

èditorial

Universidad de **Nariño**

Perlas matemáticas

Perlas matemáticas

Óscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Soto Ágreda, Óscar Fernando
Perlas matemáticas / Óscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier
Caicedo Zambrano — 1ª. ed. -- San Juan de Pasto : Editorial Universi-
dad de Nariño, 2024

188 páginas : gráficas, tablas, figuras

Incluye referencias bibliográficas p. 183-185 y reseña de los autores
p. 186

ISBN: 978-628-7679-87-0

1. Series numéricas 2. Teorema de Haga 3. Expresiones algebraicas 4.
Teorema de Holditch 5. Teorema de Pitágoras 6. Reciprocidad cuadrá-
tica 7. Teorema de Thébault I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

511.1 S718p – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Perlas matemáticas

© Editorial Universidad de Nariño

© Óscar Fernando Soto Ágreda

© Segundo Javier Caicedo Zambrano

ISBN: 978-628-7679-87-0

Primera edición

Corrección de estilo: German Chaves Jurado

Diseño y diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Octubre 9 de 2024

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier
medio o con cualquier propósito, sin la autorización
escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	11
CAPÍTULO 1. SERIE ARMÓNICA.....	13
1.1 CONTEXTO DE LAS SERIES NUMÉRICAS	13
1.2 SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA.....	18
1.3 EL TEOREMA.....	19
1.3.1 Argumentación.....	21
1.3.2 Otras demostraciones.....	22
1.3.2.1 Aplicación de un principio del infinito	22
1.3.2.2 Demostración por reducción al absurdo	24
1.3.2.3 Sucesión de inversos de números primos.....	26
1.3.3 Desviación	28
CAPÍTULO 2. SÓLIDOS PLATÓNICOS.....	33
2.1 CONTEXTO	33
2.2 SOBRE EL AUTOR.....	39
2.3 TEOREMA.....	40
2.3.1 Argumentación.....	45
2.3.2 Desviación	45

CAPÍTULO 3. TEOREMA DE HAGA.....	50
3.1 CONTEXTO	50
3.2 SOBRE EL AUTOR.....	51
3.3 PRIMER TEOREMA DE HAGA.....	53
3.3.1 Argumentación.....	55
3.3.2 Desviación	56
3.4 DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	56
3.5 SOBRE LA PARTICIÓN.....	58
3.6 EL ÁREA DEL TRAPECIO	59
3.7 SOBRE EL LÍMITE.....	60
3.8 SOBRE LA EXTENSIÓN	62
3.9 DE LAS TRIADAS PITAGÓRICAS.....	67
Caso 1	67
Caso 2	67
Caso 3	68
CAPÍTULO 4. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO Y EL DE SUS MEDIANAS	69
4.1 CONTEXTO	69
4.2 SOBRE EL AUTOR.....	72

4.3 TEOREMA	72
4.3.1 Argumentación.....	74
4.3.2 Desviación	75
CAPÍTULO 5. PRIMER TEOREMA DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES ..	78
5.1 CONTEXTO	78
5.2. SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA.....	81
5.3. El TEOREMA.....	82
5.3.1 Argumentación.....	84
5.3.2 Desviación	84
5.3.2.1 Procedimiento iterativo centrado en triángulos equiláteros	85
5.3.2.2 El Carácter aditivo del procedimiento.....	89
CAPÍTULO 6. LA IRRACIONALIDAD DE RAÍZ CUADRADA DE 2	96
6.1 CONTEXTO	96
6.2 SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA.....	100
6.3 TEOREMA	101
6.3.1 Argumentación.....	104
6.3.2 Demostración adicional.....	104
6.3.3 Desviación	108
CAPÍTULO 7. EL TEOREMA DE HOLDITCH.....	110

7.1 CONTEXTO	110
7.2 SOBRE EL AUTOR.....	112
7.3 TEOREMA DE HOLDITCH	113
7.3.1 Una explicación gráfica	116
7.3.2 Argumentación.....	119
CAPÍTULO 8. TEOREMA DE THÉBAULT	121
8.1 CONTEXTO	121
8.2 SOBRE EL AUTOR.....	124
8.3 EL TEOREMA DE THÉBAULT.....	125
8.3.1. Primer Teorema (Problema 1)	125
8.3.2. Segundo Teorema (Problema 2)	127
8.3.3 Tercer problema (Un caso de colinealidad)	131
8.3.4 Argumentación.....	131
CAPÍTULO 9. EL TEOREMA DE PITÁGORAS	133
9.1 CONTEXTO	133
9.2 EUCLIDES.....	138
9.3 EL TEOREMA.....	142
9.3.1 Argumentación	146
9.3.2 Desviación.....	149
CAPÍTULO 10. LEY DE RECIPROCIDAD CUADRÁTICA	157

10.1 CONTEXTO.....	157
10.2 CARL FRIEDRICH GAUSS.....	165
10.3 TEOREMA: LEY DE RECIPROCIDAD CUADRÁTICA.....	173
10.3.1 Primera Ley Suplementaria de Euler	174
10.3.2 Proposición (Primera Ley Suplementaria de Reciprocidad)	175
10.3.3 Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática).....	176
10.3.4 Argumentación	179
10.3.5 Desviación.....	180
REFERENCIAS DEL LIBRO.....	183

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, los matemáticos han desentrañado misterios, resuelto enigmas y descubierto patrones ocultos en el tejido mismo del universo. En este libro se presentan teoremas que son como perlas que brillan en el vasto campo de la matemática, ofreciendo una visión única de la naturaleza de los números, las formas y las relaciones. Desde la Serie Armónica, que diverge, hasta la Ley de Reciprocidad Cuadrática, pasando por los Sólidos Platónicos y las propiedades sorprendentes de los cuadrados, los rectángulos y los triángulos, cada teorema nos desafía a explorar un aspecto específico de las matemáticas y a descubrir su impacto en nuestra comprensión del mundo.

A medida que nos adentramos en cada uno de los teoremas, iremos desvelando sus enunciados intrigantes, examinando sus demostraciones. No obstante, este libro no solo trata de fórmulas y cálculos abstractos; uno de los objetivos es hacer que la matemática cobre vida, revelando su belleza y relevancia en la vida cotidiana.

Ya sea que se trate de un lector ávido de conocimientos matemáticos, un apasionado de los desafíos intelectuales o simplemente alguien curioso por descubrir el encanto de los teoremas, el libro *Perlas Matemáticas* invita a unirse a este emocionante viaje. Exploraremos desde la demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional, hasta el fascinante mundo de las curvas y las áreas, evidenciando sorpresas matemáticas en cada capítulo.

A lo largo de estas páginas, se encuentran conceptos familiares y otros posiblemente nuevos, todos en la perspectiva de inspirar asombro y

gratificación intelectual. Al final del recorrido se espera despertar la curiosidad y el amor por la matemática, demostrando que la resolución de problemas y la búsqueda del conocimiento pueden ser experiencias gratificantes y apasionantes.

Así que, invitamos a sumergirse en estas *Perlas Matemáticas* y a dejarse maravillado por los tesoros que se ocultan en los teoremas matemáticos. ¡Prepárese para desafiar su mente y descubrir la fascinante belleza de la matemática!

El libro está organizado en 10 capítulos y en cada uno se aborda un teorema, el cual se destaca por su belleza, aplicabilidad y, en muchos casos, por su singular demostración. En su orden se presentan los siguientes teoremas: La Serie Armónica, Sólidos Platónicos, Teorema de Haga, Relación del Área de un Triángulo con el de sus Medianas, Primer Teorema de los Elementos de Euclides, Irracionalidad de la Raíz Cuadrada de 2, Teorema de Holditch, Teorema de Thébault, Teorema de Pitágoras, y Ley de la Reciprocidad Cuadrática.

Los autores
Junio de 2023

CAPÍTULO 1. SERIE ARMÓNICA

1.1 CONTEXTO DE LAS SERIES NUMÉRICAS

Dada una sucesión infinita de números reales $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, se define su serie como la sumatoria de los términos a_1, a_2, a_3, \dots así:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

esta suma se expresa de manera compacta con la utilización del operador sigma, como:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Para un determinado número natural n , la expresión

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

se denomina Suma Parcial. Estas sumas sirven para determinar el carácter convergente o divergente de las series.

Por ejemplo, para la sucesión natural $(n) = \{1, 2, 3, \dots\}$

la serie correspondiente, es:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + \dots$$

que es divergente porque cada una de sus sumas parciales es mayor que la anterior en un número superior a 1.

Las sumas parciales de la serie de los naturales, en concordancia con la anécdota de Karl Gauss, se corresponden con la expresión:

$$S_n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

De hecho,

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

Esto indica que, la sucesión de las sumas parciales puede hacerse tan grande como se quiera o imagine.

A la sucesión de los inversos de la sucesión de números naturales:

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

le corresponde la siguiente serie, denominada *Serie Armónica*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

serie que requiere especial atención por su crecimiento lento y sosegado pero que supera cualquier cota superior, por inmensa que sea, como se demuestra en este capítulo.

Dado que la sucesión natural contiene infinitos subconjuntos que se pueden determinar de distintos modos, es interesante indagar sobre la convergencia de su correspondiente serie de inversos.

Por ejemplo, para la sucesión $(n!) = \{1, 2, 6, 24, \dots\}$, puede ser procedente, pero no fácil, estudiar la convergencia de la serie correspondiente de inversos $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$

Igual, partiendo desde cualquier número natural se puede ir saltando de acuerdo con un orden establecido y formar una serie. Iniciando en 100 y siguiendo el orden natural es posible saltar de uno en uno de acuerdo con la sucesión de los números triangulares y obtener la sucesión $\{100, 101, 103, 106, 110, 115, 121, \dots\}$ que determina la serie de sus inversos $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{106} + \frac{1}{110} + \frac{1}{115} + \dots$, posiblemente incómoda para el estudio de su convergencia.

De forma similar se puede estudiar la serie de los inversos determinados por sucesiones de salto, tomando como comodín cualquier sucesión, como la secuencia de Bernardo Recamán, cuyo crecimiento es lento y curioso (Bellos, 2011; pp. 338-339). La sucesión de Recamán se define como sigue:

$$a_0 = 0;$$

$$a(n) = a(n-1) - n \text{ si } a(n-1) > n \text{ y no figura ya en la sucesión,}$$

$$a(n) = a(n-1) + n \text{ en caso contrario.}$$

Algunos de los términos de la Sucesión de Recamán son:

$$\{0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, \dots\}$$

de este modo, la serie de sus inversos, exceptuando el correspondiente al primer término por la indeterminación que se alcanza, es

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \dots$$

cuya convergencia resulta poco simple de determinar.

Y con ella se pueden producir otras series de salto o trampolín; por ejemplo, iniciando en el 2, se produce la sucesión $\{2, 2, 3, 6, 12, 14, 21, 34, 54, 66, 87, \dots\}$, a su vez, determina la serie de sus inversos multiplicativos como una parte de la Serie Armónica:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \dots$$

de la que resulta complejo resolver lo atinente a su convergencia. Igual, si se parte desde 100 y se utiliza la misma Sucesión de Recamán como esquema de salto, se encuentra la sucesión $\{100, 100, 101, 104, 110, 112, 119, 132, 152, \dots\}$ la cual reproduce la serie de sus inversos multiplicativos $\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \frac{1}{110} + \frac{1}{112} + \dots$ que acarrea misterioso comportamiento en el estudio de su convergencia.

De algunas sucesiones contenidas en la secuencia natural, suele resultar elemental el estudio de su convergencia. Por ejemplo, la sucesión de las potencias de 2:

$$(2^n) = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$$

cuya correspondiente sucesión de inversos, es:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

serie que converge a 1.

Retornando a indagar un poco el comportamiento de la serie armónica se presenta la Tabla 1, en la que aparecen de manera aproximada algunas sumas parciales con una aproximación decimal.

Tabla 1

Sumas parciales de la Serie Armónica para valores dados de n

n	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
10	2.928968253
100	5.187377517
1000	7.485470860
10000	9.787606036
100000	12.09014612
1000000	14.39272672

Como se aprecia, la suma de los diez primeros términos ni siquiera llega a 3, los cien primeros producen un valor que supera por poco a 5 y siguiendo así, con el primer millón de términos no se supera al 15. Este crecimiento lento, misterioso y posiblemente por la escasez de instrumentos de cálculo, hicieron pensar que la serie convergía a algún valor y la demostración afirmativa o negativa de este hecho, había puesto en jaque no sólo a matemáticos aficionados, sino también a profesionales (Clawson, 1999; pp. 69-74).

El primero en demostrar que la serie armónica diverge, fue el obispo de la ciudad francesa Lisieux, ubicada a 160 kilómetros al oeste de París y a orillas del río Touques, Nicolás Oresme y que aquí se presenta, como una prueba fehaciente de la genialidad y la sencillez del pensamiento humano, que en Oresme se atreve a mostrar el poder de la visualización de las

cantidades mezclando las relaciones de orden con la propiedad asociativa de la adición.

1.2 SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA

Nicolás Oresme nació el 1 de enero de 1323, en un pueblo que perteneció a la antigua Alemania, hoy Normandía, cerca de Caen. Al parecer, fue proveniente de una familia de labradores; de allí su origen humilde y de escasos recursos económicos. Consigue una beca del Colegio de Navarra, institución para aquellos que no podían costear sus gastos en la Universidad de París y con ello da un salto oportuno para afianzar su progreso académico (Fernández & Tamaro, 2004).

Hacia 1348 se dedica a estudiar teología en París, alcanzando su doctorado en 1356; año en que le nombran Gran Maestro (*grand-maître*) del Colegio de Navarra. Se sabe también que, en 1364 era deán (cargo eclesiástico cristiano) de la catedral de Ruan. En 1369 hace una traducción de las obras aristotélicas a petición del rey Carlos V de Francia (llamado el Sabio), quien le concede una pensión en 1371. Con este apoyo real alcanza el obispado en Lisieux por el año de 1377, lugar donde muere en 1382.

Oresme es considerado uno de los grandes académicos e intelectuales europeos que existieron antes de la aparición de la peste negra, época en que la epidemia arrasó un alto porcentaje de la población de ese continente, impactando de manera negativa la innovación intelectual en la Edad Media en toda esa región del mundo. La obra intelectual y académica de Oresme ha sido más visitada por estudiosos anglosajones que por franceses.

En su obra *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* aparecen las contribuciones de Oresme para las Matemáticas. En esta

obra, introduce una forma gráfica, pionera del Método Cartesiano para representar velocidades y en el que, de manera creativa genial, representa el movimiento uniformemente acelerado. Oresme propuso una configuración en la que *la* cualidad '*uniforme*' se correspondía con una línea recta de la *intensidad*, paralela a la longitud; y era '*disforme*' si se trataba de una recta no paralela (uniformemente acelerada) o si era una curva no uniformemente acelerada. Por tanto, *Latitudo* o Intensidad, representaba la velocidad y *Longitudo* representaba el tiempo; de modo que el área de la figura representaba, por su parte, el espacio o distancia recorrida. Con esta idea y su representación presentó lo fundamental del Teorema de Merton de la velocidad media, teorema propuesto por matemáticos del Merton College de Oxford.

Estas formas de representación de Oresme fueron utilizadas por Leonardo, Cardano y Galileo, entre otros académicos de Alemania, Francia e Italia.

1.3 EL TEOREMA

Teorema. La serie armónica diverge.

En otras palabras, las sumas parciales de la serie armónica crecen indefinidamente.

Demostración

Nicolás Oresme, por el año 1350, surtiéndose de la asociatividad y de propiedades evidentes de las desigualdades, realizó una demostración repleta de belleza por su simplicidad y genialidad en la aplicación de la propiedad asociativa de la adición.

Su demostración se basa en que, la suma de un conjunto finito de m fracciones heterogéneas, con igual numerador 1 y positivas, de la forma:

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \dots, \frac{1}{n_m}$$

siempre es mayor que m veces la fracción más pequeña, es decir:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots + \frac{1}{n_m} \geq \frac{m}{\text{máx}\{n_1, n_2, \dots, n_m\}}$$

Para el efecto, Oresme toma la serie armónica:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

y hace asociaciones de 2^n términos a cada paso, según la sucesión natural (n), así:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

que resulta mayor que:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) \dots$$

Esta última expresión es igual a:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots$$

y de esta manera se encuentra la relación:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots < S \text{ (que es la suma de la Serie Armónica).}$$

Bueno, y aquí, otro hecho evidente: infinitos unos, infinitos medios, infinitos centésimos o infinitos gúgolésimos (Un gúgol equivale a un uno seguido de 100 ceros), suman el infinito y por ello, S no tiene otra alternativa que crecer de manera desmesurada a pesar de que lo haga con lentitud, tal como se ha evidenciado y en consecuencia, S es el infinito. Con esto termina la demostración.

Nicolás Oresme, quien demostró el carácter divergente de la serie armónica, también probó la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = 2$$

y además,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i}{4^i} = \frac{3}{4} + \frac{6}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \frac{12}{4^4} + \dots = \frac{4}{3}$$

Esto mueve a revisar el infinito potencial y reconocer que sólo en el último momento, cuando se tienen todos los términos de las anteriores sumatorias, se obtiene 2 o $\frac{4}{3}$, según una u otra sumatoria.

1.3.1 Argumentación

Nicolás Oresme ha legado a la humanidad un prototipo de demostración elegante, fundamentada en la importancia de manejar de forma adecuada propiedades de las operaciones, en este caso, la propiedad asociativa de la adición, conjuntamente con una relación de orden; y también en la capacidad de intuir la forma de organizar los sumandos en grupos de potencias de dos para enrutarse en la consecución de una suma infinita de medios. Esta forma de pensar, sólo es dable a mentes entrenadas y con

alta capacidad de visualización. De un problema complejo que había puesto en jaque a matemáticos profesionales, emerge una solución elemental, simple, entendible y clara.

Esta demostración caracterizada por su sencillez, enseña que, en el ámbito de los cálculos aritméticos es recomendable acudir a las propiedades de las operaciones. De hecho, quien bien las utiliza, es considerado como un acucioso estudiante y amante de las matemáticas.

1.3.2 Otras demostraciones

1.3.2.1 Aplicación de un principio del infinito

Es útil detenerse a repetir que el único objeto S tal que $S + 1 = S = S - 1$ es el infinito (∞), lo que indica que al sumar uno al infinito, no cambia su naturaleza.

Este hecho, ligado a la identidad

$$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n(n+1-n)}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \text{ para cualquier } n$$

constituyen los artificios utilizados por Jakob Bernoulli para desarrollar una demostración de la divergencia de la serie armónica, $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, sustentada en la propiedad asociativa de la adición (Amster, 2008; pp. 64-67).

En efecto,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 1 \text{ (por destrucción de paréntesis)}$$

en los puntos suspensivos "..." se entromete el infinito potencial, mientras que en la expresión "= 1" se cuenta con todos los sumandos, con todos los términos, con los infinitos términos, así, ya se han dado todos los pasos y por ello se está en el infinito actual.

En consecuencia, es posible escribir igualdades como la siguiente:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{2}.$$

Y de acuerdo con esto, es factible escribir una multitud infinita de igualdades que se dispone en una tabla de infinitos renglones, en la que se hace evidente la "agrupación de términos semejantes" en la suma de todos los términos a izquierda de todas las igualdades. Para ello, se reconoce a S como la suma de los inversos de la secuencia de los números naturales.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{6}$$

⋮

Con esto, basta aplicar el principio aristotélico de que, si a cosas iguales, se les agrega cosas iguales, se siguen cosas iguales. De modo que, al sumar

los términos del lado izquierdo y del lado derecho, respectivamente, se obtiene lo siguiente:

Lado izquierdo:

$$\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Lado derecho:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Y como estas cosas son iguales es claro que $S = -1 + S$, o lo que es lo mismo $S = S + 1$.

De modo que, S no tiene otra alternativa que ser el infinito ∞ ; dado que S es el único objeto matemático que no cambia de naturaleza al sumarle 1. Dicho de otro modo, la serie armónica diverge al infinito; esto es, S puede hacerse tan grande como se desee y así su crecimiento sea lento en exceso, puede hacerse en algún momento más grande que un Gúgol o mil Gúgol o un Gúgol-plex, quedando estos números, en todo momento, muy pequeños, en la distancia.

1.3.2.2 Demostración por reducción al absurdo

El matemático chileno Marco Renedo divulga una demostración de la divergencia de la serie armónica por *reducción al absurdo* (Amster, 2019; pp. 35-38).

En efecto, al suponer que la serie converge a un número determinado M , se tiene:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = M,$$

suma que se puede dividir en dos grupos, una con denominadores pares y otra con impares, así:

$$M = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right).$$

El primer grupo, se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{M}{2};$$

y en consecuencia, la suma del otro grupo debe ser la otra mitad; es decir:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{M}{2}.$$

Por Propiedad de Monotonía, se cumplen, de manera estricta, las siguientes desigualdades:

$$1 > \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{7} > \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{9} > \frac{1}{10}; \dots$$

Al sumar término a término todas ellas, se encuentra que:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots;$$

y como,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{M}{2},$$

se llega a la conclusión contradictoria: $\frac{M}{2} = \frac{M}{2}$ y $\frac{M}{2} > \frac{M}{2}$.

Este absurdo se obtiene al suponer que la serie armónica converge a un real M , por lo cual, por estar contra el principio de no contradicción, se tiene que la serie armónica es divergente.

La serie armónica, por analogía con la serie natural, contiene cualquier parte n -ésima de ella misma, pues es suficiente tomar,

$$S_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \cdots = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \right),$$

parte que, con toda evidencia, diverge al infinito, y al tiempo, también lo hace toda serie de la forma:

$$S_a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+a} = \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \frac{1}{3+a} + \cdots \right),$$

cualquiera que sea a en el conjunto de los números reales.

De este modo, para cualquier natural Q , la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+Qi}$$

es divergente; en otras palabras, la sucesión de sumas parciales:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+Qi} \text{ no es acotada.}$$

1.3.2.3 Sucesión de inversos de números primos

Las consideraciones de comparación anteriores llevaron a Nicolás Oresme a demostrar que la sucesión de los inversos de los números primos también es divergente; demostración que se presenta de modo

resumido, siguiendo el modelo de reducción al absurdo, en la que se utiliza la serie convergente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right) = 1.$$

En efecto, al suponer que la serie de los inversos de los primos converge, se tiene:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = L \text{ para algún real } L.$$

En consecuencia, es posible escoger una cola infinita de la serie, menor que cualquier número; así, existiría un determinado k para el cual,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2},$$

siendo cada p_i un primo y el $\frac{1}{2}$ se ha escogido por conveniencia (Se puede seleccionar cualquier otro real menor que uno).

Ahora bien, si $Q = p_1 p_2 \dots p_k$ es producto de los primos no tomados en la cola, es claro que los divisores primos de $1 + iQ$ no están en el segmento finito fuera de la cola $p_1 p_2 \dots p_k$, independientemente del i que se tome y todas las fracciones de la forma $\frac{x}{1+iQ}$ aparecen en el desarrollo de

$\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}\right)^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$ gracias al cumplimiento del Teorema

Fundamental de la Aritmética; en particular, aparece una fracción $\frac{x}{1+iQ}$ y

t términos más en la expansión de $\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}\right)^t$ siendo $x \geq 1$.

Así, se cumple la relación $\frac{1}{1+iQ} \leq \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}\right)^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$ y en forma general se cumpliría que $\sum_{i=1}^r \frac{1}{1+iQ} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}\right)^t \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 1$ ya que $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2}$ y se tiene de inmediato la inecuación $\sum_{i=1}^r \frac{1}{1+iQ} \leq 1$ para cualquier r , hecho imposible puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+iQ}$ es divergente y se puede hacer tan grande como se quiera; de este modo, la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+iQ}$ no es acotada.

A este hecho absurdo se llegó pensando en que la suma de los inversos de los primos configura una serie convergente y en consecuencia la verdad está en que lo contrario es cierto. De modo que la serie $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ es divergente.

Y también, siendo la serie $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ no acotada, se puede hacer tan grande como se desee o se piense, y para que ocurra eso, la lista de números primos necesariamente debe ser infinita; esto evidencia que los números primos son infinitos, y tal como se sabe, en la medida en que se avanza por la serie natural se hacen escasos, cabe la posibilidad de encontrar abundancia de los mismos al alcanzar un intervalo impropio con extremo inferior lo suficientemente grande. Esto sugiere el hecho de que en el primer millón de términos solo existen 78499 números primos, cuya suma de inversos ni siquiera supera al 4.

1.3.3 Desviación

De las series de números surgen anomalías numéricas significativas cuando interviene el infinito potencial, anomalías que derivan del incumplimiento de algunas propiedades, en especial, las propiedades conmutativa y asociativa de la adición. El orden en que aparecen los

sumandos y la forma en que se agrupan o asocian algunos de ellos, cobra importancia. Piénsese por ejemplo, en la suma de infinitos unos $\sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$, esta suma diverge; es decir, puede sobrepasar cualquier cota por grande que se disponga, va más allá del gúgol o del gúgol-plex, avanzando, lenta, sosegada, sostenida, pero con energía.

En cambio, la serie alterna $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$ puede entenderse como una suma infinita de ceros: $\sum_{i=1}^{\infty} 0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$, que es cero; u organizada de otra forma, $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$; o podemos organizar n primeros unos y dejar los n unos negativos al final de la cola, en el infinito, para que operen: $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = n + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = n + 0 + 0 + 0 + \dots = n$, haciendo que la suma, sea cualquier número entero.

Pensar en esta serie alternada de unos, es inferir desde la igualdad:

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-r)^i,$$

que haciendo $r = 1$, también muestra que $\sum_{i+1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{2}$.

Desde la suma de infinitos reales aparecen asombrosas anomalías; la serie armónica por ejemplo, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ diverge; es tan grande que rebasa cualquier cota, crece con lentitud, al punto que solo para sobrepasar al número 5 son necesarios cientos de términos; pero su serie alterna $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ tiene asombroso comportamiento; las sumas parciales $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$,... que en aproximación decimal son 0,5; 0,833333; 0,583333,...., se

acercan de manera oscilante e inexorable al valor 0,693147 que coincide con el número real trascendente $\ln(2)$.

Causa asombro la ocurrencia de que la suma infinita de números racionales no sea un racional, contrario a cuando los sumandos resultan ser una cantidad finita de ellos. Pero no solo eso, si atendemos a la oportunidad brindada por La Paradoja de Tristram Shandy de Bertrand Russell (Culturacientífica, 2013) y como ocurre en la escritura de autobiografías en las que el autor puede saltar días y regresar a estos en cualquier momento, podemos ordenar los sumandos, por ejemplo, como $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \dots$ o también otros órdenes y hacer que las sumas parciales converjan a cualquier número real.

El infinito se puede utilizar como criterio de abundancia; así, a sabiendas de que la serie armónica diverge, partes de ella divergen o convergen. Por ejemplo, la serie de los inversos de los cuadrados perfectos converge, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ y como se ve lo hace a un número trascendente; en cambio, la serie de los inversos de los números primos $\sum_{p \text{ primo}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ diverge, se puede hacer tan grande como se quiera, lo cual significa que hay más números primos que cuadrados perfectos, hecho misterioso e insondable por lo irregular de la distribución de los números primos frente a la de los cuadrados perfectos, en las que, la distancia entre ellos configura la secuencia de los números impares y por ello se pueden localizar con facilidad.

Jacob Bernoulli (1654-1705) probó que la serie de los inversos de los cuadrados $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ es convergente, y Leonard Euler demostró que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ utilizando funciones trigonométricas. También encontró que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

dando paso a que la suma de los inversos de los cuadrados de los pares sea $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8}$. Euler también encontró la suma de la serie alternante

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Estos resultados son importantes pues determinan que sumas infinitas de números racionales producen irracionales, en este caso trascendentes y vinculan de manera misteriosa y asombrosa al trascendente π , a la longitud de la circunferencia.

Todo esto asegura que con las series se debe tener cuidado. Por ejemplo, si se quiere calcular la suma infinita $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots$ que de hecho diverge y para inyectarle alma finita se le llama $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 3^i$, pequeños malabares algebraicos consiguen ver como $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots = 1 + 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots) = 1 + 3S$ y así $S = -\frac{1}{2}$. Gran fiasco, ¿cómo así que la suma de enteros positivos que a todas luces diverge, resulta igual a un racional puro y además negativo? De hecho, esta suma infinita también se puede escribir como $S = 1 + 3 + 3^2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots) = 4 + 9S$ con lo que se llega al mismo resultado de $S = -\frac{1}{2}$.

Esto ocurre con las infinitas progresiones geométricas de razón n , $S = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$ sobre las que, con el mismo malabar algebraico, se evidencia que en la medida en que se avanza potencialmente hacia el infinito por ellas, su suma (siendo divergente) se aproxima a cero, puesto que $S = -\frac{1}{n-1}$ y lo hace por valores negativos.

También ocurre lo contrario, sumas infinitas que al cumplir ciertos requisitos resultan convergentes, como ocurre con $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ que converge en virtud a que sus sumas parciales crecen con lentitud extrema, aunque esta razón se quede corta, puesto que existen sumas infinitas que crecen con extrema lentitud y no son convergentes.

CAPÍTULO 2.

SÓLIDOS PLATÓNICOS

2.1 CONTEXTO

Pitágoras, el fundador de una secta obligada al secretismo figura como el transformador del conocimiento aritmético y geométrico de la época. Varios resultados surgieron por simple contemplación referidos a los números triangulares y cuadrados. Por ejemplo, las sumas parciales de la serie de los números impares son cuadrados perfectos, un número cuadrado se descompone en la suma de dos triangulares consecutivos y los triangulares son las sumas parciales de la secuencia de números naturales. Existen vestigios anecdóticos difíciles de creer sobre su personalidad, como el hecho de que había convencido a su séquito el haber nacido con un fémur de oro (Paulus, 1998; pp. 256-258).

A Pitágoras se debe el haber fortalecido el estudio de teoremas en forma abstracta, un poco alejados de la practicidad que imprimen el dibujo y los modelos. Se asegura que él, con sus seguidores, bien llamada escuela pitagórica, fueron los descubridores de los números irracionales y de la construcción de los poliedros regulares llamados sólidos platónicos, ligados de manera mítica a la composición del universo.

Euclides, en sus célebres Elementos, hace un esfuerzo diligente y secuencial para llegar hasta la proposición 47 en el Libro I, en que demuestra el llamado Teorema de Pitágoras, teorema que enseña que cuadrado más cuadrado es cuadrado y que al parecer es una herencia de los babilonios y egipcios. En el Libro XIII, capítulo final de su obra, termina con la construcción de los Sólidos Platónicos. De este libro se

disponen a continuación las proposiciones pertinentes a la construcción de los poliedros regulares (Euclides, 1998), así:

La Proposición 13, referida a la construcción del tetraedro, pide construir una pirámide, envolverla en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

La Proposición 14, exige construir un octaedro y envolverlo en una esfera, como en la proposición anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.

La Proposición 15, pide construir un cubo y envolverlo en una esfera, como la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.

La Proposición 16, se dirige a construir un icosaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada menor.

La proposición 17, pide construir un dodecaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable, llamada Apotema.

La proposición 18, de manera escueta, exige poner los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

Con esto termina, no solo el capítulo o Libro XIII, sino el discurso de los Elementos propuestos por Euclides. Como se ve, no existen más y tampoco hay mayores referencias respecto de la existencia de otros poliedros regulares, sin demostrar que solo son cinco, Euclides parece que lo sabía desde los estudios pitagóricos del que, de forma anecdótica,

también se sabe que por divulgar este secreto, Hipaso de Metaponto fue desterrado de la orden y botado al mar a su suerte.

Los sólidos platónicos o regulares son poliedros convexos, cuyas caras son polígonos regulares, todas congruentes entre sí; además, a cada uno de sus vértices llega el mismo número de aristas (grado del vértice) y todos los ángulos sólidos son iguales. Como formas tridimensionales, tienen gran belleza impregnada de misterio por su número reducido. Solo son cinco. El nombre lo reciben en honor a Platón, filósofo griego (-427 a. C. -347 a. C.), a quien se atribuye haberlos estudiado en primera instancia. Otros nombres de estos cuerpos tridimensionales de alta regularidad son cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, poliedros platónicos o poliedros regulares convexos (Paulus, 1998; pp. 208-210).

Al parecer, el primer geómetra griego en estudiar estos cuerpos fue Teeteto, contemporáneo de Platón. Como todos los cuerpos tridimensionales convexos, incluso los no regulares, cumplen la fórmula $V + C - A = 2$ en la que V representa el número de vértices del sólido; C alude al número de caras y A corresponde al número de aristas; fórmula descubierta por el suizo Leonhard Euler, uno de las más prolíficos y versátiles matemáticos que hayan existido. La expresión $V + C - A = 2$ recibe el nombre de Fórmula de Euler o Fórmula Característica de Euler (Paulus, 1998: 210).

Los Sólidos Platónicos son cinco: el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Resulta imposible construir otro sólido diferente de los cinco anteriores que cumpla todas las propiedades exigidas de convexidad y regularidad en cuanto a la congruencia de sus caras y la igualdad respecto del grado de sus vértices. El grado está referido a la cantidad de aristas que confluyen a un vértice.

La convexidad de un poliedro, significa que, el segmento que une dos puntos en el interior del sólido, también queda en el interior (Tabla 2).

