectas paralelas podemos construir dos triangulos con longitudes de segmentos iguales al igual que la medida del angulo

Anexo E

Certificado de cursillo realizado en el VIII Congreso Iberoamericano de Cabri 2016

VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016

12, 13 y 14 de octubre

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Reacreditación Institucional

Resolución Nº 10608 del 12 de agosto de 2013 - Vigencia 6 años

CERTIFICA QUE:

Jefferson Fernández U.

Asistió en calidad de

Cursillista

Con su presentación: **"ARGUMENTOS Y DEMOSTRACIONES EN CONGRUENCIA DE ÁNGULOS USANDO CABRI"** con una intensidad de cuatro horas, dictado en el marco del ***VIII Congreso IBEROAMERICANO DE CABRI 2016*** organizado por el **Departamento de *Ciencias Básicas*,** realizado en las Instalaciones de la **Universidad de Medellín** los días 12, 13 y 14 de octubre de 2016.

Luz Doris Bolívar Yepes
Vicerrectora Académica

José Alberto Rúa Vásquez
Jefe del Departamento de Ciencias Básicas

Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el MEN