

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Bariogénesis y leptogénesis bajo la mínima extensión
más allá del modelo estándar.

Isaac Mateo Garzón Muñoz
Director: **Dr. Eduardo Rojas Peña.**

San Juan de Pasto, 13 septiembre de 2024

Contenido

1. Introducción	12
1.1. Planteamiento del problema	12
1.2. Objetivos	13
1.3. Bariogénesis	13
1.4. Asimetría materia-antimateria	14
1.5. Estructura	16
2. Teoría cuántica de campos	19
2.1. Anomalía quirral	20
2.2. Invarianza y violación de simetrías discretas	26
2.3. Reglas de Feynman	29
2.3.1. Canales a tree-level	32
2.4. Regla de oro de Fermi	35
2.4.1. Ancho de decaimiento - Decay rate	35
2.4.2. Sección transversal - Cross section	38
2.4.3. Dimensiones y unidades	44
3. Violación CP	45
4. Cosmología: universo homogéneo	49
4.1. Geometría	50
4.1.1. 3-Espacios simétricos	50
4.1.2. Métrica de Robertson-Walker	53
4.2. Dinámica de un universo en expansión	54
4.2.1. Evolución de la densidad numérica de partículas	54
4.2.2. Ecuaciones de Friedmann	55
4.3. Equilibrio térmico	57
4.3.1. De lo Microscópico a lo Macroscópico	57
4.3.2. Equilibrio térmico local	58
4.3.3. Densidad de energía en el límite relativista	58
4.3.4. Número efectivo de especies relativistas	60
4.4. Más allá del equilibrio	62
4.4.1. Ecuaciones de transporte de Boltzmann	63

<i>CONTENIDO</i>	3
4.5. Universo temprano cosmológico	65
5. Estadística de la generación del número bariónico	68
6. Mecanismo de bariogénesis	73
6.1. Densidad del número de bosones X	74
6.2. Densidad del número de partículas b	77
7. Lagrangiano del mecanismo	80
7.1. Densidad Lagrangiana	80
7.2. Cross section total	81
7.3. Cálculo de cross section contribución de medios físicos	84
7.4. Promedio sobre distribuciones iniciales de energía	85
8. Solución del mecanismo	90
8.1. Soluciones analíticas aproximadas	91
8.2. Soluciones numéricas	94
9. Resultados	100
10. Conclusiones	107
A. Formalismo en simetrías	109
A.1. Asimetría materia-antimateria	109
A.1.1. Ecuación 1.4	109
A.2. Invarianza y violación de simetrías discretas	110
A.2.1. Ecuación 2.56	110
A.2.2. Ecuación 2.57	111
B. Corrientes de Noether	112
B.1. Ecuación 2.4	112
B.2. Ecuación 2.5	112
B.3. Ecuación 2.21	113
B.4. Ecuación 2.25	113
B.5. Ecuación 2.26	114
B.6. Ecuación 2.27	115
C. Dispersión en teoría cuántica de campos	116
C.1. Regla de oro de Fermi	116
C.1.1. Ecuación 2.82	116
C.1.2. Ecuación 2.101	116
C.1.3. Ecuación 2.133	118
C.1.4. Ecuación 2.135	119
C.2. Violación CP	119

C.2.1. Ecuación 3.13	119
C.2.2. Ecuación 3.14	120
C.3. Cross section total	120
C.3.1. Ecuación 7.15	120
C.4. Cross section - medios físicos	121
C.4.1. Ecuación 7.16	121
C.4.2. Ecuación 7.19	123
D. Amplitud de estados intermedios físicos	124
D.1. Ecuación 3.7	124
D.2. Ecuación 3.10	126
D.3. Ecuación 3.14	127
D.4. Valor principal de Cauchy	131
D.5. Aproximación de ancho estrecho	131
D.6. Desarrollo de la amplitud	132
E. Estadística e historia térmica del universo	134
E.1. Razón del número bariónico con partículas ultrarelativistas	137
E.2. Integral a dos partículas	139
E.3. Dinámica de un universo en expansión	140
E.3.1. Ecuación 4.43	140
E.3.2. Ecuaciones 4.48	140
E.3.3. Ecuación 4.49	144
E.3.4. Ecuaciones 4.50	144
E.3.5. Ecuación 4.51	145
E.4. Estadística de la generación del número bariónico	146
E.4.1. Ecuación 5.16	146
E.5. Mecanismo de bariogénesis	149
E.5.1. Ecuación 6.10	149
E.5.2. Ecuación 6.11	150
E.5.3. Ecuación 6.23	151
E.6. Solución del mecanismo	152
E.6.1. Ecuación 8.1	152
E.6.2. Ecuación 8.9	152
E.6.3. Ecuación 8.11	152
E.6.4. Ecuación 8.15	153
E.6.5. Ecuación 8.16	154
E.6.6. Ecuación 8.19	155
F. Funciones modificadas de Bessel de segundo tipo	157
F.1. Tratamiento en primer orden	157
F.2. Tratamiento en segundo orden	157

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido de manera significativa al desarrollo de este trabajo.

En primer lugar, a mi asesor, el Dr. Eduardo Rojas, por su invaluable guía a lo largo de todo este proceso. Le agradezco profundamente por las conversaciones constantes sobre el valor del trabajo en la ciencia y su insistencia en justificar teóricamente cada paso del camino. Me ha enseñado que el conocimiento adquirido es vital para mi desarrollo científico y, sobre todo, le agradezco por confiar en mí a pesar de los percances que surgieron. Su experiencia y sabiduría han sido pilares fundamentales para la evolución de este proyecto, y espero que finalmente termine de construir los apartamentos.

Asimismo, quisiera reconocer a mis colegas y compañeros de estudio por sus sugerencias, críticas constructivas y su inquebrantable apoyo durante los momentos más desafiantes de este proyecto.

Agradezco profundamente a mi familia, a mi Evangeline, y a mis amigos, cuyo constante ánimo y comprensión me acompañaron a lo largo de incontables horas de trabajo, ausencias en reuniones y altibajos emocionales, permitiéndome mantener la motivación en este extenso pero gratificante recorrido.

Finalmente, agradezco a la vida por darme la oportunidad de embarcarme en este largo viaje que hoy llega a su fin. Ha sido la mitad de una década en la que cada día he trabajado por cumplir mis sueños, y en estas últimas palabras se cierra el capítulo culminante de mi trayectoria de pregrado, donde cada momento fue mejor que el anterior.

Isaac.

Dedicatoria

*A quienes han caminado a mi lado en este
viaje a través del intelecto, el arte
y la curiosidad.*

*Y, en especial, a los gigantes que siempre estuvieron
ahí, invisibles pero constantes, inspirando
la búsqueda del conocimiento.*

Resumen

El estudio desarrolló el formalismo de dispersión $2 \rightarrow 2$ en teoría cuántica de campos para abordar la asimetría materia-antimateria, centrándose en violación CP se demostró la generación de un número bariónico neto a través de contribuciones a un loop. Se utilizó el formalismo de las ecuaciones de Boltzmann para desarrollar un mecanismo de bariogénesis consistente fuera del equilibrio térmico, parametrizando las contribuciones de mayor orden. Asimismo, se evaluó un modelo basado en simetrías extendidas del Modelo Estándar para explicar la bariogénesis y leptogénesis en el universo temprano introduciendo un bosón escalar pesado, ajustándolo a restricciones experimentales y cosmológicas por medio de la física estadística e integración numérica de tipo montecarlo - CUBA.

Palabras clave: Bariogénesis, Violación CP, Historia térmica, Más allá del modelo estándar.

Abstract

The study developed the $2 \rightarrow 2$ scattering formalism in quantum field theory to address the matter-antimatter asymmetry, focusing on CP violation. It demonstrated the generation of a net baryon number through loop-level contributions. The Boltzmann equations were used to formulate a consistent baryogenesis mechanism out of thermal equilibrium, parameterizing higher-order contributions. Additionally, a model based on extended symmetries of the Standard Model was evaluated to explain baryogenesis and leptogenesis in the early universe by introducing a heavy scalar boson, adjusting it to experimental and cosmological constraints through statistical physics and Monte Carlo integration - CUBA.

Keywords: Baryogenesis, CP-violation, Thermal history, Beyond the standard model.

Glosario

Matriz CKM: La matriz CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) es una matriz unitaria en el modelo estándar que describe la mezcla de quarks en interacciones débiles, relacionando los estados de sabor con los estados propios de masa. Esto permite que las interacciones débiles cambien un tipo de quark en otro, y explica la violación CP en desintegraciones débiles.

Anomalía: En teoría cuántica de campos, una anomalía se refiere a la falta de conservación de una simetría de la teoría clásica al ser cuantizada. Las anomalías pueden comprometer la consistencia de la teoría y deben cancelarse en teorías consistentes. Un ejemplo importante es la anomalía quiral.

Rotación de Wick: La rotación de Wick es una técnica que transforma el tiempo en el plano complejo $t \rightarrow -i\tau$, permitiendo pasar de un espacio-tiempo de Minkowski a uno euclidiano. Esta técnica simplifica los cálculos perturbativos en teoría cuántica de campos.

Tree-level: Los diagramas de *tree-level* son los más simples en la teoría de perturbaciones, ya que no contienen bucles. Representan interacciones básicas entre partículas, y tienen la topología de un árbol. Son la primera aproximación en cálculos de amplitudes de dispersión.

Dispersión: La dispersión describe cómo las partículas cambian su trayectoria debido a interacciones mutuas. En teoría cuántica de campos, los procesos de dispersión se calculan mediante los diagramas de Feynman, que permiten estudiar las probabilidades de interacción entre partículas incidentes.

Violación CP: La violación de la simetría CP implica que las leyes de la física no son invariantes bajo la inversión simultánea de carga (C) y paridad (P). Es una característica importante del modelo estándar, asociada con la fase compleja de la matriz CKM, y tiene implicaciones cosmológicas.

Aproximación de Born: La aproximación de Born es un método perturbativo utilizado en la teoría de dispersión, en el que se asume que la interacción es débil. En la primera aproximación de Born, se utilizan sólo diagramas de nivel de árbol (*tree-level*) para calcular las amplitudes de dispersión.

Estados intermedios físicos: Los estados intermedios físicos son aquellos estados de partículas que satisfacen las condiciones de energía y momento en los cálculos de amplitudes de dispersión, y que pueden ser observados en un experimento, a diferencia de los estados virtuales.

Isotropía: En cosmología, la isotropía se refiere a la propiedad del universo de ser igual en todas las direcciones cuando se observa a gran escala. Esto implica que no hay una dirección preferida en el universo, lo que es consistente con las observaciones de la radiación cósmica de fondo.

Homogeneidad: La homogeneidad en cosmología significa que el universo es, en promedio, el mismo en todos los puntos del espacio cuando se observa a gran escala. Esta propiedad, junto con la isotropía, es una de las bases del principio cosmológico.

Equilibrio térmico: El equilibrio térmico se refiere al estado en el que todos los componentes de un sistema tienen la misma temperatura y no hay flujo neto de energía térmica entre ellos. En cosmología, el universo primitivo se encontraba en equilibrio térmico, lo que permitió la formación de la radiación cósmica de fondo.

- Límite relativista:** El límite relativista describe la situación en la que las velocidades involucradas en un sistema físico se acercan a la velocidad de la luz, y los efectos de la relatividad especial deben tenerse en cuenta. En este régimen, las ecuaciones de la mecánica clásica no son suficientes y deben usarse las de la relatividad especial.
- Gases de Fermi degenerado:** Un gas de Fermi altamente degenerado es un sistema cuántico de fermiones en el que la mayoría de los estados de baja energía están ocupados, debido al principio de exclusión de Pauli. Esto ocurre típicamente a temperaturas cercanas al cero absoluto y es relevante en sistemas astrofísicos como enanas blancas y estrellas de neutrones.
- Métodos Montecarlo:** Los métodos Montecarlo son técnicas de integración numérica que utilizan la generación de números aleatorios para estimar el valor de una integral. Estos métodos son especialmente útiles en problemas de altas dimensiones donde los métodos deterministas son ineficaces o impracticables. La precisión del método mejora con un mayor número de muestras.
- Estabilidad numérica:** La estabilidad numérica se refiere a la sensibilidad de un método numérico a errores de redondeo o perturbaciones pequeñas en los datos. Un método numérico es estable si los errores no crecen de manera descontrolada a lo largo del proceso de cálculo. La estabilidad es crucial en la integración numérica para obtener resultados precisos y fiables.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

En el universo se observa materia pero no antimateria. La explicación de esta observación es una de las preguntas más importantes de la física actual. La asimetría entre materia y antimateria está relacionada con las líneas de investigación conocidas como bariogénesis y leptogénesis en física de altas energías y en general con la física más allá del modelo estándar. Desde los años sesenta se conoce que para explicar satisfactoriamente el universo observado se requiere la violación de simetrías discretas, una evolución térmica del universo fuera del equilibrio y violación del número bariónico [1]. Además de ser un tema fundamental en física de partículas también es de gran importancia para la cosmología.

El problema consiste en usar un modelo de física más allá del modelo estándar que permita explicar la asimetría materia-antimateria del universo mediante el estudio cuantitativo de la generación del número bariónico y el número leptónico. Por tanto, la pregunta a responder es, **¿cuál es la extensión mínima del modelo estándar que permite explicar la asimetría materia-antimateria en el universo?**

Esta clase de modelos pueden tener muchas implicaciones tanto en física de partículas como en cosmología, permitiendo formular otros proyectos que estudien las consecuencias fenomenológicas del modelo estudiado.

Este tema no se ha estudiado en trabajos de grado en la carrera de física o en la maestría en física de la universidad de Nariño. En Colombia se han publicado dos trabajos relacionados, un artículo en la universidad de Antioquia dirigido por el doctor Diego Restrepo y una tesis de maestría en la universidad Nacional dirigida por el doctor Roberto Martínez.

1.2. Objetivos

Objetivo general

Usar el modelo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y \otimes U_{B-L}^{\text{global}}$ de física más allá del modelo estándar para explicar la generación de número bariónico y número leptónico en el universo temprano.

Objetivos específicos

- Estudiar los formalismos de la teoría cuántica de campos y su aplicación al problema de la asimetría materia-antimateria.
- Evaluar el modelo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y \otimes U_{B-L}^{\text{global}}$ mediante un análisis estadístico con las restricciones experimentales de la física de partículas y cosmología.

1.3. Bariogénesis

Los principales desafíos «experimentales» que enfrenta actualmente el Modelo Estándar están relacionados con los dos tipos de materia que componen el universo observable. Solo el 17 % de esta materia es «luminosa», es decir, la que está compuesta por protones y neutrones, como la materia que forma a los seres humanos. Más adelante se explora cómo el Modelo Estándar necesita una extensión para poder explicar su abundancia. El 83 % restante corresponde a la Materia Oscura, que hasta ahora solo ha sido detectada de manera indirecta a través de sus efectos gravitacionales. Para incluir posibles candidatos a Materia Oscura, el Modelo Estándar también requiere una ampliación. Sin embargo, este aspecto es aún más complejo, ya que dichos candidatos no han sido identificados en experimentos de física de partículas, lo que deja su naturaleza completamente desconocida.

Además, experimentos astrofísicos, como la detección de supernovas, indican que la materia mencionada anteriormente, tanto la luminosa como la oscura, constituye apenas el 28 % de la densidad de energía del universo observable. El 72 % restante está compuesto por una forma de energía que no puede ser detectada mediante experimentos de física de partículas y que se conoce como Energía Oscura. Esta podría ser simplemente una Constante Cosmológica.

En este trabajo de grado, se centrará en la materia bariónica (teniendo en cuenta también la consecuencia sobre la materia leptónica bajo conservación $B - L$), que representa el 4.6 % de la densidad total de energía y el 17 % de la densidad de materia del universo. A pesar de su baja proporción, su relevancia es prioritaria, ya que es el tipo de materia del que están hechos los seres humanos y, hasta el momento, es el único tipo detectado directamente mediante experimentación.

En lo sucesivo, se denominarán bariones tanto a protones y neutrones (con una carga bariónica de +1) como a quarks (que tienen una carga bariónica de $+\frac{1}{3}$). Los protones (p), por

su parte, están compuestos por dos quarks de tipo *up* (u) y uno de tipo *down* (d), lo que se representa como $p = uud$. En el caso de los neutrones (n), están formados por un quark *up* y dos *down*, representado como $n = udd$. Sus antipartículas correspondientes, es decir, los antiprotones $\bar{p} = \bar{u}\bar{u}\bar{d}$ y antineutrones $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d}$, tienen una carga bariónica de -1 y están constituidos por antiquarks, los cuales poseen una carga bariónica de $-\frac{1}{3}$.

La materia luminosa en el Universo está formada mayoritariamente por protones y neutrones, mientras que la antimateria estaría compuesta por sus respectivas antipartículas. Sin embargo, existen dos problemas fundamentales relacionados con el número bariónico del Universo:

- **Ausencia de antimateria:** No hay prácticamente evidencia de antimateria en el Universo. No se encuentra antimateria en el sistema solar y los antiprotones solo aparecen en los rayos cósmicos. Aunque estos antiprotones pueden generarse como productos secundarios en colisiones del tipo $pp \rightarrow p + p + \bar{p}$, lo cual genera una abundancia de antiprotones similar a la observada. Por ejemplo, se detecta un antiprotón por cada 3000 protones, y un átomo de antihelio ($\bar{\text{He}}$) por cada 10,000 átomos de helio. Estos datos experimentales concuerdan con la ausencia de antimateria primordial en el Universo. De hecho, la inexistencia de antimateria es crucial para la estabilidad cósmica, ya que la materia y la antimateria se aniquilan entre sí, produciendo radiación.
- **Origen de la densidad de la materia luminosa:** Una vez expuesto el hecho de la escasa presencia de antimateria en el Universo, el siguiente problema es entender el origen de la densidad de materia luminosa. Los datos sobre la abundancia primordial de elementos ligeros, combinados con los resultados del satélite WMAP [2] y la teoría de la nucleosíntesis, sugieren que hay aproximadamente un protón por cada mil millones de fotones en el Universo. Específicamente, si n_B es la densidad de bariones y n_γ la de fotones, la relación entre ambas es $n_B/n_\gamma \approx 6.1 \times 10^{-10}$. Para visualizarlo de manera más clara, en 5 metros cúbicos de espacio habría, en promedio, un solo barión y seiscientos millones de fotones.

1.4. Asimetría materia-antimateria

Existe la presunción de que el Big Bang creó materia y antimateria en cantidades exactamente iguales. Si este es el caso, ¿cuál es la razón de que las observaciones muestren un universo sobre contenido de electrones, protones y neutrones, sin positrones, antiprotones o antineutrones a la vista? Por supuesto, si un positrón (por ejemplo) es creado, no dura mucho: tan pronto como colisiona con un electrón, se aniquilan entre sí. Pero esto no explica la preponderancia de electrones restantes. Tal vez sea un fenómeno local; puede acontecer que la región del universo dominada por la materia está equilibrada por una región de antimateria en otra región. Sin embargo, no hay evidencia de esto; al contrario, las observaciones astrofísicas indican que al menos el universo observable es todo materia (si hubiera una zona de antimateria, la frontera sería un lugar extremadamente violento, y es difícil imaginar que el fondo cósmico de microondas no mostraría signos de perturbación) [3]. Alternativa-

mente, algún proceso debe haber favorecido la materia sobre la antimateria en el curso de la evolución cósmica. ¿Qué tipo de mecanismo podría haber generado esta asimetría?

En 1967, Sakharov [1] identificó las condiciones necesarias. Obviamente, debe haber una interacción que viole la conservación del número bariónico y leptónico. Debe haber existido un período en el que el universo estuviera sustancialmente fuera del equilibrio térmico (de lo contrario, cualquier reacción $i \rightarrow f$ se produciría de manera igual en la otra dirección, $f \rightarrow i$ y no habría un cambio neto en el número de bariones). Y, crucialmente, debe haber:

Violación de CP : alguna reacción $i \rightarrow f$ cuya tasa sea diferente de su conjugado CP, $\bar{i} \rightarrow \bar{f}$ (de lo contrario, una vez más, no habría cambio neto en el número de bariones).

Afortunadamente, la violación de CP fue descubierta recientemente por Cronin y Fitch en el sistema K^0/\bar{K}^0 . Hasta el día de hoy, la naturaleza subyacente de la violación de CP no se comprende bien. La violación de paridad fue fácil de incorporar en la teoría de interacciones débiles; simplemente se reemplazaron los acoplamientos vectoriales, γ^μ , por acoplamientos vectoriales/axiales, $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$. Pero la única fuente conocida de violación de CP es la fase residual δ en la matriz CKM y apenas es obvio por qué esto rompe la invariancia de CP.

Considerando un proceso $i \rightarrow f$, y el proceso inverso a CP $\bar{i} \rightarrow \bar{f}$ (por ejemplo, si i incluye un electrón de mano izquierda, \bar{i} incluye un positrón de mano derecha): la violación de CP significa que la tasa para $\bar{i} \rightarrow \bar{f}$ no es la misma que para $i \rightarrow f$ (por ejemplo, $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$ es un 13 % más común que $\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+$). Ahora, la amplitud \mathcal{M} es un número complejo y, ordinariamente, es la misma para $\bar{i} \rightarrow \bar{f}$ que para $i \rightarrow f$, exceptuando cualquier elemento conjugado de CKM. Así que:

$$\mathcal{M} = |\mathcal{M}|e^{i\phi}e^{i\theta}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = |\mathcal{M}|e^{i\phi}e^{-i\theta}, \quad (1.1)$$

donde θ es la fase de 'conjugación' y ϕ la fase 'ordinaria'. Por otro lado, las tasas de reacción son proporcionales a $|\mathcal{M}|^2$, por lo que no hay violación de CP, aunque las amplitudes en sí son diferentes.

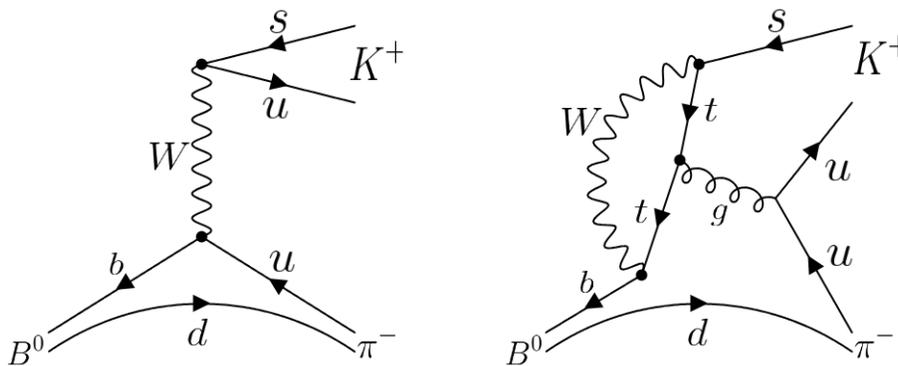


Figura 1.1: Diagramas de dispersión para $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$.

Pero suponiendo que el proceso ($i \rightarrow f$) puede proceder por dos rutas diferentes (por ejemplo, B^0 puede ir a $K^+ + \pi^-$ de maneras distintas ver figura 1.1). Luego, se obtiene la amplitud

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ con:

$$\mathcal{M}_1 = |\mathcal{M}_1| e^{i\phi_1} e^{i\theta_1}, \quad \mathcal{M}_2 = |\mathcal{M}_2| e^{i\phi_2} e^{i\theta_2}, \quad (1.2)$$

y $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_1 + \tilde{\mathcal{M}}_2$ con:

$$\tilde{\mathcal{M}}_1 = |\mathcal{M}_1| e^{i\phi_1} e^{-i\theta_1}, \quad \tilde{\mathcal{M}}_2 = |\mathcal{M}_2| e^{i\phi_2} e^{-i\theta_2}, \quad (1.3)$$

esto conduce a que (ver apéndice A.1.1):

$$|\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 = -4|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2| \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.4)$$

En este caso, las tasas no son iguales y se viola la invariancia de CP siempre y cuando exista una fase de conjugación (de la matriz CKM), así como una fase no conjugada, y estas a su vez, deben ser diferentes para las dos direcciones que contribuyen.

A partir de experimentos, se conoce que la violación de CP ocurre en las interacciones débiles de los quarks y se atribuye al factor de fase en la matriz CKM. Desafortunadamente, esto está lejos de ser suficiente para explicar la predominancia de materia en el universo [4], por lo que es necesario especular sobre otros mecanismos de violación de CP.

Con neutrinos masivos y la analogía leptónica de la matriz CKM, el mismo fenómeno debería ocurrir en el sector de los leptones, donde se manifestaría, por ejemplo, en probabilidades desiguales para $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ y $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$. Esto aún no se ha observado, pero es concebible que proporcione un mecanismo (a veces llamado «Leptogénesis») para la asimetría observada entre materia y antimateria. Otra posibilidad es la violación de CP en las interacciones fuertes (en este caso, la 'prueba fehaciente' sería un momento dipolar eléctrico distinto de cero para el neutrón). La violación de CP nunca se ha observado en procesos fuertes, pero no parece haber ninguna prohibición teórica fundamental. En este punto, la asimetría materia/antimateria del universo sigue siendo un rompecabezas incompleto; la pieza esencial que falta es la naturaleza de la violación de CP responsable.

1.5. Estructura

El capítulo 2 se desarrolla en la teoría cuántica de campos (QFT), exponiendo sus herramientas fundamentales para analizar procesos como la bariogénesis su consecuencia directa leptogénesis. Comienza con la **Sección 2.1** sobre la anomalía quiral, que examina la ruptura de simetrías quirales y su impacto en el desequilibrio entre partículas y antipartículas. La **Sección 2.2** se enfoca en la invarianza y violación de simetrías discretas, especialmente C, P y CP, fundamentales para la comprensión de la asimetría materia-antimateria. Luego, en la **Sección 2.3**, se introducen las reglas de Feynman para calcular amplitudes de probabilidad en interacciones de partículas a diferentes niveles. Finalmente, la **Sección 2.4** desarrolla la regla de oro de Fermi, abarcando el cálculo de tasas de decaimiento, secciones transversales y la conversión de unidades, esenciales para el análisis de procesos relevantes en la bariogénesis.

El capítulo 3 se centra en el uso de un modelo simple para ilustrar la necesidad de que ciertas constantes de acoplamiento sean complejas para que suceda la violación de CP, un aspecto crucial para la generación de asimetría bariónica. Se analiza el número bariónico neto medio producido por la desintegración de un bosón X y su antipartícula \bar{X} . Dado que los factores cinemáticos para partículas y antipartículas son idénticos en la aproximación de Born, a órdenes superiores en la teoría de perturbaciones, las correcciones aparecen debido al intercambio de otras partículas Y . Estos resultados generales muestran que para que haya violación de CP, es necesario que el número bariónico se rompa en la desintegración de X , que la partícula intercambiada también debe violar el número bariónico, y que los bosones involucrados deben tener masas superiores a las combinaciones de masas de las partículas dispersadas. Además, algunas constantes de acoplamiento deben ser complejas para permitir la violación de CP.

El capítulo 4 se centra en la cosmología moderna y la descripción del universo homogéneo, basado en los principios de homogeneidad e isotropía. Comienza abordando los fundamentos geométricos y la métrica de Robertson-Walker, que son esenciales para describir un espacio-tiempo homogéneo y en expansión. Luego, explora la dinámica de un universo en expansión a través de la evolución de la densidad numérica de partículas y las ecuaciones de Friedmann. La discusión se extiende al equilibrio térmico, analizando su importancia tanto a nivel microscópico como macroscópico y cómo la densidad de energía y el número efectivo de especies relativistas afectan la dinámica del universo temprano. Finalmente, el capítulo aborda las desviaciones del equilibrio térmico mediante las ecuaciones de transporte de Boltzmann, fundamentales para entender procesos fuera del equilibrio como la bariogénesis, y cómo estos procesos permiten comprender la transición desde el universo primitivo hasta el estado actual.

El capítulo 5 analiza un modelo en el que se consideran una partícula casi sin masa b con número bariónico $B = \frac{1}{2}$ y su antipartícula \bar{b} con $B = -\frac{1}{2}$, así como una partícula masiva φ que es su propia antipartícula ($\bar{\varphi} \equiv \varphi$). Se permite una leve violación de la invariancia CP en los procesos de dispersión entre b y φ . En un universo temprano con un sistema inicialmente simétrico entre b y \bar{b} , se considera la generación de un número bariónico neto debido a la desviación de la invariancia CP. Las amplitudes de dispersión se parametrizan para reflejar esta violación y se encuentran ecuaciones que describen la evolución temporal de las densidades de φ y del número bariónico $n_B = n_b - n_{\bar{b}}$. Finalmente, se realiza un análisis de los términos en estas ecuaciones.

El Capítulo 6 desarrolla el mecanismo de Bariogénesis, dado que se explora cómo las partículas X y \bar{X} , que tienen cargas bariónicas opuestas y llevan la violación del número bariónico, pueden influir en la generación de un número bariónico neto. Estas partículas, que son bosones masivos mediadores de interacciones que violan el número bariónico, se desintegran en pares de partículas b y \bar{b} . La asimetría entre las tasas de decaimiento de X y \bar{X} , debido a la violación de la simetría CP, puede resultar en un exceso de bariones sobre antibariones. Sin embargo, se demuestra que en equilibrio térmico, el sistema no puede desarrollar un exceso bariónico, ya que los procesos de dispersión que conservan el número bariónico también juegan un papel importante. Además, al considerar tanto las interacciones que violan como las

que conservan el número bariónico, se concluye que la generación de un número bariónico neto es posible sólo fuera del equilibrio térmico, y cualquier número bariónico preexistente se elimina a una tasa que depende de los procesos que violan la conservación de B .

El capítulo 7 introduce una expresión para el Lagrangiano de un modelo siendo la extensión mínima posible del modelo estándar que genere bariogénesis y en consecuencia de la conservación $B - L$ también Leptogénesis, mediante el mecanismo estudiado, siendo este un bosón escalar pesado que hasta el momento no ha sido reportado en la literatura. Se analiza cómo las correcciones a un loop pueden modificar el Lagrangiano para que cumpla con las condiciones necesarias para violar la simetría CP sin violar CPT. También se lleva a cabo un tratamiento detallado de la sección eficaz de dispersión, sustrayendo las contribuciones en resonancia (on-shell), ya que estas se consideran en otros términos de las ecuaciones de Boltzmann. Finalmente, se utiliza métodos de integración numérica (CUBA) para obtener el promedio de la sección eficaz termalizada.

El capítulo 8 aborda la generación del número bariónico en el universo temprano, modelando su evolución mediante ecuaciones de Boltzmann y variables adimensionales que consideran la violación de la simetría CP. Se describe cómo, a altas temperaturas, el número bariónico se genera a través del decaimiento e interacciones de partículas, pero disminuye a bajas temperaturas debido a reacciones que lo violan, lo que requiere soluciones numéricas para comprender esta transición. Se realizan de manera numérica simulaciones que muestran que la asimetría bariónica observada concuerda con datos experimentales y depende de factores clave como la masa del bosón X ($\sim 10^{15}$ GeV), la constante de estructura fina (α) y el parámetro de violación de CP (ϵ). Estas variables afectan directamente la evolución de las densidades de partículas y la generación de la asimetría bariónica, subrayando la importancia de las interacciones entre bosones masivos en este proceso.

Por último en los Capítulos 9 y 10 se presentan los resultados en comparación con los objetivos propuestos y las conclusiones, respectivamente.

Capítulo 2

Teoría cuántica de campos

Este capítulo aborda los fundamentos y herramientas de la teoría cuántica de campos (QFT), que son esenciales para el análisis de procesos como la bariogénesis y leptogénesis. La QFT es el marco teórico que permite la descripción de las partículas elementales y sus interacciones, a través del formalismo de los campos cuánticos. A continuación, se describen las secciones que conforman este capítulo.

La **Sección 2.1**, *Anomalía Quiral*, explora la ruptura de simetrías quirales en la teoría cuántica de campos, un fenómeno que tiene implicaciones profundas en procesos como la bariogénesis, donde esta anomalía puede generar un desequilibrio entre partículas y antipartículas.

La **Sección 2.2**, *Invarianza y violación de simetrías discretas*, se discuten las simetrías discretas, como la paridad (P), la conjugación de carga (C) y la reversión temporal (T). Se hará énfasis en cómo la violación de estas simetrías es un ingrediente clave en la generación de la asimetría materia-antimateria en el universo. El estudio de las violaciones de las simetrías C y CP es crucial para entender la bariogénesis.

La **Sección 2.3**, *Reglas de Feynman*, introduce las reglas prácticas para calcular amplitudes de probabilidad en interacciones de partículas. Se discuten los procesos de dispersión a *tree-level* y se examinan los canales s , t y u , los cuales representan diferentes configuraciones cinemáticas de interacción entre partículas. Estos canales son esenciales para entender la estructura y dinámica de las interacciones, y proporcionan un marco visual claro para los cálculos de teoría de perturbaciones.

En la **Sección 2.4**, *Regla de oro de Fermi*, se desarrollan las herramientas necesarias para calcular tasas de transición entre estados cuánticos. Esta sección está dividida en tres subsecciones:

- **Sección 2.4.1**, *Ancho de decaimiento - Decay rate*, se discute cómo calcular la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula inestable se desintegre en productos

más ligeros. Se detallan los cálculos de la tasa de decaimiento, que son cruciales para entender procesos de desintegración relevantes en el contexto de la bariogénesis.

- **Sección 2.4.2**, *Sección transversal - Cross section*, introduce el concepto de sección transversal, que mide la probabilidad de que ocurra una interacción entre partículas en función de sus propiedades y energías. La sección transversal es una herramienta clave para analizar experimentos de dispersión y colisión en física de partículas.
- **Sección 2.4.3**, *Dimensiones y unidades*, ofrece un análisis detallado de las dimensiones físicas involucradas en las tasas de decaimiento y las secciones transversales, proporcionando una comprensión clara de cómo convertir y manejar unidades en los cálculos.

Este capítulo proporciona una base sólida para la aplicación de la teoría cuántica de campos en el estudio de los procesos fundamentales que juegan un rol en la generación de la asimetría bariónica del universo.

2.1. Anomalía quiral

Una anomalía se entiende como una simetría clásica que no se conserva a nivel cuántico. Esto puede ocurrir ya que, en la teoría cuántica, la integral de trayectoria incluye campos que no obedecen las ecuaciones de campo clásicas. La no conservación de la corriente bariónica se debe al acoplamiento asimétrico a fermiones quirales en el sector $SU(2)$ y, por lo tanto, está relacionada con la anomalía quiral. Por esta razón, se derivará la anomalía de la corriente axial. La interacción entre los fermiones y los campos de gauge se describe mediante la Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\psi, \text{ donde, } D^{\mu} = \partial^{\mu} - igA^{\mu}, \quad (2.1)$$

esta es invariante bajo una transformación quiral global de la forma,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5}, \quad (2.2)$$

y también se tiene la corriente de Nether conservada clásicamente,

$$j_{\mu}^5 = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi, \quad (2.3)$$

se observa que esto es cierto solo para fermiones sin masa. Pero bajo una transformación quiral local, con $\alpha = \alpha(x)$, la Lagrangiana cambiará como (Ver apéndice B.1):

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi\partial^{\mu}\alpha(x) = -j_{\mu}^5\partial^{\mu}\alpha(x), \quad (2.4)$$

por lo tanto, la variación en la acción toma la forma (Ver apéndice B.2),

$$\delta S[\bar{\psi}, \psi, A_{\mu}] = \int d^4x \alpha(x) \partial^{\mu} j_{\mu}^5(x), \quad (2.5)$$

donde A_μ es el campo de gauge asociado a la interacción electromagnética. Sería natural que el valor esperado,

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu \partial^\mu j_5^\mu(x) e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S)}}, \quad (2.6)$$

fuera cero incluso en la teoría cuántica, obteniendo que,

$$\partial^\mu j_5^\mu(x) = 0, \quad (2.7)$$

de lo contrario, la medida funcional no puede ser invariante bajo la transformación formalmente unitaria dada por (2.2), con $\alpha \rightarrow \alpha(x)$. Sin embargo, como se muestra a continuación, esto no es cierto.

Bajo la derivación de Fujikawa [5], quien mostró primero que la anomalía quiral se puede obtener de manera no perturbativa en el enfoque de integral de trayectoria. Esto se hace observando que las medidas funcionales $\mathcal{D}\psi$ y $\mathcal{D}\bar{\psi}$ de los campos fermiónicos no son invariantes bajo una transformación quiral infinitesimal. Durante el cálculo se rota al espacio euclidiano, donde la Lagrangiana se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu\psi, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

dado que es un espacio euclideano con métrica $(+, +, +, +)$. Aún así, por efectos de practicidad y claridad se usará la convención normal de Einstein. La idea es expandir los campos fermiónicos sobre una base ortogonal completa, que consiste en los estados propios del operador $i\mathcal{D}$. Después de la rotación de Wick, $t \rightarrow -i\tau$, $i\gamma^0 \rightarrow \gamma^4$ y $A_0 \rightarrow iA_4$. Ahora el operador $i\mathcal{D}$ es hermítico en el espacio de Hilbert espinorial (dobletes),

$$\begin{aligned} i\mathcal{D} &= \gamma^\mu (i\partial_\mu + gA_\mu) = \gamma^0 (i\partial_0 + gA_0) + \gamma^k (i\partial_k + gA_k) \\ &= (-i\gamma^4) \left(i\frac{\partial_\tau}{-i} + giA_4 \right) + \gamma^k (i\partial_k + gA_k) = \gamma^4 (i\partial_\tau + gA_4) + \gamma^k (i\partial_k + gA_k), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (i\mathcal{D})^\dagger &= (\gamma^4)^\dagger (i\partial_\tau + gA_4)^\dagger + (\gamma^k)^\dagger (i\partial_k + gA_k)^\dagger = -\gamma^4 (-i\partial_\tau - gA_4) + \gamma^k (i\partial_k + gA_k) \\ &= \gamma^4 (i\partial_\tau + gA_4) + \gamma^k (i\partial_k + gA_k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

y los estados propios formarán un conjunto completo:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \phi_n^\dagger(x) \bar{b}_n, \quad (2.11)$$

donde $\{\phi_n\}$ es un conjunto de autofunciones para el operador derivada covariante, de tal manera que

$$i\gamma^\mu D_\mu \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \quad (2.12)$$

con la propiedad de ortonormalidad:

$$\int d^4x \phi_n^\dagger \phi_m = \delta_{nm}, \quad (2.13)$$

los coeficientes a_n y \bar{b}_n son variables escalares que representan las componentes de la expansión de los espinores $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ en términos de las autofunciones $\phi_n(x)$. Matemáticamente, estos coeficientes miden la proyección de los espinores sobre los modos propios del operador derivada covariante D_μ . En este contexto, a_n y \bar{b}_n son variables de Grassmann, lo que implica que siguen reglas anticomutativas:

$$a_n a_m = -a_m a_n, \quad \bar{b}_n \bar{b}_m = -\bar{b}_m \bar{b}_n,$$

las variables de Grassmann son fundamentales en teoría cuántica de campos para describir fermiones, ya que estas propiedades anticomutativas reflejan la estadística de Fermi-Dirac. La integral de trayectoria se define como la integral donde $\psi(x)$ varía sobre todos los posibles espinores:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_m d\bar{b}_m \prod_n da_n, \quad (2.14)$$

Aquí, los diferenciales da_n y $d\bar{b}_m$ corresponden a las medidas de integración sobre las variables de Grassmann asociadas con cada modo. Bajo una transformación quiral local de los espinores:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x) = \sum_n e^{i\alpha(x)\gamma_5} a_n \phi_n(x) = \sum_m a'_m \phi_m(x), \quad (2.15)$$

el campo gauge A_μ permanece invariante. Esto se debe a que la transformación quiral afecta únicamente a los espinores, introduciendo una rotación en el espacio interno, pero no altera el campo gauge. En términos físicos, esto refleja que A_μ no distingue entre las componentes izquierdas y derechas de los fermiones. Usando la relación de ortonormalidad (2.13), los nuevos coeficientes después de la transformación quiral se obtienen como:

$$a'_m = \int d^4x \phi_m^\dagger \sum_n e^{i\alpha(x)\gamma_5} a_n \phi_n(x) = \sum_n \int d^4x \phi_m^\dagger e^{i\alpha(x)\gamma_5} a_n \phi_n(x) = \sum_n C_{mn} a_n, \quad (2.16)$$

donde C_{mn} es una matriz que codifica los cambios en los coeficientes tras la transformación. Asumiendo que solo hay un número finito de autofunciones, C_{mn} se convierte en una matriz finita.

De manera similar, para los coeficientes \bar{b}_n :

$$\bar{b}'_m = \sum_n \int d^4x \bar{b}_n \phi_m^\dagger e^{i\alpha(x)\gamma_5} \phi_n(x) = \sum_n \bar{b}_n C_{mn}. \quad (2.17)$$

Es importante recordar que para n -vectores de Grassmann x e y , y siendo A una matriz compleja, se cumple:

$$x = Ay \quad \Rightarrow \quad d^n x = (\det A)^{-1} d^n y. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, para la medida funcional en (2.14), se tiene:

$$\prod_n d\bar{b}'_n \prod_m da'_m = (\det C)^{-2} \prod_n d\bar{b}_n \prod_m da_m. \quad (2.19)$$

Este resultado refleja cómo la medida funcional cambia bajo la transformación quirral, involucrando el determinante de la matriz C , que surge de la transformación de los coeficientes a_n y \bar{b}_n . Para transformaciones quirales locales infinitesimales $\alpha(x)$, la expansión de Taylor de la matriz C se lee,

$$C = I + \hat{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad \hat{\alpha} = i \int d^4x \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_m \alpha(x). \quad (2.20)$$

luego (Ver apéndice B.3),

$$(\det C)^{-2} = e^{-2\text{tr} \ln C} = e^{-2\text{tr} \hat{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha^2)} = e^{-2i \int d^4x \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x)}, \quad (2.21)$$

La suma $\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x)$ no está bien definida y para evaluar la expresión se debe imponer una regularización invariante de gauge. Esto se puede hacer proporcionando un límite M en los autovalores λ_n , ya que estos son invariantes de gauge,

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\left(\frac{\lambda_n}{M}\right)^2} \phi_n(x), \quad M \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Al volver a escribir λ_n como $i\gamma^\mu D_\mu = i\mathcal{D}$ y usando la notación de Dirac $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$, se obtiene:

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\left(\frac{i\mathcal{D}}{M}\right)^2} \phi_n(X) = \sum_n \langle n|x\rangle \gamma_5 e^{\left(\frac{\mathcal{D}}{M}\right)^2} \langle x|n\rangle = \text{Tr} \left(|x\rangle \gamma_5 e^{\left(\frac{\mathcal{D}}{M}\right)^2} \langle x| \right), \quad (2.23)$$

donde la traza se toma sobre todo el espacio de Hilbert. El estado $|n\rangle$ se puede expandir en ondas planas de Fourier,

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\mathcal{D}}{M}\right)^2} \phi_n(x) = \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_5 e^{-ipx} e^{\left(\frac{\mathcal{D}}{M}\right)^2} e^{ipx}, \quad (2.24)$$

donde la traza está ahora sobre los índices del doblete espinor. Para evaluar esto, se escribe \mathcal{D}^2 como (Ver apéndice B.4),

$$\mathcal{D}^2 = D^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

donde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Ahora, para una función $f(x)$ se tiene que (Ver apéndice B.5),

$$\begin{aligned} e^{-ipx} D^2 e^{ipx} f(x) &= e^{-ipx} D_\mu D^\mu e^{ipx} f(x) \\ &= [D_\mu + ip_\mu] [D^\mu + ip^\mu] f(x) \\ &= (-p^2 + 2ip^\mu D_\mu + D^2) f(x), \end{aligned} \quad (2.26)$$

y (Ver apéndice B.6),

$$e^{-ipx} [D_\mu, D_\nu] e^{ipx} f(x) = [D_\mu, D_\nu] f(x) = F_{\mu\nu} f(x), \quad (2.27)$$

A partir de la expansión de Taylor de la función exponencial se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{-ipx} e^{D^2} e^{ipx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-ipx} (D^2)^n e^{ipx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-ipx} (D^2)^{n-1} D^2 e^{ipx}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

gracias a $e^{-ipx} D^2 e^{ipx} = [D_\mu + ip_\mu] [D^\mu + ip^\mu]$, se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{-ipx} e^{D^2} e^{ipx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-ipx} (D^2)^{n-1} e^{ipx} [D_\mu + ip_\mu] [D^\mu + ip^\mu] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(D_\mu + ip_\mu) (D^\mu + ip^\mu)]^n = e^{(D_\mu + ip_\mu)(D^\mu + ip^\mu)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} e^{-ipx} e^{-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} e^{ipx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-ipx} \left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^n e^{ipx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} \right)^n e^{-ipx} (F_{\mu\nu})^n e^{ipx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} \right)^n e^{-ipx} [D_\mu, D_\nu]^n e^{ipx} \end{aligned} \quad (2.30)$$

gracias a $e^{-ipx} [D_\mu, D_\nu] e^{ipx} = F_{\mu\nu}$, se obtiene,

$$e^{-ipx} e^{-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} e^{ipx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} \right)^n F_{\mu\nu}^n = e^{-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}, \quad (2.31)$$

sustituyendo esto en (2.24),

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[e^{\frac{1}{M^2}} \gamma_5 e^{-ipx} e^{\not{D}^2} e^{ipx} \right] \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[e^{\frac{1}{M^2}} \gamma_5 e^{-ipx} e^{D^2 - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} e^{ipx} \right] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[e^{\frac{1}{M^2}} \gamma_5 e^{-ipx} e^{D^2} e^{ipx} e^{-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right] \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{\frac{(D_\mu + ip_\mu)(D^\mu + ip^\mu)}{M^2} - \frac{i}{2M^2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{\frac{-p^2 + 2ip^\mu D_\mu + D^2}{M^2} - \frac{i}{2M^2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right] \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{\frac{-p^2}{M^2}} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{\frac{2ip^\mu D_\mu + D^2}{M^2} - \frac{i}{2M^2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

bajo el cambio de variable $p_\mu \rightarrow Mp_\mu$,

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) = M^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{\frac{2ip^\mu D_\mu}{M} + \frac{D^2}{M^2}} e^{-\frac{i}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right], \quad (2.33)$$

tomando el límite,

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \text{Tr} \left[\gamma_5 \lim_{M \rightarrow \infty} e^{\frac{2ip^\mu D_\mu}{M} + \frac{D^2}{M^2}} \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 e^{-\frac{i}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right] \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-\frac{i}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

expandiendo la exponencial en potencias,

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \text{Tr} \left[\gamma_5 - \frac{i}{2M^2} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\gamma_5}{2!} \left(-\frac{i}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

pero gracias a $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$ y $\text{Tr}(\gamma_5 \sigma^{\mu\nu}) = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \text{Tr} \left[\frac{\gamma_5}{2! M^4} \left(-\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 + \frac{\gamma_5}{3! M^6} \left(-\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^3 \dots \right] \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \text{Tr} \left[\frac{\gamma_5}{2!} \left(-\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 + \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{\gamma_5}{3! M^2} \left(-\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^3}\right) + \dots \right] \right] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\gamma_5}{2!} \left(\frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4} F_{\mu\nu} \right)^2 \right] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} = \frac{1}{32} \text{Tr} [\gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\beta]] F_{\mu\nu} F_{\rho\beta} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

La integral gaussiana de la exponencial es,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2} = \frac{1}{16\pi^2}, \quad (2.37)$$

dado que $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\gamma^\mu \gamma^\nu - 2g^{\mu\nu} I$, $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$ y $\text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$,

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) = \frac{1}{8} \text{Tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\beta] F_{\mu\nu} F_{\rho\beta} \frac{1}{16\pi^2}, \quad (2.38)$$

por propiedades de las trazas $\text{Tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\beta] = -4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ donde $\varepsilon_{1234} = 1$,

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{p}}{M}\right)^2} \phi_n(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta}, \quad (2.39)$$

usando (2.21), finalmente se obtiene,

$$(\det C)^{-2} = e^{\frac{i}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta}}, \quad (2.40)$$

quitando la representación de autovalores, tomando nuevamente los operadores derivada (2.14) y volviendo a espacio de Minkowski,

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \rightarrow \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\frac{i}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta}}, \quad (2.41)$$

el valor esperado (2.6),

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu \partial^\mu j_5^\mu(x) e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S)}}, \quad (2.42)$$

luego de la transformación quiral infinitesimal, las medidas funcionales,

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu \partial^\mu j_5^\mu(x) e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S + \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta})}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\nu e^{i(S[\bar{\psi}, \psi, A_\nu] + \delta S + \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta})}}, \quad (2.43)$$

esto contribuirá al cambio de la acción efectiva bajo una transformación quiral local,

$$\begin{aligned} \delta S^{\text{eff}} &\equiv \delta S + \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta} \\ &= \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu j_5^\mu(x) + \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

la transformación quiral local es simplemente un cambio de variables, por lo que se debe obtener que $\delta S^{\text{eff}} = 0$. Esto da lugar a la corriente axial anómala,

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\beta} F_{\mu\nu} F_{\rho\beta}, \quad (2.45)$$

se observa que es posible tener una anomalía no nula.