Tabla 2

Poliedro convexo

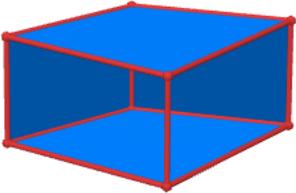
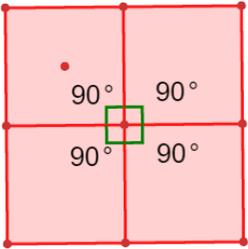
	<p>Todo poliedro convexo tiene la particularidad de que en cada vértice convergen al menos tres caras. Además, en ese vértice, la suma de los ángulos de cada una de las caras se obliga a ser menor a los 360° porque, siendo igual a este valor, el poliedro se aplanaría y no se puede pensar en su interior; en consecuencia, tampoco en su convexidad.</p>
---	---

Tabla 3

Poliedro aplanado

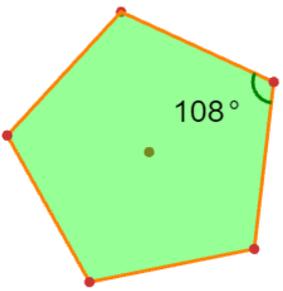
	<p>El gráfico a izquierda, muestra la evidencia de que, si la suma de los ángulos en un vértice es igual a 360°, el poliedro se aplanan, impidiendo su convexidad.</p> <p>De otro lado las caras de los polígonos regulares que configuran el sólido al menos deben tener tres lados (Tabla 3).</p>
---	---

Por las anteriores circunstancias, se tiene que si las caras del posible sólido platónico son triángulos equiláteros, siendo cada ángulo del triángulo de 60° en el punto de convergencia, pueden confluír 3, 4 o 5 caras. No es posible que concurren 6 caras pues se coparían los 360° suscitando aplanamiento del sólido en ese vértice.

Si en cambio las caras son cuadrados, la única alternativa es que confluyan 3, ya que con cuatro se vuelven a completar 360° y el cuerpo se aplanaría.

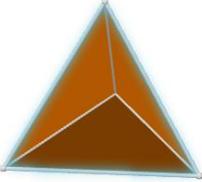
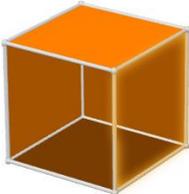
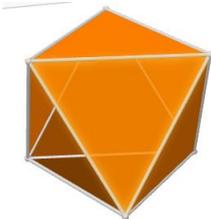
Tabla 4

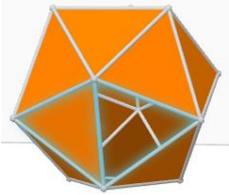
Poliedro pentágono regular

 <p>Diagrama de un pentágono regular con un ángulo interno etiquetado como 108°.</p>	<p>Por último, si las caras son pentágonos regulares, sus ángulos a los vértices son de 108°, lo que abre la posibilidad de que en cada vértice del sólido se apeguen tres caras.</p> <p>Pensar en que las caras sean hexágonos es imposible, pues sus ángulos internos son de 120° y por ello, tres caras armarían los 360° que hacen que la forma se aplane (Tabla 4).</p>
--	--

Este recuento de las caras no es una demostración de la existencia de únicamente cinco sólidos platónicos, pero es una evidencia de que solo existen las posibilidades anexas a la siguiente tabla dispuesta de acuerdo al número de caras (Tabla 5)

Tabla 5*Relación de sólidos platónicos*

Sólido	Nombre	Coincidencia en cada vértice	Suma de los ángulos de coincidencia
	Tetraedro	Tres triángulos	180°
	Hexaedro	Tres cuadrados	270°
	Octaedro	Cuatro triángulos	240°
	Dodecaedro	Tres pentágonos	324°

	Icosaedro	Cinco triángulos	300°
---	-----------	------------------	------

Al parecer, los pitagóricos lograron demostrar que solo existían cinco sólidos platónicos. La demostración que se dispone a continuación se aleja de la pitagórica porque hace uso de la fórmula característica de Euler $V + C - A = 2$, que vivió en el siglo XVIII.

2.2 SOBRE EL AUTOR

Leonhard Euler es un matemático nacido en Basilea, Suiza en 1707, su muerte aconteció en San Petersburgo en 1783. Fue alumno del eminente matemático Johann Bernoulli en la universidad de Basilea y admirado por él, hecho curioso dado el carácter caprichoso de los miembros de la familia Bernoulli (Newman, 1979; pp. 75-76).

Obtuvo su grado en 1723 y en 1727 fue invitado por Catalina I para convertirse en asociado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo en donde también laboraba Daniel Bernoulli. Seis años más tarde pierde la visión de su ojo derecho; esto no impidió su laboriosidad en el campo matemático ni la calidad de sus descubrimientos. Federico II el Grande, lo invita a trabajar en la Academia de Berlín en 1741, allí estudió y escribió sobre cálculo integral modificando sus aspectos teóricos, elaboró nuevas demostraciones de resultados geométricos y renovó los métodos algebraicos. Más adelante encontró resultados en el campo de las ecuaciones diferenciales y colaboró con el progreso de la teoría de las funciones trigonométricas, logarítmicas y

exponenciales; en estas últimas, fue quien primero utilizó el símbolo e como base de los logaritmos naturales.

En su obra *Introductio in analysim infinitorum* publicada en 1748, expuso el concepto de función que se utiliza aún; en geometría, encontró hallazgos sobre los antiguos conceptos como el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo y modificó el tratamiento de las funciones trigonométricas.

Después de su muerte ocurrida en 1783, nace el proyecto de publicar la totalidad de su obra, consistente en más de ochocientos tratados. Hasta el momento, no existe otro matemático que haya escrito tanto como él y que haya dedicado su trabajo científico a campos tan diversos.

2.3 TEOREMA

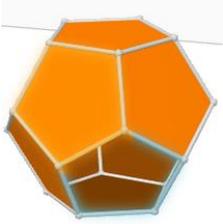
Teorema

Tan solo existen cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Demostración

La demostración de este hecho se fundamenta en la fórmula característica de Euler $V + C - A = 2$ que satisface todo poliedro convexo (Tabla 6).

Tabla 6*Número de aristas de un sólido regular*

	<p>Llamando g al número de aristas que se conectan con un vértice, y l al número de lados que conforma una cara en un sólido regular, aparecen dos formas naturales de calcular el número de aristas que configuran a cualquiera de estos cuerpos a saber</p> $A = \frac{gV}{2}$ $A = \frac{lC}{2}$
---	---

La primera expresión $A = \frac{gV}{2}$ aparece porque al multiplicar el número de vértices por el grado que es el mismo en cada nodo, cada arista queda contada dos veces, por la simple razón de que una arista es el camino de unión entre dos vértices. De este modo, para obtener el número exacto de aristas que conforman el sólido regular, el producto gV debe dividirse por 2.

Lo mismo ocurre con la expresión $A = \frac{lC}{2}$, l es el número de lados de cada uno de los polígonos regulares que son las caras del sólido. En el producto lC cada arista se cuenta dos veces porque cada una de ellas es el sector de vecindad en el que colindan dos caras. Esto justifica que a tal producto hay que partirlo por dos para obtener el número exacto de aristas A .

De cada una de estas expresiones se llega a $V = \frac{2A}{g}$ y $C = \frac{2A}{l}$ y al reemplazarlas en la fórmula de Euler produce $\frac{2A}{g} + \frac{2A}{l} - A = 2$ de la cual se obtiene la ecuación $A\left(\frac{2}{g} + \frac{2}{l} - 1\right) = 2$.

Además, en cada sólido es claro que cada uno de los parámetros A , C y V se obligan a ser mayores o iguales que 1 y en particular, para convertirse en un poliedro regular convexo se debe cumplir que $g \geq 3$ y $l \geq 3$, de lo contrario, no hay posibilidad de que exista poliedro alguno.

Siendo $A\left(\frac{2}{g} + \frac{2}{l} - 1\right) = 2$ y dado que $A > 0$ de manera estricta se sigue $\left(\frac{2}{g} + \frac{2}{l} - 1\right) > 0$, también en modo estricto. En consecuencia, se tiene que $\frac{2}{l} > 1 - \frac{2}{g}$ de donde se sigue la inecuación $l < \frac{2g}{g-2}$. En este momento, se puede determinar entonces, lo que debe satisfacer el parámetro l en concordancia con los valores que tome $g \geq 3$, de modo que, si $g = 3$, se encuentra $l < 6$. Así, en este caso, l puede tomar los valores 3, 4 o 5, por ser $l \geq 3$.

Con estas consideraciones es factible llenar de manera parcial una tabla de posibilidades para los valores de g y l como sigue (Tabla 7):

Tabla 7

Tabla con valores posibles para g y l (a)

g	l
3	3
3	4
3	5

Si $g = 4$ se consigue $l < 4$ lo que hace que la única posibilidad sea $l = 3$.

Recuérdese que $l < \frac{2g}{g-2}$.

Si $g = 5$ se encuentra $l < \frac{10}{3}$ y en consecuencia se tiene $l = 3$.

Para valores superiores de g se encuentran imposibilidades para l ya que por la estructura de los sólidos $l \geq 3$ y si, por ejemplo $g = 6$ se consigue $l < 3$ y estos dos hechos se hacen imposibles ($l \geq 3$ y $l < 3$ es absurdo). Igual si $g = 7$, $l < \frac{14}{5}$, es decir $l < 3$, cosa que de nuevo es imposible.

Con todo esto la tabla de posibilidades para los dos parámetros en juego queda como sigue (Tabla 8).

Tabla 8

Valores posibles para g y l (b)

g	l
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Ahora bien, desde $A\left(\frac{2}{g} + \frac{2}{l} - 1\right) = 2$ se consigue la función de dos variables

$A(g, l) = \frac{gl}{g+l-\frac{gl}{2}}$ para completar la tabla con los valores de A .

De modo que, por ejemplo, para el primer renglón $A = A(3, 3) = \frac{9}{6-\frac{3}{2}} = 6$.

La tabla se completa como sigue (Tabla 9).

Tabla 9

Valores posibles para g , l y A

g	l	A
3	3	6
3	4	12
3	5	30
4	3	12
5	3	30

En este momento vale la pena recordar que ya se habían establecido las fórmulas $V = \frac{2A}{g}$ y $C = \frac{2A}{l}$ que deben satisfacer los posibles sólidos platónicos, ellas son funciones de dos variables $V(A, g) = \frac{2A}{g}$ y $C(A, l) = C = \frac{2A}{l}$ con las cuales se completa la tabla final con todos los valores, disponiendo también el nombre del poliedro (Tabla 10).

Tabla 10

Valores posibles para g , l y A , V y C

g	l	A	V	C	Nombre
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro

3	5	30	20	12	Dodecaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Así culminan todas las posibilidades y, con ello, termina la prueba, en la que, en efecto, se ha demostrado que tan solo existen cinco sólidos platónicos.

2.3.1 Argumentación

Es una generalidad de que los matemáticos profesionales realicen demostraciones de teoremas de unicidad por la vía de la contradicción, también llamada de reducción al absurdo. Si se fija bien, este teorema es de unicidad, pero se encamina por un modelo de demostración constructivo y deductivo, va examinando posibilidades, haciendo cuentas, utilizando las propiedades de las inecuaciones y utiliza herramientas de álgebra elemental.

El hecho de sólo llevar cuentas, de pensar en la configuración de funciones, de examinar las tablas que se completan paso a paso, se perfila en lo deductivo y justo deriva en establecer tablas. Es un trabajo de estilo sistemático, se enhebra dentro de la ingeniería de sistemas y en consecuencia a nuestro juicio, le imprime belleza al teorema y a su demostración cuyo resultado se apega a los misterios que cunden en la matemática.

2.3.2 Desviación

Con sentido recreativo se dispone a continuación una lista gráfica de patrones bidimensionales que derivan en la construcción de los cinco sólidos platónicos de los que, vale recalcar que, para el hexaedro o cubo se conocen trece patrones y existen al menos dos para los demás sólidos. En el listado que sigue, se disponen cuatro de ellos (Vélez, 1996; pp. 132-137).

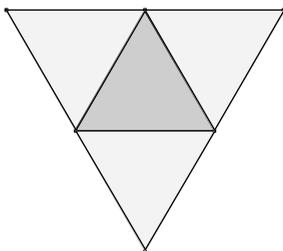
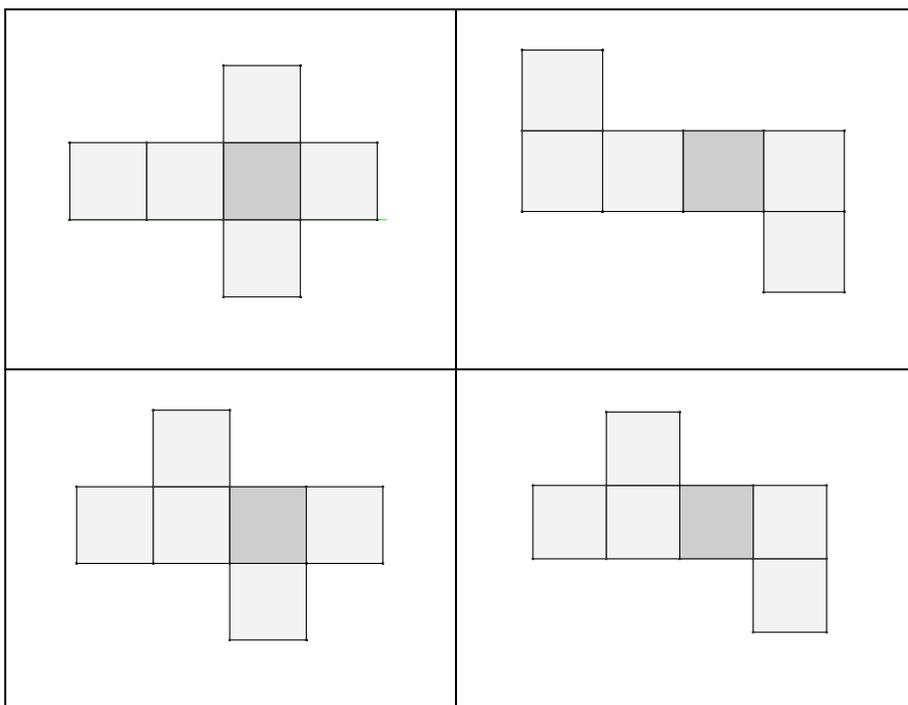


Figura 1. Tetraedro

El *tetraedro* limitado por cuatro triángulos equiláteros, unidos de tres en tres (Figura 1).

Tabla 11

Patrones del Hexaedro regular o cubo



El *hexaedro regular o cubo*, limitado por seis cuadrados congruentes ligados de tres en tres (Tabla 11).

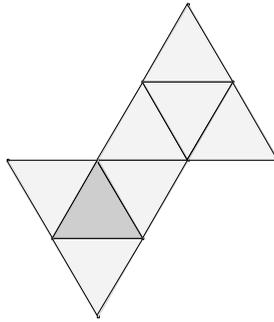


Figura 2. Octaedro regular

El *octaedro regular*, limitado por ocho triángulos equiláteros, ligados de cuatro en cuatro (Figura 2).

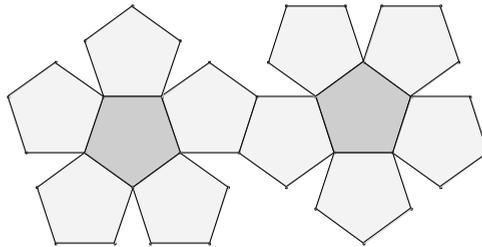


Figura 3. Dodecaedro regular

El *dodecaedro regular* conformado por doce pentágonos regulares unidos de tres en tres (Figura 3).

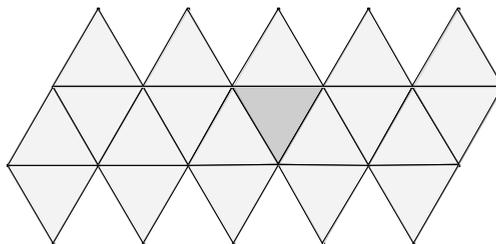


Figura 4. Icosaedro regular

El *icosaedro regular*, configurado por veinte triángulos equiláteros, unidos en cada vértice de cinco en cinco (Figura 4).

Otra particularidad de los sólidos aparece en que sus áreas y volúmenes dependen de los números irracionales, excepto para el cubo. Tales fórmulas se disponen a continuación, en la siguiente tabla, en la que a es la longitud de la arista para cada sólido (Tabla 12).

Una particularidad final: los sólidos platónicos son elementos que se ligan a los juegos de azar, pues se convierten en excelentes elementos probabilísticos en cuanto que, cada uno, se adopta como dado en la que cada cara otorga la misma probabilidad de ocurrencia; así, el octaedro es un dado de ocho caras; el dodecaedro, un dado de doce caras y el icosaedro es un dado de veinte caras. Y bien, el más conocido, el cubo, que es el dado más comercializado y, de hecho, el tetraedro que se reconoce como un dado que, vuela poco por tener solo cuatro caras, cada una con altas posibilidades de ocurrencia.

Tabla 12

Áreas y volúmenes de los sólidos platónicos

Sólido	Área	Volumen
Tetraedro	$\sqrt{2}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
Hexaedro	$6 a^2$	a^3
Octaedro	$2\sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$

Dodecaedro	$3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^2$	$\frac{\sqrt{15 + 7\sqrt{5}}}{4} a^3$
Icosaedro	$5\sqrt{3} a^2$	$\frac{5\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{12} a^3$

CAPÍTULO 3.

TEOREMA DE HAGA

3.1 CONTEXTO

La Papiroflexia es una actividad escolar, originaria del Japón y arraigada en su cultura, ha dado origen a resultados matemáticos no descartables. Es lamentable que logren simularse pocos resultados entre los varios que emergen de ella. Con esta técnica se hace fácil calcular la bisectriz de un ángulo, la mediatriz entre dos puntos, el punto medio de un segmento, trisecar un ángulo, que es uno de los clásicos problemas imposibles en el modelo sintético y otros resultados más. Es extensa la lista de hechos que se alcanzan con esta actividad; vale la pena indagar por sus resultados, que también se demuestran de manera formal.

El teorema de Haga es uno de los hechos que proviene de la Papiroflexia u Origami. En este capítulo el teorema se demuestra a través de los criterios de semejanza y se hace una simulación que cabe en cualquier asistente de geometría dinámica (AGD) como GeoGebra o Cabri II Plus. Contrario al modelo físico real (Que es oportuno hacer en el aula, en este caso con papel en mano), en un AGD es posible hacer una extensión que compromete al infinito. En la simulación del teorema juega papel preponderante el uso de la mediatriz que se hace equivalente al mecanismo virtual de doblar el papel. El hecho de que originalmente el Teorema de Haga permita dividir un segmento en tres partes iguales, queda resuelto al efectuar la simulación, y es el resultado fundamental propuesto en el teorema.

La simulación parte del doblado de papel como se indica y que equivale al cálculo de una mediatriz entre dos puntos. La extensión del teorema

determina 20 funciones racionales que se convierten en recursos didácticos que median los conceptos de límite, infinito y función, y solo por eso, el teorema no solo resulta útil, sino a la vez, se impregna de una riqueza didáctica incomparable por el vínculo que posee con el mundo tangible.

La Papiroflexia, doblado del papel u Origami, brinda alternativas que convierten conceptos geométricos en artefactos o instrumentos que se utilizan en la solución de problemas. Por ejemplo, “juntar” los lados de un ángulo trazado en papel, significa calcular la bisectriz de ese ángulo; efectuar la dobléz por un punto de un mismo lado, es trazar una perpendicular al mismo; hacer que en un dobléz se sobrepongan dos puntos, es calcular la mediatriz del segmento determinado por esos puntos. Justo, esta última acción permite dividir, de manera inmediata, cualquier segmento en tres partes iguales, resultado que se conoce como el Primer Teorema de Haga.

Este resultado fue enunciado como Teorema de Haga por el Dr. Koji Fusimi en 1979. Más tarde el propio Kazuo Haga descubrió construcciones similares a la anterior, por lo que lo renombró como Primer Teorema de Haga (Grupoalquerque, s.f.).

3.2 SOBRE EL AUTOR

Existe muy poca referencia sobre el teorema en estudio y su descubridor y solo se sabe que fue enunciado por el Dr. Koji Fusimi en el seminario “Mathematics Seminar”, enero 1979, con el nombre de “Teorema de Haga”. Más tarde, el propio Kazuo Haga añadió el ordinal tras descubrir otras dos construcciones geométricas relacionadas con la anterior, a las que llamó segundo y tercer teorema respectivamente.

Kazuo Haga es un matemático y entomólogo japonés, nacido en 1934 y dedicado al origami, manifestación cultural oriental, desde donde ha escrito buena cantidad de libros y realizado aportes a esta rama y a la matemática. Al tiempo, es un excelente profesor de biología, retirado. Famoso por su libro *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* (Origami: exploración matemática a través del plegado del papel), libro que tiene una traducción al inglés por las profesoras Josefina C. Fonacier y Masami Isoda. El libro contiene el material publicado en japonés por el profesor Haga, que se publicó hasta 2008. En su trabajo, siempre ha relacionado la exploración, indagación e investigación matemática a través del plegado de papel (Facebook, s.f.).

Es necesario comentar que los contenidos de los trabajos del profesor Haga envuelven el plegado de un cuadrado de papel. No solo se aprecia el contenido matemático de sus exploraciones, sino también, como resultado de obras de significación artística. Dicho libro, se divide en diez capítulos, que contienen conceptos desarrollados y descubiertos con estudiantes de escuela básica secundaria.

El libro referenciado inicia con el ejemplo del doblado de un cuadrado de papel en el que se dobla un vértice sobre el punto medio de un lado opuesto, hecho que compromete la existencia del triángulo fundamental de lados 3-4-5 que para la Geometría Sintética, es un triángulo rectángulo fundamental, que origina una infinitud de triadas pitagóricas $(3n, 4n, 5n)$. Más adelante presenta otros resultados de gran colorido, historias de reyes y princesas como motivación, todo concerniente al plegado de papel. Luego, avanza con plegados de rectángulos, a los que llama, Rectángulos Plateados, equivalentes en tamaño al formato de carta A4, llamado papel tamaño carta, y con él, obtiene subdivisiones de un intervalo en cualquier número de partes iguales.

3.3 PRIMER TEOREMA DE HAGA

Sea un cuadrado de vértices A, B, C y D . Si se pliega el cuadrado sobre sí mismo, llevando el vértice D al punto medio del lado AB , entonces, el lado DC cortará al lado BC en un punto F , tal que la distancia entre B y F es igual a las dos terceras partes del lado del cuadrado.

Demostración

La demostración puede hacerse de forma elemental, advirtiendo que al ejecutar el doblado, como se ha indicado, esto es, que el vértice D caiga en cualquier parte del lado AB del cuadrado y no solo en su punto medio, se conforman tres triángulos rectángulos semejantes ADE , BFD y CFG ya que los ángulos en los vértices A, B y C son rectos, los ángulos $\sphericalangle AED$ y $\sphericalangle FDB$ son complementarios del ángulo $\sphericalangle ADE$ y en consecuencia son iguales y a su vez, los ángulos $\sphericalangle GFC$ y $\sphericalangle BFD$ son opuestos por el vértice y por ello tienen la misma medida. Así, el ángulo $\sphericalangle CGF$ es congruente con los ángulos $\sphericalangle AED$ y $\sphericalangle FDB$ (Figura 5).

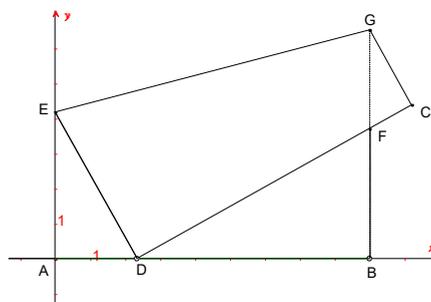


Figura 5. Primer teorema de Haga

La semejanza entre estos tres triángulos y la relación pitagórica establecida en el Teorema 47 del Libro I de los Elementos de Euclides, permiten establecer nueve funciones racionales, siempre que x

pertenezca al intervalo $[0, a]$ al ubicar el lado AB del cuadrado de longitud a sobre el eje x .

De la semejanza entre los triángulos ADE , BFD y CFG se sigue $\frac{AE}{AD} = \frac{BD}{BF}$ de donde $BF = \frac{AD \times BD}{AE}$; pero $AD = x$ y $BD = a - x$ lo que hace que escribamos en primera instancia que $BF = \frac{x(a-x)}{AE}$

Ahora bien, en el triángulo rectángulo ADE , al llamar $AE = y$, y a sabiendas que $AE + ED = a$ al aplicar el teorema de Pitágoras, se determina que $DE = \sqrt{x^2 + y^2}$ por lo cual $y + \sqrt{x^2 + y^2} = a$, o mejor $\sqrt{x^2 + y^2} = a - y$.

Al elevar al cuadrado y simplificar la ecuación anterior resulta la expresión $y = \frac{a^2 - x^2}{2a} = \frac{(a+x)(a-x)}{2a}$ y siendo $AE = y$ al remplazar en $BF = \frac{x(a-x)}{AE}$ finalmente se llega a la ecuación $BF = \frac{2ax}{a+x}$.

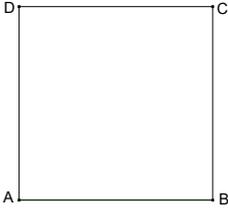
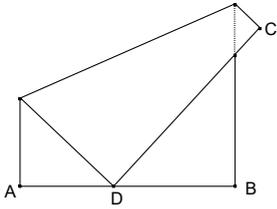
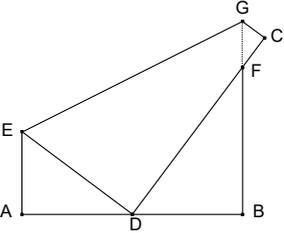
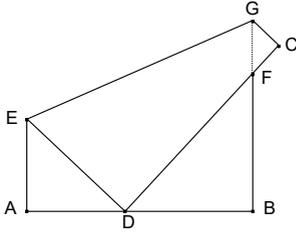
Con estos datos de semejanza, se ha encontrado con facilidad que $BF = \frac{2ax}{a+x}$ donde $AD = x$. Desde allí, es natural que si D es el punto medio del lado AB , se dispone que $x = \frac{a}{2}$, al remplazar en la expresión inicial, se consigue $BF = \frac{2}{3}a$. Esto significa que $CG = \frac{1}{3}a$ que a su vez señala que el punto G triseca al lado del cuadrado, con lo cual termina la prueba.

De hecho, al ubicar al vértice D en alguna división particular del lado AB se encuentra una división igualmente especial de lado del cuadrado.

En Tabla 13, aparece paso a paso, la simulación del plegado del cuadrado de papel, incluso, cuando D es el punto medio sobre el lado AB .

Tabla 13

Simulación del plegado del cuadrado de papel

	
 <p data-bbox="226 899 606 951">Si $AD = \frac{1}{2}a$ entonces $BF = \frac{2}{3}a$</p>	 <p data-bbox="658 875 1085 957">Aquí se dispone el punto D en otra posición cualquiera del lado AB.</p>

3.3.1 Argumentación

La belleza del Primer Teorema de Haga, radica en que nace del sentido práctico que tiene el plegado del papel, actividad mundana, casi un juego divertido de carácter artístico y en apariencia, sin ningún vínculo con la matemática y en especial, con resultados geométricos. Su demostración fluye de la semejanza entre triángulos rectángulos y del Teorema de Pitágoras y como viene a continuación, el surgimiento de una buena cantidad de funciones racionales, incluso que sometido el plegado a una extensión utilizando un Asistente de Geometría Dinámica - AGD, atraviesa el infinito y otros conceptos concebidos en el área del análisis.

En cierto sentido, esta actividad se cubre de riqueza didáctica comprensible a cualquier estudioso de las funciones racionales. Su

belleza se irradia del sentido práctico del plegado que en esta ocasión es único, un solo plegado del que brota de manera simple un buen campo de acción en el álgebra, en la geometría y en el análisis. Con un solo movimiento, un segmento (el lado del cuadrado) queda dividido en tres partes iguales. Esto es lo interesante, es lo que hace bello el teorema: su simpleza y los conocimientos relacionados que dinamiza.

3.3.2 Desviación

La simulación que se establece en un AGD (Figura 5), parte de haber construido el cuadrado $ABCD$ y ubicar un punto arbitrario sobre el lado AB del cuadrado que reemplaza al vértice D original. Uno de los postulados de la Papiroflexia, asegura que, la ubicación de un punto sobre otro en un trozo de papel, equivale a construir la mediatriz; el segmento EG es parte de la mediatriz entre los puntos D del cuadrado original y el ubicado en el lado AB ; así E , es la intersección entre esta mediatriz y el lado AD . Lo que sigue, es trazar el segmento ED , y desde el extremo D , levantar la perpendicular DC que se toma igual al lado del cuadrado. Desde C se traza una perpendicular que corta al lado BC , también en G , como lo hace la mediatriz. Con esto se completa la simulación del doblado del papel según los requisitos del Teorema de Haga.

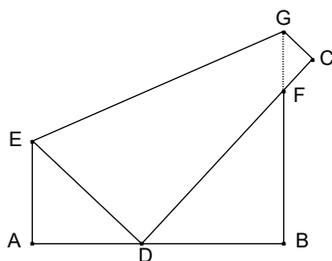


Figura 6. Una aplicación del Primer Teorema de Haga

De la semejanza entre los triángulos EAD , DBF y CGF y el uso del teorema de Pitágoras aparecen las siguientes expresiones que se adoptan como funciones, en cuanto el punto D puede caer en cualquier parte del lado AB del cuadrado original (Figura 6). De manera inicial, el dominio de cada función es el intervalo $[0, a]$, siendo a el lado del cuadrado (Tabla 14).

Tabla 14

Funciones como expresiones algebraicas en aplicación del Primer Teorema de Haga: de 1 a 9

$\triangle EAD$	$AD = f_1(x) = x$	$AE = f_2(x) = \frac{a^2 - x^2}{2a}$	$ED = f_3(x) = \frac{a^2 + x^2}{2a}$
$\triangle DBF$	$BF = f_4(x) = \frac{2ax}{a+x}$	$DB = f_5(x) = a - x$	$FD = f_6(x) = \frac{a^2 + x^2}{a+x}$
$\triangle GCF$	$FC = f_7(x) = \frac{x(a-x)}{a+x}$	$GC = f_8(x) = \frac{(a-x)^2}{2a}$	$GF = f_9(x) = \frac{(a-x)(a^2 + x^2)}{2a(a+x)}$

Estas funciones como expresiones algebraicas posibilitan simplificaciones dramáticas; por ejemplo, a partir de que se conoce desde el cuadrado físico del papel que $BF + FG + GC = a$, se expresa este hecho como:

$$\frac{2ax}{a+x} + \frac{(a-x)(a^2 + x^2)}{2a(a+x)} + \frac{(a-x)^2}{2a} = a$$

para cualquier valor que tome a .

Por ejemplo, si $a = 3$ la expresión se convierte en $\frac{6x}{3+x} + \frac{(3-x)(9+x^2)}{6(3+x)} + \frac{(3-x)^2}{6} = 3$.

Este ejemplo constituye un buen ejercicio de simplificación de expresiones algebraicas.

También, $FD + FC = a$ y por ello, $\frac{a^2+x^2}{a+x} + \frac{x(a-x)}{a+x} = a$ y así otras relaciones algebraicas, desde donde se hallan identidades que alumbran al álgebra.

3.5 SOBRE LA PARTICIÓN

Al considerar la función $f_4(x) = \frac{2ax}{a+x}$ se obtienen particiones del lado BC de acuerdo con la posición del punto D sobre el lado AB . Al adoptar uno de los postulados de la papiroflexia, que sólo permite dividir un segmento en dos partes mediante la coincidencia de los puntos extremos del mismo, las partes en que se puede dividir un segmento son potencias de 2 y las posibles ubicaciones del punto D sobre AB son de la forma $\frac{n}{2^r}$ y por ello

$$f_4\left(\frac{n}{2^r}\right) = \frac{2an}{n+a2^r}.$$

Si el lado AB se divide en 8 partes iguales es claro que:

$$f_4\left(\frac{a}{8}\right) = \frac{2a}{9}, f_4\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{2a}{5}, f_4\left(\frac{3a}{8}\right) = \frac{a}{2}, f_4\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2a}{3}, f_4\left(\frac{5a}{8}\right) = \frac{10a}{13}, f_4\left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{6a}{7} \text{ y } f_4\left(\frac{7a}{8}\right) = \frac{14a}{15}.$$

Debido a que todo número natural m se puede escribir como $m = n + 2^r$, donde $0 \leq n < 2^r$ se tiene, mediante este procedimiento que el lado BC se puede dividir en cualquier número de partes iguales.

3.6 EL ÁREA DEL TRAPEZIO

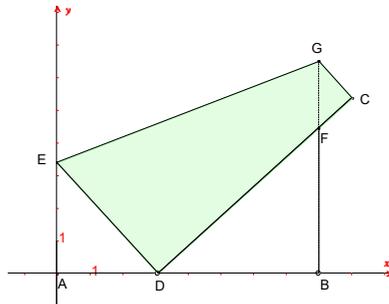


Figura 7. Área del trapecio como aplicación del Primer Teorema de Haga

El trapecio $\square EDCG$ (Figura 7) determina la función de área $a(\square EDCG) = \frac{x^2 - ax + a^2}{2}$ que es una parábola con vértice en el punto $P\left(\frac{a}{2}, \frac{3a^2}{8}\right)$, y de hecho, el mínimo valor del área determinada por este cuadrilátero aparece cuando $x = \frac{a}{2}$. El foco de esta parábola está en el punto $P\left(\frac{a}{2}, \frac{3a^2 + 4}{8}\right)$ y su directriz es la recta $y = \frac{3a^2 - 4}{8}$.

Resulta claro que una construcción simple, nacida de la papiroflexia, simulada en una aplicación de geometría dinámica, ha permitido establecer en este caso puntual, una infinidad de parábolas, al igual que una infinidad de funciones racionales. Al tener una fórmula de ubicación de los focos de las infinitas parábolas como $P\left(\frac{a}{2}, \frac{3a^2 + 4}{8}\right)$ resulta claro que el lugar geométrico descrito por estos puntos es una nueva parábola, cuya ecuación cartesiana es $3x^2 - 2y + 1 = 0$ (Figura 8).