2.2. Invarianza y violación de simetrías discretas

Sea $\mathcal{M}(i \rightarrow j)$ la amplitud para una transición de un estado i a un estado j , y sea \bar{i} el estado obtenido aplicando una transformación CP a i . Entonces, el teorema CPT (cuya validez es necesaria para justificar el uso de la teoría cuántica de campos) implica que,

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i}), \quad (\text{Invarianza CPT}), \quad (2.46)$$

la invarianza CP (y, por lo tanto, por CPT, la invarianza T), cuando es válida, exige que,

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j}) = \mathcal{M}(j \rightarrow i), \quad (\text{Invarianza CP}), \quad (2.47)$$

el requisito de unitariedad (que las probabilidades para todas las transiciones posibles desde y hacia un estado i deben sumar uno) produce,

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2, \text{ (Unitariedad)}, \quad (2.48)$$

pero a partir de (2.46) (la suma sobre j incluye todos los estados y sus antiestados dado que son distinguibles, por tanto no es necesaria la escritura de \bar{j}),

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow \bar{i})|^2, \text{ (CPT)}, \quad (2.49)$$

en equilibrio térmico (y en ausencia de potenciales químicos correspondientes a números cuánticos conservados distintos de cero), todos los estados j de un sistema con una energía dada están igualmente poblados. Las ecuaciones (2.48) y (2.49) muestran entonces que las transiciones desde estos estados (interacciones) deben producir estados i y sus conjugados CP \bar{i} en igual número. Así, no puede desarrollarse un exceso de partículas sobre antipartículas (y, por ejemplo, un número bariónico neto) en un sistema en equilibrio térmico, incluso si se viola la invarianza CP. (En [6] se proporciona una forma restringida de este resultado). A partir de las ecuaciones (2.46) y (2.48), se encuentra que,

$$\begin{aligned} \sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 &= \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2, \text{ (Unitariedad)}, \\ \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2 &= \sum_j |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow j)|^2, \text{ (Unitariedad+CPT)}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

lo que implica que la sección transversal total para las interacciones entre un conjunto de partículas y sus conjugados CP son iguales, y que la tasa total de decaimiento de una partícula y su antipartícula debe ser igual. (La invarianza CPT por sí sola implica la igualdad de las secciones transversales de dispersión elástica $|\mathcal{M}(i \rightarrow i)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{i})|^2$). Sin embargo, el resultado correspondiente,

$$|\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 \equiv |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2, \text{ (Invarianza CP)}, \quad (2.51)$$

para estados finales específicos requiere la invarianza CP. Así que si la interacción que induce el decaimiento de una partícula (por ejemplo X) viola la invarianza CP, entonces los decaimientos de un sistema que contiene un número igual de X y \bar{X} puede resultar en números desiguales de, suponiendo, b y \bar{b} . Note que para un sistema con solo dos estados, la unitariedad da $|\mathcal{M}(1 \rightarrow 1)|^2 + |\mathcal{M}(1 \rightarrow 2)|^2 = |\mathcal{M}(1 \rightarrow 1)|^2 + |\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)|^2$, por lo que el resultado (2.51) siempre se cumple.

En equilibrio térmico no puede desarrollarse un exceso de partículas sobre antipartículas. Además, cualquier exceso preexistente tiende a disminuir por las interacciones: la ecuación (2.50) muestra que las secciones transversales totales para la destrucción de los estados i y j son iguales. Por lo tanto, si existen, por ejemplo, más i que j , entonces la tasa de destrucción de i es mayor que la tasa de destrucción de j . Además, la ecuación (2.50) implica que en

equilibrio térmico, i y j se producen en igual número. Por lo tanto, las interacciones tienden a destruir cualquier exceso de, por ejemplo, i sobre j en equilibrio térmico.

Según el teorema H de Boltzmann (que se cumple independientemente de la invarianza T), cualquier sistema cerrado evolucionará en promedio en ausencia de influencias externas a un estado en el que todas las partículas que no llevan números cuánticos absolutamente conservados estén distribuidas igualmente en el espacio de fases. Ninguna diferencia entre las densidades de cualquier especie de partículas y sus antipartículas puede sobrevivir (a menos que estén diferenciadas por números cuánticos absolutamente conservados). Sin embargo, la expansión del universo agrega términos adicionales a la ecuación de transporte de Boltzmann que invalidan el teorema H si algunas partículas participantes son masivas. La expansión del universo puede evitar, por lo tanto, la consecución de un equilibrio térmico completo y permitir la generación de un exceso bariónico: el tiempo de relajación necesario para destruir el exceso a menudo aumenta más rápido que la edad del universo y, por lo tanto, puede persistir un número bariónico neto.

El operador de dispersión S juega un papel fundamental en la teoría cuántica de campos, pues describe cómo un sistema evoluciona desde un estado inicial $|i\rangle$ hacia un estado final $|f\rangle$, teniendo en cuenta la posibilidad de interacciones entre las partículas. La matriz S se define de tal manera que conecta los estados iniciales y finales asintóticos, es decir, aquellos que se encuentran muy alejados en el tiempo antes y después de la interacción. Matemáticamente, el operador S es:

$$S = I + iT, \quad (2.52)$$

donde I es el operador identidad, correspondiente al caso en que no ocurre ninguna interacción, y T es el operador de transición, que contiene la información sobre los procesos de interacción no triviales. Los elementos de la matriz S entre un estado inicial $|i\rangle$ y un estado final $|f\rangle$ se expresan como:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + iT_{fi} \\ &= 1_{fi} + iT_{fi} \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde δ_{fi} es la delta de Kronecker, que indica que si no hay interacción ($T_{fi} = 0$), el estado inicial y el final son idénticos. En cambio, cuando $T_{fi} \neq 0$, se tiene una amplitud no trivial de transición entre $|i\rangle$ y $|f\rangle$ debido a la interacción entre las partículas.

La invarianza CP requiere la hermiticidad de la matriz de transición $T = i(1 - S)$, definida en términos de los momentos entrantes y salientes de una interacción como,

$$\langle \mathbf{p}_f | iT | \mathbf{p}_i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_f^\mu - p_i^\mu) \cdot i\mathcal{M}(i \rightarrow f) \quad (2.54)$$

donde el término $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$ asegura la conservación de momento y energía en el proceso de dispersión, y \mathcal{M}_{fi} contiene toda la información dinámica sobre las interacciones, como propagadores y vértices. La restricción de invarianza CP (2.51) y la matriz T , toman

la forma,

$$\begin{aligned}
|T_{fi}|^2 &= [(2\pi)^4 \delta^4(p_f^\mu - p_i^\mu) \cdot i]^2 |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2, \\
&= [(2\pi)^4 \delta^4(p_f^\mu - p_i^\mu) \cdot i]^2 |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{f})|^2 = |T_{\bar{f}\bar{i}}|^2 \text{ (Invarianza CP)}, \\
&= [(2\pi)^4 \delta^4(p_i^\mu - p_f^\mu) \cdot i]^2 |\mathcal{M}(f \rightarrow i)|^2 = |T_{if}|^2 \text{ (Invarianza CPT)},
\end{aligned} \tag{2.55}$$

el requisito de unitariedad $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ (que dio lugar a la ecuación (2.48)) es (Ver apéndice A.2.1),

$$T_{ij} - T_{ji}^* = i \sum_n T_{in}(T_{nj}^\dagger), \text{ (Unitariedad)}, \tag{2.56}$$

así, la unitariedad limita las posibles violaciones de la invarianza CP , y a partir de la ecuación (2.56) se encuentra que las desviaciones de (2.55) deben obedecer (Ver apéndice A.2.2),

$$\begin{aligned}
|T_{ij}|^2 - |T_{ji}|^2 &= \left| i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} + T_{ji}^* \right|^2 - |T_{ji}|^2 \\
&= -2 \operatorname{Im} \left[\left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} \right] + \left| \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} \right|^2.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Las correcciones de bucle se representan mediante términos adicionales en la forma:

$$\sum_n T T^\dagger, \tag{2.58}$$

que contienen las contribuciones de partículas virtuales. Si las tasas de transiciones $i \rightarrow j$ están gobernadas por algún parámetro pequeño, proponiendo α , de modo que $|\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = O(\alpha^k)$, entonces la ecuación (2.57) muestra que cualquier diferencia que viole CP debe ser al menos del orden de α^{k+1} . Por lo tanto, los efectos de violación de CP deben surgir de correcciones de diagramas de bucle a los procesos $i \rightarrow j$. Además, los estados intermedios en los bucles deben corresponder a sistemas físicos n (para que las amplitudes de Feynman tengan partes absorbentes debido a discontinuidades en el canal s), para contribuir a (2.57). Por lo tanto, incluso si las partículas intermedias tienen acoplamientos complejos que violan CP , pueden producir una violación de (2.51) solo cuando sus masas son lo suficientemente pequeñas como para permitirles propagarse en sus estados intermedios.

2.3. Reglas de Feynman

Sean 3 clases de partículas, A, B, C , donde el Lagrangiano de la interacción es una constante de acoplamiento por partículas escalares, de la forma (se realizará el caso para campos escalares por fines del presente trabajo, sin embargo tienen la misma estructura para campos

fermiónicos o de gauge teniendo en cuenta factores de espín, matrices de Dirac y/o términos de polarización),

$$\mathcal{L} = g\phi_A\phi_B\phi_C. \quad (2.59)$$

El momento relativista es $P^\mu = (P^0, \mathbf{P})$, donde bajo cuantización,

$$P^0 \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad P^i \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.60)$$

de modo que,

$$P^\mu = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \quad (2.61)$$

además, el término covariante se escribe,

$$P_\mu = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \quad (2.62)$$

bajo contracción se genera la constante relativista,

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2, \quad (2.63)$$

reescribiendo en términos de operadores,

$$\hat{P}^\mu \hat{P}_\mu \phi = m^2 c^2 \phi, \quad (2.64)$$

luego,

$$(i\hbar\partial_\mu)(i\hbar\partial^\mu)\phi = m^2 c^2 \phi \rightarrow -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \phi = m^2 c^2 \phi \quad (2.65)$$

además,

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i = (\partial^0)^2 - \partial_i \partial_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square \quad (2.66)$$

donde \square es el operador *Lambertiano*, reemplazando en (2.65),

$$-\hbar^2 \square \phi = m^2 c^2 \phi \rightarrow \left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi = 0, \quad (2.67)$$

obteniendo así, la ecuación de Klein-Gordon, en unidades naturales ($c = \hbar = 1$),

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.68)$$

El Lagrangiano de una partícula es descrito como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{c^2} \phi^2 - V \quad (2.69)$$

donde V es un potencial, con ecuaciones de movimiento dadas por la formula de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.70)$$

se puede intuir qué de la integral de acción,

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{c^2} \phi^2 - V \right), \quad (2.71)$$

en términos de la derivada parcial de un producto,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) - \phi \partial^\mu \partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{c^2} \phi^2 - V \right], \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi) + \frac{m^2}{c^2} \phi^2 + V \right], \\ &= \frac{1}{2} (\phi \partial_\mu \phi)|_{frontera} - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi) + \frac{m^2}{c^2} \phi^2 + V \right], \end{aligned} \quad (2.72)$$

el término de frontera se anula y en unidades naturales,

$$S \simeq - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi + V \right], \quad (2.73)$$

en tanto que, cada uno de los campos tendrá un término cinético, este operador debe tener una función de Green,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x, x') = \delta^4(x - x'), \quad (2.74)$$

definida como,

$$G(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-x')} \tilde{G}(k), \quad (2.75)$$

además, la representación integral de la delta de Kronecker,

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot (x-x')}, \quad (2.76)$$

reemplazando,

$$(\square + m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-x')} \tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot (x-x')}, \quad (2.77)$$

el operador Lambertiano desarrollándose sobre la función exponencial,

$$\square e^{ik \cdot x} = \partial_\mu \partial^\mu e^{ik \cdot x} = \partial_\mu (ik^\mu e^{ik \cdot x}) = ik^\mu ik_\mu e^{ik \cdot x} = -k^\mu k_\mu e^{ik \cdot x} = -k^2 e^{ik \cdot x}, \quad (2.78)$$

luego,

$$\int d^4k (-k^2 + m^2) e^{ik \cdot (x-x')} \tilde{G}(k) = \int d^4k e^{ik \cdot (x-x')}, \quad (2.79)$$

igualando los coeficientes,

$$(-k^2 + m^2) \tilde{G}(k) = 1, \quad (2.80)$$

finalmente la función de green puede ser escrita como el propagador de una función escalar de la forma,

$$\tilde{G}(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2} = i \left[\frac{i}{k^2 - m^2} \right]. \quad (2.81)$$

Demostrando la estructura de un propagador se muestran a continuación los pasos para obtener obtener la amplitud de dispersión de un diagrama de Feynman [7]:

1. **Momentos externos**, se rotulan con p_1, p_2, \dots, p_n , momentos internos con q_1, q_2, \dots, q_n .
2. **Vértices**, por cada vértice se escribe (asocia) un factor $-ig$, g se llama constante de acoplamiento; especifica la intensidad de la interacción entre A, B y C. En esta teoría simplificada, g tiene dimensiones de momento; en el modelo la constante de acoplamiento es adimensional.
3. **Propagadores**, por cada línea interna se asocia un factor¹,

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2 + i \varepsilon}, \quad q_j^2 \text{ es virtual.}$$

4. **Conservación de la energía y momento lineal**, por cada vértice se asocia un factor,

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + \dots),$$

si el k_i en cuestión entra al vértice se define positivo, en caso contrario es negativo.

5. **Integración sobre momentos internos**, por cada línea interna se escribe un factor,

$$\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}.$$

6. **Se cancela la función delta**, del resultado final asociada a la conservación global del momento,

$$(2\pi^4) \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_4 - p_5 - \dots).$$

7. **Multiplicar**, por i.

2.3.1. Canales a tree-level

Los diagramas a tree level (o diagramas de árbol) son una herramienta gráfica fundamental para describir las interacciones entre partículas en los procesos de colisión y desintegración. Estos diagramas representan las formas más simples de interacción y sirven como una primera aproximación para calcular las amplitudes de probabilidad de los procesos dado que no incluyen correcciones adicionales, como efectos de bucles o diagramas más complejos que

¹ $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$

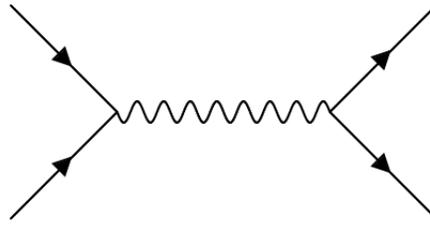


Figura 2.1: Canal S.

incluyen efectos adicionales como la auto-interacción de partículas mediadoras y correcciones a la amplitud de probabilidad que se vuelven significativas a altas energías. Se denominan a «tree level» porque tienen una estructura que se asemeja a un árbol, con ramas que representan las interacciones y vértices de partículas. En la dispersión dos a dos de partículas las posibles reglas de Feynman se diferencian mediante tres canales, denominados s , t y u , en esencia, se refieren a las diferentes maneras en que las partículas pueden interactuar y cambiar de estado durante una colisión [8]:

1. Canal de dispersión S .

Este canal es fundamental porque establece la energía total disponible para los productos de la colisión. Por ejemplo, en el caso de colisiones en aceleradores de partículas, como el LHC (Gran Colisionador de Hadrones), s se puede ajustar al variar la energía de las partículas que colisionan. Esto permite a los físicos explorar diferentes regiones de la física de partículas, incluyendo la creación de partículas masivas como el bosón de Higgs.

En una colisión entre dos partículas, s representa el cuadrado de la energía total en el centro de masa del sistema. Se define como:

$$s \equiv \frac{(p_1 + p_2)^2}{c^2},$$

donde p_1 y p_2 son los cuatrimomentos de las partículas involucradas en la colisión.

2. Canal de dispersión t .

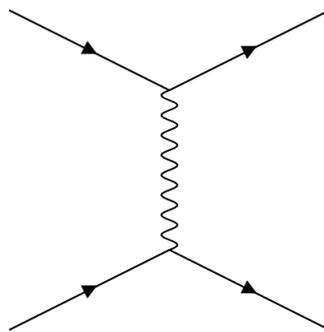


Figura 2.2: Canal t.

Este canal está relacionado con la transferencia de momentum en la colisión, involucrando directamente al ángulo de dispersión de la partícula en cuestión. Un cambio grande en t implica una gran desviación en la trayectoria de la partícula, lo cual está relacionado con las interacciones y fuerzas involucradas en el proceso de dispersión.

Representa la diferencia entre el momentum inicial y el momentum final en una dirección específica. Se define como:

$$t \equiv \frac{(p_1 - p_3)^2}{c^2},$$

donde p_1 es el momento inicial de una de las partículas y p_3 es el momento final de la posible línea externa manteniendo la simetría del diagrama.

3. Canal de dispersión u .

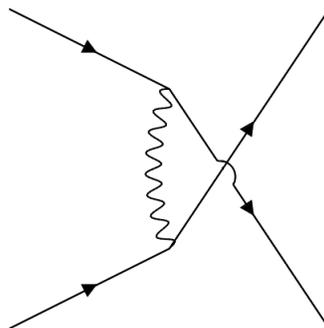


Figura 2.3: Canal u.

Este canal es útil para describir procesos donde las partículas intercambian posiciones o roles en el proceso de dispersión. Es particularmente relevante en procesos donde

las partículas intercambian o absorben momentum en configuraciones que no se consideran en el canal t . Por ejemplo, en un proceso de dispersión de dos partículas en el que se forman partículas intermediarias, como en la dispersión de partículas virtuales, el canal u puede proporcionar información sobre el tipo de partículas intermediarias y sus interacciones.

Se define como:

$$u \equiv \frac{(p_1 - p_4)^2}{c^2},$$

donde p_1 es el momento inicial de una de las partículas y p_4 es el momento final de la posible línea externa sin mantener la simetría del diagrama.

Relaciones y Conservación

Estos tres canales están relacionados a través de la conservación de la energía y el momentum en la colisión. La relación entre s , t y u para un proceso de dispersión particular puede ser expresada en términos de la energía total y el momentum de las partículas involucradas.

La relación de Mandelstam entre los canales en un proceso de dispersión $2 \rightarrow 2$ está dada por la ecuación (Ver apéndice C.1.1):

$$s + t + u = \sum_i m_i^2, \quad (2.82)$$

donde la suma es sobre las masas de las partículas involucradas en el proceso.

2.4. Regla de oro de Fermi

2.4.1. Ancho de decaimiento - Decay rate

Sea una partícula que decae en dos, tres o N partículas, según la regla de oro de Fermi, el ancho de decaimiento se define como:

$$\begin{aligned} \Gamma(1 \rightarrow 2, 3, \dots, N) &\equiv \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \\ &\times \prod_{j=2}^N (2\pi) \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde,

- p_j , es el cuadri-momento de la partícula j -ésima,
- m_j , masa j -ésima de la partícula,
- $S = \frac{1}{s_1! s_2! \dots s_k!}$, s_i , número de partículas idénticas i en estado final,

- \mathcal{M} , es un invariante de Lorentz denominada amplitud,
- $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$, el momentum se conserva.

Reescribiendo,

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) = \delta((p_j^0)^2 - |\mathbf{p}_j|^2 - m_j^2 c^2), \quad (2.84)$$

bajo la propiedad,

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta((x - a)(x + a)) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (2.85)$$

se obtiene que el término,

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) = \frac{\theta(p_j^0)}{2(|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\delta(p_j^0 - \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}) + \delta(p_j^0 + \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}) \right], \quad (2.86)$$

además, la energía total relativista de la partícula j es descrita por la ecuación,

$$\frac{E_j}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2} > 0, \quad (2.87)$$

ahora,

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) = \frac{\theta(p_j^0) c}{2E_j} \left[\delta(p_j^0 - \frac{E_j}{c}) + \delta(p_j^0 + \frac{E_j}{c}) \right], \quad (2.88)$$

la función *heaviside* restringe la delta de Kronecker a:

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) = \frac{c}{2E_j} \delta\left(p_j^0 - \frac{E_j}{c}\right), \quad (2.89)$$

reemplazando en el ancho de decaimiento se obtiene,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \prod_{j=2}^N \frac{c}{2E_j} \delta\left(p_j^0 - \frac{E_j}{c}\right) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \prod_{j=2}^N \frac{c}{2E_j} \delta\left(p_j^0 - \frac{E_j}{c}\right) \frac{dp_j^0 d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

desarrollando todas las integrales en dp_j^0 , ahora los momentos se encuentran en la capa de masa,

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \prod_{j=2}^N \frac{c}{2E_j} \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}, \quad (2.91)$$

expandiendo el desarrollo del decaimiento habitual a dos partículas,

$$\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{c}{2E_2} \frac{c}{2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3}. \quad (2.92)$$

Asumiendo que la partícula uno está en reposo, $p_1^0 = m_1 c \wedge \mathbf{p}_1 = 0$, la conservación del momento en la distribución delta de Dirac toma la forma,

$$\begin{aligned}\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) &= \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\ &= \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\ &= \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3),\end{aligned}\quad (2.93)$$

dado que la delta de kronecker es simétrica, luego,

$$\begin{aligned}\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) &= \frac{S}{2\hbar m_1 (2\pi)^2} \int |\mathcal{M}|^2 \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \frac{c}{2E_2} \frac{c}{2E_3} d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 \\ &= \frac{S}{2\hbar m_1 (2\pi)^2} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{c^2 \delta(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c})}{2E_2 2E_3} \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3,\end{aligned}\quad (2.94)$$

operando la integral sobre $d^3\mathbf{p}_3$, resulta en que $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2$ y,

$$\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) = \frac{S}{2\hbar m_1 (2\pi)^2} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{c^2 \delta(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c})}{2E_2 2E_3} d^3\mathbf{p}_2, \quad (2.95)$$

transformando a coordenadas esféricas donde el *Jacobiano* se escribe, $d^3\mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 \sin \theta dp_2 d\theta d\phi$, además, usando la expresión de energía relativista de las partículas y reconociendo que el ángulo sólido de la esfera en tres dimensiones es 4π , se obtiene,

$$\begin{aligned}\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) &= \frac{S}{2\hbar m_1 (2\pi)^2} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{c^2 \delta(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c})}{2E_2 2E_3} |\mathbf{p}_2|^2 \sin \theta dp_2 d\theta d\phi \\ &= \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2}} |\mathbf{p}_2|^2 dp_2, \\ &= \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_3^2 c^2}} |\mathbf{p}_2|^2 dp_2, \\ &= \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}} |\mathbf{p}|^2 dp,\end{aligned}\quad (2.96)$$

gracias a que $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2$, ahora, dado que la variable en la delta de kronecker no es lineal es necesario hacer el cambio de la forma,

$$u = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}, \quad (2.97)$$

obteniendo la derivada,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dp} &= \frac{2|\mathbf{p}|}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2}} + \frac{2|\mathbf{p}|}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}} = \frac{|\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} + |\mathbf{p}| \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}} \\ &= \frac{|\mathbf{p}| u}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}},\end{aligned}\quad (2.98)$$

con esto,

$$\frac{du}{u} = \frac{|\mathbf{p}|dp}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}}, \quad (2.99)$$

reemplazando,

$$\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c}^{\infty} |\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - u) |\mathbf{p}| \frac{du}{u}, \quad (2.100)$$

necesariamente $m_1 > m_2 + m_3$, por otro lado, la integral hace $u = m_1 c$, en tanto que el momento, por conservación de la energía, es (Ver apéndice C.1.2),

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| &= \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2} \\ &= \frac{c}{2m_1} \lambda(m_1, m_2, m_3), \end{aligned} \quad (2.101)$$

finalmente el ancho de decaimiento en dos partículas en términos de la amplitud y el momento es,

$$\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) = \frac{S|\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c} = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_1, m_2, m_3)}{16\pi\hbar m_1^3}. \quad (2.102)$$

2.4.2. Sección transversal - Cross section

Sean dos partículas que decaen en dos, tres o N partículas, según la regla de oro de Fermi, la cross section se define como:

$$\begin{aligned} \sigma(1, 2 \rightarrow 3, 4, \dots, N) &\equiv \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) \\ &\quad \times \prod_{j=3}^N (2\pi) \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

donde,

- p_j , es el cuadri-momento de la partícula j -ésima,
- m_j , masa de la partícula j -ésima,
- $S = \frac{1}{s_1! s_2! \dots s_k!}$, s_i , número de partículas idénticas i en estado final,
- \mathcal{M} , es un invariante de Lorentz denominada amplitud,
- $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$, el momentum se conserva.

Reescribiendo,

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) = \delta((p_j^0)^2 - |\mathbf{p}_j|^2 - m_j^2 c^2), \quad (2.104)$$

bajo la propiedad,

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta((x - a)(x + a)) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (2.105)$$

se obtiene que el término,

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) = \frac{\theta(p_j^0)}{2(|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\delta(p_j^0 - \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}) + \delta(p_j^0 + \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}) \right], \quad (2.106)$$

además, la energía total relativista de la partícula j es descrita por la ecuación,

$$\frac{E_j}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2} > 0, \quad (2.107)$$

la función *heaviside* restringe la delta de Kronecker a:

$$\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) = \frac{1}{2(|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \delta(p_j^0 - \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}), \quad (2.108)$$

reemplazando en la cross section se obtiene,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) \\ \times \prod_{j=3}^N \frac{1}{2(|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \delta(p_j^0 - \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2}) \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

desarrollando todas las integrales en dp_j^0 , ahora los momentos se encuentran en la capa de masa,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) \\ \times \prod_{j=3}^N \frac{1}{2(|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

expandiendo el desarrollo de la dispersión habitual a dos partículas,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ \frac{1}{2(|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3}, \\ \sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \\ \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2(|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2(|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

Sistema de referencia reducido - Lab frame

Configurando el sistema de referencia de tal manera que la partícula dos está en reposo, $E_2 = m_2 c^2 \wedge \mathbf{p}_2 = 0$, además la velocidad resultante de la partícula 1 es el movimiento relativo entre las partículas 1 y 2, $v = |v_1 - v_2|$, luego el producto interno (recordando que la métrica es de Minkowski),

$$p_1 \cdot p_2 = \left(\frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \cdot \left(\frac{E_2}{c}, 0 \right) = \frac{E_1 E_2}{c^2}, \quad (2.112)$$

tomando el primer radicando de la cross section,

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 = \frac{E_1^2 E_2^2}{c^4} - m_1^2 E_2^2 = \left(\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2 \right) \frac{E_2^2}{c^2}, \quad (2.113)$$

gracias a la relación de dispersión relativista de la partícula 1 el término entre paréntesis es igual al momento relativista,

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 = |\mathbf{p}_1|^2 \frac{E_2^2}{c^2}, \quad (2.114)$$

ahora, este momento se puede reescribir como:

$$|\mathbf{p}_1|^2 = \gamma^2 m_1^2 |v|^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}_1|^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_1^2 |v|^2, \quad (2.115)$$

despejando,

$$|\mathbf{p}_1|^2 (c^2 - v^2) = m_1^2 c^2 v^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}_1|^2 c^2 = (|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 c^2) v^2, \quad (2.116)$$

por relación de dispersión, finalmente,

$$|\mathbf{p}_1|^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} v^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}_1|^2 = \frac{E_1^2}{c^4} v^2, \quad (2.117)$$

por lo tanto el radicando en este sistema de referencia se escribe como,

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 = \frac{E_1^2 E_2^2}{c^6} v^2 = \frac{E_1^2 E_2^2}{c^6} |v_1 - v_2|^2, \quad (2.118)$$

para terminar, la cross section bajo este sistema de referenciar a usar en capítulos posteriores es:

$$\sigma = \frac{S \hbar^2 c^3}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2(|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2(|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.119)$$

dado que se promedia conjuntamente con la velocidad relativa y bajo las relaciones de dispersión de partículas 3 y 4,

$$v \sigma(12 \rightarrow 34) = \frac{S \hbar^2 c^3}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2. \quad (2.120)$$

Sistema de referencia de centro de masa - CM frame

Configurando el sistema de referencia de tal manera que la partícula dos tiene un movimiento paralelo a uno, donde $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$, luego el producto interno (recordando que la métrica es de Minkowski),

$$p_1 \cdot p_2 = \left(\frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \cdot \left(\frac{E_2}{c}, -\mathbf{p}_1 \right) = \frac{E_1 E_2}{c^2} + |\mathbf{p}_1|^2, \quad (2.121)$$

tomando el primer radicando de la cross section,

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 &= \left(\frac{E_1 E_2}{c^2} + |\mathbf{p}_1|^2 \right)^2 - m_1^2 c^2 m_2^2 c^2, \\ &= \frac{E_1^2 E_2^2}{c^4} + 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_1|^4 - m_1^2 c^2 m_2^2 c^2, \end{aligned} \quad (2.122)$$

gracias a la relaciones de dispersión relativista de las partículas 1 y 2, además de la condición del sistema de referencia,

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 &= \frac{E_1^2 E_2^2}{c^4} + 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_1|^4 - \left(\frac{E_1^2}{c^2} - |\mathbf{p}_1|^2 \right) \left(\frac{E_2^2}{c^2} - |\mathbf{p}_1|^2 \right), \\ &= 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} |\mathbf{p}_1|^2 - \frac{E_1^2}{c^2} |\mathbf{p}_1|^2 \frac{E_2^2}{c^2} |\mathbf{p}_1|^2 = \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{c^2} (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2), \\ &= \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{c^2} (E_1 + E_2)^2, \end{aligned} \quad (2.123)$$

reescribiendo la cross section obtenida,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{S \hbar^2 c}{4 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2(|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2(|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{S \hbar^2 c}{64 \pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4, \end{aligned} \quad (2.124)$$

resolviendo la distribución delta de Dirac,

$$\begin{aligned} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) &= \delta(p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0) \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\ &= \delta \left(\frac{E_1 + E_2}{c} p_1^0 - p_3^0 - p_4^0 \right) \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\ &= \delta \left(\frac{E_1 + E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0 \right) \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4), \end{aligned} \quad (2.125)$$

dado que la delta de kronecker es simétrica, luego,

$$\sigma = \frac{S \hbar^2 c}{64 \pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta \left(\frac{E_1 + E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0 \right)}{\sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_4^2 c^2}} \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4, \quad (2.126)$$

operando la integral sobre $d^3\mathbf{p}_4$, resulta en que $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$ y,

$$\sigma = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1+E_2}{c} - \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_4^2 c^2}\right)}{\sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}_3|^2 + m_4^2 c^2}} d^3\mathbf{p}_3, \quad (2.127)$$

transformando a coordenadas esféricas donde el *Jacobiano* se escribe, $d^3\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 dp_3 d\Omega$, donde, $\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, la derivada de la cross section con respecto al ángulo sólido es,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1+E_2}{c} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}\right)}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}} |\mathbf{p}|^2 dp, \quad (2.128)$$

dado que la variable en la delta de kronecker no es lineal es necesario hacer el cambio de la forma,

$$u = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}, \quad (2.129)$$

obteniendo la derivada,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dp} &= \frac{2|\mathbf{p}|}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}} + \frac{2|\mathbf{p}|}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}} = \frac{|\mathbf{p}|\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2} + |\mathbf{p}|\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}} \\ &= \frac{|\mathbf{p}|u}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}}, \end{aligned} \quad (2.130)$$

con esto,

$$\frac{du}{u} = \frac{|\mathbf{p}| dp}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}}, \quad (2.131)$$

reemplazando,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} \int_{(m_3+m_4)c}^{\infty} |\mathcal{M}|^2 \delta\left(\frac{E_1 + E_2}{c} - u\right) |\mathbf{p}| \frac{du}{u}, \quad (2.132)$$

necesariamente $\frac{E_1+E_2}{c} > m_3 + m_4$, por otro lado, la integral hace $u = \frac{E_1+E_2}{c}$, en tanto que el momento, por conservación de la energía, es (Ver apéndice C.1.3),

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_3| &= \frac{c^3}{2(E_1 + E_2)} \sqrt{\left(\frac{E_1 + E_2}{c^2}\right)^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2\left(\frac{E_1 + E_2}{c^2}\right)^2 (m_3^2 + m_4^2) - 2m_3^2 m_4^2} \\ &= \frac{c^3}{2(E_1 + E_2)} \Lambda(E_1, E_2, m_3, m_4), \end{aligned} \quad (2.133)$$

gracias a esto, la expresión que describe derivada de la sección transversal con respecto al ángulo sólido debido a la colisión de dos partículas en términos de la amplitud y el momento es,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + E_2)} |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_3| \frac{c}{E_1 + E_2} = \frac{S\hbar^2 c^2 |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_3|}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2 |\mathbf{p}_1|}, \quad (2.134)$$

usando las variables de Mandelstam (Ver ecuación (2.82)), se puede reescribir la derivada de la cross section en términos del canal s , así (Ver apéndice C.1.4):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S\hbar^2 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} = \frac{S\hbar^2}{64\pi^2 c^2 s} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2, \quad (2.135)$$

la sección transversal diferencial también se puede expresar bajo un marco de referencia independiente, por ejemplo en su centro de masa, tomando en cuenta el canal que involucra el ángulo de dispersión (Ver sección 2.3.1),

$$\begin{aligned} dt &= \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| d\cos\theta}{c^2} \\ &= \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{c^2} \frac{d\Omega_{CM}}{2\pi} \\ &= \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{c^2} \frac{d\Omega_{CM}}{\pi}, \end{aligned} \quad (2.136)$$

dado que,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{c^2} (p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3), \\ &= \frac{1}{c^2} \left(p_1^2 + p_3^2 - 2\frac{E_1 E_3}{c^2} + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos\theta \right), \end{aligned} \quad (2.137)$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{S\hbar^2}{64\pi^2 c^2 s} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 \cdot \frac{\pi c^2}{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|} \\ &= \frac{S\hbar^2}{64\pi s} \frac{1}{|\mathbf{p}_1|^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2, \end{aligned} \quad (2.138)$$

luego la sección transversal total integrando la variable $\cos\theta$,

$$\sigma = \int d\sigma = \int d\Omega_{CM} \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = 2\pi \int \sin\theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}, \quad (2.139)$$

si las partículas son livianas $m_i = 0$, la variable t ,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{c^2} \left(m_1^2 c^2 + m_3^2 c^2 - 2\frac{E_1 E_3}{c^2} + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos\theta \right), \\ &= \frac{1}{c^2} \left(-2\frac{E_1 E_3}{c^2} + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos\theta \right) \end{aligned} \quad (2.140)$$

en el sistema de referencia del centro de masa, tomando $m_i = 0$,

$$E_1 = E_2 = \frac{c}{2}\sqrt{s} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3| = \frac{1}{2}\sqrt{s}, \quad (2.141)$$

reemplazando,

$$t = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{s}{2} + \frac{s}{2} \cos \theta \right) = -\frac{s}{2c^2} (1 - \cos \theta), \quad (2.142)$$

con esto, para el tipo de partículas y en el sistema de referencia de centro de masa, los límites se definen,

$$\begin{aligned} \cos \theta = 1 &\rightarrow t = 0 \\ \cos \theta = -1 &\rightarrow t = -\frac{s}{c^2}, \end{aligned} \quad (2.143)$$

de manera equivalente la sección transversal integrando la variable t es,

$$\sigma = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{d\sigma}{dt} dt = \int_{-s/c^2}^0 \frac{d\sigma}{dt} dt, \quad (2.144)$$

finalmente, reemplazando la expresión de la derivada de la sección transversal con respecto de la variable t , tomando $|\mathbf{p}_1|^2 = \frac{s}{4}$,

$$\sigma = \int_{-s/c^2}^0 \frac{S\hbar^2}{64\pi s} \frac{4}{s} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 dt = \int_{-s/c^2}^0 \frac{S\hbar^2}{16\pi s^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 dt. \quad (2.145)$$

2.4.3. Dimensiones y unidades

Como en el caso de las desintegraciones, el estado final de dos cuerpos es particularmente simple, en el sentido de que se puede llevar el cálculo hasta el final sin conocer la forma funcional explícita de $|\mathcal{M}|$.

- Dado que los tiempos de vida tienen dimensiones de tiempo (s segundos); los anchos de decaimiento ($\Gamma = 1/\tau$) se miden, por lo tanto, en segundos inversos (s^{-1}).
- Las secciones transversales tienen dimensiones de área generalmente medidas en centímetros cuadrados (cm^2), o, más convenientemente, en 'barns' ($1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ cm}^2$).
- Las secciones transversales diferenciales, $d\sigma/d\Omega$, se dan en barns por estereorradián o simplemente en barns (los estereorradiánes, al igual que los radianes, son adimensionales).
- La amplitud, $|\mathcal{M}|$, tiene unidades que dependen del número de partículas involucradas: si hay n líneas externas (entrantes más salientes), las dimensiones de $|\mathcal{M}|$ son las de momento elevado a la potencia $4 - n$,

$$[|\mathcal{M}|] = (mc)^{4-n}. \quad (2.146)$$

Capítulo 3

Violación CP

En este capítulo se usa un modelo simple para mostrar que la necesidad de términos imaginarios en las constantes de acoplamiento puede resultar en la violación de CP requerida para producir una asimetría bariónica. El número bariónico neto medio producido por la desintegración de un bosón X y su antipartícula \bar{X} es [9, 10]

$$\varepsilon_X = \sum_f B_f \frac{\Gamma(X \rightarrow f) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma_X}, \quad (3.1)$$

donde B_f es el número bariónico del estado final f , $\Gamma(X \rightarrow f)$ es el ancho parcial para el modo de desintegración indicado y Γ_X es el ancho total de desintegración X . Suponiendo un lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = g_1 X i_2^\dagger i_1 + g_2 X i_4^\dagger i_3 + g_3 Y i_1^\dagger i_3 + g_4 Y i_2^\dagger i_4 + g_1^* X^\dagger i_2 i_1^\dagger + g_2^* X^\dagger i_4 i_3^\dagger + g_3^* Y^\dagger i_1 i_3^\dagger + g_4^* Y^\dagger i_2 i_4^\dagger, \quad (3.2)$$

donde X e Y son dos campos de bosones masivos e $i_{1 \rightarrow 4}$ son campos de partículas ligeras. Esta interacción conduce a los siguientes modos de caída para X e Y :

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \bar{i}_1 i_2 & Y &\rightarrow \bar{i}_3 i_1 \\ X &\rightarrow \bar{i}_3 i_4 & Y &\rightarrow \bar{i}_4 i_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

En la aproximación de Born, los anchos de desintegración de X e Y se escriben en términos del cuadrado de la amplitud invariante relativista de diagramas a tree-level mostrados en las figuras 3.1 y 3.2, bajo el formalismo teórico desarrollado en la subsección 2.4.1, se obtiene que,

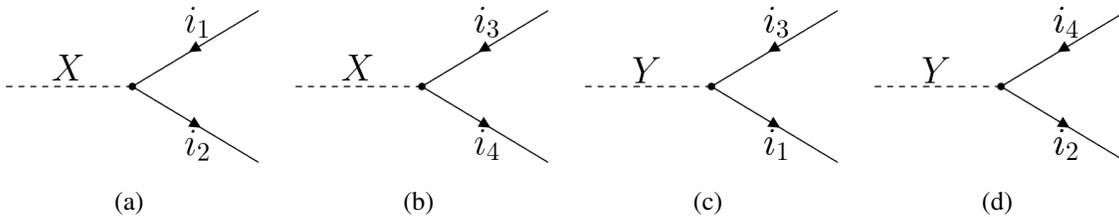


Figura 3.1: Diagramas de decaimiento para X e Y .

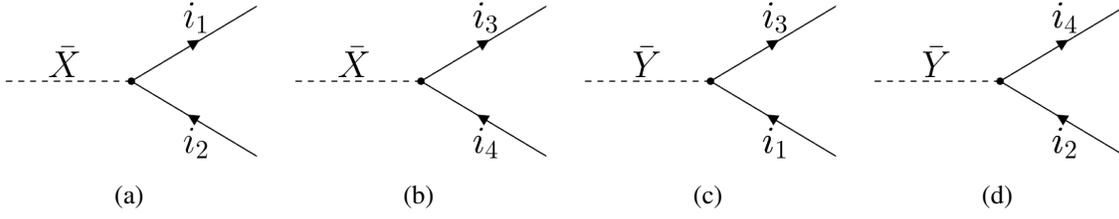


Figura 3.2: Diagramas de decaimiento conjugados para X e Y .

$$\begin{aligned}
 \Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) &= I_X^{12} |g_1|^2 & \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) &= I_{\bar{X}}^{12} |g_1^*|^2 \\
 \Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) &= I_X^{34} |g_2|^2 & \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4) &= I_{\bar{X}}^{34} |g_2^*|^2 \\
 \Gamma(Y \rightarrow \bar{i}_3 i_1) &= I_Y^{13} |g_3|^2 & \Gamma(\bar{Y} \rightarrow i_3 \bar{i}_1) &= I_{\bar{Y}}^{13} |g_3^*|^2 \\
 \Gamma(Y \rightarrow \bar{i}_4 i_2) &= I_Y^{24} |g_4|^2 & \Gamma(\bar{Y} \rightarrow i_4 \bar{i}_2) &= I_{\bar{Y}}^{24} |g_4^*|^2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde I_X e I_Y representan los factores cinemáticos (integrales del espacio de fase, etc.) de la forma, (en este caso el término del conteo de partículas idénticas S es igual a uno en todos los casos),

$$I_X^{ij} = \frac{\lambda(m_X, m_i, m_j)}{16\pi\hbar m_X^3}, \quad I_Y^{ij} = \frac{\lambda(m_Y, m_i, m_j)}{16\pi\hbar m_Y^3}. \tag{3.5}$$

siendo m_X y m_Y los bosones que decaen en las posibles partículas de masa m_i y m_j con $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$, además λ es el término proveniente del momento debido a la conservación de la energía (Ver ecuación (2.101)), definido como,

$$\lambda(m_X, m_i, m_j) = \sqrt{m_X^4 + m_i^4 + m_j^4 - 2m_X^2 m_i^2 - 2m_X^2 m_j^2 - 2m_i^2 m_j^2}. \tag{3.6}$$

Dado que los factores cinemáticos son los mismos para partículas y antipartículas, esto gracias a que $m_X = m_{\bar{X}}$ por CPT, se deduce que $I_X = I_{\bar{X}}$. Es evidente que en la aproximación de Born ε_X se anula.