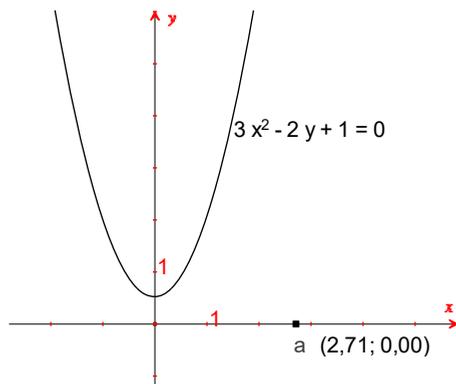


Figura 8. Parábola como aplicación del Primer Teorema de Haga

La ecuación $3x^2 - 2y + 1 = 0$ se lleva a la forma clásica $x^2 = 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$ con lo cual se determina que su foco es $F\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y su directriz, la recta $y = \frac{1}{3}$.

3.7 SOBRE EL LÍMITE

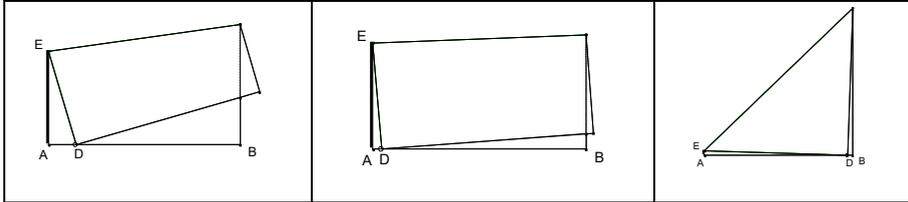
En cada una de las funciones, mediante la operación de arrastre del punto D , sobre el segmento AB , hacia cada uno de los valores extremos que se corresponden con los números reales 0 y a , se puede evidenciar el comportamiento de la función definida por cada uno de los lados de los tres triángulos semejantes.

Por ejemplo, al tomar $AE = f_2(x) = \frac{a^2 - x^2}{2a}$ del triángulo $\triangle EAD$ y como se aprecia en la Tabla 15 se evidencia que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 - x^2}{2a} = \frac{a}{2}$ mientras

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a^2 - x^2}{2a} = 0.$$

Tabla 15

Aplicación concepto de límite con el Primer Teorema de Haga

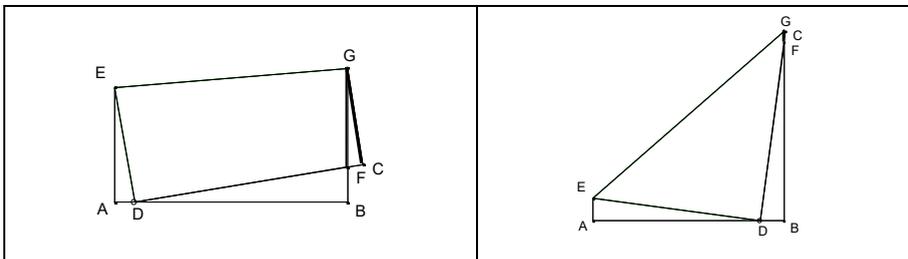


Al considerar las funciones $GC = f_8(x) = \frac{(a-x)^2}{2a}$ y $GF = f_9(x) = \frac{(a-x)(a^2+x^2)}{2a(a+x)}$ como se muestran en el gráfico anterior se evidencia que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(a-x)^2}{2a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(a-x)(a^2+x^2)}{2a(a+x)} = \frac{a}{2}$ mientras que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(a-x)^2}{2a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(a-x)(a^2+x^2)}{2a(a+x)} = 0$.

En la Tabla 16, se presentan otros ejemplos de límite relacionados con la aplicación del Primer Teorema de Haga.

Tabla 16

Otros ejemplos de límite como aplicación del Primer Teorema de Haga



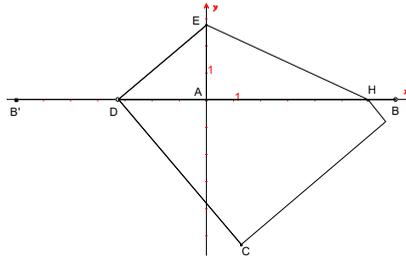


Figura 10. Extensión del Primer Teorema de Haga – Caso b

Cuando x pertenece al intervalo $(a(1 - \sqrt{2}), a)$ y la simulación se hace de manera precisa, el punto H es la intersección entre la mediatriz de los puntos D y el segmento AB que subyace en el eje x del cuadrado original, y de allí, se completa la construcción como se indica en la Figura 11.

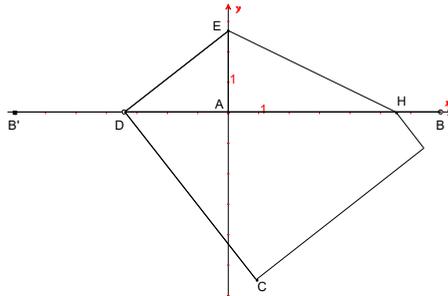


Figura 11. Extensión del Primer Teorema de Haga – Caso c

Al hacer que x borde lo negativo, como se ve en la Figura 11, se mantiene la semejanza entre los tres triángulos $\Delta EAD \sim \Delta GBH \sim \Delta DCH$ esto es así, puesto que los lados ED y GH son paralelos, por ser partes constitutivas de los lados opuestos de un cuadrado. Esta relación de semejanza entre los tres triángulos se mantiene hasta el momento en que perduran las nueve funciones determinadas por los triángulos mencionados cuando x pertenece al intervalo $[a(1 - \sqrt{2}), 0]$ las cuales se presentan en la Tabla 17.

Tabla 17

Funciones como expresiones algebraicas en aplicación del Primer Teorema de Haga: 10 a 18

$\triangle EAD$	$AD = f_{10}(x) = x$	$AE = f_{11}(x) = \frac{a^2 - x^2}{2a}$	$ED = f_{12}(x) = \frac{a^2 + x^2}{2a}$
$\triangle DCH$	$DC = f_{13}(x) = a$	$CH = f_{14}(x) = \frac{2a^2x}{x^2 - a^2}$	$DH = f_{15}(x) = \frac{a(a^2 + x^2)}{a^2 - x^2}$
$\triangle GBH$	$HB = f_{16}(x) = \frac{x^3 - 2ax^2 - a^2x}{a^2 - x^2}$	$GB = f_{17}(x) = -\frac{x^2 - 2ax - a^2}{2a}$	$GH = f_{18}(x) = \frac{(a^2 + x^2)(x^2 - 2ax - a^2)}{2a(x^2 - a^2)}$

Una forma de verificar que las funciones están bien definidas consiste en contrastar el lugar geométrico determinado por la expresión algebraica en su dominio y su función general que la absorbe. Por ejemplo, el segmento GB determina la función $f_{17}(x) = -\frac{x^2 - 2ax - a^2}{2a}$ definida en el intervalo $[a(1 - \sqrt{2}), a]$ que da lugar al lugar geométrico que se muestra en la Figura 12 para lo cual, se ha tomado $a = 7$.

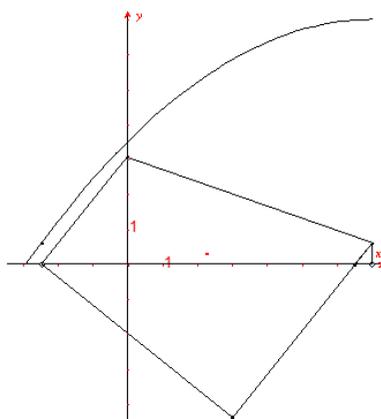


Figura 12. Función f_{17} de la Tabla 17

Al aplicar la expresión definida por $f_{17}(x)$, es claro que absorbe al sector $[a(1 - \sqrt{2}), a]$; la gráfica obtenida corresponde a la Figura 13.

De hecho, se puede aprovechar para establecer caminos cuyas expresiones algebraicas al ser simplificadas son drásticas. Por ejemplo, a partir de que $CH + HG + GB = |-a| = a$ al remplazar por los valores funcionales se encuentra que $\frac{2a^2x}{x^2-a^2} + \frac{(a^2+x^2)(x^2-2ax-a^2)}{2a(x^2-a^2)} - \frac{x^2-2ax-a^2}{2a} = a$; resultado que se puede aprovechar para desarrollar habilidades algebraicas.

Cuando x toma valores negativos en el intervalo $[a(1 - \sqrt{2}), a]$ la simulación permite la evidencia de mantener, no dos, sino tres triángulos semejantes mediante la prolongación del lado CB y de este modo se encuentra que $\triangle EAD \sim \triangle DCJ \sim \triangle HBJ$.

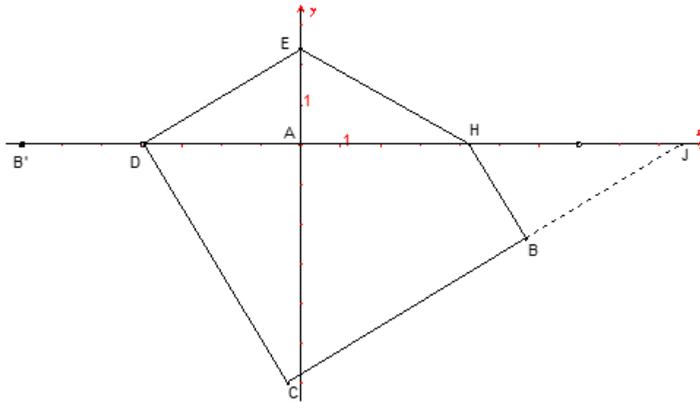


Figura 13. Función f_{17} de Tabla 17 con prolongación del lado CB

3.9 DE LAS TRIADAS PITAGÓRICAS

Cada uno de los triángulos rectángulos, a través de las expresiones algebraicas que definen las longitudes de sus lados, determinan Triadas Pitagóricas excepcionales.

Por ejemplo, en el intervalo $[-a, a(1 - \sqrt{2})]$ desde el triángulo ΔHBJ , se tiene la expresión $\left(\frac{2a^2x - ax^2 + a^3}{x^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{2a^2x - ax^2 + a^3}{2ax}\right)^2 = \left(\frac{(a^2 + x^2)(2a^2x - ax^2 + a^3)}{2ax(a^2 - x^2)}\right)^2$ la cual genera triadas pitagóricas con fracciones que, con pocas operaciones algebraicas, se reduce a la forma conocida: $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, la cual fue utilizada por el pueblo babilonio.

En el siguiente aparte, se demuestra que esta es la única forma de generar triadas pitagóricas de números naturales.

En efecto, sean a, b y c números naturales, tales que, $a^2 + b^2 = c^2$, con $mcd(a, b, c) = 1$. Se presentan varios casos.

Caso 1

Que a y b sean números pares, así $a = 2r$ y $b = 2s$, por esto $4(r^2 + s^2) = c^2$ de donde 4 es un divisor de c^2 , lo que a su vez infiere que c es un número par. Así las cosas, $mcd(a, b, c) \neq 1$, hecho que contradice la hipótesis. Así que no se puede presentar este caso.

Caso 2

Si a y b son números impares se tiene que $a = 2r + 1$ y $b = 2s + 1$ y en consecuencia se tiene que $a^2 + b^2 = 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = 2(2r^2 + 2r + 2s^2 + 2s + 1) = c^2$ y el hecho de que c^2 sea divisible por 2, implica que c también lo sea; esto es, $c = 2t$, y así, $c^2 = 4t^2$.

En definitiva, se tiene que $2(2r^2 + 2r + 2s^2 + 2s + 1) = 4t^2$ de donde $2(r^2 + r + s^2 + s) + 1 = 2t^2$, hecho absurdo, pues contraviene el principio de no contradicción pues una misma cantidad resulta par e impar a la vez. Por ello este caso tampoco puede darse.

Caso 3

Que a sea impar y b sea par. Se toma $a = 2m - 1$ y $b = 2n$, se infiere de inmediato que $a^2 + b^2 = 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 = 2(2m^2 - 2m + 2n^2) + 1$ que debe ser igual a c^2 . En este punto se ve que c^2 es un número impar.

Siendo $4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 = c^2$ como se busca, es fácil ver que $4n^2 + 4(m^2 - m) + 1 = c^2$, en consecuencia, para conformar el trinomio cuadrado perfecto, es necesario hacer que $n = m^2 - m$, obteniendo así $4n^2 + 4n + 1 = c^2$ o mejor $(2n + 1)^2 = c^2$; de donde, $c = 2n + 1$.

Ahora bien, $n = m^2 - m$ y por ello, $c = 2m^2 - 2m + 1 = m^2 + (m - 1)^2$. De igual modo, es claro que $a = m^2 - (m - 1)^2$ y $b = 2m(m - 1)$.

En conclusión, se ha demostrado que las Triadas Pitagóricas generatrices son de la forma $[m^2 - (m - 1)^2, 2m(m - 1), m^2 + (m - 1)^2]$ y solo de esa forma, lo que coincide con lo que conocían los babilonios en el siglo VI antes de nuestra era.

Algo más, la demostración establece en un punto que $c = 2n + 1$ y siendo $n = m(m - 1)$, es el producto de dos números naturales consecutivos, en consecuencia, es par, así, $n = 2t$ y por ello, $c = 4t + 1$ y c se ha dispuesto como la suma de cuadrados. Este hecho coincide con el resultado de la Teoría de Números, que aduce que, solo los primos de la forma $p = 4t + 1$ se pueden escribir como la suma de dos cuadrados perfectos.

CAPÍTULO 4.

RELACIÓN ENTRE EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO Y EL DE SUS MEDIANAS

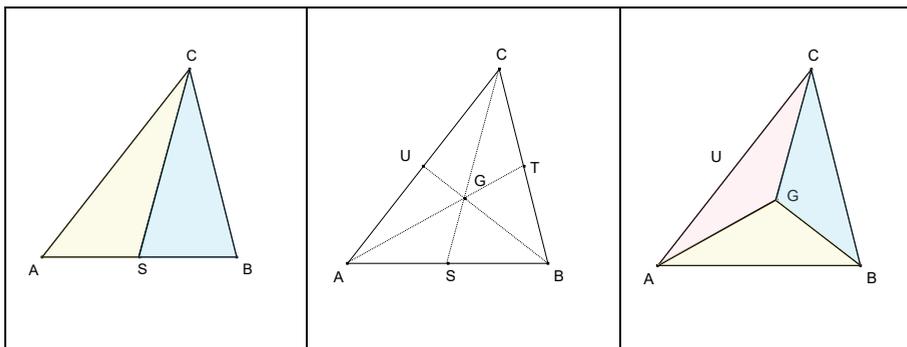
4.1 CONTEXTO

Una *mediana* en cualquier triángulo ABC es el segmento cuyos extremos son uno de los tres vértices del triángulo y el correspondiente punto medio del lado opuesto.

Existen otras líneas importantes, pero la mediana es sui géneris por el hecho de que subyace en el interior de todo triángulo.

Tabla 19

Medianas de un triángulo



Existen más particularidades y es posible que a futuro, algún amante de las matemáticas y de la geometría, descubra otra, tal como pasó en la época antigua griega, en la que, algún geómetra por ensayo, observó que las tres medianas de un triángulo concurrían en un punto; y lo mismo pasó con otros cuantos triángulos de diferente forma, hasta que se logra la demostración de que, en efecto, las tres medianas de cualquier triángulo son concurrentes. Ese punto de concurrencia se simboliza como G y se denomina Baricentro o Centro de Gravedad, el cual constituye el

punto de equilibrio de una lámina triangular uniforme de igual densidad. El Baricentro es uno de los puntos notables de cualquier triángulo y merece estudio especial, dadas las propiedades que tiene (Tabla 19).

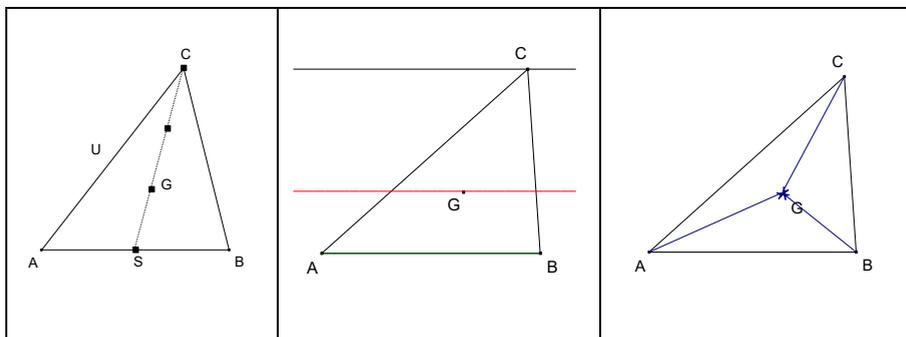
La escuela obliga al estudio de otros puntos notables, los cuatro sobresalientes son: Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro; pero la verdad, es que los académicos han encontrado más de treinta mil puntos notables para un triángulo hasta el momento y la lista sigue en ascenso. Es tanta la abundancia de puntos distinguidos de un triángulo que la gran mayoría carece de nombre. Esta circunstancia, de tanto punto notable, subraya el llamado que debe hacer la escuela hacia el estudio del triángulo.

Como dato de interés, la *Enciclopedia de Centros del Triángulo (ETC según su denominación original en inglés, Encyclopedia of Triangle Centers)* contiene información en internet sobre miles de tipos de puntos o "*centros*" asociados con la geometría de un *triángulo*. El sitio de internet es mantenido por su autor, el matemático estadounidense Clark Kimberling, profesor en la Universidad de Evansville.

En la primera gráfica de la Tabla 19, se ha representado algo que ocurre con toda mediana: S es el punto medio del lado AB , y justo, la mediana CS permite la división del triángulo original en dos regiones triangulares de igual área. Por su parte, en el centro se muestra la forma de calcular el Centro de Gravedad G de la figura, en la que es suficiente el trazo de dos de sus tres medianas. El centro de gravedad describe como lugar geométrico una recta para todos los triángulos que tienen la misma área, es decir, que subyacen entre dos paralelas. A la derecha se ha establecido el hecho de fácil demostración, y es que, el Centro de Gravedad G determina los triángulos ABG , BCG y CAG que tienen igual área.

Tabla 20

Medianas de un triángulo



Como si esto fuera poco, en toda mediana, la distancia del centro de gravedad a su vértice correspondiente es el doble que del mismo centro de gravedad al otro extremo, que es el punto medio del lado opuesto del vértice extremo de la mediana. En la

Tabla 20 se ha representado el caso en el que $\overline{GC} = 2\overline{GS}$ y también está representada en la gráfica a la derecha, la suma de los vectores AG , BG y CG , que es el vector nulo.

Se han descrito en este contexto, propiedades que emergen desde las medianas de un triángulo; algunas de ellas tienen un sustrato geométrico; otras, tienen características físicas por el dinamismo que arraigan y varias de ellas se vinculan con la aritmética.

En esta sección se estudia un resultado sobre el estudio de los triángulos, en especial de la mediana, que está relacionado con su área y en consecuencia, con la cantidad; esto es, con la aritmética.

La utilización de un software de Geometría Dinámica para estudiar aspectos de Geometría Euclidiana es un campo fértil de trabajo, en el cual, la experimentación, exploración y visualización juegan un papel de singular importancia. Dada la versatilidad de esta área no es extraño

encontrar o reencontrar, en Geometría Euclidiana, resultados que llaman la atención por su sencillez de formulación y demostración.

Como se ha dicho, aquí se presenta un resultado y su demostración, que relaciona el área de un triángulo con el área del triángulo que tiene por lados las longitudes de sus medianas.

Inicialmente se pensó que este resultado era nuevo, sin embargo, una fórmula para calcular el área de un triángulo en función de sus medianas puede verse en Mathworld (s.f.); de manera que, lo único que puede ser novedoso, si es que lo es, es la demostración que se indica en seguida.

4.2 SOBRE EL AUTOR

Saulo Mosquera López es Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño. Realizó estudios de especialización en "Enseñanza de la Matemática" en esta institución y de maestría en "Matemáticas" en la Universidad del Valle. Autor de textos y artículos relacionados con matemáticas y Educación Matemática. En 2021 publicó en la Editorial de la Universidad de Nariño el texto "Construcciones Geométricas con GeoGebra". Considera como objetos de interés los fenómenos que subyacen a la utilización de Software educativo, en particular GeoGebra, para promover el desarrollo de pensamiento matemático en el aula.

4.3 TEOREMA

Teorema. Si con las longitudes de las medianas de un triángulo dado, se construye un nuevo triángulo (triángulo mediano), el área de este triángulo mediano es $\frac{3}{4}$ del área del triángulo original.

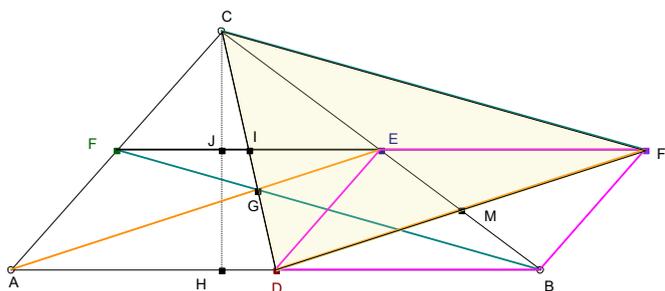


Figura 15. Área de un triángulo construido con las medianas de otro triángulo

Demostración

Sea ABC un triángulo con medianas AE , BF y CD . La demostración se divide en dos etapas (Figura 15); en la primera, se trata de la construcción del triángulo y de la verificación de que los lados del triángulo tienen como longitud, la longitud de las medianas del triángulo original; y la segunda, trata del cálculo del área del triángulo.

Primera etapa

Sea F' el simétrico de F respecto de E y consideramos el triángulo CDF' . Dado que los segmentos $\overline{EF'}$ y \overline{AD} son paralelos y congruentes, el cuadrilátero $EF'DA$ es un paralelogramo, por lo que los segmentos \overline{AE} y $\overline{DF'}$ son congruentes y paralelos.

Por otro lado, las diagonales, \overline{BC} y $\overline{FF'}$ del cuadrilátero $BFCF'$ se cortan en su punto medio E , por tanto, este cuadrilátero es un paralelogramo. Así que \overline{BF} y $\overline{CF'}$ son paralelos y congruentes, por lo cual, los lados del triángulo CDF' tienen como longitud la longitud de las medianas CD , AE y BF del triángulo ABC .

Segunda etapa

Consideramos el triángulo ABC con base BC y altura CH (Figura 15). Dado que D es punto medio de AB , I es punto medio de FE , por lo que $F'I$ es una mediana del triángulo CDF' y por tanto, $FI = IE = \frac{1}{3}IF'$.

Luego $IF' = FF' - FI = FF' - \frac{1}{3}IF'$, es decir $FF' = \frac{4}{3}IF'$, así que, $IF' = \frac{3}{4}FF'$, con lo que se tiene $IF' = \frac{3}{4}AB$.

Adicionalmente, nótese que J es punto medio de CH , por lo cual, se hace concluyente que:

$$\begin{aligned} Area(\Delta CDF') &= Area(\Delta CIF') + Area(\Delta IF'D) \\ &= \frac{1}{2}IF' \times CJ + \frac{1}{2}IF' \times JH \\ &= \frac{1}{2}IF' \times (CJ + JH) \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}AB \times CH \right) \\ &= \frac{3}{4}Area(\Delta ABC). \end{aligned}$$

Y con esto, termina la prueba.

4.3.1 Argumentación

Se destaca el resultado, como se expuso en su comienzo, por lo simple de su formulación en la que se emplean términos, objetos y conceptos conocidos y de uso recurrente y frecuente, a saber: triángulo, mediana, área, $\frac{3}{4}$ o su equivalente 75%. Pero, sobresale lo particular de su demostración que se fija en superponer algunos elementos para que fluyan principios, ideas y conceptos mayores, como el de congruencia,

paralelismo y otros objetos, como paralelogramos y más triángulos a los que se recurre de manera ordenada para establecer la veracidad del resultado. Subyace en la demostración, la habilidad de prever que la simetría central sobre un punto se convierte en una pieza fundamental de la argumentación.

En el fondo, lo particular de la demostración, radica en haber tenido la capacidad de ver de manera distinta, de visualizar, de observar con la razón, de mirar con una capacidad que va más allá de la percepción sensorial. Visualizar, es una de las tareas que debe entrenar y dinamizar la escuela y a la que todos los profesores deben obligarse a comprometer en sus actos pedagógicos. A la escuela no se debe asistir tan solo a aprender a sumar, restar, multiplicar, dividir; también, a medir, contar, tasar, conjeturar, visualizar, inferir, deducir, tareas todas que tienen un trasfondo matemático importante.

4.3.2 Desviación

Se tiene un resultado: el área de un triángulo que tiene como lados las longitudes de las medianas de un triángulo dado, es $\frac{3}{4}$ el área del triángulo original. ¿Qué se puede hacer con él, en qué se aplica?

Como todo resultado matemático, aparece primero a convivir en el mundo de las ideas, en ese mundo abstracto y etéreo en el que se configura sin que interese en primera instancia, el sentido práctico de uso material. Es posible que un arquitecto, por proponer un ejemplo, planee una obra fundamentada en este resultado, así como pintores han legado sus obras recreando el número de oro u otros que han construido iglesias con sustrato proporcional de la raíz cuadrada de dos.

Pero, la matemática es involutiva, se aplica en la misma matemática y desde allí pueden encontrarse resultados vinculantes con otras áreas.

Contrario a lo realizado en la demostración anterior, de ligar una nueva figura a una dada, es posible desligar y reacomodar de manera iterada el triángulo nuevo, cuya dependencia con el anterior esté referido a que se construye desde su mediana, tal y como aparece en la Figura 16, en la que se ha tomado como figura inicial, un triángulo equilátero, y proceder a indagar, ¿qué ocurre en el infinito? Y en este infinito, ¿Cuál es la suma de todas las áreas de esa constitución arquitectónica?

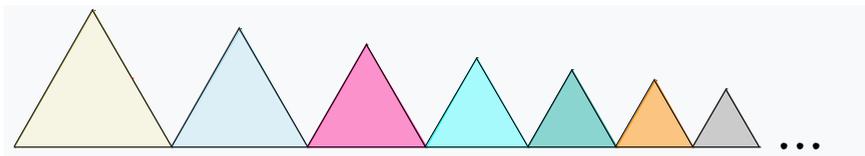


Figura 16. Sucesión de triángulos, cada uno tiene como área el 75% del área del anterior

De algún modo, se encuentra una sucesión de valores reales, que indican el valor del área de los triángulos $\{a_n\}$. Para este caso, si se llama al área del primer triángulo 1, es decir $a_1 = 1$, se encuentra la sucesión $(1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}, \dots)$ o mejor, la sucesión determinada por el término n -ésimo $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Una inspección visual de lo que ocurre con la secuencia de triángulos hace conjeturar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ y debido a eso, interrelacionando con las series numéricas, se evidencia, desde que $\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots$, que se está frente a una serie convergente, puesto que $-1 < |r| < 1$, o sea $-1 < \left|\frac{3}{4}\right| < 1$ con lo cual, la suma de la serie:

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots \text{ es igual a } S = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

Increíble, la suma infinita de las áreas de los triángulos de la Figura 16 es 4; esto es, debajo de esa escala multicolor de triángulos medianos, permanece oculto el número 4.

En términos didácticos es bueno preguntar, cuál es el área total de los triángulos de la Figura 16 si el triángulo inicial tiene área 2. En este caso, la caravana multicolor de triángulos tendría escondido en su seno, el número 8,

CAPÍTULO 5.

PRIMER TEOREMA DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

5.1 CONTEXTO

Mariano Mataix Lorda (Mataix, 1986), divulgador de las matemáticas, en el capítulo introductorio del libro *Historias de Matemáticas y Algunos Problemas* titulado: *La fuente griega de la historia de la matemática*, menciona una escala de gigantes sobre los hombros de quienes, por repetir lo proferido por Newton, se aupó Euclides para escribir su obra de los Elementos, mientras estaba al mando de la gran biblioteca de Alejandría bajo la sombra de Ptolomeo I. En esa lista aparece Thales, quien al parecer fue el primer griego en viajar a Egipto donde se había desarrollado la geometría por razones de agrimensura, referida a los desbordamientos del Nilo. Luego aparece Mamercos y la gran Hippias de Elis; enseguida está Pitágoras quien estudió los teoremas, por vez primera, en forma abstracta. En este recorrido histórico y progresivo sigue Anaxágoras de Clazomeno; tras él, viene Hipócrates de Quios célebre por las lúnulas y por ser el primero en escribir unos Elementos; y Teodoro de Cirene. Continúa Platón, gran defensor de la matemática y de la geometría, como lo atestiguan sus discursos. La lista se agranda con Leodamas de Thasos, Arquitas de Taranto y Theeto de Atenas, que agregaron a estas dos ramas de la ciencia, buena cantidad de teoremas, impregnándole características más científicas. Prosiguen Neoclides con su discípulo León, compositor de unos nuevos Elementos. Continúa la lista con Eudosio de Cnido, Amyclas de Heraclea, Menecmo e Hinostrato quienes perfeccionaron el conjunto de teoremas de la geometría. Sigue el desfile con Theudios de Magnesia, quien redactó unos nuevos Elementos, y Atheneo de Cyzique. Menciona a continuación a Hermotimo de Colofón

que aumentó las proposiciones de los Elementos y también estudió lugares geométricos, sigue Filippo de Medma (Mataix, 1986; pp. 15-21).

Y por fin, en este relato, aparece Euclides, conocido como el autor de los Elementos, dando a cada uno de los conocimientos allí expresos demostraciones irrefutables, siendo que los geómetras anteriores no habían logrado el rigor que se requería. Euclides propone un Sistema Axiomático regio, basado en términos primitivos, términos secundarios, definiciones, axiomas y postulados, que se dinamizan bajo el motor inferencial de la lógica aristotélica. Así, propone un modelo riguroso, en el que, año tras año, el volumen de teoremas aumenta de forma generosa.

Mataix aduce que el historiador francés Tannery en su obra Historia de la Geometría Griega, escribe, refiriéndose a la magna obra de los Elementos de Euclides y a su autor:

“Muchas cosas, verdaderamente, parecen ofrecer la verdad y deducirse de los principios de la ciencia, pero se separan de estos principios hacia el error y engañan a los espíritus superficiales. Euclides ha dado también los procedimientos que emplea la inteligencia clarividente, y gracias a los cuales es posible ejercitar a los debutantes en el estudio de la Geometría, para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores. En el escrito que tituló Ψ ενδραγμα, en el que ha realizado este trabajo, es donde enumeró separadamente, y en orden, los diversos géneros de falsos razonamientos, ejercitando para cada uno nuestra inteligencia mediante teoremas de todo tipo, donde opone lo verdadero a lo falso, y donde hace concordar con la prueba, la refutación del error. Así, este libro tiene por objeto el ejercicio y la purificación de la inteligencia, mientras que, los Elementos, son

una guía segura y completa para la contemplación científica de los objetos de la Geometría” (Mataix, 1986; pp. 15-21).

De otro lado, es útil mencionar que la más importante de las operaciones aritméticas es la división; por ella se reconoce un número par o un impar, incluso a los números primos que revelan la estructura de cualquier número compuesto. Establecida esta importancia, aparece el interés de buscar en el texto magno de Geometría, que es la obra *Los Elementos* de Euclides, la forma que enseñaría de dividir un segmento en varias partes iguales, pero solo se encuentra referencia a dividir magnitudes en dos. Problemas como calcular el punto medio o trazar la bisectriz de un ángulo o trazar las medianas de un triángulo, se abordan con naturalidad y a fondo. En este sentido, la *Proposición 9 del Libro I* indica la forma de dividir un ángulo rectilíneo en dos partes iguales y justo la *Proposición 10*, enseña la manera de partir un segmento en dos partes iguales.

Pero no enseña a trisecar un segmento o un ángulo. La inquietud pierde su valor con este capítulo en donde se demuestra que, para dividir un segmento en cualquier número de partes, es suficiente haber aprendido a dividirlo en dos, lo que realza el valor del *Primer Teorema de los Elementos*. Nadie sabe si el mismo Euclides se dio cuenta de este hecho fundamental y monumental que compromete al infinito potencial: si puedo dividirlo en dos, puedo dividirlo en cualquier cantidad de partes iguales, por grande que sea tal cantidad y en consecuencia no se hace pertinente enseñar tal operación, ¿para qué?, si todo funciona a partir de la división por dos.

Un estudiante de geometría que no haya perdido su capacidad de asombro, debe sorprenderse con lo asegurado, pues, el primer teorema de los elementos, acaso el más simple entre todos, tiene un alcance ilimitado por

forma y por número. Por forma, en el sentido de que cualquier segmento, sin importar su longitud, pueden partirse en dos secciones de igual longitud: todos los segmentos del mundo pueden bisecarse con el ardid del triángulo equilátero; y por número, dado que un segmento cualquiera puede fraccionarse en un número arbitrario de partes iguales con solo tener la cantidad deseada descompuesta en dos sumandos, es decir, tener bajo la manga dos pasos anteriores. El que el método se impregne de un carácter aditivo, es sorprendente y asombroso.

Con esto, se demuestra que la geometría, las matemáticas y en general, las ciencias, contienen hechos sencillos, fundamentales y en su esencia, arrastran y contienen eventos sorprendivos, llamativos y fáciles de entender y cohesionar.

Aquí se muestra un procedimiento iterativo que elabora la partición de un segmento en longitudes iguales, encausándolo dentro del método de demostración denominado inducción matemática. El método se afina en el *Teorema I* de Los Elementos de Euclides, teorema de tipo constructivo que construye un triángulo equilátero a partir de un segmento dado, cuya solución se soporta en las cualidades que tienen las figuras geométricas, en este caso, las de tener tres lados iguales entre sí. En el primer paso, se divide un segmento en dos partes iguales, recurriendo a la construcción orientada de dos triángulos equiláteros y aplicando el procedimiento señalado por Euclides en la *Proposición 10*.

5.2. SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA

De Euclides, se sabe poco, si se compara con su obra *Elementos*; vivió en el reinado del rey egipcio Ptolomeo I, quien lo convenció de ponerse al mando de la gran biblioteca de Alejandría. Como anécdota, se cuenta que

Ptolomeo I le inquirió a Euclides, si no tenía para la Geometría un camino más corto para su aprendizaje, a lo que, el autor de los Elementos le respondió: “No hay en Geometría un camino expreso para los reyes”. Euclides fue platónico y bastante ligado a su filosofía, al punto que, en el libro XIII, en sus últimas proposiciones, se dedica a la construcción de los llamados sólidos platónicos (Euclides, 1991; pp. 1-5).

De Euclides también se conocen otras obras de contenido matemático como Óptica, Catróptica y el libro Sobre las divisiones. Sin embargo, *Los Elementos* es la reina de reinas entre sus obras, por el orden que su autor establece en ellas. Por ejemplo, el Libro I es un esfuerzo titánico y bien elaborado, paso a paso, sin pausa y con ritmo, hasta tener la absoluta posibilidad y seguridad de poder demostrar la Proposición 47 que es el llamado Teorema de Pitágoras. En esta obra, la elección que hace Euclides de los teoremas, los problemas tomados como elementos y la variedad de los razonamientos, hacen de su obra un ejemplo irrefutable, aunque controvertido y criticado. Con seguridad, en el momento histórico de su escritura, existían más resultados de los que Euclides escogió para su libro. Muchos de los teoremas son los recíprocos de otros, pero, su obra es una red que se sostiene de una muy entrañable y fuerte sutileza. Un legado para la humanidad.

5.3. EL TEOREMA

De la magna obra (Euclides, 1991) que viene impregnada de notas, que la hacen un excelente compendio didáctico, se ha tomado el Teorema I, de manera fiel.

Proposición I.

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Demostración

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

Descríbase con el centro A y la distancia AB , el círculo BPD y con el centro B y la distancia BA , descríbase, a su vez el círculo BPE y a partir del punto P , donde los círculos se cortan entre sí, trácese las rectas PA y PB hasta los puntos A, B (Figura 17) (Euclides, 1991; pp. 201-202).

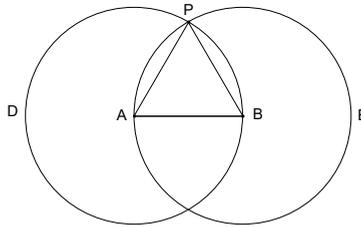


Figura 17. Construcción de un triángulo equilátero

Y puesto que el punto A es el centro del círculo PDB , AP es igual a AB , por definición 15 (Definición de círculo); puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo PAE , BP es igual a BA (Definición 15); pero se ha demostrado que PA es igual a AB , por tanto, cada una de las rectas PA , PB es igual a AB . Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí, por tanto, PA es también igual a PB ; luego, PA , AB y BP son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ABP es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB , que es lo que había que hacer.

5.3.1 Argumentación

La sutileza de la demostración irrumpe la belleza del resultado. Si bien, el teorema en sí mismo es un ejemplo constructivo cuya demostración cabe en un renglón, es al mismo tiempo el encadenamiento del modo de argumentación Modus Ponendo Ponens o modo de afirmar afirmando que en su conjunto arma un silogismo hipotético elemental. Es la prueba clara de que lo bello, también cabe en lo simple.

En el entretejido de la lectura de *Los Elementos*, en varias ocasiones se acude a este teorema para demostrar otros hechos constructivos, como el trazo de la bisectriz de un ángulo o la división de un segmento en dos partes de igual longitud. Por lo visto, este primer teorema tiene un fin práctico, es decir, una respuesta positiva a la pregunta necia: ¿Y esto para qué sirve?

5.3.2 Desviación

A la pregunta esbozada en el párrafo anterior, se le puede anexar como respuesta que, este primer teorema también sirve para dividir un segmento en la cantidad de partes iguales que se requiera.

El teorema de Thales (Eves, 1985) proporciona el fundamento teórico para dividir geoméricamente un segmento dado en cierto número de partes iguales y es posible utilizar un software de carácter geométrico, como GeoGebra, para implementar dicho método. En este aplicativo es suficiente establecer una orden de carácter aritmético-geométrico, para realizar este trabajo, definiendo previamente el segmento \overline{AB} a partir de dos puntos A y B y a continuación, utilizar la instrucción

$$\text{secuencia} \left(A + \frac{k * (B - A)}{n}, k, 1, n - 1 \right).$$

expresión en la cual, n representa el número de partes en la cual se quiere dividir el segmento.

En un intento diferente por contribuir a incentivar el estudio de la relación existente entre la geometría y la aritmética, se presenta un método para dividir un segmento en partes iguales, cuyo soporte teórico fundamental está en el Teorema I de Los Elementos de Euclides (Eves, 1985: 101 105) que estudia el problema de la construcción de un triángulo equilátero a partir de un segmento. De manera explícita, se estudia un procedimiento iterativo sobre la partición de un segmento en longitudes iguales, encausándolo en el método de demostración de *inducción matemática*. El primer paso consiste en dividir un segmento en dos partes iguales, recurriendo a la construcción orientada de triángulos equiláteros.

5.3.2.1 Procedimiento iterativo centrado en triángulos equiláteros

Es abundante la literatura sobre resultados relacionados con la más simple de las figuras en geometría como lo es el triángulo, en particular, del triángulo equilátero. Por ejemplo, el *Teorema de Napoleón* (Coxeter, 1984; pp. 45-46), asegura que, dado un triángulo cualquiera, si sobre cada lado y hacia el exterior del triángulo inicial se construyen triángulos equiláteros, los centroides de ellos, es decir, los puntos de corte de sus medianas, son los vértices de un nuevo triángulo equilátero.

Teorema

Si se divide un segmento \overline{AB} en n partes iguales y sobre cada una de ellas y del mismo lado se construyen n triángulos equiláteros de lado $\frac{\overline{AB}}{n}$, mientras que del otro lado se construye un triángulo equilátero de lado \overline{AB} y se unen el vértice externo de este triángulo con los n vértices

externos de los n triángulos mediante segmentos, estos definen n puntos de intersección con \overline{AB} , que lo dividen en $n + 1$ segmentos iguales.

Demostración

Paso 1.

Para $n = 1$ se considera un segmento \overline{AB} y se lo divide en dos segmentos congruentes. La Figura 17 es el vestigio de la división de un segmento en dos partes iguales y se acerca a la solución presentada por Euclides; tal construcción se constituye en el paso 1 de la demostración.

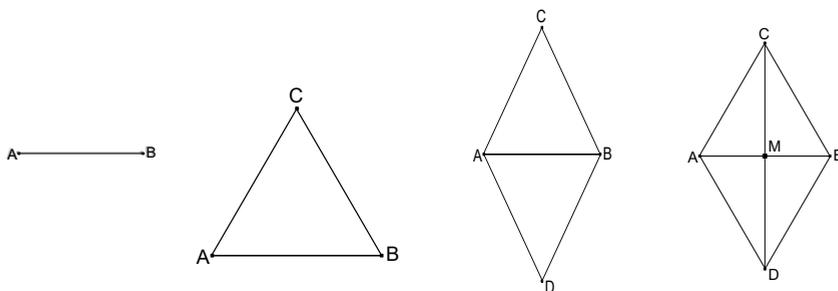


Figura 18. División de un segmento en dos partes iguales

De la construcción es claro que el segmento \overline{AB} queda dividido en dos partes iguales (Figura 18).

Para indicar cómo actúa el procedimiento iterativo, a continuación, se procede a trisecar un segmento, tomando el caso adicional $n = 2$.

Dado que ya es posible dividir un segmento en dos partes iguales se utiliza tal posibilidad para construir, de un lado, un triángulo equilátero, en el cual, uno de los lados es el segmento \overline{AB} y en el otro semiplano, determinado por la recta \overline{AB} dos triángulos equiláteros de lados \overline{AM} y \overline{MB}

donde M es el punto medio de \overline{AB} . El resto es trazar los segmentos que unen los vértices externos al segmento original, tal y como reza el teorema. Este proceso se ilustra en la Figura 19.

En el gráfico a la derecha (Figura 19) se tiene de la semejanza de los triángulos AFE y MFC que $\overline{AF} = 2\overline{FM}$, es decir $\overline{AF} = 2\overline{FM} = \frac{2}{3}\overline{AM}$ y por ello $\overline{FM} = \frac{1}{3}\overline{AM}$, pero $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, por lo que $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ y de la simetría de la construcción se deduce que $\overline{FM} = \overline{MG}$ y $\overline{AF} = \overline{GB}$.

De la primera igualdad se sigue $\overline{FG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ con lo que se ha demostrado que F y G trisecan el segmento \overline{AB} .

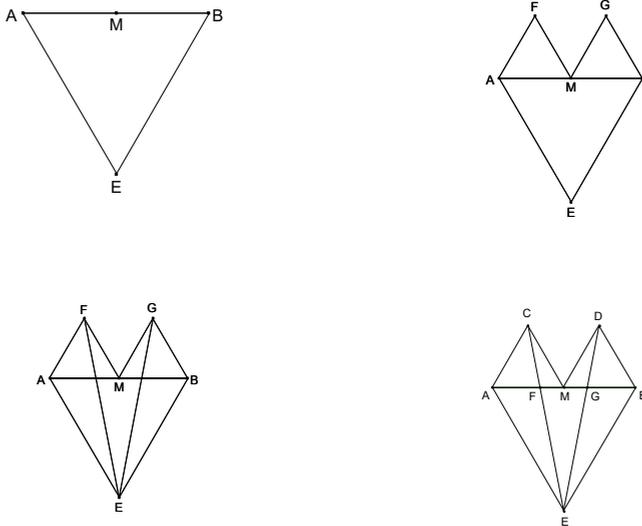


Figura 19. Tisección efectiva de un segmento

Paso 2.

Suponemos que para cualquier n en los naturales todo segmento se puede subdividir en n partes iguales, y en el Paso 3 demostramos que se puede

partir en $n + 1$ secciones de igual longitud. De este modo se parte del supuesto que el punto F de la Figura 20, divide al segmento \overline{AB} en n

partes iguales, y así $\overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{n}$.

Paso 3.

El Paso 3 es el de generalización y puede verse que teniendo el segmento \overline{AB} dividido en n partes iguales, la reproducción iterativa de la construcción muestra lo siguiente.

De la semejanza de triángulos DEF y CEA , habida cuenta que $\overline{AC} = n\overline{DF}$ se tiene que $\overline{AE} = n\overline{EF}$ o lo que es mejor $\overline{EF} = \frac{1}{n}\overline{AE}$. Además $\overline{AF} = \frac{1}{n}\overline{AB}$ por el supuesto el paso 2 y como $\overline{AE} = \overline{AF} - \overline{EF}$ se consigue de inmediato que $\overline{AE} = \frac{1}{n}\overline{AB} - \frac{1}{n}\overline{AE}$, así $\overline{AE} + \frac{1}{n}\overline{AE} = \frac{1}{n}\overline{AB}$ o si se quiere $\left(\frac{n+1}{n}\right)\overline{AE} = \frac{1}{n}\overline{AB}$ de donde finalmente se halla que $\overline{AE} = \frac{1}{n+1}\overline{AB}$ siendo A un extremo del segmento dado.

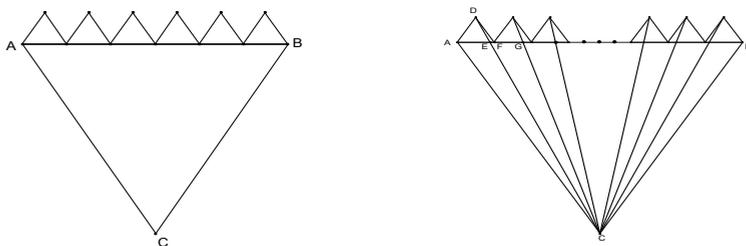


Figura 20. El caso general de la división de un segmento

Con esto se ha demostrado que todos los segmentos de la división $\overline{AE} = \overline{EG} = \dots$, tienen igual longitud y por ello el método iterativo funciona para todo n en el conjunto de los naturales.

Con esto, termina la prueba.

Como ilustración, la Figura 21 presenta la aplicación del teorema para dividir un segmento \overline{AB} en cinco partes iguales.

Uno de los detalles que se advierte en el procedimiento gráfico, es la simetría que existe en la construcción, de la que se desprende la igualdad de los subsegmentos que se ubican en los extremos A y B de cada segmento.

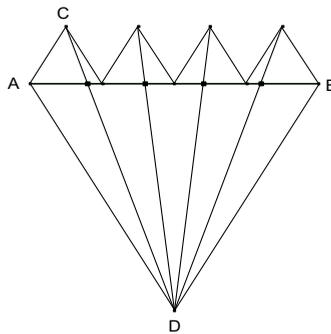


Figura 21. División de un segmento en cinco partes iguales

5.3.2.2 El Carácter aditivo del procedimiento

El procedimiento explicado posee un carácter de estructura aditiva, de modo que, al disponer de las formas de particionar \overline{AB} , por ejemplo, en 5 y 7 secciones iguales, y a lado y lado se construyen los cinco triángulos de igual lado, y del otro los siete, se unen los vértices no pertenecientes al segmento original, de modo que no se crucen con lado alguno de los triángulos, se obtiene la división de \overline{AB} en 12 partes iguales.

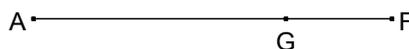


Figura 22. G siempre está entre A y F

El carácter aditivo de este procedimiento de partición, se demuestra en cada caso, por semejanza de triángulos y se fundamenta en la regla de proporción de un segmento, la cual, asegura que siempre que G esté entre A y F y $\overline{AG} = \frac{m}{n} \overline{GF}$, se tiene $\overline{AG} = \frac{m}{m+n} \overline{AF}$; hecho que se utilizó en la demostración del teorema anterior (Figura 23).

Siguiendo el procedimiento constructivo, si de un lado de \overline{AB} se han construido m triángulos equiláteros de lado $\frac{\overline{AB}}{m}$ y del otro lado n triángulos equiláteros congruentes de lado $\frac{\overline{AB}}{n}$ los segmentos que unen los vértices externos de los mismos, sin que corten lados de tales triángulos, cortan a \overline{AB} en $n + m - 1$ puntos que lo dividen en $n + m$ sectores de igual longitud (Figura 23).

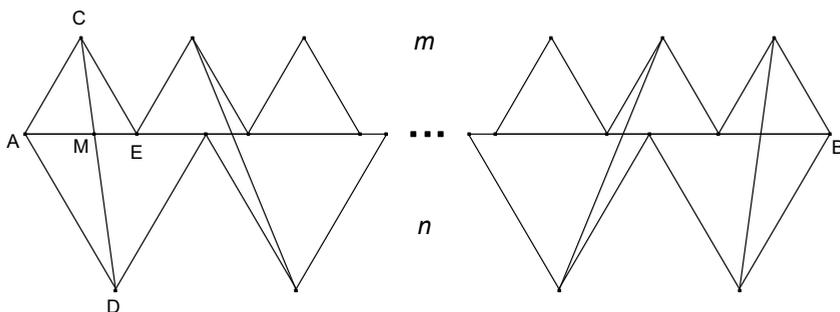


Figura 23. División de un segmento en $m + n$ partes iguales

Demostramos únicamente que la primera subdivisión tiene longitud $\frac{1}{m+n} \overline{AB}$.

En efecto: de la semejanza de los triángulos AMD y EMC se tiene $\overline{AM} = \frac{m}{n} \overline{ME}$ y por ello, $\overline{AM} = \frac{m}{m+n} \overline{AE}$; pero resulta que $\overline{AE} = \frac{1}{m} \overline{AB}$ y en consecuencia $\overline{AM} = \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{m} \overline{AB}$, esto es, $\overline{AM} = \frac{1}{m+n} \overline{AB}$. Lo cual, asegura que \overline{AB} queda dividido en $m + n$ sectores de igual longitud.

La prueba de que las otras subdivisiones conseguidas, en concordancia con el procedimiento descrito, tienen igual longitud, procede por semejanza de triángulos y recurre con frecuencia a la simetría de la construcción. A continuación, se proponen algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

Aquí se muestra la partición de un segmento \overline{AB} en cinco partes desde su bisección y trisección (Figura 24).

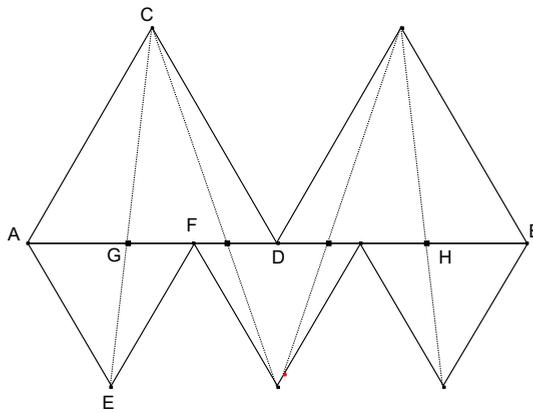


Figura 24. División de un segmento en cinco partes, a partir de su bisección y trisección

Es suficiente ver que los triángulos AGC y FGE son semejantes ya que los ángulos en A y F miden 60° y los ángulos en G son opuestos por el vértice y puesto que los tres ángulos son congruentes, se sigue que los triángulos son semejantes y en consecuencia, tienen sus lados proporcionales.

Así, $\frac{\overline{AG}}{\overline{GF}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{3}} = \frac{3}{2}$ esto es $\overline{AG} = \frac{3}{2}\overline{GF}$ y por lo explicado $\overline{AG} = \frac{3}{5}\overline{AF}$ y puesto que este último segmento es la tercera parte del original, se encuentra que $\overline{AG} = \frac{3}{5} * \frac{1}{3}\overline{AF} = \frac{1}{5}\overline{AB}$.

Ahora bien, el método de inducción matemática asevera de manera retrospectiva que, se puede dividir un segmento en n partes de igual longitud, puesto que ya se ha dividido en $n - 1$ partes iguales. En consideración a esto, el segmento \overline{GB} se divide en cuatro partes iguales, una de las cuales, \overline{HB} es igual, por simetría, con \overline{AG} . La consecuencia general está en que se ha dividido el segmento \overline{AB} en cinco partes iguales.

Por otro lado, la construcción de triángulos equiláteros, con un lado sobre el segmento \overline{AB} es un entramado de segmentos paralelos; los vértices que no están en este segmento se ubican en sendas paralelas, a lado y lado de este y en consecuencia, al unir los vértices de la manera constructiva indicada, se convierten en secantes del segmento \overline{AB} que definen una partición en subsegmentos de igual longitud.

El carácter aditivo del procedimiento de partición de un segmento \overline{AB} en subsegmentos iguales, permite recurrir a la descomposición de un número para ejecutar la tarea con efectividad, hecho que se puede hacer de $\left[\frac{n}{2}\right]$ (parte entera) maneras diferentes, si se quiere partir \overline{AB} en n partes iguales, recurriendo a la construcción repetitiva de triángulos equiláteros. En la Figura 25 se presenta la partición en ocho desde la descomposición $8 = 6 + 2$.

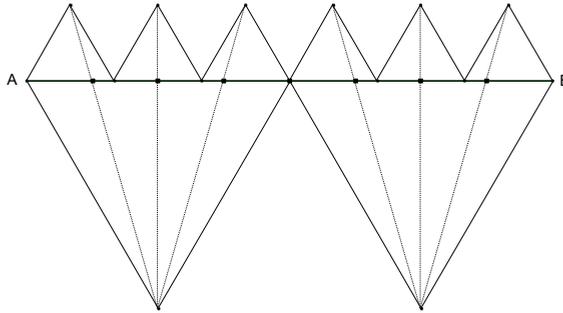


Figura 25. La división de un segmento en ocho partes a partir de la descomposición $8=6+2$

En este caso, es recomendable partir el número, en lo posible, en dos pares. La construcción anterior podría utilizar la partición de un segmento en cuatro partes, para lograr la división de \overline{AB} en ocho partes iguales. A continuación, se presenta la división en doce partes, recurriendo a la descomposición $12 = 8 + 4$ (Figura 26).

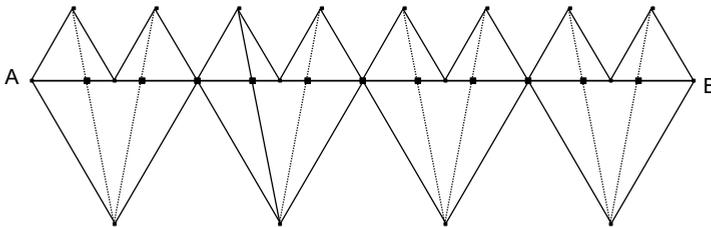


Figura 26. La división de un segmento en doce partes a partir de la descomposición $12=8+4$

De hecho, también es posible tomar el arreglo del doce como $12 = 10 + 2$ que se indica en la figura 10 (Figura 27).

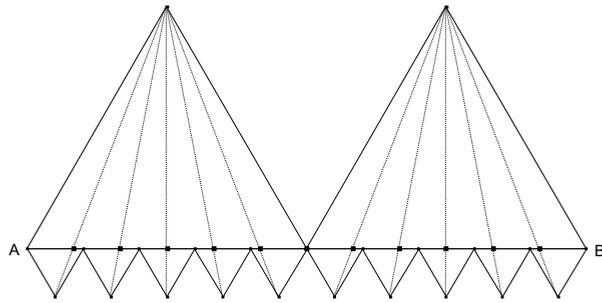


Figura 27. La división de un segmento en doce partes a partir de la descomposición $12=2+10$

Esta forma de dividir un segmento en partes iguales, hace notar el vínculo existente entre la geometría y la aritmética.

Ejemplo 2

Como se ha mencionado, para demostrar que cada subsegmento posee la medida requerida, necesita de la semejanza de triángulos. A continuación, se presenta una demostración, aludiendo a la partición en once como $11 = 3 + 8$, para el subsegmento que sigue al inicial (Figura 28).

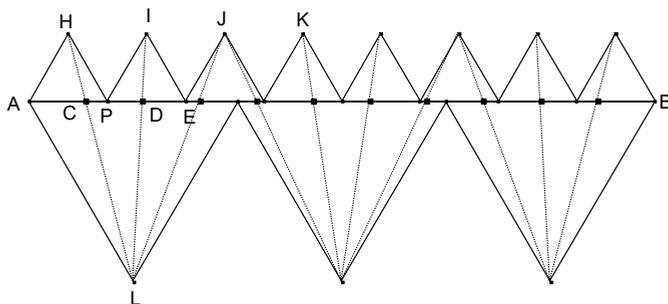


Figura 28. La división de un segmento en once partes a partir de la descomposición $11=3+8$

De la semejanza de los triángulos ACL y PCH se tiene $\overline{AC} = \frac{8}{3}\overline{CP}$ y así $\overline{AC} = \frac{8}{11}\overline{AP}$ y por ello, $\overline{CP} = \frac{3}{8}\overline{AP}$, de donde se obtiene que $\overline{CP} = \frac{3}{11} * \frac{1}{8}\overline{AB} = \frac{3}{88}\overline{AB}$.

De la semejanza de los triángulos PDI y ZDL se sigue $\overline{PD} = \frac{3}{8}\overline{DZ}$ y por tanto $\overline{PD} = \frac{3}{11}\overline{PZ}$; y siendo $\overline{PZ} = \overline{AZ} - \overline{AP}$ se deduce que $\overline{PD} = \frac{3}{11}(\overline{AZ} - \overline{AP}) = \frac{3}{11}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}\right)\overline{AB}$, o mejor, $\overline{PD} = \frac{5}{88}\overline{AB}$. Por esta razón y dado que, $\overline{CD} = \overline{CP} + \overline{PD}$, con los debidos remplazos, se observa, cómo efectivamente, $\overline{CD} = \frac{3}{88}\overline{AB} + \frac{5}{88}\overline{AB} = \frac{1}{11}\overline{AB}$.

Razonamientos similares se realizan para verificar que cada partición corresponde a la onceava parte del segmento \overline{AB} .

Obsérvese lo interesante que resulta tomar semejanzas adecuadas entre los triángulos y recurrir a las sumas y restas de segmentos contenidos en el original.

CAPÍTULO 6.

LA IRRACIONALIDAD DE RAÍZ CUADRADA DE 2

6.1 CONTEXTO

¿Qué tienen en común los símbolos e , π , $\sqrt{163}$, 1 , 0 ? Si, representan números y por curioso que resulte, cada combinación de ellos, también representa un número. Además, con tan pocos símbolos y los de las operaciones básicas, es posible representar una infinitud de ellos; algunos, con trazas epistemológicas en su existencia (Fresán & Rué, 2013; pp. 5-7).

El número cero (0) representa la nada y en la operatoria aritmética, juega un importante papel; lo mismo el uno (1), número que da origen a la secuencia infinita de los números naturales, trampolín para la construcción de los números enteros que son la base de los racionales y por ende, de los irracionales que hacen de los reales un mundo completo y continuo.

$\sqrt{163}$ es similar a $\sqrt{2}$ y constituyen ejemplos de los miembros de la gran familia de los números irracionales algebraicos al ser raíces de ecuaciones con coeficientes enteros. Este conjunto de irracionales algebraicos es numerable; contrario a los irracionales trascendentes, como e y π que tienen un origen distinto y configuran un conjunto innumerable.

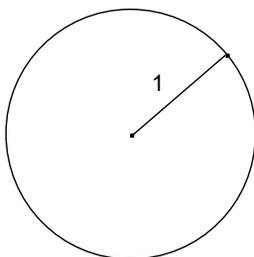


Figura 29. Área de un círculo de radio 1 igual a π

El número π está ligado a la circunferencia, y su trascendencia fue demostrada en 1822 por el matemático alemán Ferdinand Von Lindemann; su origen está referido a la razón entre la longitud del arco de una circunferencia y la longitud de su diámetro (Figura 29).

El número e tiene connotación diferente, está ligado a las series, en variados casos como en e , los números trascendentes resultan de expresiones como la suma de infinitos sumandos tal como ocurre con el trascendente $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} = 0,2100010000000000000000001000 \dots$ número configurado de modo que la distancia entre dos unos consecutivos sigue el orden factorial de constitución de ceros. Pero, no siempre una serie convergente define un trascendente, como en el caso de $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ que, en virtud de la propiedad asociativa de la adición, se escribe $S = 1 + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)$, es decir, $S = 1 + \frac{1}{2}S$ y por ello $S = 2$ y así, S es un número natural.

La última serie, arriba representada, es una manera distinta y poco corriente de representar al natural 2. Sin embargo, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$, cuya aproximación decimal es

2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574
966967627724076630353547594571382178525166427... es uno de los infinitos reales trascendentes y tiene el privilegio de ser un número con mayor uso en el mundo de la ciencia.

En el texto de los matemáticos españoles, Javier Fresán y Juanjo Rué (Fresán & Rue, 2013), *Qué sabemos de los números trascendentes*, aparece el excelente relato de la combinación $e^{\pi\sqrt{163}}$ conocida como la constante de Ramanujan, en honor al célebre matemático hindú Srinivasa

Ramanujan Alyengar. Con este número, el gran divulgador matemático norteamericano Martin Gardner publicó en la revista *Scientific American* de abril de 1975, asegurando como broma que esta constante era un número entero. Nada tan lejos de la “realidad”; pues se trata de un número trascendente, a pesar de estar demasiado cerca del entero 262537412640768744, como lo determinó por primera vez, el matemático francés Charles Hermite en 1859 (Fresán & Rué, 2013: p. 6).

Se puede ahondar este galimatías histórico sobre la constitución de los números reales \mathbb{R} , aduciendo que, seleccionado al azar uno de tales números, lo más probable es que resulte ser un real trascendente. Pero no es la intención. El propósito es argumentar sobre la belleza de la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. En tal sentido, es necesario replicar que los antiguos griegos no aceptaban en su aritmética intuitivamente geométrica, la existencia de los números negativos y menos la del cero. Sin embargo, sus procesos matemáticos deductivos dieron con el descubrimiento de una nueva clase de números, los irracionales, hallazgo que se convirtió en escollo para el cabal entendimiento de sus teorías.

Clawson (1999: 95), en su texto *Misterios Matemáticos*, asegura que, para los pitagóricos los números eran los átomos que constituían el universo; en su principio, existía la Unidad (el uno), una mónada “Limitada” y sin extensión, rodeada de otra mónada ilimitada que era el principio de la extensión y del espacio. Los números eran el vehículo para interpretar el mundo.

La característica sobresaliente de todo era la armonía representada en relaciones correctas de los números enteros. Así, los principios geométricos de las figuras se establecían por las subsecuentes estructuras aritméticas que las relacionaban. El ejemplo típico es el del

triángulo rectángulo de lados (3, 4, 5), de donde emerge una infinitud de triángulos semejantes de lados enteros, satisfaciendo la relación pitagórica más famosa, utilizada con anticipación por egipcios y babilonios: $a^2 + b^2 = c^2$, en este caso $3^2 + 4^2 = 5^2$ (Figura 30) y que se estudia en detalle en el Capítulo 9.

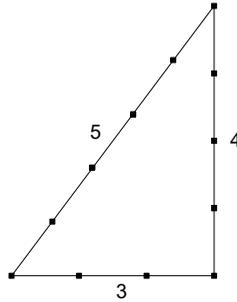


Figura 30. Triángulo rectángulo de lados en proporción 3:4:5

Al parecer, el obstinado de Hipaso de Metaponto debió preguntarse: ¿Y si se toma un cuadrado de lado 1, ¿cuál es la longitud de su diagonal? Buscando la respuesta, demostraría para todos los cuadrados de lados igual a la unidad que de ninguna manera su diagonal podía ser una fracción, un número racional (Figura 31).

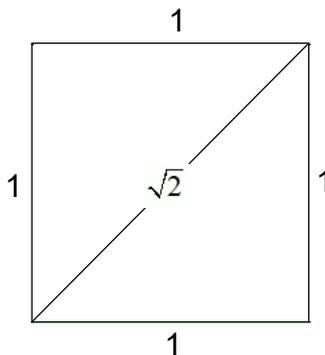


Figura 31. Cuadrado de lados iguales a la unidad y diagonal $\sqrt{2}$

6.2 SOBRE EL AUTOR DEL TEOREMA

A todos gustaría de manera vívida conocer los detalles históricos que se reflejan en la biografía de los hombres que interesan, sobre todo, los que han cambiado el rumbo académico de las teorías y de las ciencias y que al final, se convierten en el reflejo mental más cercano a la realidad que cada humano merece poseer.

Hipaso de Metaponto, en latín, Híppasos Metapontínos (siglo VI a.C), filósofo y matemático presocrático griego, miembro de la escuela Pitagórica, nacido en Metaponte; fue expulsado de la escuela pitagórica por demostrar la existencia de los números irracionales. Es considerado uno de los filósofos pitagóricos más antiguos. Existen diferentes versiones sobre su muerte, se dice que murió ahogado, defendiendo la ciencia, después de ser desterrado de la escuela pitagórica.

Hipaso, nació por el año 500 a.C. como miembro de la escuela pitagórica fundó el Grupo de los Acusmáticos, que él mismo dirigía, mientras el grupo de los matemáticos era dirigido por Pitágoras. No existen escritos de su parte, pero en su obra académica parece haber asegurado sobre la infinitud del universo, del que afirmaba que está en continuo movimiento.

A Hipaso se le tiene como uno de los pitagóricos más importantes de la época temprana, se sabe que construyó un dodecaedro, descubrió la inconmensurabilidad, siendo pionero de esta teoría que impide la comparación de algunas medidas y que también escribió una obra en contra de Pitágoras. Hipaso, probó la existencia de los números irracionales, rompiendo la regla del silencio o del secretismo de los pitagóricos. Esto al parecer habría hecho que los expulsaran de la escuela.

Al parecer, Hipaso fue maestro de Heráclito de Éfeso y en sus trabajos matemáticos importantes de relieve, aparece la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 y con ello, del descubrimiento del conjunto de los números irracionales, o al menos de su origen.

En el ámbito de la física, realizó estudios en teoría musical, acústica y resonancia. Se sabe que realizó experimentos alrededor de este orden de cosas, con discos de bronce de igual diámetro y distinto grosor, y que entre sus pensamientos arraigados estaba el de sostener que el fuego era la causa u origen de todas las cosas.

Los documentos más antiguos dan diferentes versiones de su muerte. Al parecer, murió durante un naufragio en circunstancias misteriosas. Algunas fuentes afirman que se suicidó como autocastigo y otros, como Jámblico, refieren que fue tirado al mar por haber descubierto y divulgado la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 (Wikipedia, s.f.).

6.3 TEOREMA

El descubrimiento de la raíz cuadrada de 2 como un número irracional, se atribuye al pitagórico Hípaso de Metaponto, quien fue el primero en producir la demostración de la irracionalidad, utilizando geometría.

La demostración clásica de que $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, que no entra en razón, o mejor, que no se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}$ siendo p y q números naturales primos entre sí, reúne gran belleza por su simplicidad. Aupada en el modelo de razonamiento indirecto, llamado demostración por Reducción al Absurdo, utiliza un aspecto básico de la teoría de números y es el concepto de paridad.

Siendo la división la reina de las operaciones, el primer concepto que se aprende en la escuela, permite la partición de los números naturales en pares (P) e impares (I) y con él, a través de la multiplicación, se encuentra la siguiente tabla, para estas dos clases de números.

Tabla 21

Multiplicación de las clases entre pares e impares

×	P	I
P	P	P
I	P	I

×	0	1
0	0	0
1	0	1

La tabla de multiplicación de las clases entre pares e impares, es isomorfa con la de la misma operación regular entre los números $\{0,1\}$. En cualquiera de los casos, se colige que, para que un número sea par, la descomposición en sus factores primos (Teorema fundamental de la aritmética) debe contener al menos un factor par. En otras palabras, no puede ser el caso de que un producto de números impares, sea par.

Teorema

$\sqrt{2}$ no es racional.