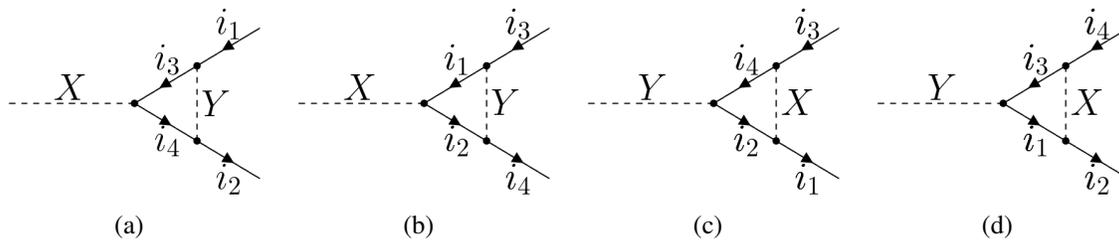


Figura 3.3: Diagramas de decaimiento conjugados para X e Y .

A siguiente orden en la teoría de perturbaciones hay correcciones en el decaimiento de X debido al intercambio de Y , como se muestra en las figuras 3.3(a) y 3.3(b). El ancho de

decaimiento para $X \rightarrow i_2 \bar{i}_1$ recibe contribuciones del cuadrado de la Figura 3.2(a) y la interferencia entre las Figuras 3.2(a) y 3.3(a), y se puede escribir como (ver apéndice D.1):

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) = I_X^{12} |g_1|^2 + I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^* + (I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^*, \quad (3.7)$$

donde I_{XY}^{12} incluye los factores cinemáticos del diagrama del loop,

$$I_{XY}^{12} = \frac{-iS\lambda(m_X, m_1, m_2)}{(16)^2 \pi^5 \hbar m_X^3} L. \quad (3.8)$$

determinando que L es la integral en términos de los momentos y las masas de las partículas intermedias, definida como,

$$L \equiv \int \frac{d^4 q}{(q^2 - m_3^2 c^2) [(p_2 + p_1 + q)^2 - m_4^2 c^2] [(p_1 + q)^2 + m_Y^2 c^2]}. \quad (3.9)$$

Aunque I_X es real, I_{XY} será complejo si se permite cinemáticamente que las partículas intermedias en el loop (el estado intermedio $\bar{i}_3 i_4$) se propaguen en la capa de masa. Esto requiere que $m_X \geq m_3 + m_4$. De manera similar, el ancho para $\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2$ se puede escribir como (ver apéndice D.2),

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) = I_X^{12} |g_1^*|^2 + I_{\bar{X}Y}^{12} g_1^* g_2 g_3^* g_4 + (I_{\bar{X}Y}^{12} g_1^* g_2 g_3^* g_4)^*, \quad (3.10)$$

donde $I_{\bar{X}Y}^{12}$ incluye los factores cinemáticos del diagrama del loop,

$$I_{\bar{X}Y}^{12} = \frac{-iS\lambda(m_X, m_1, m_2)}{(16)^2 \pi^5 \hbar m_X^3} L. \quad (3.11)$$

determinando que L es la integral en términos de los momentos y las masas de las partículas intermedias, definida como,

$$L \equiv \int \frac{d^4 q}{(q^2 - m_3^2 c^2) [(p_2 + p_1 - q)^2 - m_4^2 c^2] [(p_1 - q)^2 + m_Y^2 c^2]}. \quad (3.12)$$

Es de interés la diferencia entre $X \rightarrow \bar{i}_1 i_2$ y $\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2$ que viene dada por (ver apéndice C.2.1), definiendo a $\text{Im}[n]$ como la parte imaginaria de n :

$$\begin{aligned} \Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) &= 2i I_{XY} \text{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] - 2i I_{\bar{X}Y}^* \text{Im}[g_1^* g_2 g_3^* g_4] \\ &= -4 \text{Im}[I_{XY}] \text{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Un cálculo similar para el otro modo de desintegración de X muestra que (ver apéndices D.3 y C.2.2):

$$\begin{aligned} \Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4) &= - [\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2)] \\ &= 4 \text{Im}[I_{XY}] \text{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*], \end{aligned} \quad (3.14)$$

por lo tanto se deduce que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_X &= (B_{i_4} - B_{i_3}) \frac{\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4)}{\Gamma_X} + (B_{i_2} - B_{i_1}) \frac{\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2)}{\Gamma_X} \\ &= \frac{4}{\Gamma_X} \text{Im}[I_{XY}] \text{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] [(B_{i_4} - B_{i_3}) - (B_{i_2} - B_{i_1})],\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde B_{i_j} se refiere al aumento o disminución del número bariónico debido a la partícula j , en el mismo orden también hay una contribución de la interferencia del diagrama de árbol con un diagrama de un bucle donde se intercambia una X ; sin embargo, se sigue trivialmente que el producto de las constantes de acoplamiento involucradas es real.

La ecuación (3.15) ilustra varios resultados que son más generales que este modelo simple:

1. El número bariónico debe violarse en la desintegración de X , ya que ε_X es proporcional a la diferencia entre los números bariónicos de los dos estados finales de la desintegración de X .
2. La partícula intercambiada en el bucle (en este caso, Y) también debe violar el número bariónico [11].
3. Los bosones X, Y deben ser más masivos que $m_3 + m_4$ y $m_1 + m_2$ para que I_{XY} tenga una parte imaginaria, mostrando que no necesariamente deberían ser partículas ligeras [12].
4. Algunas de las constantes de acoplamiento en el lagrangiano deben ser complejas dada la parte imaginaria.

También es interesante considerar la suma de ε_X y ε_Y :

$$\varepsilon_X + \varepsilon_Y = 4 \left\{ \frac{\text{Im}I_{XY}}{\Gamma_X} - \frac{\text{Im}I_{YX}}{\Gamma_Y} \right\} \text{Im}(g_1 g_2^* g_3 g_4^*) [(B_{i_4} - B_{i_3}) - (B_{i_2} - B_{i_1})],\tag{3.16}$$

En el límite en que $m_X = m_Y$, $\varepsilon_X + \varepsilon_Y$ se anula, ya que $\Gamma_X = \Gamma_Y$ e $\text{Im}I_{XY} = \text{Im}I_{YX}$, y por tanto la asimetría producida por X cancelará exactamente la producida por Y .

Capítulo 4

Cosmología: universo homogéneo

La cosmología moderna estudia la evolución y estructura del universo a gran escala, y uno de sus principios fundamentales es el de homogeneidad y isotropía, lo que nos lleva a la concepción del universo homogéneo. Bajo este supuesto, el universo, a escalas suficientemente grandes, puede describirse como uniforme, lo que facilita el desarrollo de modelos que expliquen su evolución y las leyes que lo rigen.

Este capítulo se centrará en describir las propiedades de un universo homogéneo, así como en los principios y ecuaciones que lo gobiernan. Se comienza abordando los fundamentos geométricos, introduciendo los 3-espacios simétricos que permiten entender la estructura global del universo, seguido de la métrica de Robertson-Walker, que proporciona una herramienta matemática fundamental para describir un espacio-tiempo homogéneo y en expansión.

Posteriormente, una exploración de la dinámica de un universo en expansión, partiendo de la evolución de la densidad numérica de partículas y culminando con las ecuaciones de Friedmann, que juegan un rol crucial en la descripción de la evolución temporal del universo.

La discusión continuará abordando el equilibrio térmico, tanto desde una perspectiva microscópica como macroscópica, resaltando su importancia en la evolución del universo temprano. Estudiando también cómo la densidad de energía y el número efectivo de especies relativistas afectan la dinámica del universo en sus primeras etapas.

Finalmente, el fin del capítulo es adentrarse en las desviaciones del equilibrio, introduciendo las ecuaciones de transporte de Boltzmann, que resultan esenciales para la descripción de procesos fuera del equilibrio térmico, como la bariogénesis. El análisis de estos fenómenos nos permitirá comprender mejor la transición desde el universo primitivo hasta el estado actual.

4.1. Geometría

A medida que se extiende la visión hacia las profundidades del universo, se puede notar que la distribución de galaxias se vuelve cada vez más uniforme lo que permite asumir la homogeneidad e isotropía perfecta del universo. Estas características fundamentales conducen a una geometría específica del espacio-tiempo, cuyo estudio permitirá comprender mejor cómo se propagan las partículas.

El estudio de la cosmología, en particular las métricas y elementos de línea en espacios de Riemann, se considera un espacio vectorial generado por los vectores e_i formando una base ortonormal por contracción de dimensión n de tal forma que:

$$e_n \cdot e_m = g_{nm} = g_{mn}, \quad (4.1)$$

donde g_{nm} corresponde a la métrica; El elemento de línea ds^2 se define como el diferencial del vector posición al cuadrado del espacio, siendo este un invariante relativista de tipo escalar bajo producto interno,

$$ds^2 = dr \cdot dr, \quad (4.2)$$

por contracción de índices:

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k, \quad (4.3)$$

donde dx^j y dx^k son los diferenciales de las coordenadas y g_{jk} es la métrica del espacio.

Estas definiciones proporcionan una base teórica sólida para la descripción de geometrías y distancias en modelos cosmológicos, permitiendo el análisis de la estructura y evolución del universo en el marco de la teoría de la relatividad general, donde la métrica del espacio-tiempo convierte las coordenadas dependientes del observador en un elemento de línea invariante, es decir la métrica de Minkowski se mantiene constante en todo el espacio-tiempo, expresada como:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (4.4)$$

sin embargo, comúnmente haciendo uso de relatividad general la métrica puede variar según la posición y el tiempo,

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

la métrica incorpora directamente los efectos de la gravedad que puede presentar el espacio-tiempo. La forma en que la métrica depende de la posición está determinada por la distribución de materia y energía en el universo. Dado el alto grado de simetría del universo homogéneo se puede simplificar a tres tipos de espacios.

4.1.1. 3-Espacios simétricos

A todo cuerpo de N dimensiones con geometría curva se le puede atribuir un espacio de $N + 1$ dimensiones en la que esta sea visible y sobretodo con posibilidad de analizarse, pese a que la dimensión $N + 1$ no exista en un sentido tangible, un ejemplo podría ser el de una 2-Esfera, esta es una superficie en dos dimensiones definida como el límite de una 3-Bola

cerrada. Teniendo en cuenta una nueva dimensión auxiliar u para describir la curvatura de un 3-Espacio resulta en el elemento de línea,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 \pm d\hat{u}, \quad (4.6)$$

donde $\mathbf{x} = a(t)\hat{x}$ y $\mathbf{u} = a(t)\hat{u}$, teniendo en cuenta que $a(t)$ es un factor de escala [13].

- Para un espacio plano, el elemento de línea es simple y se expresa como:

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.7)$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker, que representa la métrica euclidiana en un espacio plano. Esta métrica es claramente invariante bajo traslaciones espaciales y rotaciones, ya que no alteran la forma de la distancia calculada entre puntos en un espacio euclidiano.

- Para un espacio de curvatura positiva: un 3-espacio con curvatura positiva constante puede representarse como una 3-esfera S^3 incrustada en un espacio euclidiano de cuatro dimensiones E^4 ,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = a^2, \quad (4.8)$$

donde a es el radio de la 3-esfera. La homogeneidad y la isotropía de la superficie de la 3-esfera se heredan de la simetría del elemento de línea bajo rotaciones de cuatro dimensiones.

- Para un espacio de curvatura negativa: un 3-espacio con curvatura negativa constante puede representarse como un hiperboloide H^3 incrustado en un espacio lorentziano de cuatro dimensiones $R^{1,3}$,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -a^2, \quad (4.9)$$

donde a^2 es una constante arbitraria. La homogeneidad y la isotropía de la geometría inducida en el hiperboloide se heredan de la simetría del elemento de línea bajo pseudo-rotaciones de cuatro dimensiones (es decir, transformaciones de Lorentz, donde u desempeña el papel del tiempo).

Tomando en cuenta un factor de escala $a(t) = \text{cte}$, se obtiene:

$$a^2(\hat{x}^2 \pm \hat{u}^2) = \pm a^2, \quad (4.10)$$

$$\hat{x}^2 \pm \hat{u}^2 = \pm 1. \quad (4.11)$$

Sea $k \equiv \pm 1$. Entonces, la ecuación (4.11) se escribe como:

$$\hat{x}^2 + k\hat{u}^2 = k, \quad (4.12)$$

al diferenciar lo anterior, se obtiene:

$$2\mathbf{x}d\mathbf{x} + k^2 u du = 0, \quad (4.13)$$

despejando para du :

$$du = -\frac{\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{ku}, \quad (4.14)$$

ahora, al reemplazar du en el diferencial de longitud, se obtiene:

$$dl^2 = a^2 \left[d\mathbf{x} + k \frac{(\mathbf{x}^2 \cdot d\mathbf{x})^2}{k^2 u^2} \right]. \quad (4.15)$$

Calculando y reemplazando u^2 :

$$u^2 = \frac{k - \mathbf{x}}{k}, \quad (4.16)$$

de manera que,

$$dl^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - kx^2} \right] = a^2 dx_i \left(\delta_{ij} + \frac{kx_i x_j}{1 - kx^2} \right) dx_j, \quad (4.17)$$

$$= a^2 dx_i \gamma_{ij} dx_j, \quad (4.18)$$

donde la matriz γ_{ij} representa la métrica del espacio:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \frac{kx_i x_j}{1 - kx^2} = g_{ij}. \quad (4.19)$$

Ahora, es posible determinar una representación de la métrica en coordenadas cilíndricas, resulta:

$$dl^2 = a^2 \left[dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 + \frac{k(r dr + z dz)^2}{1 - k(r^2 + z^2)} \right], \quad (4.20)$$

con el cambio de variable:

$$\rho^2 = r^2 + z^2 \longrightarrow d\rho^2 = dr^2 + dz^2, \quad (4.21)$$

reemplazando en la métrica,

$$dl^2 = a^2 \left[r^2 d\theta^2 + d\rho^2 + \frac{k(\rho d\rho)^2}{1 - k\rho^2} \right], \quad (4.22)$$

restringiendo al plano $z = 0$,

$$dl^2 = a^2 \left[r^2 d\theta^2 + dr^2 + \frac{k(r dr)^2}{1 - kr^2} \right], \quad (4.23)$$

$$= a^2 \left[r^2 d\theta^2 + \frac{dr^2 - kr^2 dr^2 + kr^2 dr^2}{1 - kr^2} \right], \quad (4.24)$$

$$= a^2 \left[r^2 d\theta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right]. \quad (4.25)$$

En coordenadas esféricas, se obtiene:

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.26)$$

donde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

4.1.2. Métrica de Roberson-Walker

Para obtener la métrica de Roberson Walker de un universo en expansión simplemente se incluye $dl^2 = a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$ al elemento de línea del espacio tiempo y se define un elemento arbitrario dependiente del tiempo,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} d\xi^i dx^j, \quad (4.27)$$

esta métrica es también conocida como la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). No se incluye la componente mixta de la métrica g_{0i} , ya que esto rompería la isotropía del espacio. Se observa que g_{0i} es un vector, y si es diferente de cero, indicará una dirección privilegiada. Por lo tanto, se establece que:

$$g_{0i} = 0 = g_{i0}. \quad (4.28)$$

La diferencia entre la ecuación (4.19) y la métrica de Minkowski (métrica plana) radica en la adición de γ_{ij} , que permite una curvatura espacial (± 1), y de $a(t)$, además indica la expansión del universo. La métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$ tiene 16 elementos, y la condición $g_{i0} = 0$ reduce el número de variables libres a 10.

Las coordenadas $x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ se denominan coordenadas comóviles. Estas se relacionan con las coordenadas físicas mediante:

$$x^i_{\text{phys}} = a(t) x^i, \quad (4.29)$$

la velocidad física de un objeto se expresa como:

$$v^i_{\text{phys}} = \frac{dx^i_{\text{phys}}}{dt} = a(t) \frac{dx^i}{dt} + \frac{da}{dt} x^i = a(t) \dot{x}^i + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} x^i, \quad (4.30)$$

y la velocidad física en coordenadas comóviles es:

$$v^i_{\text{phys}} = v^i_{\text{pec}} + H x^i_{\text{phys}}, \quad (4.31)$$

donde:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.32)$$

$$v^i_{\text{pec}} = a(t) \dot{x}^i. \quad (4.33)$$

La cantidad $H x^i_{\text{phys}}$ se conoce como el flujo de Hubble, donde H es el «parámetro de Hubble», además, la velocidad peculiar de un objeto es la velocidad medida por un observador comóvil (es decir, un observador que sigue el flujo de Hubble).

4.2. Dinámica de un universo en expansión

La dinámica del universo está determinada por la ecuación de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Esto relaciona el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ (una medida de la «curvatura del espaciotiempo» del universo) con el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ (una medida del «contenido de materia» del universo).

Fuentes de Materia

Los requisitos de isotropía e homogeneidad obligan a que el tensor de energía-momento a gran escala sea el de un fluido perfecto,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

donde ρ y P son la densidad de energía y la presión del fluido, y U^μ es la cuadrivelocidad (respecto del observador).

4.2.1. Evolución de la densidad numérica de partículas

Se define el cuádrivector de corriente numérica N^μ . La componente $\mu = 0$, N^0 , mide la densidad numérica de partículas, desde el estudio cosmológico del postulado de Weyl una «partícula» puede ser una galaxia entera. La componente $\mu = i$, N^i , es el flujo de las partículas en la dirección x^i .

- Isotropía requiere que el valor medio de cualquier 3-vector, como N^i , deba ser cero.
- Homogeneidad requiere que el valor medio de cualquier 3-escalar (invariante bajo transformaciones de coordenadas puramente espaciales), como N^0 , sea una función solo del tiempo.

Por lo tanto, la corriente de galaxias, medida por un observador comóvil, tiene los siguientes componentes:

$$N^0 = n(t), \quad N^i = 0, \quad (4.36)$$

donde $n(t)$ es el número de galaxias por volumen propio medido por un observador en movimiento con el fondo.

Un observador general (es decir, un observador en movimiento respecto al marco de reposo medio de las partículas) mediría el siguiente cuádrivector de corriente numérica:

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (4.37)$$

donde $U^\mu \equiv dX^\mu/ds$ es la cuadrivelocidad relativa entre las partículas y el observador, recuperando el resultado anterior para un observador comóvil, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, de manera que de manera relativista con,

$$U^\mu = \gamma(1, v^i), \quad (4.38)$$

se obtienen los resultados correctamente ajustados por boosts, teniendo una posible densidad numérica aumentada γn . (La densidad numérica aumenta porque una de las dimensiones del volumen es contraída).

El número de partículas debe ser conservado, esto genera una ley en el espacio de Minkowski implicando que la evolución de la densidad numérica satisface la ecuación de continuidad:

$$\dot{N}^0 = -\partial_i N^i, \quad (4.39)$$

en notación tensorial,

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad (4.40)$$

generalizando a espacios-tiempo curvados se reemplaza la derivada parcial ∂_μ por una derivada covariante ∇_μ ,

$$\nabla_\mu N^\mu = 0, \quad (4.41)$$

la ecuación generalizada se puede reducir bajo el marco de referencia local inercial. Expresando explícitamente la ley de conservación,

$$\nabla_\mu N^\mu = \partial_\mu N^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu N^\lambda = 0. \quad (4.42)$$

operando se obtiene que (Ver apéndice E.3.1),

$$\frac{\dot{n}}{n} = -3\frac{\dot{a}}{a} \implies n(t) \propto a^{-3}, \quad (4.43)$$

al evolucionar un sistema la densidad numérica disminuye de manera proporcional al aumento del volumen propio.

4.2.2. Ecuaciones de Friedmann

Para calcular la relación que tiene las fuentes de materia con la evolución del factor de escala en la métrica FRW, se necesita describir de manera explícita el tensor de Einstein en el lado izquierdo de la ecuación de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (4.44)$$

se define el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (4.45)$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}), \quad (4.46)$$

y el escalar de Ricci,

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (4.47)$$

No es necesario calcular $R_{i0} = R_{0i}$, porque es un 3-vector y, por lo tanto, debe anularse debido a la isotropía de la métrica de Robertson-Walker. Los componentes no nulos del tensor de Ricci son (Ver apéndice E.3.2):

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (4.48a)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \quad (4.48b)$$

es evidente que $R_{ij} \propto g_{ij}$ para que exista consistencia con la homogeneidad y la isotropía, además el escalar de Ricci es (Ver apéndice E.3.3):

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \quad (4.49)$$

luego las componentes no nulas del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}G_{\nu}^{\lambda}$ se escriben (Ver apéndice E.3.4),

$$G_{00} = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \quad (4.50a)$$

$$G_{ij} = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\delta_{ij}, \quad (4.50b)$$

combinando las ecuaciones anteriores con el tensor de energía momento se obtienen las ecuaciones de Friedmann (Ver apéndice E.3.5),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.51a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (4.51b)$$

Aquí, ρ y P deben entenderse como la suma de todas las contribuciones a la densidad de energía y presión en el universo. Por tanto, el parámetro de escala para el universo temprano (que corresponde a su radio de curvatura) debería expandirse en un tiempo t de acuerdo con [14] (para una geometría plana en el universo o aproximando otro tipo de geometrías),

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \left(\frac{8\pi\rho(t)}{3}\right)^{1/2} \frac{1}{m_{\mathcal{P}}}, \quad (4.52)$$

donde $\rho(t)$ es la densidad de energía del universo y $m_{\mathcal{P}}$ es la masa de Planck,

$$m_{\mathcal{P}} = G^{\frac{1}{2}} \simeq 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV} = 1.2 \times 10^4 \text{ PeV}. \quad (4.53)$$

de acuerdo con el sistema SI, se define $1\text{PeV} \equiv 10^{15}\text{GeV}$.

4.3. Equilibrio térmico

Se tiene evidencias muy fuertes a nivel observacional (del espectro de cuerpo negro perfecto del CMB) de que el universo temprano estaba en equilibrio térmico local. Para describir este estado y la evolución subsecuente del universo, se necesita recordar algunos hechos básicos de la termodinámica de equilibrio, adecuadamente generalizados para aplicarse a un universo en expansión.

4.3.1. De lo Microscópico a lo Macroscópico

La mecánica estadística es el arte de convertir las leyes microscópicas en una comprensión del mundo macroscópico. Para un gas de partículas débilmente interaccionantes. Es conveniente describir el sistema en el espacio de fases, donde el gas está descrito por las posiciones y momentos de todas las partículas.

La densidad de estados en el espacio de fase $\{x, p\}$ se escribe en términos del mínimo volumen posible bajo la escala de Planck luego,

$$\rho_{\text{state}} = \frac{1}{h^3},$$

ahora si el sistema tiene g grados de libertad,

$$\rho_{\text{state}} = \frac{g}{h^3},$$

en unidades naturales la constante de Planck reducida se define como la unidad, luego la constante sin reducir es,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \quad \rightarrow \quad h = 2\pi,$$

con esto,

$$\frac{g}{h^3} = \frac{g}{(2\pi)^3}.$$

El diferencial del número de partículas se escribe en términos de la función de distribución como,

$$dN(q, p) = \frac{g}{(2\pi)^3} f(q, p) d^3q d^3p,$$

en el sistema comóvil,

$$f(q, p) = f(p),$$

gracias a esto, se puede definir una densidad del número de partículas,

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{d^3q},$$

finalmente,

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} f(p). \quad (4.54)$$

4.3.2. Equilibrio térmico local

Se dice que un sistema de partículas está en equilibrio cinético si las partículas intercambian energía y momento de manera eficiente. Esto lleva a un estado de máxima entropía en el cual las funciones de distribución están dadas por las distribuciones de Fermi-Dirac y Bose-Einstein:

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E(p)-\mu)/T} \pm 1}, \quad (4.55)$$

donde el signo $+$ es para fermiones y el signo $-$ es para bosones. A bajas temperaturas, $T < E - \mu$, ambas funciones de distribución se reducen a la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f(p) \approx e^{-(E(p)-\mu)/T}, \quad (4.56)$$

Las funciones de distribución de equilibrio tienen dos parámetros: la temperatura T y el potencial químico μ . El potencial químico puede depender de la temperatura. A medida que el universo se expande, T y $\mu(T)$ cambian de tal manera que se satisfacen las ecuaciones de continuidad para la densidad de energía ρ y la densidad de número de partículas n . Cada especie de partícula i (con posiblemente distintos m_i , μ_i , T_i) tiene su propia función de distribución f_i y, por ende, su propio n_i , ρ_i , y P_i .

Si una especie i está en equilibrio químico, entonces su potencial químico μ_i está relacionado con los potenciales químicos μ_j de las otras especies con las que interactúa. Por ejemplo, si una especie 1 interactúa con las especies 2, 3 y 4 a través de la reacción $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$, entonces el equilibrio químico implica:

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4,$$

Dado que el número de fotones no se conserva (por ejemplo, la dispersión Compton doble $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma + \gamma$ ocurre en equilibrio a altas temperaturas), se sabe que:

$$\mu_\gamma = 0,$$

Esto implica que si el potencial químico de una partícula X es μ_X , entonces el potencial químico de la antipartícula correspondiente \bar{X} es:

$$\mu_{\bar{X}} = -\mu_X,$$

Para ver esto, basta con considerar la aniquilación partícula-antipartícula, $X + \bar{X} \leftrightarrow \gamma + \gamma$. El equilibrio térmico se logra para las especies que están tanto en equilibrio cinético como químico. Estas especies comparten entonces una temperatura común $T_i = T$.

4.3.3. Densidad de energía en el límite relativista

En el universo temprano los potenciales químicos de todas las partículas son tan pequeños que pueden ser desestimados. Estableciendo el potencial químico en cero para la expresión

de la densidad de energía,

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp[\sqrt{p^2 + m^2}/T] \pm 1}, \quad (4.57)$$

se observa que la integral puede determinarse con un ± 1 , obteniendo las distribuciones cuánticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein,

$$\rho^{FD} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp[\sqrt{p^2 + m^2}/T] + 1} \quad \rho^{BE} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp[\sqrt{p^2 + m^2}/T] - 1}, \quad (4.58)$$

es pertinente señalar que esta temperatura a menudo se identifica con la temperatura de los fotones T_γ , entendida como la «temperatura del universo». Bajo el cambio de variable, $\xi = p/T$,

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty (T d\xi) \frac{(T\xi)^2 \sqrt{(T\xi)^2 + m^2}}{\exp[\sqrt{(T\xi)^2 + m^2}/T] \pm 1} = \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \frac{m^2}{T^2}}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + \frac{m^2}{T^2}}] \pm 1},$$

definiendo, $x = m/T$, $\xi = p/T$,

$$\rho = \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] \pm 1}, \quad (4.59)$$

esta es una integral conocida definida como J_\pm evaluada en algún valor de x ,

$$J_+(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] + 1} \quad J_-(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] - 1}, \quad (4.60)$$

luego,

$$\rho_{BE}^{FD} = \frac{gT^4}{2\pi^2} J_\pm(x),$$

en el límite relativista, es decir, $x \rightarrow 0$, para bosones se toma el valor ± 1 como -1 ,

$$\rho_{BE} = \frac{gT^4}{2\pi^2} J_-(0) = \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^3}{\exp[\xi] - 1},$$

esta integral es igual a dos veces la función Zeta de Riemann para $n = 3$,

$$\rho_{BE} = \frac{gT^4}{2\pi^2} [6\zeta(4)] = \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(\frac{6\pi^4}{90} \right) = \frac{\pi^2}{30} gT^4,$$

ahora para fermiones se toma el valor ± 1 como 1 ,

$$\rho_{FD} = \frac{gT^4}{2\pi^2} J_+(0) = \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^3}{\exp[\xi] + 1},$$

dado que,

$$\frac{1}{\exp[\xi] + 1} = \frac{1}{\exp[\xi] - 1} - \frac{2}{\exp[2\xi] - 1},$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \rho_{FD} &= \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(\int_0^\infty d\xi \frac{\xi^3}{\exp[\xi] - 1} - 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^3}{\exp[2\xi] - 1} \right) \\ &= \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(J_-(0) - 2 \int_0^\infty \frac{d\xi'}{2} \frac{(\xi'/2)^3}{\exp[\xi'] - 1} \right) \\ &= \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(J_-(0) - 2 \frac{1}{2^4} J_-(0) \right) = \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(J_-(0) - \frac{1}{8} J_-(0) \right) \\ &= \frac{gT^4}{2\pi^2} \frac{7}{8} J_-(0) = \frac{7}{8} \frac{gT^4}{2\pi^2} \left(\frac{6\pi^4}{90} \right) = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} gT^4, \end{aligned}$$

finalmente,

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} gT^4 \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ \frac{7}{8} & \text{fermiones} \end{cases}. \quad (4.61)$$

4.3.4. Número efectivo de especies relativistas

Sea T la temperatura del gas de fotones. La densidad total de radiación es la suma de las densidades de energía de todas las especies relativistas:

$$\rho_r = \sum_i \rho_i = \frac{\pi^2}{30} g^*(T) T^4,$$

donde $g^*(T)$ es el número efectivo de grados de libertad relativistas a la temperatura T . La suma sobre las especies de partículas puede recibir dos tipos de contribuciones:

- Especies relativistas en equilibrio térmico con los fotones, $T_i = T \gg m_i$, tomando g_i como el grado de libertad asociado a bosones o fermiones,

$$g_{th}^*(T) = \sum_{i=b} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i. \quad (4.62)$$

Cuando la temperatura cae por debajo de la masa m_i de una especie de partícula, se vuelve no relativista y se elimina de la suma. Lejos de los umbrales de masa, la contribución térmica es independiente de la temperatura.

- Especies relativistas que no están en equilibrio térmico con los fotones, $T_i \neq T \gg m_i$, nuevamente tomando g_i como el grado de libertad asociado a bosones o fermiones,

$$g_{dec}^*(T) = \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4, \quad (4.63)$$

Permitiendo que las especies desacopladas tengan diferentes temperaturas T_i .

A temperaturas $T \gtrsim 173$ GeV, se pueden producir todas las partículas del modelo estándar, por tanto, dado que están en equilibrio térmico, el número de grados de libertad se calcula,

- Bosones.

Bosones	Número	Grados de libertad	Total
γ	1	2	2
W^\pm	2	3	6
Z^0	1	3	3
Gluones	8	2	16
Higgs	1	1	1

Por tanto la suma de los grados de libertad de los mismo dan un total de 28.

- Quarks.

Spin	Color	Iso espin	Familia	quiralidad
2	3	2	3	2

Multiplicando cada contribución a los grados libertad da un total de 72.

- Leptones cargados.

Spin	Generaciones	quiralidad
2	3	2

Multiplicando cada contribución a los grados libertad da un total de 12.

- Leptones neutros.

Spin	Generaciones	quiralidad
2	3	1

Multiplicando cada contribución a los grados libertad da un total de 6.

Con base en lo anterior se desarrolla la expresión del parámetro de grados de libertad efectivos,

$$g^* = \sum_{i=b} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i = (28) + \frac{7}{8}(72 + 12 + 6),$$

finalmente, siendo g_b y g_f el total de grados de libertad de especies relativistas asociados a bosones y fermiones respectivamente, se obtiene que a temperaturas mayores a 173 GeV el número efectivo de especies relativistas es,

$$g^* = g_b + \frac{7}{8}g_f = 106.75. \quad (4.64)$$

La expansión del universo desplaza al rojo todos los \mathbf{p} de manera proporcional a $1/a$, además $T \sim 1/a$, partiendo de la ecuación (4.52), recordando que la masa de Planck es $m_{\mathcal{P}} = G^{\frac{1}{2}} \simeq 1.2 \times 10^4 \text{ PeV}$, se determina que,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{8}{3} \pi \rho \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m_{\mathcal{P}}} = -\frac{\dot{T}}{T}, \quad (4.65)$$

esta dependencia en la temperatura se puede ver reflejada en la densidad de energía relativista calculada anteriormente, definiendo una masa de Planck reducida o efectiva para el estudio de la forma,

$$m_P \equiv \left(\frac{45}{4\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m_{\mathcal{P}}}{\sqrt{g^*(T)}}, \quad (4.66)$$

luego,

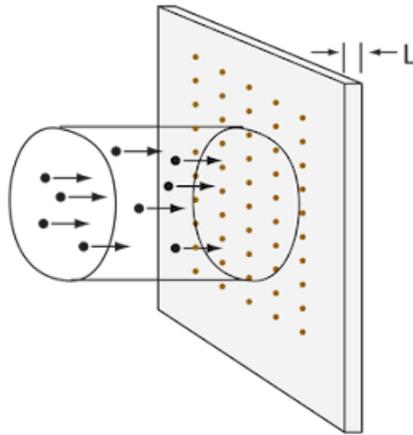
$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{T}}{T} = \left[\frac{8}{3} \pi \frac{\pi^2}{30} g^*(T) T^4 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m_{\mathcal{P}}} = \left(\frac{4}{45} \pi^3 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g^*(T)} \frac{T^2}{m_{\mathcal{P}}} = \frac{T^2}{m_P}, \quad (4.67)$$

si $T \gtrsim 173 \text{ GeV}$,

$$m_P = \left(\frac{45}{4\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1.2 \times 10^4 \text{ PeV}}{\sqrt{106.75}} \approx 700 \text{ PeV}. \quad (4.68)$$

4.4. Más allá del equilibrio

Sea un sistema conformado por dos tipos de partículas, donde las partículas tipo I colisionan con un volumen de partículas tipo II,



el número de partículas contenidas en el volumen se define cómo,

$$N_2 = n_2 V = n_2 A L \quad n_2 : \text{densidad de partículas},$$

las partículas tipo I tienen una velocidad v_1 , luego la longitud L del volumen se escribe,

$$N_2 = n_2 A v_1 t,$$

ahora, se define la sección transversal total de interacción de las partículas tipo II colisionadas por partículas tipo I en términos de la sección transversal de cada partícula así,

$$\sigma_T = N_2 \sigma_{21} = n_2 A v_1 t \sigma_{21},$$

la probabilidad de interacción bajo una distribución uniforme de partículas (no son superpuestas) se escribe,

$$P_{\text{int}} = \frac{\sigma_T}{A} = n_2 v_1 t \sigma_{21}.$$

4.4.1. Ecuaciones de transporte de Boltzmann

En ausencia de interacciones, la densidad del número de partículas de una especie i evoluciona como (Ver sección 4.2.1):

$$\frac{dn_i}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_i = 0, \quad (4.69)$$

siendo esto simplemente la derivación de una ley de conservación para la densidad del número de partículas en un volumen físico fijo ($V \propto a^3$), de modo que la densidad necesariamente debe disminuir con el volumen en expansión, $n_i \propto a^{-3}$.

Para incluir los efectos de las interacciones, se añade un término de colisiones al lado derecho de (4.69),

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_i a^3)}{dt} = C_i \{n_j\}, \quad (4.70)$$

definiendo así la ecuación de transporte de Boltzmann formulada en 1872 [15]. La forma del término de colisión depende de las interacciones específicas a consideración en un determinado sistema. Dado que las interacciones entre tres o más partículas son muy improbables, se puede limitar el análisis a decaimientos de una sola partícula y dispersión o aniquilación de dos partículas. Considerando el proceso de aniquilación materia y antimateria resulta,

$$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4,$$

es decir, la partícula 1 puede aniquilarse con la partícula 2 para producir las partículas 3 y 4, o el proceso inverso puede producir 1 y 2. Si se está interesado en calcular la evolución en la densidad numérica n_1 , es evidente que la tasa de cambio en la abundancia de la especie 1 será descrita por la diferencia entre las tasas de producción y eliminación de la especie. Con esto, el miembro derecho de la ecuación debe describir la destrucción de partículas en términos de la probabilidad de interacción con respecto al tiempo que tendrá la especie 1 al encontrarse con la especie 2 y la producción de partículas 1 debido a la interacción de especies 3 y 4, con elementos que sean medibles, así:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle v\sigma(12 \rightarrow 34) \rangle n_1 n_2 + \langle v\sigma(34 \rightarrow 12) \rangle n_3 n_4, \quad (4.71)$$

se expone el hecho de que el primer término es proporcional a n_1 y n_2 y el segundo término es proporcional a n_3 y n_4 . Además, $\langle \sigma v \rangle$ se entiende cómo la sección transversal descrita o configurada desde el sistema de referencia reducido - lab frame (Ver ecuación (2.120)) promediada térmicamente, luego analizando la sección transversal promediada bajo una distribución entrante de energía (en unidades naturales),

$$\begin{aligned}
\langle v\sigma(12 \rightarrow 34) \rangle &= \\
&= \frac{S \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} f_1(p_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} f_2(p_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2}{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}_1 f_1(p_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}_2 f_2(p_2)}, \\
&= \frac{S \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} f_1(p_1) f_2(p_2) \frac{\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2}{\int d^3\mathbf{p}_1 f_1(p_1) \int d^3\mathbf{p}_2 f_2(p_2)},
\end{aligned} \tag{4.72}$$

gracias a (4.54),

$$\begin{aligned}
\langle v\sigma(12 \rightarrow 34) \rangle n_1 n_2 &= \\
&= \frac{S}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} f_1(p_1) f_2(p_2) \frac{\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}|^2,
\end{aligned} \tag{4.73}$$

reorganizando de manera simétrica,

$$\begin{aligned}
\langle v\sigma(12 \rightarrow 34) \rangle n_1 n_2 &= \\
&= S \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4 (2\pi)^3} f_1(p_1) f_2(p_2) (2\pi)^4 \delta_{12,34}^4 |\mathcal{M}|^2,
\end{aligned} \tag{4.74}$$

definiendo así el operador integral $\Lambda_{1,2}^{3,4}$,

$$\Lambda_{1,2}^{3,4} \equiv S \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3 (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4), \tag{4.75}$$

nótese que $\Lambda_{1,2}^{3,4} = \Lambda_{3,4}^{1,2}$, por propiedades de simetría de la distribución delta de Dirac, este operador representa una integración adecuada sobre el espacio de fase de los estados inicial y final en los procesos de dispersión. (Cuando Λ tiene solo índices superiores o inferiores, no se incluye ninguna función de conservación de momento δ), de manera más general se define como [11]:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{a_1, a_2 \dots}^{b_1, b_2 \dots} &\equiv \int \frac{d^4 p_{a_1}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 p_{a_2}}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^4 p_{b_1}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 p_{b_2}}{(2\pi)^3} \dots \\
&\quad \times \delta(p_{a_1}^2 - m_{a_1}^2) \delta(p_{a_2}^2 - m_{a_2}^2) \dots \delta(p_{b_1}^2 - m_{b_1}^2) \delta(p_{b_2}^2 - m_{b_2}^2) \dots \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta\left(\sum_i p_{b_i} - \sum_j p_{a_j}\right), \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1}}{2E_{a_1} (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2}}{2E_{a_2} (2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1} (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2} (2\pi)^3} \dots \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta\left(\sum p_{b_i} - \sum p_{a_i}\right),
\end{aligned} \tag{4.76}$$

con esto se obtiene que,

$$\langle v\sigma(12 \rightarrow 34) \rangle n_1 n_2 = \Lambda_{1,2}^{3,4} f_1(p_1) f_2(p_2) |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2, \quad (4.77)$$

además en el caso de la producción de partículas la cross section se escribiría de manera equivalente como,

$$\langle v\sigma(34 \rightarrow 12) \rangle n_3 n_4 = \Lambda_{3,4}^{1,2} f_3(p_3) f_4(p_4) |\mathcal{M}(34 \rightarrow 12)|^2, \quad (4.78)$$

por tanto, la ecuación de transporte de Boltzmann toma la forma:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\Lambda_{1,2}^{3,4} f_1(p_1) f_2(p_2) |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 + \Lambda_{3,4}^{1,2} f_3(p_3) f_4(p_4) |\mathcal{M}(34 \rightarrow 12)|^2, \quad (4.79)$$

por simetría del operador integral [16],

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \Lambda_{1,2}^{3,4} [-f_1(p_1) f_2(p_2) |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 + f_3(p_3) f_4(p_4) |\mathcal{M}(34 \rightarrow 12)|^2]. \quad (4.80)$$

4.5. Universo temprano cosmológico

Se asume que el universo temprano consiste principalmente en un número efectivo $g_*(T)$ de especies de partículas sin masa (ninguna formando gases de Fermi altamente degenerados) y generalmente se considera que es homogéneo e isotrópico.

Se define el número de partículas i por unidad de volumen (del espacio de configuración) por:

$$n_i = g_i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_i(p), \quad (4.81)$$

donde g_i es el número de estados de espín accesibles para las especies i ($g_i = 2s_i + 1$ para $m_i > 0$; $g_i = 2$ para $m_i = 0, s_i > 0$; $g_i = 1$ para $m_i = 0, s_i = 0$; para partículas con masa pequeña, algunos estados de espín pueden estar desacoplados de las interacciones). Normalmente se realiza la aproximación de que todas las partículas obedecen estadísticas de Maxwell-Boltzmann y tienen solo un estado de espín. Luego, las partículas neutras (al menos en número bariónico) sin masa (denominadas genéricamente como γ) que comprenden una gran fracción del contenido del universo temprano, deberían distribuirse de acuerdo con Maxwell-Boltzmann en todo momento debido a sus interacciones, de modo que,

$$\begin{aligned} f_\gamma(p) &= e^{-\frac{E}{T}} = e^{-\frac{|p|}{T}}, \\ n_\gamma &= \frac{T^3}{\pi^2}, \\ \rho_\gamma &= \frac{2}{\pi^2} T^4, \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde T es su temperatura común (referida como «la temperatura del universo»). Solo para partículas sin masa, las distribuciones de equilibrio $f_i(p)$ son autosimilares bajo reescalados de \mathbf{p} ; para partículas masivas, la masa proporciona una escala intrínseca y las $f_i(p)$ cambian su forma a medida que el universo se expande. La expansión del universo diluye las densidades de número de todos los tipos de partículas, incluso en ausencia de interacciones, a una tasa,

$$\frac{dn_i}{dt} = V \frac{d}{dt} n_i = -\frac{3\dot{R}}{R} n_i. \quad (4.83)$$

Siguiendo con la simple cosmología del big bang, se asume que todas las especies de partículas en el universo estaban inicialmente en equilibrio térmico y distribuidas homogéneamente (el campo gravitatorio que se opone a la expansión, sin embargo, debe permanecer lejos del equilibrio). Dos efectos modifican este estado de «equilibrio».

1. Independientemente de la expansión, las fuerzas gravitacionales de largo alcance hacen que un estado homogéneo sea inestable y lleven a la aglomeración. (Esto tiende formalmente a aumentar la entropía del universo, pero de hecho produce un estado más ordenado, que eventualmente contiene estrellas, etc.)
2. La expansión de un universo homogéneo puede dar lugar a desviaciones del equilibrio, algunas de las cuales pueden nunca tener tiempo para relajarse.

La expansión del universo provoca un corrimiento al rojo en los momentos de todas las partículas, lo cual implica que $\mathbf{p} \propto 1/R$. Mientras la densidad de energía del universo esté dominada por partículas ultrarrelativistas, la temperatura también se desplazará al rojo de acuerdo con $T \propto 1/R$. Para las partículas sin masa, las distribuciones de equilibrio $f_i(p) \propto \exp(-|\mathbf{p}|/T)$ se mantienen sin cambios debido a esta expansión, siempre que se conserve la homogeneidad. Esto es coherente con una expansión adiabática del universo, lo que se describe mediante la ecuación de conservación de la energía $d(\rho R^3) + p d(R^3) = 0$. En estas condiciones, la entropía del universo, inicialmente en equilibrio térmico y compuesto solo por partículas sin masa (con potenciales químicos nulos y homogeneidad), permanece constante en el tiempo.

Sin embargo, en el caso de partículas masivas, las distribuciones de equilibrio $f_i(p) \propto \exp(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}/T)$ cambian cuando $|\mathbf{p}| \sim T \sim 1/R$ se vuelve más pequeño que m . En estas situaciones, las partículas masivas requieren varios tiempos de colisión para relajarse hacia sus distribuciones de equilibrio. Si la expansión del universo ocurre más rápidamente que las interacciones entre partículas, esto puede causar desviaciones significativas del equilibrio térmico. Como resultado, cuando hay partículas masivas, la expansión del universo ya no es reversible y la entropía del sistema puede aumentar ligeramente. Esta variación en la entropía ocurre porque, aunque el equilibrio de las partículas masivas se rompe, el campo gravitacional que resiste la expansión tiende a acercarse más al equilibrio, compensando parcialmente la disminución de entropía de las partículas masivas.

Si la expansión fuera lo suficientemente lenta, cualquier desviación del equilibrio térmico eventualmente desaparecería. No obstante, en muchos casos, la expansión rápida impide la

relajación completa del sistema. Un ejemplo de este fenómeno es la supervivencia de partículas masivas estables que se originaron en el universo temprano [17]. En algún punto, cuando la densidad de número de estas partículas en equilibrio comienza a disminuir rápidamente, la tasa de aniquilación se vuelve más lenta que la expansión del universo, y el número de partículas queda «congelado». En este estado, la expansión separa tanto a las partículas que la probabilidad de interacción se vuelve despreciable. De esta forma, la expansión del universo evita que la densidad de número de estas partículas retorne al equilibrio en un tiempo finito. La generación de una asimetría bariónica sigue un proceso similar. Las reacciones que violan el número bariónico (B) pero no la simetría CP ocurren a una velocidad tan baja que no logran destruir la asimetría bariónica, lo cual impone restricciones estrictas a los modelos teóricos que describen este fenómeno.

Capítulo 5

Estadística de la generación del número bariónico

Sea b una partícula casi sin masa que lleva el número bariónico $B = \frac{1}{2}$ y \bar{b} su antipartícula, con $B = -\frac{1}{2}$, y sea φ una partícula masiva con $\bar{\varphi} \equiv \varphi$. Se permite una pequeña violación de la invariancia CP en las tasas de procesos de dispersión $2 \rightarrow 2$ entre b y φ , y se considera la generación de un número bariónico neto cuando un sistema inicialmente simétrico en b y \bar{b} se enfría, como en el universo temprano. Tomando que las amplitudes de dispersión son ($|\mathcal{M}_0|^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$, donde α es una constante de acoplamiento pequeña),

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= (1 + \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(bb \rightarrow \varphi\varphi)|^2 &= |\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = (1 - \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 &= (1 + \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \varphi\varphi)|^2 &= |\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow bb)|^2 = (1 - \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $-1 < \zeta, \bar{\zeta} < 1$. Esta parametrización asegura la restricción de invariancia CPT (2.50) de que las secciones transversales totales para las interacciones bb y $\bar{b}\bar{b}$ deben ser iguales (se suma sobre j , refiriéndose a los posibles decaimientos):

$$\begin{aligned}
 \sum_j |\mathcal{M}(bb \rightarrow j)|^2 &= \sum_j |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow j)|^2 \text{ (Invarianza CPT),} \\
 \sum_j |\mathcal{M}(bb \rightarrow j)|^2 &= |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(bb \rightarrow \varphi\varphi)|^2 \\
 &= (1 + \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 + (1 - \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 = |\mathcal{M}_0|^2, \\
 \sum_j |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow j)|^2 &= |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \varphi\varphi)|^2 \\
 &= (1 + \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 + (1 - \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 = |\mathcal{M}_0|^2,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sin embargo, nótese que no necesariamente se tiene invariancia CP, la cual requeriría $\zeta = \bar{\zeta}$; considerando el caso de violación de CP $\zeta - \bar{\zeta} = \mathcal{O}(\alpha) \neq 0$, de modo que, por ejemplo, $|\mathcal{M}_0(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2, |\mathcal{M}_0(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 = \mathcal{O}(\alpha^2), |\mathcal{M}_0(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - |\mathcal{M}_0(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 = \mathcal{O}(\alpha^3)$. Aquí se asume que las φ solo pueden interactuar a través de los procesos de la ecuación (5.1), pero que las $b(\bar{b})$ también experimentan interacciones conservadoras del número bariónico (como $\gamma b \rightarrow \gamma b$ o $\gamma\gamma \rightarrow bb$, donde γ son partículas relativistas) con otras partículas en el universo. Tales reacciones deben tener tasas típicamente de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ y servir para distribuir las b y \bar{b} en el espacio de fase de manera Maxwell-Boltzmann. El tiempo necesario para alcanzar este estado de equilibrio cinético debería ser mucho más corto que el tiempo $\mathcal{O}(\frac{1}{\alpha^3})$ en el que el número bariónico neto $n_b - n_{\bar{b}}$ cambia a través de los procesos de la ecuación (5.1). Por lo tanto, en todo momento, la función de distribución f ,

$$\begin{aligned} f_b(p) &\simeq e^{-\frac{E-\mu}{T}}, \\ f_{\bar{b}}(p) &\simeq e^{-\frac{E+\mu}{T}}, \\ \frac{n_B}{n_\gamma} &\equiv \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \simeq 2 \sinh\left(\frac{\mu}{T}\right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde E es la energía asociada a las partículas, T su temperatura y μ es el potencial químico del número bariónico n_B , que solo cambia mediante procesos que violan B (en el modelo actual, estos ocurren en una escala de tiempo al menos $\mathcal{O}(\frac{1}{\alpha})$ más larga que las reacciones que termalizan las b, \bar{b} en distribuciones Maxwell-Boltzmann). El hecho de que los potenciales químicos en f_b y $f_{\bar{b}}$ sean exactamente opuestos es una consecuencia de procesos como $\gamma\gamma \rightarrow bb$, que mantienen a $\bar{b}\bar{b}$ en equilibrio químico con $\gamma\gamma$.

La evolución temporal de la densidad de φ y del número total bariónico $n_B \equiv n_b - n_{\bar{b}}$ debido a los procesos (5.1) está descrita por las ecuaciones de transporte de Boltzmann (Ver ecuación 4.80),

$$\begin{aligned} \frac{dn_\varphi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\varphi &= 2\Lambda_{12}^{34}[f_b(p_1)f_b(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow \varphi\varphi)|^2 + f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \varphi\varphi)|^2 \\ &\quad - f_\varphi(p_1)f_\varphi(p_2)|\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow bb)|^2 - f_\varphi(p_1)f_\varphi(p_2)|\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2], \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_B}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_B &= \Lambda_{12}^{34}[2f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 - 2f_b(p_1)f_b(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \\ &\quad + f_\varphi(p_1)f_\varphi(p_2)|\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow bb)|^2 - f_b(p_1)f_b(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow \varphi\varphi)|^2 \\ &\quad - f_\varphi(p_1)f_\varphi(p_2)|\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \varphi\varphi)|^2], \end{aligned} \quad (5.4b)$$

donde el operador integral $\Lambda_{1,2}^{3,4}$ se define como,

$$\Lambda_{1,2}^{3,4} \equiv S \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (5.5)$$

El segundo término del lado izquierdo de la ecuación (5.4) representa la dilución de las densidades numéricas debido a la expansión del universo, como en la ecuación (4.83). (Una

demostración de su forma para métricas de Robertson-Walker se da en [6].) Al considerar cualquier tipo de partícula A ,

$$Y_A \equiv \frac{n_A}{n_\gamma}, \quad (5.6)$$

se elimina el término de expansión,

$$\dot{Y}_A = \frac{\dot{n}_A}{n_\gamma} - \frac{n_A \dot{n}_\gamma}{n_\gamma^2} = \frac{\dot{n}_A}{n_\gamma} + \frac{3\dot{a}}{a} \frac{n_A}{n_\gamma}, \quad (5.7)$$

Los diversos términos del lado derecho de (5.4) representan los efectos de los procesos (5.1) (por ejemplo, el primer término del lado derecho de (5.4a) representa el aumento en el número de φ debido a $bb \rightarrow \varphi\varphi$).

Para simplificar (5.4), primero se sustituye las parametrizaciones (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} = & \frac{1}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} \{ [(1 - \zeta) f_b(p_1) f_b(p_2) + (1 - \bar{\zeta}) f_{\bar{b}}(p_1) f_{\bar{b}}(p_2) \\ & - [(1 - \bar{\zeta}) + (1 - \zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2) \} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2, \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} = & \frac{1}{2n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} \{ [2(1 + \bar{\zeta}) f_{\bar{b}}(p_1) f_{\bar{b}}(p_2) - 2(1 + \zeta) f_b(p_1) f_b(p_2) \\ & + [(1 - \bar{\zeta}) - (1 - \zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2) - (1 - \zeta) f_b(p_1) f_b(p_2) \\ & + (1 - \bar{\zeta}) f_{\bar{b}}(p_1) f_{\bar{b}}(p_2) \} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2, \end{aligned} \quad (5.8b)$$

usando la función de conservación del cuadrimomento δ en Λ , se puede escribir,

$$f_b(p_1) f_b(p_2) = e^{-(E_1+E_2)/T} e^{2\mu/T} = f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) e^{2\mu/T}, \quad (5.9a)$$

$$f_{\bar{b}}(p_1) f_{\bar{b}}(p_2) = e^{-(E_1+E_2)/T} e^{-2\mu/T} = f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) e^{-2\mu/T}, \quad (5.9b)$$

donde se ha definido que para cualquier partícula A con momento p_A y energía E_A ,

$$f_\varphi^{eq}(p_A) \equiv e^{-E_A/T}, \quad (5.10)$$

que es la distribución de espacio de fase para una especie de partículas (quizás masivas) en equilibrio térmico a temperatura T , y con un potencial químico cero. La densidad total de equilibrio para cualquier tipo de partícula en equilibrio es dada por,

$$\begin{aligned} n_\varphi^{eq} &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}_A}{(2\pi)^3} f_\varphi^{eq}(p_A) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}_A}{(2\pi)^3} e^{-E_A/T} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_A}{(2\pi)^3} \exp(-\sqrt{p_A^2 + m_A^2}/T) \\ &= \frac{T^3}{2\pi^2} \int_{x_A}^{\infty} z \sqrt{z^2 - x_A^2} e^{-z} dz = \frac{T^3}{2\pi^2} x_A^2 K_2(x_A), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $x_A \equiv m_A/T$ y K_2 es una función de Bessel modificada de segundo tipo (ver ecuación E.23), definida como,

$$K_2(x) = x^{-2} \int_x^{\infty} z e^{-z} \sqrt{z^2 - x^2} dz, \quad (5.12)$$

dado que $x \rightarrow 0$, $x^2 K_2(x) \rightarrow 2$, y (5.11) vuelve al resultado sin masa (4.82). Asumiendo que $n_B/n_\gamma \ll 1$, se puede escribir (5.9) en la forma (ver apéndice E.1),

$$f_b(p_1)f_b(p_2) \simeq f_\varphi^{eq}(p_1)f_\varphi^{eq}(p_2)(1 + Y_B), \quad (5.13a)$$

$$f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2) \simeq f_\varphi^{eq}(p_1)f_\varphi^{eq}(p_2)(1 - Y_B), \quad (5.13b)$$

con $Y_B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma}$, por lo tanto, (5.8) se convierte en,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} [\{(1 - \zeta) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 + Y_B) + (1 - \bar{\zeta}) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 - Y_B) \\ &\quad - [(1 - \bar{\zeta}) + (1 - \zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2)\} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2] \\ &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} [f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) [(1 - \zeta)(1 + Y_B) + (1 - \bar{\zeta})(1 - Y_B)] \\ &\quad - [(1 - \bar{\zeta}) + (1 - \zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2)\} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2], \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} [\{2(1 + \bar{\zeta}) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 - Y_B) - 2(1 + \zeta) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 + Y_B) \\ &\quad + [(1 - \bar{\zeta}) - (1 - \zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2) - (1 - \zeta) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 + Y_B) \\ &\quad + (1 - \bar{\zeta}) f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) (1 - Y_B)\} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2] \\ &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} [f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \\ &\quad + (\zeta - \bar{\zeta}) f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2)\} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2], \end{aligned} \quad (5.14b)$$

la integración sobre el espacio de fase disponible para los momentos finales p_3 y p_4 introduce las secciones transversales totales de dispersión $2 \rightarrow 2$, donde v es la velocidad relativa de las partículas entrantes (Ver ecuación 2.120),

$$v\sigma(12 \rightarrow 34) = \frac{S\hbar^2 c^3}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2. \quad (5.15)$$

Las ecuaciones (5.14) toman la forma (ver apéndice E.4.1),

$$\frac{dY_\varphi}{dt} \simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ 2 \left[1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] [(Y_\varphi^{eq})^2 - (Y_\varphi)^2] - (\zeta - \bar{\zeta}) (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \quad (5.16a)$$

$$\frac{dY_B}{dt} \simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{(\zeta - \bar{\zeta})}{2} [(Y_\varphi)^2 - (Y_\varphi^{eq})^2] - \left[3 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \quad (5.16b)$$

donde $\langle v\sigma_0 \rangle$ denota el promedio de la sección transversal $v\sigma_0$ sobre la distribución de energía entrante. El primer término en la ecuación (5.16a) es simplemente $n_\gamma \langle v\sigma_{tot}(\varphi\varphi) \rangle [(Y_\varphi^{eq})^2 - Y_\varphi^2]$ y es conocido por estudios de densidades reliquias de partículas pesadas estables producidas en el universo temprano [17]. El segundo término en la ecuación (5.16a) contiene los dos pequeños parámetros $\zeta - \bar{\zeta}$ y Y_B , y generalmente se puede ignorar. El primer término en la ecuación (5.16b) es aproximadamente $-\langle v(\sigma(\varphi\varphi \rightarrow bb) - \sigma(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}\bar{b})/\sigma_{tot}(\varphi\varphi)) \rangle dY_\varphi/dt$

y representa la pequeña disparidad entre la producción de b y \bar{b} en la aniquilación $\varphi\varphi$. El segundo término en la ecuación (5.16b) es proporcional a la sección transversal total para interacciones que violan el número bariónico y provoca que Y_B se relaje hacia cero cuando el sistema está en equilibrio térmico ($Y_\varphi = Y_\varphi^{eq}$). Tenga en cuenta que la tasa de generación de número bariónico (5.16b) es proporcional a la desviación de la densidad del número de φ de su valor de equilibrio; si $m_\varphi = 0$, entonces, en el modelo actual, la expansión del universo no puede alterar $f_\varphi(p) = e^{-p/T}$ y no se obtiene un número bariónico neto [6].

Capítulo 6

Mecanismo de bariogénesis

Se consideran partículas b y \bar{b} prácticamente sin masa que llevan números bariónicos $B = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$ respectivamente [18]. Sea $X(\bar{X})$ un bosón masivo que media interacciones que violan el número bariónico. Las amplitudes de decaimiento para los $X(\bar{X})$ son:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 &= (1 + \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= (1 - \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= (1 + \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 &= (1 - \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde ahora $|\mathcal{M}_0|^2$ es la amplitud invariante relativista en dado caso de que no exista violación CP siendo del orden de α , además η es ahora un parámetro que cuantifica la cantidad de violación CP producida por el bosón X . La parametrización (6.1) respeta la restricción de invarianza CPT (2.50). La invarianza CP implicaría $\eta = \bar{\eta}$, pero se toma $\eta - \bar{\eta} = \mathcal{O}(\alpha) \neq 0$. Por lo tanto, un estado que inicialmente contiene un número igual de X y \bar{X} decaerán, en ausencia de reacciones inversas, en un sistema con un número bariónico neto $n_B = (\eta - \bar{\eta}) \frac{1}{2} (n_X^0 + n_{\bar{X}}^0)$. (Las reacciones inversas pueden ignorarse si los $X(\bar{X})$ se emiten como radiación térmica en un vacío infinito o están concentrados en un haz) La conjugación CPT proporciona las tasas para los procesos de decaimiento inverso:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 &= |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \bar{X})|^2 = (1 + \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2 = (1 - \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 = (1 + \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\
 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 &= |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2 = (1 - \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Note que si X y \bar{X} se decaen preferentemente para producir b (i.e., $\eta > \bar{\eta}$), entonces, según la invarianza CPT , los procesos de desintegración inversa deben destruir preferentemente \bar{b} . Por lo tanto, si solo se consideran el decaimiento y el decaimiento inverso, un sistema incluso en equilibrio térmico no puede dejar de generar un número bariónico neto [19]. Sin embargo, según la ecuación (2.49), que sigue puramente de la invarianza CPT y la unitariedad, no puede desarrollarse un exceso de b sobre \bar{b} en equilibrio térmico. Si se toma la tasa total de decaimiento de $X(\bar{X})$ como $\sim \alpha m_X$, luego, la ecuación (2.57) muestra que los efectos de violación de CP en estas desintegraciones deben ser al menos de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ (por lo tanto, $\eta - \bar{\eta} = \mathcal{O}(\alpha)$). La ecuación (2.49) se aplica solo cuando se suma sobre todos los posibles estados iniciales j que pueden producir $i(\bar{i})$ hasta un orden dado en α . Sin embargo, el decaimiento y decaimiento inverso no son las únicas interacciones posibles entre $X(\bar{X})$ y $b(\bar{b})$ hasta $\mathcal{O}(\alpha^2)$: $2 \rightarrow 2$ procesos de dispersión, como $bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}$ mediados por el intercambio $X(\bar{X})$ en el canal s . Se muestra a continuación que después de incluir estos procesos, la ecuación (2.49) se cumple y no se desarrolla un exceso bariónico en equilibrio térmico.

Aunque se toma que los X y \bar{X} en (6.1) tienen modos de decaimiento idénticos, ignorando cualquier mezcla entre ellos por simplicidad, esto puede imponerse considerando dos especies de b (cada una con $B = \frac{1}{2}$) y tomando $X \rightarrow b_1 b_1$, $X \rightarrow \bar{b}_2 \bar{b}_2$, $\bar{X} \rightarrow \bar{b}_1 \bar{b}_1$, $\bar{X} \rightarrow b_2 b_2$. Las fórmulas a continuación no se ven afectadas por estas distinciones.

6.1. Densidad del número de bosones X

Al calcular la evolución temporal de la densidad de número $X(\bar{X})$, se trabaja hasta $\mathcal{O}(\alpha)$, en el cual solo contribuyen los procesos de decaimiento y decaimiento inverso de las ecuaciones (6.1) y (6.2). Además de estas interacciones que violan el número bariónico, los $X(\bar{X})$ también pueden experimentar interacciones que conservan el número bariónico (como $\gamma X \rightarrow \gamma X$ o $\gamma\gamma \rightarrow X\bar{X}$ donde γ son partículas relativistas neutras para el número bariónico) con otras partículas en el universo. Típicamente, estos procesos serán $\mathcal{O}(\alpha^2)$, y por lo tanto, ocurrirán en una escala de tiempo más larga que los decaimientos de $X(\bar{X})$ a considerar. Sin embargo, es posible que las constantes de acoplamiento típicas involucradas sean mayores que para los decaimientos que violan B , o que el número de especies ligeras de partículas sea $\geq \mathcal{O}(1/\alpha)$, de modo que los $X(\bar{X})$ puedan experimentar varias dispersiones conservadoras de B antes de decaer. En este caso, como con las $b(\bar{b})$ en el modelo del capítulo 5, los $X(\bar{X})$ se llevarán al equilibrio cinético antes de decaer, y se asumirá una distribución de Maxwell-Boltzmann en el espacio de fases, de modo que, la función de distribución f de X es,

$$f_X(p_X) \sim \exp \left[-\frac{(E_X - \mu_X)}{T} \right], \quad (6.3a)$$

$$f_{\bar{X}}(p_{\bar{X}}) \sim \exp \left[-\frac{(E_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}})}{T} \right]. \quad (6.3b)$$

donde E es la energía asociada al bosón X , T su temperatura y μ es el potencial químico del bosón X , procesos como $\gamma\gamma \rightarrow X\bar{X}$ llevarían a $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$. Los potenciales químicos

$\mu_X(\mu_{\bar{X}})$ en la ecuación (6.3) son determinados de todas formas por los procesos (6.1) y (6.2) en los cuales $X(\bar{X})$ individuales son creados o destruidos.

Para $\mathcal{O}(\alpha)$, la densidad numérica de X definida como n_X evoluciona con el tiempo según la ecuación (análoga a (5.4a)),

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_X = & \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X)|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 - f_X(p_X)|\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \\ & + f_b(p_1)f_b(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 + f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde el operador integral $\Lambda_{1,2}^{3,4}$ se define como,

$$\Lambda_{1,2}^{3,4} \equiv S \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (6.5)$$

los dos primeros términos del lado derecho representan decaimientos de X , mientras que los dos últimos representan procesos de decaimiento inverso. Además de las reacciones (6.1) y (6.2) en las cuales se crea o destruye un número bariónico neto, también interactúan conservando la materia bariónica con otras partículas en el universo. Estos procesos conservadores de B (como $\gamma b \rightarrow \gamma b$) ocurren a una tasa $\mathcal{O}(\alpha^2)$; a temperaturas $T \ll m_X$ (recordando el hecho de que estas variables se pueden describir en términos de energía), son mucho más rápidos que cualquier interacción que viole B mediada por el intercambio de $X(\bar{X})$. Las tasas relativas de los diversos procesos a altas temperaturas se discuten en la sección 4, y parece probable que en la mayoría de los casos, las reacciones conservadoras de B ocurran con tasas mayores que las que violan B . Por lo tanto, las $b(\bar{b})$ deberían tener una distribución de Maxwell-Boltzmann en el espacio de fases como en la ecuación (5.3), con su potencial químico determinado por procesos que violan B .

Usando la conservación del momento, función δ en Λ , se puede escribir, asumiendo $Y_B \ll 1$, $Y_B = \frac{n_B}{n_\gamma}$, (ver ecuación E.23),

$$f_b(p_1)f_b(p_2) \simeq f_X^{eq}(p_X)(1 + Y_B), \quad (6.6a)$$

$$f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2) \simeq f_{\bar{X}}^{eq}(p_{\bar{X}})(1 - Y_B), \quad (6.6b)$$

donde, como se mencionó anteriormente, $f_X^{eq}(p_X) = \exp(-E_X/T)$ es la distribución de X en equilibrio térmico a una temperatura T y con un potencial químico cero. Al insertar la ecuación (6.6) en la ecuación (6.4), las integraciones de p_1 y p_2 están ponderadas solo por el elemento de matriz y el espacio de fases disponible; por lo tanto, simplemente dan como resultado las tasas totales de decaimiento, por ejemplo para una partícula cualquiera A que decae en las partículas a_1 y a_2 ,

$$\begin{aligned} \Gamma(A \rightarrow a_1 a_2) &= \frac{1}{2E_A} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1}}{2E_{a_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2}}{2E_{a_2}} \frac{\delta^4(p_A - p_{a_1} - p_{a_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}(A \rightarrow a_1 a_2)|^2 \\ &= \frac{m_A}{E_A} \Gamma_R(A \rightarrow a_1 a_2) = \frac{|\mathcal{M}(A \rightarrow a_1 a_2)|^2}{16\pi E_A}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde E_A es la energía de la partícula entrante y Γ_R es la tasa medida en el sistema de referencia en reposo del decaimiento de A (Ver ecuación 2.102) (unidades naturales),

$$\Gamma(A \rightarrow a_1 a_2) = \frac{|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_A, m_{a_1}, m_{a_2})}{16\pi m_A^3}, \quad (6.8)$$

como m_{a_1} y m_{a_2} tienden a ser cero,

$$\begin{aligned} \lambda(m_A, m_{a_1}, m_{a_2}) &= \sqrt{m_A^4 + m_{a_1}^4 + m_{a_2}^4 - 2m_A^2 m_{a_1}^2 - 2m_A^2 m_{a_2}^2 - 2m_{a_1}^2 m_{a_2}^2} \\ &\simeq m_A^2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

luego (6.4) se puede escribir en la forma (ver apéndice E.5.1):

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_X &\simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{ \Gamma(X \rightarrow bb) + \Gamma(X \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \} \\ &\quad - Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \{ \Gamma(\bar{X} \rightarrow bb) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Realizando la integración final de p_X y utilizando la parametrización (6.2), se obtiene (ver apéndice E.5.2),

$$\frac{dY_X}{dt} \simeq -\langle \Gamma_X \rangle \{ (Y_X - Y_X^{eq}) - \bar{\eta} Y_B Y_X^{eq} \}, \quad (6.11)$$

donde $\langle \Gamma_X \rangle$ denota la tasa total de decaimiento de X promediada sobre los factores de dilatación temporal para las partículas que decaen. En la escritura de la ecuación (6.11), se ha hecho la aproximación de que la distribución de momento real de X no difiere de la forma de equilibrio $\mu = 0$ lo suficiente como para afectar al factor de dilatación temporal. Esto es ciertamente el caso si las reacciones de termalización ocurren lo suficientemente rápido como para producir una distribución $X(\bar{X})$ de la forma (6.3). Nótese que se asume que todos los $X(\bar{X})$ que decaen están exactamente sobre la capa de masa; en la práctica, deberían tener una distribución de masas invariantes centrada en m_X y con un ancho $\sim \Gamma_X \sim \alpha m_X$, realizando la aproximación de resonancia estrecha $\Gamma_x \ll m_X$. La conjugación de carga ($n_X \rightarrow \bar{n}_X, n_B \rightarrow \bar{n}_B, \eta \rightarrow \bar{\eta}, \Gamma_X = \Gamma_{\bar{X}}$ y $m_X = m_{\bar{X}}$ de manera que $n_X^{eq} = \bar{n}_X^{eq}$ por invarianza CPT) proporciona la ecuación correspondiente para la densidad de número de partículas \bar{X} ,

$$\frac{dY_{\bar{X}}}{dt} \simeq -\langle \Gamma_X \rangle \{ (Y_{\bar{X}} - Y_X^{eq}) - \eta Y_B Y_X^{eq} \}, \quad (6.12)$$

es conveniente escribir las ecuaciones (6.11) y (6.12) en términos de,

$$Y_+ = \frac{1}{2}(Y_X + Y_{\bar{X}}), \quad (6.13a)$$

$$Y_- = \frac{1}{2}(Y_X - Y_{\bar{X}}), \quad (6.13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_+}{dt} &\simeq -\langle \Gamma_X \rangle \left\{ (Y_+ - Y_+^{eq}) + \left(\frac{\eta - \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\ \frac{dY_-}{dt} &\simeq -\langle \Gamma_X \rangle \left\{ Y_- - \left(\frac{\eta + \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \end{aligned} \quad (6.13c)$$

6.2. Densidad del número de partículas b

La ecuación de Boltzmann para la densidad de números B en el modelo de las ecuaciones (6.1) y (6.2) es,

$$\begin{aligned} \frac{dn_b}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_b = & \Lambda_{12}^X [f_X(p_X)|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + f_{\bar{X}}(p_X)|\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 \\ & - f_b(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 - f_b(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2] \\ & + \Lambda_{12}^{34} [f_{\bar{b}}(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 - f_b(p_1)f_{\bar{b}}(p_2)|\mathcal{M}'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2], \end{aligned} \quad (6.14)$$

el primer término en la ecuación (6.14) tiene en cuenta los procesos de decaimiento y decaimiento inverso $X \rightarrow bb$, $\bar{X} \rightarrow bb$, $bb \rightarrow X$ y $bb \rightarrow \bar{X}$. El segundo término tiene en cuenta aquellos procesos de dispersión $2 \rightarrow 2$ que aún no se incluyen como procesos sucesivos de decaimiento y decaimiento inverso (como sería $bb \rightarrow X \rightarrow bb$, con un X intermedio real). La amplitud para $bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}$ debido al intercambio en el canal s de un solo X contiene dos términos: una parte correspondiente a la propagación de un X intermedio en la capa de masa (que es importante solo cuando las energías entrantes están dentro de la curva de resonancia X) y, como es habitual, una parte que tiene en cuenta el intercambio de X fuera de la capa de masa. [Los diagramas de intercambio en los canales t y u en el orden más bajo no reciben contribuciones de estados intermedios físicos. Teniendo en cuenta que procesos como $b \rightarrow bbb$ están energéticamente prohibidos en (6.14)] Se escribe,

$$|\mathcal{M}'(a_1a_2 \rightarrow a_3a_4)|^2 = |\mathcal{M}(a_1a_2 \rightarrow a_3a_4)|^2 - |\mathcal{M}_{RIS}(a_1a_2 \rightarrow a_3a_4)|^2, \quad (6.15)$$

donde \mathcal{M}_{RIS} denota la contribución de estados intermedios físicos, ya incluida en el primer término de la ecuación de Boltzmann (6.14) como procesos sucesivos de orden inferior ($2 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 2$). Restando de la ecuación (6.14) la ecuación conjugada para la densidad del número de partículas \bar{b} , se obtiene una ecuación para la evolución de la densidad total del número bariónico $Y_B = Y_b - Y_{\bar{b}} = (n_b - n_{\bar{b}})/n_\gamma$, donde η y $\bar{\eta}$ son los parámetros de violación CP dados en (6.1), $n_\gamma = \frac{T^3}{\pi^2}$ es la densidad del número de partículas neutras (para el número bariónico) sin masa, además E_1 y E_2 son las energías de las partículas bariónicas entrantes b_1 y b_2 respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} \simeq & \langle \Gamma_X \rangle \{ \eta Y_X - \bar{\eta} Y_{\bar{X}} + (\eta - \bar{\eta}) Y_X^{eq} - 2Y_B Y_X^{eq} \} - \frac{2}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} e^{-(E_1+E_2)/T} [|\mathcal{M}'(b_1b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \\ & - |\mathcal{M}'(\bar{b}_1\bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2] - \frac{2Y_B}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} e^{-(E_1+E_2)/T} [|\mathcal{M}'(b_1b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(b_1b_2 \rightarrow bb)|^2], \end{aligned} \quad (6.16)$$

Nótese que, como se mencionó anteriormente, incluso cuando los $X(\bar{X})$ están en equilibrio térmico, de modo que $Y_X = Y_{\bar{X}} = Y_X^{eq}$, los dos términos del lado derecho de esta ecuación no se anulan individualmente incluso cuando $Y_B = 0$: los procesos de dispersión $2 \rightarrow 2$ deben conspirar con los procesos de decaimiento y decaimiento inverso para mantener el equilibrio térmico.

En el modelo de esta sección, las únicas reacciones $2 \rightarrow 2$ que violan B y pueden ocurrir hasta $\mathcal{O}(a^2)$ son $bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}$ y $\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb$. Pero el requisito de unitariedad (2.48) demanda entonces $|\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2$ para el total de los elementos de matriz de estos procesos. Sin embargo, en la amplitud $|\mathcal{M}'|^2$ que realmente ingresa en la ecuación de Boltzmann (6.16), la parte $|\mathcal{M}_{RIS}|^2$ que surge de los intercambios reales de X intermedios ya contabilizados en el primer término de la ecuación (6.16) ha sido restada. A diferencia de la $|\mathcal{M}|^2$, $|\mathcal{M}_{RIS}|^2$ (y por lo tanto $|\mathcal{M}'|^2$) puede diferir a $\mathcal{O}(a^2)$ entre $bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}$ y $\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb$. En la aproximación de ancho estrecho (que ya se ha realizado en (6.16) asignando el decaimiento de X y masa definida m_X) las contribuciones de un X intermedio real a los procesos $bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}$ y $\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb$ se escriben (ver apéndice D.5 y apéndice D.6) (\mathcal{M}_{RIS} se refiere a la amplitud de estados intermedios físicos):

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) \{ |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 \\ &\quad \times [|\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2] \} \\ &= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \eta)(1 + \bar{\eta}) \\ &= - |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2, \end{aligned} \quad (6.17a)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 &= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \bar{\eta})(1 + \eta) \\ &= - |\mathcal{M}'(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2, \end{aligned} \quad (6.17b)$$

debido al factor $1/\Gamma_X \sim 1/\alpha m_X$, estos términos son del orden de α , en lugar de $\mathcal{O}(a^2)$ como se esperaría para dispersión $2 \rightarrow 2$.

Usando el hecho de que en el modelos $|\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2$ para el total de amplitudes [en general, estos términos pueden tener una diferencia que viola CP de $\mathcal{O}(a^3)$], se puede escribir la diferencia que aparece en el segundo término del lado derecho de la ecuación (6.16) como

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - |\mathcal{M}'(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 &= |\mathcal{M}_{RIS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 - |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \\ &\simeq \frac{\pi(\eta - \bar{\eta}) |\mathcal{M}_0|^4}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Entonces, el segundo término completo en la ecuación (6.16) se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{n_\gamma} \frac{1}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \times f_X^{eq}(p_1 + p_2) \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{m_X \Gamma_X} \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2) (\eta - \bar{\eta}), \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde la función delta de la capa de masa de X permite reemplazar $\exp(-[E_1 + E_2]/T^2)$ por $f_X^{eq}(p_1 + p_2)$. [Los términos adicionales de $\mathcal{O}(a^3)$ que pueden aparecer en general en (6.19) a partir de correcciones de bucles de violación de CP a procesos genuinos de dispersión $2 \rightarrow 2$

pueden contener partes no proporcionales a f_X^{eq} , pero estas no pueden retenerse de manera coherente en vista de otras aproximaciones] Para simplificar esto, se aplican los resultados:

$$\Gamma_X = \frac{1}{2m_X} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}} \frac{\delta^4(p_X - p_{b_1} - p_{b_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2 = \frac{|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi m_X}, \quad (6.20)$$

y (Ver apéndice E.2),

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} f_X^{eq}(p_1 + p_2) \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2) = \left(\frac{\langle \Gamma_X \rangle}{\Gamma_X} \right) n_X^{eq} \frac{2\pi^4}{m_X}, \quad (6.21)$$

de modo que la ecuación (6.19) se convierte simplemente en,

$$-2Y_X^{eq}(\eta - \bar{\eta}) \langle \Gamma_X \rangle, \quad (6.22)$$

y así cancela de manera elegante el primer término de (6.16) en equilibrio térmico, como lo exige la ecuación (2.49). (Este resultado aparentemente milagroso puede obtenerse formalmente al considerar la suma de cortes dobles ($t = \pm\infty$) en diagramas de vacío con propagadores de temperatura finita, sin tratar por separado estados iniciales de una y dos partículas como se hace aquí).

El último término de la ecuación (6.16) puede escribirse utilizando la ecuación (5.14) en la forma, (ver apéndice E.5.3)

$$-2Y_B n_\gamma \langle v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) \rangle, \quad (6.23)$$

donde en σ' se ha restado la contribución del intercambio real de X en el canal s al reemplazar el propagador completo de X por su parte principal. Además, dado que $Y_B \ll 1$, $n_b(n_{\bar{b}})$ se aproxima a n_γ . [No aparece un factor Y_X^{eq} , como en la ecuación (6.22), ya que la energía del c.m. entrante ya no está restringida a ser m_X , y a bajas temperaturas será mucho más pequeña.]

Finalmente, por lo tanto, la ecuación (6.16) para el desarrollo temporal de la densidad de número bariónico puede escribirse en la forma simple,

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} &\simeq \langle \Gamma_X \rangle \{ (\eta - \bar{\eta})(Y_+ - Y_+^{eq}) + (\eta + \bar{\eta})Y_- \} \\ &\quad - 2Y_B \{ \langle \Gamma_X \rangle Y_+^{eq} + n_\gamma \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \}, \quad (6.24) \\ Y_\pm &= \frac{1}{2}(Y_X \pm Y_{\bar{X}}), \end{aligned}$$

como se espera de la discusión de la subsección 2.2, la tasa de generación de bariones se anula cuando el sistema está en equilibrio térmico $Y_X = Y_{\bar{X}} = Y_X^{eq}$, mientras que cualquier número bariónico preexistente se destruye a una tasa gobernada por la tasa total de procesos que violan la conservación de B .

Capítulo 7

Lagrangiano del mecanismo

En este capítulo se propone una expresión para el Lagrangiano del mecanismo (aunque el mecanismo está reportado en la literatura hasta donde se conoce su Lagrangiano no), se realiza un análisis de cómo las correcciones a un loop pueden modificar el Lagrangiano, de tal forma que satisfaga las condiciones necesarias para violar CP (sin violar CPT) (Ver capítulo 3). Además se realiza un tratamiento exhaustivo de la sección eficaz de dispersión, en particular sustrayendo las contribuciones on-shell debido a que ya fueron consideradas en otros términos de las ecuaciones de Boltzmann y se realiza. Finalmente se utilizan métodos de integración numérica para obtener el promedio de la cross section sobre energías entrantes.

7.1. Densidad Lagrangiana

Bajo la teoría de campos escalares, se considera el bosón escalar masivo de interacción X , obteniendo así el término cinético y de masa en la densidad lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{K+Mass}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} m_X X^2, \quad (7.1)$$

además es necesario agregar los términos que generen las interacciones que violan el número bariónico con el bosón masivo X mediante acoplamiento de Yukawa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} m_X X^2 + g_X X b^\dagger b^\dagger + g_X X b b + g_{\bar{X}} X^\dagger b b + g_{\bar{X}} X^\dagger b^\dagger b^\dagger + \text{h.c.}, \quad (7.2)$$

sabiendo que $|g_X|^2 = |g_{\bar{X}}|^2$ se obtienen las posibles reglas de Feynman de la forma (Fig. 7.1), además de los términos del hermítico conjugado (Fig. 7.2),

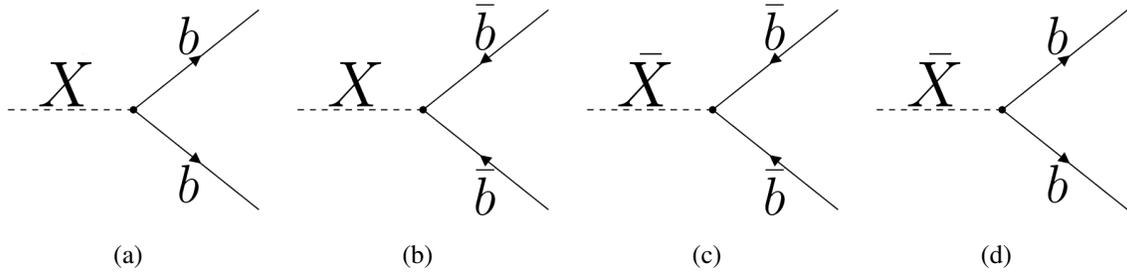


Figura 7.1: Diagramas de Feynman Lagrangiana.

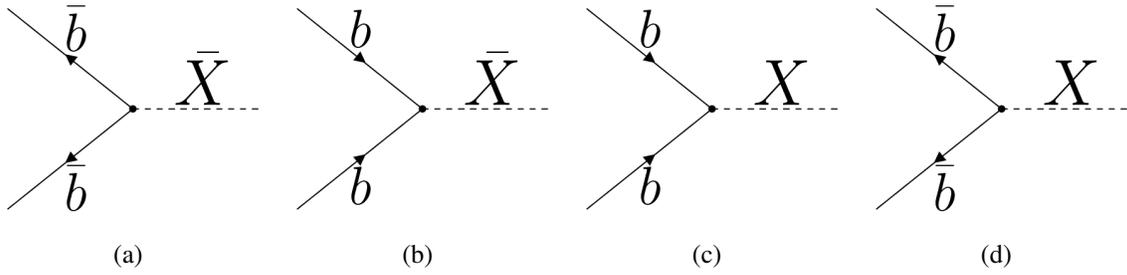


Figura 7.2: Diagramas de Feynman Lagrangiana conjugada.

finalmente reescribiendo en términos de las constantes de violación η y $\bar{\eta}$, en conjunto con la parametrización (6.2), la densidad Lagrangiana del modelo se define,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} m_X X^2 + g_X \left(\frac{1+\eta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X b^\dagger b^\dagger + g_X \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X b b \\ & + g_{\bar{X}} \left(\frac{1+\bar{\eta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X^\dagger b b + g_{\bar{X}} \left(\frac{1-\bar{\eta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X^\dagger b^\dagger b^\dagger + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

7.2. Cross section total

Para la resolución de las ecuaciones de Boltzmann es necesario calcular la cross section descrita en el último término de 6.24, con $n_\gamma = T^3/\pi^2$,

$$\begin{aligned} & -2Y_B n_\gamma \langle v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) \rangle \\ & = -2Y_B n_\gamma \frac{1}{n_\gamma^2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{p}_1 \int d^3\mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} (v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)) \\ & = -2Y_B n_\gamma \frac{1}{\int d^3\mathbf{p}_1 \int d^3\mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T}} \int d^3\mathbf{p}_1 \int d^3\mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} (v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)), \end{aligned} \quad (7.4)$$

resolviendo para el valor de energía promediado, teniendo en cuenta que se trata de partículas livianas,

$$\begin{aligned}
& \int d^3 \mathbf{p}_1 \int d^3 \mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} = \int p_1^2 \sin \theta d\theta d\phi dp_1 \int p_2^2 \sin \theta d\theta d\phi dp_2 e^{-(E_1+E_2)/T} \\
& = (4\pi)^2 \left[\int p_1^2 dp_1 e^{-E_1/T} \right]^2 = (4\pi)^2 \left[\int E_1^2 dp_1 e^{-E_1/T} \right]^2 = (4\pi)^2 \left[T^3 \int_0^\infty e^{-E/T} \left(\frac{E}{T} \right)^2 \frac{dE}{T} \right]^2 \\
& = (4\pi)^2 \left[T^3 \int_0^\infty e^{-z} z^2 dz \right]^2 = (4\pi)^2 [T^3 \Gamma[3]]^2 = (8\pi T^3)^2,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

reemplazando,

$$\begin{aligned}
& -2Y_{Bn_\gamma} \langle v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) \rangle \\
& = -2Y_{Bn_\gamma} \frac{1}{(8\pi T^3)^2} \int d^3 \mathbf{p}_1 \int d^3 \mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} (v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Calculando las secciones transversales,

$$\begin{aligned}
& v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) \\
& = \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} [|\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2],
\end{aligned} \tag{7.7}$$

las amplitudes invariantes de Lorentz sin la contribución de un bosón real se pueden reescribir en términos de la total sustrayendo la amplitud sobre la capa de masa (siendo b_1 y b_2 las partículas bariónicas que decaen),

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow bb)|^2 \\
& = |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - |\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 - |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 \\
& = |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 - |\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

donde \mathcal{M}_{IRS} se refiere a la amplitud de estados intermedios físicos (ver apéndice D.6), se procederá a calcular primeramente la sección transversal total para luego realizar el cálculo de la sección transversal on-shell, dado que son dos partículas idénticas salientes del mismo tipo, además, debido a que es una dispersión de cuatro partículas involucradas, (Ver ecuación 2.145), en unidades naturales,

$$\begin{aligned}
v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) & = \frac{1}{2} \frac{1}{16\pi s^2} \int_{-s}^0 |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 dt \\
& = \frac{1}{32\pi s^2} \int_{-s}^0 |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 dt,
\end{aligned} \tag{7.9}$$

calculando la amplitud relativista adimensional, teniendo en cuenta que la constante de acoplamiento no tiene dimensiones (Ver sección 2.4.3), en cada uno de los posibles canales

siendo una interacción del bosón X como de \bar{X} , dado que $|g_X|^2 = |g_{\bar{X}}|^2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b}) &= g_X^2 (s + \bar{s} + t + \bar{t} + u + \bar{u}) \\ &= g_X^2 \left(\frac{s}{s - m_X^2} + \frac{s}{s - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} \right), \end{aligned} \quad (7.10)$$

dado que $m_X = m_{\bar{X}}$,

$$\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b}) = g_X^2 (s + \bar{s} + t + \bar{t} + u + \bar{u}) = 2g_X^2 \left(\frac{s}{s - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} \right), \quad (7.11)$$

análogamente a la anterior amplitud se puede calcular el caso de dispersión de antipartículas a partículas,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb) &= g_X^2 (s + \bar{s} + t + \bar{t} + u + \bar{u}) \\ &= g_X^2 \left(\frac{s}{s - m_X^2} + \frac{s}{s - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} \right) \\ &= 2g_X^2 \left(\frac{s}{s - m_X^2} + \frac{t}{t - m_X^2} + \frac{u}{u - m_X^2} \right), \end{aligned} \quad (7.12)$$

debido a la pequeña contribución de los otros canales, los términos de interferencia debido al producto entre los canales internos son mucho menores que la contribución del cuadrado de las amplitudes, esto con el interés de ser capaces obtener el comportamiento del bosón X cerca de la capa de masa (en resonancia), se obtiene,

$$|\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 \simeq 4g_X^4 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{u^2}{(u - m_X^2)^2} \right], \quad (7.13)$$

luego, la adición de las cross section,

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\ &= \frac{1}{32\pi s^2} \int_{-s}^0 |\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 dt \\ &= \frac{1}{32\pi s^2} \int_{-s}^0 8g_X^4 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{u^2}{(u - m_X^2)^2} \right] dt \\ &= \frac{g_X^4}{4\pi s^2} \int_{-s}^0 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{u^2}{(u - m_X^2)^2} \right] dt, \end{aligned} \quad (7.14)$$

dado que $u = -s - t$, (Ver ecuación 2.82), resolviendo (Ver apéndice C.3.1),

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\ &= \frac{g_X^4}{4\pi s^2} \int_{-s}^0 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{(-s - t)^2}{[-s - t - m_X^2]^2} \right] dt \\ &= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \end{aligned} \quad (7.15)$$

se reprodujo una de las secciones transversales mostradas en «Baryon-number generation in supersymmetric unified models: The effect of supermassive fermions» para un intercambio escalar de este tipo (Ecuación 2.6) [20].