Demostración

Al suponer que $\sqrt{2}$ sea un número racional, nos obligamos a pensar en la existencia de dos naturales p y q , primos entre sí, es decir sin factores comunes, o tales que $MCD(p, q) = 1$, que permiten que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Si esto fuese posible, se tiene de inmediato $p^2 = 2q^2$, lo que indica que p^2 es un número par; pero para que esto ocurra, de acuerdo a la

Tabla 21, lo único posible es que p sea par; es decir, debe existir un natural m tal que $p = 2m$ y por ello se tiene que $p^2 = 4m^2 = 2q^2$ lo que lleva a la igualdad $q^2 = 2m^2$. Esto indica, de nuevo, que q^2 es par, lo que a su vez, la

Tabla 21 señala que q inevitablemente es par; o sea, existe un natural s tal que $q = 2s$.

En síntesis, pensar en que $\sqrt{2}$ es racional ha supuesto la existencia de dos números p y q sin factores comunes diferentes a 1 y tal suposición ha derivado en que necesariamente deben tener al menos como factor común al 2 y esto es una abierta contradicción que vulnera la consistencia lógica de la teoría, pues se tiene que p y q son y no son primos entre sí, al mismo tiempo.

En la matemática no se puede trasgredir, ni el principio de no contradicción, ni el principio de identidad, ni el principio del tercio excluido y por ello es imposible pensar que $\sqrt{2}$ fuese un número racional, porque de hacerlo, se está violentando las bases íntimas de esta ciencia.

Este hermoso teorema demuestra dos cosas elementales: no se puede pensar en la existencia de un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados midan números enteros, y que la expansión decimal e infinita de este número no tenga periodo, se extienda sin límite, conteniendo en sus cifras a cualquier número, al precio de tu camisa, a tu número telefónico, tu código postal, tu estatura, el número que indica una edad, y marcha por la pared, se desliza en la mesa, huye por los intersticios de la puerta, por las aldabas, se escapa entre las bisagras y es inalcanzable, no cabe en un tablero.

$\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694$
 $8073176679737990732478462107038850387534327641572735013$
 $8462309122970249248360558507372126441214970999358314132$
 $226659275055927557999505011527820605714...$

6.3.1 Argumentación

El camino de la demostración, por reducción al absurdo, es apetecido por los matemáticos profesionales para demostrar teoremas de unicidad y en el caso de la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, brinda una traza simple de admirable belleza, pues se une al manejo de unas ideas aritméticas básicas. En síntesis, al suponer la existencia de dos números naturales p y q , primos entre sí que hacen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ se sigue que no son primos entre sí. Ser primos entre sí, indica que, a lo sumo uno de ellos puede ser par; pero de ser cierto que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ se ha concluido que los dos, necesariamente deben ser pares, y allí radica lo contradictorio; por esta razón, no es dable pensar en tal posibilidad.

Pero aparte de manejar ideas simples, la belleza se incrementa por su brevedad; no es rayana en argumentos abundantes y eso la hace doblemente bella y como se ha dicho, apostamos un millón de dólares a que nadie en el mundo tiene la capacidad de construir un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados tengan como medida, de manera exclusiva, a números naturales.

6.3.2 Demostración adicional

Tomada de Amster (2008: 90).

Los números reales se particionan en dos grandes conjuntos, con profundas características que los hace rebeldemente irreconciliables, los racionales y los irracionales. Los racionales son aquellos que prestan oídos a aquello que aseguran los mayores a los jóvenes, y es que, siempre hay que entrar en razón; en este caso, la razón resulta ser la aproximación decimal del cociente de dos números enteros y su expansión decimal infinita tiene la característica de ser periódica, es decir, siempre hay un

bloque de cifras decimales que se repite de manera incesante. De este modo, $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$ es un número racional, con periodo de longitud 1, que en este caso es 6.

El número $0,24242424 \dots$ en consecuencia, es un racional con periodo 24, de longitud 2 y de hecho, debe ser un número que se obliga a entrar en razón y en efecto, $0,24242424 \dots = \frac{8}{33}$.

La longitud de los períodos es arbitraria y puede estar constituida por cifras distribuidas de manera caprichosa. Así, un bloque repetitivo puede ser 100100011015 desde cualquier momento en que se vaya recorriendo el número.

Así, el número: $25,7778100100011015100100011015100100011015 \dots$ es un número de los que entran en razón, es un número racional.

Así como la imaginación es intuitivamente perversa, puede inclinarse por pensar en un número con expansión decimal sin período, como aquel constituido por ceros y unos, con parte entera 1, de modo que la distancia entre dos unos se mide por la cantidad de ceros entre ellos, de tal modo que esa cantidad siempre aumenta en uno. Describir este número resulta más complicado que verlo:

$$1,01001000100001000001000000100000001000000001 \dots$$

Con solo cambiar la parte entera de este número ya tenemos una infinitud de números que carecen de período, que no pueden entrar en razón. Igual, si después de la coma, en su expansión decimal disponemos unas cuantas cifras, por decir algo, un millón de sietes y luego la azarosa cola aperiódica de ceros y unos. Este conjunto de números, es de los irracionales, y en cantidad es un conjunto que supera en infinitud a la

infinitud de los racionales. Es decir, en la recta real se encuentran más irracionales que racionales; dicho de otro modo, al escoger un real arbitrario, la probabilidad de que se trate de un racional, es nula.

El conocimiento de la aparición en el mundo académico de los números irracionales se endilga a los pitagóricos que parece vivieron con horror el momento de descubrir que la raíz cuadrada de 2, $\sqrt{2}$, no era racional.

Como se ha dicho, la demostración se atribuye a Hipaso de Metaponto, pero en este momento se va a reconstruir una original del matemático Tom M. Apóstol, que Paul Amster, matemático argentino, califica como un verdadero poema (Amster, 2019).

Si $\sqrt{2}$ fuera racional, existirían dos números enteros p y q tales que el cuadrado de $\frac{p}{q}$ es justamente 2. Y de allí se desprende $p^2 = 2q^2 = q^2 + q^2$. Aquí viene la conexión geométrica. La última igualdad significa que existe un triángulo rectángulo isósceles de lados enteros p y q , de catetos q y de hipotenusa p (Figura 32).

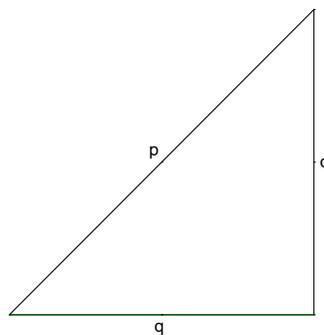


Figura 32. Triángulo rectángulo de catetos q e hipotenusa p : $q^2 + q^2 = p^2$

Se traza ahora un arco de circunferencia de radio q , con centro en el vértice superior del triángulo. Tal arco corta a la hipotenusa del triángulo

en el punto L y por allí se traza la tangente al arco de circunferencia (Figura 33), con lo cual se obtiene el gráfico de la Figura 33.

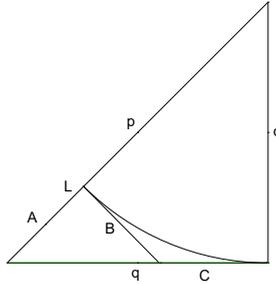


Figura 33. Triángulo rectángulo de catetos q e hipotenusa p , con arco de circunferencia de radio q

A y B vuelven a ser los lados de un triángulo rectángulo isósceles, por semejanza con el triángulo original y por ello $A = B = C$, segmentos que miden $p - q$.

El hecho de que $B = C$ se debe a que el punto de intersección entre la base del triángulo y la perpendicular por L es un punto exterior a la circunferencia de radio q , que se ha trazado desde el vértice superior del triángulo y tales rectas son tangentes a la circunferencia; por esto, el punto de intersección mencionado equidista de los puntos de tangencia de esos segmentos (Figura 34).

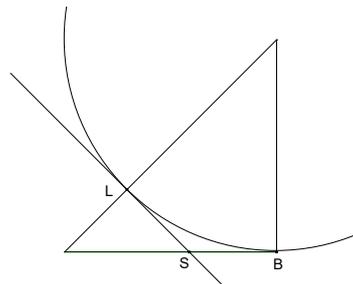


Figura 34. Triángulo rectángulo isósceles de lados enteros: catetos $p - q$, hipotenusa $q - (p - q) = 2q - p$

El triángulo rectángulo isósceles también tiene lados enteros de catetos $p - q$ y de hipotenusa $q - (p - q) = 2q - p$.

Este procedimiento se puede repetir de manera iterativa, obteniendo una secuencia infinita de triángulos cada vez más pequeños y todos con lados enteros. Así, estos lados forman una secuencia infinita de triángulos rectángulos isósceles, con lados de dimensión entera, donde cada triángulo tiene medidas estrictamente menores que el anterior. Pero esto es imposible ya que los números enteros positivos no admiten un descenso infinito; en otras palabras, no existe una secuencia de números naturales infinita estrictamente decreciente; cualquier secuencia decreciente de manera estricta, solo puede ser finita y al máximo, terminar en 1 (Amster, 2019; pp. 128-130).

Esta imposibilidad, marca a su vez la imposibilidad de pensar en la existencia de un triángulo rectángulo isósceles cuyas medidas de sus lados sean enteros. De manera irremediable, todo triángulo de esta forma, con catetos iguales en su medida a un entero, es tal que su hipotenusa debe ser, en su medida de longitud, una entidad no entera.

6.3.3 Desviación

Dado por sentado que $\sqrt{2}$ es un número irracional ya se está frente a una infinita colección de irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$ e incluso, de una gama de irracionales que se disfrazan con los ropajes más absurdos: $\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \dots$, pero ¿qué decir de aquellos radicales anidados infinitos?. Este tipo de engendros tuvieron su nacimiento en la creativa inspiración de Srivinasava Ramanujan Alyengar, cada uno de ellos encarna una imagen sui genéresis.

Por ejemplo $L = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ es 2 debido que al elevar al

cuadrado se tiene $L^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ esto es $L^2 = 2 + L$

y de allí, $L^2 - L - 2 = 0$, o lo que es lo mismo, $(L - 2)(L + 1) = 0$.

Pero la expresión solo contiene números positivos, de modo, que el único valor posible es $L = 2$. Qué forma tan linda de escribir al sucesor de la

unidad, esto es, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 2$.

Con el mismo malabar algebraico se comprueba que cada uno de los naturales

puede disfrazarse de radical infinito, así $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}} = 6$.

Pero, ¡cuidado! También es posible producir irracionales como

$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que es el número de oro.

Y entre tanto arrobamiento de imaginación, pensar en radicales anidados

alternantes, como $\sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ y números así, que desbordan

la imaginación.

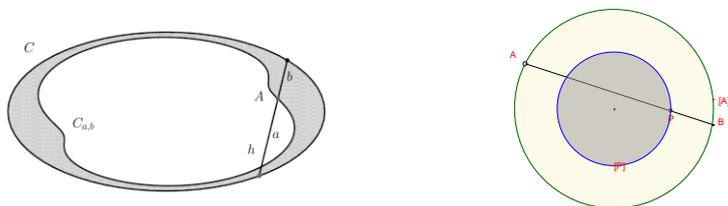
CAPÍTULO 7.

EL TEOREMA DE HOLDITCH

7.1 CONTEXTO

Muchos magos se apegan al conocimiento matemático para lucubrar trucos y en efecto, tales malabares de prestidigitador, explicados desde las matemáticas, se convierten en resultados elementales que asombran por su simplicidad y por su misterio. La geometría está llena de resultados sorprendidos que una vez demostrados, se convierten en verdades ineluctables. Uno de estos hechos, es el llamado Teorema de Holditch, que transforma el cálculo del área de una corona amorfa, o de forma disímil e irregular, en el cálculo del área de una elipse, forma conocida por su aspecto simétrico y regular. Así, lo irregular se transforma en algo conocido e indiscutiblemente bello por su apariencia.

El Teorema de Holditch es un resultado geométrico sobre áreas de curvas planas, publicado en 1858. Este descubrimiento fue el centro de atención de muchos matemáticos en ese tiempo, resultado ampliamente estudiado y que suscitó generalizaciones. A pesar de su encanto, el teorema fue olvidado y las investigaciones en ese campo no se estudian en la actualidad. La belleza del descubrimiento anima a acudir a su rescate.



*Figura 35. Teorema de Holditch
Fuente: Researchgate (s.f.),*

Para una curva cerrada arbitraria, una cuerda cualquiera que permanece fija en su dimensión une dos puntos de esa curva y se toma un punto cualquiera de dicha cuerda que define una figura cuya área coincide con la de una elipse cuyos semiejes son las longitudes de los trozos de la cuerda, al girar tal cuerda por la curva una vuelta completa. La figura es una especie de corona alrededor del área limitada por la curva original y en el caso en que la curva sea una circunferencia, cualquier punto que se tome sobre la cuerda determina una corona circular cuya área, como lo describe el teorema, es igual al área de la elipse cuyos semiejes son los dos segmentos de la cuerda particionados por el punto (Figura 35).

En este capítulo, por circunstancias descriptivas, se adopta el caso de la curva como circunferencia para que el problema se torne fácil de entender, sin que pierda su calidad de asombro y misterio.

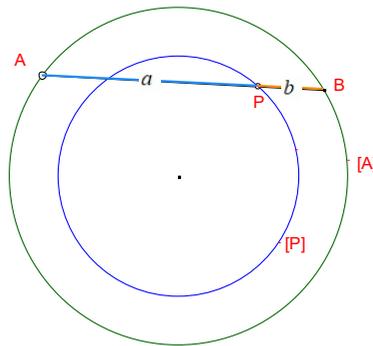


Figura 36. Teorema de Holditch – El caso de la circunferencia

La intención es demostrar que el área de la corona $[A] - [P] = \pi ab$, donde a es la longitud del segmento AP y b la longitud del segmento PB , siendo P un punto arbitrario en la cuerda AB (Figura 36).

7.2 SOBRE EL AUTOR

La presente sección, constituye una adaptación de Hmong (s.f.).

El reverendo Hamnet Holditch, (1800-1867) fue un matemático inglés, presidente de Gonville and Caius College en Cambridge. En 1858 introdujo el resultado en geometría conocido como el Teorema de Holditch. Nació en 1800 en King's Lynn, hijo de George Holditch, piloto y capitán de puerto. Educado en King's Lynn Grammar School, se matriculó en Gonville and Caius College, de la Universidad de Cambridge en 1818 y se graduó en 1822. En Gonville and Caius College, Holditch fue miembro junior desde 1821 y senior desde 1823 y ocupó los puestos universitarios de profesor de hebreo y griego, registrador, mayordomo, salarista (1823-28), tesorero (1828-31), y presidente hasta su muerte, que ocurrió el 12 de diciembre de 1867.

Aunque Holditch escribió diez artículos matemáticos, estuvo ocioso como tutor. John Venn, estudiante universitario en Caius en la década de 1850 y becario de Caius desde 1857, indicó que Holditch, a pesar de su sucesión de cargos universitarios, "más allá de unos pocos alumnos privados, nunca participó en el trabajo educativo".

Holditch fue un matemático ingenioso y creativo, probablemente se habría distinguido si se hubiera visto obligado a trabajar en problemas de esta área del conocimiento. Destacado por su extrema timidez. Debido a un antiguo desaire, durante muchos años se ausentó por completo de Hall y Chapel y pocos miembros del colegio lo conocían, incluso de vista, a tal punto que una vez, un estudiante le mostró el colegio, tomándolo por un extraño.

7.3 TEOREMA DE HOLDITCH

El Teorema que el matemático inglés Reverendo Hamnet Holditch propuso en 1858, dice:

“Supongamos una curva cerrada, convexa vista desde su exterior, es decir, sin concavidades exteriores ni puntos singulares, en la que se inscribe una cuerda AB de longitud fija. Un punto P de ésta divide la cuerda en dos segmentos $PA = a$ y $PB = b$. La cuerda se desplaza con sus extremos AB siempre apoyados en la curva de partida de manera que llegue a dar una vuelta completa en torno de ella. Así, el punto P dibujará otra curva cerrada interior a la primera (el lugar geométrico de P en la maniobra) de tal manera que entre las dos curvas se constituye una corona cuya área vale πab . Es decir, la misma área que tiene una elipse de semiejes a y b .” (Gaussianos, s.f.).

La forma más sencilla de probar un caso particular del teorema es cuando la curva de partida es una circunferencia. En ella aparecen dos circunferencias: la grande de radio R , que es la curva de partida conteniendo a la cuerda AB y la pequeña de radio r que es el lugar geométrico de P al dar la cuerda una vuelta completa (Figura 37).

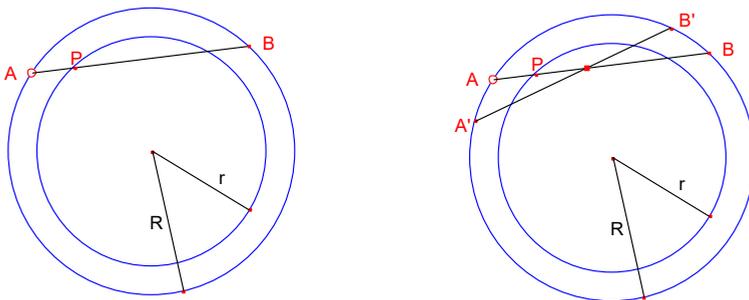


Figura 37. Teorema de Holditch – El caso de la circunferencia

Demostración

El área limitada por una curva suave definida en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta, \text{ que se utiliza en la demostración.}$$

La potencia de P , respecto de la circunferencia grande, se puede expresar como el producto ab , o como $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$. Es decir, $ab = R^2 - r^2$.

Al multiplicar por π ambos miembros de la ecuación anterior, se tiene: $\pi ab = \pi(R^2 - r^2)$; de modo que, πab es igual al área de la corona circular.

En este caso particular, para ir asentando AB sobre su circunferencia, no ha hecho falta someter AB a ninguna traslación, ha bastado con girar el segmento. Otra cosa de notar en la misma situación es que la intersección de AB en una determinada ubicación, con la misma cuerda AB , en la posición sucesiva, tiende a situarse en el punto medio de AB cuanto menor sea el ángulo girado; así, si la distancia entre A y A' se acerca a cero, el punto de intersección de los segmentos AB y $A'B'$ es el punto medio de cualquiera de ellos. Esto es importante a la hora de aplicar el cálculo integral en la demostración del teorema.

La Figura 38 se ha despojado de lo innecesario, se ha reducido mucho el valor de θ (el ángulo de giro de AB a su siguiente posición) precisamente para aparentar su tendencia a cero y por ello, se lo ha denotado como $\Delta\theta$. Se ha añadido la circunferencia que pasa por el punto medio de AB y es concéntrica con las otras dos (la más pequeña de las tres).

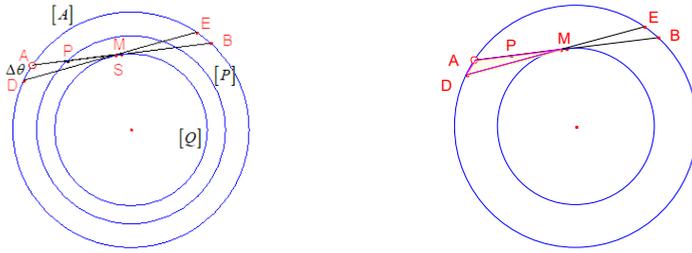


Figura 38. Teorema de Holditch – ángulo de giro de AB tiende a cero

Los dos triángulos casi horizontales, que tienen su vértice más agudo en el punto medio de AB, cuando $\Delta\theta$ tiende a cero son iguales, y además, isósceles (de acuerdo con el cálculo infinitesimal) (Figura 39). El triángulo de la izquierda (en el que A es un vértice) tiene un área igual a $\frac{1}{2}$ de su base por su altura, y es un elemento infinitesimal de área. La base, es el lado pequeño de longitud $\Delta\theta$, siendo el ángulo diferencial de θ y el radio $\frac{a+b}{2}$; este valor del radio es también el de la altura del triángulo (nos hemos situado en el terreno del cálculo infinitesimal). El área de ese triángulo, integrada a toda la circunferencia, resulta ser el área de la corona que determinan las circunferencias: la grande y la más pequeña. Si llamamos [A] al área del círculo más grande y [Q] a la del más pequeño, se tiene $[A] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 d\theta$.

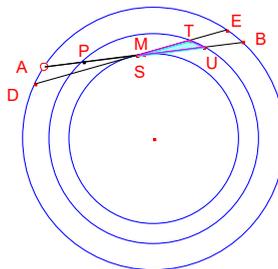


Figura 39. Teorema de Holditch – demarcación de triángulos semejantes

Llamando $[P]$ al área del círculo intermedio (ése cuya circunferencia es el lugar geométrico de $[P]$) y mirando al triángulo de la derecha STU (no el grande que tiene B como vértice, sino el más pequeño con vértice S), se tiene:

$[P] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 d\theta$, puesto que la altura o radio del triángulo EBS es $r(\theta) = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$. Restando de la primera ecuación, la última, entre

estas que tienen integrales, queda: $[A] - [P] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right) d\theta$ o lo

que es lo mismo $[A] - [P] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \pi ab$.

Es decir, el área de la corona determinada por las circunferencias mayor e intermedia (la de partida y la del lugar geométrico de P) vale πab , tal como se quería demostrar. La demostración, que resulta cómoda a partir de una circunferencia, es válida para cualquier otra curva de partida que reúna las condiciones del enunciado del teorema, puesto que el resultado no depende de la forma de la curva sino tan solo de a y de b . El que el límite superior de la integral sea 2π , no evoca a una circunferencia, sino al hecho de que por ser cerrada, la curva de partida (que puede ser oblonga) ha de ser recorrida en una vuelta completa de 2π radianes.

7.3.1 Una explicación gráfica

Para la demostración del teorema, se ha recurrido a la fórmula del cálculo de áreas de curvas determinadas en coordenadas polares,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta.$$

A continuación, con ayuda de gráficas, se expone la situación explicada, con el claro objetivo de que se comprenda no solo la demostración, sino la potencia magnífica del resultado; digamos, la transformación inmediata de un área correspondiente a una región irregular a una conocida, concretamente que corresponde al área de una elipse.

Se trata de calcular el área de una corona circular entre dos círculos concéntricos, donde AB es una cuerda, P es un punto elegido al albur de tal cuerda y el círculo interior es el lugar geométrico de P cuando la cuerda se desliza por la circunferencia grande de radio arbitrario. Además, $d(A, P) = a$ y $d(P, B) = b$. Al área del círculo grande se le llama $[A]$ y a la del círculo interior, $[P]$ (Figura 40).

Si M es el punto medio de la cuerda AB , esta describe una circunferencia cuya área es $[Q]$.

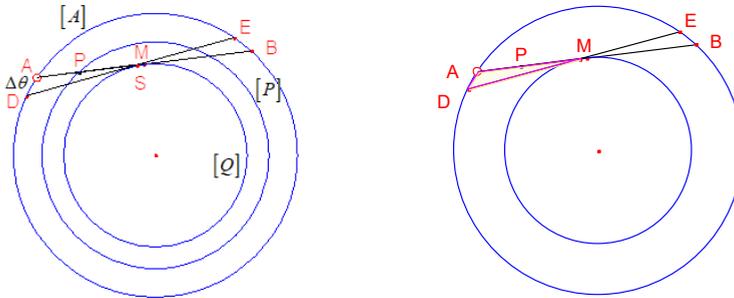


Figura 40. Teorema de Holditch – explicación gráfica

Si DE es una cuerda de igual longitud que AB , el punto de intersección de las dos cuerdas S , tiende a ser M cuando la distancia entre D y A tiende a cero (Figura 40). En este sentido, el triángulo DAS puede considerarse isósceles y se convierte en un elemento de área de la corona entre estos dos círculos, triángulo de base $\Delta\theta$ y altura $r(\theta) = \frac{a+b}{2}$ y por ello, el área de esa corona, es:

$$[A] - [P] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 d\theta \quad (1)$$

Del mismo modo, el triángulo STU (Figura 41) es un elemento de área de la corona entre los círculos interiores al original, en la que considerado

STU isósceles, la distancia TU se toma como la base $\Delta\theta$ y la altura o radio del triángulo, es en este caso, $r(\theta) = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ y por ello, la corona circular tiene como área total $[P] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 d\theta$ (2)

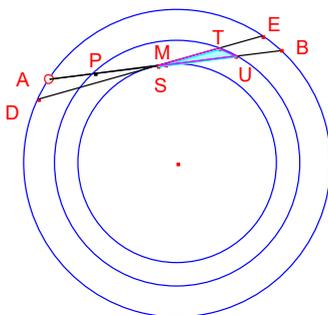


Figura 41. Teorema de Holditch – elemento de área de una corona

Al restar (1) y (2) se tiene:

$[A] - [Q] - ([P] - [Q]) = [A] - [P] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 d\theta ==$
 $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \pi ab$, que es el área de una elipse cuyos semiejes miden a y b (Figura 42).

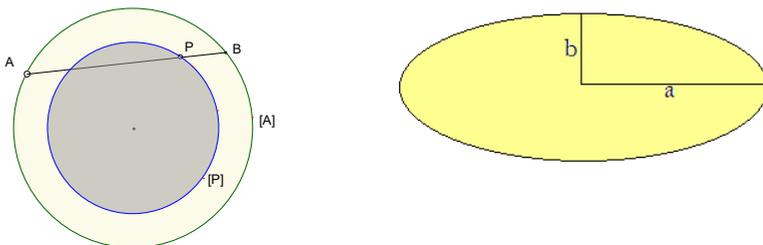


Figura 42. Teorema de Holditch – área de una elipse

7.3.2 Argumentación

No existen palabras para describir la belleza de este resultado mágico, una corona irregular, amorfa, no convexa, se transforma, de manera inmediata, en una convexa, de forma regular, conocida y simétrica. Es como sacar desde un vestido de camisa con mangas cortas, rosas de la nada.

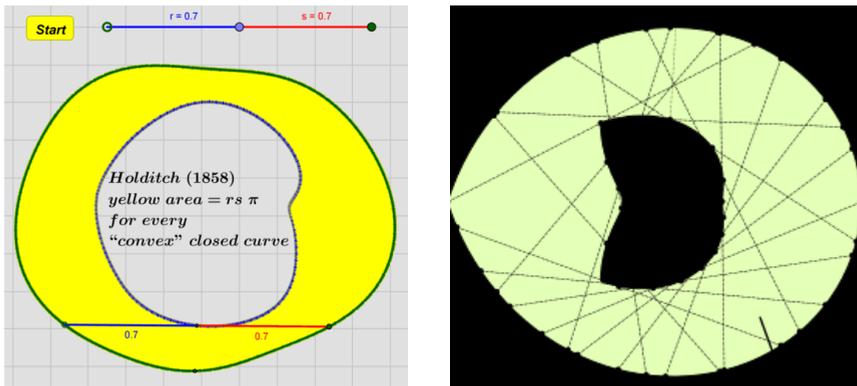


Figura 43. Teorema de Holditch – otra representación gráfica

Fuente: Geogebra (s.f.).

La Figura 43, señala dos de esas formas, dos figuras, de esas que pululan en internet y que rinden tributo al resultado examinado en este texto.

Justo, el gran Euclides, con la demostración del llamado Teorema de Pitágoras, en el que demuestra que cuadrado más cuadrado es cuadrado, abre el hermoso campo denominado de transformación de áreas, que tiene diversidad de resultados, como el que asegura que, todos los triángulos contenidos entre dos paralelas, tienen igual área, y que establece una clase infinita de triángulos de diferente forma, con algo en común, su área.

Es razonable asombrarse de este resultado, que reivindica la potencia del cálculo integral, con la dinámica establecida por los lugares geométricos y la geometría de las cónicas, temas a los que se acude con regularidad en las aulas escolares, y que aquí, se han mezclado de manera natural, simple y sabia.

Como se ha visto, el Teorema de Holditch es un resultado clásico sobre áreas de curvas planas, generadas por el movimiento de segmentos. Esta construcción está estrechamente relacionada con otros tipos de curvas como, por ejemplo, curvas paralelas, curvas de anchura constante o curvas de bicicletas como la cicloide y similares, e íntimamente con los lugares geométricos. En la situación bidimensional de Holditch, se define el caso expuesto, pero se puede estudiar más a fondo. Por ejemplo, el modo de evitar movimientos retrógrados en el segmento que se va moviendo por la curva original, lo que ha obligado a que la curva de partida defina una región convexa. En el enunciado del Teorema de Holditch aparece el área de una elipse oculta y esto es lo mágico: dentro de infinitas superficies de formas indefinidas, aparece oculta una elipse de dimensiones precisas. Tan solo este resultado, anima a continuar en el derrotero del aprendizaje de las maravillosas matemáticas.

CAPÍTULO 8.

TEOREMA DE THÉBAULT

8.1 CONTEXTO

La matemática no puede desligarse de la geometría; la forma, que es el objeto de abstracción de la geometría, tiene que ver con las dimensiones y con la cantidad, además, en sí misma es fuente de transformaciones, que no son más que funciones, tema que se estudia al interior de la matemática en áreas como el análisis. Este vínculo inveterado mantiene una riqueza natural, muchos resultados geométricos sorprenden por su sencillez y son de obligatoria demostración deductiva, tal y como lo realizó Euclides en su magna obra *Los Elementos* (Scoop, s.f.).

El Modelo Sintético de Geometría, también denominado Euclidiano, es una fuente inagotable de resultados que se disponen como pruebas, problemas, desafíos y retos dentro del mundo académico. Algunos son atribuidos a los mecenas y amantes de la ciencia que se convierten en protectores de mentes brillantes. Incurren en hechos fortuitos, como las cartas acontecidas entre el marqués de L'Hopital y Jacques Bernoulli. Las misivas de Bernoulli contenían lo que ahora se denomina la Regla de L'Hopital, de la cual, este último es un simple transcriptor. Sin embargo, este principio de tanta utilidad en el cálculo y análisis persevera en rendir homenaje al marqués.

Igual, puede ser la ocurrencia con el Teorema de Napoleón, de quien se sabe, fue amigo de la ciencia, y por ello, un espíritu condescendiente, amigo y protector de científicos notables. Sin embargo, dada la simpleza del resultado, cabe la posibilidad de que haya sido su descubridor, aunque no, quien

demostró la veracidad del hecho. La sencillez del resultado es justo, lo que le hace sorprendente, maravilloso y hasta misterioso como muchos, incluso, aquellos que se descubrirán en adelante.

El Teorema de Napoleón afirma que el triángulo determinado por los centros de gravedad, o baricentros de los triángulos equiláteros, construidos exteriormente sobre los lados de un triángulo cualquiera, es equilátero (Figura 44). Como una extensión del resultado, resulta que ocurre lo mismo, si los triángulos se construyen hacia el interior de un triángulo arbitrario.

Este hecho es pasado por alto en la enseñanza escolar. Su belleza y simplicidad, parece no poseer el brillo suficiente para iluminar los espíritus y mentes de los jóvenes que se forman en las instituciones educativas.

El teorema de Napoleón, como su nombre lo indica, se atribuye a Napoleón Bonaparte (1769-1821). El teorema está publicado en el calendario *The Ladies' Diary* de 1825, es decir cuatro años después de la muerte de Napoleón. Su demostración utiliza un poco de transformaciones rígidas y de semejanza, en este caso de homotecias. Por ello, la demostración utiliza recursos de la Geometría Transformacional.

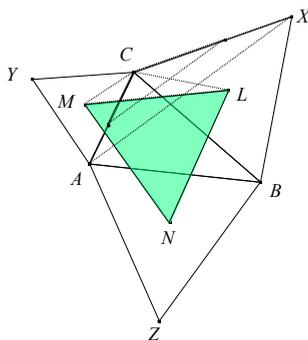


Figura 44. Teorema de Napoleón

Al efectuar sobre el triángulo MLC una rotación de 30° centrada en C , seguida de una homotecia de razón $\sqrt{3}$ con centro en el mismo punto C , los puntos M y L se transforman en A y X , por lo que el segmento AX es igual a raíz cuadrada de tres veces el segmento ML . Dado que los triángulos YCB y ACX se obtienen uno a partir del otro por una rotación centrada en C con un ángulo de 60° , resulta que los segmentos AX y YB son iguales puesto que el uno se produce desde el otro a través de una transformación rígida y como tal, preserva distancias. Se reitera el mismo razonamiento a los triángulos MAN y NBL , tomando como centros de rotación los puntos A y B respectivamente y las homotecias correspondientes sobre los mismos puntos, para establecer que los segmentos AX , YB y CZ son iguales entre sí y que guardan la misma relación entre cada uno de sus lados con la longitud de los lados del triángulo MNL , razón igual a $\sqrt{3}$. Todo esto, demuestra que el triángulo MNL es equilátero.

Igual se puede demostrar que si los triángulos equiláteros se configuran hacia el interior del triángulo base, sus centros de gravedad son los vértices de un nuevo triángulo equilátero.

Establecido este teorema, una mente acuciosa, puede inferir e indagar si el resultado se puede extender a otras formas poligonales. Por ejemplo, tomar cualquier cuadrilátero y estudiar si los centros de gravedad de los cuadrados construidos por el exterior (interior) del mismo, son los vértices de un cuadrado. Igual, si el polígono fuese un pentágono, en el que la dificultad aparece en el cálculo de su centro de gravedad.

Una respuesta positiva, para el caso de un cuadrilátero, la brinda Víctor Thébault, siempre que el cuadrilátero que se tome sea un paralelogramo.

8.2 SOBRE EL AUTOR

Víctor Michael Jean Marie Thébault (1882–1960) fue un matemático francés mejor conocido por proponer los tres problemas de geometría que se relacionan en este capítulo. El nombre del *Teorema de Thébault* o Thebo es utilizado por algunos autores para referirse al primero de estos problemas, y por otros, para indicar el tercero. En 1909 ocupó el primer lugar en un examen competitivo, que le otorgó un certificado para trabajar como profesor de ciencias en los colegios de profesores (Wikipedia, s.f.b; Culturacientífica, 2022.).