7.3. Cálculo de cross section contribución de medios físicos

En esta sección se va a calcular una expresión para la sección transversal sobre la capa de masa, utilizando la aproximación de ancho estrecho para los dos procesos (Ver apéndice C.4.1),

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 &= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \eta)(1 + \bar{\eta}) \\
&\quad + \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \bar{\eta})(1 + \eta) \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [1 - \eta \bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{7.16}$$

por normalización y el parámetro de violación CP, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\eta + \bar{\eta} &= 2 & \eta - \bar{\eta} &= \epsilon & \rightarrow & 2\eta = 2 + \epsilon & 2\bar{\eta} = 2 - \epsilon, \\
\eta &= 1 + \frac{\epsilon}{2} & \bar{\eta} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} & \rightarrow & \eta \bar{\eta} = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}, \\
\frac{\epsilon^2}{4} &= 1 - \eta \bar{\eta},
\end{aligned} \tag{7.17}$$

finalmente,

$$|\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 = \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4 \epsilon^2}{4m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2). \tag{7.18}$$

La sección transversal de esta contribución es (Ver apéndice C.4.2), usando el sistema de centro de masa donde $E_1 = E_2 = \sqrt{s}/2$,

$$\begin{aligned}
v\sigma_{IRS}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma_{IRS}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\
&= \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} [|\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2] \\
&= \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \left[\frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4 \epsilon^2}{4m_X \Gamma_X} \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2) \right] \\
&= \frac{8\pi^2 m_X \Gamma_X \epsilon^2}{2E_1 2E_2} \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2) = \frac{8\pi^2 m_X \Gamma_X \epsilon^2}{s} \delta(s^2 - m_X^2).
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Con esto, usando las ecuaciones (7.15) y (7.19) se obtiene una expresión teórica para la cross section sin tener en cuenta la contribución de bosones reales en valores de resonancia para

las energías entrantes,

$$\begin{aligned}
v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= v\sigma_{(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})} + v\sigma_{(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)} - v\sigma_{(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})}^{IRS} - v\sigma_{(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)}^{IRS}, \\
&= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right] - \frac{8\pi^2 m_X \Gamma_X \epsilon^2}{s} \delta(s^2 - m_X^2), \\
&= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} - \frac{\pi m_X \Gamma_X \epsilon^2}{\alpha^2} \delta(s^2 - m_X^2) s \right].
\end{aligned} \tag{7.20}$$

encontrando finalmente una expresión teórica para la cross section sin la contribución de medios físicos.

7.4. Promedio sobre distribuciones iniciales de energía

En esta sección se muestra la problemática que existe en la estabilidad numérica del cálculo del promedio de la cross section sobre distribuciones iniciales de energía, con ello, promediando la sección transversal (7.20),

$$\langle v[\sigma'] \rangle = \frac{\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} f_1(p_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} f_2(p_2) v[\sigma'](s)}{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p}_1 f_1(p_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p}_2 f_2(p_2)}, \tag{7.21}$$

integrando el denominador (Ver ecuación [7.5]),

$$\langle v[\sigma'] \rangle = \frac{1}{(8\pi T^3)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} e^{-(E_1 + E_2)/T} v[\sigma'](s), \tag{7.22}$$

se puede reescribir este promedio en términos de las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo (Ver pág. 27)

$$\langle v[\sigma'] \rangle = \frac{1}{64T^2} \int_0^\infty ds v[\sigma'](s) \left[\frac{s^{3/2}}{T^3} \mathbf{K}_1 \left[\frac{\sqrt{s}}{T} \right] + 2 \frac{s}{T^2} \mathbf{K}_2 \left[\frac{\sqrt{s}}{T} \right] \right], \tag{7.23}$$

bajo el cambio de variable $s = y^2 T^2$, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\langle v[\sigma'] \rangle &= \frac{1}{64T^2} \int_0^\infty 2T^2 y dy v[\sigma'](y^2 T^2) [y^3 \mathbf{K}_1[y] + 2y^2 \mathbf{K}_2[y]] \\
&= \frac{1}{32} \int_0^\infty y dy v[\sigma'](y^2 T^2) [y^3 \mathbf{K}_1[y] + 2y^2 \mathbf{K}_2[y]],
\end{aligned} \tag{7.24}$$

como se puede observar, esta integral que sólo se puede desarrollar de manera numérica requiere de una gran capacidad de adaptabilidad a la hora de tener un integrando altamente oscilante, dado que por un lado las funciones de Bessel tienden a cero de manera rápida,

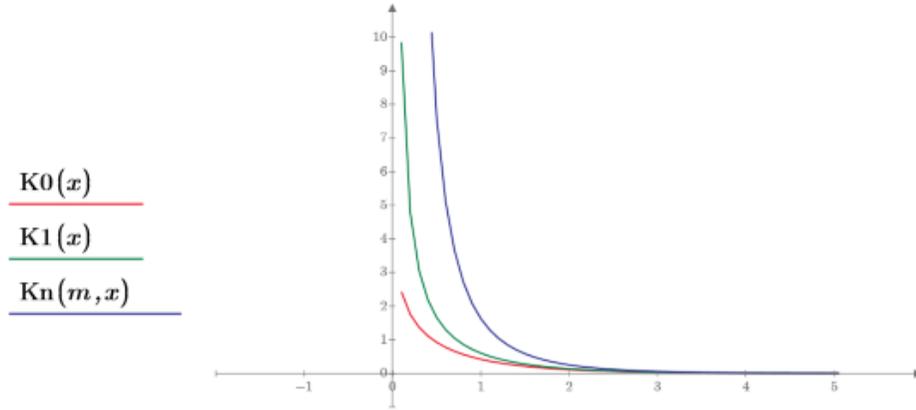


Figura 7.3: Funciones de modificadas de Bessel de segunda especie. $m = 2$.

y por otro, el término de resonancia de la cross section que tiende a infinito cuando la temperatura en términos de energía es igual a la masa del bosón $X(\bar{X})$ producido, es por ello que existen distintas maneras que ha usado la comunidad científica para resolver este promedio, cómo se muestra a continuación,

Artículo	Promedio
Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of gauge bosons[21] II. The role of Higgs bosons[22]	$\langle \sigma(s) \rangle \simeq \frac{e^4 s}{(s+m^2)^2}, s \rightarrow T$
Baryon number generation in the early universe [11] Cosmological Baryon-Number Generation in GUM [23] Calculation of cosmological baryon asymmetry in GUGM [9]	$\langle \sigma(s) \rangle = \sigma(\langle s \rangle)$
Baryon-number generation in SSUM: The effect of supermassive fermions[20]	$\langle \sigma(s) \rangle$ en términos de K_n

Cuadro 7.1: Maneras de reescribir el promedio de la cross section.

para este desarrollo se realiza la metodología actual tomando el valor principal del operador en s (Ver apéndice D.4), con aproximación de ancho estrecho (Ver apéndice D.5), tomando así la contribución fuera de resonancia (off-shell), donde la ecuación (7.20) se escribe:

$$\begin{aligned}
 v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\
 &= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3(s - m_X^2)^2}{2[(s - m_X^2)^2 + \Gamma_X^2 m_X^2]^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

evaluada en términos del cambio de variable $s = y^2 T^2$ necesario según (7.24), se escribe,

$$\begin{aligned}
v [\sigma' (y^2 T^2)] &= \frac{8\pi\alpha^2}{y^4 T^4} \left[\frac{y^6 T^6 (y^2 T^2 - m_X^2)^2}{2[(y^2 T^2 - m_X^2)^2 + \Gamma_X^2 m_X^2]^2} + y^2 T^2 + m_X^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_X^4}{y^2 T^2 + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{y^2 T^2 + m_X^2}{m_X^2} \right] \\
&= \frac{8\pi\alpha^2}{y^4 T^4} \left[\frac{y^6 T^{10} [y^2 - (m_X/T)^2]^2}{2T^8 \{ [y^2 - (m_X/T)^2]^2 + (\Gamma_X^2 m_X^2 / T^4) \}^2} + y^2 T^2 + \left(\frac{m_X}{T} \right)^2 T^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(m_X/T)^4}{y^2 + (m_X/T)^2} T^2 - 2 \left(\frac{m_X}{T} \right)^2 T^2 \ln \left(y^2 \left(\frac{T}{m_X} \right)^2 + 1 \right) \right], \tag{7.26}
\end{aligned}$$

tomando factor común T^2 y definiendo la variable $x = m_X/T$,

$$\begin{aligned}
v [\sigma' (y^2 T^2)] &= \frac{8\pi\alpha^2}{y^4 T^2} \left[\frac{y^6 [y^2 - x^2]^2}{2 [(y^2 - x^2)^2 + (\Gamma_X^2 x^2 / T^2)]^2} + y^2 + x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{y^2 + x^2} - 2x^2 \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right], \tag{7.27}
\end{aligned}$$

finalmente la expresión resultante para el promedio de la sección transversal en términos de la variable x es,

$$\begin{aligned}
\langle v[\sigma'(x)] \rangle &= \frac{1}{32} \int_0^\infty y \frac{8\pi\alpha^2}{y^4 T^2} \left[\frac{y^6 [y^2 - x^2]^2}{2 [(y^2 - x^2)^2 + (\Gamma_X^2 x^2 / T^2)]^2} + y^2 + x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{y^2 + x^2} - 2x^2 \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right] [y^3 \mathbf{K}_1 [y] + 2y^2 \mathbf{K}_2 [y]] dy \\
&= \frac{\pi\alpha^2 x^2}{4m_X^2} \int_0^\infty \frac{1}{y^3} \left[\frac{y^6 [y^2 - x^2]^2}{2 [(y^2 - x^2)^2 + (\Gamma_X^2 x^2 / T^2)]^2} + y^2 + x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{y^2 + x^2} - 2x^2 \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right] [y^3 \mathbf{K}_1 [y] + 2y^2 \mathbf{K}_2 [y]] dy, \tag{7.28}
\end{aligned}$$

como el ancho de decaimiento es proporcional a la masa y en la aproximación se necesita que esté valor tienda cero, además a nivel numérico no afecta el orden de este valor (siempre que sea mucho menor que uno), se toma:

$$\Gamma_X^2 = 10^{-5} m_X^2,$$

con esto y acotando a valores de n la integral, esta puede reemplazarse también como múltiplos x dado que es la variable de peso en este caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v[\sigma'(x)] \rangle m_X^2}{8\pi\alpha^2} &= \frac{x^2}{32} \int_0^n \frac{1}{y^3} \left[\frac{y^6 [y^2 - x^2]^2}{2 [(y^2 - x^2)^2 + 10^{-5} x^4]^2} + y^2 + x^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{y^2 + x^2} - 2x^2 \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right] [y^3 \mathbf{K}_1 [y] + 2y^2 \mathbf{K}_2 [y]] dy. \tag{7.29}
\end{aligned}$$

Para la resolución de este tipo de integral es necesario hacer el uso de una librería especializada en integración numérica (Multidimensional, aunque en este caso sólo se tiene una dimensión) con métodos montecarlo denominada CUBA [24], esta librería se puede instalar en Mathematica, se prueba la estabilidad numérica usando las rutinas **Vegas** y **Suave**, así,

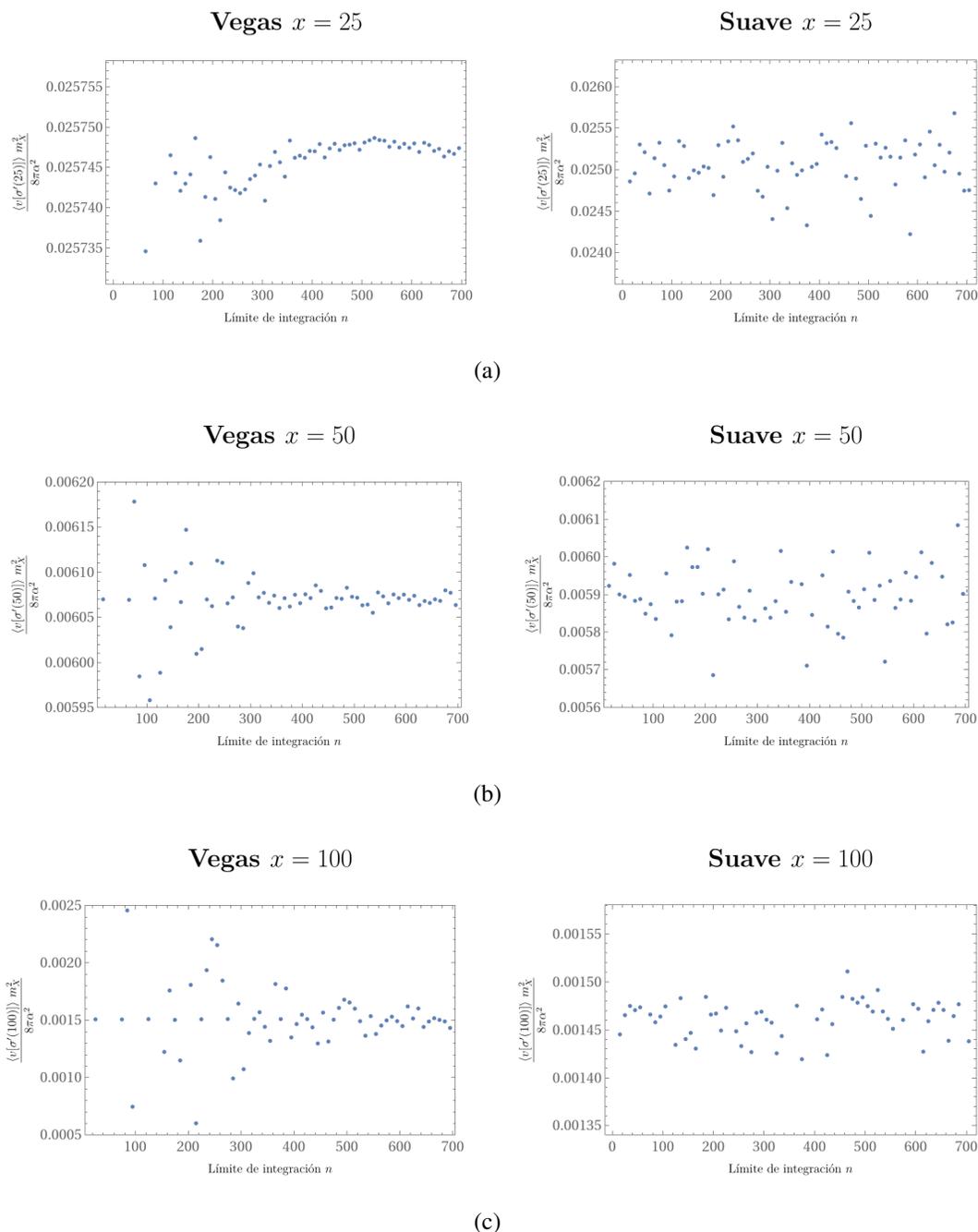


Figura 7.4: Evaluación numérica de la Cross section; Vegas. 250000 evaluaciones iniciales; Suave. Tolerancia de planitud 1, 80000 evaluaciones máximas permitidas.

se observa la lenta convergencia esperada debido a que el integrando es oscilante, sin embargo, la rutina **Vegas** en un inicio es altamente oscilante y luego de variar el límite superior de la integral en dos ordenes de magnitud se presenta una variación máxima de entre 10^{-3} y 10^{-4} , de manera opuesta, la rutina **Suave** es bastante oscilante sin obtener un valor al cual converger pero desde un inicio la integración se acota en una variación máxima de 10^{-3} , con todo esto, se toma la determinación de usar la rutina de mayor exactitud (**Vegas**), dado que se puede probar que estas se superponen,

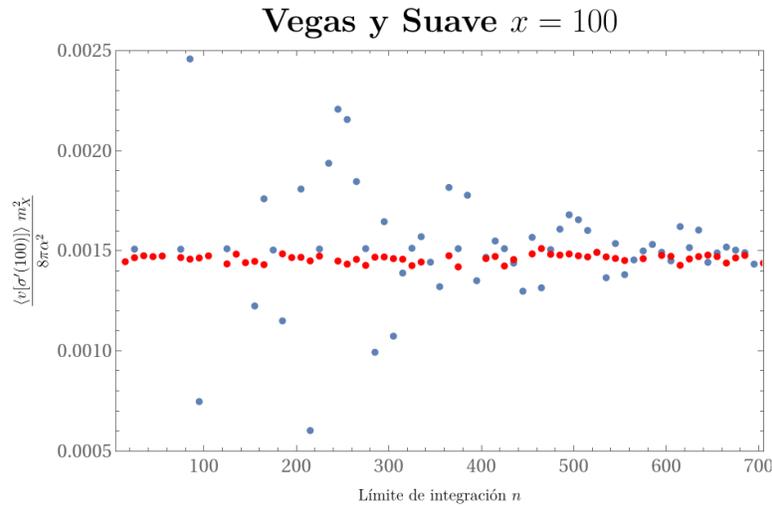


Figura 7.5: Estabilidad numérica del valor máximo de x a tratar.

Finalmente, realizando la integración numérica de la cross section con la rutina Vegas se obtiene,

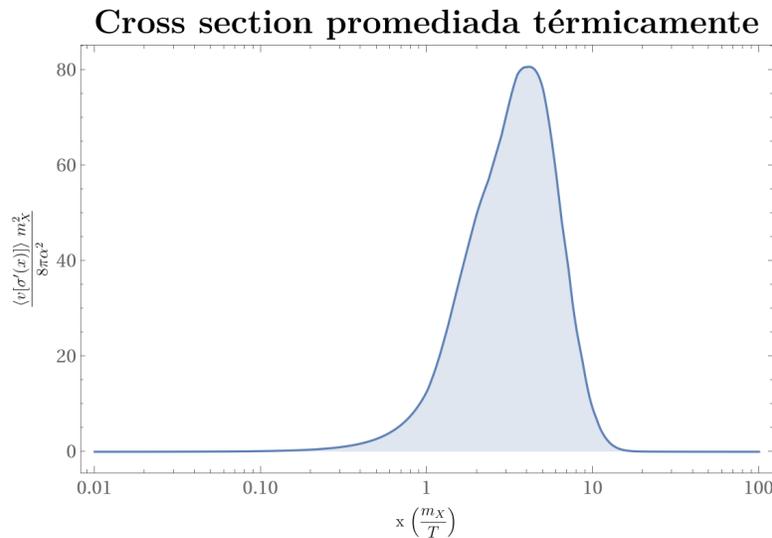


Figura 7.6: Rutina Vegas, 250000 evaluaciones iniciales y límite superior igual a 700.

Capítulo 8

Solución del mecanismo

Se presentan soluciones a las ecuaciones (6.13) y (6.24) que describen la generación del número bariónico del modelo. En términos de las variables adimensionales (Ver apéndice E.6.1),

$$x \equiv \frac{m_X}{T}, \quad x_P = \frac{m_X}{m_P},$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{x}{m_X x_P} \frac{dY}{dt}, \quad (8.1)$$

donde la masa efectiva de Planck m_P se definió en (4.66), estas ecuaciones se convierten en:

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -A(x) \left\{ (Y_+ - Y_+^{eq}) + \left(\frac{\eta - \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \quad (8.2a)$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq -A(x) \left\{ Y_- - \left(\frac{\eta + \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \quad (8.2b)$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq A(x) \left[\{ (\eta - \bar{\eta}) (Y_+ - Y_+^{eq}) + (\eta + \bar{\eta}) Y_- \} \right. \quad (8.2c)$$

$$\left. - 2Y_B \left\{ Y_+^{eq} + \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \right\} \right],$$

$$A(x) = \frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X}, \quad (8.2d)$$

$$Y_\pm = \frac{1}{2}(Y_X \pm Y_{\bar{X}}). \quad (8.2e)$$

Para simplificar, se toma la normalización,

$$\frac{\eta + \bar{\eta}}{2} = 1, \quad (8.3)$$

aunque ninguno de los resultados es sensible a esta elección. El parámetro de violación de CP $\eta - \bar{\eta}$ se denotará como:

$$\varepsilon \equiv \eta - \bar{\eta}. \quad (8.4)$$

La unitariedad de las tasas de decaimiento (6.1) requiere que $\varepsilon \leq 2$, y según la ecuación (2.57), ε es formalmente del orden de α . Se denota Y_B^0 para la densidad final de número bariónico (a temperatura cero).

Si el contenido del universo estuviera en equilibrio térmico en tiempos suficientemente tempranos, las soluciones de las ecuaciones (8.2) deben satisfacer las condiciones iniciales [asumiendo que todas las partículas (incluyendo γ) tienen solo un estado de espín y obedecen las estadísticas de Maxwell-Boltzmann: si X tiene g_X estados de espín (y γ tiene estadísticas de Bose-Einstein asignadas), entonces $Y_+^\infty = \frac{1}{2}g_X$ si es un bosón, y $Y_+^\infty = \frac{3}{8}g_X$ si es un fermión]:

$$\begin{aligned} Y_+(x=0) &= Y_+^\infty = Y_+^{eq}(x=0) = 1, \\ Y_-(x=0) &= Y_-^\infty = 0, \\ Y_B(x=0) &= Y_B^\infty, \end{aligned} \quad (8.5)$$

donde Y_B^∞ es un posible número bariónico inicial. A temperaturas más bajas, la densidad del número de X en equilibrio se da por (Ver ecuación (5.11)),

$$Y_+^{eq} = Y_X^{eq} = \frac{1}{2}x^2 K_2(x), \quad (8.6)$$

donde K_2 es una función de Bessel modificada (ver apéndice F.2). Tomando el factor de dilatación temporal en el ancho efectivo de X como el promedio sobre una distribución de energía de X en equilibrio (Ver ecuación (E.13)),

$$\langle \Gamma_X \rangle = \left\langle \frac{m_X}{E_x} \right\rangle \Gamma_X = \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \Gamma_X. \quad (8.7)$$

Para las soluciones numéricas, se usa [14]:

$$\Gamma_X = \frac{1}{4}m_X\alpha, \quad (8.8)$$

correspondiente al decaimiento de un X (si $g_X > 1$ luego $\Gamma_X = \frac{m_X\alpha}{2g_X}$) con un estado de espín a dos fermiones idénticos (espín- $\frac{1}{2}$), acoplados con fuerza $e = \sqrt{4\pi\alpha}$.

8.1. Soluciones analíticas aproximadas

Si Y_B e Y_- siempre permanecen pequeños, las ecuaciones (8.2) se reducen simplemente a (Ver apéndice E.6.2):

$$\frac{dY_B}{dx} = -\varepsilon \frac{dY_+}{dx}, \quad (Y_B, Y_- \ll 1), \quad (8.9)$$

correspondiente a la generación de número bariónico por decaimientos libres de X , sin reacciones inversas. En esta aproximación, el número bariónico generado Y_B^0 se da por,

$$\begin{aligned} Y_B^0 &\simeq Y_B^\infty + \varepsilon\{Y_+^\infty - Y_+^0\}, \quad \text{donde } Y_+^0 \simeq 0 \\ &= Y_B^\infty + \varepsilon, \quad (Y_B, Y_B^\infty, Y_- \ll 1), \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde, como es usual, Y_B^∞ es un posible número bariónico inicial evidentemente menor que cero. Teniendo en cuenta que (8.10) proporciona un límite superior para $|Y_B^0|$; las reacciones inversas siempre tienden a disminuir la densidad bariónica.

A altas temperaturas, y tomando $Y_B^\infty = 0$ por simplicidad, las ecuaciones (8.2) toman la forma (Ver apéndice E.6.2):

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -A'x^2 \left\{ Y_+ - 1 + \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4 \log x) + \mathcal{O}(x^2(Y_+ - 1)) + \dots \right\}, \quad (8.11a)$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq -A'x^2 \{Y_- - Y_B + \dots\}, \quad (8.11b)$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq -A'\varepsilon x^2 \left\{ Y_+ - 1 + \frac{1}{4}x^2 + \dots \right\}, \quad (x \ll 1), \quad (8.11c)$$

donde,

$$A' = \frac{\Gamma_x}{x_P m_X} = \frac{m_P \Gamma_X}{m_x^2} = \alpha \frac{m_P}{4m_x}.$$

Para x pequeño, las soluciones a estas ecuaciones son:

$$Y_+ \simeq 1 - \frac{1}{20}A'x^5 + \mathcal{O}(x^7 \log x), \quad (8.12a)$$

$$Y_- \simeq \frac{1}{160}\varepsilon A'^2 x^8 - \mathcal{O}(x^{11}), \quad (8.12b)$$

$$Y_B \simeq \varepsilon \{1 - Y_+\} \simeq \frac{1}{20}\varepsilon A'x^5 + \mathcal{O}(x^7 \log x), \quad (x \ll 1). \quad (8.12c)$$

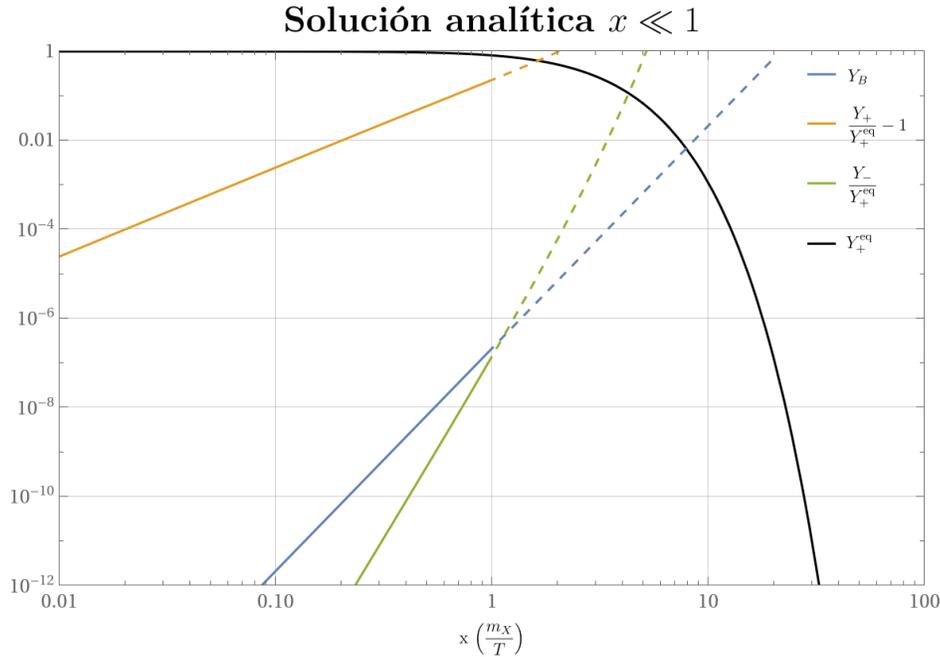


Figura 8.1: Solución analítica de las ecuaciones de Boltzmann, $m_X = 1 \text{ PeV}$, $\alpha = 1/40$.

Se observa que de manera analítica el comportamiento de la densidad de bosones X aumenta de manera constante conforme el universo se enfría, además el parámetro de asimetría se aproxima a un posible máximo, ya que teniendo en cuenta la cross section integrada se espera que se alcance una resonancia. A bajas temperaturas (grandes x), el bosón X experimenta un decaimiento exponencial, y su número es típicamente despreciable para $x \gg 1$. Solo el último término en la ecuación (8.2c) para Y_B es importante en x grande. Usando la forma de Fermi de la cross section en el límite a bajas energías [25],

$$\sigma(s) \simeq \frac{g_X e^4 s}{(s + m_X^2)^2}, \quad (8.13)$$

por tanto, si $s \ll m_X$, además $g_X = 1$,

$$\sigma(s) \simeq \frac{e^4 s}{m_X^4} = 16\pi \frac{\alpha^2 s}{m_X^4}, \quad (8.14)$$

y tomando $\langle s \rangle = 18T^2$, (Ver apéndice E.6.4),

$$\langle \sigma(s) \rangle \simeq 288\pi \frac{\alpha^2 T^2}{m_X^4} = 288\pi \frac{\alpha^2}{x^2 m_X^2}, \quad (8.15)$$

la ecuación (8.2c) se convierte en (Ver apéndice E.6.5):

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq -1152 \frac{\alpha^2}{\pi x_P} \frac{Y_B}{x^4}, \quad (x \gg 1). \quad (8.16)$$

Cualquier exceso bariónico generado por decaimiento y decaimiento inverso a altas temperaturas se agota por completo a bajas temperaturas a través de reacciones $2 \rightarrow 2$ que violan el número bariónico, disminuyendo aproximadamente de la forma,

$$Y_B(x) = C \exp \left[1152 \frac{\alpha^2 m_P}{\pi m_X} \frac{1}{3x^3} \right], \quad (x \gg 1), \quad (8.17)$$

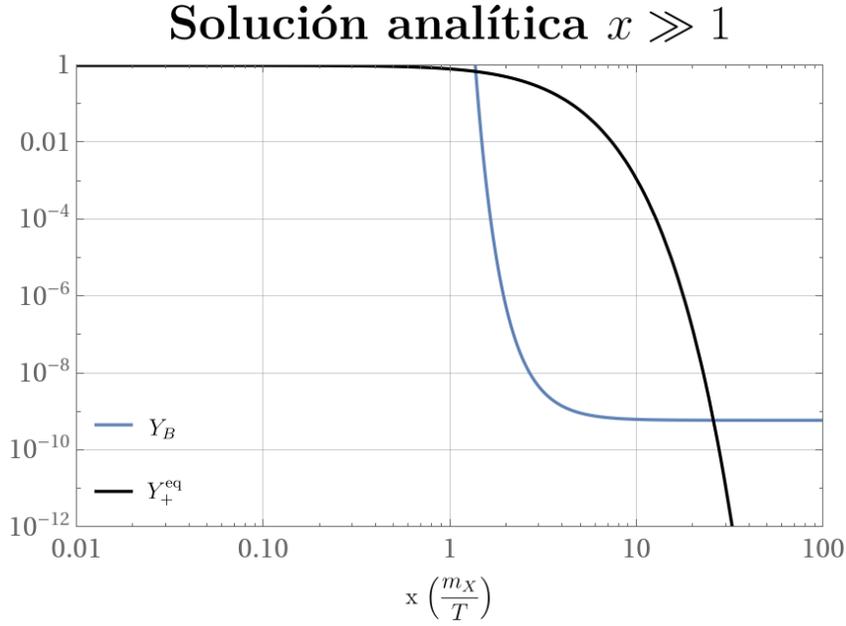


Figura 8.2: Solución analítica de las ecuaciones de Boltzmann, $m_X = 1$ PeV, $\alpha = 1/40$, $C = 6.04 \times 10^{-10}$.

y eventualmente tiende al valor del número bariónico actual (en este caso la constante C), sin embargo, no es posible modelar el comportamiento de las ecuaciones (8.2) en la región $x \sim 1$, dado que las aproximaciones analíticas fallan; por lo tanto, es necesario una solución numérica para (8.2).

8.2. Soluciones numéricas

En esta subsección se proporcionan soluciones numéricas a las ecuaciones (8.2) como función de los tres parámetros adimensionales ε , x_P y α .

Preparación del Kernel

Partiendo de las ecuaciones (8.2),

$$\begin{aligned}
 \frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \left\{ (Y_+ - Y_+^{eq}) + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\
 \frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \{ Y_- - Y_B Y_+^{eq} \}, \\
 \frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \left[\{ \varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \} \right. \\
 &\quad \left. - 2Y_B \left\{ Y_+^{eq} + \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \right\} \right],
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

se puede preparar el Kernel de la solución numérica, de tal manera que se obtenga un sistema de ecuaciones con los parámetros adimensionales y la cross section integrada (Ver apéndice E.6.6),

$$\begin{aligned}
\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - \frac{1}{2}x^2 K_1(x) + \frac{\varepsilon}{2} Y_B \frac{1}{2}x^2 K_1(x) \right\}, \\
\frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_B \frac{1}{2}x^2 K_1(x) \right\}, \\
\frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x\alpha}{4x_P} \left[\left\{ \varepsilon \left(Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - \frac{1}{2}x^2 K_1(x) \right) + 2Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\} \right. \\
&\quad \left. - 2Y_B \left\{ \frac{1}{2}x^2 K_1(x) + \frac{32\alpha \langle v[\sigma'(x)] \rangle m_X^2}{\pi x^3 8\pi\alpha^2} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{8.19}$$

- En modelos unificados, las estimaciones sugieren que $m_X \simeq 10^{15} \text{GeV} = 1 \text{PeV}$.
- La constante de acoplamiento relevante g_X depende de la naturaleza precisa de X en el modelo. Si X es un bosón de gauge (vector), entonces α debería ser presumiblemente la constante de acoplamiento efectiva correspondiente en una masa invariante $\sim \sqrt{s}$ para dispersiones $2 \rightarrow 2$ y $\sim m_X$ para las desintegraciones de X . Un valor típico obtenido para esta constante de acoplamiento en el modelo SU(5) es $\alpha \sim \frac{1}{40}$, cómo en este caso X es un bosón escalar, la constante de acoplamiento debe ser ($\leq 10^{-2}$).
- La constante de acoplamiento relevante g_X depende de la naturaleza precisa de X en el modelo. Un valor típico obtenido para esta constante de acoplamiento en el modelo SU(5) es $\alpha \sim \frac{1}{40}$, cómo en este caso X es un bosón escalar, la constante de acoplamiento debe ser ($\leq 10^{-2}$).
- El valor del parámetro de violación de CP es incierto, sin embargo, dadas las observaciones actuales del parámetro de asimetría bariónica que ha sido acotado por dos ordenes de magnitud se fija cómo estándar el valor $\varepsilon = 10^{-7}$ un orden de magnitud menor al que se usaba antes de 10^{-6} .
- Se debe especificar la masa de Planck efectiva definida por la ecuación (4.66), que depende del número de especies $g^*(T)$ que contribuyen a la densidad de energía del universo a las temperaturas $\sim m_X$ consideradas. m_P determina la tasa de expansión en el universo temprano; las inhomogeneidades o perturbaciones en la métrica podrían llevar a tasas de expansión diferentes para distintas regiones del universo. Tales efectos pueden parametrizarse mediante valores diferentes para x_P .
- Se debe especificar la masa de Planck efectiva definida, que depende del número de especies $g^*(T)$ que contribuyen a la densidad de energía del universo a temperaturas $\sim m_X$ consideradas. m_P determina la tasa de expansión en el universo temprano.
- Finalmente, la cross section $2 \rightarrow 2$ mediada por los bosones X , tomará un papel clave a bajas temperaturas donde se desacopla el mediador pesado, siendo protagonistas los bosones virtuales del canal s generando el parámetro de asimetría bariónica actual.

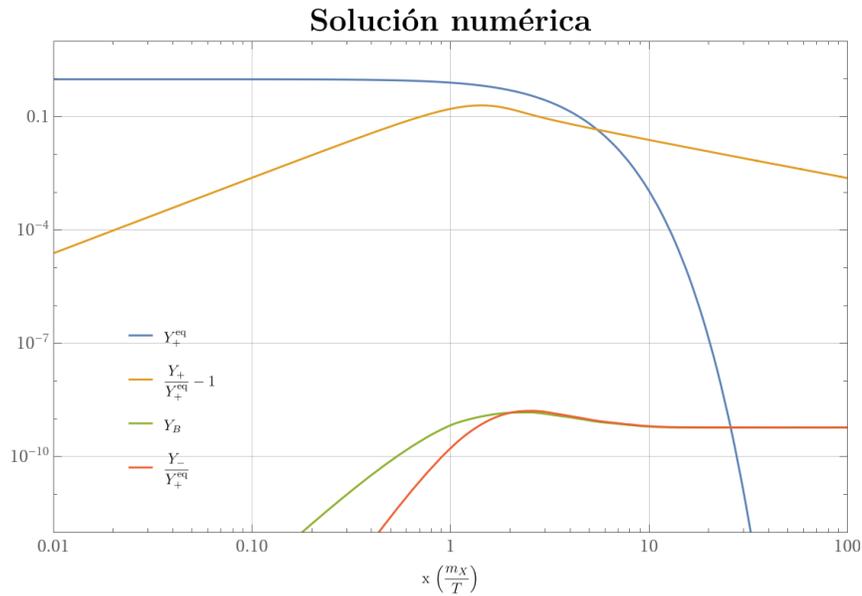


Figura 8.3: Solución numérica de las ecuaciones de Boltzmann, $m_X = 1$ PeV, $\alpha \sim 1/40$, $\varepsilon = 10^{-7}$ y $g_*(X) = 106.75$.

Se observa el desarrollo de las densidades de $X(\bar{X})$ y de bariones en función de la expansión del universo. Se observa que los cambios en Y_+ actual siguen a los de Y_+^{eq} termalizados, la variable Y_- disminuye de manera equivalente con Y_+^{eq} debido a que los bosones X y \bar{X} llegan al esperado equilibrio químico.

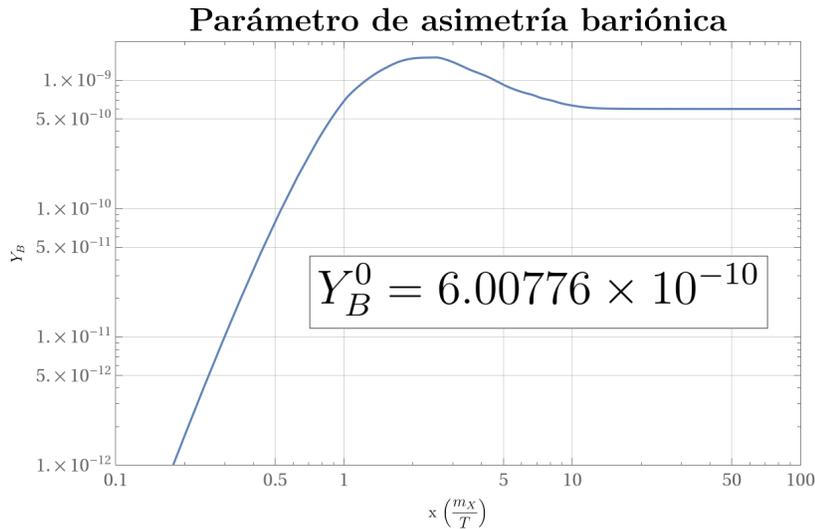


Figura 8.4: Parámetro de asimetría bariónica en función del enfriamiento del universo, $m_X = 1$ PeV, $\alpha \sim 1/40$, $\varepsilon = 10 \times 10^{-7}$ y $g_*(X) = 106.75$.

Es conveniente mostrar las distintas mediciones realizadas en los últimos años para comparar

la fiabilidad estadística del modelo, además de la veracidad del modelo propuesto [26],

Restricciones utilizadas	Media $10^{10}\eta$	Pico $10^{10}\eta$
Solo CMB	6.104 ± 0.055	6.104
BBN+ Y_p	$6.239^{+1.202}_{-2.741}$	5.031
BBN+D	6.042 ± 0.118	6.041
BBN+ Y_p +D	6.040 ± 0.118	6.039
CMB+BBN	6.124 ± 0.040	6.124
CMB+BBN+ Y_p	6.124 ± 0.040	6.124
CMB+BBN+D	6.115 ± 0.038	6.115
CMB+BBN+ Y_p +D	6.115 ± 0.038	6.115

Cuadro 8.1: Restricciones sobre la relación barión-fotón, utilizando diferentes combinaciones de restricciones observacionales. Se da tanto la media (y su incertidumbre) como el valor de η en el pico de la distribución.

Se prueba la funcionalidad del mecanismo de bariogénesis, obteniéndose un parámetro de asimetría bariónica estable, que se encuentra dentro del rango de los valores medidos experimentalmente.

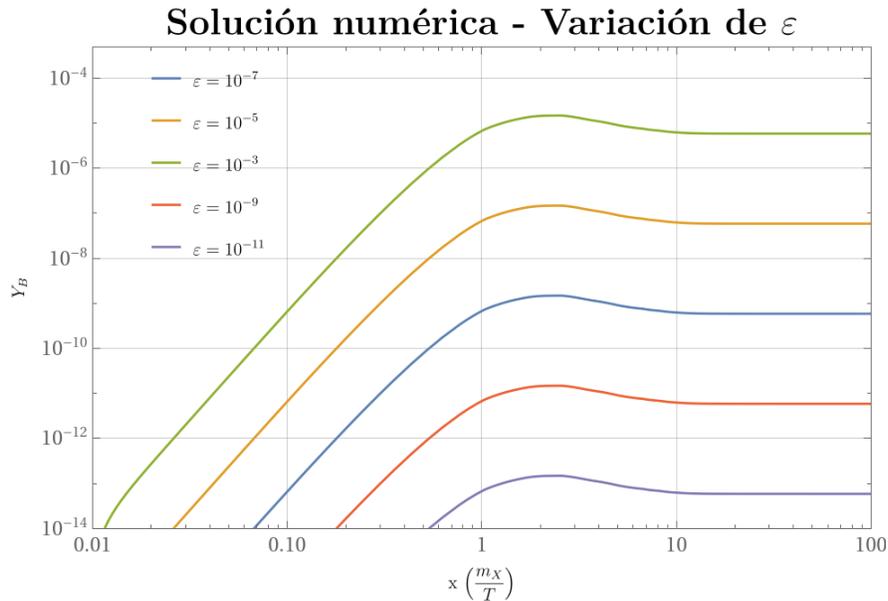


Figura 8.5: Solución numérica variando el parámetro de violación CP, $m_X = 1 \text{ PeV}$, $\alpha \sim 1/40$ y $g_*(X) = 106.75$.

La dependencia del parámetro de violación CP confirma, a nivel teórico, que para órdenes grandes la asimetría bariónica actual debería ser mayor; de lo contrario, la variación en el número de bariones y antibariones se vuelve cada vez más pequeña.

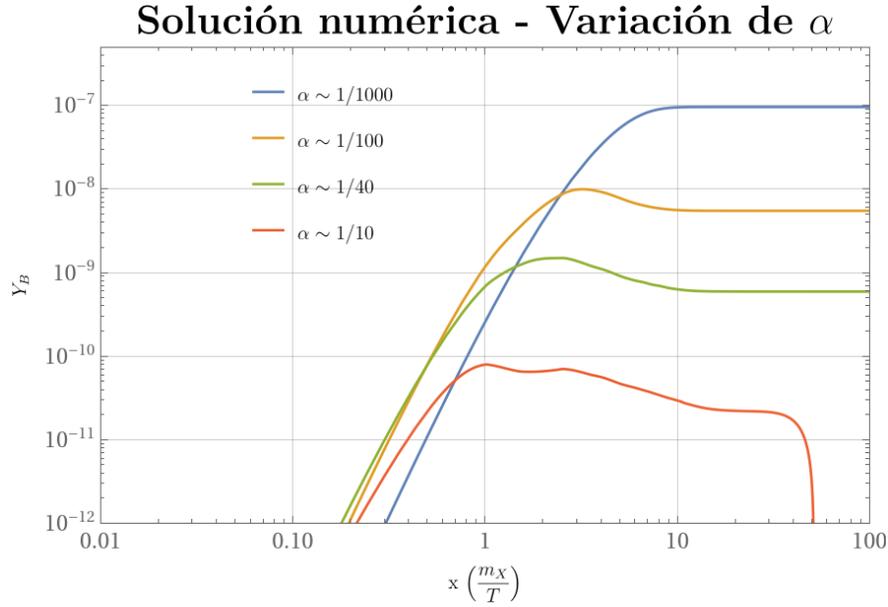


Figura 8.6: Solución numérica variando la constante de estructura fina, $m_X = 1 \text{ PeV}$, $\varepsilon = 10 \times 10^{-7}$ y $g_*(X) = 106.75$.

Dado que a nivel teórico la constante de estructura fina debe ser $\alpha \leq 10^{-2}$, se ilustra que para valores mayores será necesario modificar otro de los grados de libertad del modelo para alcanzar las observaciones experimentales.

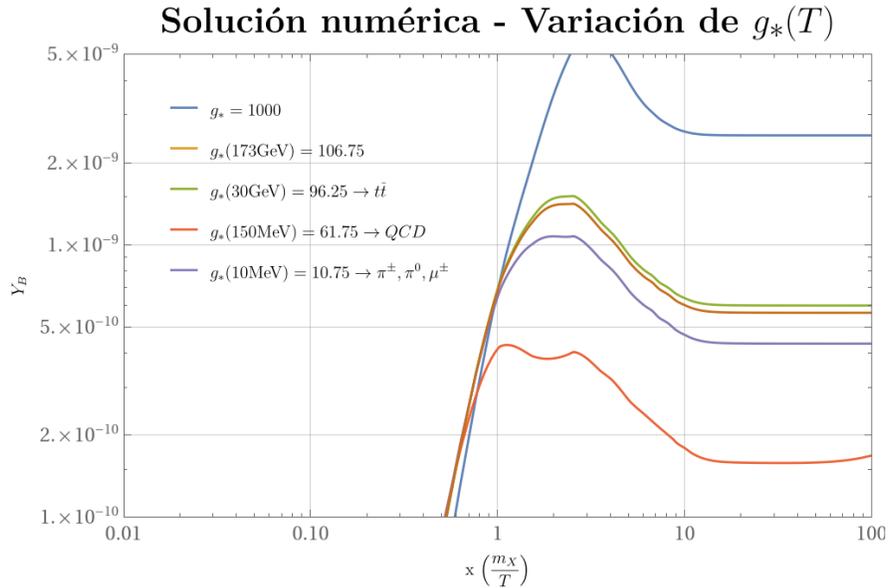


Figura 8.7: Solución numérica variando el número efectivo de especies relativistas, $m_X = 1 \text{ PeV}$, $\alpha \sim 1/40$ y $\varepsilon = 10 \times 10^{-7}$.

Se demuestra que los grados de libertad disponibles de partículas sin masa incrementan la

asimetría bariónica a medida que estos aumentan, dado que las especies relativistas están directamente relacionadas con la masa de Planck efectiva. Además, se resalta la importancia de las partículas del modelo estándar en la extensión propuesta para obtener un valor cercano al observado.

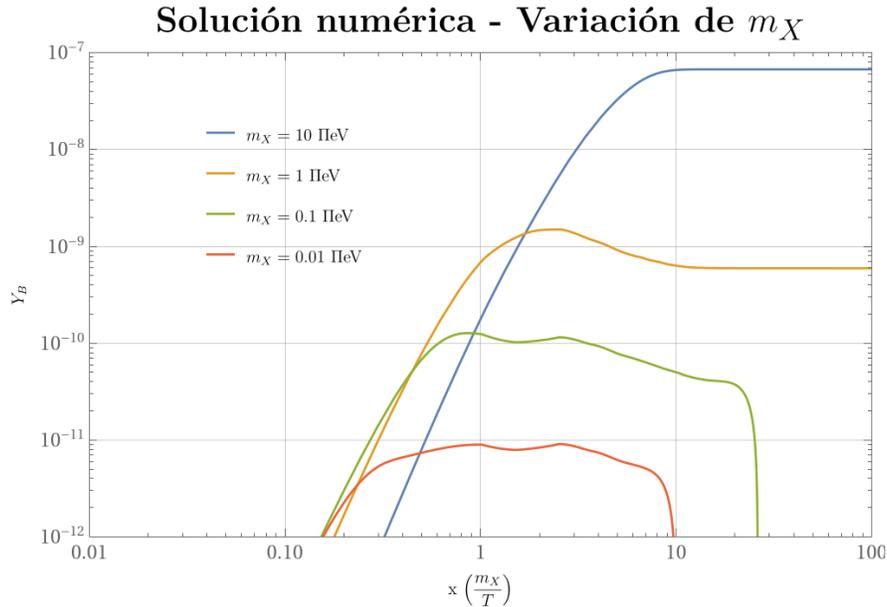


Figura 8.8: Solución numérica variando la masa del bosón m_X , $\alpha \sim 1/40$, $\varepsilon = 10 \times 10^{-7}$ y $g_*(X) = 106.75$.

Por último, resulta evidente que el bosón involucrado en la generación de bariogénesis debe ser muy masivo, con una masa comparable a la de la escala de Planck. Esta necesidad surge de las condiciones necesarias para romper la simetría CP de manera suficientemente significativa en los primeros instantes del universo. Si el bosón fuera demasiado ligero, su interacción con los campos responsables de la bariogénesis no sería lo suficientemente fuerte para generar la asimetría bariónica observada. La escala de Planck ofrece un umbral natural para esta masa debido a su conexión con las energías extremas en el universo temprano.

Capítulo 9

Resultados

Objetivos específico: Estudiar los formalismos de la teoría cuántica de campos y su aplicación al problema de la asimetría materia-antimateria. **Resultado esperado:** Descripción correcta de cómo el formalismo de la teoría cuántica de campos puede dar solución al problema de la bariogénesis y leptogénesis.

Con respecto a la teoría cuántica de campos se reprodujo el formalismo de la demostración de la anomalía quiral bajo la derivación algebraica de Fujikawa, mostrando así que la corriente bariónica no se conserva,

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (9.1)$$

luego se desarrolló la teoría del cálculo de amplitudes relativistas introduciendo las variables de Mandelstam, esto con el fin de construir las herramientas necesarias para trabajar con las probabilidades de dispersión y decaimientos (sin hacer uso de unidades naturales) de partículas mediadas por una interacción a proponer,

$$\Gamma(1 \rightarrow 2, 3) = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_1, m_2, m_3)}{16\pi \hbar m_1^3}, \quad \sigma = \int_{-s/c^2}^0 \frac{S\hbar^2}{16\pi s^2} |\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 dt, \quad (9.2)$$

gracias a esto se introduce un primer modelo simple,

$$\mathcal{L} = g_1 X i_2^\dagger i_1 + g_2 X i_4^\dagger i_3 + g_3 Y i_1^\dagger i_3 + g_4 Y i_2^\dagger i_4 + g_1^* X^\dagger i_2 i_1^\dagger + g_2^* X^\dagger i_4 i_3^\dagger + g_3^* Y^\dagger i_1 i_3^\dagger + g_4^* Y^\dagger i_2 i_4^\dagger, \quad (9.3)$$

demostrando así, que se puede producir en el modelo simple la violación CP buscada por las condiciones de Sakharov, si primeramente se tiene en cuenta un orden mayor a la aproximación de Born dado que el número bariónico neto se anula a tree-level, luego, debido el resultado de que la asimetría materia-antimateria se produce a un loop o más, se prueba que el número bariónico neto a un loop se denota como,

$$\varepsilon_X = \frac{4}{\Gamma_X} \text{Im}[I_{XY}] \text{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] [(B_{i_4} - B_{i_3}) - (B_{i_2} - B_{i_1})], \quad (9.4)$$

gracias a esto, se muestra que el número bariónico debe violarse tanto por la desintegración del bosón de la interacción cómo por la partícula intercambiada en el loop, además que

el bosón con su antibosón o los bosones del loop deben ser mucho más masivos que las partículas de cuestión dado que debe existir una parte imaginaria en el factor cinemático de la dispersión y finalmente algunas de las constantes de acoplamiento pueden ser complejas.

Se desarrolló la fundamentación matemática en invarianza y violación de simetrías discretas en términos de las amplitudes de transición probando que la invarianza CP por teorema CPT y unietariedad,

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i}), \text{ (Invarianza CPT)}, \quad (9.5)$$

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2, \text{ (Unitariedad)}, \quad (9.6)$$

requiere que las amplitudes de transición al cuadrado cumplan,

$$|\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 \equiv |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2, \quad (9.7)$$

para estados finales específicos requiere la invarianza CP. Así que si la interacción que induce el decaimiento de un bosón viola la invarianza CP, entonces el decaimiento de un sistema que contiene un número igual de bosones y antibosones puede resultar en números desiguales de materia y antimateria interactuante.

En la resolución de las ecuaciones de Boltzmann fue importante hacer uso de una aproximación denominada de ancho estrecho o Narrow Width, esta determina que si el propagador del bosón X se inscribe de la forma,

$$\frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (9.8)$$

en un estado de resonancia el ancho de decaimiento Γ_X del bosón X es mucho menor que su masa m_X ,

$$\Gamma_X \sim \alpha m_X, \quad \alpha \ll 1, \quad (9.9)$$

Un método teóricamente consistente para extraer esta parte dominante de la amplitud lo proporciona la aproximación de ancho estrecho (en inglés NWA), donde,

$$\varepsilon \sim \Gamma m_X, \quad (9.10)$$

ocasionando que,

$$\left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\varepsilon} \right|^2 \simeq \frac{1}{\Gamma_X m_X} \pi \delta(q^2 - m_X^2). \quad (9.11)$$

Objetivos específico: Evaluar el modelo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y \otimes U_{B-L}^{\text{global}}$ mediante un análisis estadístico con las restricciones experimentales de la física de partículas y cosmología.
Resultado esperado: Un ajuste óptimo en el comportamiento del modelo con las restricciones experimentales de la física de partículas y de cosmología.

Para el análisis estadístico primeramente fue necesario desarrollar la temática correspondiente a la cosmología, partiendo de la fundamentación geométrica para desarrollar un universo homogéneo en expansión, gracias a esto, se introduce la teoría dinámica del universo mostrando la evolución temporal de la densidad de partículas y ecuaciones de Friedmann, entrando finalmente a equilibrio térmico, tanto global como local, dónde se realiza el cálculo de la densidad de energía y número de especies relativistas a altas temperaturas mostrando que afecta directamente al universo temprano, si se toma en cuenta el modelo estándar,

$$g^* = g_b + \frac{7}{8}g_f = 106.75, \quad (9.12)$$

posteriormente se define una masa de Planck efectiva de tal manera que sea una escala del universo junto con el posible valor de la masa del bosón generador de la asimetría bariónica, así,

$$m_P \equiv \left(\frac{45}{4\pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m_\phi}{\sqrt{g^*(T)}}, \quad (9.13)$$

para poder cumplir con la condición de Sakharov de interacciones fuera del equilibrio térmico, se introduce el desarrollo teórico de las ecuaciones de transporte de Boltzmann proponiendo la variación temporal de la densidad del número de partículas en términos de la sección transversal de dispersión de un posible tipo de interacción, tomando en cuenta las funciones de distribución estadística de momentos y el cuadrado de las amplitudes invariantes,

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \Lambda_{1,2}^{3,4} [-f_1(p_1)f_2(p_2)|\mathcal{M}(12 \rightarrow 34)|^2 + f_3(p_3)f_4(p_4)|\mathcal{M}(34 \rightarrow 12)|^2]. \quad (9.14)$$

Para proponer la estadística de la generación del número bariónico se hace uso de una parametrización en términos de ζ de las amplitudes de transición desarrolladas en el apartado de QFT, de partículas b casi sin masa que lleva el número bariónico $B = \frac{1}{2}$ y \bar{b} su antipartícula, con $B = -\frac{1}{2}$, y siendo φ una partícula masiva con $\bar{\varphi} \equiv \varphi$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= (1 + \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\ |\mathcal{M}(bb \rightarrow \varphi\varphi)|^2 &= |\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = (1 - \zeta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\ |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)|^2 &= (1 + \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \\ |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \varphi\varphi)|^2 &= |\mathcal{M}(\varphi\varphi \rightarrow bb)|^2 = (1 - \bar{\zeta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2, \end{aligned} \quad (9.15)$$

donde $-1 < \zeta, \bar{\zeta} < 1$. Se permite una pequeña violación de la invariancia CP en las tasas de procesos de dispersión $2 \rightarrow 2$ entre b y φ que contengan las contribuciones a orden superior de tree-level, y se considera la generación de un número bariónico neto cuando un sistema inicialmente simétrico en b y \bar{b} se enfría, como en el universo temprano. Proponiendo

la evolución temporal de la densidad del número de partículas con la ecuación de transporte de Boltzmann para $n_B = n_b - n_{\bar{b}}$ y n_φ , donde,

$$Y_A \equiv \frac{n_A}{n_\gamma}, \quad (9.16)$$

resulta,

$$\frac{dY_\varphi}{dt} \simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ 2 \left[1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] [(Y_\varphi^{eq})^2 - (Y_\varphi)^2] - (\zeta - \bar{\zeta}) (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \quad (9.17a)$$

$$\frac{dY_B}{dt} \simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{(\zeta - \bar{\zeta})}{2} [(Y_\varphi)^2 - (Y_\varphi^{eq})^2] - \left[3 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \quad (9.17b)$$

donde $\langle v\sigma_0 \rangle$ denota el promedio de la sección transversal $v\sigma_0$ sobre la distribución de energía entrante. El primer término en la ecuación (9.17a) es simplemente $n_\gamma \langle v\sigma_{tot}(\varphi\varphi) \rangle [(Y_\varphi^{eq})^2 - Y_\varphi^2]$ y es conocido por estudios de densidades reliquias de partículas pesadas estables producidas en el universo temprano. El primer término en la ecuación (9.17b) es aproximadamente $-\langle v(\sigma(\varphi\varphi \rightarrow b\bar{b}) - \sigma(\varphi\varphi \rightarrow \bar{b}b)/\sigma_{tot}(\varphi\varphi)) \rangle dY_\varphi/dt$ y representa la pequeña disparidad entre la producción de b y \bar{b} en la aniquilación $\varphi\varphi$. El segundo término en la ecuación (9.17b) es proporcional a la sección transversal total para interacciones que violan el número bariónico y provoca que Y_B se relaje hacia cero cuando el sistema está en equilibrio térmico ($Y_\varphi = Y_\varphi^{eq}$). Además, se hizo el cálculo de la densidad del número de partículas en equilibrio de una especie en términos de la función modificada de Bessel de segundo tipo,

$$n_\varphi^{eq} = \frac{T^3}{2\pi^2} x_A^2 K_2(x_A). \quad (9.18)$$

Para el mecanismo de bariogénesis se tomó el mismo tipo de parametrización anterior siendo η el valor de la cantidad de violación CP presente en la evolución temporal de un sistema, ahora los bosones a tratar son X y el antibosón simétrico \bar{X} distribuido mediante la estadística de Maxwell-Boltzmann,

$$f_X(p_X) \sim \exp \left[-\frac{(E_X - \mu_X)}{T} \right], \quad f_{\bar{X}}(p_{\bar{X}}) \sim \exp \left[-\frac{(E_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}})}{T} \right], \quad (9.19a)$$

mostrando que las ecuaciones de Boltzmann para el bosón y antibosón mediadores que ocasionasen bariogénesis son descritas por,

$$\frac{dY_X}{dt} \simeq -\langle \Gamma_X \rangle \{ (Y_X - Y_X^{eq}) - \bar{\eta} Y_B Y_X^{eq} \}, \quad \frac{dY_{\bar{X}}}{dt} \simeq -\langle \Gamma_X \rangle \{ (Y_{\bar{X}} - Y_X^{eq}) - \eta Y_B Y_X^{eq} \}, \quad (9.20)$$

donde $\langle \Gamma_X \rangle$ denota la tasa total de decaimiento de X promediada sobre los factores de dilatación temporal para las partículas que decaen, para la evolución temporal de las densidades de la materia bariónica fue necesario tener en cuenta las amplitudes sin la contribución de medios físicos, dado que esta ya es tenida en cuenta, para ello se realizó la aproximación

denominada Narrow width o ancho estrecho, la cual permite obtener toda la aportación del estado de resonancia de una cross section cuando las temperaturas son comparables a la masa de un bosón generando una dispersión real y no virtual del canal s ,

$$|\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \eta)(1 + \bar{\eta}), \quad (9.21a)$$

$$|\mathcal{M}_{RIS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 = \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \bar{\eta})(1 + \eta), \quad (9.21b)$$

con esto, la ecuación de Boltzmann de la materia bariónica cerrando el sistema de tres ecuaciones diferenciales a resolver,

$$\begin{aligned} \frac{dY_+}{dt} &\simeq -\langle \Gamma_X \rangle \left\{ (Y_+ - Y_+^{eq}) + \left(\frac{\eta - \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\ \frac{dY_-}{dt} &\simeq -\langle \Gamma_X \rangle \left\{ Y_- - \left(\frac{\eta + \bar{\eta}}{2} \right) Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\ \frac{dY_B}{dt} &\simeq \langle \Gamma_X \rangle \{ (\eta - \bar{\eta})(Y_+ - Y_+^{eq}) + (\eta + \bar{\eta})Y_- \} \\ &\quad - 2Y_B \{ \langle \Gamma_X \rangle Y_+^{eq} + n_\gamma \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \}, \\ Y_\pm &= \frac{1}{2}(Y_X \pm Y_{\bar{X}}). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Objetivo general: Usar el modelo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y \otimes U_{B-L}^{\text{global}}$ de física más allá del modelo estándar para explicar la generación de número bariónico y número leptónico en el universo temprano. **Resultado esperado:** Un potencial escalar con una transición de fase de primer orden que satisfaga los criterios necesarios para que se pueda generar suficiente número bariónico o leptónico respecto al modelo usado.

Se propone el modelo introduciendo la densidad Lagrangiana de un bosón escalar de la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} m_X X^2 + g_X X b^\dagger b^\dagger + g_X X bb + g_{\bar{X}} X^\dagger bb + g_{\bar{X}} X^\dagger b^\dagger b^\dagger + \text{h.c.}, \quad (9.23)$$

reescribiendo en términos de las constantes de violación η y $\bar{\eta}$, en conjunto con la parametrización dispuesta en el mecanismo, la densidad Lagrangiana del modelo se define,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu X)^2 - \frac{1}{2} m_X X^2 + g_X \left(\frac{1 + \eta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X b^\dagger b^\dagger + g_X \left(\frac{1 - \eta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X bb \\ &\quad + g_{\bar{X}} \left(\frac{1 + \bar{\eta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X^\dagger bb + g_{\bar{X}} \left(\frac{1 - \bar{\eta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} X^\dagger b^\dagger b^\dagger + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

dado que para la resolución de las ecuaciones de Boltzmann es necesario definir la cross section sin la intervención de bosones reales físicos (off shell), se necesitó calcular la cross

section total, desarrollando el cuadrado de la amplitud tomando en cuenta los términos más contribuyentes en resonancia,

$$|\mathcal{M}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = |\mathcal{M}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 \simeq 4g_X^4 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{u^2}{(u - m_X^2)^2} \right], \quad (9.25)$$

luego, se reprodujo la cross section mostrada en la bibliografía para bosones escalares,

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\ &= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \end{aligned} \quad (9.26)$$

se realizó todo el tratamiento teórico de la cross section mediante metodologías de ancho estrecho (Narrow width) para suprimir la intervención de medios físicos,

$$\begin{aligned} v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\ &= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} - \frac{\pi m_X \Gamma_X \epsilon^2}{\alpha^2} \delta(s^2 - m_X^2) s \right]. \end{aligned} \quad (9.27)$$

realizar el promedio de la cross section sobre las distribuciones de energía entrantes fue la tarea más ardua de completa, por lo tanto se tomó la decisión de integrar numéricamente bajo el valor principal y usar la forma del promedio en términos de las funciones de Bessel modificadas de segundo tipo de primer y segundo orden, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\langle v[\sigma'(x)] \rangle m_X^2}{8\pi\alpha^2} &= \frac{x^2}{32} \int_0^n \frac{1}{y^3} \left[\frac{y^6 [y^2 - x^2]^2}{2[(y^2 - x^2)^2 + 10^{-5}x^4]^2} + y^2 + x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^4}{y^2 + x^2} - 2x^2 \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right] [y^3 \mathbf{K}_1[y] + 2y^2 \mathbf{K}_2[y]] dy, \end{aligned} \quad (9.28)$$

para poder realizar la integración numérica se hizo uso de CUBA, la cual es una librería la integración numérica multidimensional, esta proporciona nuevas implementaciones de cuatro algoritmos de integración multidimensional de propósito general: Vegas, Suave, Divonne y Cuhre. Los cuatro algoritmos son capaces de integrar funciones vectoriales y tienen interfaces en Fortran, C/C++ y Mathematica, esta última fue la usada, en la solución del mecanismo las ecuaciones de Boltzmann se escribieron en términos de la escala generada por la masa de Planck y la masa del bosón X ,

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{m_X}{T}, \quad x_P = \frac{m_X}{m_P}, \\ \frac{dY}{dx} &= \frac{x}{m_X x_P} \frac{dY}{dt}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

en la solución de manera analítica se determinaron dos regiones, a altas temperaturas cuando $x \ll 1$, se obtuvo:

- La densidad de bosones X aumentaba de manera conforme el universo se expandía.
- El parámetro de asimetría bariónica crece hacía un máximo, ya que se encuentra a punto de alcanzar un estado de resonancia.

A bajas temperaturas cuando $x \gg 1$, fue necesario usar la forma de Fermi de la cross section dado el límite de energías y promediarla,

$$\langle \sigma(s) \rangle \simeq 288\pi \frac{\alpha^2 T^2}{m_X^4} = 288\pi \frac{\alpha^2}{x^2 m_X^2}, \quad (9.30)$$

dado que se vieron minorizadas todas las desintegraciones el comportamiento del parámetro de asimetría bariónica es exponencial, disminuyendo hasta eventualmente tender al valor actual.

Para la solución de manera numérica se dieron los siguientes resultados:

- Se estudia la evolución de las densidades de $X(\bar{X})$ y bariones conforme el universo se expande. Se observa que los cambios en Y_+ siguen de cerca a los de Y_+^{eq} , y que la variable Y_- disminuye conforme X y \bar{X} alcanzan el equilibrio químico.
- Se presentan distintas mediciones recientes que comparan la fiabilidad estadística de un modelo que predice un valor de 6.00776×10^{-10} , destacando la consistencia del modelo con las observaciones. La Tabla 8.1 resume las restricciones barión-fotón bajo diferentes condiciones.
- Se prueba la funcionalidad del mecanismo de bariogénesis, obteniendo un parámetro de asimetría bariónica que coincide con los valores medidos experimentalmente, confirmando la estabilidad del modelo propuesto.
- La dependencia del parámetro de violación CP indica que, para órdenes grandes, la asimetría bariónica debería ser mayor. En caso contrario, las diferencias en el número de bariones y antibariones se vuelven mínimas, lo cual contradice las observaciones actuales.
- Se confirma que, a nivel teórico, la constante de estructura fina debe mantenerse en $\alpha \leq 10^{-2}$. Valores superiores requerirían ajustes en otros grados de libertad del modelo para ser consistentes con los datos experimentales.
- El aumento en el número de grados de libertad asociados a partículas sin masa incrementa la asimetría bariónica, debido a su relación con la masa efectiva de Planck. Se destaca la relevancia de las partículas del modelo estándar en este contexto.
- El bosón involucrado en la bariogénesis debe tener una masa comparable a la escala de Planck, ya que una masa ligera no rompería la simetría CP de manera efectiva. Las energías extremas del universo temprano apoyan la necesidad de este umbral natural.

Capítulo 10

Conclusiones

El modelo propuesto muestra que la violación del número bariónico se produce a un orden mayor en la teoría de perturbaciones (loop), dado que a tree-level no se genera asimetría neta. Esto se evidencia en el cálculo de la asimetría bariónica, la cual depende tanto de las desintegraciones de los bosones mediadores como de las partículas intercambiadas en los loops. La necesidad de introducir bosones masivos en este proceso es clave, ya que su interacción es esencial para obtener una parte imaginaria en los factores cinemáticos de dispersión, lo que, en última instancia, permite la violación de CP.

El estudio del equilibrio térmico y sus desviaciones es clave para comprender la evolución del universo temprano. En particular, los procesos fuera del equilibrio térmico, como la bariogénesis, se explican mediante las ecuaciones de transporte de Boltzmann, que describen la interacción y evolución de las partículas en situaciones donde la simetría CP se viola. El uso de la aproximación de ancho estrecho permite capturar la contribución de las resonancias en la dinámica de las partículas a temperaturas comparables a la masa de los bosones mediadores, proporcionando una visión clara de cómo la materia bariónica evolucionó desde el universo primitivo hasta su estado actual.

La generación del número leptónico a través de la conservación de $B - L$ es esencial para explicar la asimetría entre materia y antimateria en el universo temprano. Dado que la violación del número bariónico ocurre a órdenes superiores en la teoría de perturbaciones, la conservación de $B - L$ garantiza que cualquier violación en el número bariónico esté acompañada por una violación leptónica correspondiente, vinculando las asimetrías en ambos sectores. Este mecanismo, impulsado por desintegraciones de bosones masivos en procesos fuera de equilibrio térmico y violaciones de CP, es clave para generar la asimetría bariónica y, por lo tanto, leptónica.

Las resonancias en las cross sections ocurren cuando la energía del sistema de colisión coincide con la masa de una partícula intermediaria, como un bosón, lo que provoca un pico pronunciado (tendiendo a infinito) en el valor de la sección transversal. Este fenómeno es fundamental en la física de partículas, ya que representa un aumento abrupto en la probabili-

dad de interacción cuando se alcanza la energía de resonancia. Para calcular estas resonancias, se utilizan técnicas numéricas que permiten resolver integrales oscilantes que convergen muy lentamente, como las involucradas en los promedios de cross section. En estos casos, el integrando suele ser oscilante, debido a la combinación de funciones de Bessel y factores de resonancia, lo que dificulta una solución analítica. Por ello, se recurre a librerías especializadas de integración numérica, como CUBA, que emplea algoritmos montecarlo avanzados en rutinas como Vegas y Suave. Estas rutinas ayudan a manejar la inestabilidad numérica y la convergencia lenta típica de este tipo de problemas, asegurando una evaluación precisa de la cross section, particularmente en las cercanías de la energía de resonancia.

La asimetría bariónica actual está directamente influenciada por el parámetro de violación CP, cuyo aumento significativo genera una mayor diferencia entre bariones y antibariones. Sin embargo, es fundamental que la constante de estructura fina se mantenga en un rango bajo, específicamente $\alpha \leq 10^{-2}$, para preservar la consistencia del modelo. Además, los grados de libertad asociados a partículas relativistas juegan un papel crucial en el incremento de la asimetría bariónica, ya que están vinculados a la masa de Planck efectiva. Finalmente, se concluye que el bosón involucrado en la bariogénesis debe ser extremadamente masivo, comparable a la escala de Planck, para garantizar una ruptura suficiente de la simetría CP en los primeros momentos del universo.

Apéndice A

Formalismo en simetrías

A.1. Asimetría materia-antimateria

A.1.1. Ecuación 1.4

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 &= |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2| - |\tilde{\mathcal{M}}_1 + \tilde{\mathcal{M}}_2|, \\ &= |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2 - |\tilde{\mathcal{M}}_1|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}_2|^2 - \tilde{\mathcal{M}}_1\tilde{\mathcal{M}}_2^* - \tilde{\mathcal{M}}_1^*\tilde{\mathcal{M}}_2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

dado que $|\mathcal{M}|^2 = |\tilde{\mathcal{M}}|^2$,

$$|\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2 - \tilde{\mathcal{M}}_1\tilde{\mathcal{M}}_2^* - \tilde{\mathcal{M}}_1^*\tilde{\mathcal{M}}_2, \quad (\text{A.2})$$

por definición,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 &= |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|e^{i(\phi_1-\phi_2)}e^{i(\theta_1-\theta_2)} + |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|e^{i(-\phi_1+\phi_2)}e^{i(-\theta_1+\theta_2)} \\ &\quad - |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|e^{i(\phi_1-\phi_2)}e^{i(-\theta_1+\theta_2)} - |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|e^{i(-\phi_1+\phi_2)}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

luego,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 &= |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|[e^{i(\phi_1-\phi_2)}e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{i(-\phi_1+\phi_2)}e^{i(-\theta_1+\theta_2)} \\ &\quad - e^{i(\phi_1-\phi_2)}e^{i(-\theta_1+\theta_2)} - e^{i(-\phi_1+\phi_2)}e^{i(\theta_1-\theta_2)}], \\ &= |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|[e^{i(\theta_1-\theta_2)}(e^{i(\phi_1-\phi_2)} - e^{i(-\phi_1+\phi_2)}) \\ &\quad - e^{i(-\theta_1+\theta_2)}(e^{i(\phi_1-\phi_2)} - e^{i(-\phi_1+\phi_2)})], \\ &= |\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|[e^{i(\theta_1-\theta_2)}(e^{i(\phi_1-\phi_2)} - e^{-i(\phi_1-\phi_2)}) \\ &\quad - e^{-i(\theta_1-\theta_2)}(e^{i(\phi_1-\phi_2)} - e^{-i(\phi_1-\phi_2)})], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

bajo las expresiones exponenciales de las funciones trigonométricas se obtiene que,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 - |\tilde{\mathcal{M}}|^2 &= |\mathcal{M}_1| |\mathcal{M}_2| (e^{i(\theta_1 - \theta_2)} - e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}) (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}) \\
&= 2i |\mathcal{M}_1| |\mathcal{M}_2| \frac{e^{i(\theta_1 - \theta_2)} - e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}}{2i} (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}) \\
&= 2i 2i |\mathcal{M}_1| |\mathcal{M}_2| \sin(\theta_1 - \theta_2) \frac{e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}}{2i} \\
&= -4 |\mathcal{M}_1| |\mathcal{M}_2| \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\phi_1 - \phi_2).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2. Invarianza y violación de simetrías discretas

A.2.1. Ecuación 2.56

Por unitariedad,

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1, \tag{A.6}$$

de manera indicial,

$$\sum_n S_{in} S_{nj}^\dagger = 1_{ij}, \tag{A.7}$$

la matriz S por componentes se define como:

$$S_{fi} = 1_{fi} + iT_{fi}, \tag{A.8}$$

luego,

$$\sum_n (1_{in} + iT_{in})(1_{nj} - iT_{nj}^\dagger) = 1_{ij}, \tag{A.9}$$

operando,

$$\sum_n 1_{in} 1_{nj} - i \sum_n 1_{in} T_{nj}^\dagger + i \sum_n T_{in} 1_{nj} + \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger = 1_{ij}, \tag{A.10}$$

por propiedades de la matriz identidad,

$$1_{ij} - iT_{ij}^\dagger + iT_{ij} + \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger = 1_{ij}, \tag{A.11}$$

cancelando,

$$-iT_{ij}^\dagger + iT_{ij} + \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger = 0_{ij}, \tag{A.12}$$

despejando,

$$-iT_{ij}^\dagger + iT_{ij} = - \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger, \tag{A.13}$$

finalmente, dado que la conjugación hermitiana se interpreta como la transpuesta conjugada,

$$T_{ij} - T_{ji}^* = i \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger. \tag{A.14}$$

A.2.2. Ecuación 2.57

Gracias a que,

$$T_{ij} - T_{ji}^* = i \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger. \quad (\text{A.15})$$

se puede escribir T_{ij} como,

$$T_{ij} = i \sum_n T_{in} T_{nj}^\dagger + T_{ji}^*, \quad (\text{A.16})$$

la siguiente expresión es:

$$|T_{ij}|^2 - |T_{ji}|^2 = \left| i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} + T_{ji}^* \right|^2 - |T_{ji}|^2, \quad (\text{A.17})$$

además, como la norma al cuadrado de un número imaginario n es $|n|^2 = n n^*$,

$$\begin{aligned} |T_{ij}|^2 - |T_{ji}|^2 &= \left(i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} + T_{ji}^* \right) \left(-i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij}^* + T_{ji} \right) - |T_{ji}|^2 \\ &= \left| \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} \right|^2 + \left(i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} - i \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij}^* T_{ji}^* \right) + |T_{ji}|^2 - |T_{ji}|^2 \\ &= \left| \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} \right|^2 + i \left\{ \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} - \left[\left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} \right]^* \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

la diferencia de un complejo y su conjugado es dos veces i por la parte imaginaria del complejo,

$$n - n^* = (A + iB) - (A - iB) = 2i \operatorname{Im}[n], \quad (\text{A.19})$$

finalmente,

$$\begin{aligned} |T_{ij}|^2 - |T_{ji}|^2 &= \left| \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} \right|^2 + 2ii \operatorname{Im} \left[\left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} \right] \\ &= \left| \left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} \right|^2 - 2 \operatorname{Im} \left[\left(\sum_n T T^\dagger \right)_{ij} T_{ji} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Apéndice B

Corrientes de Noether

B.1. Ecuación 2.4

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma_\mu D^\mu \psi_L, \quad (\text{B.1})$$

bajo una transformación quirral local,

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} \gamma_\mu D^\mu [e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x)], \quad (\text{B.2})$$

operando,

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} \gamma_\mu e^{i\alpha\gamma_5} D^\mu \psi + i\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} \gamma_\mu \psi [i\gamma_5 e^{i\alpha\gamma_5} \partial^\mu \alpha(x)], \quad (\text{B.3})$$

dado que $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} e^{-i\alpha\gamma_5} \gamma_\mu D^\mu \psi - \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} e^{-i\alpha\gamma_5} \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \partial^\mu \alpha(x), \\ &= i\bar{\psi} \gamma_\mu D^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \partial^\mu \alpha(x), \\ &= \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

finalmente,

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \partial^\mu \alpha(x). \quad (\text{B.5})$$

B.2. Ecuación 2.5

$$\delta S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \int d^4x \delta L = - \int d^4x j_\mu^5 \partial^\mu \alpha(x), \quad (\text{B.6})$$

completando la derivada,

$$\begin{aligned} \delta S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] &= - \int d^4x [\partial^\mu (j_\mu^5 \alpha(x)) - \alpha(x) \partial^\mu j_\mu^5] \\ &= - \int d^4x \partial^\mu (j_\mu^5 \alpha(x)) + \int d^4x \alpha(x) \partial^\mu j_\mu^5 \\ &= -|j_\mu^5 \alpha(x)|_{\text{frontera}} + \int d^4x \alpha(x) \partial^\mu j_\mu^5, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

finalmente,

$$\delta S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \int d^4x \alpha(x) \partial^\mu j_\mu^5(x), \quad (\text{B.8})$$

B.3. Ecuación 2.21

Sea C una matriz cuadrada no singular y una matriz B de la forma $B = \ln C$, tomando el determinante de la exponencial de B y gracias al teorema,

$$\det e^B = e^{\text{tr}B}, \quad (\text{B.9})$$

reemplazando,

$$\det C = e^{\text{tr} \ln C}, \quad (\text{B.10})$$

finalmente tomando el logaritmo con base e ,

$$\ln \det C = \text{tr} \ln C, \quad (\text{B.11})$$

B.4. Ecuación 2.25

Reescribiendo en términos de conmutadores,

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu D_\mu D_\nu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu D_\mu D_\nu \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

como $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$, gracias a la rotación de Wick,

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= \delta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu \\ &= \delta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\nu, \gamma^\mu] D_\mu D_\nu \\ &= D^2 + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] = D^2 + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \\ &= D^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.5. Ecuación 2.26

$$\begin{aligned}
e^{-ipx} D^2 e^{ipx} f(x) &= e^{-ipx} D_\mu D^\mu e^{ipx} f(x) = e^{-ipx} D_\mu (\partial^\mu - igA^\mu) e^{ipx} f(x) \\
&= e^{-ipx} D_\mu [ip^\mu e^{ipx} f(x) + e^{ipx} \partial^\mu f(x) - igA^\mu e^{ipx} f(x)] \\
&= e^{-ipx} (\partial_\mu - igA_\mu) [ip^\mu e^{ipx} f(x) + e^{ipx} \partial^\mu f(x) - igA^\mu e^{ipx} f(x)] \\
&= e^{-ipx} (\partial_\mu - igA_\mu) e^{ipx} [D^\mu + ip^\mu] f(x)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

tomando la derivada parcial,

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu [ip^\mu e^{ipx} f(x) + e^{ipx} \partial^\mu f(x) - igA^\mu e^{ipx} f(x)] \\
&= ip^\mu ip_\mu e^{ipx} f(x) + ip^\mu e^{ipx} \partial_\mu f(x) + ip_\mu e^{ipx} \partial^\mu f(x) + e^{ipx} \partial_\mu \partial^\mu f(x) - ig \partial_\mu A^\mu e^{ipx} f(x) \\
&\quad - igA^\mu ip_\mu e^{ipx} f(x) - igA^\mu e^{ipx} \partial_\mu f(x) \\
&= e^{ipx} (ip^\mu ip_\mu + ip^\mu \partial_\mu + ip_\mu \partial^\mu + \partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu ip_\mu - igA^\mu \partial_\mu) f(x) \\
&= e^{ipx} [-p^2 + ip^\mu (2\partial_\mu - igA_\mu) + \partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu \partial_\mu] f(x),
\end{aligned} \tag{B.15}$$

luego, para el segundo término,

$$\begin{aligned}
&-igA_\mu [ip^\mu e^{ipx} f(x) + e^{ipx} \partial^\mu f(x) - igA^\mu e^{ipx} f(x)] \\
&= e^{ipx} (-igA_\mu ip^\mu - igA_\mu \partial^\mu + igA_\mu igA^\mu) f(x) \\
&= e^{ipx} (-igA_\mu ip^\mu - igA_\mu \partial^\mu - g^2 A_\mu A^\mu) f(x),
\end{aligned} \tag{B.16}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
&(\partial_\mu - igA_\mu) [ip^\mu e^{ipx} f(x) + e^{ipx} \partial^\mu f(x) - igA^\mu e^{ipx} f(x)] \\
&= e^{ipx} [-p^2 + ip^\mu (2\partial_\mu - igA_\mu) + \partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu \partial_\mu - igA_\mu ip^\mu - igA_\mu \partial^\mu \\
&\quad - g^2 A_\mu A^\mu] f(x) \\
&= e^{ipx} [-p^2 + ip^\mu (2\partial_\mu - 2igA_\mu) + \partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu \partial_\mu - igA_\mu \partial^\mu \\
&\quad - g^2 A_\mu A^\mu] f(x) \\
&= e^{ipx} [-p^2 + 2ip^\mu D_\mu + \partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu \partial_\mu - igA_\mu \partial^\mu - g^2 A_\mu A^\mu] f(x),
\end{aligned} \tag{B.17}$$

pero,

$$\begin{aligned}
D^2 f(x) &= D_\mu D^\mu f(x) = (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial^\mu - igA^\mu) f(x) \\
&= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial^\mu f(x) - igA^\mu f(x)) \\
&= \partial_\mu \partial^\mu f(x) - ig \partial_\mu A^\mu f(x) - igA^\mu \partial_\mu f(x) - igA_\mu \partial^\mu f(x) + igA_\mu igA^\mu f(x) \\
&= (\partial_\mu \partial^\mu - ig \partial_\mu A^\mu - igA^\mu \partial_\mu - igA_\mu \partial^\mu - g^2 A_\mu A^\mu) f(x),
\end{aligned} \tag{B.18}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
e^{-ipx} D^2 e^{ipx} f(x) &= e^{-ipx} e^{ipx} [-p^2 + 2ip^\mu D_\mu + D^2] f(x) \\
&= [D_\mu + ip_\mu] [D^\mu + ip^\mu] f(x) \\
&= [-p^2 + 2ip^\mu D_\mu + D^2] f(x),
\end{aligned} \tag{B.19}$$

B.6. Ecuación 2.27

Calculando explícitamente el conmutador,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] f(x) &= [\partial_\mu - iA_\mu, \partial_\nu - iA_\nu] f(x) \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu] f(x) - i[\partial_\mu, A_\nu] f(x) - i[A_\mu, \partial_\nu] f(x) - [A_\mu, A_\nu] f(x), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

dato que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = [A_\mu, A_\nu] = 0$:

$$[D_\mu, D_\nu] f(x) = -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) f(x).$$

Evalutando el efecto de e^{ipx} ,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] e^{ipx} f(x) &= -i[\partial_\mu, A_\nu] e^{ipx} f(x) - i[A_\mu, \partial_\nu] e^{ipx} f(x) \\ &= -i[\partial_\mu (A_\nu e^{ipx} f(x)) - A_\nu \partial_\mu (e^{ipx} f(x)) \\ &\quad - \partial_\nu (A_\mu e^{ipx} f(x)) + A_\mu \partial_\nu (e^{ipx} f(x))] \\ &= -ie^{ipx} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) f(x), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

por lo tanto,

$$e^{-ipx} [D_\mu, D_\nu] e^{ipx} = -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) f(x) = [D_\mu, D_\nu] f(x). \quad (\text{B.22})$$

Apéndice C

Dispersión en teoría cuántica de campos

C.1. Regla de oro de Fermi

C.1.1. Ecuación 2.82

Sean los cuádrimomentos p_i^μ y las variables de Mandelstam s, t y u ,

$$\begin{aligned} s + t + u &= \frac{1}{c^2} [(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [p_1^2 + 2p_{1\mu}p_2^\mu + p_2^2 + p_1^2 - 2p_{1\mu}p_3^\mu + p_3^2 + p_1^2 - 2p_{1\mu}p_4^\mu + p_4^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + 2p_{1\mu}p_1^\mu + 2p_{1\mu}p_2^\mu - 2p_{1\mu}p_3^\mu - 2p_{1\mu}p_4^\mu] \\ &= \frac{1}{c^2} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + 2p_{1\mu}(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu)] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

por conservación de la energía $p_1^0 + p_2^0 = p_3^0 + p_4^0$ y por conservación del momento lineal $p_1^k + p_2^k = p_3^k + p_4^k$,

$$s + t + u = \frac{1}{c^2} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2], \quad (\text{C.2})$$

finalmente, como $p_{i\mu}p_i^\mu = m_i^2c^2$,

$$\begin{aligned} s + t + u &= \frac{1}{c^2} [m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + m_3^2c^2 + m_4^2c^2], \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \\ &= \sum_i m_i^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

C.1.2. Ecuación 2.101

$$u \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2c^2}, \quad (\text{C.4})$$

dado que la delta de kronecker hizo $u = m_1 c$,

$$m_1 c = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2}, \quad (\text{C.5})$$

elevando al cuadrado,

$$m_1^2 c^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2 + 2\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2)(|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2)}, \quad (\text{C.6})$$

despejando la raíz,

$$\frac{c^2}{2} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) - |\mathbf{p}|^2 = \sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^2)(|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2)}, \quad (\text{C.7a})$$

$$\frac{c^2}{2} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) - |\mathbf{p}|^2 = \sqrt{|\mathbf{p}|^4 + |\mathbf{p}|^2 m_2^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 m_3^2 c^2 + m_2^2 m_3^2 c^4}, \quad (\text{C.7b})$$

elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} \frac{c^4}{4} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 - |\mathbf{p}|^2 c^2 (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) + |\mathbf{p}|^4 &= |\mathbf{p}|^4 + |\mathbf{p}|^2 m_2^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 m_3^2 c^2 + m_2^2 m_3^2 c^4, \\ \frac{c^4}{4} [(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2] &= |\mathbf{p}|^2 c^2 (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_2^2 + m_3^2), \\ \frac{c^4}{4} [(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2] &= |\mathbf{p}|^2 c^2 m_1^2, \end{aligned} \quad (\text{C.8a})$$

resolviendo para $|\mathbf{p}|$,

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{c^2}{m_1^2 4} [(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2] = \frac{c^2}{m_1^2 4} [(m_1^2 - (m_2^2 + m_3^2))^2 - 4m_2^2 m_3^2], \quad (\text{C.9})$$

operando los binomios al cuadrado,

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}|^2 &= \frac{c^2}{m_1^2 4} [m_1^4 - 2m_1^2(m_2^2 + m_3^2) + (m_2^2 + m_3^2)^2 - 4m_2^2 m_3^2] \\ &= \frac{c^2}{m_1^2 4} [m_1^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 + m_2^4 + m_3^4 + 2m_2^2 m_3^2 - 4m_2^2 m_3^2], \quad (\text{C.10}) \\ &= \frac{c^2}{m_1^2 4} [m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2], \end{aligned}$$

finalmente, tomando raíz cuadrada,

$$|\mathbf{p}| = \frac{c}{2m_1} [m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.11})$$

C.1.3. Ecuación 2.133

$$u \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}, \quad (\text{C.12})$$

dado que la delta de kronecker hizo $u = \frac{E_1 + E_2}{c^2} c$, definiendo $\alpha \equiv \frac{E_1 + E_2}{c^2}$,

$$\alpha c = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2}, \quad (\text{C.13})$$

elevando al cuadrado,

$$\alpha^2 c^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2 + 2\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2)(|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2)}, \quad (\text{C.14})$$

despejando la raíz,

$$\frac{c^2}{2} (\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2) - |\mathbf{p}|^2 = \sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + m_3^2 c^2)(|\mathbf{p}|^2 + m_4^2 c^2)}, \quad (\text{C.15a})$$

$$\frac{c^2}{2} (\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2) - |\mathbf{p}|^2 = \sqrt{|\mathbf{p}|^4 + |\mathbf{p}|^2 m_3^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 m_4^2 c^2 + m_3^2 m_4^2 c^4}, \quad (\text{C.15b})$$

elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} \frac{c^4}{4} (\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2)^2 - |\mathbf{p}|^2 c^2 (\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2) + |\mathbf{p}|^4 &= |\mathbf{p}|^4 + |\mathbf{p}|^2 m_3^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 m_4^2 c^2 + m_3^2 m_4^2 c^4, \\ \frac{c^4}{4} [(\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2)^2 - 4m_3^2 m_4^2] &= |\mathbf{p}|^2 c^2 (\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2 + m_3^2 + m_4^2), \\ \frac{c^4}{4} [(\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2)^2 - 4m_3^2 m_4^2] &= |\mathbf{p}|^2 c^2 \alpha^2, \end{aligned} \quad (\text{C.16a})$$

resolviendo para $|\mathbf{p}|$,

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 4} [(\alpha^2 - m_3^2 - m_4^2)^2 - 4m_3^2 m_4^2], \quad (\text{C.17a})$$

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 4} [\alpha^4 - 2\alpha^2(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 + m_4^2)^2 - 4m_3^2 m_4^2],$$

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 4} [\alpha^4 - 2\alpha^2(m_3^2 + m_4^2) + m_3^4 + m_4^4 + 2m_3^2 m_4^2 - 4m_3^2 m_4^2],$$

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 4} [\alpha^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2\alpha^2(m_3^2 + m_4^2) - 2m_3^2 m_4^2], \quad (\text{C.17b})$$

finalmente, tomando raíz cuadrada,

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| &= \frac{c}{2\alpha} [\alpha^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2\alpha^2(m_3^2 + m_4^2) - 2m_3^2 m_4^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{c^3}{2(E_1 + E_2)} \left[\left(\frac{E_1 + E_2}{c^2} \right)^4 + m_3^4 + m_4^4 - 2 \left(\frac{E_1 + E_2}{c^2} \right)^2 (m_3^2 + m_4^2) - 2m_3^2 m_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

C.1.4. Ecuación 2.135

Realizando la suma de los cuádrimomentos de las partículas 1 y 2,

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2| \right) = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, |\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_1| \right) \\ &= \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, 0 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

luego, la suma al cuadrado es:

$$(p_1 + p_2)^2 = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, 0 \right) \cdot \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, 0 \right) = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2}. \quad (\text{C.20})$$

C.2. Violación CP

C.2.1. Ecuación 3.13

$$\begin{aligned} \Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) &= I_X^{12} |g_1|^2 + I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^* + (I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* \\ &\quad - I_X^{12} |g_1^*|^2 - I_{XY}^{12} g_1^* g_2 g_3^* g_4 - (I_{XY}^{12} g_1^* g_2 g_3^* g_4)^* , \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

dado que $|g_1|^2 = |g_1^*|^2$ e $I_{XY}^{12} = I_{XY}^{12}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_X^{\bar{i}_1 i_2} - \Gamma_{\bar{X}}^{i_1 \bar{i}_2} &= I_{XY}^{12} (g_1 g_2^* g_3 g_4^*) + (I_{XY}^{12})^* (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* - I_{XY}^{12} (g_1^* g_2 g_3^* g_4) - (I_{XY}^{12})^* (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^* \\ &= I_{XY}^{12} (g_1 g_2^* g_3 g_4^*) + (I_{XY}^{12})^* (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* - I_{XY}^{12} (g_1^* g_2 g_3^* g_4) - (I_{XY}^{12})^* (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^* \\ &= I_{XY}^{12} [(g_1 g_2^* g_3 g_4^*) - (g_1^* g_2 g_3^* g_4)] - (I_{XY}^{12})^* [(g_1 g_2^* g_3 g_4^*) - (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^*], \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

la diferencia de un complejo y su conjugado es dos veces i por la parte imaginaria del complejo,

$$n - n^* = (A + iB) - (A - iB) = 2iB = 2i \operatorname{Im}[n] \quad (\text{C.23})$$

donde $\Im[n]$ es la parte imaginaria de n , luego,

$$\begin{aligned} \Gamma_X^{\bar{i}_1 i_2} - \Gamma_{\bar{X}}^{i_1 \bar{i}_2} &= 2i I_{XY}^{12} \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] - 2i (I_{XY}^{12})^* \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] \\ &= 2i \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] [I_{XY}^{12} - (I_{XY}^{12})^*] \\ &= 2i \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] 2i \operatorname{Im}[I_{XY}^{12}] \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

finalmente,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) = -4 \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] \operatorname{Im}[I_{XY}^{12}] \quad (\text{C.25})$$

C.2.2. Ecuación 3.14

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4) = I_X^{34} |g_2|^2 + I_{XY}^{34} g_1^* g_2 g_3^* g_4 + (I_{XY}^{34} g_1^* g_2 g_3^* g_4)^* - I_{\bar{X}}^{34} |g_2^*|^2 + I_{\bar{X}Y}^{34} g_1 g_2^* g_3 g_4^* + (I_{\bar{X}Y}^{34} g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^*, \quad (\text{C.26})$$

dado que $|g_2|^2 = |g_2^*|^2$ e $I_{XY}^{34} = I_{\bar{X}Y}^{34}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_X^{\bar{i}_3 i_4} - \Gamma_{\bar{X}}^{i_3 \bar{i}_4} &= I_{XY}^{34} (g_1^* g_2 g_3^* g_4) + (I_{XY}^{34})^* (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^* - I_{XY}^{34} (g_1 g_2^* g_3 g_4^*) - (I_{XY}^{34})^* (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* \\ &= - [I_{XY}^{34} (g_1 g_2^* g_3 g_4^*) + (I_{XY}^{34})^* (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* - I_{XY}^{34} (g_1^* g_2 g_3^* g_4) - (I_{XY}^{34})^* (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^*] \\ &= - [I_{XY}^{34} (g_1 g_2^* g_3 g_4^*) + (I_{XY}^{34})^* (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^* - I_{XY}^{34} (g_1^* g_2 g_3^* g_4) - (I_{XY}^{34})^* (g_1^* g_2 g_3^* g_4)^*] \\ &= - \{ I_{XY}^{34} [(g_1 g_2^* g_3 g_4^*) - (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^*] - (I_{XY}^{34})^* [(g_1 g_2^* g_3 g_4^*) - (g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^*] \}, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

la diferencia de un complejo y su conjugado es,

$$n - n^* = (A + iB) - (A - iB) = 2iB = 2i \operatorname{Im}[n] \quad (\text{C.28})$$

luego,

$$\begin{aligned} \Gamma_X^{\bar{i}_1 i_2} - \Gamma_{\bar{X}}^{i_1 \bar{i}_2} &= - \{ 2i I_{XY}^{34} \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] - 2i (I_{XY}^{34})^* \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] \} \\ &= - 2i \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] [I_{XY}^{34} - (I_{XY}^{34})^*] \\ &= - 2i \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] 2i \operatorname{Im}[I_{XY}^{34}] \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

finalmente,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) = 4 \operatorname{Im}[g_1 g_2^* g_3 g_4^*] \operatorname{Im}[I_{XY}^{34}] \quad (\text{C.30})$$

C.3. Cross section total

C.3.1. Ecuación 7.15

Desarrollando la integral,

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \frac{g_X^4}{4\pi s^2} \int_{-s}^0 \left[\frac{s^2}{(s - m_X^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_X^2)^2} + \frac{(-s - t)^2}{[-s - t - m_X^2]^2} \right] dt \\ &= \frac{g_X^4}{4\pi s^2} \left[\frac{s^3}{(s - m_X^2)^2} + 2s + \frac{2m_X^2 s}{s + m_X^2} - 4m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right] \\ &= \frac{g_X^4}{2\pi s^2} \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + \frac{m_X^2 s}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

la intención es no tener términos de m_X y s en los numeradores, es por ello que se suma y se resta m_X^4 en el tercer término, factorizando y cancelando con el denominador,

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \frac{g_X^4}{2\pi s^2} \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + \frac{m_X^2 s + m_X^4 - m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right] \\ &= \frac{g_X^4}{2\pi s^2} \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + \frac{m_X^2(s + m_X^2)}{s + m_X^2} - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

dado que la constante de estructura fina se escribe como $\alpha = \frac{g_X^2}{4\pi}$,

$$\begin{aligned} v\sigma(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \frac{8\pi}{s^2} \frac{g_X^4}{16\pi^2} \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right] \\ &= \frac{8\pi}{s^2} \alpha^2 \left[\frac{s^3}{2(s - m_X^2)^2} + s + m_X^2 - \frac{m_X^4}{s + m_X^2} - 2m_X^2 \ln \frac{s + m_X^2}{m_X^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

C.4. Cross section - medios físicos

C.4.1. Ecuación 7.16

Sea el formalismo desarrollado en los apéndices D.5 y D.6, la contribución a la amplitud de dispersión por bosones reales se puede determinar gracias a la aproximación de ancho estrecho (Narrow width) en el propagador, siendo estos los términos de resonancia cuando el canal s se encuentra en la capa de masa (on shell),

$$\left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\epsilon} \right|^2 \simeq \frac{1}{\Gamma_X m_X} \pi \delta(q^2 - m_X^2), \quad (\text{C.34})$$

determinando que la estructura de la amplitud es de la forma,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) \{ |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 \\ &\quad \times |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{\bar{b}_1} + p_{\bar{b}_2})^2 - m_X^2) \{ |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2 \\ &\quad \times |\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \bar{X})|^2 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \}. \end{aligned}$$

luego, gracias a la parametrización 6.2,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 &= |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow \bar{X})|^2 = (1 + \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \\
|\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2 = (1 - \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \\
|\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 = (1 + \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \\
|\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 &= |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2 = (1 - \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2
\end{aligned} \tag{C.35}$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) \left\{ (1 + \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \right. \\
&\quad \times (1 - \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 + (1 - \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 (1 + \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \Big\} \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{4m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [(1 + \bar{\eta})(1 - \eta) + (1 - \eta)(1 + \bar{\eta})] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 + \bar{\eta})(1 - \eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{RIS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{\bar{b}_1} + p_{\bar{b}_2})^2 - m_X^2) \left\{ (1 - \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \right. \\
&\quad \times (1 + \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 + (1 + \eta) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 (1 - \bar{\eta}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_0|^2 \Big\} \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{4m_X \Gamma_X} \delta((p_{\bar{b}_1} + p_{\bar{b}_2})^2 - m_X^2) [(1 - \bar{\eta})(1 + \eta) + (1 + \eta)(1 - \bar{\eta})] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{\bar{b}_1} + p_{\bar{b}_2})^2 - m_X^2) (1 - \bar{\eta})(1 + \eta),
\end{aligned}$$

reemplazando, tomando $p_{b_i} = p_{\bar{b}_i}$ en las deltas de Dirac,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2 \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \eta)(1 + \bar{\eta}) \\
&\quad + \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) (1 - \bar{\eta})(1 + \eta) \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [(1 - \eta)(1 + \bar{\eta}) + (1 - \bar{\eta})(1 + \eta)] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [1 - \eta + \bar{\eta} - \eta\bar{\eta} + 1 - \bar{\eta} + \eta - \bar{\eta}\eta] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{2m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [2 - 2\eta\bar{\eta}] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) [1 - \eta\bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{C.36}$$

C.4.2. Ecuación 7.19

Reemplazando el valor calculado de las amplitudes en medios físicos y operando,

$$\begin{aligned}
v\sigma_{IRS}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma_{IRS}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\
&= \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} [|\mathcal{M}_{IRS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}_{IRS}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \rightarrow bb)|^2] \\
&= \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \left[\frac{\pi |\mathcal{M}_0|^4 \epsilon^2}{4m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) \right] \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^2 \epsilon^2 \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)}{2E_1 2E_2 2\Gamma_X} \frac{1}{2m_x} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2,
\end{aligned} \tag{C.37}$$

por conservación del momento y energía, dado que los cuadrimomentos se encuentran sobre la capa de masa se puede tener en cuenta que $p_1 + p_2 = p_X$,

$$\begin{aligned}
v\sigma_{IRS}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma_{IRS}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^2 \epsilon^2 \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)}{2E_1 2E_2 2\Gamma_X} \frac{1}{2m_x} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_X - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2,
\end{aligned} \tag{C.38}$$

obteniendo la estructura del ancho de decaimiento total del bosón X ,

$$\begin{aligned}
v\sigma_{IRS}(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma_{IRS}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) &= \\
&= \frac{\pi |\mathcal{M}_0|^2 \epsilon^2 \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)}{2E_1 2E_2 2\Gamma_X} \Gamma_X = \frac{\pi \epsilon^2 \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)}{2E_1 2E_2} |\mathcal{M}_0|^2 \\
&= \frac{\pi \epsilon^2 \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)}{2E_1 2E_2} 16\pi m_X \Gamma_X = \frac{8\pi^2 m_X \Gamma_X \epsilon^2}{2E_1 2E_2} \delta((p_1 + p_2)^2 - m_X^2)
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Apéndice D

Amplitud de estados intermedios físicos

D.1. Ecuación 3.7

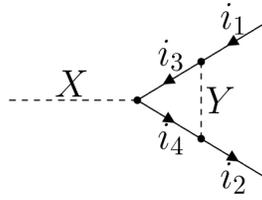


Figura D.1: $X \rightarrow \bar{i}_1 i_2$.

Sea el ancho de decaimiento,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2), \quad (\text{D.1})$$

a segundo orden recibe contribuciones del cuadrado del decaimiento y de la interferencia debido a interacciones de Y intermedios, de modo que (2.102),

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_X, m_1, m_2)}{16\pi \hbar m_X^3}, \quad (\text{D.2})$$

donde la amplitud es,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY}|^2 = (\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})(\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})^* = (\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})(\mathcal{M}_X^* + \mathcal{M}_{XY}^*) \\ &= \mathcal{M}_X \mathcal{M}_X^* + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + \mathcal{M}_X^* \mathcal{M}_{XY} + \mathcal{M}_{XY} \mathcal{M}_{XY}^* \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

quitando la contribución del cuadrado de las interacciones de Y intermedios,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &\simeq |\mathcal{M}_X|^2 + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + \mathcal{M}_X^* \mathcal{M}_{XY} \simeq |\mathcal{M}_X|^2 + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + (\mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^*)^* \\ &\simeq |g_1|^2 + g_1 \mathcal{M}_{XY}^* + (g_1 \mathcal{M}_{XY}^*)^* \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

aplicando las reglas de Feynman para el cálculo de la amplitud \mathcal{M}_{XY} , se determina que¹,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{XY} &= \frac{i}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \int (-ig_2)(-ig_3^*)(-ig_4) \frac{i}{q_3^2 - m_3^2 c^2} \frac{i}{q_4^2 - m_4^2 c^2} \frac{i}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_X + q_3 - q_4) (2\pi)^4 \delta^4(q_Y - p_1 - q_3) (2\pi)^4 \delta^4(q_4 - q_Y - p_2) \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_4}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_Y}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{ig_2 g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \int \frac{\delta^4(p_X + q_3 - q_4)}{q_3^2 - m_3^2 c^2} \frac{\delta^4(q_Y - p_1 - q_3)}{q_4^2 - m_4^2 c^2} \frac{\delta^4(q_4 - q_Y - p_2)}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_Y,\end{aligned}\tag{D.5}$$

desarrollando la integral en q_Y ,

$$\mathcal{M}_{XY} = \frac{ig_2 g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \frac{\delta^4(p_X + q_3 - q_4) \delta^4(q_4 - p_2 - p_1 - q_3)}{(q_3^2 - m_3^2 c^2)(q_4^2 - m_4^2 c^2) [(q_4 - p_2)^2 - m_Y^2 c^2]} d^4 q_3 d^4 q_4,\tag{D.6}$$

operando la integral sobre q_4 ,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{XY} &= \frac{ig_2 g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \frac{\delta^4(p_X - p_2 - p_1) d^4 q_3}{(q_3^2 - m_3^2 c^2) [(p_2 + p_1 + q_3)^2 - m_4^2 c^2] [(p_1 + q_3)^2 - m_Y^2 c^2]} \\ &= \frac{ig_2 g_3^* g_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_3}{(q_3^2 - m_3^2 c^2) [(p_2 + p_1 + q_3)^2 - m_4^2 c^2] [(p_1 + q_3)^2 - m_Y^2 c^2]}\end{aligned}\tag{D.7}$$

definiendo la integral como $L(p_1, p_2, m_3, m_4, m_Y)$, la amplitud resultante es,

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq |g_1|^2 + g_1 g_2^* g_3 g_4^* \frac{-iL}{(2\pi)^4} + \left(g_1 g_2^* g_3 g_4^* \frac{-iL}{(2\pi)^4} \right)^*\tag{D.8}$$

finalmente, el ancho de decaimiento a segundo orden bajo perturbaciones se escribe como,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_1 i_2) = I_X^{12} |g_1|^2 + I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^* + (I_{XY}^{12} g_1 g_2^* g_3 g_4^*)^*\tag{D.9}$$

donde los términos cinéticos son respectivamente,

$$\begin{aligned}I_X^{12} &= \frac{S\lambda(m_X, m_1, m_2)}{16\pi\hbar m_X^3}, \\ I_{XY}^{12} &= \frac{-iS\lambda(m_X, m_1, m_2)}{(16)^2\pi^5\hbar m_X^3} L.\end{aligned}\tag{D.10}$$

¹La delta de Dirac de la conservación del momento y la energía en el denominador sólo indica que esta se debe retirar de la amplitud invariante ya que esta aparece en la regla de oro de Fermi, tal como se indica en las reglas de Feynman.

D.2. Ecuación 3.10

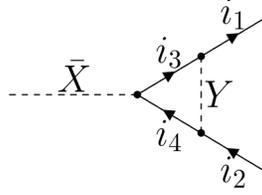


Figura D.2: $\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2$.

Sea el ancho de decaimiento,

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2), \quad (\text{D.11})$$

a segundo orden recibe contribuciones del cuadrado del decaimiento y de la interferencia debido a interacciones de Y intermedios, de modo que (2.102),

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_1 \bar{i}_2) = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_X, m_1, m_2)}{16\pi \hbar m_X^3}, \quad (\text{D.12})$$

donde la amplitud es,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}|^2 = (\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})(\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})^* = (\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})(\mathcal{M}_{\bar{X}}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*) \\ &= \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}\mathcal{M}_{\bar{X}}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

quitando la contribución del cuadrado de las interacciones de Y intermedios,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &\simeq |\mathcal{M}_{\bar{X}}|^2 + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}\mathcal{M}_{\bar{X}}^* \simeq |\mathcal{M}_{\bar{X}}|^2 + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + (\mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*)^* \\ &\simeq |g_1^*|^2 + g_1^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + (g_1^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*)^* \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

aplicando las reglas de Feynman para el cálculo de la amplitud $\mathcal{M}_{\bar{X}Y}$, se determina que²,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{X}Y} &= \frac{i}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \int (-ig_2^*)(-ig_3)(-ig_4^*) \frac{i}{q_3^2 - m_3^2 c^2} \frac{i}{q_4^2 - m_4^2 c^2} \frac{i}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_X - q_3 + q_4) (2\pi)^4 \delta^4(-q_Y - p_1 + q_3) (2\pi)^4 \delta^4(-q_4 + q_Y - p_2) \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_4}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_Y}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{ig_2^* g_3 g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \int \frac{\delta^4(p_X - q_3 + q_4)}{q_3^2 - m_3^2 c^2} \frac{\delta^4(-q_Y - p_1 + q_3)}{q_4^2 - m_4^2 c^2} \frac{\delta^4(-q_4 + q_Y - p_2)}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times d^4 q_3 d^4 q_4 d^4 q_Y, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

²La delta de Dirac de la conservación del momento y la energía en el denominador sólo indica que esta se debe retirar de la amplitud invariante ya que esta aparece en la regla de oro de Fermi, tal como se indica en las reglas de Feynman.

desarrollando la integral en q_Y ,

$$\mathcal{M}_{\bar{X}Y} = \frac{ig_2^*g_3g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \int \frac{\delta^4(p_X - q_3 + q_4) \delta^4(-q_4 - p_2 - p_1 + q_3)}{(q_3^2 - m_3^2c^2)(q_4^2 - m_4^2c^2) [(q_4 + p_2)^2 - m_Y^2c^2]} d^4q_3 d^4q_4, \quad (\text{D.16})$$

operando la integral sobre q_4 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{X}Y} &= \frac{ig_2^*g_3g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_1 - p_2)} \int \frac{\delta^4(p_X - p_2 - p_1) d^4q_3}{(q_3^2 - m_3^2c^2) [(p_2 + p_1 - q_3)^2 - m_4^2c^2] [(p_1 - q_3)^2 - m_Y^2c^2]} \\ &= \frac{ig_2^*g_3g_4^*}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(q_3^2 - m_3^2c^2) [(p_2 + p_1 - q_3)^2 - m_4^2c^2] [(p_1 - q_3)^2 - m_Y^2c^2]} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

definiendo la integral como $L(p_1, p_2, m_3, m_4, m_Y)$, la amplitud resultante es,

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq |g_1^*|^2 + g_1^*g_2g_3^*g_4 \frac{-iL}{(2\pi)^4} + \left(g_1^*g_2g_3^*g_4 \frac{-iL}{(2\pi)^4} \right)^* \quad (\text{D.18})$$

finalmente, el ancho de decaimiento a segundo orden bajo perturbaciones se escribe como,

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{i}_1 i_2) = I_X^{12} |g_1^*|^2 + I_{\bar{X}Y}^{12} g_1^*g_2g_3^*g_4 + (I_{\bar{X}Y}^{12} g_1^*g_2g_3^*g_4)^* \quad (\text{D.19})$$

donde los términos cinéticos son respectivamente,

$$\begin{aligned} I_X^{12} &= \frac{S\lambda(m_X, m_1, m_2)}{16\pi\hbar m_X^3}, \\ I_{\bar{X}Y}^{12} &= \frac{-iS\lambda(m_X, m_1, m_2)}{(16)^2\pi^5\hbar m_X^3} L. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

D.3. Ecuación 3.14

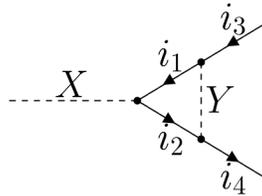


Figura D.3: $X \rightarrow \bar{i}_3 i_4$.

Sea el ancho de decaimiento,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4), \quad (\text{D.21})$$

a segundo orden recibe contribuciones del cuadrado del decaimiento y de la interferencia debido a interacciones de Y intermedios, de modo que (2.102),

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \lambda(m_X, m_3, m_4)}{16\pi \hbar m_X^3}, \quad (\text{D.22})$$

donde la amplitud es,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY}|^2 = (\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})(\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})^* = (\mathcal{M}_X + \mathcal{M}_{XY})(\mathcal{M}_X^* + \mathcal{M}_{XY}^*) \\ &= \mathcal{M}_X \mathcal{M}_X^* + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + \mathcal{M}_X^* \mathcal{M}_{XY} + \mathcal{M}_{XY} \mathcal{M}_{XY}^* \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

quitando la contribución del cuadrado de las interacciones de Y intermedios,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &\simeq |\mathcal{M}_X|^2 + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + \mathcal{M}_X^* \mathcal{M}_{XY} \simeq |\mathcal{M}_X|^2 + \mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^* + (\mathcal{M}_X \mathcal{M}_{XY}^*)^* \\ &\simeq |g_2|^2 + g_2 \mathcal{M}_{XY}^* + (g_2 \mathcal{M}_{XY}^*)^* \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

aplicando las reglas de Feynman para el cálculo de la amplitud \mathcal{M}_{XY} , se determina que³,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XY} &= \frac{i}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \int (-ig_1)(-ig_3)(-ig_4^*) \frac{i}{q_1^2 - m_1^2 c^2} \frac{i}{q_2^2 - m_2^2 c^2} \frac{i}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_X + q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_Y - p_3 - q_1) (2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_Y - p_4) \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_Y}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{ig_1 g_3 g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \int \frac{\delta^4(p_X + q_1 - q_2)}{q_1^2 - m_1^2 c^2} \frac{\delta^4(q_Y - p_3 - q_1)}{q_2^2 - m_2^2 c^2} \frac{\delta^4(q_2 - q_Y - p_4)}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_Y, \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

desarrollando la integral en q_Y ,

$$\mathcal{M}_{XY} = \frac{ig_1 g_3 g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \frac{\delta^4(p_X + q_1 - q_2) \delta^4(q_2 - p_4 - p_3 - q_1)}{(q_1^2 - m_1^2 c^2)(q_2^2 - m_2^2 c^2) [(q_2 - p_4)^2 - m_Y^2 c^2]} d^4 q_1 d^4 q_2, \quad (\text{D.26})$$

operando la integral sobre q_2 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XY} &= \frac{ig_1 g_3 g_4^*}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \frac{\delta^4(p_X - p_3 - p_4) d^4 q_1}{(q_1^2 - m_1^2 c^2) [(p_3 + p_4 + q_1)^2 - m_2^2 c^2] [(p_3 + q_1)^2 - m_Y^2 c^2]} \\ &= \frac{ig_1 g_3 g_4^*}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_1}{(q_1^2 - m_1^2 c^2) [(p_3 + p_4 + q_1)^2 - m_2^2 c^2] [(p_3 + q_1)^2 - m_Y^2 c^2]}, \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

³La delta de Dirac de la conservación del momento y la energía en el denominador sólo indica que esta se debe retirar de la amplitud invariante ya que esta aparece en la regla de oro de Fermi, tal como se indica en las reglas de Feynman.

definiendo la integral como $L(p_3, p_4, m_1, m_2, m_Y)$, la amplitud resultante es,

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq |g_2|^2 + g_1^* g_2 g_3^* g_4 \frac{-iL}{(2\pi)^4} + \left(g_1^* g_2 g_3^* g_4 \frac{-iL}{(2\pi)^4} \right)^*, \quad (\text{D.28})$$

finalmente, el ancho de decaimiento a segundo orden bajo perturbaciones se escribe como,

$$\Gamma(X \rightarrow \bar{i}_3 i_4) = I_X^{34} |g_2|^2 + I_{XY}^{34} g_1^* g_2 g_3^* g_4 + (I_{XY}^{34} g_1^* g_2 g_3^* g_4)^*, \quad (\text{D.29})$$

donde los términos cinéticos son respectivamente,

$$\begin{aligned} I_X^{34} &= \frac{S\lambda(m_X, m_3, m_4)}{16\pi\hbar m_X^3}, \\ I_{XY}^{34} &= \frac{-iS\lambda(m_X, m_3, m_4)}{(16)^2\pi^5\hbar m_X^3} L. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

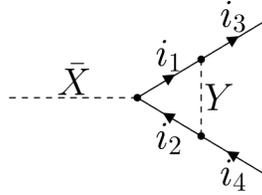


Figura D.4: $\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4$.

Sea el ancho de decaimiento,

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4), \quad (\text{D.31})$$

a segundo orden recibe contribuciones del cuadrado del decaimiento y de la interferencia debido a interacciones de Y intermedios, de modo que (2.102),

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4) = \frac{S|\mathcal{M}|^2\lambda(m_X, m_3, m_4)}{16\pi\hbar m_X^3}, \quad (\text{D.32})$$

donde la amplitud es,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}|^2 = (\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})(\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})^* = (\mathcal{M}_{\bar{X}} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y})(\mathcal{M}_{\bar{X}}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*) \\ &= \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}}^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y} + \mathcal{M}_{\bar{X}Y}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

quitando la contribución del cuadrado de las interacciones de Y intermedios,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &\simeq |\mathcal{M}_{\bar{X}}|^2 + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + \mathcal{M}_{\bar{X}}^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y} \simeq |\mathcal{M}_{\bar{X}}|^2 + \mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + (\mathcal{M}_{\bar{X}}\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*)^* \\ &\simeq |g_2|^2 + g_2^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^* + (g_2^*\mathcal{M}_{\bar{X}Y}^*)^* \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

aplicando las reglas de Feynman para el cálculo de la amplitud $\mathcal{M}_{\bar{X}Y}$, se determina que⁴,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\bar{X}Y} &= \frac{i}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \int (-ig_1^*)(-ig_3^*)(-ig_4) \frac{i}{q_1^2 - m_1^2 c^2} \frac{i}{q_2^2 - m_2^2 c^2} \frac{i}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_X - q_1 + q_2) (2\pi)^4 \delta^4(-q_Y - p_3 + q_1) (2\pi)^4 \delta^4(-q_2 + q_Y - p_4) \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_Y}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{ig_1^* g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \int \frac{\delta^4(p_X - q_1 + q_2)}{q_1^2 - m_1^2 c^2} \frac{\delta^4(-q_Y - p_3 + q_1)}{q_2^2 - m_2^2 c^2} \frac{\delta^4(-q_2 + q_Y - p_4)}{q_Y^2 - m_Y^2 c^2} \\ &\times d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_Y,\end{aligned}\tag{D.35}$$

desarrollando la integral en q_Y ,

$$\mathcal{M}_{\bar{X}Y} = \frac{ig_1^* g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \int \frac{\delta^4(p_X - q_1 + q_2) \delta^4(-q_2 - p_4 - p_3 + q_1)}{(q_1^2 - m_1^2 c^2)(q_2^2 - m_2^2 c^2) [(q_2 + p_4)^2 - m_Y^2 c^2]} d^4 q_1 d^4 q_2,\tag{D.36}$$

operando la integral sobre q_2 ,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\bar{X}Y} &= \frac{ig_1^* g_3^* g_4}{(2\pi)^4 \delta^4(p_X - p_3 - p_4)} \int \frac{\delta^4(p_X - p_3 - p_4) d^4 q_1}{(q_1^2 - m_1^2 c^2) [(p_3 + p_4 - q_1)^2 - m_2^2 c^2] [(p_3 - q_1)^2 - m_Y^2 c^2]} \\ &= \frac{ig_1^* g_3^* g_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_1}{(q_1^2 - m_1^2 c^2) [(p_3 + p_4 - q_1)^2 - m_2^2 c^2] [(p_3 - q_1)^2 - m_Y^2 c^2]},\end{aligned}\tag{D.37}$$

definiendo la integral como $L(p_3, p_4, m_1, m_2, m_Y)$, la amplitud resultante es,

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq |g_2^*|^2 + g_1 g_2^* g_3 g_4^* \frac{-iL}{(2\pi)^4} + \left(g_1 g_2^* g_3 g_4^* \frac{-iL}{(2\pi)^4} \right)^*,\tag{D.38}$$

finalmente, el ancho de decaimiento a segundo orden bajo perturbaciones se escribe como,

$$\Gamma(\bar{X} \rightarrow i_3 \bar{i}_4) = I_{\bar{X}}^{34} |g_2^*|^2 + I_{\bar{X}Y}^{34} g_1 g_2^* g_3 g_4^* + \left(I_{\bar{X}Y}^{34} g_1 g_2^* g_3 g_4^* \right)^*,\tag{D.39}$$

donde los términos cinéticos son respectivamente,

$$\begin{aligned}I_X^{34} &= \frac{S\lambda(m_X, m_3, m_4)}{16\pi \hbar m_X^3}, \\ I_{\bar{X}Y}^{34} &= \frac{-iS\lambda(m_X, m_3, m_4)}{(16)^2 \pi^5 \hbar m_X^3} L.\end{aligned}\tag{D.40}$$

⁴La delta de Dirac de la conservación del momento y la energía en el denominador sólo indica que esta se debe retirar de la amplitud invariante ya que esta aparece en la regla de oro de Fermi, tal como se indica en las reglas de Feynman.

D.4. Valor principal de Cauchy

Para una singularidad en $x = -i\epsilon$ de una función definida en \mathbb{C} de la forma,

$$f(x) = \frac{1}{x + i\epsilon} \quad (\text{D.41})$$

esta se puede separar en su valor principal y su valor divergente en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, así:

$$f(x) = \frac{1}{x + i\epsilon} \cdot \frac{x - i\epsilon}{x - i\epsilon} = \frac{x - i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} - i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{D.42})$$

de modo que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} - i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \frac{\pi}{\pi} \\ &= \frac{1}{x} - i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(x^2 + \epsilon^2)\pi} \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

el primer término de la anterior expresión se denota cómo el valor principal mientras que el segundo término tiene el comportamiento de una distribución delta de Dirac alrededor de x , luego $f(x)$ se puede expresar como:

$$f(x) = \text{P.V} \left(\frac{1}{x} \right) - i\pi\delta(x) \quad (\text{D.44})$$

D.5. Aproximación de ancho estrecho

Ecuación (6.17).

El propagador del bosón X se inscribe de la forma,

$$\frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\text{D.45})$$

dado que el ancho Γ_X del bosón X es mucho menor que su masa m_X ,

$$\Gamma_X \sim \alpha m_X, \quad \alpha \ll 1 \quad (\text{D.46})$$

las contribuciones de amplitud que presentan el correspondiente estado intermedio resonante se mejoran genéricamente por un factor de orden m_X/Γ_X . Un método teóricamente consistente para extraer esta parte dominante de la amplitud lo proporciona la aproximación de ancho estrecho (en inglés NWA), donde,

$$\varepsilon \sim \Gamma m_X. \quad (\text{D.47})$$

Luego en el cálculo de la amplitud de estados intermedios en la capa de masa, el cuadrado del propagador se redefine como:

$$\left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\varepsilon} \right|^2 \Rightarrow \left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\Gamma m_X} \right|^2, \quad (\text{D.48})$$

operando,

$$\begin{aligned} \left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\Gamma m_X} \right|^2 &= \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\Gamma m_X} \cdot \frac{-i}{q^2 - m_X^2 - i\Gamma m_X}, \\ &= \frac{1}{(q^2 - m_X^2)^2 + \Gamma^2 m_X^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

tomando el límite,

$$\lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{1}{(q^2 - m_X^2)^2 + \Gamma^2 m_X^2}, \quad (\text{D.50})$$

reescribiendo,

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{1}{(q^2 - m_X^2)^2 + \Gamma^2 m_X^2} &= \lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma m_X^4} \frac{\Gamma}{\left(\frac{q^2}{m_X^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{m_X^2}\right)^2}, \\ &= \lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma m_X^3} \frac{\frac{\Gamma}{m_X}}{\left(\frac{q^2}{m_X^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{m_X^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

en esta aproximación se toma como constante el término Γm_X^3 ,

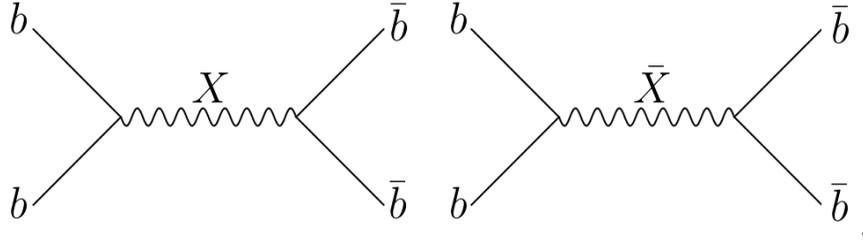
$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{1}{(q^2 - m_X^2)^2 + \Gamma^2 m_X^2} &= \frac{1}{\Gamma_X m_X^3} \lim_{\Gamma/m_X \rightarrow 0} \frac{\frac{\Gamma}{m_X}}{\left(\frac{q^2}{m_X^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{m_X^2}\right)^2}, \\ &= \frac{1}{\Gamma_X m_X^3} \pi \delta \left(\frac{q^2}{m_X^2} - 1 \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma_X m_X} \pi \delta (q^2 - m_X^2), \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

finalmente,

$$\left| \frac{i}{q^2 - m_X^2 + i\varepsilon} \right|^2 \simeq \frac{1}{\Gamma_X m_X} \pi \delta (q^2 - m_X^2), \quad (\text{D.53})$$

D.6. Desarrollo de la amplitud

Sea la amplitud $M|bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}|^2$ determinada por la presencia de un bosón físico intermedio $X(\bar{X})$ en la capa de masa, esta puede ser descrita por dos tipos de interacciones indistinguibles entre sí, de la forma (6.2):



de tal manera que el cálculo de la amplitud debe realizarse bajo los dos procesos, en representación de diagramas de Feynman,

$$|\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2, \quad (\text{D.54})$$

dato que estos diagramas se van a sustraer, y en estos el boson X se encuentra cerca de la capa de masa, el término de interferencia debido a la multiplicación de las amplitudes de los dos procesos es mucho menor que la contribución del cuadrado de las amplitudes, por tanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

el cuadrado del propagador de los bosones X y \bar{X} tiene el mismo valor, luego,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 \cdot \left(\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

finalmente, escribiendo las amplitudes en términos de la parametrización (6.2) y la aproximación de ancho estrecho (ver apéndice D.5),

Ecuación (6.17)

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{RIS}(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 &= \frac{\pi}{m_X \Gamma_X} \delta((p_{b_1} + p_{b_2})^2 - m_X^2) \{ |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 \\ &\quad \times |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}(bb \rightarrow \bar{X})|^2 |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \}. \end{aligned}$$

Apéndice E

Estadística e historia térmica del universo

En este apéndice, se proporciona algunas integrales de distribuciones de espacio de fase en equilibrio utilizadas en la sección 2. Tomando unidades naturales tales que (k es la constante de Boltzmann)

$$\hbar = c = k = 1, \quad (\text{E.1})$$

considerando un gas ideal uniforme de partículas con masa m en equilibrio térmico a una temperatura T y escribiendo,

$$x \equiv \frac{m}{T}, \quad (\text{E.2})$$

la densidad numérica de tales partículas en el espacio de fase se da por,

$$\frac{dN}{d^3\mathbf{p}d^3x} \equiv f(\mathbf{p}) = f(p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + \theta}, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (\text{E.3})$$

donde $\theta = \pm 1$ para partículas que obedecen estadísticas de Fermi-Dirac (FD) (Bose-Einstein (BE)), y $\theta = 0$ en la aproximación clásica (partículas distinguibles) de las estadísticas de Maxwell-Boltzmann (MB), utilizadas ampliamente anteriormente. g da el número de estados de espín para cada partícula.

Por lo general, $g = 2s + 1$ para partículas masivas y $g = 2, s > 0$ para $m = 0$. Sin embargo, debido a que las secciones transversales de interacción para los varios estados de espín de una partícula débilmente interactiva pueden diferir, su conjunto completo de estados de espín puede no estar en equilibrio térmico a una temperatura particular. Así, por ejemplo, el segundo estado de espín de un neutrino que lleva una masa pequeña pero no nula puede no estar en equilibrio térmico si solo uno de sus estados de espín puede participar directamente en interacciones débiles.

El μ que aparece en la ecuación (E.3) es un posible potencial químico que sirve para limitar el número total de partículas. Cuando una especie de partículas se distribuye en el espacio de fase de acuerdo con la ecuación (E.3), se dice que están en equilibrio cinético. Están en equilibrio químico solo si $\mu = 0$ (a menos que lleven un número cuántico absolutamente conservado, como la carga eléctrica, con respecto al cual el sistema completo no es neutro). Los bariones en el universo temprano deberían ser rápidamente llevados al equilibrio cinético

por colisiones; solo dispersiones mucho más lentas que violan B y CP pueden producir equilibrio químico, con $\mu = 0$.

La densidad total de número de partículas se puede obtener integrando (E.3) sobre los estados de momento disponibles:

$$\begin{aligned}
 n\left(T, \frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right) &= \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{g}{e^{(E-\mu)/T} + \theta}, \text{ en coordenadas esféricas,} \\
 &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^2 d\mathbf{p}}{e^{(E-\mu)/T} + \theta}, \text{ reescribiendo en términos de } E, \\
 &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{E^2 - m^2}{e^{(E-\mu)/T} + \theta} \frac{E dE}{\sqrt{E^2 - m^2}}, \\
 &= \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2 - \left(\frac{m}{T}\right)^2} E dE}{e^{E/T - \mu/T} + \theta} \frac{E}{T} \frac{dE}{T}, \quad z \rightarrow \frac{E}{T}, \quad x \rightarrow \frac{m}{T}, \\
 n\left(T, x, \frac{\mu}{T}\right) &= \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_x^\infty z \sqrt{z^2 - x^2} [e^{(z-\mu/T)} + \theta]^{-1} dz,
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

en la aproximación de las estadísticas de Maxwell-Boltzmann, la integral de densidad numérica se convierte en,

$$n_{MB}\left(T, x, \frac{\mu}{T}\right) = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_x^\infty z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-(z-\mu/T)} dz, \tag{E.5}$$

esta integral se puede expresar en términos de una función de Bessel modificada de segundo tipo,

$$n_{MB}\left(T, x, \frac{\mu}{T}\right) = \frac{gT^3 e^{\frac{\mu}{T}}}{2\pi^2} x^2 K_2(x), \tag{E.6}$$

en el límite de x pequeño (altas temperaturas), la expansión de la función de Bessel,

$$\begin{aligned}
 K_\nu(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{(\nu - k - 1)!}{k!} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2k-\nu} \\
 &+ (-1)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2k+\nu}}{k!(\nu+k)!} \left[\log\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{k+\nu} \frac{1}{2i} \right],
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

donde $\gamma \simeq 0.5772$ es la constante de Euler, obteniendo así que,

$$n_{MB}\left(T, x, \frac{\mu}{T}\right) \simeq \frac{gT^3 e^{\mu/T}}{\pi^2} \left[1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{64}x^4 \left(4 \log\left(\frac{1}{2}x\right) + 4\gamma - 3 \right) + \dots \right], \tag{E.8}$$

además, la densidad numérica de fotones a altas temperaturas es aproximadamente,

$$\begin{aligned}
n_{MB}^{\gamma}(T, 0, 0) &= \int_0^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{g}{e^{E/T}}, \text{ en coordenadas esféricas,} \\
&= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{|\mathbf{p}|^2 d\mathbf{p}}{e^{E/T}}, \text{ reescribiendo en términos de } E, \\
&= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-E/T} E^2 dE, \\
&= \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-E/T} \left(\frac{E}{T}\right)^2 \frac{dE}{T}, \quad z \rightarrow \frac{E}{T} \\
&= \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-z} z^2 dz = \frac{gT^3}{2\pi^2} \Gamma(3), \\
&= \frac{gT^3}{\pi^2} = \frac{2T^3}{\pi^2},
\end{aligned} \tag{E.9}$$

por lo tanto, la relación de la densidad numérica de una especie masiva de partículas a la densidad numérica de fotones a altas temperaturas es,

$$\frac{n_{MB}}{n_{MB}^{\gamma}} \simeq \frac{ge^{\mu/T}}{2} \left[1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{64}x^4 \left(4 \log\left(\frac{1}{2}x\right) + 4\gamma - 3 \right) + \dots \right] \tag{E.10}$$

La dilatación temporal media en la vida media de decaimiento de partículas de Maxwell-Boltzmann en equilibrio térmico a una temperatura $T = \frac{m}{x}$ está dada por,

$$\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle_{MB} = \frac{1}{\int_0^{\infty} d^3\mathbf{p} e^{-E/T}} \int_0^{\infty} d^3\mathbf{p} e^{-E/T} \frac{m}{E} \tag{E.11}$$

de manera equivalente a (E.4),

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle_{MB} &= \frac{1}{T^3 \int_x^{\infty} z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz} \int_0^{\infty} e^{-E/T} \frac{m}{E} |\mathbf{p}|^2 d\mathbf{p}, \text{ reescribiendo en términos de } E, \\
&= \frac{1}{T^3 \int_x^{\infty} z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz} \int_m^{\infty} e^{-E/T} (E^2 - m^2) \frac{m dE}{\sqrt{E^2 - m^2}}, \\
&= \frac{1}{\int_x^{\infty} z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz} \int_m^{\infty} e^{-E/T} \sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2 - \left(\frac{m}{T}\right)^2} \frac{m dE}{T}, \quad z \rightarrow \frac{E}{T}, \quad x \rightarrow \frac{m}{T}, \\
&= \frac{\int_x^{\infty} x \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz}{\int_x^{\infty} z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz},
\end{aligned} \tag{E.12}$$

por apéndice F,

$$\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle_{MB} = \frac{\int_x^{\infty} x \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz}{\int_x^{\infty} z \sqrt{z^2 - x^2} e^{-z} dz} = \frac{K_1(x)}{K_2(x)}, \tag{E.13}$$

A altas temperaturas ($x \ll 1$), las partículas son relativistas, con energías $\sim T$, y

$$\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle_{MB} = \frac{m}{T} \left\{ 1 + \frac{1}{2} x^2 \left[\log \left(\frac{1}{2} x \right) + \gamma \right] + \dots \right\}, \quad (\text{E.14})$$

mientras que en el límite no relativista ($x \gg 1$),

$$\left\langle \frac{m}{E} \right\rangle_{MB} = 1 - \frac{3}{2x} + \frac{15}{8x^2} - \dots \quad (\text{E.15})$$

E.1. Razón del número bariónico con partículas ultrarelativistas

Ecuación (5.13).

Esta se escribe de la forma,

$$Y_B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \quad (\text{E.16})$$

bajo la aproximación clásica determinada por la estadística de Maxwell-Boltzmann, reemplazando,

$$\begin{aligned} n_b - n_{\bar{b}} &= \frac{T^3 e^{\mu/T}}{2\pi^2} x^2 K_2(x) - \frac{T^3 e^{-\mu/T}}{2\pi^2} x^2 K_2(x) \\ &= \frac{T^3}{2\pi^2} x^2 K_2(x) (e^{\mu/T} - e^{-\mu/T}) \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

luego,

$$Y_B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} = \frac{1}{2} x^2 K_2(x) (e^{\mu/T} - e^{-\mu/T}) \quad (\text{E.18})$$

aproximando a orden lineal,

$$Y_B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} = e^{\mu/T} - e^{-\mu/T} = 2 \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right), \quad (\text{E.19})$$

con esto, la exponencial $e^{\mu/T}$ ser escrita en términos la razón del número bariónico, así,

$$\begin{aligned}
e^{\pm\mu/T} &= e^{\pm\mu/T} + e^{\mp\mu/T} - e^{\mp\mu/T} = \pm(e^{\pm\mu/T} - e^{\mp\mu/T}) + e^{\mp\mu/T}, \\
&= \pm Y_B + \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\pm\mu/T} - \frac{1}{2}e^{\pm\mu/T}, \\
&= \pm Y_B \mp \left(\frac{1}{2}e^{\pm\mu/T} - \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} \right) + \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\pm\mu/T}, \\
&= \pm Y_B \mp \frac{1}{2}Y_B + \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\pm\mu/T}, \\
&= \pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{\mp\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\pm\mu/T} \right)^2}, \\
&= \pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{\frac{1}{4}e^{\mp 2\mu/T} + \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T}e^{\pm\mu/T} + \frac{1}{4}e^{\pm 2\mu/T}}, \\
&= \pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^{\mp 2\mu/T} - \frac{1}{2}e^{\mp\mu/T}e^{\pm\mu/T} + \frac{1}{4}e^{\pm 2\mu/T}}, \\
&= \pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{1 + \frac{1}{4}[\pm(e^{\pm\mu/T} - e^{\mp\mu/T})]^2}, \\
e^{\pm\mu/T} &= \pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{1 + \frac{1}{4}Y_B^2}.
\end{aligned} \tag{E.20}$$

donde su potencia al cuadrado es,

$$\begin{aligned}
e^{\pm 2\mu/T} &= \left(\pm \frac{1}{2}Y_B + \sqrt{1 + \frac{1}{4}Y_B^2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{4}Y_B^2 \pm Y_B \sqrt{1 + \frac{1}{4}Y_B^2} + 1 + \frac{1}{4}Y_B^2 \\
e^{\pm 2\mu/T} &= 1 + \frac{1}{2}Y_B^2 \pm Y_B \sqrt{1 + \frac{1}{4}Y_B^2}.
\end{aligned} \tag{E.21}$$

expandiendo la raíz asegurando convergencia por $Y_B \ll 1$,

$$\begin{aligned}
e^{\pm 2\mu/T} &= 1 + \frac{1}{2}Y_B^2 \pm Y_B \left(1 + \frac{1}{8}Y_B^2 - \frac{1}{4}Y_B^2 + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}Y_B^2 \pm \left(Y_B + \frac{1}{8}Y_B^3 - \frac{1}{128}Y_B^5 + \dots \right) \\
&= 1 \pm Y_B + \frac{1}{2}Y_B^2 \pm \frac{1}{8}Y_B^3 \mp \frac{1}{128}Y_B^5 \pm \dots,
\end{aligned} \tag{E.22}$$

aproximando a orden lineal,

$$e^{\pm 2\mu/T} \simeq 1 \pm Y_B. \tag{E.23}$$

E.2. Integral a dos partículas

La integral de dos partículas,

$$I = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} f^{eq}(p_1) f^{eq}(p_2) \delta(s - m_x^2), \quad (\text{E.24})$$

donde $s = (p_1 + p_2)^2$, aparece en relación con la tasa de dispersión $2 \rightarrow 2$ de partículas sin masa b a través del intercambio cerca de la capa de masa de X . Realizando la integral sobre los ángulos del centro de masa, en coordenadas esféricas, fijando una integral angular en dirección al ángulo entre p_1 y p_2 ,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} f^{eq}(p_1) f^{eq}(p_2) \delta(s - m_x^2), \text{ en coordenadas esféricas,} \\ &= 8\pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} \frac{|p_1|^2 dp_1}{2E_1} \int_0^\infty e^{-E_2/T} \frac{|p_2|^2 dp_2}{2E_2} \int_0^\pi \delta(s - m_x^2) \sin \theta d\theta, \\ &= 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} \frac{|p_1|^2 dp_1}{E_1} \int_0^\infty e^{-E_2/T} \frac{|p_2|^2 dp_2}{E_2} \int_0^\pi \delta(s - m_x^2) \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

reescribiendo en términos de $E_i = p_i$,

$$I = 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2 dE_2 \int_0^\pi \delta(s - m_x^2) \sin \theta d\theta,$$

bajo el cambio de variable $s = (E_1 + E_2)^2 - (|p_1|^2 + |p_2|^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta)$, en el límite relativista,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2 dE_2 \int_0^{4E_1 E_2} \delta(s - m_x^2) \frac{ds}{2E_1 E_2}, \\ &= \pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} dE_2 \int_0^{4E_1 E_2} \delta(s - m_x^2) ds, \text{ la función heaviside,} \\ &= \pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} dE_2 \Theta(4E_1 E_2 - m_x^2), \text{ evaluando,} \\ &= \pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} dE_1 \int_{m_x^2/4E_1}^\infty e^{-E_2/T} dE_2 = \pi^2 \int_0^\infty e^{-E_1/T} dE_1 \left| -T e^{-E_2/T} \right|_{m_x^2/4E_1}^\infty, \\ &= \pi^2 T \int_0^\infty e^{-E_1/T} dE_1 e^{-m_x^2/4E_1 T} = \pi^2 T \int_0^\infty e^{-\left(E_1 + \frac{m_x^2}{4E_1}\right) T} dE_1, \\ &= \pi^2 T m_X K_1 \left(\frac{m_x}{T} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

donde K_1 es una función modificada de Bessel. Haciendo uso de (E.6) y (E.13), finalmente se puede expresar I como:

$$\begin{aligned} I &= \frac{K_1 \left(\frac{m_X}{T} \right) 2\pi^4 T^3}{K_2 \left(\frac{m_X}{T} \right) m_X 2\pi^2} \left(\frac{m_X}{T} \right)^2 K_2 \left(\frac{m_X}{T} \right) = \left\langle \frac{m_X}{E} \right\rangle \frac{2\pi^4}{m_X} n_X^{eq}, \\ &= \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{\Gamma_X} n_X^{eq} \frac{2\pi^4}{m_X}. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

E.3. Dinámica de un universo en expansión

E.3.1. Ecuación 4.43

$$\nabla_{\mu} N^{\mu} = \partial_{\mu} N^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} N^{\lambda} = 0, \quad (\text{E.27})$$

despejando,

$$\partial_{\mu} N^{\mu} = -\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} N^{\lambda}, \quad (\text{E.28})$$

dado que $N^{\mu} = nU^{\mu}$, donde la velocidad relativista en un fluido perfecto es $U^{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$, luego,

$$\partial_0 N^0 = -\Gamma_{\mu 0}^{\mu} N^0 \quad \wedge \quad \partial_i N^i = 0, \quad (\text{E.29})$$

reemplazando,

$$\frac{\dot{n}}{n} = -\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{i0}^i, \quad (\text{E.30})$$

ahora, para los símbolos de Christoffel,

$$-\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{i0}^i = 0 - \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^i, \quad (\text{E.31})$$

finalmente,

$$\frac{\dot{n}}{n} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow n(t) \propto a^{-3}. \quad (\text{E.32})$$

E.3.2. Ecuaciones 4.48

Usando,

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}),$$

para la componente R_{00} ,

$$R_{00} = \partial_{\lambda} \overbrace{\Gamma_{00}^{\lambda}}^{=0} - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} \overbrace{\Gamma_{00}^{\rho}}^{=0} - \Gamma_{0\lambda}^{\rho} \Gamma_{0\rho}^{\lambda},$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\rho} \Gamma_{0\rho}^{\lambda},$$

expandiendo los índices,

$$R_{00} = -\partial_0 \overbrace{\Gamma_{00}^0}^{=0} - \partial_0 \Gamma_{0i}^i - \overbrace{\Gamma_{0\lambda}^0}^{=0} \overbrace{\Gamma_{00}^{\lambda}}^{=0} - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{0i}^{\lambda},$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0i}^i - \overbrace{\Gamma_{00}^i}^{=0} \overbrace{\Gamma_{0i}^0}^{=0} - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \rightarrow R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0i}^i - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j,$$

reemplazando los símbolos de Christoffel,

$$R_{00} = -\partial_0 \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta_i^i \right) - \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta_j^j \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta_i^i \right) \rightarrow R_{00} = -3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \delta_i^i \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2,$$

desarrollando la derivada,

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \right) \dot{a} - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2,$$

finalmente,

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Para la componente R_{ij} ,

$$R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda - \partial_j \Gamma_{i\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{ij}^\rho - \Gamma_{i\lambda}^\rho \Gamma_{j\rho}^\lambda,$$

se realizará el cálculo de la parte espacial del tensor de Ricci en $\mathbf{x} = 0$ para cada sumando de manera separada,

1. Expandiendo,

$$\partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda = \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k,$$

luego,

$$\partial_0 \Gamma_{ij}^0|_{\mathbf{x}=0} = \partial_0 (a\dot{a}\gamma_{ij})|_{\mathbf{x}=0} = [(\dot{a})^2 + a\ddot{a}] \gamma_{ij}|_{\mathbf{x}=0}$$

dada la expresión 1.1.10,

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}, \quad \text{for } k \equiv \begin{cases} 0 & \text{Euclidean} \\ +1 & \text{Spherical} \\ -1 & \text{Hyperbolic} \end{cases}, \quad (1.1.10)$$

evaluando,

$$\partial_0 \Gamma_{ij}^0|_{\mathbf{x}=0} = [(\dot{a})^2 + a\ddot{a}] \delta_{ij},$$

para el segundo término, por 1.2.41,

$$\partial_k \Gamma_{ij}^k|_{\mathbf{x}=0} = \frac{1}{2} \partial_k \gamma^{kl} (\partial_i \gamma_{jl} + \partial_j \gamma_{il} - \partial_l \gamma_{ij})|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2} \gamma^{kl} \partial_k (\partial_i \gamma_{jl} + \partial_j \gamma_{il} - \partial_l \gamma_{ij})|_{\mathbf{x}=0},$$

sea la primera derivada del factor γ_{ij} , usando 1.1.10,

$$\partial_k \gamma_{ij} = \partial_k \left(\delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_l x^l)} \right),$$

derivando,

$$\partial_k \gamma_{ij} = k(\delta_{ki} x_j + \delta_{kj} x_i) \frac{1}{1 - k(x_l x^l)} + k x_i x_j \frac{2k x_k}{(1 - k(x_l x^l))^2},$$

evaluada en $\mathbf{x} = 0$,

$$\partial_k \gamma_{ij} |_{\mathbf{x}=0} = 0,$$

ahora, tomando la segunda derivada,

$$\begin{aligned} \partial_m \partial_k \gamma_{ij} &= \frac{k(\delta_{ki} \delta_{mj} + \delta_{kj} \delta_{mi})}{1 - k(x_l x^l)} + k(\delta_{ki} x_j + \delta_{kj} x_i) \partial_k \left(\frac{1}{1 - k(x_l x^l)} \right) \\ &\quad + k \delta_{mi} x_j \frac{2k x_k}{(1 - k(x_l x^l))^2} + k x_i \delta_{mj} \frac{2k x_k}{(1 - k(x_l x^l))^2} + k x_i x_j \partial_m \left[\frac{2k x_k}{(1 - k(x_l x^l))^2} \right], \end{aligned}$$

evaluada en $\mathbf{x} = 0$,

$$\partial_m \partial_k \gamma_{ij} |_{\mathbf{x}=0} = k(\delta_{ki} \delta_{mj} + \delta_{kj} \delta_{mi}),$$

retomando el segundo término, se anulan las primeras derivadas, luego,

$$\partial_k \Gamma_{ij}^k |_{\mathbf{x}=0} = \frac{1}{2} \gamma^{kl} (\partial_k \partial_i \gamma_{jl} + \partial_k \partial_j \gamma_{il} - \partial_k \partial_l \gamma_{ij}) |_{\mathbf{x}=0},$$

además, dado que la forma contravariante de γ es,

$$\gamma^{ij} = \delta^{ij} - k x^i x^j,$$

evaluando se obtiene que,

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_{ij}^k |_{\mathbf{x}=0} &= \frac{k}{2} \delta^{kl} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ji} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{ki} - \delta_{li} \delta_{kj} - \delta_{lj} \delta_{ki}], \\ &= \frac{k}{2} \delta^{kl} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ji} \delta_{kl}] = k \delta^{kl} \delta_{ij} \delta_{kl} = k \delta_k^k \delta_{ij}, \\ &= 3k \delta_{ij}, \end{aligned}$$

con esto,

$$\partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda |_{\mathbf{x}=0} = [(\dot{a})^2 + a\ddot{a} + 3k] \delta_{ij},$$

2. Expandiendo,

$$\partial_j \Gamma_{i\lambda}^\lambda = \partial_j \overbrace{\Gamma_{i0}^0}^{=0} + \partial_j \Gamma_{ik}^k,$$

con base en el tratamiento anterior evaluando en $\mathbf{x} = 0$,

$$\partial_j \Gamma_{ik}^k |_{\mathbf{x}=0} = k \delta^{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = k \delta_{ij},$$

por tanto,

$$\partial_j \Gamma_{i\lambda}^\lambda |_{\mathbf{x}=0} = k \delta_{ij}.$$

3. Expandiendo,

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{ij}^\rho = \overbrace{\Gamma_{0\rho}^0}^{=0} \Gamma_{ij}^\rho + \Gamma_{k\rho}^k \Gamma_{ij}^\rho = \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l,$$

usando 1.2.41,

$$\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{ij}^{\rho} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_k^k(a\dot{a}\gamma_{ij}) + \frac{1}{2}\gamma^{ki}(\partial_k\gamma_{li} + \partial_l\gamma_{ki} - \partial_i\gamma_{kl})\frac{1}{2}\gamma^{lk}(\partial_i\gamma_{jk} + \partial_j\gamma_{ik} - \partial_k\gamma_{ij}),$$

evaluando en $\mathbf{x} = 0$, dado que la derivada de γ_{ij} se anula,

$$\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{ij}^{\rho}|_{\mathbf{x}=0} = 3\dot{a}^2\delta_{ij},$$

4. Expandiendo,

$$\Gamma_{i\lambda}^{\rho}\Gamma_{j\rho}^{\lambda} = \overbrace{\Gamma_{i0}^0}^{=0}\overbrace{\Gamma_{j0}^0}^{=0} + \Gamma_{ik}^0\Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k\Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{il}^k\Gamma_{jk}^l,$$

usando la expresión 1.2.41,

$$\begin{aligned}\Gamma_{i\lambda}^{\rho}\Gamma_{j\rho}^{\lambda} &= a\dot{a}\gamma_{ik}\left(\frac{\dot{a}}{a}\delta_j^k\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\delta_i^k\right)a\dot{a}\gamma_{jk} \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^{kj}(\partial_i\gamma_{lj} + \partial_l\gamma_{ij} - \partial_j\gamma_{il})\frac{1}{2}\gamma^{li}(\partial_j\gamma_{ki} + \partial_k\gamma_{ji} - \partial_i\gamma_{jk}),\end{aligned}$$

evaluando en $\mathbf{x} = 0$, dado que la derivada de γ_{ij} se anula,

$$\Gamma_{i\lambda}^{\rho}\Gamma_{j\rho}^{\lambda}|_{\mathbf{x}=0} = \dot{a}^2\delta_{ik}\delta_j^k + \dot{a}^2\delta_{jk}\delta_i^k,$$

obteniendo,

$$\Gamma_{i\lambda}^{\rho}\Gamma_{j\rho}^{\lambda}|_{\mathbf{x}=0} = 2\dot{a}^2\delta_{ij}.$$

Reemplazando cada sumando de R_{ij} ,

$$R_{ij}|_{\mathbf{x}=0} = [(\dot{a})^2 + a\ddot{a} + 3k]\delta_{ij} - k\delta_{ij} + 3\dot{a}^2\delta_{ij} - 2\dot{a}^2\delta_{ij},$$

operando,

$$R_{ij}|_{\mathbf{x}=0} = [2(\dot{a})^2 + a\ddot{a} + 2k]\delta_{ij},$$

multiplicando y dividiendo por a^2 ,

$$R_{ij}|_{\mathbf{x}=0} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]a^2\delta_{ij},$$

como el elemento de línea es,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

la parte espacial de la métrica evaluada en $\mathbf{x} = 0$ es $-a^2\delta_{ij}$,

$$R_{ij}|_{\mathbf{x}=0} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}|_{\mathbf{x}=0},$$

finalmente,

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}.$$

E.3.3. Ecuación 4.49

Expandiendo los índices, teniendo en cuenta que la métrica es diagonal en la parte temporal,

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \quad \rightarrow \quad R = R_{00} + g^{ij}R_{ij},$$

reemplazando las componentes del tensor de Ricci,

$$R = -3\frac{\ddot{a}}{a} - g^{ij} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij} \quad \rightarrow \quad R = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \delta_i^i \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right],$$

operando,

$$R = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \left[3\frac{\ddot{a}}{a} + 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 6\frac{k}{a^2} \right],$$

finalmente,

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right].$$

E.3.4. Ecuaciones 4.50

Reescribiendo de manera mixta,

$$G_\nu^\mu = g^{\mu\lambda}G_{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} \quad \rightarrow \quad G_\nu^\mu = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}R\delta_\nu^\mu,$$

tomando la componente G_0^0 ,

$$G_0^0 = g^{0\lambda}R_{\lambda 0} - \frac{1}{2}R\delta_0^0,$$

dado que la métrica es diagonal en su parte temporal,

$$G_0^0 = g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}R \quad \rightarrow \quad G_0^0 = R_{00} - \frac{1}{2}R,$$

reemplazando,

$$G_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left(-6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \right) \quad \rightarrow \quad G_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right],$$

por lo tanto,

$$G_0^0 = 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right].$$

Tomando la componente G_j^i ,

$$G_j^i = g^{i\lambda}R_{\lambda j} - \frac{1}{2}R\delta_j^i,$$

dado que la métrica es diagonal en su parte temporal,

$$G_j^i = g^{ik} R_{kj} - \frac{1}{2} R \delta_j^i,$$

reemplazando,

$$G_j^i = -g^{ik} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} \right] g_{kj} - \frac{1}{2} \left(-6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \right) \delta_j^i,$$

$$G_j^i = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i + 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i,$$

factorizando y resolviendo se obtiene,

$$G_j^i = \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i.$$

E.3.5. Ecuación 4.51

Sea la ecuación de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

de manera mixta,

$$G_\nu^\mu = 8\pi G T_\nu^\mu,$$

tomando la componente G_0^0 ,

$$G_0^0 = 8\pi G T_0^0,$$

reemplazando T_0^0 ,

$$3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G \rho,$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}.$$

Tomando la componente G_j^i ,

$$G_j^i = 8\pi G T_j^i,$$

reemplazando T_j^i ,

$$\left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i = 8\pi G [-P] \delta_j^i \quad \rightarrow \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = 8\pi G [-P],$$

resolviendo,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G[-P] - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2},$$

reemplazando,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G[-P] - \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{k}{a^2} - \frac{k}{a^2}, \quad \rightarrow \quad 2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}(\rho + 3P),$$

finalmente,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).$$

E.4. Estadística de la generación del número bariónico

E.4.1. Ecuación 5.16

Ecuación 5.16a

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1}}{2E_{a_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2}}{2E_{a_2}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}(2\pi)^3} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2}) \{ [f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2) [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \\ &\quad - [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2) \} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2, \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

distribuyendo las integrales,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{a_1} 2E_{a_2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2 [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{a_1} 2E_{a_2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2 [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\} \\ &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} (v\sigma_0) [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} (v\sigma_0) [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

multiplicando y dividiendo por las integrales de las distribuciones de energías entrantes, las cuales esencialmente representan las densidades del número de partículas (en equilibrio en el

caso del primer término),

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \frac{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2) (v\sigma_0)}{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} \right. \\ &\quad \times [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \left. \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \frac{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2) (v\sigma_0)}{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} \right. \\ &\quad \times [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

se obtiene el promedio de la cross section en ambos casos,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

reescribiendo en términos de la densidad del número de partículas,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle n_\varphi^{eq} n_\varphi^{eq} [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle n_\varphi n_\varphi [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\} \\ &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{n_\varphi^{eq} n_\varphi^{eq}}{n_\gamma n_\gamma} [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] - \frac{n_\varphi n_\varphi}{n_\gamma n_\gamma} [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\} \\ &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ Y_\varphi^{eq} Y_\varphi^{eq} [(1-\zeta)(1+Y_B) + (1-\bar{\zeta})(1-Y_B)] - Y_\varphi Y_\varphi [(1-\bar{\zeta}) + (1-\zeta)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\varphi}{dt} &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ (Y_\varphi^{eq})^2 [2 - (\zeta + \bar{\zeta}) - (\zeta - \bar{\zeta}) Y_B] - (Y_\varphi)^2 [2 - (\bar{\zeta} + \zeta)] \right\} \\ &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ 2 \left[1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] [(Y_\varphi^{eq})^2 - (Y_\varphi)^2] - (\zeta - \bar{\zeta}) (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

Ecuación 5.16b

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1}}{2E_{a_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2}}{2E_{a_2}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}(2\pi)^3} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2}) \left\{ [f_\varphi^{eq}(p_1) f_\varphi^{eq}(p_2)] [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right. \\ &\quad \left. + (\zeta - \bar{\zeta}) f_\varphi(p_1) f_\varphi(p_2) \right\} |\mathcal{M}_0(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2, \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

distribuyendo las integrales,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{a_1} 2E_{a_2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2 [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{a_1} 2E_{a_2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_1}}{2E_{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{b_2}}{2E_{b_2}} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\delta(p_{b_1} + p_{b_2} - p_{a_1} - p_{a_2})}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_0|^2 (\zeta - \bar{\zeta}) \right\} \\
&\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} (v\sigma_0) [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} (v\sigma_0) (\zeta - \bar{\zeta}) \right\}, \tag{E.40}
\end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por las integrales de las distribuciones de energías entrantes, las cuales esencialmente representan las densidades del número de partículas (en equilibrio en el caso del primer término),

$$\begin{aligned}
\frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \frac{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2) (v\sigma_0)}{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} \right. \\
&\quad \times \left. [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \frac{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2) (v\sigma_0)}{\int d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1) \int d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} \right. \\
&\quad \times \left. (\zeta - \bar{\zeta}) \right\}, \tag{E.41}
\end{aligned}$$

se obtiene el promedio de la cross section en ambos casos,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi^{eq}(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi^{eq}(p_2)}{(2\pi)^3} [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_1} f_\varphi(p_1)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{a_2} f_\varphi(p_2)}{(2\pi)^3} (\zeta - \bar{\zeta}) \right\}, \tag{E.42}
\end{aligned}$$

reescribiendo en términos de la densidad del número de partículas,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_B}{dt} &\simeq \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle n_\varphi^{eq} n_\varphi^{eq} [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2n_\gamma} \left\{ \langle v\sigma_0 \rangle n_\varphi n_\varphi (\zeta - \bar{\zeta}) \right\} \\
&\simeq \frac{n_\gamma}{2} \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{n_\varphi^{eq} n_\varphi^{eq}}{n_\gamma n_\gamma} [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] + \frac{n_\varphi n_\varphi}{n_\gamma n_\gamma} (\zeta - \bar{\zeta}) \right\} \\
&\simeq \frac{n_\gamma}{2} \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ Y_\varphi^{eq} Y_\varphi^{eq} [(3 + \bar{\zeta})(1 - Y_B) - (3 + \zeta)(1 + Y_B)] + Y_\varphi Y_\varphi (\zeta - \bar{\zeta}) \right\}, \tag{E.43}
\end{aligned}$$

finalmente resolviendo,

$$\begin{aligned} \frac{dY_B}{dt} &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{(Y_\varphi^{eq})^2}{2} ([-(6 + \bar{\zeta} + \zeta)Y_B - (\zeta - \bar{\zeta})] + \frac{(Y_\varphi)^2}{2} (\zeta - \bar{\zeta})) \right\} \\ &\simeq n_\gamma \langle v\sigma_0 \rangle \left\{ \frac{(\zeta - \bar{\zeta})}{2} [(Y_\varphi)^2 - (Y_\varphi^{eq})^2] - \left[3 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right] (Y_\varphi^{eq})^2 Y_B \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

E.5. Mecanismo de bariogénesis

E.5.1. Ecuación 6.10

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X &= \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X) |\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 - f_X(p_X) |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \\ &\quad + f_b(p_1) f_b(p_2) |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 + f_{\bar{b}}(p_1) f_{\bar{b}}(p_2) |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2], \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

usando (6.6),

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X &\simeq \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X) (|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2) \\ &\quad + f_X^{eq}(p_X)(1 + Y_B) |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 + f_{\bar{X}}^{eq}(p_{\bar{X}})(1 - Y_B) |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2] \\ &\simeq \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X) (|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2) \\ &\quad + f_X^{eq}(p_X) |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 + f_{\bar{X}}^{eq}(p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2 \\ &\quad + Y_B (f_X^{eq}(p_X) |\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 - f_{\bar{X}}^{eq}(p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2)], \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

en equilibrio $f_X^{eq}(p_X) = f_{\bar{X}}^{eq}(p_{\bar{X}})$, dado que $E_X = E_{\bar{X}}$,

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X &\simeq \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X) (|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2) \\ &\quad + f_X^{eq}(p_X) (|\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 + |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2) \\ &\quad + Y_B f_X^{eq}(p_X) (|\mathcal{M}(bb \rightarrow X)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{b}\bar{b} \rightarrow X)|^2)], \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

por la unietariedad en transiciones (2.48) para el segundo y la parametrización (6.2) para el tercer término se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X &\simeq \Lambda_{12}^X [-f_X(p_X) (|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2) \\ &\quad + f_X^{eq}(p_X) (|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2) \\ &\quad + Y_B f_X^{eq}(p_X) (|\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 - |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2)] \\ &\simeq \Lambda_{12}^X [-(f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{ |\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \} \\ &\quad - Y_B f_X^{eq}(p_X) \{ |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 \}], \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

expandiendo el operador Λ ,

$$\frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X \simeq \Lambda_{12}^X [-(f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{|\mathcal{M}(X \rightarrow bb)|^2 + |\mathcal{M}(X \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2\} - Y_B f_X^{eq}(p_X) \{|\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow bb)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2\}] \quad (\text{E.49})$$

$$\frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{ \Gamma(X \rightarrow bb) + \Gamma(X \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \} - Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \{ \Gamma(\bar{X} \rightarrow bb) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \}, \quad (\text{E.50})$$

E.5.2. Ecuación 6.11

$$\frac{dn_X}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_X \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{ \Gamma(X \rightarrow bb) + \Gamma(X \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \} - Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \{ \Gamma(\bar{X} \rightarrow bb) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \}, \quad (\text{E.51})$$

bajo la definición $Y_X = n_x/n_\lambda$ se obtiene que,

$$\dot{Y} = \frac{\dot{n}_x}{n_\gamma} - \frac{n_x \dot{n}_\gamma}{n_\gamma^2} = \frac{\dot{n}_x}{n_\gamma} + \left(\frac{3\dot{R}}{R} \right) \frac{n_x}{n_\gamma}, \quad (\text{E.52})$$

luego (E.51) se escribe,

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \{ \Gamma(X \rightarrow bb) + \Gamma(X \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \} - Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \{ \Gamma(\bar{X} \rightarrow bb) - \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{b}\bar{b}) \}, \quad (\text{E.53})$$

usando (6.7) cómo el ancho de decaimiento en términos de la parametrización (6.2),

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \left\{ \frac{(1+\eta)\frac{1}{2}|\mathcal{M}_0|^2 + (1-\eta)\frac{1}{2}|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi E_X} \right\} - Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \left\{ \frac{(1-\bar{\eta})\frac{1}{2}|\mathcal{M}_0|^2 - (1+\bar{\eta})\frac{1}{2}|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi E_{\bar{X}}} \right\}, \quad (\text{E.54a})$$

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \left[\frac{|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi E_X} \right] + \bar{\eta} Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \left[\frac{|\mathcal{M}_0|^2}{16\pi E_{\bar{X}}} \right], \quad (\text{E.54b})$$

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} (f_X(p_X) - f_X^{eq}(p_X)) \Gamma_X + \bar{\eta} Y_B \int \frac{d^3\mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \Gamma_{\bar{X}}, \quad (\text{E.54c})$$

distribuyendo las integrales,

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X(p_X) \Gamma_X + \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \Gamma_X + \bar{\eta} Y_B \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \Gamma_{\bar{X}}, \quad (\text{E.55})$$

promediando el ancho de decaimiento sobre la distribución de energía entrante,

$$\begin{aligned} n_\gamma \frac{dY_X}{dt} &\simeq - \frac{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X(p_X) \Gamma_X}{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X(p_X)} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X(p_X) + \frac{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X^{eq}(p_X) \Gamma_X}{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X^{eq}(p_X)} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \\ &\quad + \bar{\eta} Y_B \frac{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X^{eq}(p_X) \Gamma_{\bar{X}}}{\int d^3 \mathbf{p}_X f_X^{eq}(p_X)} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) \\ &\simeq - \langle \Gamma_X \rangle \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X(p_X) + \langle \Gamma_X \rangle \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X) + \bar{\eta} Y_B \langle \Gamma_{\bar{X}} \rangle \int \frac{d^3 \mathbf{p}_X}{(2\pi)^3} f_X^{eq}(p_X), \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

por la definición de la densidad del número de partículas,

$$n_\gamma \frac{dY_X}{dt} \simeq - \langle \Gamma_X \rangle (n_X - n_X^{eq}) + \langle \Gamma_{\bar{X}} \rangle \bar{\eta} Y_B n_X^{eq}, \quad (\text{E.57})$$

dado que $\Gamma_X = \Gamma_{\bar{X}}$ bajo conjugación CPT, (E.51) se escribe finalmente como:

$$\frac{dY_X}{dt} \simeq - \langle \Gamma_X \rangle [(Y_X - Y_X^{eq}) - \bar{\eta} Y_B Y_X^{eq}], \quad (\text{E.58})$$

E.5.3. Ecuación 6.23

$$\begin{aligned} & - \frac{2Y_B}{n_\gamma} \Lambda_{12}^{34} e^{-(E_1+E_2)/T} [|\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow bb)|^2] \\ &= - \frac{2Y_B}{n_\gamma} \frac{1}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad e^{-(E_1+E_2)/T} [|\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow bb)|^2] \\ &= - \frac{2Y_B}{n_\gamma} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{p}_1 \int d^3 \mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2E_4} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2} \\ &\quad [|\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow \bar{b}\bar{b})|^2 + |\mathcal{M}'(b_1 b_2 \rightarrow bb)|^2] \\ &= - \frac{2Y_B}{n_\gamma} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{p}_1 \int d^3 \mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} (v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)) \\ &= - 2Y_B n_\gamma \frac{1}{n_\gamma^2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{p}_1 \int d^3 \mathbf{p}_2 e^{-(E_1+E_2)/T} (v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)) \\ &= - 2Y_B n_\gamma \langle v\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + v\sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb) \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

E.6. Solución del mecanismo

E.6.1. Ecuación 8.1

Reescribiendo bajo ley de la cadena,

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx}, \quad (\text{E.60})$$

dado que $x = m_X/T$,

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT}{dt} \frac{dx}{dT} \frac{d}{dx} = \frac{dT}{dt} \left(-\frac{m_X}{T^2} \right) \frac{d}{dx}, \quad (\text{E.61})$$

gracias a (4.67),

$$\frac{d}{dt} = \left(-\frac{T^3}{m_P} \right) \left(-\frac{m_X}{T^2} \right) \frac{d}{dx} = \frac{T m_X}{m_P} \frac{d}{dx} = \frac{m_X^2}{x m_P} \frac{d}{dx}, \quad (\text{E.62})$$

finalmente,

$$\frac{d}{dt} = \frac{m_X x_P}{x} \frac{d}{dx}. \quad (\text{E.63})$$

E.6.2. Ecuación 8.9

Si $(Y_B, Y_- \ll 1)$,

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -A(x) [Y_+ - Y_+^{eq}], \quad (\text{E.64a})$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq 0, \quad (\text{E.64b})$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq A(x) [(\eta - \bar{\eta}) (Y_+ - Y_+^{eq})] = A(x) [\varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq})]. \quad (\text{E.64c})$$

E.6.3. Ecuación 8.11

Dado que $Y_B \ll 1$,

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \{Y_+ - Y_+^{eq}\}, \quad (\text{E.65a})$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \{Y_- - Y_B Y_+^{eq}\}, \quad (\text{E.65b})$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq \frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \varepsilon \{Y_+ - Y_+^{eq}\}, \quad (\text{E.65c})$$

dado que se encontró que el promedio del ancho de decaimiento se puede escribir como (8.7),

$$\langle \Gamma_X \rangle = \left\langle \frac{m_X}{E_x} \right\rangle \Gamma_X = \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \Gamma_X, \quad (\text{E.66})$$

y además, la fracción de la densidad del número de partículas en equilibrio con la densidad del número de partículas no interactuantes del fondo se describe bajo la función de Bessel modificada de segundo tipo (8.6),

$$Y_+^{eq} = Y_X^{eq} = \frac{1}{2}x^2 K_2(x), \quad (\text{E.67})$$

se obtiene,

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\Gamma_X}{m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \left\{ Y_+ - \frac{x^2}{2} K_2(x) \right\}, \quad (\text{E.68a})$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\Gamma_X}{m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \left\{ Y_- - Y_B \frac{x^2}{2} K_2(x) \right\}, \quad (\text{E.68b})$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq \frac{x}{x_P} \frac{\Gamma_X}{m_X} \varepsilon \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \left\{ Y_+ - \frac{x^2}{2} K_2(x) \right\}, \quad (\text{E.68c})$$

luego, reescribiendo A' y expandiendo en series,

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq = -A'x^2 \left[1 + \frac{1}{2}x^2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + \dots \right] \left\{ Y_+ - \left[1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 \log\frac{1}{2}x + \dots \right] \right\}, \quad (\text{E.69a})$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq = -A'x^2 \left[1 + \frac{1}{2}x^2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + \dots \right] \left\{ Y_- - Y_B \left[1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 \log\frac{1}{2}x + \dots \right] \right\}, \quad (\text{E.69b})$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq = -A'\varepsilon x^2 \left[1 + \frac{1}{2}x^2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + \dots \right] \left\{ Y_+ - \left[1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 \log\frac{1}{2}x + \dots \right] \right\}, \quad (\text{E.69c})$$

finalmente,

$$\frac{dY_+}{dx} \simeq -A'x^2 \left\{ Y_+ - 1 + \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4 \log x) + \mathcal{O}(x^2(Y_+ - 1)) + \dots \right\}, \quad (\text{E.70a})$$

$$\frac{dY_-}{dx} \simeq -A'x^2 \{ Y_- - Y_B + \dots \}, \quad (\text{E.70b})$$

$$\frac{dY_B}{dx} \simeq -A'\varepsilon x^2 \left\{ Y_+ - 1 + \frac{1}{4}x^2 + \dots \right\}. \quad (\text{E.70c})$$

E.6.4. Ecuación 8.15

$$\langle s \rangle = \frac{1}{\int_0^\infty d^3\mathbf{p}_1 e^{-E_1/T} \int_0^\infty d^3\mathbf{p}_2 e^{-E_2/T}} \int_0^\infty d^3\mathbf{p}_1 e^{-E_1/T} \int_0^\infty d^3\mathbf{p}_2 e^{-E_2/T} s \quad (\text{E.71})$$

por (7.5),

$$\begin{aligned}\langle s \rangle &= \frac{1}{(8\pi T^3)^2} \int_0^\infty d^3\mathbf{p}_1 e^{-E_1/T} \int_0^\infty d^3\mathbf{p}_2 e^{-E_2/T} s \\ &= \frac{8\pi^2}{(8\pi T^3)^2} \int_0^\infty e^{-E_1/T} |p_1|^2 dp_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} |p_2|^2 dp_2 \int_0^\pi s \sin \theta d\theta,\end{aligned}\quad (\text{E.72})$$

reescribiendo en términos de $E_i = p_i$,

$$\langle s \rangle = \frac{1}{8\pi T^6} \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1^2 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2^2 dE_2 \int_0^\pi s \sin \theta d\theta,$$

bajo el cambio de variable $s = (E_1 + E_2)^2 - (|p_1|^2 + |p_2|^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta)$, en el límite relativista,

$$\begin{aligned}\langle s \rangle &= \frac{1}{8\pi T^6} \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1^2 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2^2 dE_2 \int_0^{4E_1 E_2} s \frac{ds}{2E_1 E_2}, \\ &= \frac{1}{16\pi T^6} \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2 dE_2 (8E_1^2 E_2^2), \\ &= \frac{1}{2\pi T^6} \int_0^\infty e^{-E_1/T} E_1^3 dE_1 \int_0^\infty e^{-E_2/T} E_2^3 dE_2, \\ &= \frac{1}{2\pi T^6} \left[T^4 \int_0^\infty e^{-z} z^3 dz \right]^2 = \frac{T^2}{2\pi} (\Gamma[4])^2 = 18T^2.\end{aligned}\quad (\text{E.73})$$

E.6.5. Ecuación 8.16

$$\begin{aligned}\frac{dY_B}{dx} &\simeq -2Y_B A(x) \left\{ Y_+^{eq} + \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \right\}, \\ &\simeq -2Y_B A(x) \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle, \\ &\simeq -2Y_B \frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} 576\pi \frac{\alpha^2}{x^2 m_X^2} = -2Y_B \frac{x}{x_P m_X} \frac{T^3}{\pi^2} 576\pi \frac{\alpha^2}{x^2 m_X^2}, \\ &\simeq -1152 \frac{\alpha^2}{\pi x_P} \frac{Y_B}{x^4},\end{aligned}\quad (\text{E.74})$$

E.6.6. Ecuación 8.19

$$\begin{aligned}
\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \left\{ (Y_+ - Y_+^{eq}) + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\
\frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \{ Y_- - Y_B Y_+^{eq} \}, \\
\frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x}{x_P} \frac{\langle \Gamma_X \rangle}{m_X} \left[\{ \varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \} \right. \\
&\quad \left. - 2Y_B \{ Y_+^{eq} + \frac{n_\gamma}{\langle \Gamma_X \rangle} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \} \right],
\end{aligned} \tag{E.75}$$

reescribiendo el promedio del ancho de decaimiento,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \Gamma_X \left\{ Y_+ - Y_+^{eq} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\
\frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \Gamma_X \{ Y_- - Y_B Y_+^{eq} \}, \\
\frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \Gamma_X \left[\{ \varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \} \right. \\
&\quad \left. - 2Y_B \{ Y_+^{eq} + n_\gamma \frac{K_2(x)}{K_1(x) \Gamma_X} \langle v[\sigma'(bb \rightarrow \bar{b}\bar{b}) + \sigma'(\bar{b}\bar{b} \rightarrow bb)] \rangle \} \right],
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} m_X \alpha \left\{ Y_+ - Y_+^{eq} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\
\frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} m_X \alpha \{ Y_- - Y_B Y_+^{eq} \}, \\
\frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x}{x_P m_X} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} m_X \alpha \left[\{ \varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \} \right. \\
&\quad \left. - 2Y_B \{ Y_+^{eq} + n_\gamma \frac{K_2(x)}{K_1(x)} \frac{4}{m_X \alpha} \langle v[\sigma'] \rangle \} \right],
\end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned}
\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} \alpha \left\{ Y_+ - Y_+^{eq} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \right\}, \\
\frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x}{x_P} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} \alpha \{ Y_- - Y_B Y_+^{eq} \}, \\
\frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x}{x_P} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \frac{1}{4} \alpha \left[\{ \varepsilon (Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \} \right. \\
&\quad \left. - 2Y_B \{ Y_+^{eq} + n_\gamma \frac{K_2(x)}{K_1(x)} \frac{4}{m_X \alpha} \langle v[\sigma'] \rangle \} \right],
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_B Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x\alpha}{4x_P} \left[\left\{ \varepsilon(Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \right\} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - 2Y_B \left\{ Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{T^3}{\pi^2} \frac{4}{m_X \alpha} \langle v[\sigma'] \rangle \right\} \right],\end{aligned}\tag{E.76}$$

con esto,

$$\begin{aligned}\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_B Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x\alpha}{4x_P} \left[\left\{ \varepsilon(Y_+ - Y_+^{eq}) + 2Y_- \right\} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - 2Y_B \left\{ Y_+^{eq} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{4m_X^2}{\pi^2 \alpha x^3} \langle v[\sigma'] \rangle \right\} \right],\end{aligned}\tag{E.77}$$

reemplazando el valor de Y_+^{eq} ,

$$\begin{aligned}\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - \frac{1}{2} x^2 K_2(x) \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{\varepsilon}{2} Y_B \frac{1}{2} x^2 K_2(x) \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_B \frac{1}{2} x^2 K_2(x) \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\}, \\ \frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x\alpha}{4x_P} \left[\left\{ \varepsilon(Y_+ - \frac{1}{2} x^2 K_2(x)) + 2Y_- \right\} \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - 2Y_B \left\{ \frac{1}{2} x^2 K_2(x) \frac{K_1(x)}{K_2(x)} + \frac{4m_X^2}{\pi^2 \alpha x^3} \langle v[\sigma'] \rangle \right\} \right],\end{aligned}\tag{E.78}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{dY_+}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - \frac{1}{2} x^2 K_1(x) + \frac{\varepsilon}{2} Y_B \frac{1}{2} x^2 K_1(x) \right\}, \\ \frac{dY_-}{dx} &\simeq -\frac{x\alpha}{4x_P} \left\{ Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - Y_B \frac{1}{2} x^2 K_1(x) \right\}, \\ \frac{dY_B}{dx} &\simeq \frac{x\alpha}{4x_P} \left[\left\{ \varepsilon(Y_+ \frac{K_1(x)}{K_2(x)} - \frac{1}{2} x^2 K_1(x)) + 2Y_- \frac{K_1(x)}{K_2(x)} \right\} - 2Y_B \left\{ \frac{1}{2} x^2 K_1(x) + \frac{4m_X^2}{\pi^2 \alpha x^3} \langle v[\sigma'] \rangle \right\} \right].\end{aligned}\tag{E.79}$$

Apéndice F

Funciones modificadas de Bessel de segundo tipo

Ecuación (5.11).

Sea una de las representaciones integrales que dan solución a la ecuación diferencial modificada de Bessel, denominadas como de segundo tipo, de la forma,

$$K_v(x) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^v}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-xt} (t^2 - 1)^{v-\frac{1}{2}} dt \quad (\text{F.1})$$

F.1. Tratamiento en primer orden

Haciendo $v = 1$,

$$K_1(x) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_1^\infty x e^{-xt} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt = \int_1^\infty x e^{-xt} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (\text{F.2})$$

bajo el cambio de variable $z = xt$,

$$K_1(x) = \int_x^\infty x e^{-z} \left(\frac{z^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{x} = \int_x^\infty e^{-z} \frac{(z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} dz, \quad (\text{F.3})$$

finalmente,

$$K_1(x) = x^{-1} \int_x^\infty e^{-z} \sqrt{z^2 - x^2} dz. \quad (\text{F.4})$$

F.2. Tratamiento en segundo orden

Haciendo $v = 2$,

$$K_2(x) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_1^\infty x^2 e^{-xt} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{3} \int_1^\infty x^2 e^{-xt} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt, \quad (\text{F.5})$$

bajo el cambio de variable $z = xt$,

$$\frac{1}{3} \int_1^\infty x^2 e^{-z} \left(\frac{z^2}{x^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{dz}{x} = \frac{1}{3} \int_x^\infty x e^{-z} \frac{(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} dz = \frac{1}{3x^2} \int_x^\infty e^{-z} (z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dz, \quad (\text{F.6})$$

resolviendo la integral por partes,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-z} (z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dz &= \left| -(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} e^{-z} \right|_x^\infty + 3 \int_x^\infty z e^{-z} (z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dz, \\ &= 3 \int_x^\infty z e^{-z} (z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dz, \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

finalmente,

$$K_2(x) = x^{-2} \int_x^\infty z e^{-z} \sqrt{z^2 - x^2} dz. \quad (\text{F.8})$$

Bibliografía

- [1] A. D. Sakharov, “Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe,” *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 5, pp. 32–35, 1967.
- [2] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, E. Komatsu, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, E. Wollack, J. Dunkley, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, and E. L. Wright, “Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: final maps and results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, p. 20, Sept. 2013.
- [3] P. Barry, “The hunt for the antihelium,” *Science news*, vol. 171, p. 296, 2007.
- [4] M. Peskin, “The matter with antimatter,” *Nature.*, vol. 419, p. 25, 2002.
- [5] F. K., “Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories,” *Phys. Rev. Lett.*, p. 1195, 1979.
- [6] D. Toussaint, S. B. Treiman, F. Wilczek, and A. Zee, “Matter-antimatter accounting, thermodynamics, and black-hole radiation,” *Phys. Rev. D*, vol. 19, pp. 1036–1045, Feb 1979.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, ch. 6, pp. 189–212. John Wiley and Sons, Ltd, 1987.
- [8] M. Srednicki, *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1 2007.
- [9] J. A. Harvey, E. W. Kolb, D. B. Reiss, and S. Wolfram, “Calculation of Cosmological Baryon Asymmetry in Grand Unified Gauge Models,” *Nucl. Phys. B*, vol. 201, pp. 16–100, 1982.
- [10] E. W. Kolb and M. S. Turner, “Grand Unified Theories and the Origin of the Baryon Asymmetry,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 33, pp. 645–696, 1983.
- [11] E. W. Kolb and S. Wolfram, “Baryon Number Generation in the Early Universe,” *Nucl. Phys. B*, vol. 172, p. 224, 1980. [Erratum: *Nucl.Phys.B* 195, 542 (1982)].
- [12] D. V. Nanopoulos and S. Weinberg, “Mechanisms for cosmological baryon production,” *Phys. Rev.*, vol. D20, p. 2484, 1979.

- [13] D. Baumann, *Cosmology*. Cambridge University Press, 7 2022.
- [14] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, ch. 15, p. 469. Wiley, New York., 1972.
- [15] O. Darrigol, “The Boltzmann Equation and the H Theorem (1872–1875),” in *Atoms, Mechanics, and Probability: Ludwig Boltzmann’s Statistico-Mechanical Writings - An Exegesis*, Oxford University Press, 02 2018.
- [16] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [17] B. W. Lee and S. Weinberg, “Cosmological lower bound on heavy-neutrino masses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 39, pp. 165–168, 1977.
- [18] S. Weinberg, “Cosmological production of baryons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, pp. 850–853, Mar 1979.
- [19] A. D. Dolgov and Y. B. Zeldovich, “Cosmology and elementary particles,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 53, pp. 1–41, Jan 1981.
- [20] E. W. Kolb and S. Raby, “Baryon Number Generation in Supersymmetric Unified Models: The Effect of Supermassive Fermions,” *Phys. Rev. D*, vol. 27, p. 2990, 1983.
- [21] J. N. Fry, K. A. Olive, and M. S. Turner, “Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of gauge bosons,” *Phys. Rev. D*, vol. 22, pp. 2953–2976, Dec. 1980.
- [22] J. N. Fry, K. A. Olive, and M. S. Turner, “Evolution of cosmological baryon asymmetries. II. The role of Higgs bosons,” *Phys. Rev. D*, vol. 22, pp. 2977–2988, Dec. 1980.
- [23] J. A. Harvey, E. W. Kolb, D. B. Reiss, and S. Wolfram, “Cosmological baryon-number generation in grand unified models,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 47, pp. 391–394, Aug 1981.
- [24] T. Hahn, “Cuba—a library for multidimensional numerical integration,” *Computer Physics Communications*, vol. 168, p. 78–95, June 2005.
- [25] E. W. Kolb, *The Early Universe*, vol. 69. Taylor and Francis, 5 2019.
- [26] T.-H. Yeh, J. Shelton, K. A. Olive, and B. D. Fields, “Probing physics beyond the standard model: limits from bbn and the cmb independently and combined,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2022, p. 046, Oct. 2022.