Thébault publicó gran cantidad de artículos en revistas de matemáticas en todo el mundo y aparte de los artículos regulares, también contribuyó con muchos problemas y soluciones originales que aparecen en las secciones de problemas en diversas revistas. Publicó más de 1000 problemas en revistas matemáticas; sus contribuciones a la sección de problemas del «American Mathematical Monthly» comprenden más de 600 problemas y soluciones. En reconocimiento a sus contribuciones, el gobierno francés le otorgó dos títulos nobiliarios.

Victor Thébault, nació el 6 de marzo de 1882 en Ambrières-les-Grands, en Mayenne, Francia. Estudió en Laval entre 1898 y 1901. Entre los años 1910 y 1923 abandonó la enseñanza para trabajar como superintendente en una fábrica en Ernée y en 1924 pasó a ser inspector jefe de seguros en Le Mans, cargo que ocupó hasta su jubilación en 1940. Falleció el 19 de marzo de 1960.

Su alejamiento del mundo de la enseñanza no impidió que Thébault dejase de interesarse por las matemáticas, siendo sus principales áreas de interés la teoría de números y la geometría. Colaborador asiduo de

varias revistas matemáticas, contribuyó en ellas con el planteamiento y resolución de diversos problemas. En particular, en la revista *American Mathematical Monthly*, circulan cerca de 600 problemas propuestos por él, algunos con sus soluciones. La mayor parte de sus problemas tratan sobre la geometría del triángulo y del tetraedro (Culturacientífica, 2022).

El gobierno francés, gracias a los aportes realizados por Thébault, lo nombró *Officer de l'Instruction Publique*, e incluso el gobierno de Bélgica en 1935, lo nombró *Chevalier de l'Ordre de la Couronne*, por su colaboración con las revistas *Annales y Mathesis*.

8.3 EL TEOREMA DE THÉBAULT

8.3.1. Primer Teorema (Problema 1)

Dado un paralelogramo cualquiera, se traza de modo externo (o interno), en cada uno de sus lados un cuadrado y se calcula su centro de gravedad (corte de las diagonales); el cuadrilátero que tiene como vértices los centros de los cuatro cuadrados, es también un cuadrado. La diferencia de áreas de los dos cuadrados, externo e interno es el doble que la del paralelogramo inicial (Figura 45).

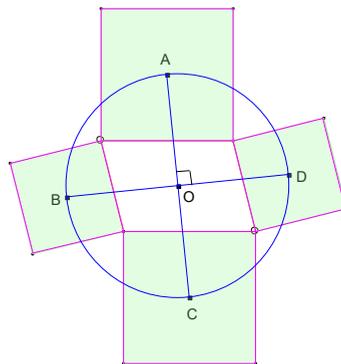


Figura 45. Teorema de Thébault

Los centros de los cuadrados construidos a los lados del paralelogramo se encuentran en los vértices de un nuevo cuadrado.

Razonamiento geométrico.

Podemos ver que los puntos A, B, C y D son los centros de los cuadrados y conforman un cuadrado de centro en O puesto que los segmentos AC y BD que tienen la misma longitud, se cortan de manera perpendicular en O , siendo este el punto medio de tales segmentos (Figura 45).

La consecuencia inmediata es que el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, puesto que cada uno de los triángulos AOB, BOC, COD y DOA es isósceles, con ángulos iguales de 45° en la base, conformando un grupo de cuatro triángulos congruentes.

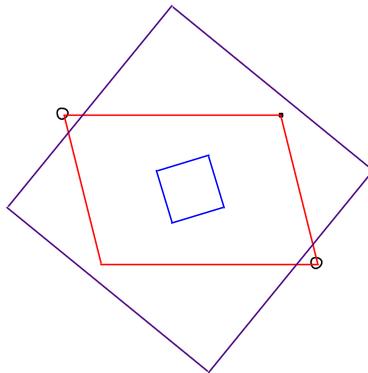


Figura 46. Teorema de Thébault-Problema 1

En la Figura 46 se observa la construcción de los cuadrados de los centros de gravedad de los cuadrados externos alrededor del paralelogramo y también de los internos. La suma de las áreas de los cuadrados externo e interno es la suma de las áreas de dos cuadrados construidos sobre lados consecutivos del paralelogramo, bien externa o internamente.

8.3.2. Segundo Teorema (Problema 2)

Si sobre dos lados consecutivos de un paralelogramo de modo externo (o interno) se trazan triángulos equiláteros, los vértices externos de los dos triángulos con el vértice no utilizado del paralelogramo, son los vértices de un nuevo triángulo equilátero. La diferencia de áreas entre esos dos triángulos es $\frac{3}{2}$ del área del paralelogramo original.

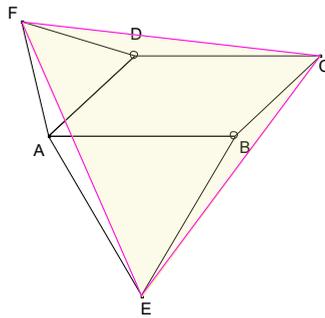


Figura 47. Teorema de Thébault-Problema 2

Dado el paralelogramo $ABCD$, se construyen los triángulos ABE y ADF ; se observa que los ángulos FDC y EBC tienen la misma amplitud por la configuración del paralelogramo inicial y en consecuencia, los triángulos FDC y EBC son congruentes al tener parejas de lados de igual longitud. Así, los lados FC y CE son iguales, lo que hace que el triángulo FEC se catalogue inicialmente como isósceles. Pero el triángulo EAF también es congruente con los dos anteriores por las razones expuestas; así, el lado EF tiene la misma medida que FC y en consecuencia, el triángulo EFC es equilátero (Figura 47).

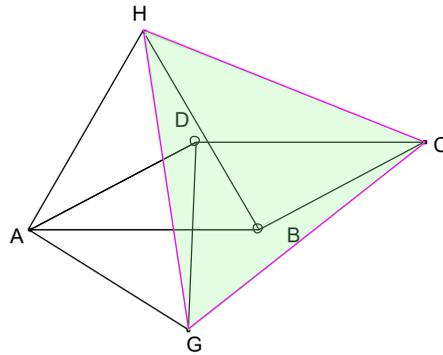


Figura 48. Teorema de Thébault-Problema 2 - Triángulos internos

Igual circunstancia ocurre cuando se construyen triángulos equiláteros de modo interior. En este caso, se han trazado los triángulos ADG y ABH para constituir el triángulo equilátero GHC (Figura 48).

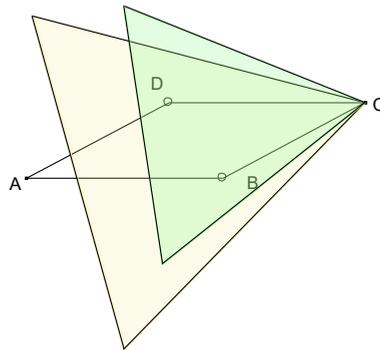


Figura 49. Teorema de Thébault-Problema 2-Triángulos internos y externos

En la Figura 49 aparecen los dos triángulos: el de los triángulos por el exterior, y el de por el interior. La diferencia entre las áreas de los triángulos es $\frac{3}{2}$ del área del paralelogramo inicial.

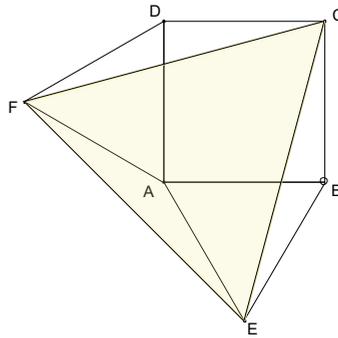


Figura 50. Teorema de Thébault-Caso particular

Un caso particular del teorema en mención, se replica en la Figura 50 y está referido al cambio de un paralelogramo cualquiera por un cuadrado: si sobre dos lados consecutivos de un cuadrado se trazan de manera externa (interna) sendos triángulos equiláteros, los vértices de los triángulos que no pertenecen al cuadrado con el vértice del cuadrado que no está en uso, son vértices de un nuevo triángulo equilátero. Además, la diferencia de las áreas de los dos triángulos equiláteros, externo e interno es $\frac{3}{2}$ del área del cuadrado original.

En la Figura 50 se observan los triángulos isósceles congruentes AFE , BEC y DFC que tienen como lados iguales, el lado del cuadrado y cuyos ángulos agudos miden 15° en virtud de que, por ejemplo, el ángulo en D , para el triángulo DFC , mide $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ y por ello, cada uno de los ángulos agudos en F y C mide 15° , pues, completan los 30° . De este modo, por composición, se configura el triángulo equilátero FEC .

Para el caso en que se tracen los triángulos equiláteros interiores, se tiene que los triángulos AMD , ALM y ABL son isósceles y congruentes pues los pares de lados iguales tienen la misma longitud que la del lado del cuadrado (Figura 51).

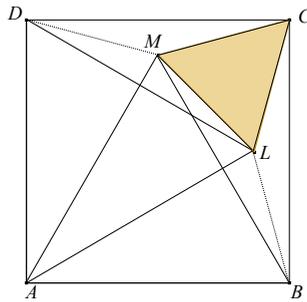


Figura 51. Teorema de Thébault-Caso particular-Triángulos al interior del cuadrado

Además, $DM = MC$ y $LB = LC$ y con ello $ML = MC = CL$, con lo que el triángulo MLC es equilátero.

Una forma alternativa es la de examinar los triángulos isósceles y congruentes ALM , DCL y BMC cuyos pares de lados iguales tienen la misma longitud que la del lado del cuadrado original y que reproducen la relación $ML = MC = CL$ (Figura 52).

También se tiene que las líneas AM y AL trisectan al ángulo recto en A .

Por último, hay que destacar que la diferencia de áreas entre el triángulo externo e interno es $\frac{3}{2}$ el área del cuadrado.

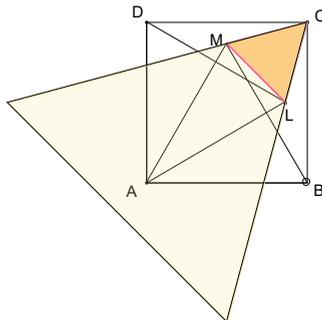


Figura 52. Teorema de Thébault-Caso particular-Otra forma Triángulos al interior del cuadrado

8.3.3 Tercer problema (Un caso de colinealidad)

Al tomar un triángulo arbitrario ABC y D un punto móvil en el lado BC se determinan los puntos Q incentro del triángulo ABC y K el círculo circunscrito al triángulo.

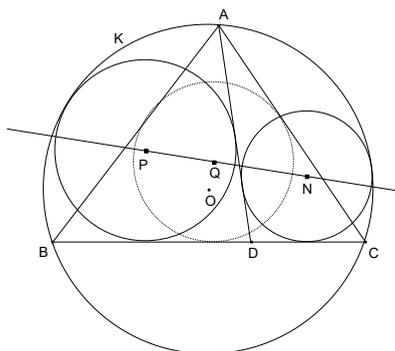


Figura 53. Teorema de Thébault-Caso de colinealidad

Referidos al séptimo caso del problema de Apolonio, se calculan finalmente, N como centro del círculo tangente a DC , DA , y Q y P centro del círculo tangente a DB , DA y Q ; entonces, P , Q y N están alineados (Figura 53). El séptimo caso del problema de Apolonio es el de la construcción de la circunferencia tangente a dos rectas y a una circunferencia que subyace en el espacio interior entre ellas.

El cálculo de N y P puede hacerse por la vía de la intersección de parábolas, cuyas directrices son uno de los lados donde no está apoyado el punto D y la recta AD .

8.3.4 Argumentación

Los resultados geométricos de las figuras más simples como el triángulo, el círculo, el cuadrado y los cuadriláteros llenan grandes volúmenes de textos y lo seguirán haciendo, en la medida que investigadores y amantes

de la matemática y la geometría continúen imprimiendo la pasión por su trabajo. Los resultados aquí expuestos, ahondan en la belleza por su simplicidad y porque su demostración obedece a principios fáciles de entender, comprender y accionar, incluso, de aquellos que requieren la aplicación de la geometría transformacional.

El estudio de estos tres problemas entusiasma y anima, empuja al espíritu a ocuparse y recrearse en la geometría, en particular, en sus tres modelos: sintético, analítico y de transformaciones y conduce a que profesores incluyan en sus actos pedagógicos el estudio de estos resultados, dado que los resultados que emergen pueden motivar a los nuevos matemáticos y geómetras en ciernes que habitan las escuelas.

De otro lado, se ha expuesto que estos tres problemas son ampliaciones del teorema de Napoleón, e igual, se ha hecho una apertura mayor, estudiando las relaciones entre las áreas de los cuadrados que brotan de su estudio. Igual, como un problema iterativo, puede pensarse en lo que ocurriría si aplicamos el principio constructivo a los cuadrados que surgen.

En gran sentido, la belleza de lo que se ha llamado el Teorema de Thébault, se asienta en lo fácil de su formulación, en lo asombroso de su resultado y en que es un ejemplo de lo que puede llamarse, la ampliación de un resultado conocido.

Por otra parte, y con sentido didáctico, el mundo moderno actual, dispone de asistentes geométricos dinámicos como Cabrí II Plus y GeoGebra, uno de ellos con licenciamiento, pero el segundo de libre acceso, que permiten ejecutar paso a paso las demostraciones de carácter transformacional aquí expuestas y que son la evidencia de su veracidad. La percepción visual no prueba las hipótesis, pues, el laboratorio de certeza de los resultados matemáticos y geométricos seguirá siendo la razón.

CAPÍTULO 9.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

9.1 CONTEXTO

Nada tan subyugante y atractivo como el Teorema de Pitágoras: desde la relación numérica $a^2 + b^2 = c^2$ emerge un fluido infinito de triadas pitagóricas (a, b, c) entre las cuales sobresale $(3,4,5)$, porque cumple con $3^2 + 4^2 = 5^2$ y es la única constituida por naturales consecutivos y desde allí, brota la infinitud (an, bn, cn) de las mismas, a través de cada número natural n . La forma de configurar otras tríadas básicas era conocida por los babilonios. Con solo tomar $x > y$, toda terna $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ es pitagórica porque $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

Desde la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ aparecen inquietudes como la del último teorema de Fermat que asegura que la expresión $a^n + b^n = c^n$ es imposible para $n \geq 3$, teorema que puso a prueba el talento de matemáticos profesionales por más de 350 años, demostrado de manera errónea por el matemático británico Andrew Wiles en 1993 y corregido por él mismo dos años más tarde.

Algunos historiadores aseguran que, el Teorema de Pitágoras se descubrió en la India, pero fue Pitágoras quién primero dio una demostración irrefutable y además los Egipcios, se dieron cuenta de ello al ver que siempre que construían un triángulo de lados 3, 4 y 5, resultaba rectángulo. Cantor infiere que con este triángulo, Pitágoras realizó el descubrimiento del teorema. Cantor encontró vestigios de papiros de los tiempos de la 12^{ava} dinastía egipcia, en los que aparecen extracciones de raíces cuadradas y en los que están trazadas expresiones de la forma:

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 ;$$

$$8^2 + 6^2 = 10^2 ;$$

$$2^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 ;$$

$$16^2 + 12^2 = 20^2 .$$

Tales hacia el año 585 a. C. y Pitágoras por el año 540 a. C. aparecen en el ámbito académico entre los primeros matemáticos, de ser pioneros al ver los círculos y los cuadrados y los números alejados de la realidad y demostrar cosas que eran evidentes para tales entes en el mundo de las ideas y así obtener otros teoremas poco visibles y demostrados con el rigor de la lógica. Son los pioneros en intervenir en el mundo de las ideas (Paulus, 1998; pp. 256-258).

Con seguridad, no fue el propósito de Pitágoras ni el de Euclides, ligar el teorema con el cálculo de distancias, pero no puede escaparse de ello. Por ejemplo, su aplicación en la medida de la longitud de la diagonal de todo cuadrado, encierra en su seno y enmarca al irracional $\sqrt{2}$. De este modo, si Mathew camina hacia el oriente 16 Km en una jornada y en el mismo día Brigitte recorre hacia el norte 12 Km, al final del día a Mathew y Brigitte los separa en línea recta, una distancia de 20 Km (Figura 54).

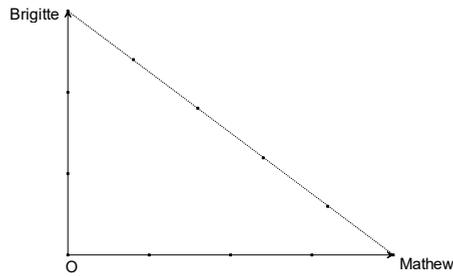


Figura 54. Teorema de Pitágoras-un ejemplo para el cálculo de distancias

El Teorema de Pitágoras es una herramienta poderosa, sin ella, el estudio de temas del análisis se hace imposible, pues no se puede definir el término de vecindad y sin esto, el concepto de límite se hace complejo.

Por ejemplo, la distancia entre los puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ en el Plano Cartesiano \mathbb{R}^2 se obtiene con la aplicación de dicho teorema.

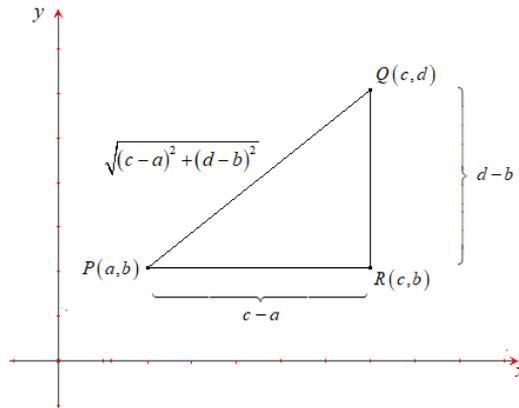


Figura 55. Teorema de Pitágoras-Fórmula de la distancia

No hay otro camino, el uso del teorema de Pitágoras consigue que la distancia entre los puntos P y Q es $d(P, Q) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ en la métrica natural o euclídea (Figura 55).

Una demostración secular de la validez del teorema recurre a la combinación evidente entre el álgebra y la geometría, por cuanto, hay dos maneras precisas de ubicar un cuadrado de lado c y cuatro triángulos rectángulos de lados a , b y c dentro de un cuadrado de lado $a + b$, tal como se observa en la Figura 56. Este es un hecho que observó Euclides y que estudia a fondo en el Libro II de *Los Elementos*: en el cuadrado de lado $a + b$, siendo a y b los segmentos que forman el ángulo recto, se puede descomponer de dos formas complementarias (Paulus, 1998, p. 258).

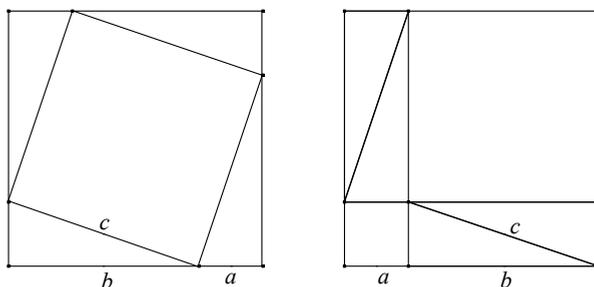


Figura 56. Teorema de Pitágoras-Cuadrado de lado $a + b$

Los dos cuadrados de la Figura 56 tienen la misma área, pues su lado es $a + b$. El cuadrado a izquierda advierte que $(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$ mientras que el cuadrado a derecha tiene área $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = a^2 + b^2 + 2ab$ y desde la lógica aristotélica se implica que cosas iguales a una tercera son iguales entre sí; de modo que $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$. Y si a cosas iguales quitamos cosas iguales es suficiente deshacerse de $2ab$ para hallar al fin de cuentas que $a^2 + b^2 = c^2$.

Otra demostración del Teorema de Pitágoras, conocida como el Método Indio, parece elaborada por Bhaskara y en la que dibuja sobre un cuadrado de lado

c que es la hipotenusa, cuatro triángulos interiores y diciendo “mira”, por simple inspección, muestra que $c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2$ (Figura 57).

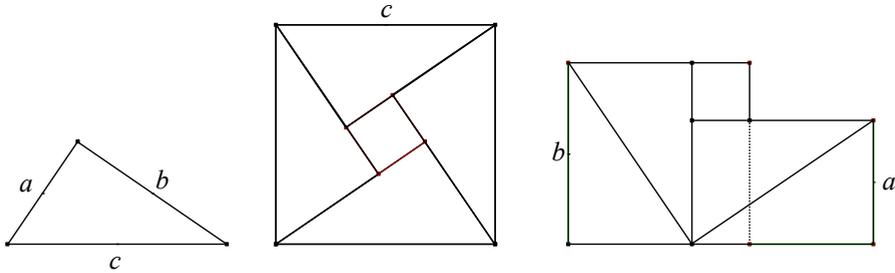


Figura 57. Teorema de Pitágoras-Método Indio o Demostración Bhaskara
Fuente: Soto (2003: 81).

El teorema es una propuesta geométrica que relaciona las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo. En la demostración de Bhaskara, la ubicación correcta de sendas copias del triángulo rectángulo y el cuadrado central, que los mismos configuran sobre el cuadrado de lado c , hacen evidente, por la vía de la disección que $c^2 = a^2 + b^2$ (Figura 58).

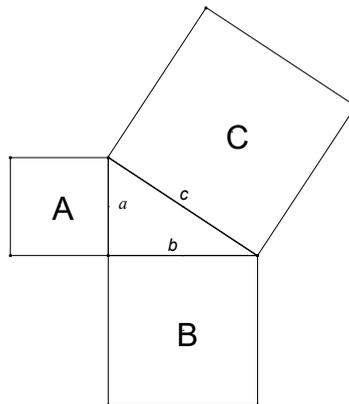


Figura 58. Teorema de Pitágoras

El teorema advierte que $A + B = C$ en términos de las áreas señaladas en el gráfico anterior o lo que es lo mismo, en relación a las medidas de los lados, que $a^2 + b^2 = c^2$ (Figura 59).

Una generalización mantiene la relación correspondiente para figuras semejantes, distintas al cuadrado, que respeten la proporcionalidad respecto de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, incluso para semicircunferencias.



Figura 59. Teorema de Pitágoras-Demostración Bhaskara - Generalización

Si se respetan las proporcionalidades, se sigue cumpliendo $A + B = C$ (Figura 59).

El resultado del teorema fue descubierto por los babilonios y utilizado por los pitagóricos, para que, desde allí, emergiera la infinita e innumerable lista de números irracionales y enseña de manera clara que cuadrado más cuadrado es igual a cuadrado.

9.2 EUCLIDES

Adaptación de Euclides (1991; pp. 7-15).

Lo que más se sabe de Euclides, el gran escritor de los Elementos, texto que cambia la orientación del pensamiento científico, es que fue profesor

en Alejandría y por la magna razón que más ha interesado su obra que su vida; se le conoce como el “*Elementador*”, dado que los Elementos es una obra elemental, es decir, básica, al punto de ser criticada, revisada, y punto de origen para otros modelos geométricos. En la traducción de María Luisa Puertas Castaños, se lee la aseveración de E. M. Forster, a la hora de presentar a Euclides en su célebre guía de Alejandría, asegura: “Nada sabemos de él: a decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre”.

Existen dos cosas seguras: la primera, que Euclides fue más joven que los discípulos de Platón y mayor que Arquímedes y al tiempo, coetáneo con el instaurador de la dinastía ptolemaica. La segunda, es que fue profesor he hizo escuela en Alejandría, donde dirigió su gran biblioteca a instancias de Ptolomeo I, su protector.

La referencia más antigua señala a Euclides como profesor en Alejandría y proviene de Pappo, en donde al parecer, Euclides y su escuela estudiaban la matemática elemental, dispuesta por aquella época, y al mismo tiempo la investigación avanzada, de la cual surge el método axiomático, a la que tuvieron que plegarse los científicos posteriores como Conón, Arquímedes y Apolonio; con lo cual, el método, que de hecho se sujetaba a errores, alcanzó la propagación, el impulso y la dimensión acarreada hasta ahora, para encontrar el dominio corregido y apropiado tal como se utiliza hoy.

Se estima que para el año 300 a. C, Euclides era ya un hombre maduro y por ello, los Elementos se suelen fechar con tal año. Como poco se sabe del autor se han propagado leyendas, como aquella de que un oyente en su escuela, al escuchar la demostración del primer teorema de su texto, preguntó sobre el tipo de ganancia que podía alcanzar con eso, a lo que el

maestro le pidió a un sirviente “Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende” y la segunda, por una réplica de su protector Tolomeo Sóter, de si había un camino menos fatigoso que los Elementos, para aprender geometría, a lo que Euclides de forma cortante respondió que “No hay camino de reyes en geometría”. Estas dos anécdotas, más que ciertas, parecen afirmaciones de alto significado pedagógico, siendo el conocimiento en sí mismo, valioso, edificante y se alcanza con una cuota de esfuerzo y sacrificio.

Algunos árabes han propuesto una historia audaz respecto del origen de Euclides, aducen que fue hijo de Naucrates, nieto de Zenarco y de Berenice, que tuvo que nacer en Tiro y vivió en Damasco y que los Elementos eran casi una copia del trabajo de un carpintero llamado Apolonio. Todo este revuelto de historias, anécdotas, leyendas y malentendidos, aumenta con el pasar del tiempo y han torpedeado recorrer la traza verdadera de su vida y en ocasiones de su obra.

De las obras escritas por Euclides, se disponen dos: los *Elementos* y los *Datos*, que son complementarias. Otra de sus obras es *Fenómenos*, en la que se dedica a la astronomía sustentada en la geometría esférica con aditamentos de la geometría plana de sus Elementos. Una cuarta obra es *Óptica*, en la que estudia la perspectiva y la visión directa. Un quinto tratado es *Sobre Divisiones de Figuras* y una más denominada los *Porismas*; obras que se traducen en una gravísima pérdida para la humanidad y donde al parecer, Euclides aborda cuestiones que no se pueden ni siquiera intuir ahora, pero de alto sentido matemático. Una obra adicional es *Sobre Cónicas*, en la que debió estudiar las secciones como la parábola, la elipse, la hipérbola y sus deformaciones que son la recta y la circunferencia. Un texto adicional es *Sobre Superficies* en la que estudiaba las áreas de algunas superficies como el cilindro, el cono, la

esfera y algunos sólidos de revolución. *Catóptrica*, es otra de sus obras, en la que se ocupa de los espejos. También se atribuyen a Euclides dos tratados mecánicos, uno llamado *Sobre lo Ligero y lo Pesado* y otro titulado *Sobre la Palanca*, obras en las que interrelaciona la geometría con la mecánica.

El alto renombre de Euclides está sentado sobre su tratado de elementos matemáticos y geométricos de su época. El libro *Los Elementos* se transformó, a la luz de los filósofos y académicos es un texto incontestable y perfecto de exposición científica, no solo de geometría sino de matemáticas. Todo el conocimiento aritmético allí vertido, se estudia desde un compendio geométrico que revitaliza el gran vínculo existente entre estas dos ramas del conocimiento. Los Elementos, ponen de relieve que, por aquella época, la matemática y la geometría no estaban escindidas. Los Elementos contienen 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y con tan poco y a la mano el motor de inferencia de la lógica aristotélica, presenta 465 proposiciones demostradas y distribuidas en 13 libros.

Pero los Elementos están lejos de ser un texto escolar, ni siquiera un libro corriente, no tiene un propósito, carece de dedicatoria, de índice, de un prólogo que señale los objetivos que tienen los argumentos, entre algunos detalles. Los Elementos son un largo discurso dirigido a convencer a sus coetáneos y discípulos a su cargo, pues esta obra fue escrita durante su permanencia en Alejandría.

Su obra magna comprende la geometría plana que estudia en los libros I al IV; la geometría del espacio, que revisa en los libros XI a XIII y justo en este último, finaliza con teoremas dirigidos a los sólidos platónicos; la teoría generalizada de la proporción se revisa en los libros V y VI; y la

teoría aritmética, en los libros del VII al IX. El libro X, es particular, pues, aparece asentada en él un estudio extenso de la inconmensurabilidad.

9.3 EL TEOREMA

Proposición 47

En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual (equiextenso) a la unión de los cuadrados construidos sobre los demás lados.

Vale la pena, antes de revisar la demostración y en este punto, argüir la anécdota comentada por John Allen Paulus en su texto, *Más allá de los números*. Cuenta que, el filósofo Tomas Hobbes se aficionó a la geometría desde la visita a la casa de un amigo; en su biblioteca encontró abierto el libro *Los Elementos* de Euclides justo en la proposición 47 y exclamó, “Por D... ¡Esto es imposible!” Entonces, leyó su demostración, la cual, lo remitió a leer la proposición anterior y esta lo condujo a la anterior, así, hasta que llegó a la primera. Este hecho lo convirtió en aficionado a la geometría. Más adelante, el mismo Hobbes cometería errores, al creer que con su habilidad geométrica, resolvería el problema de la cuadratura del círculo.

No vamos a hacer lo de Hobbes, pero sí a asegurar que al menos la demostración del teorema se sustenta en las proposiciones 35, 36, 37, 38 y 41.

Las proposiciones 35 y 36 rezan lo mismo: los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí.

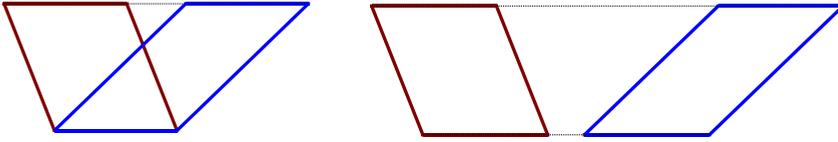


Figura 60. Proposiciones 35 y 36 de Los Elementos

Como lo indica la Figura 60, es posible que los paralelogramos compartan o no sus bases. Estas proposiciones acunan en su seno la fórmula del área de estos objetos geométricos, que es $area = b \times h$, donde b es la longitud de la base y h la distancia entre las paralelas.

Las proposiciones 37 y 38 aseguran que: los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí (Figura 61).

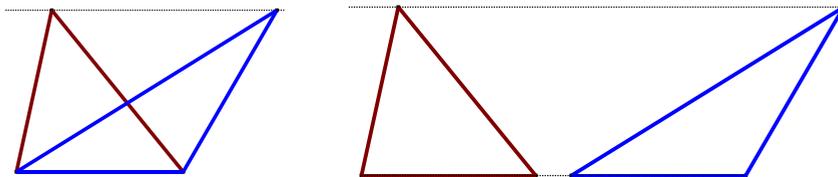


Figura 61. Proposiciones 37 y 38 de Los Elementos

Como en el caso de los paralelogramos, los triángulos pueden o no compartir sus bases, e incluso, compartir tan solo una parte cuando se solapan. Y también nos encontramos frente al caso de tener a mano infinitos triángulos y paralelogramos con la misma área. En este caso, subyace la fórmula de área para triángulos, $area = \frac{b \times h}{2}$.

La Proposición 41 asegura: si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo (Figura 62).

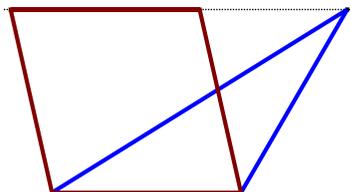


Figura 62. Proposiciones 41 de Los Elementos

En la demostración que sigue, se relaciona las proposiciones en las que se basa la demostración.

Demostración

Sea ABC un triángulo rectángulo que contiene el ángulo BAC como recto; se trata de demostrar que el cuadrado construido sobre BC es igual a los cuadrados construidos sobre los lados BA y AC (Figura 63).

Sobre BC se describe el cuadrado $BDEC$ y sobre los lados BA , AC los cuadrados GB y HC (Proposición 46); a través de A , se traza AL , paralela bien a BD o a CE y se trazan, además, las rectas AD y FC .

Entonces, como cada uno de los ángulos BAC , BAG son rectos, se sigue que, con la línea BA y sobre el punto A sobre ella, las dos rectas AC , AG no caen del mismo lado, y hacen ángulos adyacentes iguales a dos rectos. En consecuencia, CA queda en la misma recta que AG (Proposición 14).

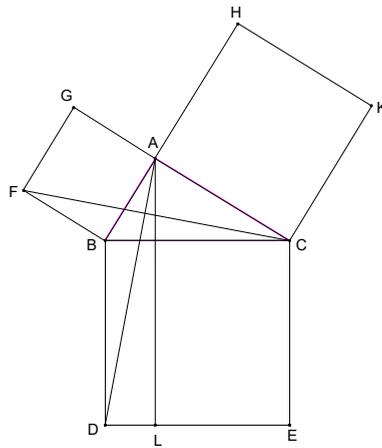


Figura 63. Demostración Teorema de Pitágoras

Por la misma razón BA queda en la misma recta que AH y dado que el ángulo DBC es igual al ángulo FBA , porque cada uno de ellos es recto, al sumar a cada parte el ángulo ABC , se encuentra que el ángulo total DBA es igual al ángulo total FBC .

Y desde que DB es igual a BC y también, los segmentos FB , BA son iguales, se encuentra que los dos lados AB , BD son iguales a los lados FB , BC respectivamente y el ángulo ABD es igual al ángulo FBC ; en consecuencia, la base AD es igual a la base FC y el triángulo ABD es igual al triángulo FBC (Proposición 4).

Ahora bien, el paralelogramo BL es el doble del triángulo ABD porque ellos están contruidos sobre la misma base y están entre las mismas paralelas BD , AL (Proposición 41).

Y el cuadrado GB es el doble del triángulo FBC porque los dos están contruidos sobre la misma base FB y están entre las mismas paralelas FB , GC (Proposición 41).

Y como dobles de cosas iguales son cosas iguales entre sí, se concluye que el paralelogramo BL es igual al cuadrado GB .

De forma similar, al trazar AE , BK se puede probar que el paralelogramo CL es igual al cuadrado HC y por ello, el cuadrado total $BDEC$ es igual a los dos cuadrados GB , HC siendo que el cuadrado $BDEC$ se ha descrito con BC y los cuadrados GB , HC sobre los lados BA , AC .

En síntesis, se ha demostrado que el cuadrado construido sobre BC es igual a los cuadrados construidos sobre BA , AC (Figura 63) (Soto, 2003: 76-78).

9.3.1 Argumentación

La belleza de este resultado se sustenta en diferentes vertientes; una es que aparece desde el seno de una de las figuras más simples de la geometría plana como es el triángulo y se relaciona con otra igualmente sencilla, el cuadrado. Más adelante se da paso a que los lados del triángulo rectángulo pueden sostener figuras semejantes, que mientras guarde la proporción referida a sus lados y la relación entre las áreas de tales figuras, se mantiene. Algo misterioso aparece aquí y por ello otros estudiosos han venido encontrando demostraciones del mismo hecho, haciendo que, una y otra y otra prueba, verifiquen de manera contundente esta realidad idílica, pasmosa y subyugante.

Euclides en su demostración, de manera mágica convierte triángulos en rectángulos, rectángulos en rectángulos de distinta forma y rectángulos en cuadrados, teniendo a mano tan solo una regla y un compás, abriendo el camino del estudio de la transformación de áreas de donde emergen los rompecabezas para evidenciar su teorema y la inquietud de transformar otras figuras en cuadrados; en particular, el problema de la cuadratura del círculo de cuya imposibilidad solo se conocería más tarde.

La sencillez y lo elemental que se hace transformar polígonos en cuadrados, es lo que realza la belleza del teorema.

El interés sobre este teorema, su belleza y su simplicidad, han hecho que aparezcan demostraciones tangibles en forma de puzzles y juguetes que se consiguen en tiendas de corte didáctico, esto hace que el teorema sea uno de los pocos que se puedan tocar y percibir con los sentidos. Estos juguetes extienden la veracidad del teorema al mundo tridimensional, siempre que sus piezas tengan el mismo grosor; así, la relación se mantiene con la suma de los volúmenes de las piezas (Figura 64).

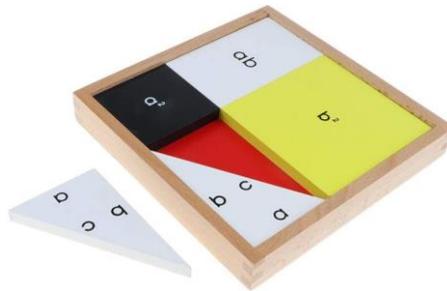


Figura 64. Teorema de Pitágoras - Modelo tridimensional

Fuente: Educación 3.0 (s.f.).

Es útil subrayar en la majestuosidad de este teorema; desde el pensamiento de algunos críticos antiguos, como Proclo, que escribe: “Quienes se han preocupado por investigar en la historia pasada, encontrarán que atribuyen este teorema a Pitágoras y aseguran que sacrificó un buey en honor a su descubrimiento. Por mi parte, mientras observo no sobre quien fue el que descubrió este maravilloso teorema, admiro más al autor de los Elementos, no solo por lo rápido que elabora la demostración sino porque es muy sencilla y lúcida” (Soto, 2003: 77).

Mataix asegura: “Muchas cosas, verdaderamente, parecen ofrecer la verdad y deducirse de los principios de la ciencia, pero se separan de estos principios hacia el error y engañan a los espíritus superficiales. Euclides ha dado también los procedimientos que emplea la inteligencia clarividente, y gracias a los cuales es posible ejercitar a los debutantes en el estudio de la Geometría, para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores. En los Elementos, Euclides ha realizado este trabajo, en donde enumeró separadamente y en orden los diversos géneros de falsos razonamientos, ejercitando para cada uno nuestra inteligencia mediante teoremas de todo tipo, donde opone lo verdadero a lo falso y donde hace concordar con la prueba la refutación del error. Así, este libro tiene por objeto el ejercicio y la purificación de la inteligencia, los <<Elementos>> son una guía segura y completa para la contemplación científica de los objetos de la geometría” (Mataix, 1986; pp. 20-22).

Plutarco también asigna el descubrimiento de este teorema a Pitágoras, y junto con Proclo, se preocupan, a partir de allí, de formalizar la teoría de los irracionales, y esto porque el número $\sqrt{2}$ aparece como constante de proporcionalidad sobre la diagonal de un cuadrado respecto de cualquiera de sus lados. Es decir, desde el teorema emerge una teoría que en su momento causó graves problemas al desarrollo de la aritmética griega y este hecho nutre al resultado de incomparable belleza y de singular misterio.

La discusión sobre los números irracionales comenzaría mucho más tarde, por una pregunta que surge de inmediato: ¿asumiendo que Pitágoras evidenció la veracidad del teorema sobre uno o dos triángulos e incluso sobre el doble de ellos, ¿cómo fue que estableció la generalidad? Pero sin duda, Euclides brinda una prueba novedosa e inteligente del mismo.

9.3.2 Desviación

¿Qué tienen de común las siguientes gráficas?

¿Puede calcular con los datos expuestos el área de la región no sombreada?

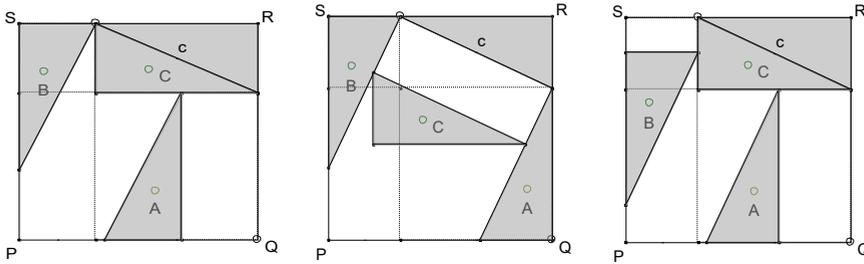


Figura 65. Triángulos rectángulos encajados al interior de cuadrados de igual lado

Se trata de cuatro triángulos rectángulos encajados al interior de cuadrados de igual lado sin solapamiento, triángulos que son congruentes. Por tanto, la región no sombreada tiene un área igual en cada instante, puesto que, para algunos triángulos, se ha aplicado una traslación y estas traslaciones mantienen forma y dimensión (Figura 65).

Tabla 22

Extracción de un triángulo de la figura Figura 65

	<p>Las dimensiones de los lados del triángulo rectángulo son a, b y c; en consecuencia, el cuadrado tiene lado $a + b$.</p> <p>Una forma de calcular el área de la región no sombreada es pensar que los triángulos son sectores sombreados, y lo demás, es la región iluminada de un recinto.</p>
--	--

Se puede pensar en una posición inicial como la que sigue (Tabla 22), en la que es evidente que la región no sombreada mide $a^2 + b^2$ (Figura 66).

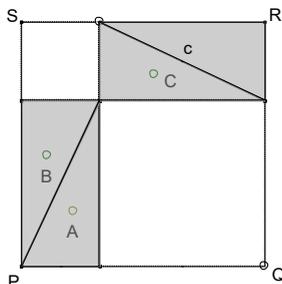


Figura 66. Visualización de triángulos rectángulos encajados al interior de cuadrados de igual lado

Las posiciones expuestas en el gráfico de la Tabla 22, son intermedias del recorrido que hace el triángulo A hacia el vértice Q, el triángulo B hacia S y el triángulo C hacia el vértice P. En cada punto del recorrido, mientras los triángulos no se solapan, el área no sombreada es $a^2 + b^2$, incluso en el recorrido final de esos tres triángulos que muestra la Figura 67.

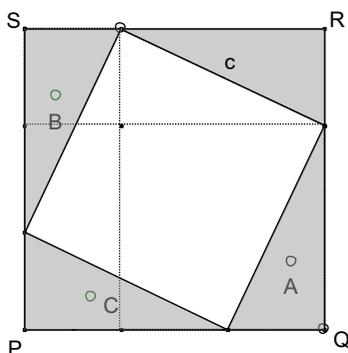


Figura 67. Áreas de Triángulos rectángulos encajados al interior de cuadrados de igual lado

Pero en este momento, es claro que el área sin sombrear es c^2 , de modo que no hay alternativa; es concluyente que $a^2 + b^2 = c^2$ siendo esta prueba una demostración dinámica del teorema y demasiado evidente, enteramente visual.

Las demostraciones que se han elaborado para la Proposición 47 del libro *Los Elementos de Euclides*, son abundantes; hasta 1972 se conocían más de 364 clasificadas entre algebraicas y geométricas, cuaterniónicas y dinámicas y aparecen en el libro *The Pythagorean Proposition*, condensado por el profesor *Elisha Scott Loomis* con el apoyo de *National Council Of Teachers Of Mathematics*. Al parecer, por estos días, el número de demostraciones supera al mil.

El Teorema de Pitágoras es uno de los más importantes y erróneamente ha sido llamado *Pons Asinorum* (Puente de asno) y también Teorema del Carpintero, por su relación con una escuadra. Fue demostrado alrededor del año 540 A.C. Se ha constituido en unos de los teoremas favoritos de los geómetras. Algunas de las demostraciones geométricas son accesibles a los profesores y se basan en la semejanza de triángulos, del mismo modo que el limitado número de pruebas basadas en métodos algebraicos.

En este punto, vale rendir tributo a quien carga el nombre del teorema: Pitágoras; quien nació en la Isla de Samos, donde su padre Mnessarch, obtuvo su ciudadanía; la madre de Pitágoras Pithay, viajaba con su esposo, quien se interesaba en los negocios. Durante el año 569 A.C llegaron a Tiro, donde nació Pitágoras. A los 18 años Pitágoras, secretamente abandonó Samos, para alejarse de la tiranía de Polícrates y arribó a la isla de Lesbos, donde un tío lo recibió hospitalariamente. Durante dos años recibió instrucción de Ferekid, quien, para Anaximandro y Thales, tenía reputación de filósofo.

Después que Pitágoras adquirió ideas religiosas, desde las ideas de sus profesores y de él mismo, acudió ante Anaximandro y Thales de Mileto, quien tenía cerca de 90 años, a estudiar cosmografía, es decir, Física y Matemáticas. De Thales es conocido que se apropió de las ideas del año solar de los egipcios; conocía cómo calcular los eclipses de sol y de luna y determinar la altura de una pirámide utilizando su sombra; así mismo, inició las ideas de la Geometría Proyectiva y descubrió algunas características de los triángulos isósceles.

Se asegura que durante 21 años Pitágoras estuvo en Egipto de donde parte a Babilonia, que era un centro comercial donde indios, chinos, jónicos y gentes de otros pueblos convivían y donde él mismo durante 12 años, tuvo la oportunidad de aprender lo más rico del conocimiento de estos pueblos. Regresa a su pueblo natal cuando tenía 56 años de edad. Después de una corta estadía en la isla de Delos, donde fundó su escuela, habló durante medio año al pueblo griego para familiarizar a la gente con sus ideas religiosas, científicas y sociales.

El inicio de las actividades docentes de Pitágoras en la isla de Samos, fue desencantadora; tuvo que pagar a su primer estudiante, quien también se llamaba Pitágoras, hijo de Erátocles. Decide abandonar su ingrata tierra y cobrar mejor suerte en ciudades más cultivadas de la magna Grecia, en Italia. Se radica en Creta, donde su escuela alcanza a tener 600 estudiantes y en la que conoció a la bella Theana con quien se casó cuando alcanzaba los 60 años de edad. La escuela que él fundó tenía una formación rigurosa en matemáticas y alta abstracción en filosofía. Se integraba la formación de sus alumnos con temas de lectura sobre ética, la inmortalidad del alma y la trasmigración.

Alrededor del año 490, cuando la Escuela Pitagórica alcanzaba su mayor esplendor y brillo, aparece Hipasos, que acusó a Pitágoras de ideas contrarias a la verdadera formación de una persona. La escuela tuvo que cerrar, las propiedades de Pitágoras fueron confiscadas y él fue enviado al exilio.

En los 16 años siguientes, Pitágoras vivió en Tarento; ya tenía 95 años, se asegura que vivió cuatro años más en medio de la pobreza, alcanzando a conocer que el edificio de la escuela que había fundado con sus pertenencias habían sido incineradas y aniquilada la disciplina que había fundado.

A continuación, se muestran dos pruebas por semejanza de triángulos del teorema y una adicional por la vía de la disección, manteniendo la nomenclatura utilizada por el profesor Loomis.

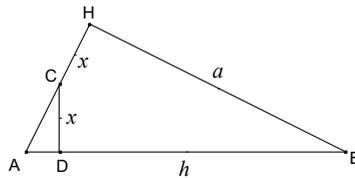


Figura 68. Demostración del teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos-Prueba 1

Fuente. Soto (2003, p. 93).

Prueba 1. (1859, Richardson)

Se toma BD igual a BH y por D se traza una perpendicular a AB que corta a AH en el punto C , formando, de este modo, los triángulos rectángulos AHB y ADC que son semejantes; además $CH = CD = x$, puesto que, por construcción, el punto C equidista de H y de D (C está en la bisectriz del ángulo HBD) (Figura 68).

Por semejanza de los triángulos, se tiene $\frac{b}{a} = \frac{h-a}{x}$ y $\frac{b}{h} = \frac{h-a}{b-x}$. De la primera igualdad se infiere $bx = ah - a^2$ y de la segunda, $b^2 - bx = h^2 - ah$. Al reemplazar el valor de bx de la primera en la segunda igualdad, se llega a $b^2 - ah + a^2 = h^2 - ah$ y por ello, $b^2 + a^2 = h^2$.

Prueba 2.

Se prolonga AB hasta C , haciendo que BC sea igual con BH y enseguida se dibuja CD perpendicular con AB . Se extiende AH hasta D formando los triángulos rectángulos semejantes ABH y ADC ; de este modo, el punto D queda en la bisectriz del ángulo HBC y en consecuencia los segmentos HD y DC son iguales a x (Figura 69) (Soto, 2003; pp. 93-94).

Por la semejanza expresada, de los triángulos rectángulos, se tiene:

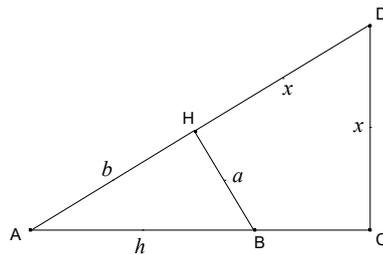


Figura 69. Demostración del teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos-Prueba 2

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{a+h} \text{ y } \frac{b}{a+h} = \frac{h}{b+x}.$$

De la primera igualdad, resulta $a^2 + ah = bx$ y de la segunda, $b^2 + bx = ah + h^2$. Al disponer el valor bx de la primera en la segunda, se tiene $b^2 + a^2 + ah = ah + h^2$ y cancelando ah , en definitiva, se tiene $b^2 + a^2 = h^2$.

Prueba 3. (Una de las disecciones de Henry Perigal, 1873).

Este tipo de demostraciones son de carácter visual, pues se dejan imprimir dinamismo. En este caso, se muestran los dos momentos, el inicial y el final con algunas indicaciones.

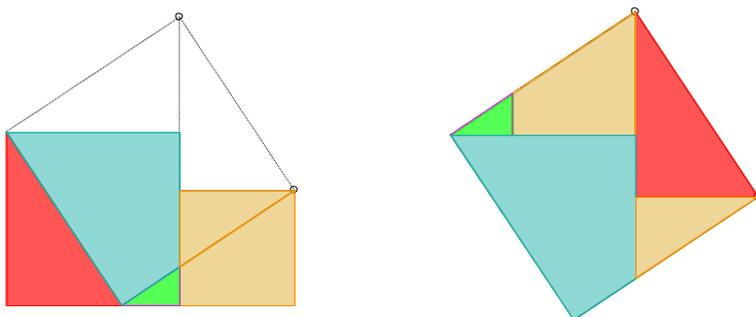


Figura 70. Demostración del teorema de Pitágoras por disección

En la imagen de la izquierda de la Figura 70, el triángulo base rectángulo es el rojo. El cuadrado anaranjado tiene dos piezas y como lado el cateto pequeño, mientras que las tres piezas restantes configuran el cuadrado del cateto mayor. Las mismas cinco piezas conforman el cuadrado de la figura a derecha, cuyo lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo original.

En el texto de Fundamentos de Matemáticas, del profesor Fernando Zalamea de la Universidad Nacional de Colombia, en sus primeras páginas, aparece como ejercicio la imagen izquierda de la Figura 71, mismo que presenta una demostración visual del teorema de Pitágoras y que solo requiere el movimiento de dos piezas: los triángulos señalados como A y B (Figura 71). Es sugestiva esta demostración, en cuanto que, es una especie de jaque mate en solo dos movimientos. Fíjese que el cuadrado a derecha, tiene como lado la hipotenusa del triángulo

rectángulo inicial, mientras que, a izquierda, aparecen adheridos los cuadrados de los catetos del mismo triángulo.

Todo lo dicho sobre el Teorema de Pitágoras, prueba que es una buena justificación para estudiarlo.

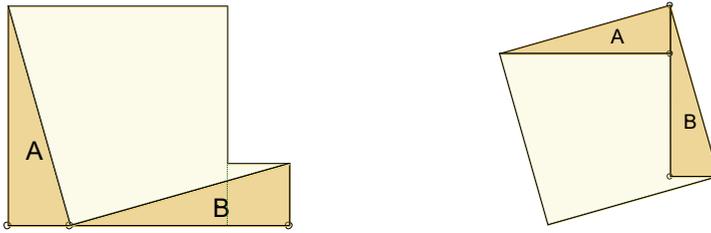


Figura 71. Demostración visual del Teorema de Pitágoras

CAPÍTULO 10.

LEY DE RECIPROCIDAD CUADRÁTICA

10.1 CONTEXTO

Johann Carl Friedrich Gauss dio sentido a la teoría de números, rama de la matemática que por su tiempo era un cúmulo desorganizado de resultados desligados. Gestiona esta rama movilizandando la teoría de la divisibilidad, haciendo compacta su simbología y dando sentido a sus objetos de estudio. Para ello, utiliza el símbolo " \equiv " con significado mayor que el del signo de igualdad " $=$ ".

Dados los números enteros a y b se dice que son congruentes módulo m y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$, siempre que la diferencia $a - b$ sea múltiplo de m . En otras palabras $a - b = mk$, donde k , es también un número entero. Si el módulo m se sobreentiende de manera tácita se escribe $a \equiv b$.

La relación de congruencia es de equivalencia; esto significa que su comportamiento es similar al de la igualdad y por ello, si $a \equiv b$ y $c \equiv d$ se tiene que $a + c \equiv b + d$, $ac \equiv bd$ y $a + c \equiv b + c$. Con esto, todo entero a es congruente con un único r , siendo $0 \leq r < m$. r es el resto de la división de a entre m en concordancia con el algoritmo de la división de Euclides, de donde se toma el residuo por defecto de manera preferible; en este sentido, $a \equiv r$ es cierta para una multitud infinita de enteros a y todos ellos conforman una clase, la de los números de la forma $mk + r$.

Por ejemplo, si $m = 5$, los posibles residuos r son 0, 1, 2, 3 y 4. La clase $\bar{2}$ es el conjunto de los enteros que al dividirse por 5 dejan residuo 2; así, $\bar{2} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$. El conjunto de residuos configura una estructura de grupo con la adición y de cuerpo, si se agrega la

multiplicación, cuando el módulo m es un número primo. Interesan, de ese conjunto, los valores que son primos relativos con el módulo, pues configuran un grupo abeliano con la multiplicación. Por ejemplo, si $m = 8$, los primos relativos con él son $\{1, 3, 5, 7\}$. La gracia de este conjunto, que se denomina, conjunto de unidades es la posibilidad de resolver ecuaciones lineales de la forma, $ax \equiv b \pmod{m}$ de manera efectiva, siempre que el *máximo común divisor* entre m y a sea 1.

La Tabla 23, indica que las unidades de \mathbb{Z}_8 configuran un grupo abeliano con la multiplicación.

Si se requiere resolver $3x \equiv 5 \pmod{8}$ y siendo $3 \equiv 3$, es suficiente multiplicar por 3 que es inverso de sí mismo (ver Tabla 23), para tener $9x \equiv 15 \pmod{8}$, es decir $x \equiv 7 \pmod{8}$, que se alcanza restando $8x \equiv 8$. Esto tiene un alto significado: cada uno de los números de la clase $\bar{7} = \{\dots - 9, -1, 7, 15, 23, \dots\}$ satisfacen la congruencia $3x \equiv 5 \pmod{8}$, ponga por caso, $x = 31$, entonces $93 \equiv 5 \pmod{8}$. La solución de $3x \equiv 5 \pmod{8}$ es en consecuencia, el conjunto de todos los números enteros de la forma $x = 8t + 5$.

Tabla 23

Unidades de \mathbb{Z}_8 forman un grupo abeliano con la multiplicación

×	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

El ejemplo anterior es un caso particular de un resultado general que se establece como teorema; el teorema reza: si $(a, m) = 1$ la ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene una única solución; esta única solución es un conjunto infinito de valores; es decir, una única clase \bar{r} con $0 \leq r < m$.

Un resultado más general es el siguiente: si $(a, m) = d$; entonces la ecuación $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene solución siempre que d sea un divisor de b . Las soluciones son d clases distintas, con $0 \leq d < m$.

Por esta razón, se tiene que la ecuación $6x \equiv 15 \pmod{8}$ carece de solución, dado que el 2 no divide al 15. En cambio, la ecuación $6x \equiv 10 \pmod{8}$ tiene solución porque $(6, 8) = 2$ y 2 es un divisor de 10. Se divide la ecuación por 2 para obtener $3x \equiv 5 \pmod{4}$ que tiene solución única $x = 3$ y desde allí, se construye la otra solución con solo sumar 4. De ese modo, las soluciones de la ecuación son las clases $x = \bar{3}$ y $x = \bar{7}$.

Un caso especial aparece al tomar como módulo a un número primo p , si ocurre esto, el conjunto de las unidades es el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$, que conforma un grupo abeliano con la multiplicación. Este es el caso, que como ejemplo se exhibe enseguida, al tomar el primo $p = 7$ (Tabla 24).

En general, la estructura $(\mathbb{Z}_p, +, \times)$, es un cuerpo, cuando p es primo.

Tabla 24

Unidades de \mathbb{Z}_7 forman un cuerpo

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5

3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Tener en mente una tabla como la anterior es de utilidad para resolver cuestiones como las siguientes: encontrar el menor número positivo cuyo triplo aumentado en cinco, deja residuo 2 al dividirse por 7. Este problema particular deriva en la congruencia $3x + 5 \equiv 2 \pmod{7}$.

La Tabla 24, asegura que lo primero por hacer es multiplicar por el inverso de 3 que es 5, para obtener $15x + 25 \equiv 10 \pmod{7}$ o lo que es igual $x + 4 \equiv 3 \pmod{7}$ que a su vez es idéntica con $x \equiv 6 \pmod{7}$. De modo que la congruencia original la satisfacen todos los números de la forma $x = 7n + 6$, en particular el número 6.

De inmediato se piensa en congruencias no lineales, por ejemplo, cuadráticas, cúbicas, cuárticas, quinticas; para ellas, la situación no es tan simple. Por ejemplo, la congruencia $2x^2 - 2x \equiv 0 \pmod{4}$, tiene a todas las clases $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ y $\bar{3}$ como solución, en cambio, $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ no tiene solución alguna.

El Teorema de Lagrange brinda una alternativa, pues asegura que, si $h(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros de grado n y p un número primo, la congruencia $h(x) \equiv 0 \pmod{p}$ tiene a lo sumo n soluciones.

Del mismo modo, se hace factible retraer la idea de sistema de congruencias, aquí no son efectivos los métodos de resolución para sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, una alternativa aparece con

el Teorema Chino del Residuo, resultado publicado por el matemático chino Sun Tzu, en el siglo III de nuestra era. Este teorema asegura que si m_1, m_2, \dots, m_r son enteros positivos, primos entre sí dos a dos, el sistema $x \equiv a_1 \pmod{m_1}, x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv a_r \pmod{m_r}$ tiene solución, cualquiera que sea el conjunto a_1, a_2, \dots, a_r , y que esta solución, es única módulo $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$.

Resolver un sistema de congruencias propone mayor diligencia. El problema de identificar el menor entero positivo que deja residuo 21 al dividirse por 5, que al dividirse por 7 deja residuo 1, y que al dividirse por 11 deja residuo 6, confluye en establecer el sistema $x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 1 \pmod{7}, y x \equiv 6 \pmod{11}$. Como todos los módulos son números primos, son primos entre sí dos a dos y es factible aplicar el Teorema Chino del Residuo.

La primera congruencia asegura que el número buscado es de la forma $x = 5m + 2$, dato que al disponerlo en la segunda replica como $5m + 2 \equiv 1 \pmod{7}$, congruencia que se multiplica por el inverso de 5 que es 3; así $15m + 6 \equiv 3 \pmod{7}$ y que termina en la congruencia $m \equiv 4 \pmod{7}$. Así las cosas, m es un número de la forma $7s + 4$, lo cual, a su vez dispone que $x = 5(7s + 4) + 2$, o mejor, $x = 35s + 22$.

Resta poner esta forma en la tercera congruencia, para asegurar que $35s + 22 \equiv 6 \pmod{11}$, equivalente con $2s \equiv 6 \pmod{11}$. Se hace necesario multiplicar por 6, inverso de 2 módulo 11 para conseguir $12s \equiv 36 \pmod{11}$ o mejor $s \equiv 3 \pmod{11}$ lo que afirma que s es un número de la forma $n = 11r + 3$, lo que determina $x = 35(11r + 3) + 22$, que se reduce a $x = 385u + 127$. De modo que el menor entero positivo que logra el efecto buscado es 127; los demás, arman una progresión aritmética

infinita con solo sumar o restar 385 tal y como lo aduce el Teorema Chino del Residuo.

En contexto, hace falta analizar un poco la función parte entera $[x]$, que se define de la manera que se indica en la Figura 72.

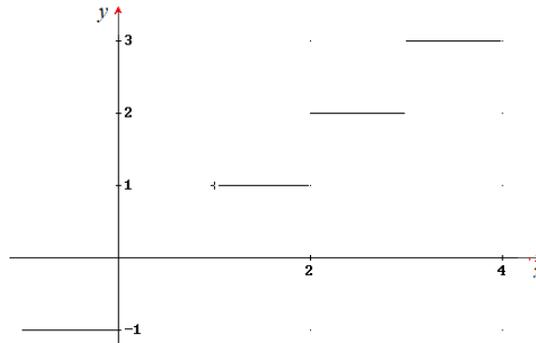


Figura 72. Parte entera de un número real

Esta función logra que todos los números reales en su expansión decimal infinita, se afilien con su parte entera, es decir, con la parte a izquierda de la coma en la notación decimal latina.

Desde Teorema de Pitágoras, que se esquematiza con la expresión $x^2 + y^2 = z^2$ que inspiró a grandes matemáticos, Euler pensó en la ecuación de la forma $x^2 + qy^2 = p$ donde todos sus elementos son números enteros y p es un número primo. A este tenor, Euler fue el primero en proponer la Ley de Reciprocidad Cuadrática en 1772, expresando que “Si existe un x tal que $x^2 - p$ es divisible por q entonces p se dice un residuo o resto cuadrático de q . Si no existe tal x , p se dice un no residuo cuadrático de q ” (Newman, 1979: 229).

La *Ley de Reciprocidad Cuadrática* tiene dos partes.

1. Si alguno de los dos, p o q , números primos, es de la forma $4k + 1$, entonces, p es un residuo cuadrático de q si y solo si q es un residuo cuadrático de p .
2. Si ambos valores p y q son primos de la forma $4k + 3$, entonces, p es un residuo cuadrático de q si y solo si q es un no residuo cuadrático de p .

Al escoger $p = 13$ y $q = 17$ como primos de la forma $4k + 1$, se encuentra para la ecuación $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$ la colección infinita de soluciones 8, 9, 25, 26, 42, 43, 59, 60, 76, 77, 93, 94, ...

Su ecuación par dual $x^2 \equiv 17 \pmod{13}$ presenta como solución la colección de valores que inicia con 2, 11, 15, 24, 28, 37, 41, 50, 54, 63, 67, 76, 80, 89, 93, ...

Fíjese en este caso que las dos alternativas de ecuaciones tienen solución, tal y como lo asegura la ley de reciprocidad cuadrática.

Al tomar los primos de la forma $4k + 1$, $p = 29$ y $q = 17$ ninguna de las ecuaciones cuadráticas $x^2 \equiv 17 \pmod{29}$ ni $x^2 \equiv 29 \pmod{17}$ tienen solución.

Al tomar primos de la forma $4k + 3$, digamos $p = 11$ y $q = 7$, la ecuación $x^2 \equiv 7 \pmod{11}$ carece de soluciones, mientras que las soluciones de la ecuación $x^2 \equiv 11 \pmod{7}$ tiene solución que inicia con los valores 2, 5, 9, 12, 16, 19, 23, 26, 30, 33, 37, 40, 44, 47, 51, 54, ...

La *Ley de Reciprocidad Cuadrática* es uno de los resultados más interesantes de la teoría de números, ya existen más de dos centenares y medio de pruebas; la primera de ellas fue exhibida por Gauss en 1796, en su tesis doctoral a sus veinte años; en su libro *Disquisiciones de Aritmética*, aparece como uno de los primeros resultados. Gauss elaboró

ocho pruebas del mismo teorema, dos de las cuales se publicaron de manera póstuma.

Cuando se escoge $p = 2$ todo número es un residuo cuadrático, esta es la razón por la cual se toman en las ecuaciones solo primos impares.

Para un número entero a y un primo p , el Símbolo de Legendre se define así:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ no divide a } a \text{ y } a \text{ es un cuadrado módulo } p \\ -1 & \text{si } p \text{ no divide a } a \text{ y } a \text{ es un no cuadrado módulo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ depende solamente del resto de a módulo p : si $a^* \equiv a \pmod{p}$, entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a^*}{p}\right)$. Este resultado es de vital importancia en la demostración que aparecerá más adelante.

De modo que, por proponer algunos ejemplos, $\left(\frac{35}{29}\right) = \left(\frac{52}{29}\right) = 1$, mientras que $\left(\frac{46}{17}\right) = \left(\frac{63}{17}\right) = -1$ y a la vez $\left(\frac{58}{29}\right) = \left(\frac{87}{29}\right) = 0$.

En efecto, $x^2 \equiv 35 \pmod{29}$ tiene como solución la lista que inicia con 8, 21, 37, 50, 66, 79, 95, ...; $x^2 \equiv 52 \pmod{29}$ presenta como solución 9, 20, 38, 49, 67, 78, 96, ...

Las ecuaciones $x^2 \equiv 46 \pmod{17}$ y $x^2 \equiv 87 \pmod{17}$ carecen de solución, y en el caso $x^2 \equiv 58 \pmod{29}$, las soluciones aparecen de manera canónica al tomar los múltiplos de 29; por tal razón se define $\left(\frac{58}{29}\right) = 0$.

Un asunto de especial importancia para la demostración, resulta en reconocer que el símbolo de Legendre es multiplicativo, esto es: para cualquier par de números enteros a y b se cumple $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \times \left(\frac{b}{p}\right)$, aquí

debe observarse que si a y b son cuadrados, por ejemplo $a \equiv c^2 \pmod{p}$ y $b \equiv d^2 \pmod{p}$, entonces $ab \equiv (cd)^2 \pmod{p}$. A pesar de que no es posible aclarar el por qué, el producto de dos no-cuadrados, puede ser un residuo cuadrático.

10.2 CARL FRIEDRICH GAUSS

La siguiente sección consiste en una adaptación de Dios Creo los Números (2007; pp. 493-499) y de Newman (1979; pp. 232-237).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemán, el mayor matemático de todos los tiempos; escondió trabajos como el de las Geometrías No Euclidianas durante mucho tiempo, hasta el momento en que Bolyai las da a conocer y existen testimonios de que se adelantó al trabajo de otros matemáticos de renombre. Su genialidad se descubrió desde temprano, a los diez años, por ejemplo, en su escuela primaria descubre la fórmula de producción de los números triangulares ante la tarea impuesta por su profesor, de sumar los números del uno al cien. En la pizarra que dejó sobre el escritorio de su profesor, al minuto de impuesta la tarea, escribió 5050. Luego de más de una hora, los otros chicos fueron ubicando sus pizarras una tras otras hasta armar una pila. El profesor J.G Bütner, debió demorarse un tanto, al hacer el cálculo y calificar. La única pizarra que contenía el resultado correcto, era la última, la de Carl. Este episodio que en sus últimos años comentaba el propio Gauss con satisfacción, marcaría la traza decisiva en su formación, puesto que, el mismo profesor Bütner, instaría a los padres del chico de que le permitieran recibir clases especiales de matemáticas en jornada extra-horaria. Los mismos padres habían reconocido el talento de su hijo cuando a los tres años de edad corrigió una suma que su padre realizó con error, en el pago de los jornales de unos hombres a su cargo.

Su padre, Gebhard Gauss, nacido en 1744, había escalado a una posición social media con su fuerza de trabajo; de jardinero, albañil, obrero y capataz, no tenía una clara formación académica; la madre de Carl, Dorothea, poseía un sentido práctico y era la segunda esposa de Gebhard. Habiéndose casado en 1776, trajeron al mundo a Carl, quien nació en la ciudad de Brunswick.

El talento de Gauss era grande. A sus diez años podía calcular, con facilidad, raíces cuadradas, recitando hasta cincuenta cifras decimales con exactitud; más adelante, encontraría errores en el desarrollo de tablas logarítmicas. Su habilidad en el cálculo lo acompañó hasta el final de sus días.

A los quince años de edad su fama corría en su colegio y fue tal que, el duque de Brunswick, Carl Wilhelm Ferdinand, le otorgó un estipendio para acompañar su formación académica en el Collegium Carolinum de Brunswick. En 1795 abandona el colegio, pero por esa época ya había producido una fórmula de aproximación de la cantidad de números primos menores que cualquier n . Por la vía experimental de las cuentas, notó que $\pi(n) \sim \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$. Gauss refinó esta fórmula y la probó hasta $n = 3000000$.

Abandona Brunswick para estudiar en la Universidad de Gotinga. En 1796 demuestra que el polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás utilizados a la forma euclídea, problema que había desafiado hasta ese momento a matemáticos profesionales y aficionados, inclusive, desde los antiguos griegos. Pronto, consiguió demostrar que todo polígono de un número de lados $m = 2^n F_r$, siendo F_r un primo de

Fermat, podía ser construido con regla y compás¹. Con solo dos años de permanencia en Gotinga, se dio cuenta de que nadie podía ayudarlo en el ámbito matemático y regresa a su ciudad Brunswick a escribir su tesis doctoral, cuyo tema fue el Teorema Fundamental del Álgebra, el cual asegura que todo polinomio de grado n con coeficientes reales, tiene exactamente n raíces, contando las múltiples y las complejas, que se presentan por pares de valores conjugados.

Elaborada su tesis doctoral retorna su atención a la Teoría de Números, rama de la matemática con origen en los antiguos griegos, de la que los pitagóricos demostraron algunos hechos. Los pitagóricos, por ejemplo, por la vía de la contemplación, descubrieron que la suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto. Euclides, demostró que el conjunto de los números primos es infinito y también algunos resultados en torno de los números perfectos pares.

Desde la época griega, esta rama se había enriquecido con resultados desordenados y sin una cimentación sólida. Pierre de Fermat había conjeturado que la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para $n \geq 3$, es imposible en los números naturales. Lagrange había demostrado que cada entero se podía escribir como la suma de no más de cuatro cuadrados perfectos y Goldbach, aseguraba que todos los pares mayores que dos se podían escribir como la suma de dos números primos. Por su parte, Jhon Wilson también propuso que p era primo si y sólo si, el número $(p - 1)! + 1$ era múltiplo de p , test de primalidad, costoso en términos de cálculo, en el sentido en que el factorial crece de manera vertiginosa, y de este modo,

¹ Los primos de Fermat son de la forma $2^{2^n} + 1$, y en el momento, la lista es escasa.

determinar la primalidad de un número a través de este resultado, se convierte en una tarea colosal.

Es entonces, cuando aparece en escena Gauss y en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, introduce la noción de congruencia; noción centrada en la teoría de la divisibilidad y con ella, hace de la Teoría de Números un cuerpo integral único.

Su magna obra fue publicada cuando apenas se acercaba a los 25 años y en un 70%, es un estudio profundo de la Teoría de Congruencias. Por el año 1795, Gauss había leído sobre la ley de reciprocidad cuadrática que había enunciado y demostrado de manera incompleta, el matemático francés Adrien-Marie Legendre. Gauss elaboró la primera de sus demostraciones de este resultado cuando tenía 19 años. Se debe explicar que la ley es fundamental en la aritmética superior y no es de fácil comprensión ni demostración. El hecho de que un muchacho de 19 años demostrara este hecho, otorga el significado de la existencia de Gauss, advirtiendo que su talento era excepcional, es decir, que se trataba de un matemático prominente y no de una persona simplemente competente para esta ciencia.

Advertir la capacidad talentosa de Gauss, puede inferirse del influjo causado en matemáticos de talento como Dirichlet, quien se dice que dormía con las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss bajo su almohada, para luchar con párrafos y entenderlos a profundidad, antes de acostarse y dormir. A Dirichlet la humanidad le debe el hermoso resultado de que, toda progresión aritmética $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, a + 5b, \dots$, con $(a, b) = 1$, contiene infinitos números primos, resultado demostrado desde el análisis matemático, a pesar de pertenecer a la teoría de números;

es decir, es un resultado que pertenece al mundo discreto, pero, para su demostración, se hizo necesario dar pasos por un mundo continuo.

Recordemos que, la ley de reciprocidad cuadrática asegura que, si p y q son números primos y ninguno de ellos es congruente con 3 módulo 4, entonces, o bien, tanto $x^2 \equiv p \pmod{q}$ como $x^2 \equiv q \pmod{p}$ tienen solución, o bien, ni $x^2 \equiv p \pmod{q}$ ni $x^2 \equiv q \pmod{p}$ tienen solución.

De otro lado, si p y q son números primos y son congruentes con 3 módulo 4, entonces una y una sola de las siguientes ecuaciones es válida: $x^2 \equiv p \pmod{q}$ ó $x^2 \equiv q \pmod{p}$ pero no las dos al tiempo.

Gauss llamó a este resultado el Teorema de Oro (Theorema aureum) y también la Gema de la Aritmética (gemma arithmeticae); y así mismo, la rama de Teoría de Números era considerada por él como la reina de las matemáticas, y en consecuencia, la reina de las ciencias.

Con la publicación de *Disquisitiones Arithmeticae*, su protector le aumenta el estipendio y con sus mejores finanzas, hacia 1801 se dedica a estudiar a fondo la teoría planetaria. Por los cálculos elaborados por él, astrónomos encontraron el Asteroide Ceres, justo en el lugar exacto que había indicado Gauss. Algunos consideraban a Ceres como un nuevo planeta. Este hecho agrandó el prestigio de nuestro matemático, al punto que, muchas universidades le prodigaron títulos honoríficos.

Con la posibilidad de un ámbito económico estable, contrae nupcias en 1805 con Johanna Osthoff, un año después, Joseph, el primogénito iluminaría la felicidad de la pareja y en 1808, una niña aumentaría el número de los integrantes de la familia, su nombre fue Wilhelmina.

En 1806, su protector había muerto por las heridas causadas en una batalla contra Napoleón, quien subyugó al pueblo alemán. Bajo este yugo, por el hecho de que Gauss era profesor, fue obligado a pagar dos mil francos de impuesto, una fortuna, sin duda, que Gauss no poseía. En el ambiente académico se propagó esta noticia y entre ellos, el astrónomo Olbers y el matemático Laplace, intentaron pagar este impuesto en su nombre, pero el mismo Gauss rechazó tales ofertas con amabilidad. El cuento se subsanó al ser puesto ese rubro de manera anónima, cuenta que por la condición de ser enviada por un desconocido, no la pudo rechazar, pero de manera altruista y generosa, pagaba como una deuda al realizar una cantidad abundante de donaciones tal y como si pagara un préstamo con intereses.

Johanna murió en 1809 dejando al científico envuelto en profunda tristeza, murió después de un mes de dar a luz a su tercer hijo Ludwig quien también murió a los seis meses de vida. Un año más tarde y con la tarea de proteger a sus hijos con la figura materna, se casa con la mejor amiga de su extinta esposa, Minna Waldeck, quien le dio tres hijos más. Minna, sufrió de varias enfermedades, y en el año 1831 muere, diagnosticada por una neurosis histérica.

La actividad docente de Gauss, fue pobre, pero esto le dio libertad para inspeccionar no solo el curso teórico de los entes que indagaba, sino aplicaciones de la matemática. El final de su vida acaeció el 23 de febrero de 1855, poco antes de cumplir los 75 años. Dejó un legado en muchos frentes: como creador del Método de Mínimos Cuadrados que permitía predecir el comportamiento lineal de un fenómeno, la Campana de Gauss, que avizora el comportamiento de los datos en la ocurrencia de un fenómeno que bota datos de carácter continuo; se adelantó al trabajo geométrico del hijo de uno de sus amigos, Johan Bolyai, creador conjunto

de las Geometría No Euclidianas, preconizó el estudio de las superficies curvas, demostró el teorema fundamental del álgebra e hizo de Gotinga el centro europeo de la época en el universo matemático. Su obra se agiganta al reconocer que en su poco trasegar docente, tuvo la capacidad de atraer a mentes brillante, como las de Bernhard Riemann y Richard Dedekind, dos mentes eximias y profundamente creativas.

El 30 de marzo de 1796 marca el momento en que Gauss deja de interesarse por la filología, decide dedicar su vida a las matemáticas desde el momento en que demuestra la posibilidad de la construcción del polígono regular de 17 lados con regla y compás, a usanza euclidiana. En este momento toma también la decisión de llevar un cuaderno de notas, que denomina su diario científico; este diario solo tiene 19 páginas con 149 resultados escritos con suma brevedad; la última de las mismas está fechada el 9 de julio de 1814. Este diario, con anotaciones se publicó cuarenta años después de la muerte de su autor y aparecen notas que fueron descubiertas después por matemáticos de renombre; algunas de las anotaciones vienen cifradas y con seguridad se escribieron para que sean entendidas solo por su autor, tal como la del 10 de julio de 1796, que simplemente dice “Eureka $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$, lo que indica que todo número natural es la suma de tres números triangulares” (Newman, 1979: 231).

Los números triangulares se escriben como $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ y su lista comienza como 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., muy pronto se ve que $T_n = T_{n-1} + n$.

Con lo observado por Gauss, es posible escribir entonces:

$0 = 0 + 0 + 0$, $1 = 1 + 0 + 0$, $2 = 1 + 1 + 0$, $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 3 + 0$, $5 = 1 + 1 + 3$, y así de seguido.

Una manera sutil de advertir lo anotado por Gauss en su diario, es escribir que todo número de la forma $8n + 3$ es la suma de tres cuadrados impares: $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$, $19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$, $27 = 3^2 + 3^2 + 3^2$, $35 = 1^2 + 3^2 + 5^2 \dots$

En dicho diario, aparece un grupo de anotaciones encriptadas como la anterior, que por fortuna, se logró descifrar; las restantes 144 ya han sido comprendidas a cabalidad. Todo esto lo hizo el gran Gauss, un poco con la intención de darle un toque íntimo y personal, y también por esconder los hallazgos que lograba por el temor a la incompreensión de posibles detractores. Como él mismo lo explica, su obra científica es la respuesta al impulso natural de su talento sin importar la publicación de sus resultados, dado que, para él, la instrucción de los otros era un asunto secundario en sus objetivos de vida. Explicando a un amigo la lentitud en la publicación de sus resultados, asegura que antes de los veinte años lo asaltaba una horda abrumadora de ideas que le era incontrolable y que solo tuvo tiempo de fijarse en algunas ellas. Su grandeza y el apelativo del Príncipe de los Matemáticos, se redimensiona desde la invitación que le hicieron en 1816 a demostrar el último Teorema de Fermat, a lo que respondió: “Confieso que el Teorema de Fermat es una proposición aislada, que me interesa muy poco, porque yo mismo podría establecer una multitud de proposiciones de este tipo que no se podrían ni demostrar, ni ser usadas”.

Todas estas anotaciones, que son pocas, en comparación con las acciones y legados de Carl Friedrich Gauss, demuestran, sin duda, que era un hombre extraordinario, un ser hecho de buena madera, talentoso y reservado y que tuvo la fortuna de organizar a través del concepto de divisibilidad, la rama de la matemática denominada *Teoría de Números*.

10.3 TEOREMA: LEY DE RECIPROCIDAD CUADRÁTICA

Se define en $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ "raíz primitiva", a todo elemento x que hacen que, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p-2}\}$ siendo p un número primo. Por ejemplo, para \mathbb{Z}_7 , 3 es una raíz primitiva, dado que, $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2 = 3^2, 3, 4 = 3^4, 5 = 3^5, 6 = 3^3\}$.

Recuérdese aquí que un número a se dice residuo cuadrático si y solo sí, $x^2 \equiv a \pmod{p}$ para algún x y esto significa que la diferencia $x^2 - a$ es divisible por p .

Al examinar en \mathbb{Z}_7 los elementos que son residuos cuadráticos, es claro que 0 es un residuo cuadrático puesto que la congruencia $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$ tiene como soluciones a 7, 14, 21, 28, 35, ... es decir, el infinito conjunto de los múltiplos de 7.

1: también es un residuo cuadrático, algunas soluciones de la ecuación $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$ aparecen en la lista 1, 6, 8, 13, 15, 20, 22, ...

3: no es un residuo cuadrático.

4: es un residuo cuadrático; la congruencia $x^2 \equiv 4 \pmod{7}$ tiene una infinidad de soluciones; algunas son elementos de la lista: 2, 5, 9, 12, 16, 19, 23, ...

5: no es un residuo cuadrático.

6: no es un residuo cuadrático.

Si se observa el ejemplo que se trae, los únicos elementos de $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2 = 3^2, 3, 4 = 3^4, 5 = 3^5, 6 = 3^3\}$ que son residuos cuadráticos son aquellos que se corresponden con una potencia par de la raíz

primitiva 3. Este resultado no es gratuito, obedece al teorema que asegura que si p es un número primo, atendiendo a que, $0^2 = 0$ y $1^2 = 1$, un elemento r es residuo cuadrático si y solo si r es potencia par de una raíz primitiva en \mathbb{Z}_p .

Resolver ecuaciones de la forma $x^2 \equiv a \pmod{p}$ en \mathbb{Z}_p es sencillo, pues, estructuralmente este conjunto es un cuerpo con la adición y multiplicación.

Para comprender la demostración del teorema, es necesario recordar un criterio de Euler, que asegura lo siguiente: si p es un primo impar, entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

En atención a este resultado, se tiene la Primera Ley Suplementaria de Euler.

10.3.1 Primera Ley Suplementaria de Euler

Sustituyendo $a = -1$ en el criterio de Euler, se obtiene que para p primo impar:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Este hecho, se puede escribir simplemente como $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ aduciendo que se entiende a p como un primo diferente de 2 (Beshenov, 2018).

Observación

Sea p un número impar, entonces $\frac{p-1}{2}$ es par si $p \equiv 1 \pmod{4}$ y es impar si $p \equiv 3 \pmod{4}$. La demostración de este resultado es simple. Si $p = 4k + 1$, entonces $\frac{p-1}{2} = 2k$. Si $p = 4k + 3$, entonces $\frac{p-1}{2} = 2k + 1$.

Como una consecuencia del criterio de Euler, se ha obtenido el siguiente resultado, que constituye la *primera ley suplementaria de reciprocidad*.

10.3.2 Proposición (Primera Ley Suplementaria de Reciprocidad)

Si p es un primo impar, entonces,

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} +1, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Ejemplo

La Tabla 25, presenta los restos módulo 4 de los algunos primos impares.

Tabla 25

Restos módulo 4 de algunos primos impares

p :	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	...
$p \pmod{4}$:	3	1	3	3	1	1	3	3	1	3	1	...

Entonces -1 es un cuadrado módulo $p = 5, 13, 17, 29, 37, \dots$

$-1 \equiv 2^2 \pmod{5}$, $-1 \equiv 5^2 \pmod{13}$, $-1 \equiv 4^2 \pmod{17}$,
 $-1 \equiv 12^2 \pmod{29}$; $-1 \equiv 6^2 \pmod{37}$ de acuerdo con esta Primera Ley Suplementaria de Reciprocidad.

Resulta que si $i^2 = -1$ para algún $i \in \mathbb{Z}_p$ entonces $i \neq 1$, $i^3 = -i \neq 1$, $i^4 = 1$ y por lo tanto, $\text{ord}(i) = 4$. Esto implica que $4 \mid (p - 1)$. Aquí se debe recordar que, el orden de un elemento x de \mathbb{Z}_p es la menor potencia positiva, tal que, $x^{\text{ord}(x)} = 1$. De hecho, se toma x diferente de 0 y de 1. Por ejemplo, en \mathbb{Z}_{11} se tiene que $\text{ord}(2) = 10$ ya que $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $\text{ord}(3) = 5$, $\text{ord}(4) = 5$, $\text{ord}(5) = 5$, $\text{ord}(6) = 10$, $\text{ord}(7) = 10$, $\text{ord}(8) = 10$, $\text{ord}(9) = 5$ y $\text{ord}(10) = 2$.

También, si $4 \mid (p-1)$ y x es una raíz primitiva, entonces $\left(x^{\frac{p-1}{4}}\right)^4 = 1$.

Así que $\left(x^{\frac{p-1}{4}}\right)^4 = \pm 1$.

El caso $\left(x^{\frac{p-1}{4}}\right)^2 = x^{\frac{p-1}{2}} = +1$, se descarta ya que $\text{ord}(x) = p-1$. Luego $x^{\frac{p-1}{4}}$ es una raíz cuadrada de -1 .

10.3.3 Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

Si p y q son diferentes primos impares se tiene

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} +\left(\frac{p}{q}\right), & \text{si } p \equiv 1 \text{ o } q \equiv 1 \pmod{4} \\ -\left(\frac{p}{q}\right), & \text{si } p \equiv 3 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

A partir del lema de Gauss, se escribe de inmediato

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^t.$$

Donde,

$$t = \sum_{1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qi}{p} \right\rfloor + \sum_{1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{pj}{q} \right\rfloor,$$

y para calcular esta suma, se tiene en cuenta el conjunto,

$$S = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{q-1}{2} \right\}$$

y sus subconjuntos $S_1 = \{(i, j) \in S \mid q_i > p_i\}$; $S_2 = \{(i, j) \in S \mid q_i < p_i\}$.

Se observa que $q_i \neq p_i$ dado que p y q son primos distintos. Entonces, S es la unión disjunta de S_1 y S_2 , así: $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $|S| = |S_1| + |S_2|$.

Por el hecho de disyunción de los conjuntos se tiene $|S| = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$.

De otro lado,

$$|S_1| = \#\left\{(i, j) \in S \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{qi}{p}\right\} = \sum_{1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qi}{p} \right\rfloor;$$

$$|S_2| = \#\left\{(i, j) \in S \mid 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{pj}{q}\right\} = \sum_{1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{pj}{q} \right\rfloor.$$

De donde se concluye que:

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qi}{p} \right\rfloor + \sum_{1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{pi}{q} \right\rfloor = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$$

y en consecuencia

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Con esto termina la prueba (Beshenov, 2018).

Ejemplo 1

Si $p = 11$ y $q = 7$ los conjuntos S_1 y S_2 producen los siguientes resultados:

$$|S_1| = \left\lfloor \frac{7}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{14}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{28}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{35}{11} \right\rfloor = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7;$$

$$|S_2| = \left\lfloor \frac{11}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{7} \right\rfloor = 1 + 3 + 4 = 8.$$

Ejemplo 2

Los cuadrados módulo 7 son $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$ y los cuadrados módulo 11 son $\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}$. Por consiguiente se tiene $\left(\frac{11}{7}\right) = +1$, $\left(\frac{7}{11}\right) = -1$.

Por ello $7 \equiv 11 \equiv 3 \pmod{4}$, lo cual concuerda con la Ley de Reciprocidad Cuadrática.

Ejemplo 3

Encontremos todos los primos p tales que 3 es un cuadrado módulo p . Excluyendo los casos triviales $p = 2$ y $p = 3$ por aplicación de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, se tiene:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

donde

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{p-1}{2}} &= \begin{cases} +1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \left(\frac{p}{3}\right) \\ &= \begin{cases} +1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Entonces, el resultado depende del resto de p módulo 12. Si $p \neq 2$ y $p \neq 3$, se tienen los siguientes casos:

$p \pmod{12}$:	1	5	7	11
$p \pmod{4}$:	1	1	3	3
$p \pmod{3}$:	1	2	1	2

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ -1, & \text{si } p \equiv \pm 5 \pmod{12} \end{cases}.$$

La Tabla 26 presenta los restos módulo 12 de los primeros números primos.

Tabla 26

Restos módulo 12 de los primeros números primos

p :	5	7	11	13	19	23	29	37	41	43	47	53	59	61	67	71
$p \pmod{12}$:	5	7	11	1	7	11	5	1	5	7	11	5	11	1	7	11

Entonces, los primos $p > 3$, tales que, 3 es un cuadrado, son: 11,13,23,37,47,59,61,71, ... ya que por ejemplo $3 \equiv 5^2 \pmod{11}$, $3 \equiv 4^2 \pmod{13}$, $3 \equiv 7^2 \pmod{23}$, ...

10.3.4 Argumentación

En el excelente texto de Eric Temple Bell, de la colección SIGMA condensada por James R. Newman, aparece el introito del discurso pronunciado por Arthur Cayley, creador de la Teoría de los Invariantes y del Álgebra de Matrices, en 1883 ante la Brithish Association for de Advancement of Science, en el que asegura: “Es difícil dar una idea sobre la gran extensión de la matemática moderna. La palabra <<extensión>> no es la adecuada: quiero decir, una extensión atestada de bellos detalles, no una extensión de simple uniformidad como un plano sin objetos, sino una región de un bello país contemplada al principio desde la distancia, pero que habrá que recorrer y estudiar en cada detalle: ladera y valle, río, peña, bosque y flor. Pero como en todo, también en una teoría matemática la belleza puede percibirse, pero no explicarse”.

En efecto, Gauss, con la demostración de su teorema, nos hace partícipes de un paisaje, un paraíso lleno de belleza en el que afloran las relaciones de equivalencia, el concepto de congruencia, de divisibilidad y raíz primitiva, las ligazones que posee esa rica infinitud de números primos; las funciones especiales, como la parte entera; los nuevos conceptos,

como el de residuo cuadrático, la conexión suprema del símbolo de Legendre y su cálculo; los conceptos de grupo y de cuerpo; los tácticos entes de orden y cardinal y algunos más; a veces nos deja deambular solos por ese territorio sin veda y en otros, nos toma de su mano y nos aúpa para indicarnos hechos simples, pero sorprendivos y sorprendentes. Pero sin duda, de ese paraíso, nadie nos podrá sacar jamás.

Y llenos de ese exuberante paisaje, abre el pensamiento para que se sueñe, ya no con residuos cuadráticos, sino cúbicos, cuárticos, quínticos, ..., que abren la posibilidad de la extensión a nuevos y deleitantes resultados. Por no abandonar ese sueño exploratorio, se puede estudiar ecuaciones como $x^3 \equiv 5 \pmod{13}$ que produce una infinita cantidad de resultados que inician en la lista 7, 8, 11, 20, 21, 24, 33, 34, 37, ... y cubrirse de ánimo para ver si se encuentra un teorema, un resultado, una conjetura, que apasione tanto como la ley de residuos cuadráticos de la que, apasionados matemáticos profesionales, también nos han deleitado indicándonos nuevas demostraciones.

10.3.5 Desviación

En pocas y singulares ocasiones la naturaleza demuestra su poder creando seres maravillosos, por su belleza, armonía, fuerza, poder o talento, en todas las especies, especialmente en la humana, sin distinción de raza, credo, filiación, nacionalidad, estrato o sexo. Se distinguen por su capacidad de percepción, visualización (ver con la razón), poder de análisis, de deducción, de creación y de recreación de objetos y entes, al punto de direccionar y gestionar teorías que cambian el rumbo de la historia y de la humanidad, entre ellos: Euler, Hipatia, Ramanujan, Newton, Abel, Cantor, Erdős, Cauchy, Gauss, Galois, Euclides, Pitágoras, Anaximandro, Arquímedes, Kepler; en el ámbito científico y en cada área

del conocimiento, que han hecho que el mundo de hoy no fuese posible sin ellos, sin sus teorías, sin sus avances, sin el legado ideal dispuesto a los grandes científicos en ciernes, que de pronto permanecen ociosos en los bancos de los salones de nuestras escuelas.

La traza heredada a veces recorre caminos ligados al azar, Galois, por ejemplo, en los albores del siglo XIX, hizo lo que hizo, desde el fatídico día en que un profesor no comprendió la respuesta que él daba a la pregunta “hable usted de los logaritmos, ¿qué son los logaritmos?; teoría que por el siglo XVII apenas nacía desde los cerebros de Napier y Briggs; Galois respondió: “1, 2, 3, 4, 5, ...”, respuesta cierta en cuanto que los logaritmos son números, son exponentes y los descritos son una parte ínfima de ellos. El profesor pensó que el aspirante se burlaba de él y rechazó el ingreso al politécnico. El resto es historia, Galois se adhiere a las causas republicanas y termina en la cárcel, donde ocurre el fatídico duelo a pistola en el que, finalmente, muere a sus 21 años, dejando una teoría de alto vuelo en torno a las raíces de polinomios de cualquier grado. La traza de Gauss no se aleja de las circunstancias estocásticas del azar, si bien, su talento matemático surge desde cuna, junto con su capacidad de cálculo, la decisión de dedicarse al estudio de la matemática aparece tarde, cuando demuestra la posibilidad de construcción del polígono regular del 17 lados; en ese momento, abandona el interés por las lenguas y por la filosofía, y decide dedicar su vida entera al estudio de la matemática.

La Ley de Reciprocidad Cuadrática es uno de los primeros resultados demostrados por Gauss, es fenomenal; para comprobar si 241 es un residuo cuadrático módulo 65581, que son primos de la forma $4n + 1$, puede remplazarse por el cálculo más sencillo: verificar si tienen solución las ecuaciones $x^2 \equiv 241 \pmod{65581}$ y $x^2 \equiv 65581 \pmod{241}$. Lo primero, es elaborar un cálculo más sencillo, remplazando la segunda ecuación desde que

$\text{mod } (65581, 241) = 29$, por la ecuación $x^2 \equiv 29 \pmod{241}$ y determinar si 29 es un residuo cuadrático de tal ecuación.

En efecto lo es. Esta última ecuación tiene una infinitud de soluciones, entre ellas 92, 149, 333 y 390. Siendo 29 un número primo de la forma $4n + 1$, encontramos que las ecuaciones $x^2 \equiv 29 \pmod{241}$ y $x^2 \equiv 241 \pmod{29}$ tienen solución y como $65581 \equiv 29 \pmod{241}$, por transitividad $x^2 \equiv 65581 \pmod{241}$. La consecuencia final es que ambas ecuaciones $x^2 \equiv 65581 \pmod{241}$ y $x^2 \equiv 241 \pmod{65581}$ poseen solución, sin importar cuales sean.

La ecuación $x^2 \equiv 241 \pmod{65581}$, es complicada de resolver, incluso con asistentes computacionales; en cambio la ecuación de valores pequeños $x^2 \equiv 29 \pmod{241}$ resulta más sencilla; entre los primeros mil números naturales aparecen las soluciones 92, 149, 333, 390, 574, 631, 815 y 872.

Pero hay algo bello en este resultado; los matemáticos se extasían al establecer relaciones entre los números, en particular, entre los enteros y de manera especial entre los primos; en consecuencia, hablan de primos gemelos y de ellos, no saben si hay una infinitud de pares de esa forma. La Ley de Reciprocidad Cuadrática establece una relación de cada primo con la gama infinita de los de su clase, bien sean de la forma $4n + 1$ o $4n + 3$ y se devuelven el favor establecido por la relación de la existencia o no de residuos cuadráticos. Algo similar ocurre en las relaciones sociales entre pueblos nativos Pastos del sur de Colombia; en estos pueblos, se llama “enjirpe” a la acción de llevar un presente a algún conocido, obsequio que se retribuye con una igual y sustanciosa ofrenda o que también no puede repetirse y esto va a voluntad del receptor. En el caso de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, aparece un acto de obligatorio cumplimiento, y justamente por ello, se convierte en ley.

REFERENCIAS DEL LIBRO

- Amster, P. (2008). *Fragmentos de un discurso matemático*. Fondo de cultura económica. Buenos Aires.
- Amster, P. (2019). *Del cero al infinito*. Fondo de cultura económico. México.
- Bellos, A. (2011). Alex en el país de los números. Un viaje al maravilloso mundo de los números. D´vinni S. A. Bogotá.
- Beshenov, A. (2018). La ley de Reciprocidad Cuadrática. Universidad del Salvador.
- Clawson, C. C (1999). Misterios matemáticos: magia y belleza de los números. Editorial Diana. México.
- Coxeter, H. S. M. (1984). *Fundamentos de Geometría*. México, Editorial Limusa - Wiley.
- Culturacientífica. (2013). *La Paradoja de Tristram Shandy*. <https://culturacientifica.com/2013/11/27/la-paradoja-de-tristram-shandy/>
- Culturacientífica. (2022.). *Victor Thebault y sus tres teoremas*. Consultado: mayo 10 de 2023, en: <https://culturacientifica.com/2022/04/13/victor-thebault-y-sus-tres-teoremas/>
- Dios creo los números. (2007). Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia. Edición comentada por Stephen Hawking. Crítica, Barcelona.
- Euclides. (1991). Elementos. Biblioteca Clásica Gredos. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid.
- Euclides. (1998). *Elementos*. Traducción de Comentarios de María Luisa Puertas. Editorial Gredos, Madrid.

- Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías* (Tomo I). México, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana.
- Facebook. (s.f.). *Teorema de Haga e a semelhança de triângulos*. <https://www.facebook.com/easymaticaoficial/videos/teorema-de-haga-e-a-semelhan%C3%A7a-de-tri%C3%A2ngulos/3543966288957741/>
- Fernández, T. & Tamaro, E. (2004), *Biografía de Nicolás de Oresme*. En *Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea* [Internet]. Barcelona, España, 2004. Disponible en <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/o/oresme.htm> [fecha de acceso: 3 de junio de 2023].
- Fresán & Otro. (2013). *¿Qué sabemos de? Los números trascendentes*. Libros de Catarata. Madrid.
- Gaussianos. (s.f.). *El teorema de Holditch: un resultado geométrico inesperado*. Consultado: mayo 8 de 2023, en: <https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-holditch-un-resultado-geometrico-inesperado/>
- Geogebra. (s.f.). *Holditch's theorem*. <https://www.geogebra.org/m/HUprjjw7>
- Grupoalquerque. (s.f.). *Teoremas de Haga*. Consultado: mayo 12 de 2023; en: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2018/archivos/material/dividir/teorema_Haga.pdf
- Hmong. (s.f.). *Hamnet Holditch*. Consultado: mayo 8 de 2023, en: https://hmong.es/wiki/Hamnet_Holditch
- Mataix, L. M. (1986). *Historias de Matemáticos y algunos problemas*. Barcelona: Marcombo. Boixareu Editores.
- Mathworld. (s.f.). *Triangle Median*. Consultado: mayo 12 de 2023; en: <https://mathworld.wolfram.com/TriangleMedian.html>
- Newman, J.R. (1979). *El mundo de las matemáticas*. Ediciones Grijalbo, Cuarta edición. Barcelona.

Paulus, J. A. (1998). *Más allá de los números*. Libros para pensar la ciencia. Matemáticas. Tusquets Editores. Barcelona.

Researchgate. (s.f.). Illustration of Holditch's theorem. https://www.researchgate.net/figure/Illustration-of-Holditchs-theorem_fig3_341027107

Scoop. (s.f.). Victor Thebault y sus tres teoremas. Consultado: mayo 10 de 2023, en: <https://www.scoop.it/topic/acusmata/p/4131578578/2022/04/14/victor-thebault-y-sus-tres-teoremas>

Soto, F. (2003). *Geometría con Cabri*. Editorial Universidad de Nariño.

Vélez, J. (1996). Geometría cúbica. Colección Loyola S.J. Bibliográfica Colombiana Ltda.

Wikipedia. (s.f.a) *Hípasso de Metaponto*. https://es.wikipedia.org/wiki/H%C3%ADpaso_de_Metaponto.

Wikipedia. (s.f.b). *Victor Thebault*. Consultado: mayo 10 de 2023, en: https://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Th%C3%A9bault

ACERCA DE LOS AUTORES

Óscar Fernando Soto-Ágreda.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Magister en Modelos de Enseñanza Problémica, Universidad INCCA de Colombia. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: oscarfdosoto@gmail.com; fsoto@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

èditorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: Octubre 9 de 2024
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

A lo largo de la historia, los matemáticos han desentrañado misterios, resuelto enigmas y descubierto patrones ocultos en el tejido mismo del universo. En este libro se presentan teoremas que son como perlas que brillan en el vasto campo de la matemática, ofreciendo una visión única de la naturaleza de los números, las formas y las relaciones. Desde la Serie Armónica, que diverge, hasta la Ley de Reciprocidad Cuadrática, pasando por los Sólidos Platónicos y las propiedades sorprendentes de los cuadrados, los rectángulos y los triángulos, cada teorema nos desafía a explorar un aspecto específico de las matemáticas y a descubrir su impacto en nuestra comprensión del mundo.

A medida que nos adentramos en cada uno de los teoremas, iremos desvelando sus enunciados intrigantes, examinando sus demostraciones. No obstante, este libro no solo trata de fórmulas y cálculos abstractos; uno de los objetivos es hacer que la matemática cobre vida, revelando su belleza y relevancia en la vida cotidiana.

Ya sea que se trate de un lector ávido de conocimientos matemáticos, un apasionado de los desafíos intelectuales o simplemente alguien curioso por descubrir el encanto de los teoremas, el libro *Perlas Matemáticas* invita a unirse a este emocionante viaje. Exploraremos desde la demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional, hasta el fascinante mundo de las curvas y las áreas, evidenciando sorpresas matemáticas en cada capítulo.

A lo largo de estas páginas, se encuentran conceptos familiares y otros posiblemente nuevos, todos en la perspectiva de inspirar asombro y gratificación intelectual. Al final del recorrido se espera despertar la curiosidad y el amor por la matemática, demostrando que la resolución de problemas y la búsqueda del conocimiento pueden ser experiencias gratificantes y apasionantes.

Así que, invitamos a sumergirse en estas *Perlas Matemáticas* y a dejarse maravillar por los tesoros que se ocultan en los teoremas matemáticos. ¡Prepárese para desafiar su mente y descubrir la fascinante belleza de la matemática!

El libro está organizado en 10 capítulos y en cada uno se aborda un teorema, el cual se destaca por su belleza, aplicabilidad y, en muchos casos, por su singular demostración. En su orden se presentan los siguientes teoremas: La Serie Armónica, Sólidos Platónicos, Teorema de Haga, Relación del Área de un Triángulo con el de sus Medianas, Primer Teorema de los Elementos de Euclides, Irracionalidad de la Raíz Cuadrada de 2, Teorema de Holditch, Teorema de Thébault, Teorema de Pitágoras, y Ley de la Reciprocidad Cuadrática.

ISBN: 978-628-7679-87-0



9 786287 679870



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1984

ai
Universidad de Nariño

ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000221 - DICIEMBRE 11 DE 2022

120 años
Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño