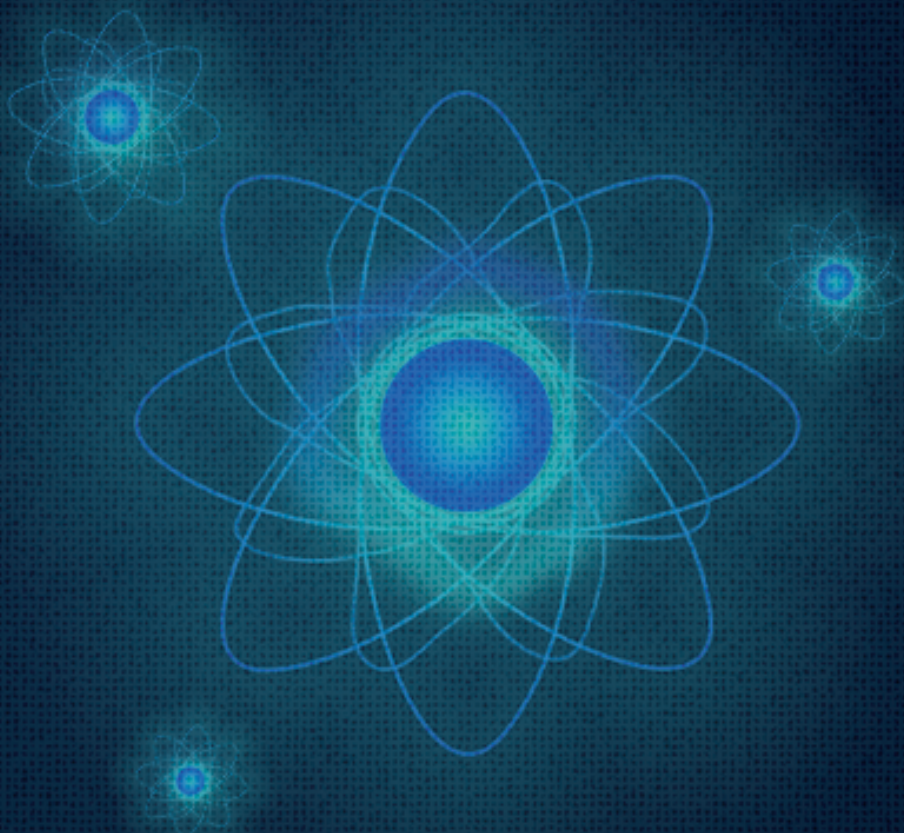


TEORÍA DE FOTONES, ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA Y CÓDIGOS LINEALES



German Enrique Ramos Zambrano
Zulma Estela Muñoz Burbano
John H. Castillo



Editorial
Universidad de Nariño

êditorial

Universidad de **Nariño**

TEORÍA DE FOTONES, ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA Y CÓDIGOS LINEALES

TEORÍA DE FOTONES, ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA Y CÓDIGOS LINEALES

German Enrique Ramos Zambrano
Zulma Estela Muñoz Burbano
John Hermes Castillo Gómez

Ramos Zambrano, German Enrique

Teoría de fotones, estructura atómica de la materia y códigos lineales / German Enrique Ramos Zambrano, Zulma Estela Muñoz Burbano, John Hermes Castillo Gómez—1ª. ed. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2024

112 páginas : gráficas, tablas

Incluye bibliografía al final de cada capítulo y reseña de los autores p. 106-107

ISBN: 978-628-7679-85-6

1. Estructura atómica de la materia—Enseñanza- aprendizaje 2. Formulación de Faddeev-Jackiw 3. Campo electromagnético 4. Teoría de códigos 5. Campo de Dirac. 6. Teoría de fotones I. Muñoz Burbano, Zulma Estela II. Castillo Gómez, John Hermes

539 R175 – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Teoría de fotones, estructura atómica de la materia y códigos lineales

© Editorial Universidad de Nariño.

© Editor: Gustavo Marmolejo Avenia

© German Enrique Ramos Zambrano

© Zulma Estela Muñoz Burbano

© John Hermes Castillo Gómez

ISBN: 978-628-7679-85-6

Corrección de Estilo: Gonzalo Jiménez Mahecha

Diseño de Portada: Sergio Arley Bastidas Rosero

Diagramación: Sergio Arley Bastidas Rosero

Fecha de publicación: Octubre 2024

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia.

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su autor o de la editorial Universidad de Nariño.

Índice general

1. Formulación de Faddeev-Jackiw en las Coordenadas de Plano Nulo	10
1.1 Introducción	10
1.2 Problema de Valores Iniciales Sobre el Plano Nulo	12
1.3 Formalismo de Faddeev - Jackiw en Teoría de Campos	16
1.4 Campo Electromagnético	22
1.5 Campo de Dirac	27
1.6 Conclusiones	31
1.7 Apéndice	32
2. Estructura Atómica de la Materia: dificultades de aprendizaje y resultados de una propuesta de enseñanza	39
2.1 Introducción	39
2.2 Contextualización del problema de la enseñanza de la Estructura Atómica de la materia	41
2.3 Algunos referentes conceptuales y didácticos que sustentan la enseñanza de la Estructura atómica de la Materia	42
2.4 Desarrollo y proceso metodológico de la investigación	44
2.4.1 Naturaleza metodológica	45
2.5 Resultados y análisis	48
2.5.1 Resultados del pre-test	48
2.5.2 Diseño de la Secuencia de enseñanza	53

2.5.3 Resultados obtenidos con la aplicación de la Secuencia de Enseñanza	57
2.6 Conclusiones	63
3. Introducción a códigos lineales con SageMath	73
3.1 Introducción: un panorama general	73
3.2 El computador como un laboratorio para “hacer matemáticas”	79
3.3 Introducción a la Teoría de Códigos	80
3.4 Construcción de elementos básicos en Sage Math	83
3.5 Códigos de bloque y códigos lineales	88
3.6 Codificación y decodificación en códigos lineales	96
4. Los Autores	106
4.1 German Enrique Ramos Zambrano	106
4.2 Zulma Estela Muñoz Burbano	106
4.3 John Hermes Castillo Gómez	107

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño (FACIEN) fomenta la investigación científica en las Ciencias naturales, las Matemáticas, la Informática y la Estadística, así como en las pedagogías y didácticas que suscitan el estudio de estas disciplinas. La Colección Permanente de Publicaciones Docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño funge como un recurso visibilizador de los resultados, productos y reflexiones de interés en los grupos de investigación de la FACIEN. En ocasiones, con el objeto de propiciar o fortalecer redes de investigación, se consideran obras realizadas por grupos de investigación ajenos a la FACIEN.

Este libro titulado *TEORÍA DE FOTONES, ESTRUCTRA ATÓMICA DE LA MATERIA Y CÓDIGOS LINEALES* expone cuestiones de interés de los grupos de investigación ERM, Altas energías y GIDEP, los dos primeros grupos pertenecientes a la FACIEN, el tercer grupo a la Facultad de educación. Este libro corresponde al segundo volumen de la Colección Permanente de Publicaciones Docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño. Se estructura en tres capítulos: Formulación de Faddeev-Jackiw en las Coordenadas de Plano Nulo, Estructura Atómica de la Materia: dificultades de aprendizaje y resultados de una propuesta de enseñanza e Introducción a los códigos lineales con SageMath.

En el primer capítulo, se expone un análisis consistente de la teoría electromagnética y del campo de Dirac en las coordenadas de plano nulo bajo la formulación de Faddeev-Jackiw. En este capítulo, inicialmente, se hace referencia al problema de condiciones iniciales que son necesarias considerar con el fin de garantizar que los resultados derivados son matemáticamente consistentes. Posteriormente, se introduce la formulación de Faddeev-Jackiw aplicada a teoría de campos con el propósito de mostrar la manera como se derivan los corchetes generalizados de un problema. En seguida, se analiza el campo electromagnético y se determina cómo la simetría de Gauge de la teoría en las coordenadas de plano nulo se ve reflejada por la naturaleza singular de la matriz simpléctica correspondiente. Así la implementación de la condición de Gauge de plano nulo garantiza la obtención de corchetes generalizados asociados a los campos. Finalmente, un estudio clásico del campo de Dirac es realizado, para el cual la formulación de Faddeev-Jackiw es extendida con el fin de describir variables anticonmutantes. La estructura simpléctica es derivada y los corchetes generalizados fundamentales son derivados para los grados de libertad que describe la teoría.

El segundo capítulo presenta el reporte de una investigación en el campo de la didáctica de las ciencias experimentales. Presenta los resultados de una investigación que busca conocer los conceptos que los estudiantes de I Semestre de Licenciatura en Ciencias Naturales de la Universidad de Nariño relacionan con la estructura atómica de la materia, tales como: propiedades de los objetos cuánticos, números cuánticos, relaciones de indeterminación, niveles de energía. Igualmente, establecer si los conceptos de estos estudiantes evolucionan con la aplicación de una secuencia de enseñanza encaminada a reflexionar sobre la ruptura entre los conceptos clásicos y los conceptos cuánticos para explicar la estructura de la materia. Para ello, se estableció una metodología cuasi-experimental, desarrollada en dos etapas: 1) análisis de conceptos y 2) diseño y aplicación de la secuencia de enseñanza. Se parte de la base conceptual del Socio-constructivismo de Vygotsky para determinar el significado y sentido de las actividades planteadas para estudiantes de Primer semestre de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental con quienes se desarrolló un pre-test y post-test, de donde se concluye que, por un lado, los estudiantes no relacionan conceptos de la teoría cuántica para explicar la estructura de la materia y, por otro lado, la aplicación de la secuencia favoreció la evolución de los conceptos que los estudiantes relacionan con la temática.

Finalmente, en el tercer capítulo se describe una praxeología que realza el papel que desempeña el software de álgebra computacional SageMath en la implementación de funciones sencillas para promover el estudio de la teoría de códigos correctores de errores a través del uso de computadores, pues, en las últimas décadas, se ha experimentado un aumento significativo en el interés sobre la transmisión y almacenamiento de información, cuestión que, a su vez, ha suscitado el diseño de métodos que posibilitan altos niveles de confiabilidad y seguridad en el manejo de datos. En este contexto surgió la Teoría de Códigos Correctores de Errores. En este sentido, en este capítulo se expone la introducción a la teoría de códigos lineales. En particular, se evidencian estrategias para la implementación y ejemplificación de ideas y conceptos asociados a la teoría de códigos correctores de errores a través del uso del SageMath.

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO
EDITOR

1. Formulación de Faddeev–Jackiw en las Coordenadas de Plano Nulo

1.1 Introducción

Dirac estableció tres formas de dinámica relativista las cuales dependían de las superficies sobre las cuales se imponían las condiciones iniciales (Dirac, 1949). La primera la denominó *instante forma*, la cual consiste de una superficie tipo espacio y es en donde se establecen los corchetes de Poisson o las relaciones de conmutación. La segunda, identificada como *punto forma*, escoge una rama de superficie hiperbólica $x^\mu x_\mu = \kappa^2$ con $x^0 > 0$. Finalmente, *el frente forma ó frente de luz*, el cual selecciona la superficie de una onda de luz. Ésta se conoce en la literatura como el *formalismo de plano nulo*.

Una teoría relativista sobre el plano nulo se caracteriza por que es descrita por Lagrangianos singulares, es decir, es un sistema que posee ligaduras (Hanson et al., 1976), con lo cual un método apropiado deber ser utilizado para realizar un estudio consistente del problema. En general, esto tiende a disminuir el número de grados de libertad necesarios para describir la teoría en el espacio de fase.

A tiempos iguales, puntos distintos del espacio-tiempo poseen separación tipo espacio, así, campos definidos en ellos son cantidades independientes. Sobre el plano nulo el principio de microcausalidad conduce a un requerimiento de localidad solo en componentes transversales en tanto que las componentes longitudinales resultan ser no locales en la teoría (Srivastava, 2000). Además, es posible verificar que la transformación de las coordenadas del instante forma a las coordenadas de plano nulo no son una transformación de Lorentz

y, por tanto la estructura del espacio de fase es diferente cuando se compara con el espacio convencional. Así, una descripción de un sistema físico en el formalismo de plano nulo podría suministrar información adicional de aquella que resulta en el formalismo convencional (Srivastava, 2000).

Se observó que cuantizar en el plano nulo es equivalente a cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo. Por tanto, se debe especificar los datos de Cauchy sobre las características $x^+ = \text{cte}$ y $x^- = \text{cte}$, y no solamente en una de ellas (Rohrlich, 1971) con el fin de realizar una correcta descripción física del sistema (McCartor, 1988).

Por otra parte, se mostró que un importante problema que surge de cuantizar sobre el plano nulo, es que después de imponer condiciones de gauge con la finalidad de eliminar la arbitrariedad en las soluciones de las ecuaciones de movimiento a consecuencia de la libertad de gauge que un problema puede tener; resulta en el análisis de transformaciones de gauge impropias que están relacionadas con el modo cero del operador longitudinal ∂_- y son consecuencia de la carencia de condiciones de frontera apropiadas sobre los campos (Benguria et al., 1976).

El presente trabajo se enfoca en el estudio del campo electromagnético y de Dirac en las coordenadas de plano nulo siguiendo el formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ). El trabajo se organiza de la siguiente manera: En la sección **1.2** se estudiarán el problema de condiciones de frontera en las coordenadas de plano nulo lo que permitirá garantizar que la inversa asociado al operador longitudinal ∂_- y los corchetes generalizados que se van a deducir estén bien definidos. En la sección **1.3** se revisará el método de Faddeev-Jackiw aplicado a teoría de campos que son descritos por Lagrangianos singulares. En la sección **1.4** se estudiará el campo de Dirac via formalismo de FJ extendido a teorías que son descritas por variables de Grassmann. Posteriormente, la sección **1.5** se enfocará al estudio de campo electromagnético y se destacarán las características de una teoría de gauge en las coordenadas de plano nulo. Finalmente, en la sección **1.6** se presentaran las conclusiones.

1.2 Problema de Valores Iniciales Sobre el Plano Nulo

Considérese el campo escalar $\phi(x)$ que satisface la ecuación de Klein-Gordon-Fock (KGF):

$$(\square_x + m^2) \phi(x) = 0. \quad (1.1)$$

El campo evaluado en un punto arbitrario y está determinado si se especifican condiciones iniciales, consistentes con el valor del campo y su derivada temporal, sobre una superficie tipo espacio Σ . Así, para un punto y fuera de la superficie Σ , la solución de (1.1) es (Roman, 1969):

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int_{\Sigma} d^4x [\Delta(y-x) \partial_{\mu}^x \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu}^x \Delta(y-x)] \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}^x \phi(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

en que $\Delta(y-x)$ identifica la función de Schwinger que se caracteriza por:

- Ser solución de la ecuación homogénea de KGF.
- Real.
- Nula fuera del cono de luz.
- Antisimétrica.

Como tal, el resultado derivado en (1.2) garantiza que $\phi(y)$ sea consistente con el principio de causalidad.

Si Σ es una superficie a tiempo constante $x^0 = \text{cte}$, el problema de valores iniciales implica que:

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x). \quad (1.3)$$

La solución se fundamenta en la teoría de Cauchy-Kowalewski de las ecuaciones hiperbólicas (Mathews y Walker, 1965), según la cual la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de campo se garantiza cuando el campo y sus derivadas temporales son conocidas sobre una hiper-superficie tipo espacio.

Ahora, en el caso que Σ sea el plano nulo, la ecuación diferencial (1.1) se escribe como,

$$(\partial^+ \partial^- + \partial_i \partial_i + m^2) \phi = 0, \quad (1.4)$$

que es la ecuación de KGF escrita en su forma canónica (Mathews y Walker, 1965) donde x^{\pm} identifica las superficies características de la ecuación diferencial. La teoría de ecuaciones diferenciales parciales insta a que precisar el valor del campo y un número finito de derivadas sobre una característica no determina una solución única (Ligterink y Bakker, 1993). Por tanto, resolver la ecuación (1.4) implica un problema de valores iniciales característicos donde imponer condiciones sobre las características $x^{\pm} = \text{cte}$ es necesario.

El problema de valores iniciales característicos se formula así: derivar una solución $\phi(x^+, x^-)$ que garantice las condiciones iniciales¹,

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) \quad , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-), \quad (1.5)$$

junto con la condición de continuidad

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-), \quad (1.6)$$

donde los valores de f y g que especifican ϕ en ambas características son denominados de datos característicos. Neville y Rohrlich (1971) indicaron que la solución del problema de valores iniciales característicos es resultado de (1.3) al mostrar que:

$$\partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (1.7)$$

siendo que ϕ y Δ satisfacen la ecuación de KGF. Integrando (1.7) en el volumen definido por ABC (ver Figura 1.1), donde $x^0 = 0$ intercepta la parte posterior del cono de luz del punto P , $AB: x^0 = 0$, $BC: x^+ = x_0^+$ y $AC: x^- = x_0^-$. A partir del teorema de Gauss se deduce:

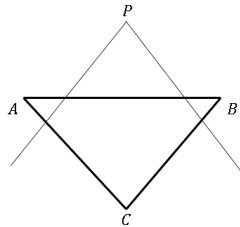
$$\int d^4x \partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0$$

que es equivalente a,

$$\left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (1.8)$$

Figura 1.1

Contorno de integración usado en la derivación de (1.8). Nota. Fuente propia.



¹Se considerará el caso en dos dimensiones por simplicidad.

donde $d\Sigma$ es un elemento de superficie y n^μ un vector normal a esta. De la relación (1.3) se deriva que,

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0^x \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_+^x \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_-^x \phi(x).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Siendo que la normal a un plano nulo se encuentra en el mismo plano, el valor de ϕ sobre el plano conlleva a su derivada normal. Por tanto, la solución de la ecuación de KGF (1.4) para $m \geq 0$ es únicamente determinada por (1.8) en la región conexas limitada por la cuña formada por los planos $x^\pm = \text{cte}$ si ϕ se especifica en los planos (Neville y Rohrlich, 1971).

Dado que Δ desaparece para argumentos de tipo espacio, las integrales en (1.8) se extienden desde el punto C (ver Fig. 1.1) hasta $+\infty$, por tanto, puntos fuera del cono característico de P no contribuyen. Al comparar (1.8) y (1.3) se determina que la solución al problema de Cauchy en término de las condiciones iniciales (1.5), se expresa:

$$\begin{aligned}\phi(x^+, x^-) &= \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ \left[\Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \right] \\ &\quad + \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- \left[\Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \right].\end{aligned}\quad (1.10)$$

Entonces, a fin de obtener una solución única al problema de valores característicos para la ecuación de KGF es necesario especificar condiciones iniciales sobre las dos características.

La relación (1.10) implica que el proceso de cuantización se debe realizar sobre el plano nulo (Domokos, 1972). El conmutador de dos campos escalares libres se se escribe como (Greiner y Reinhardt, 1986):

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y). \quad (1.11)$$

Con lo cual, a tiempos iguales en las coordenadas de instante forma se determina:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(x-y). \quad (1.12)$$

Sin embargo, de (1.3) se puede deducir:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \left\{ [\dot{\phi}(z), \phi(y)] \Delta(x-z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x-z) \right\}_{x^0=z^0}. \quad (1.13)$$

Insertando en (1.13) la expresión (1.12) se obtiene (1.11), de manera que (1.13) es una condición que relaciona el conmutador a tiempos distintos $x^0 > y^0$ con las condiciones de Cauchy a tiempos iguales $x^0 = y^0$ (Heinzl y Werner, 1994).

Para una relación análoga a (1.13) en las coordenadas de plano nulo, se escogerá $x^\pm = 0$; por lo tanto, usando (1.10) se obtiene que el conmutador de campos a tiempos diferentes es dado por:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_0^\infty dz^+ \left[\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x-z) \right]_{x^- = z^-} \\ + \int_0^\infty dz^- \left[\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x-z) \right]_{x^+ = z^+} \quad (1.14)$$

por tanto, para todo x^\pm dos conmutadores independientes deben ser considerados,

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm = y^\pm} = -\frac{i}{4} \varepsilon(x^\mp - y^\mp), \quad (1.15)$$

con lo cual, el problema de valores iniciales característicos se entiende como un proceso de cuantizar en el plano nulo. Ahora, si se desea una formulación Hamiltoniana con un solo parámetro de evolución temporal, los conmutadores se deben establecer sobre una característica, usualmente $x^+ = 0$. Lo anterior implica que condiciones deberán ser impuestas sobre la segunda característica, entre las que se puede considerar: Si se mueve el plano nulo $x^- = \text{cte}$ hacia el pasado distante y se impone,

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \quad x^+ \geq x_0^+, \quad (1.16)$$

la solución (1.10) se escribe (Neville y Rohrlich, 1971; Heinzl y Warner, 1994):

$$\phi(x) = \int_{x^+ = x_0^+} dy^- \Delta(x-y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y). \quad (1.17)$$

Por tanto, especificar ϕ sobre el plano $x^+ = x_0^+$ y la condición asintótica (1.16), la ecuación de KGF, para $m \geq 0$, tendrá una única solución dada por (1.17) en el plano $x^+ \geq x_0^+$ (Neville y Rohrlich, 1971). Cualquier solución de la ecuación de KGF que satisfaga (1.16) y que se anule sobre el plano nulo definido por $x^+ = x_0^+$, también se anula para $x^+ \geq x_0^+$.

1.3 Formalismo de Faddeev-Jackiw en Teoría de Campos

Un formalismo alternativo al Método de Dirac (Dirac, 1964) para estudiar sistemas descritos por Lagrangianos singulares fue desarrollado por Faddeev y Jackiw (Faddeev y Jackiw, 1988). El método se fundamenta en Lagrangianos de primer orden y en el teorema de Darboux (Oliver, 1996) que permite obtener paréntesis generalizados y el Hamiltonianos sin necesidad de utilizar la formulación de Dirac.

La acción mas general que contenga derivadas de primer orden en los campos se construye a partir de densidades Lagrangianas escritas en términos de dos funciones arbitrarias: $[K_A(\varphi^A), V(\varphi^A)]$, es decir,

$$L^{(0)}(\varphi^A, \dot{\varphi}^A) = \dot{\varphi}^A K_A(\varphi^A) - V(\varphi^A). \quad (1.18)$$

Las funcionales $K_A(\varphi^A)$ son las componentes de uno-forma canónica $K(\varphi^A) = K_A(\varphi^A) d\varphi^A$, mientras que $V(\varphi^A)$ se identifica como un potencial simpléctico. El índice A reseña el conjunto completo de variables de campo que caracteriza el sistema mas un conjunto de campos auxiliares necesarios para transformar el Lagrangiano que describe el sistema en una cantidad de primer orden en las derivadas temporales, es decir, en la forma (1.18). Las variables φ^A definirán el espacio de configuración extendido asociado al sistema.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} = 0,$$

para el Lagrangiano (1.18) se expresan en la forma:

$$M_{AB}(\varphi) \dot{\varphi}^B = \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A}. \quad (1.19)$$

donde $M_{AB}(\varphi)$ denota los elementos de la matriz simpléctica y que son componentes de la dos forma $M(\varphi) = dK(\varphi)$ que se expresa como:

$$M_{AB}(\varphi) = M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})}, \quad (1.20)$$

Cuando la matriz M_{AB} no es singular, de (1.19) se determiná:

$$\dot{\varphi}^A(\mathbf{x}) = \int d^3 y [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})}. \quad (1.21)$$

El potencial simpléctico coincide con el Hamiltoniano, que se expresa en términos de la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(\varphi)$ en la forma,

$$V(\varphi) = \int d^3 x \mathcal{H}(\varphi). \quad (1.22)$$

La ecuación (1.21) en términos de los corchetes de Poisson asociados al sistema se escribe:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^A(\mathbf{x}) &= \{\varphi^A(\mathbf{x}), V(\varphi)\} = \int d^3y \{\varphi^A(\mathbf{x}), \varphi^B(\mathbf{y})\} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^B(\mathbf{y})} \quad (1.23) \\ &= \int d^3y [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1} \frac{\partial V}{\partial \varphi^B(\mathbf{y})},\end{aligned}$$

a partir del cual se deduce,

$$\{\varphi^A(\mathbf{x}), \varphi^B(\mathbf{y})\} = [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1}, \quad (1.24)$$

que son los corchetes generalizados del formalismo de Faddeev-Jackiw para teoría de campos.

Ahora, si se describe un sistema con simetría de gauge, la teoría presenta ligaduras y la matriz M_{AB} se torna singular (Barcelos-Neteo y Wotzasek, 1992). En el formalismo de Faddeev-Jackiw las ligaduras aparecen como relaciones algebraicas que son consecuencia de los modos ceros $v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x})$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$; $m < n$) de la matriz M_{AB} , los cuales deben ser solución de la ecuación,

$$\int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (1.25)$$

Utilizando (1.25) en las ecuaciones de movimiento (1.19) se puede deducir el siguiente conjunto de m ecuaciones de ligadura en el formalismo de Faddeev-Jackiw:

$$\begin{aligned}\Omega_{(\alpha)} &\equiv \int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} \\ &= \int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}(\varphi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (1.26)\end{aligned}$$

El formalismo incorpora $\Omega_{(\alpha)}$ en el Lagrangiano a través de multiplicadores de Lagrange $\Lambda^{(\alpha)}$ en la forma,

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) - \Lambda^{(\alpha)} \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi) \quad (1.27)$$

lo que define un nuevo Lagrangiano. Si se redefine $\Lambda^{(\alpha)} \rightarrow -\dot{\zeta}$, se puede expresar $L^{(1)}$ como:

$$L^{(1)} = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \dot{\zeta} \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi) \quad (1.28)$$

A partir de ahora, el formalismo es nuevamente implementado al considerar que el espacio de fase se expande al contemplar el conjunto de variables $\xi^{(A)} = (\varphi^i, \dot{\xi})$, con lo cual $L^{(1)}$ se escribe,

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\xi}, \dot{\xi}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \dot{\xi} \Omega_{(\alpha)} - V^{(1)}(\varphi), \quad (1.29)$$

donde

$$V^{(1)}(\varphi) = V(\varphi) \Big|_{\Omega_{(\alpha)}=0} \quad (1.30)$$

En término de las variables $\xi^{(A)}$, una nueva matriz simpléctica se define:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \xi^A(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \xi^B(\mathbf{y})}, \quad (1.31)$$

con la siguientes componentes:

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_j(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^j(\mathbf{y})} = \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{M}_{ij} \\ M_{i\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_\zeta(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^\zeta(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} = \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i} \\ M_{\zeta i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_i(\mathbf{y})}{\delta \xi^\zeta(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\zeta(\mathbf{x})}{\delta \xi^i(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^i(\mathbf{y})} = -\left(\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i}\right)^T \\ M_{\zeta\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \end{aligned}$$

de manera que,

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij} & \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i} \\ -\left(\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

donde \bar{M}_{ij} es la matriz cuadrada no singular derivada del conjunto original de variables $\varphi^i(\mathbf{x})$. El término $\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i}$ constituye una matriz rectangular.

A partir de ahora, se deberá modificar la matriz simpléctica con el fin de eliminar todos los modos cero. Entonces, el algoritmo se debe repetir hasta que ninguna nueva ligadura surja. Si el Lagrangiano original describe una teoría gauge, el formalismo de Faddeev-Jackiw no podrá generar una matriz simpléctica regular. Por lo tanto, para deducir los corchetes generalizados, condiciones de gauge deberán ser introducidas.

La inversa de la matriz simpléctica M_{AB} debe ser única, lo que se garantiza si las siguientes relaciones son satisfechas,

$$\begin{aligned} \int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (M^{CB})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \int d^3z (M^{AC})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) M_{CB}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \delta_B^A \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Definiendo la inversa de la matriz simpléctica por:

$$(M^{AB})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ C^{\beta k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & G^{\beta\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

de (1.33) se cumple que,

$$\begin{aligned} &\int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (M^{CB})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3z \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} \\ -\frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\ &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{I} es matriz identidad asociada al espacio definido por \bar{M}_{ij} . De la anterior expresión se deduce que,

$$\int d^3z \left[\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.34)$$

$$\int d^3z \left[\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] = 0 \quad (1.35)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0 \quad (1.36)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.37)$$

Dado que la inversa de una matriz antisimétrica es antisimétrica, se debe cumplir,

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (1.38)$$

de la expresión (1.35) se determina,

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

de la expresión (1.35) se determina,

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = - \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Multiplicamos la anterior relación por $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ & = \int d^3z \left[\int d^3x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3z \delta_j^k \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = B^{k\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ & = - \int d^3x d^3z (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

de tal manera que se determina la siguiente componente:

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = - \int d^3v d^3z (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (1.39)$$

Ahora, de la relación (1.37) se deduce que

$$\begin{aligned} - \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & = \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} \int d^3v d^3u (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \\ & \quad \frac{\delta \Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3u \left[\int d^3z d^3v \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \\ & \quad G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Definiendo

$$\int d^3u d^3v \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{u})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\beta)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \equiv \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.40)$$

se observa que se debe cumplir la siguiente identidad:

$$\int d^3u \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.41)$$

Finalmente, de la ecuación (1.34) se deduce que:

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Multiplicando la relación anterior por $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ resulta,

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3z \left[\int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \int d^3z \delta_j^l \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = A^{lk}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ &= \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \\ & \quad \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) + \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} B^{k\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) - \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} \\ & \quad \left[\int d^3w d^3u (\bar{M}^{km})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \right] \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \left[\int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} \right] \\ & \quad \left[\int d^3w (\bar{M}^{km})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

de manera que la última componente es dada por:

$$\begin{aligned} A^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \left[\int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \\ & \quad \left[\int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

La expresión (1.42) establece que los corchetes generalizados entre las variables de campo simpléctica originales $\varphi^i(\mathbf{x})$ es dada por

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi^i(\mathbf{x}), \varphi^j(\mathbf{x}) \right\} &= A^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \\ &\left[\int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \\ &\left[\int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

El conjunto de ecuaciones (1.43) indica que los corchetes generalizados pueden ser calculados solo si $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $G^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son derivadas (Foussats et al., 1997).

1.4 Campo Electromagnético

La teoría es descrita, en las coordenadas de plano nulo, por la siguiente densidad Lagrangiana ²,

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{+-} F_{+-} + F_{+k} F_{-k} - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}, \quad (1.44)$$

a partir de la cual es posible deducir que el momento conjugado al campo electromagnético es:

$$\Pi^v \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_+ A_v)} = F^{v+}. \quad (1.45)$$

De la relación anterior es posible obtener las siguientes componentes,

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= 0, \\ \Pi^- &= F^{-+} = F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+, \\ \Pi^k &= F^{k+} = F_{-k} = \partial_- A_k - \partial_k A_-. \end{aligned} \quad (1.46)$$

La densidad Hamiltoniana correspondiente se expresa en la forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &= \Pi^\mu \partial_+ A_\mu - \mathcal{L}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \Pi^- \partial_- A_+ + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_+ A_k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Así, la densidad Lagrangiana a orden cero de iteración se expresa,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_+ A_k - \mathcal{H}^{(0)}, \quad (1.48)$$

²Para notación ver Apéndice 1.7

donde $\mathcal{H}^{(0)}$ es dado por (1.47) y se interpreta como el potencial simpléctico en el orden de iteración considerado. De (1.47) y (1.48) se establece que el conjunto inicial de variables simplécticas es: $\xi_k^{(0)} = (A_+, A_-, A_i, \Pi^-)$, de manera que se identifica que las componentes de la uno-forma canónica son:

$$K_{A_+}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_-}^{(0)} \rightarrow \Pi^-, \quad K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_-, \quad K_{\Pi^-}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (1.49)$$

Entonces, se define la matriz simpléctica de orden cero en iteración por las siguientes componentes,

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}, \quad (1.50)$$

a partir de la cual se puede obtener la siguiente representación:

$$M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_j^x & -1 \\ 0 & \partial_i^x & -2\delta^j \partial_-^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.51)$$

donde se ha definido

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(x^T - y^T). \quad (1.52)$$

Es evidente que $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es singular y el modo cero asociado se expresa:

$$\tilde{v}^{A(0)}(\mathbf{x}) = (v^{A+}(\mathbf{x}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (1.53)$$

donde $v^{A+}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. A partir de este modo cero es posible determinar un ligadura como resultado de:

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{A(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\ &= - \int d^3x v^{A+}(\mathbf{x}) \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) + \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la arbitrariedad en la función $v^{A+}(\mathbf{x})$, se establece como un ligadura Lagrangiano a:

$$\Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x \Pi^k = \partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x (\partial_-^x A_k - \partial_k^x A_-) = 0 \quad (1.54)$$

De acuerdo al algoritmo de FJ, la ligadura (1.54) deberá ser incorporado en la densidad Lagrangiana a través de un multiplicador de Lagrange, así, la densidad Lagrangiana en primer orden del proceso de iteración es escrita como,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_-^x A_k - \partial_k^x A_-) \partial_+ A_k + \Omega^{(0)} \lambda - \mathcal{H}^{(1)} \quad (1.55)$$

donde:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0}. \quad (1.56)$$

El potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(0)}$, a menos de un termino de frontera, se escribe:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2}\Pi^-\Pi^- - A_+ \left(\partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x \Pi^k \right) + \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl},$$

de manera que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0} = \frac{1}{2}\Pi^-\Pi^- + \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl}. \quad (1.57)$$

Ahora, se procede a expandir el espacio de configuración al introducir el primer conjunto de variables simpléctica en este orden de iteración $\xi_k^{(1)}$. Como $\mathcal{H}^{(1)}$ ya no depende sobre el campo A_+ , la variable simpléctica tendrá las siguientes componentes: $\xi_k^{(1)} = (A_-, A_i, \Pi^-, \lambda)$. Entonces, se identifica las componentes de la uno forma canónica para ser:

$$\begin{aligned} K_{A_-}^{(1)} &\rightarrow \Pi^- \quad , \quad K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_- \quad , \quad K_{\Pi^-}^{(1)} \rightarrow 0, \\ K_{\lambda}^{(1)} &\rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x (\partial_- A_k - \partial_k A_-), \end{aligned} \quad (1.58)$$

de donde la matriz simpléctica en primer orden de iteración se calcula:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}, \quad (1.59)$$

así que la nueva matriz dos forma se puede escribir:

$$M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_j^x & -1 & -\partial_k^x \partial_k^x \\ \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x \\ 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ \partial_k^x \partial_k^x & -\partial_j^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.60)$$

Donde la teoría que se describe es una teoría gauge, La matriz simpléctica modificada (1.60), debe ser singular. El nuevo modo cero $\tilde{\nu}^{A(1)}(\mathbf{x})$ asociado a ésta matriz se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$\int d^3x \tilde{\nu}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (1.61)$$

Es posible mostrar que este vector tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\nu}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \left(\partial_-^x \alpha_5(\mathbf{x}) \quad \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \quad 0 \quad \alpha_5(\mathbf{x}) \right), \quad (1.62)$$

donde $\alpha_5(\mathbf{x})$ es una nueva función arbitraria. Una nueva ligadura resulta de (1.62), es consecuencia de:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= \int d^3x \bar{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \partial_k^x F_{kj}(\mathbf{x}) - \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \partial_i^x F_{jl}(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \alpha_5(\mathbf{x}) \left[\partial_j^x \partial_k^x F_{kj}(\mathbf{x}) - \partial_j^x \partial_i^x F_{jl}(\mathbf{x}) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Así, $\Omega^{(1)}$ es idénticamente nulo, por tanto, la relación (1.63) indica que no hay mas ligaduras en la teoría, implicando que la matriz simpléctica es aun singular y caracteriza a la teoría de Maxwell como una teoría gauge. Para deducir una matriz simpléctica regular una condición de gauge deberá ser introducida, así se escogerá el gauge de plano nulo $\Theta = A_-(\mathbf{x}) = 0$. Utilizando el multiplicador de Lagrange $\eta(\mathbf{x})$, que incrementara la dimensión del espacio de configuración, se deduce una densidad Lagrangiana en segundo orden del proceso de iteración que se define como:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_+ A_k + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)}, \tag{1.64}$$

donde el nuevo potencial simpléctico se expresa:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \Big|_{\Theta=0} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \tag{1.65}$$

El nuevo conjunto de variables es: $\xi_k^{(2)} = (A_-, A_i, \Pi^-, \lambda, \eta)$. De la relación (1.64) se determina que:

$$\begin{aligned}
 K_{A_-}^{(2)} &\rightarrow \Pi^- \quad , \quad K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_- \quad , \quad K_{\Pi^-}^{(2)} \rightarrow 0, \\
 K_{\lambda}^{(2)} &\rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x (\partial_-^x A_k - \partial_k^x A_-) \quad , \quad K_{\eta}^{(2)} \rightarrow \Theta = A_-. \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

A partir de (1.66) la nueva matriz simpléctica en segundo orden se iteración que se expresa en la forma:

$$M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_j^x & -1 & -\partial_k^x \partial_k^x & 1 \\ \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ \partial_k^x \partial_k^x & -\partial_j^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{1.67}$$

Esta matriz es no singular y su inversa, $[M^{(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se deberá calcular de la siguiente relación:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.68)$$

Al resolver (1.68), es posible mostrar que $[M^{(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ posee la siguiente representación:

$$[M^{(2)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ 0 & \beta_{2_{jk}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_{3_j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \beta_{5_j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ 0 & \gamma_k(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \lambda_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \zeta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_{2_k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \zeta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

donde:

$$\alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \beta_{2_{ij}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\delta_j^i}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \beta_{3_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_i^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \beta_{5_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial_i^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial_j^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{\partial_k^x \partial_k^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\lambda_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \lambda_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \zeta_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial_j^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Con base en (1.69) se puede identificar el siguiente conjunto de corchetes generalizados fundamentales:

$$\begin{aligned} \{ \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y}) \} &= \{ A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y}) \} = \beta_{2_{ij}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\delta_j^i}{4} \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^T - y^T), \end{aligned} \quad (1.75)$$

resultado que es equivalente al reportado en la literatura cuando la teoría es analizada mediante el método de Dirac (Casana et al., 2007).

1.5 Campo de Dirac

La densidad Lagrangiana asociada al campo de Dirac en dos dimensiones en las coordenadas de plano nulo es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \partial_+ \varphi - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\varphi} \gamma^+ \varphi + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi - \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi - m \bar{\varphi} \varphi. \quad (1.76)$$

Clásicamente los campos de Dirac son descritos por variables de Grassmann, así que los momentos canónicos conjugados a los campos, bajo la definición de derivada izquierda (Casalbouni, 1976), son dados por:

$$\bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \varphi)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \quad , \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \bar{\varphi})} = -\frac{i}{2} \gamma^+ \varphi. \quad (1.77)$$

En el formalismo de Faddeev-Jackiw para variables fermiónicas, la forma más general del Lagrangiano escrito en término de las variables ξ_A es (Gouvaerts, 1990):

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \xi_A K^A(\xi) - \mathcal{H}(\xi), \quad (1.78)$$

donde $K^A(\xi)$ es una función arbitraria con paridad n_A en tanto que $\mathcal{H}(\xi)$ se interpreta como el potencial simpléctico de paridad par. Por lo tanto, al reescribir (1.76) en la forma (1.78), se obtiene:

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \mathcal{H}^{(0)}, \quad (1.79)$$

donde se define el potencial simpléctico a orden cero de iteración como:

$$\mathcal{H}^{(0)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi + \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi + m \bar{\varphi} \varphi, \quad (1.80)$$

Con el fin de calcular la matriz simpléctica, se define el primer conjunto de variables simplécticas: $\xi_k^{(0)} = (\varphi, \bar{\varphi})$. De la relación (1.79) se identifica las componentes de la uno-forma:

$$K_1^{(0)} \equiv -\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \quad , \quad K_2^{(0)} \equiv -\frac{i}{2} \gamma^+ \varphi. \quad (1.81)$$

Para los campos descritos por variables de Grassmann las componentes de la matriz simpléctica son definidas por (Gouvaerts, 1990):

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}.$$

donde n_A y n_B identifican la paridad de las variables $\xi_A^{(0)}$ y $\xi_B^{(0)}$ respectivamente. Para variables fermiónicas se cumple que $n_A = n_B = 1$, entonces las componentes de $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son dadas por:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (1.82)$$

con lo cual se determina la siguiente representación:

$$M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -i \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^+)^T \\ \gamma^+ & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.83)$$

La naturaleza singular de la matriz γ^+ ³ implica que la matriz $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ también sea singular. Para calcular el modo cero asociado se utilizará la siguiente representación de las matrices γ^μ en dos dimensiones (Casana et al., 2007):

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Así, en forma extensa la matriz $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se expresa:

$$M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.85)$$

Fácilmente, es posible verificar que los modos cero de la matriz son:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{1(0)}(\mathbf{x}) &= (0 \quad v_2(\mathbf{x}) \quad 0 \quad 0), \\ \tilde{v}^{2(0)}(\mathbf{x}) &= (0 \quad 0 \quad \bar{v}_1(\mathbf{x}) \quad 0), \end{aligned} \quad (1.86)$$

donde $v_2(\mathbf{x})$ y $\bar{v}_1(\mathbf{x})$ son funciones arbitrarias. El ligadura asociado al autovector $\tilde{v}^{1(0)}(\mathbf{x})$ se deriva a partir de:

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{1(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_1(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\ &= \int d^3x v_2(\mathbf{x}) \left[-i \partial_-^x \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^- - m \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \right]_2. \end{aligned}$$

Debido a lo arbitrario de la función $v_2(\mathbf{x})$, se elige como ligadura Lagrangiana primaria la siguiente cantidad:

$$\Omega_1^{(0)} = \left[\bar{\varphi} \left(i \partial_-^x \gamma^- + m \right) \right]_2 = 0. \quad (1.87)$$

³Ver Apéndice 1.7

Ahora, la ligadura asociada a $\tilde{v}^{2(0)}(\mathbf{x})$ es resultado de:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{2(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_2(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\ &= \int d^3x \tilde{v}_1(\mathbf{x}) \left[-i\gamma^- \partial_-^x \varphi(\mathbf{x}) + m\varphi(\mathbf{x}) \right]_1,\end{aligned}$$

de manera que la otra ligadura Lagrangiana se identifica por:

$$\Omega_2^{(0)} = \left[\left(i\gamma^- \partial_-^x - m \right) \varphi \right]_1 = 0. \quad (1.88)$$

Si se utiliza los proyectores definidos en (1.112) (Casana et al., 2007),

$$\Delta^+ \equiv \frac{1}{2} \gamma^- \gamma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^- \equiv \frac{1}{2} \gamma^+ \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

es posible expresar en forma compacta los ligaduras (1.87) y (1.88) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(0)} &= \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left(i\partial_-^x \gamma^- + m \right) \Delta^- = 0, \\ \Omega_2^{(0)} &= \Delta^+ \left(i\gamma^- \partial_-^x - m \right) \varphi(\mathbf{x}) = 0.\end{aligned} \quad (1.90)$$

El Lagrangiano a primer orden de iteración $\mathcal{L}^{(1)}$ se obtiene adicionando estas ligaduras a $\mathcal{L}^{(0)}$ con lo que se obtendrá,

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \dot{\lambda}_b \Omega_{1_b}^{(0)} + \dot{\bar{\lambda}}_b \Omega_{2_b}^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)} \quad (1.91)$$

donde $\dot{\lambda}$ y $\dot{\bar{\lambda}}$ son variables de paridad impar que han sido introducidas para garantizar la paridad par de $\mathcal{L}^{(1)}$ y

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0}. \quad (1.92)$$

Un nuevo conjunto de variables se introduce: $\xi_k^{(1)} = (\varphi, \bar{\varphi}, \lambda, \bar{\lambda})$, así, de la expresión (1.91) es posible identificar:

$$\begin{aligned}K_1^{(1)} &= -\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \quad , \quad K_2^{(1)} = -\frac{i}{2} \gamma^+ \varphi, \\ K_3^{(1)} &= \Omega_1^{(0)} = \bar{\varphi} \left[\left(i\partial_-^x \gamma^- + m \right) \Delta^- \right], \\ K_4^{(1)} &= \Omega_2^{(0)} = \left[\Delta^+ \left(i\gamma^- \partial_-^x - m \right) \right] \varphi.\end{aligned} \quad (1.93)$$

Las componentes de la nueva matriz simpléctica en el orden de iteración considerada son especificadas por:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}, \quad (1.94)$$

y tiene la forma,

$$M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^+)^T & 0 & 0 \\ -i\gamma^+ & 0 & -[(i\partial_x^- \gamma^- - m)\Delta^-] & 0 \\ 0 & [(i\partial_x^- \gamma^- + m)\Delta^-]^T & 0 & 0 \\ [\Delta^+ (i\gamma^- \partial_x^- - m)] & 0 & 0 & 0 \\ -[\Delta^+ (i\gamma^- \partial_x^- + m)]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.95)$$

Al considerar las componentes no triviales de la matriz (1.95) es posible mostrar que ésta es regular y que su inversa $[M^{(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se deberá calcular a partir de:

$$\int d^3z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.96)$$

Después de un cálculo laborioso es posible mostrar que,

$$[M^{(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \beta_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & 0 & \gamma_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 \\ \lambda_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

donde,

$$\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} \beta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \beta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \beta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}\quad (1.100)$$

$$\lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.101)$$

$$\zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.102)$$

$$\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.103)$$

A partir de (1.97) se puede calcular los corchetes generalizados entre las variables $\xi_k^{(1)} = (\varphi, \bar{\varphi}, \lambda, \bar{\lambda})$ de donde se obtiene los siguientes corchetes fundamentales:

$$\begin{aligned}\left\{ \xi_{\varphi_a}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ \varphi_a(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_b \right\} \quad (1.104) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) & \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta(x^- - y^-) & \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{im^2}{8} |x^- - y^-| \gamma_{ab}^+ + \frac{m}{4} \varepsilon(x^- - y^-) \mathbf{I}_{ab} + \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \gamma_{ab}^-, \end{aligned}$$

que es consistente con los resultados derivados a partir de otros métodos (Casana et al., 2014).

1.6 Conclusiones

Se consideró el aspecto clásico mas relevante del campo electromagnético y fermiónico en las coordenadas de plano nulo. Se comprobó que una teoría de campos en estas coordenadas es descrita por Lagrangianos singulares, por lo tanto, la formulación de Faddeev-Jackiw fue utilizada.

En el campo electromagnético se observó que el número de ligaduras es menor que aquel deducido a partir de la formulación de Dirac (Casana et al., 2007). La estructura de estas ligaduras resultó ser mas simple al no ser necesario una clasificación de estas. La simetría de gauge de la teoría se reflejada en la singularidad de $M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

que no da origen a nuevas ligaduras. Para tornar esta matriz regular se introdujo la condición de gauge de plano nulo $\Theta = A_-(\mathbf{x}) = 0$. Los paréntesis generalizados entre los grados de libertad del problema estableció resultados equivalentes a los derivados por el método de Dirac (Casana et al., 2007).

Finalmente, el método simpléctico extendido a variables de Grassmann fue utilizado para estudiar campo de Dirac en las coordenadas de plano nulo. Se observó que la teoría se caracteriza por la presencia de dos ligaduras Lagrangianos, no obstante, al incorporarlos a la teoría es posible deducir una dos forma regular. El cálculo de los corchetes generalizados entre las variables simplécticas fundamentales de la teoría resultan ser equivalentes a los corchetes de Dirac entre las mismas variables cuando el método de Dirac es utilizado para estudiar ésta teoría (Casana et al., 2014).

1.7 Apéndice

Notación

El tiempo de plano nulo x^+ y la coordenada longitudinal x^- son definidos respectivamente como:

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad (1.105)$$

con las coordenadas transversales $x^\perp \equiv (x^1, x^2)$ mantenidas inalterables.

En el espacio-tiempo, el cuadri-vector $x = (x^+, x^1, x^2, x^-)$, permite especificar la métrica con las siguientes componentes:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.106)$$

de manera que,

$$x^+ = x_- , \quad x^- = x_+ , \quad x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - x^\perp \cdot y^\perp , \quad (1.107)$$

donde las derivadas con respecto a x^+ y x^- son definidas como,

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} \quad (1.108)$$

con $\partial^+ = \partial_-$. Aquí, se ha utilizado las siguientes relaciones:

$$\delta^4(x-y) = \delta(x^+ - y^+) \delta^2(x^\perp - y^\perp) \delta(x^- - y^-).$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx^-} \varepsilon(x^- - y^-) = \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \frac{1}{2} \int dy^- \varepsilon(x^- - y^-) \varepsilon(y^- - z^-) = |x^- - y^-| \quad (1.109)$$

La misma transformación ortogonal es aplicada para las matrices de Dirac las cuales satisfacen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.110)$$

lo que garantiza que γ^+ y γ^- se tornen en matrices singulares.

Siendo que,

$$(\gamma^+)^\dagger = \gamma^- \quad , \quad (\gamma^-)^\dagger = \gamma^+ \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad k = 1, 2. \quad (1.111)$$

se definen las matrices hermíticas,

$$\Delta^\pm = \frac{1}{2} \gamma^\mp \gamma^\pm, \quad (1.112)$$

las cuales son operadores de proyección,

$$(\Delta^\pm)^2 = \Delta^\pm, \quad \Delta^\pm \Delta^\mp = 0, \quad \Delta^+ + \Delta^- = 1. \quad (1.113)$$

La acción de estos operadores sobre los espinores de Dirac produce:

$$\psi_\pm = \Delta^\pm \psi, \quad \bar{\psi}_\pm = \bar{\psi} \Delta^\mp, \quad (1.114)$$

Álgebra de Grassmann

Una álgebra de Grassmann contiene variables bosónicas (conmutan) y fermiónicas (anticonmutan) (Berezin, 1966):

$$FB = (-1)^{n_A n_B} BF, \quad (1.115)$$

donde $n = 0$ para variables bosónicas y $n = 1$ para fermiónicas. Es posible verificar que el producto de dos variables fermiónicas es un bosón en tanto que el de una variable bosónica y una fermiónica es un fermión.

La derivada izquierda de una variable fermiónica ψ_α es definida como,

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left\{ \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_n} \right\} = -\delta_{\alpha\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_n} + \delta_{\alpha\alpha_2} \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_3} \cdots \psi_{\alpha_n} \\ + \cdots + (-1)^n \delta_{\alpha\alpha_n} \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_{n-1}}. \quad (1.116)$$

Los corchetes de Poisson se definen de manera similar a los de la mecánica tradicional (Casalbouni, 1976). El espacio de fase es expandido por q_i , p^i que son bosones y π^α que se identificarán como fermiones. Se denotará por $B(F)$ los elementos bosónicos o fermiónicos del álgebra de Grassmann, de manera que, los corchetes de Poisson o como mejor se conocen, los corchetes de Berezin se definen por:

$$\begin{aligned} \{B_1, B_2\} = -\{B_2, B_1\} &= \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial q_i} \frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_2}{\partial q_i} \frac{\partial B_1}{\partial p^i} \right\} + \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_2}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha} \right\} \\ \{F, B\} = -\{B, F\} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p^i} \right\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha} \right\} \quad (1.17) \\ \{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \frac{\partial F_1}{\partial p^i} \right\} - \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha} \right\} . \end{aligned}$$

Es consecuencia de éstas definiciones que se cumplen las siguientes propiedades.

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -(-1)^{n_A n_B} \{B, A\} \\ \{A, B+C\} &= \{A, B\} + \{A, C\} \\ \{A, BC\} &= (-1)^{n_A n_B} B \{A, C\} + \{A, B\} C \quad (1.118) \\ \{AB, C\} &= (-1)^{n_B n_C} \{A, C\} B + A \{B, C\} \\ (-1)^{n_A n_C} \{A, \{B, C\}\} &+ (-1)^{n_B n_A} \{B, \{C, A\}\} + (-1)^{n_C n_B} \{C, \{A, B\}\} = 0 . \end{aligned}$$

Bibliografía

Benguria, R., Cordero, R., Teitelboim, C. (1976). Aspects of the Hamiltonian Dynamics of Interacting Gravitational Gauge and Higgs Fields with Applications to Spherical Symmetry. *Nuclear Physics*, 122(B), 61-99.

Barcelos-Neto, J., Wotzasek, C. (1992). Symplectic quantization of constrained Systems. *Modern Physics Letters*, 7(A), 1737-1748.

Berezin, F. A. (1966). *The Method of Second Quantization*. Academic Press.

Casalbouni, R. (1976). Colored Supersymmetry. *Il Nuovo Cimento*, 33(A), 432-446.

Casana, R., Pimentel, B.M., Zambrano, G.E.R. (2014) SQED4 y QED4 on the null-plane. *Brazilian Journal of Physics*, 44, 398-409.

Casana R., Pimentel, B.M., Zambrano, G.E.R. (2007). The Schwinger model on the null-plane. *International Journal of Modern Physics*, 16(E), 2993-2997.

Dirac, P.A.M. (1949). Forms of Relativistic Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 21, 392-399.

Domokos, G. (1972). Introduction to the Characteristic Initial Value Problem in Quantum Field Theory. *Lectures on Theoretical Physics*, 14(A), 375- 398.

Faddeev, L., Jackiw, R. (1988). Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems. *Physical Review Letters*, 60, 1692-1694.

Foussats, A., Repetto, C., Zandron, O.P., Zandron, O.S. (1997). Nonlinear sigma model in the Faddeev-Jackiw quantization formalism. *International Journal of Theoretical Physics*, 36, 2923-2935.

Greiner, J. W., Reinhardt, M. (1986). *Field Quantization*. Springer-Verlag.

Govaerts, J. (1990). Hamiltonian Reduction of First Order Actions. *International Journal of Modern Physics*, 5(A), 3625-3640.

Hanson, A, Regge, T., Teitelboim, C. (1976). *Constrained Hamiltonian Systems*. *Accademia Nazionale dei Lincei*.

Heinzi, T., Werner, E. (1994). Light front quantization as an initial boundary value problem. *Zeitschrift für Physik*, 41(C), 521-532.

Ligterink, N. E., Bakker, B. L. G. (1993). Feynman diagrams and light cone time ordered diagrams [Conference]. *4th International Workshop on Light Cone Quantization and Non-Perturbative Dynamics*. Polana Zgorzelisko, Poland. <https://inspirehep.net/conferences/969436>

Mathews, J., Walker, R. (1965). *Mathematical Methods of Physics*. Benjamin.

McCartor G. (1988). Light Cone Quantization for Massless Fields. *Zeitschrift für Physik*, 41(C), 271-275.

Neville, R.A., Rohrlich, F. (1971). Quantum field theory off null planes. *Nuovo Cimento*, 1(A), 625-644.

Oliver, P. J. (1996). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag.

Rohrlich, F. (1971). Null plane field theory. *Acta physica Austriaca*.

Roman, P. (1969). *Introduction to Quantum Field Theory*. John Wiley and Sons.

Srivastava, P.P. (2000). Perspectives of light front quantized field theory: Some new results [Conference], *Quantum Field Theory: A 20th Century Profile*. New Delhi, India.

Steinhardt, P.J. (1980). Problems of Quantization in the Infinite Momentum Frame. *Annals of Physics*, 128, 425-447.

Sundermeyer, K. (1982). *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics. Springer.

2. Estructura Atómica de la Materia: dificultades de aprendizaje y resultados de una propuesta de enseñanza

2.1 Introducción

La Estructura Atómica de la Materia es un tema fundamental en la enseñanza de la química (Henao-García y Tamayo-Alzate, 2010). Dentro de esta unidad temática se abordan temas cardinales para la comprensión tanto del mundo macroscópico como subatómico. Promover el estudio de la Estructura de la Materia implica considerar la base conceptual de la Teoría Cuántica, no hacerlo conlleva una enseñanza escasa, apegada a la descripción cronológica de los modelos atómicos e introduce errores conceptuales importantes: es el caso de considerar al átomo como un sistema solar en miniatura o asumir que órbita y orbital son sinónimos.

No obstante, investigaciones en el campo de la didáctica de las ciencias han develado que en Colombia la Enseñanza de la Estructura de la Materia (EEM) no se aborda desde la base conceptual de la Teoría Cuántica, especialmente en la educación secundaria (Muñoz Burbano, 2020). Esta situación, que se configura en un problema didáctico, se contrapone a lo que ocurre en otros países, incluso latinoamericanos como Argentina y Brasil, donde existe una tradición de enseñanza y de investigación didáctica en torno a la EEM desde la base conceptual de la Teoría Cuántica (Lobato y Greca, 2005; González et al., 2019)

Las investigaciones sobre la enseñanza de la Teoría Cuántica evidencian la pertinencia de su enseñanza en la Educación Secundaria; así lo dejan ver investigaciones como las de Fernández et al. (1997), Osterman y Ricci (2004), Solbes y Sinarcas (2010) y Castrillón et

al. (2014), quienes coinciden en que abordar la Teoría Cuántica no solamente es posible, sino necesario, generando incluso propuestas didácticas desde la Historia de las Ciencias. Por otra parte, dentro de esas investigaciones también se resalta la necesidad de formación de maestros con herramientas conceptuales y didácticas necesarias para abordar esta temática en el aula de la educación secundaria (Fanaro, 2009; Fernández, 2014); tal es el caso de un abordaje didáctico conceptual o con el desarrollo de prácticas experimentales sencillas.

Finalmente, las investigaciones en este campo ponen de manifiesto la urgencia de movilizar los currículos de la educación secundaria desde la física y química modernas (Greca y Moreira (2004); Castriellón et al., 2014), esto es pasar de contenidos relacionados con la nomenclatura y estequiometría o solo la física clásica a contenidos que involucran la Teoría Cuántica, la Teoría de la Relatividad, entre otros.

La investigación que a continuación se describe tiene como objetivo conocer los conceptos que estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Ciencias Naturales de la Universidad de Nariño relacionan con la unidad Estructura Atómica de la Materia, y cómo estos conceptos evolucionan con la aplicación de una secuencia de enseñanza. Desde esa perspectiva, se desarrolla una metodología cuasi-experimental sin grupo control. En ella se plantea, en primera instancia, un acercamiento a la realidad, una intervención en la misma y, finalmente, una evaluación de la intervención, la cual ha de permitir establecer la existencia de diferencias estadísticamente representativas entre los resultados obtenidos en un pre-test y un post-test.

Finalmente, se presenta el análisis de la intervención desarrollada, el cual aportará elementos para valorar el efecto de la intervención realizada en el aprendizaje de la estructura de la materia, especialmente en lo relacionado con el modelo atómico cuántico y sus implicaciones. En este sentido, puntualmente se infiere un avance significativo en los conceptos que los estudiantes relacionan con la estructura de la materia. Lo anterior evidencia la necesidad de generación de escenarios de transformación de la enseñanza de las ciencias naturales que responda a una verdadera y actual educación científica que, además, movilice la capacidad de aprender a aprender y permita asumir una posición crítica frente a la ciencia, el desarrollo tecnológico, los problemas de la humanidad, favoreciendo un pensamiento científico.

2.2 Contextualización del problema de la enseñanza de la Estructura Atómica de la materia

La enseñanza de las ciencias naturales en la educación universitaria se enfrenta a problemas relacionados, entre otros, con la sobredimensionada complejidad en las áreas de química y física, las carencias conceptuales derivadas de la enseñanza en la educación secundaria, la concepción positivista tanto de docentes como de estudiantes (Vázquez-Alonso et al., 2005). Estos problemas se han asociado a un aprendizaje basado en la repetición, a la falta de comprensión de los fenómenos naturales y a la descontextualización del conocimiento científico. Por lo anterior, se requiere con urgencia “conciliar la necesidad de altos niveles de educación en las matemáticas, las ciencias naturales y las tecnologías con la creciente apatía del alumnado respecto a estas áreas” (Vasco, 2006).

Esto cobra una importancia en cuanto uno de los aspectos en los que la ciencia puede hacer un gran aporte a la humanidad es en la educación, especialmente en una sociedad como la colombiana (Rodríguez, 2013). Sin embargo, la educación científica y tecnológica en Colombia es un tarea aún pendiente. En la educación secundaria, particularmente, no siempre hay claridad sobre la importancia de la ciencia y la tecnología en el desarrollo del país. Esto, aunado a que no se da importancia a la formación en ciencias que esté acorde con los requerimientos que las nuevas sociedades demandan, aun cuando, en el momento actual, el desarrollo de las fuerzas productivas depende cada vez más del conocimiento científico y tecnológico (Gómez Campo, 1995), relación que no es clara, especialmente en el sistema educativo general colombiano.

De esto se deriva la importancia de investigaciones sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje desde sus perspectivas curriculares, didácticas y epistemológicas con miras a responder a la necesidad de que la enseñanza de las ciencias posibilite hacer de la educación científica, realmente, parte de la educación general (Gil y Vilches, 2001), en este caso específicamente parte de la educación general en Colombia.

Por otra parte, el análisis de los documentos y lineamientos curriculares establecidos para la educación secundaria ponen de manifiesto que los docentes trabajan los mismos contenidos que hace 30 años, quizá con estrategias didácticas innovadoras, más llevadas al contexto, pero los contenidos siguen siendo los mismos (Muñoz Burbano, 2020). Esta situación ha derivado en una crisis en la enseñanza y aprendizaje de la física y la química, que se hace evidente en el desconocimiento del poder explicativo que tienen frente a los fenómenos naturales y con respecto específicamente a la química cabe decir “si la química ha de contribuir a la alfabetización científica de los ciudada-

2020). Esta situación ha derivado en una crisis en la enseñanza y aprendizaje de la física y la química, que se hace evidente en el desconocimiento del poder explicativo que tienen frente a los fenómenos naturales y con respecto específicamente a la química cabe decir "si la química ha de contribuir a la alfabetización científica de los ciudadanos, precisamente es su capacidad de explicar fenómenos relevantes lo que debería priorizarse" (Izquierdo Aymerich, 2004, p.116), cita que fácilmente se puede trasladar a la física también. Sin embargo, al parecer la explicación de los fenómenos no es lo realmente importante en el proceso enseñanza aprendizaje, sino la preocupación marcada por desarrollar los contenidos, situación que no es ajena en la enseñanza de la Estructura de la Materia, específicamente.

2.3 Algunos referentes conceptuales y didácticos que sustentan la enseñanza de la Estructura atómica de la Materia

Modelos y teoría atómica son fundamentales en la comprensión de la estructura de la materia (Lombardi y Martinez, 2012). Lo cual es un aspecto importante en el estudio de las ciencias naturales, especialmente, en lo referido en la química. La enseñanza de la estructura atómica de la materia necesita de un marco conceptual desde la Teoría Cuántica (Sinarcas y Solbes, 2013; González et al., 2020) para entender la estructura electrónica de los átomos, el ordenamiento periódico y los enlaces de las moléculas; de igual manera, abordar el modelo atómico cuántico permite comprender las teorías clásicas y demostrar sus límites de validez y diferencias con la teoría cuántica (Sinarcas y Solbes, 2013).

A continuación, se presenta de manera sucinta más que un marco teórico un escenario de reflexión teórica, conceptual e interpretativa desde la didáctica de las ciencias. La pretensión de dicho marco es generar un escenario de análisis de la enseñanza y del aprendizaje de la estructura atómica de la materia, por lo que se busca no limitar dicho marco, partiendo de que un sola teoría no permite abarcar todos los campos que implican el proceso de enseñanza y aprendizaje (Coll, 1991).

Desde esta perspectiva, el socio constructivismo (Vygostki, 1978; 1979; Wertchs, 1993) se consideró como un marco teórico amplio, que permite tomar elementos conceptuales y didácticos muy importantes para la enseñanza de la estructura de la materia. Esta perspectiva teórica asume el aprendizaje como un proceso en el que se movilizan de los saberes, los contextos, las creencias y las actitudes de los alumnos y su aporte al aula (Sharma, 2014). Esto permite pensar en una enseñanza desde las ideas previas de los estudiantes, siendo esta y la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje sus principales características.

El constructivismo social es una teoría basada en el constructivismo cognitivo (Piaget, 1968a; 1968b; 1973), junto a las contribuciones de una construcción social del conocimiento de Vygotsky, que, a la vez, surge como respuesta al paradigma conductista. Permite trabajar desde un plano social-interactivo y desde un plano personal (Vygotsky, 1978), entendido como "construir-conocimiento". Establece que el conocimiento, además de formarse a partir de las relaciones ambiente-sujeto, resulta de la interacción con el entorno social, y los nuevos conocimientos se forman a partir de los esquemas de quien aprende, el producto de su realidad y su interacción con los esquemas de los demás sujetos que lo rodean.

Un aspecto que se consideró importante, en el momento de asumir esta corriente como referente, es que, al otorgar importancia activa al sujeto que aprende, su tesis central será la construcción de conocimientos a partir de lo que el sujeto ya conoce, tesis que ha sido ampliamente aceptada por los didactas y los docentes en general. Por ende, la enseñanza debe ofrecer oportunidades para la construcción de significados (Driver et al., 2000), a partir de lo que ya se sabe.

Quien aprende construye conocimientos, que se mantendrán si le resultan significativos. Es aquí donde se debe prestar atención a este conocimiento, que es temporalmente viable y no se define por siempre; requiere de una práctica reflexiva, se cuestiona; se sitúa en contextos y situaciones pertinentes en relación con las prácticas sociales establecidas (Jonnaert, 2001). Esto es especialmente revelador en lo que se refiere a la Teoría Cuántica, por cuanto los estudiantes reciben constantemente información relacionada con esta teoría a través de diferentes medios, de tal manera que, al relacionar el conocimiento científico trabajado en la escuela, este adquiere mayor significatividad.

Con base en esto y para el desarrollo de la propuesta, se tomó como marco didáctico la Historia de las ciencias, como elemento dinamizador de la enseñanza. Con base en esto y tal como se ha descrito, la teoría cuántica ha generado un quiebre epistemológico muy fuerte, pues implica nuevas formas de entender la naturaleza y se asocia a la noción de materia, energía y naturaleza de las ciencias; por consiguiente, su trabajo desde la Historia de las Ciencias abriría un espacio de formación en ciencias mucho más amplio y acorde con los requerimientos de la sociedad actual.

En la propuesta se hizo especial énfasis en los antecedentes del modelo cuántico, por cuanto el surgimiento de la teoría cuántica, a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, reveló limitantes de la física clásica, que hasta ese momento tenía un poder explicativo exitoso y, al enfrentarse a la imposibilidad de explicar el mundo atómico y

subatómico, generó una gran revolución, que requirió de un “replanteamiento global con un nuevo marco conceptual” (Solbes y Sinarcas, 2011), no solo en el campo científico, sino en la comprensión de la naturaleza, de sus fenómenos y de la realidad. Esto implica pasar de una lógica de pensamiento clásico, lineal, secuencial, determinista y causal a elevar a nivel de principio el indeterminismo, a pensar desde la complementariedad de los opuestos y el requerimiento de un pensamiento holístico (Rojas, 2010), para entender de otra manera no solo el mundo microscópico, sino los fenómenos naturales en general.

Desde esta postura, y teniendo en cuenta las características del curso, siendo un primer semestre y que la asignatura tiene como objetivo fundamentar los contenidos mínimos para el proceso de formación en ciencias que como docente va a recibir, no se trata siquiera de sugerir abordar el formulismo matemático, pero sí abordar los aspectos filosóficos y epistemológicos que son fundamentales para acceder al marco conceptual de las teorías y específicamente en química, pues se requiere que los estudiantes puedan interpretar el mundo macroscópico desde el mundo microscópico (Gómez-Crespo et al., 2004), de ahí la urgencia de explorar nuevas formas de enseñanza que permitan conectar el saber de la ciencia escolar con la cotidianidad de una manera mucho más real con miras a una construcción del conocimiento con significado y sentido.

2.4 Desarrollo y proceso metodológico de la investigación

La Universidad de Nariño es la única Universidad Pública que atiende a los Departamentos de Nariño y Putumayo. La investigación se desarrolló con estudiantes de primer semestre de esta Universidad, que provienen de varias instituciones educativas de estos Departamentos, lo que aseguró una muestra heterogénea, con estudiantes de diversos tipos de bachillerato (agrícola, académico, industrial, de comunidades indígenas, de carácter oficial y privado), con diversidad de tiempo transcurrido desde la finalización de sus estudios secundarios.

Se desarrolló en 5 sesiones de 2 horas cada una, en la asignatura “Fundamentos de ciencias naturales” de la Licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental, en el curso A 2018, de primer semestre. Los materiales diseñados se organizaron en programas guías de actividades, en el que se busca la participación activa de los futuros docentes. El objetivo planteado fue: Analizar la incidencia de una secuencia de enseñanza para la Estructura Atómica de la Materia desde el marco conceptual de la Teoría Cuántica en estudiantes de primer semestre de Licenciatura en ciencias naturales de la Univer-

sidad de Nariño. Con el fin de alcanzar este objetivo, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los conceptos que el estudiante de primer semestre de Licenciatura en ciencias naturales de la Universidad de Nariño relaciona con la Teoría Cuántica en el marco de la Estructura de la Materia
- Articular lineamientos didácticos y epistemológicos en una secuencia de enseñanza aprendizaje de la estructura atómica de la materia, aplicada a estudiantes de primer semestre de licenciatura en ciencias naturales de la Universidad de Nariño.
- Evaluar los resultados de la aplicación de la secuencia de enseñanza aprendizaje y el cambio en los conceptos relacionados por los estudiantes en la temática de estructura de la materia.

2.4.1 Naturaleza metodológica

Para alcanzar el objetivo propuesto se utilizó una metodología cuasi-experimental con actividad pre/post-intervención, utilizando como instrumento de análisis un cuestionario. No se trabajó con grupo control.

Figura 2.1

Proceso de investigación



Nota. Fuente: esta investigación.

La Figura 2.1 muestra el proceso metodológico seguido en la investigación. El primer momento de fundamentación, permitió la estructuración del marco teórico, de los elementos conceptuales a tener en cuenta en las actividades. Para la segunda etapa, que corresponde al acercamiento a la realidad, se diseñó un instrumento en forma de cuestionario, que se aplicó a un grupo conformado por estudiantes con edades que van de 17 a 26 años de edad, estudiantes que en su mayoría habían egresado recientemente de bachillerato, tal como se muestra en la Tabla 2.1 y de diferentes municipios de los Departamentos de Nariño y Putumayo.

Tabla 2.1

Relación de años transcurridos desde finalización de Educación Secundaria a ingreso a la Universidad

Años de egresados	Número de estudiantes
0	16
1-2	22
3-5	11
+5	2
TOTAL	51

Nota.

Los datos presentados en la Tabla 2.1 permiten establecer que el 74,5% de los estudiantes que hacen parte de la investigación habían terminado sus estudios de educación secundaria hacía menos de dos años, esto para evaluar el grado de retención de los conceptos trabajados durante la secundaria.

El instrumento se constituyó en un cuestionario de preguntas abiertas, que abordó, entre otros, los siguientes ítems:

Tabla 2.2

Ítems desarrollados en el Pre-test

No.	Pregunta
1	¿Enuncie los hechos que se relacionan con la crisis de la física clásica?
2	¿Cómo explica el efecto fotoeléctrico?
3	¿Cómo definiría los espectros atómicos?
4	¿Cómo definiría electrón?
5	¿Cómo explicaría los niveles de energía en los átomos?
6	¿Cómo explicaría los números cuánticos n , m y l ?
7	¿Cómo definiría orbital atómico?
8	¿Cómo explicaría el concepto de spin?

Nota. Fuente: esta investigación.

El proceso de validación del instrumento se hizo a través de un grupo de expertos; este proceso tiene como objetivo determinar si el instrumento medía lo que debía (Corral, 2009; Martín-Arribas, 2004). En cuanto a la fiabilidad refiere al hecho que el instrumento mida con precisión, en consecuencia, descarta el grado de error (Robles Garrote y Rojas, 2015). Los expertos dictaminaron que el instrumento era fiable y preciso, se tomaron los resultados obtenidos (ver Tabla 2.3).

Tabla 2.3
Alfa de Cronbach

Estadísticas de fiabilidad	
Alfa de Cronbach	N de elementos
0,732	8

Nota.

Como se muestra en la Tabla 2.3, este resultado permitió establecer que el instrumento era fiable y, por tanto, se procedió a su aplicación al grupo. Por otra parte, y teniendo en cuenta que el instrumento es un cuestionario de preguntas abiertas, para su evaluación y recolección de los datos respectivos fue necesario establecer con anticipación unos criterios de valoración para cada uno de los ítems.

Estos criterios de valoración permitieron dar un valor a las repuestas de los estudiantes a cada una de las preguntas, según la respuesta pueda ser valorada como correcta, medianamente correcta, o totalmente incorrecta, en una escala que iría de 2 a 0, respectivamente.

Es importante, en este aspecto, tener en cuenta que el grupo con el que se trabajó era de estudiantes que ya habían terminado sus estudios de educación secundaria, por lo cual se podría inferir que ya habían recibido formación al respecto. Por tanto, los criterios de valoración se determinaron desde esa perspectiva.

Por ejemplo:

¿Conoce algunos hechos que se relacionen con la crisis de la física clásica?

2: Relaciona al menos tres de los siguientes hechos: el efecto fotoeléctrico, los espectros atómicos, la radiación del cuerpo negro o la catástrofe del ultravioleta, la inestabilidad del átomo de Rutherford.

1: Relaciona uno o dos de los hechos descritos anteriormente,

0: No da ninguna explicación u ofrece una explicación errónea.

¿Cómo definiría electrón?

2: Componente fundamental y elemental del átomo, cargado negativamente y que no es ni una partícula clásica ni onda en el sentido clásico.

1: Parte constitutiva del átomo que está en la periferia, tiene masa y carga negativa.

0: No da ninguna explicación u ofrece una explicación errónea.

2.5 Resultados y análisis

2.5.1 Resultados del pre-test:

Los resultados del pre-test permiten establecer que los estudiantes no relacionan elementos de la Teoría Cuántica ni del modelo cuántico con la estructura atómica de la Materia; incluso se evidencian errores conceptuales importantes. Como se describió anteriormente, las respuestas de los estudiantes se clasificaron en tres grupos, según correspondan con los descriptores de cada uno: 0: cuando la respuesta es incorrecta, 1: cuando la respuesta es medianamente correcta y 2, cuando la respuesta es correcta. Los resultados se describen a continuación (ver figura 2.2):

Figura 2.2

Promedio por ítem en Pre-test



Nota. Fuente propia.

La Figura 2.2 muestra los promedios obtenidos en las preguntas, para los 51 estudiantes, y permite evidenciar que no relacionan conceptos de la Teoría Cuántica en la explicación de la estructura atómica de la materia. Como se observa en la Figura espectros atómicos, crisis de la física clásica, número cuántico, el promedio de respuesta es muy bajo; incluso en el efecto fotoeléctrico y spin, el valor es cero.

A continuación, se describen los resultados porcentuales ítem por ítem en el pre-test (ver tabla 2.4).

Tabla 2.4
Resultados primer ítem

Item 1	0	1	2
Enuncie los hechos que se relacionen con la crisis de la física clásica	86%	10%	4%

Nota. Fuente propia.

La Tabla 2.4 muestra la poca familiaridad que los estudiantes, que se supone han trabajado esta temática, con los hechos relacionados con la crisis de la física clásica. Dentro de los criterios de valoración para este ítem se esperaba que los estudiantes pudieran mencionar al menos dos de los hechos que ponen en crisis la ciencia clásica: ya sea la radiación del cuerpo negro, la explicación del efecto fotoeléctrico, los espectros atómicos o incluso la inestabilidad del átomo de Rutherford.

Relacionar estos hechos es importante por cuanto permite establecer el quiebre epistemológico entre la ciencia clásica y la teoría cuántica y que la ciencia puede entrar en crisis (sea en los términos de Kuhn). Los estudiantes incluso sustentaron no conocer que la ciencia pudiera entrar en crisis, por no poder explicar algunos fenómenos o experimentos (ver tabla 2.4).

Tabla 2.5
Resultados ítem 2

Item 2	0	1	2
¿Cómo explica el efecto fotoeléctrico?	100%		

Nota. Fuente propia.

Tal como se evidencia en la Tabla 2.5, los estudiantes manifestaron al menos no recordar el hecho de haber abordado en su formación secundaria el efecto fotoeléctrico ni en la asignatura de química ni de física. Este hecho pone de manifiesto que en la educación secundaria el efecto fotoeléctrico no es abordado, de igual manera, es congruente este hecho con los hallazgos de que los docentes de ciencias naturales en la secundaria no abordan este tema, los profesores de química consideran que es un tema de física y los docentes de física no lo consideran parte importante de su temática (Solbes et al., 2019; Muñoz Burbano, 2020) (ver tabla 2.5).

Tabla 2.6*Resultados ítem 3*

Item 3	0	1	2
¿Cómo definiría los espectros atómicos?	98%	2%	0%

Nota. Fuente propia.

Al igual que el efecto fotoeléctrico, los resultados que se muestran en la Tabla 2.6 que relacionan la explicación dada a los espectros atómicos, pone de manifiesto la poca importancia que se da a la enseñanza y, por ende, al aprendizaje de la teoría cuántica y de estos hechos que contribuirían a la formación de una imagen de ciencia no lineal, ni secuencial o acumulativa. Los espectros atómicos ligados al átomo de Bohr son un elemento conceptual importante, que debería abordarse en la educación secundaria (ver tabla 2.6).

Tabla 2.7*Resultados ítem 4*

Item 4	0	1	2
¿Cómo definiría electrón?	41%	57%	2%

Nota. Fuente propia.

Los criterios de valoración para este ítem describen al electrón como un componente fundamental y elemental del átomo, con carga negativa y que se sugiriera al menos su carácter cuántico. Sin embargo, los resultados que se muestran en la Tabla 2.7 evidencian una gran confusión en los estudiantes. Por ejemplo, el estudiante E18-02 define el electrón como "unión de partículas"; por su parte, E18-48 lo define como "una parte que conforma la clasificación de un elemento"; incluso E18-07 lo define como "la parte positiva del átomo". Este tipo de respuestas evidencia la confusión de los estudiantes en un concepto que podría suponerse de un manejo generalizado por parte

de estudiantes que han terminado su educación secundaria, pues se trabaja desde los primeros grados de este nivel educativo. El 57% lo enuncia como una partícula negativa; solo el 2% lo describe como un componente del átomo con carga negativa y su comportamiento cuántico se enuncia de manera tangencial (ver tabla 2.7).

Tabla 2.8
Resultados ítem 5

Item 5	0	1	2
¿Cómo explicaría los niveles de energía en los átomos?	85%	15%	0%

Nota. Fuente propia.

La Tabla 2.8 muestra como ningún estudiante relacionó el concepto de nivel con la cuantización de la energía. Solo el 15% relacionó el nivel con un espacio físico en el que se encuentran los electrones, específicamente los enuncian en términos de órbitas de Bohr, incluso con los nombres K, L M.... Pero el 85% denota confusión y yuxtaposición de conceptos; esto se hace evidente en respuestas como: "los niveles de energía están compuestos por los tres tipos de carga: positiva, negativa y neutra" (E-18-35) o "los niveles de energía los podemos encontrar positivos o negativos"; dentro de este 85% se encuentra un gran número de estudiantes que no dan repuesta a la pregunta: afirman no saber o no recordar (ver tabla 2.8).

Tabla 2.9
Resultados ítem 6

Item 6	0	1	2
¿Cómo explicaría los números cuánticos? n , m y l ?	94%	6%	0%

Nota. Fuente propia.

Tal como se describe en la Tabla 2.9 y al igual que en los ítems anteriores, se observan grandes confusiones en las respuestas enunciadas por el grupo de estudiantes; prácticamente el 94% de los estudiantes no da respuesta a la pregunta; manifiestan no recordar o no haber trabajado la temática en la educación secundaria (ver tabla 2.9).

Tabla 2.10
Resultados ítem 7

Item 7	0	1	2
¿Cómo definiría orbital atómico?	78%	20%	2%

Nota. Fuente propia.

La Tabla 2.10 muestra los resultados para el ítem 7. Las respuestas enunciadas por los estudiantes permiten determinar que el concepto de orbital atómico es asumido como un sinónimo de nivel de energía; no se establece la dependencia del orbital por el electrón; por el contrario, el 20%, que da una respuesta medianamente correcta, lo toma como un lugar físico en el que se encuentra o hay probabilidad de encontrar el electrón (ver tabla 2.10).

Tabla 2.11
Resultados ítem 8

Item 8	0	1	2
¿Cómo explicaría el concepto de espín?	100%	0%	0%

Nota. Fuente propia.

Los resultados descritos en la Tabla 2.11 muestran que los estudiantes no relacionan el concepto de espín con la estructura atómica de la materia. Teniendo en cuenta estos resultados, fue necesario indagar más en si el tema fue o no abordado en la educación secundaria y el 90% de los estudiantes manifestó no haber trabajado la temática en la educación secundaria, o no recordar si se trabajó o no (ver tabla 2.11).

2.5.2 Diseño de la Secuencia de enseñanza

La etapa anterior es fundamental; tal como se describió en el marco teórico, desde el constructivismo social, es necesario conocer las ideas que los estudiantes tienen sobre determinado concepto para poder tomar decisiones para su enseñanza. De ahí que los resultados descritos nos permitieron concluir que los estudiantes no relacionan conceptos de la teoría cuántica en el contexto de la EAM o los conceptos relacionados son confusos, con mezcla de conceptos cuánticos y clásicos.

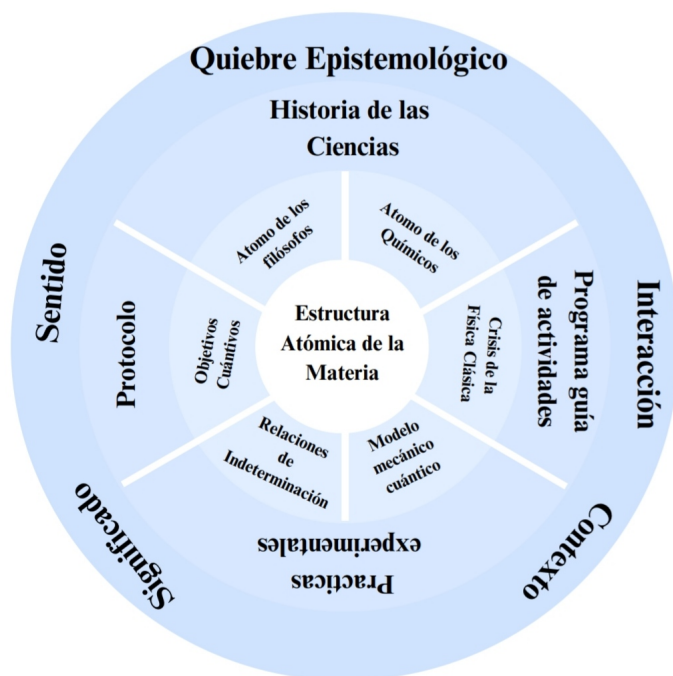
Con base en la caracterización de los conceptos que los estudiantes relacionan con respecto a la Teoría Cuántica, como fundamento conceptual para la estructura de la materia, se procedió a articular los resultados obtenidos con elementos de la investigación didáctica, así como los elementos extraídos del contexto de trabajo, para construir el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la EAM desde la base conceptual de la Teoría Cuántica.

En este caso, se vislumbran grandes carencias y errores conceptuales desde los cuales se deberá pensar no solo una serie de contenidos que constituirán una estructura conceptual y epistemológica de base, sino, articuladas a ella, una serie de actividades y estrategias que permitan configurar un proceso de enseñanza que contribuya a generar un aprendizaje acorde a los requerimientos conceptuales de la Teoría Cuántica y que coadyuve en la superación de los errores y confusiones de los estudiantes.

La secuencia didáctica (SD) se diseñó sobre la base de Programas Guías de Actividades y el desarrollo de protocolos de Clase. La SD toma elementos que buscan mostrar una imagen de ciencia contextualizada, no lineal ni acumulativa, por lo que se propende por un quiebre epistemológico, entre la física clásica y la teoría cuántica, como elemento dinamizador de la enseñanza (ver figura 2.3).

Figura 2.3

Construcción de la secuencia de enseñanza



Nota. Fuente propia.

La Figura 2.3 muestra la concepción en el proceso de diseño: se establece un esquema en espiral que toma como centro del proceso la enseñanza de la estructura atómica de la materia; el marco teórico se refleja en la esfera exterior, en la que se establece como objetivo fundamental el quiebre epistemológico, la interacción entre los pares, tanto de los estudiantes entre sí, como con el docente, así como el contexto como elemento dinamizador del proceso. Todo esto apunta a que el estudiante pueda alcanzar significado y sentido.

El segundo nivel corresponde a acciones didácticas que se articulan entre sí: la historia de las ciencias como elemento significativo de la enseñanza, donde no solo se aprovechan los acontecimientos históricos para una mejor comprensión de conocimientos científicos (Solbes, 2013; 2019), sino que se parte de la contextualización de dichos hechos, para que se relacionen situaciones socio-científicas, al considerar los problemas que llevaron a la construcción de dichos

conocimientos, específicamente con los hechos que se relacionan con la crisis de la física clásica, abordando las dificultades epistemológicas, ontológicas e incluso conceptuales que se presentaron con el advenimiento de la Teoría Cuántica, como un nuevo paradigma.

Otro elemento didáctico son los Programas Guías de Actividades como recurso que orienta acciones para la enseñanza y el aprendizaje y las prácticas experimentales que, con elementos de uso cotidiano, permiten recrear algunas temáticas relacionadas con la estructura atómica de la materia. Los protocolos, que son notas de clase construidas por estudiantes que, de manera voluntaria, presentaban al inicio de cada clase un protocolo de la clase anterior, en que se recogen no solo los temas abordados por la docente/investigadora, sino las participaciones de sus compañeros, presentan las inquietudes y dudas que no hayan sido resueltas para que se aborden en esta nueva clase.

Así, la Secuencia Didáctica (SD) diseñada consta de una secuencia de actividades que se relacionan con las dificultades evidenciadas en el pre-test, tal como se muestra en la Tabla 2.12. El Programa Guía de Actividades relaciona detalladamente los conceptos necesarios y orienta al estudiante para un trabajo individual y un trabajo colectivo, además del trabajo que se realiza con la asesoría de la docente investigadora.

Tabla 2.12
Actividades por sesión

SESIÓN	NOMBRE DEL PROGRAMA GUÍA	TEMATICAS DESARROLLADAS	DIFICULTADES EVIDENCIADAS EN EL PRE-TEST
1	La química como disciplina científica	Conceptualización de ciencia. Conceptualización de química. Introducción a un concepto de materia.	Idea de ciencia, lineal, secuencial y acumulativa.
2	La construcción de un concepto de materia	La idea filosófica de materia: El atomismo de Demócrito. La prevalencia del planteamiento aristotélico.	No se considera la discontinuidad de la materia
3		La teoría Atómica: Boyle, Lavoisier, Dalton	La teoría de Dalton desde el trabajo de Demócrito
4	Electrón	Los trabajos de Thomsom	Confusión átomo-electrón (asocio carga positiva al electrón)
5	El átomo tiene núcleo	Experimento de Rutherford La radiactividad	No se reconoce la crisis de la física clásica.
6	La crisis de la ciencia clásica	El efecto fotoeléctrico La estabilidad del átomo de Rutherford Los espectros atómicos	No se reconoce el efecto fotoeléctrico tampoco los espectros atómicos en el contexto de la crisis de la física clásica
7	El problema del átomo de Bohr	La cuantización de la energía. Los espectros El átomo de Bohr	Se asume orbita y orbital como sinónimos
8	Objetos cuánticos	El fotón El electrón Ni onda, ni partícula, objetos nuevos con un comportamiento nuevo	No relacionan propiedades de los objetos cuánticos.
9	Las relaciones de indeterminación	Heisenberg. Un poco de Historia. Ni un principio, ni incertidumbre	Se desconoce la existencia de las relaciones de indeterminación.
10	Modelo mecánico Cuántico	Ecuación de Onda Orbital como estado estable Números Cuánticos	Prevalece la analogía de átomo como sistema planetario en miniatura.

Nota. Fuente propia.

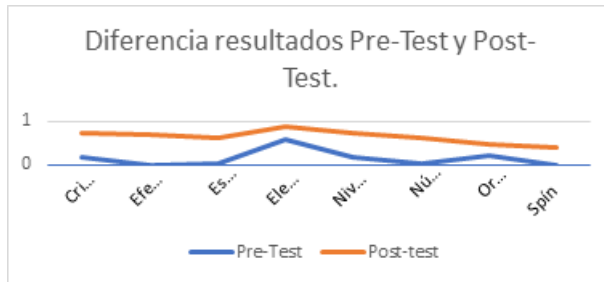
2.5.3 Resultados obtenidos con la aplicación de la Secuencia de Enseñanza

Una vez se desarrolló la secuencia de enseñanza, se procedió a realizar distintas pruebas estadísticas al total de los 51 estudiantes implicados en el estudio. En los sub-apartados siguientes aparecen los resultados de estas pruebas.

Se aplicó una prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S), para determinar si la muestra sigue o no un comportamiento normal, para la elección entre pruebas paramétricas y no paramétricas. Al realizar la prueba de K-S, se obtiene una significación asintótica (entre 0,001 y 0,05), por tanto, la distribución no es normal, y no se precisa la aplicación de pruebas paramétricas, en su lugar, se considera Wilcoxon resultando una diferencia significativa entre las medias globales del pre-test y el pos-test. En consecuencia, se establece una mejora estadísticamente significativa. al aplicar el tratamiento con la SD.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos después de desarrollada la estrategia de enseñanza y la aplicación del post-test. En la primera parte se hace una comparación entre los resultados del pre y post- test, para luego presentar las Tablas de contingencia resultado de la comparación por cada una de las preguntas del test (ver figura 2.4).

Figura 2.4
Diferencia entre resultados del Pre-test y Post-test



Nota. Fuente propia.

La Figura 2.4 muestra las diferencias de medias globales entre el pre- test y post-test; obsérvese que en líneas generales el gráfico prácticamente mantiene la forma en el pre y post- test, donde el fenómeno fotoeléctrico, los espectros atómicos, número cuántico y spin tienen las valoraciones más bajas, pero se evidencian sensibles diferencias entre el pre y post test; en el post-test las medias globales son mejores.

Se consideró que conocer diferencias significativas en las medias no sería suficiente, que era necesario conocer un desarrollo detallado de cada ítem del instrumento. Para ello, utilizando el sistema de SPSS, se presentan las Tablas de contingencia, que contienen información sobre el número de alumnos que han empeorado o mejorado o se han mantenido en cada uno de los ítems. Para el análisis de estas Tablas es necesario tener en cuenta que “el triángulo superior izquierdo de la Tabla muestra las mejoras de los estudiantes, entre los que contestaron de forma incorrecta en el pre-test y consiguieron una respuesta parcialmente correcta o correcta en el post-test” (Muñoz Burbano, 2020, p. 208). El triángulo inferior izquierdo muestra las respuestas que empeoraron: alumnos que dieron una respuesta parcialmente correcta en el pre-test y en el post-test dieron una respuesta incorrecta (ver tabla 2.13).

Tabla 2.13

Hechos que se relacionan con la crisis de la Física Clásica

Ítem 1	p1-post			Total	
	0	1	2		
	0	19	9	21	49
P1-pre	1	0	0	1	1
	2	0	0	1	1
Total	1	19	9	23	51

Nota. Fuente propia

La Tabla 2.13 muestra el comportamiento estadístico detallado para el primer ítem, en que se solicitan hechos que se relacionan con la crisis de la Física clásica; se encuentra que 9 estudiantes que en el pre-test obtuvieron una valoración de 0, en el post-test mejoraron a una valoración de 1 y 21 a una valoración de 2, que representa una respuesta correcta. No hay estudiantes que hayan empeorado sus respuestas; 20 estudiantes se mantuvieron en el nivel inicial. Esto evidencia que el 58,8% de los estudiantes avanzaron en su proceso (ver tabla 2.13).

Tabla 2.14
Efecto fotoeléctrico

Ítem 2	p1-post			Total	
	0	1	2		
P1-pre	0	10	8	27	45
	1	0	1	5	6
	2	0	0	0	0
Total	10	9	32	51	

Nota. Fuente propia.

Este ítem presentó una mejora muy significativa: ninguno de los estudiantes retrocedió en su proceso, 10 estudiantes permanecieron con una respuesta incorrecta. El 80% de los estudiantes avanzó de una respuesta incorrecta a una respuesta medianamente correcta y a una respuesta correcta (ver tabla 2.14).

Tabla 2.15
Espectros atómicos

Ítem 3	p1-post			Total	
	0	1	2		
P1-pre	0	14	16	20	50
	1	1	0	0	1
Total	2	27	16	8	51

Nota. Fuente propia

Como muestra la Tabla 2.15, si bien 28% de los estudiantes no avanza en el proceso, el 72% logra mejorar la conceptualización realizada en torno a los espectros atómicos. Este trabajo implicó el desarrollo de prácticas experimentales, tales como el espectroscopio casero, que involucró a los estudiantes en un proceso dinámico (ver tabla 2.15).

Tabla 2.16
Qué es el electrón

Ítem 4	p1-post			Total	
	0	1	2		
	0	9	13	17	39
P1-pre	1	0	4	7	11
	2	1	0	0	1
Total	10	17	24	51	

Nota. Fuente proia.

La Tabla 2.16 muestra los resultados de uno de los ítems que genero mayor inquietud en la investigación, y está relacionado con el electrón. En este ítem, en el pre-test, se suponían respuestas que al menos relacionaran al electrón como una partícula clásica con carga negativa y que se encontraba en la periferia, puesto que es un tema que se aborda básicamente desde el grado sexto a grado once. La descripción del concepto que hacen los estudiantes denota una serie de confusiones importantes, que son preocupantes, más allá de la descripción del electrón como objeto cuántico. Sin embargo, una vez desarrollada la secuencia didáctica, 80% de los estudiantes logran asignarle una carga negativa y avanzar a la idea de electrón como objeto cuántico (ver tabla 2.16).

Tabla 2.17
Niveles de energía

Ítem 5	p1-post			Total	
	0	1	2		
P1-pre	0	20	14	14	48
	1	0	1	1	2
Total	26	9	16	51	

Nota. Fuente propia.

La Tabla 2.17 muestra los resultados obtenidos en relación con los niveles de energía; pese a que este tema es trabajado de acuerdo con los Estándares básicos de competencias presentados por el Ministerio de Educación Nacional en grado sexto (MEN, 2006), luego en décimo, los estudiantes tratan como sinónimos las órbitas de Bohr, con los orbitales y niveles de energía. La Tabla muestra que el 60% de los estudiantes avanza en su proceso una vez se ha finalizado la aplicación de la secuencia. No hay estudiantes que retrocedan en el proceso (ver tabla 2.17).

Tabla 2.18
Números cuánticos

Ítem 6	p1-post			Total	
	0	1	2		
P1-pre	0	18	13	19	50
	1	0		1	1
Total	24	7		20	51

Nota. Fuente propia.

Esta temática, que de igual manera es abordada en la educación secundaria, en el pre-test muestra grandes confusiones y, con el desarrollo de la secuencia, se logra un avance significativo, tal como se muestra en la Tabla 2.18, ya que más del 60% de los estudiantes logra mejorar los conceptos relacionados. Es uno de los conceptos en que las ideas previas tienden a prevalecer en el proceso, especialmente al relacionar los tres números cuánticos con el átomo de Bohr (ver tabla 2.18).

Tabla 2.19
Orbital

Ítem 7	p1-post			Total	
	0	1	2		
P1-pre	0	13	16	19	48
	1	1	0	2	3
Total	24	6		21	51

Nota. Fuente propia.

La Tabla 2.19 muestra los resultados obtenidos con respecto al concepto de orbital; como se enunció antes, este concepto, en el pre-test, se trata como sinónimo de nivel y sobre todo órbita. Como muestra la Tabla el 74% de estudiantes avanza en el proceso, asume su carácter dependiente del electrón y no como un espacio físico para ser llenado (ver tabla 2.19).

Tabla 2.20

Spin

Ítem 8	p1-post		Total	
	0	1	2	
P1-pre	0	15	20	15
	1	0	0	1
Total	1	25	10	16
				51

Nota. Fuente propia.

Finalmente, los estudiantes, con base en la enseñanza recibida en la educación secundaria, describen el electrón como un giro a la izquierda y a la derecha. Una vez desarrollada la secuencia, 35 estudiantes avanzan en el proceso a explicar el spin como una propiedad de los objetos cuánticos que no tienen análogo en el mundo macroscópico, un cuarto número cuántico que se deriva de la ecuación de Schrödinger, tal como se muestra en la Tabla 2.20.

Los resultados de la investigación ponen de manifiesto que los estudiantes que hacen parte del estudio no relacionaron conceptos de la Teoría Cuántica dentro de la Unidad de Estructura Atómica de la Materia. Pero el desarrollo de la secuencia permitió avanzar en la construcción de conceptos en los que se asumen elementos de la teoría cuántica para la explicación de la estructura atómica de la materia, lo cual genera preocupación. Así, se entiende que la noción de materia tiene un valor epistémico fundamental, puesto que lleva implícita una conexión con el mundo cuántico, lo anterior porque es en el átomo "partícula teórica enunciada por Demócrito" (Lederman, 1996, p. 12), donde se hace substancial esta noción. Además, nace en una concepción filosófica y en el transcurrir de más de veinte siglos del proceso de construcción de la ciencia esta noción vuelve a sus orígenes filosóficos. Se concluye que la exigencia del aprehender dentro del proceso de formación en ciencias no solo implica el marco conceptual que caracteriza una teoría, sino también su incidencia en la forma del ver e interpretar el mundo.

Se hizo énfasis en la noción de materia por su relación teórica con la química cuántica, un campo de conocimiento que en la enseñanza se enfoca desde el contexto histórico como una sucesión de hechos, sin hacer énfasis en sus derivaciones epistémicas, tales como la comprensión del mundo, el desarrollo tecnológico, las afectaciones al campo ecológico y el progreso material de la especie humana (Mora Penagos y Parga, 2010) que serían fundamentales a la hora de construcción de una cultura científica en Colombia.

Los resultados descritos nos permiten asumir la urgencia de una renovación en el aula de clase, en el currículo y en todos los procesos que involucran a la formación en ciencias a fin de que se construyan modelos, se formen valores, o se logre a través de las ciencias naturales dar sentido al mundo que nos rodea (Gómez Crespo, 2006). Por tanto, no se trata de conocer una gran cantidad de datos, sino de desarrollar herramientas esenciales para discernir e interactuar de modo efectivo con la realidad, ser capaces de tomar decisiones conscientes y críticas, lo que permite desarrollar un espíritu científico, haciendo uso responsable del conocimiento; es decir, pensar científicamente (Programme for International Student Assessment [PISA], 2006).

2.6 Conclusiones

La investigación en didáctica de las ciencias naturales demuestra que es posible enseñar teoría cuántica desde la historia de las ciencias y prácticas experimentales si enfatizar en la estructura matemática. Sin embargo, los conocimientos que relacionan los estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental (Semestre A- 2018) con la Teoría Cuántica denotan una conceptualización muy básica; no se asume que estos temas sirven de base para la descripción de la estructura de la materia que se ajuste al dominio científico del momento.

Los estudiantes del primer semestre de la Licenciatura dan explicaciones a los conceptos de electrón, nivel de energía y orbital, con una mezcla entre conceptos clásicos y pre-cuánticos. Existen confusiones al tratar orbita y orbital como conceptos sinónimos. La investigación develó una importante confusión y falta de claridad en la estructura del átomo y el electrón. El electrón no se describe ni siquiera en términos clásicos. Esto evidencia la poca importancia que atribuyen al tema y la imposibilidad de relacionarlo con otros conceptos. Al respecto, se generan interrogantes relacionados con la manera cómo los estudiantes asumen otros conceptos basados en la conceptualización del electrón, tales como: enlace, tabla periódica, oxido-reducción por mencionar solo algunos.

Los conceptos relacionados con Nivel de Energía y Orbital generan grandes confusiones; la idea de un átomo como sistema solar en miniatura prevalece, es una idea fuerte; les resulta muy conveniente por ser gráfica y cercana al entorno, por tanto, la descripción de Nivel es asumida como una órbita en términos de Bohr y, luego, el orbital como sinónimo de órbita y nivel al mismo tiempo.

Los resultados del pre-test, en general ponen de manifiesto concepciones ingenuas basadas en la memorización; los contenidos prefabricados no tienen significado y sentido para los estudiantes: es el caso de la conceptualización de electrón, que se pudiera suponer obvia y denotó mucha confusión. Esto plantea también la necesidad de revisar la eficacia de los enfoques de enseñanza basados en la transmisión de contenidos y promover nuevas formas de aprendizaje participativo y constructivo. El marco teórico utilizado cobra de esta manera especial importancia, pues se articula el saber de los estudiantes con actividades entre pares que fortalecen el aprendizaje.

Frente a esta situación, se consideró fundamental el diseño de una secuencia didáctica, que permitiera la articulación de elementos conceptuales relacionados con la Teoría Cuántica, tales como comportamiento de los objetos cuánticos, relaciones de indeterminación, números cuánticos, ecuación de Schrödinger, de manera descriptiva. La Secuencia Didáctica también articuló la historia de las ciencias, especialmente en lo relacionado con los modelos atómicos, haciendo un especial énfasis en la crisis que implicó el advenimiento de la teoría cuántica. Finalmente, con el diseño de Programas Guía de Actividades se vincularon experiencias sencillas en lo relacionado con el efecto fotoeléctrico, los espectros atómicos, entre otros.

Las fases descritas en la metodología son complementarias y se desarrollan de forma no secuencial. En la primera fase de la investigación, se delimitan las necesidades de aprendizaje para los estudiantes y en la segunda fase se da respuesta a dichas necesidades. El diseño fue sencillo, pero se articuló en sesiones de enseñanza aprendizaje activas, con la participación de los estudiantes con personificaciones, el desarrollo de protocolos y las prácticas experimentales.

La comparación de los promedios obtenidos en el pre-test y post-test confirma lo que las pruebas no paramétricas enunciaron; además, las Tablas de contingencia para cada uno de los ítems permitieron analizar cada uno de los ítems trabajados de manera específica. En todos ellos hubo un avance significativo con respecto al pre-test, lo que permite afirmar que la Secuencia diseñada generó elementos necesarios para avanzar en el proceso y superar algunos errores conceptuales importantes.

De igual manera, se realizó una evaluación cualitativa, de la que se infiere que los estudiantes asumieron que las actividades posibilitan el aprendizaje dialógico y propositivo evidenciado por la participación y los resultados del postest.

Finalmente, sintetizando el proceso de investigación determinan que los estudiantes no relacionan conceptos cuánticos con la estructura de la materia, por ende, una secuencia de enseñanza-aprendizaje que, desde la investigación y de la referencia conceptual de la teoría cuántica contribuye a superar estos problemas.

Estos resultados dejan clara la necesidad de procesos de actualización y formación continua en la educación secundaria y en los programas de formación docente; la población con la que se trabajó son futuros docentes de ciencias naturales, que en su práctica deberán asumir estas temáticas con miras a lograr una transformación de la educación científica en Colombia. Por ello, se requiere de la actualización curricular en los programas de formación del profesorado en ciencias.

Bibliografía

Coll, C. (1991). *Psicología y currículum*. Paidós.

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista Ciencias de la Educación*, 19(33), 229-247.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *psychometrika*, 16(3), 297-334.

Driver, R., Newton, P. y Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, 84(3), 287-312.

Gadermann, A. M., Guhn, M. y Zumbo, B. D. (2012). Estimating ordinal reliability for Likert□ type and ordinal item response data: A conceptual, empirical, and practical guide. *Practical Assessment, Research y Evaluation*, 17(3), 1□13.

Gil, D Vilches, A. (2001). Una alfabetización científica para el siglo XXI, obstáculos y propuestas de actuación. *Investigación en la escuela* . 1(439, 27-37 . Recuperado de http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/43/R43_3.pdf

Gómez Campo, V. M. (1995). *La educación tecnológica en Colombia*. Universidad Nacional de Colombia.

Gómez Crespo, M. (2006). *Aprender y Enseñar Ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico* (Séptima ed.). Ediciones Morata S.L.

Gómez Crespo, M., Poso I. y Gutiérrez M. (2004). Enseñando a comprender la naturaleza de la materia: el diálogo entre la química y nuestros sentidos. *Educación química. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Química*. 15(3), 198-209.

González, E.M., Muñoz Burbano, Z.E. y Solbes, J. (2020). La enseñanza de la física cuántica: una comparativa de tres países. Gón-dola. *Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 15(2), 239-250 DOI: <http://doi.org/10.14483/23464712.15619>

Henao-García, J. J. y Tamayo-Alzate, O. E. (2010). Enseñanza y Aprendizaje del concepto naturaleza de la materia mediante la resolución de [33] problemas. *Unipluriversidad*, 14(3), 25-45.

Izquierdo Aymerich, M. (2004). Un nuevo enfoque de la enseñanza de la química: contextualizar y modernizar. *Anales de la Asociación Química Argentina*, 92(4-6), 115-136. Recuperado de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttextpid=S036503752004000200013lng=estlng=es

Jonnaert, P. (2001). Competencias y socioconstructivismo. Nuevas referencias para los programas de estudios (Conferencia). *Segunda Conferencia Anual de Inspectores de la Enseñanza Media*, Bobo Burkina Faso. https://scholar.google.es/scholar?hl=esas_sdt=0%2C5q=Competencias+y+socioconstructivismo.+Nuevas+referencias+para+los+programas+

Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica.

Lederman, T. D. (1996). La Partícula Divina Si el universo es la respuesta, ¿cuál es la pregunta? (J. P. Campos, Trad.). Houghton Mifflin Company. (trabajo original publicado en 1993).

Ledesma, R. (2002). Análisis de consistencia interna mediante Alfa de cronbach: Un programa basado en gráficos dinámicos. *Psico-USF*, 7(2), 143-152.

Lombardi, O. y Martínez González, J. (2012). Entre mecánica cuántica y estructuras químicas: ¿a qué refiere la química cuántica? *Scientiae Studia*, 10(4), 649-670. <https://dx.doi.org/10.1590/S1678-31662012000400002>

Martín Arribas, M. C. (2004). Diseño y validación de cuestionarios. *En Matronas Profesión*, 5(17), pp.23-29. http://enferpro.com/documentos/validacion_cuestionarios.pdf

Milner, A., Sondergeld, T. A., Demir, A., Johnson, C.C., Czerniak, C.M. (2012). Elementary Teachers' Beliefs About Teaching Science and Classroom Practice: An Examination of Pre/Post NCLB Testing in Science. *Journal of Science Teacher Education*, 23(2), 111-132.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias ciencias naturales y educación ambiental*. Ministerio de Educación Nacional.

Mora Penagos, W. y Parga, D. (2010). La imagen pública de la química y su relación con la generación de actitudes hacia la química y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 1(27), 67-93.

Muñoz Burbano, Z. (2020). *Enseñanza de la estructura atómica en la educación secundaria en Colombia* [Tesis doctoral, Universidad de Nariño]. Roderic. <https://roderic.uv.es/handle/10550/75604>.

Oviedo, H. C. y Campo-Arias, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach; An Approach to the Use of Cronbach's Alfa. *Rev. colomb. psiquiatr*, 34(4), 572-580.

Piaget, J. (1973). *La representación del Mundo en el Niño*. Morata.

Piaget, J. (1968a). *Psicología de la Inteligencia*. Proteo.

Piaget, J. (1968b). *Los estadios del desarrollo intelectual del niño y del adolescente*. Editorial Revolucionaria.

PISA, (2006). *PISA 2006. Marco de la Evaluación. Conocimientos y Habilidades en Ciencias Matemáticas y Lectura*. OCDE - Santillana.

Robles Garrote, P. y Rojas, M. del. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija De Lingüística Aplicada a La Enseñanza De Lenguas*, 9(18), 124-139. <https://doi.org/10.26378/rnlael918259>

Rodríguez, B., A. (2013). ¿Por qué hacer ciencia (básica) en Colombia?: la visión muy personal de un "científico" colombiano. *Tecno Lógicas*, 30, 09-15. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttextpid=S012377992013000100001Ing=entIng=es

Rojas, O. N. (2010). El surgimiento de la Complementariedad: Niels Bohr y la conferencia de Como. *Filosofía*, XLVIII, 65-76.

Sharma, S. (2014). Teaching probability: A socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 37 (3)78-84.

Sinarcas, V. y Solbes, J. (2013). Dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la Física Cuántica en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(3), 9-25.

Solbes, J. (2019). Cuestiones socio-científicas y pensamiento crítico: Una propuesta contra las pseudociencias. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 46, 81-99.

Solbes, J. (2013). Contribución de las cuestiones sociocientíficas al desarrollo del pensamiento crítico (II): Ejemplos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 10 (2), 171-181.

Solbes, J. J., Muñoz Burbano, Z. E., y Ramos Zambrano, G. E. (2019). Enseñanza de la estructura atómica de la materia en Colombia. *Revista Historia de la Educación Colombiana*, 2019, 22 , 99-117.

Solbes, J. y Sinarcas, V. (2011). Una propuesta para la enseñanza aprendizaje de la física cuántica basada en la investigación en didáctica de las ciencias. *Revista de enseñanza de la física*, 23(1 y 2), 57-84.

Vasco, C.E. (2006). Siete retos de la educación colombiana para el período de 2006 a 2019 [Conferencia]. *Universidad EAFIT, Medellín, Colombia*. <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/PYS/article/view/6781>

Vázquez-Alonso, A., Acevedo-Díaz, J. A. y Manassero-Mas, M. A. (2005). Más allá de la enseñanza de las ciencias para científicos: hacia una educación científica humanística. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 4(2), 1-30.

Vygotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica.

Vygotsky, L. S. (1978). *Pensamiento y Lenguaje*. La Pleyade.

Wertsch, J. V. (1993). Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Aprendizaje/Visor.

3. Introducción a códigos lineales con SageMath

3.1 Introducción: un panorama general

En las últimas décadas se ha experimentado un gran aumento en la necesidad de transmisión y almacenamiento de información, por esta razón cada vez más es imprescindible contar con métodos que ayuden a mantener no solamente la seguridad de estos datos sino también su confiabilidad. Justamente por este último aspecto, resulta fundamental detectar y, si es posible, corregir errores que se puedan generar durante este tipo de procesos. Por ejemplo, al enviar una fotografía pueden surgir errores en la transmisión que distorsionen la imagen original. Tal vez esto puede parecer inconcebible para el usuario experimentado actual que envía y recibe fotos desde su celular sin mayores preocupaciones, pero en realidad la detección y corrección de errores está tras bambalinas; de hecho se utiliza en los dispositivos más modernos, entre otras cosas para la recepción de imágenes fiables de planetas tan lejanos como Marte. Es así como aparece a mitad del siglo pasado la teoría de códigos correctores de errores, disciplina que desde entonces se ha visto influenciada por diferentes ramas como la informática, la computación y, por supuesto, la matemática en general y más particularmente por los desarrollos algebraicos descubiertos en los últimos siglos.

Por supuesto, como en muchas disciplinas matemáticas, son varios los científicos que han aportado para el crecimiento de esta rama, aunque tres personajes fueron importantes para su desarrollo inicial. A continuación presentamos una breve descripción de sus vidas académicas.

Figura 3.1*Claude Shannon*

Claude Elwood Shannon (1916-2001) fue un destacado ingeniero electricista, matemático y criptógrafo estadounidense, considerado por muchos "el padre de la teoría de la información" (Figura 3.1)¹. Shannon trabajó en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT) y los Laboratorios Bell. También es conocido por fundar la teoría de diseño de circuitos digitales en 1937, en su tesis de maestría en el MIT, en la cual demostró que las aplicaciones eléctricas pueden ser modeladas usando el Álgebra Booleana. Durante la Segunda Guerra Mundial contribuyó como criptoanalista del Departamento de Defensa de los Estados Unidos. En su artículo "A mathematical theory of communication", de 1948, sentó los primeros fundamentos de la teoría de códigos (Shannon, 1948).

Richard Wesley Hamming (1915-1998) fue un matemático, pionero en ciencias de la computación y profesor (Figura 3.2)². En los años 40, su investigación estuvo dedicada al nacimiento de los computadores y la teoría de códigos en los Laboratorios Bell. En 1945 fue reclutado para trabajar en el Laboratorio de los Álamos, en el Proyecto Manhattan. A partir de 1970 se dedicó a la docencia en diferentes instituciones: Universidad de Illinois, Universidad de Louisville, Universidad de Stanford, City College de Nueva York, Universidad de California, Universidad de Princeton y la Escuela de Posgrado Naval. Entre sus principales aportes se destaca la creación de los códigos de Hamming (Hamming, 1950) y la introducción del concepto de distancia de Hamming.

Figura 3.2*Richard Hamming***Figura 3.3***Marcel Golay*

Marcel Jules Edouard Golay (1902-1989) estudió ingeniería eléctrica en el Instituto Tecnológico Federal Suizo, en Zúrich, y luego obtuvo un doctorado en física en la Universidad de Chicago, en 1931. Trabajó en los Laboratorios Bell y en el Departamento de Señales de la Armada Americana. Posteriormente se vinculó a la compañía Perkin-Elmer como investigador senior. Parte de su investigación la dedicó al estudio de cromatografía de gases y la espectrografía óptica. Entre sus principales aportes a la teoría de códigos se destaca el descubrimiento de los códigos binarios y ternarios de Golay, los cuales son generalizaciones de los códigos de Hamming (Marcel, 1949).³

¹Imagen tomada de <https://www.ias.edu/news/shannon-newyorker>

²Imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Hamming

³Imagen tomada de <https://repository.aip.org/islandora/object/nbla:301680>

Otros científicos que han realizado valiosos aportes al desarrollo de la teoría de códigos son: David Slepian, Elwyn Berlekamp, Florence Jessie MacWilliams, Neil Sloane, Patrick Solé y Vera Pless, entre muchos otros.

En un principio, la teoría de códigos fue un área con razonamientos que podrían ser considerados netamente como pertenecientes a la matemática pura. Claude Shannon mostró que los códigos correctores de errores existían, sin embargo sus ideas no encontraron una aplicación práctica inmediata. Hamming (1950) y Golay (1949) posiblemente fueron los primeros en dar construcciones explícitas de este tipo de códigos, lo que condujo a diversas aplicaciones prácticas.

El principal objetivo de la teoría de códigos consiste en construir códigos capaces de detectar y corregir errores durante la transmisión de información. La teoría de códigos está soportada especialmente en varias ramas del álgebra y matemáticas discretas, entre ellas: álgebra lineal, teoría de números, teoría de anillos, teoría de grupos o podríamos decir álgebra abstracta en general, combinatoria, teoría de grafos, entre otras, y en la actualidad se resalta la aplicación de la computación.

Una de las formas de aplicar la teoría de códigos para la transmisión de archivos digitales, como imágenes o sonidos, consiste en, por ejemplo, dividir una imagen o un sonido en pequeñas partes, y usar una cadena binaria para representar cada una de sus partes. De esta forma, se usan cadenas binarias para comprimir la información o para corregir los errores que pueden ser causados por ruido cuando la información es enviada a través de un canal posiblemente ruidoso. Por ruido se entiende cualquier situación que pueda dificultar la comunicación entre dos medios: ruido en el ambiente, como por ejemplo, el de una aspiradora, el generado por una obra de construcción, el causado por una muchedumbre en una calle, o las dificultades originadas por tormentas eléctricas, defecto en las componentes electrónicas de un sistema o incluso los errores de tipo humano generados al introducir la información.

Entre las primeras industrias que se beneficiaron de las técnicas de corrección de errores, naturalmente se encuentran las de la computación y la telefonía; esto porque en ellas la información es transmitida principalmente por medio de computadores. Para prevenir la aparición de errores en estas situaciones los sistemas computacionales utilizan, entre otros, los códigos de Hamming. Con el nacimiento del programa espacial, la agencia estadounidense llamada Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio, más conocida como NASA, pasó a ser uno

de los principales usuarios y desarrolladores de estas tecnologías; esto porque, debido a la falta de potencia en los cohetes que se utilizaron en los primeros proyectos, el material que se enviaba debía ser lo más liviano posible; de esta forma los equipos para transmitir la información no eran tan potentes como se esperaría en una misión al espacio. Para sobrepasar estos inconvenientes se utilizaron códigos correctores de errores para mejorar la fiabilidad y poder reconstruir la información enviada (Malkevitch, 2003).

Además, según Malkevitch (2003), el Programa Mariner tomó fotos en blanco y negro de Marte en 1965. Las imágenes eran de tamaño 200×200 píxeles, donde a cada píxel se le asignaba un número entre 64 tonalidades de grises (usando 6 bits). La transmisión de una única imagen podría tomar hasta 8 horas. En 1972, el Programa Mariner 9 transmitió mejores fotografías con la ayuda de códigos de Reed-Muller que tenían 6 bits de información y 26 bits adicionales. Aunque para este momento la velocidad de transmisión era mucho mejor, las imágenes eran de mayor tamaño, de tal forma que fue necesario almacenarlas. Posteriormente, el Programa Viking aterrizó en Marte en 1976 y consiguió enviar fotografías a color, tomando imágenes separadas del mismo lugar usando tres filtros de color diferentes. Las imágenes a blanco y negro obtenidas por cada filtro fueron transmitidas y entonces una imagen a color fue reconstruida a partir de la información en las tres imágenes a blanco y negro. Igualmente, Malkevitch (2003) afirma que la NASA usó diferentes códigos correctores de errores; por ejemplo, para las misiones entre 1969 y 1977, la nave Mariner usó códigos de Reed-Muller; el Voyager 2 empleó un código de Golay para las misiones a Júpiter y Saturno.

Para Pinch (1997), el valor de la teoría de códigos correctores de errores para la transmisión de informaciones, en la tierra y desde el espacio, fue inmediata y una amplia variedad de códigos fueron cons-truidos consiguiendo tanto economía en la transmisión como capacidad de corrección de errores. Entre otras aplicaciones se destaca el uso de códigos para proteger información en los CD's (discos compactos) y CD-ROM's. Según Pinch (1997), estos códigos pueden corregir hasta 4000 errores consecutivos y, según Malkevitch (2003), aunque estos dispositivos están protegidos por derechos de autor, se sabe que utilizan códigos de Reed-Solomon para proteger la información almacenada en ellos.

Entre otras tecnologías que también usan teoría de códigos se resaltan: los módems de los computadores, las comunicaciones satelitales, las transmisiones de radio y televisión de alta definición, entre otras. Vale destacar que cada día se encuentran nuevas aplicaciones.

Por ejemplo, McEliece (1978) presentó un nuevo criptosistema basado en teoría de códigos. A partir de este trabajo surgieron muchas otras investigaciones en las que se están utilizando diferentes tipos de códigos (Engelbert et al., 2007). Más recientemente, Daniel J. Bernstein y sus colaboradores presentaron un criptosistema para computación post-cuántica de clave pública que se encuentra entre los escogidos por el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST) de Estados Unidos como uno de los sistemas más prometedores para reemplazar los sistemas actuales de criptografía, (ver Engelbert, et al. (2007) y Singh (2019)).

Por supuesto existen aplicaciones de la teoría de códigos en otras ramas de las matemáticas puras, (ver Pinto, Rocha Malonek y Vettori (2015)) y otras aplicaciones de la teoría de códigos pueden encontrarse cada vez más en áreas con las que aparentemente no habría relación: sistemas biológicos (Yockey, 2005; Salavati, 2010), comunicaciones submarinas (Costa Vianna, et al. 2016). Claramente esta lista cada día crece, ampliando nuevos horizontes.

Los medios de información, tales como sistemas de comunicación y dispositivos de almacenamiento, no son absolutamente confiables, esto porque los mensajes que son transmitidos pueden ser alterados accidentalmente por diferentes mecanismos, conocidos como ruido.

El ruido siempre está presente en la transmisión de mensajes y el efecto que produce en los mensajes es introducir errores que modifican los mensajes transmitidos. Ante este problema surge la teoría de códigos correctores de errores, cuyo principal objetivo es detectar y corregir los errores producidos. La transmisión de datos, desde el punto de vista de la teoría de códigos, supone las siguientes reglas:

- a) Emisor y receptor conocen la codificación de los mensajes a transmitir.
- b) Si ocurren errores, el receptor es capaz de detectarlos.
- c) Por un canal de comunicación, solo palabras del nuevo lenguaje son enviadas.
- d) Los mensajes recibidos solo deben contener símbolos que se manejan en el canal; es decir, si se utilizan números en la codificación, no es posible que llegue un mensaje con algún símbolo distinto al aceptado por el emisor y receptor.

En principio un código es un subconjunto no vacío, el cual no tiene ningún requerimiento especial. Es así como podemos considerar como un primer ejemplo de código cualquier idioma, en nuestro caso el español. Aunque este permite transmitir una gran cantidad de mensajes, tiene el problema de que no es completamente eficiente para detectar

o corregir errores. Por ejemplo, al transmitir la palabra "HOLA" podemos cometer un error en cualquiera de sus letras; algunas veces el receptor podrá detectar y hasta corregir el error, pero esto no siempre es así. Si se recibe la palabra "HTLA", el receptor podría inferir que lo que se le quiere decir es "HOLA", dado que la primera no es una palabra del español. Sin embargo, si la palabra recibida es "SOLA", el receptor podría inclusive confundirse al pensar que esta es la palabra correcta.

Matemáticamente, la teoría de códigos se alimenta cada vez más de las estructuras algebraicas existentes, muchas de las cuales son descubrimientos recientes. Cabe mencionar que los códigos lineales son espacios vectoriales, hecho que se ve reflejado en la facilidad de su construcción a partir de una matriz generadora y su decodificación mediante una matriz de control de paridad. Esta ventaja también se ve reflejada al momento de calcular sus parámetros. En consecuencia, existe un creciente interés hacia el estudio de la teoría de códigos en estructuras cada vez más ricas, como son: anillos, anillos de grupo, anillos torcidos (*skew polynomials rings*), geometría algebraica, combinatoria, teoría de grafos, entre otras (ver Shi, Alahmadi y Solé (2017), Creedon y Hughes (2019) y Polcino Milies (2019)).

Paralelamente, la computación ha evolucionado en las últimas décadas, llegando hasta el punto de que nuestra vida se ve cada vez más influenciada por los desarrollos tecnológicos. El desarrollo de las matemáticas aplicadas, en particular la teoría de códigos, también se ha visto beneficiado; en la actualidad existen programas computacionales en los cuales se pueden hacer simulaciones y calcular con ellos parámetros, entre otras cosas. Sin embargo, esto no sucede con los más recientes descubrimientos, como, por ejemplo, en el estudio de los códigos en anillos de grupos y los códigos convolucionales, en los que un código puede ser visto como un ideal o como un módulo. Por supuesto, poco a poco se van realizando avances en esta dirección.

SageMath o SAGE es un software de álgebra computacional de código abierto, es decir "open-source", licenciado bajo GPL que, combinado con la potencia del lenguaje de programación Python, se emplea para llevar a cabo cálculos algebraicos, simbólicos y numéricos. Las siglas de "*Software for Algebra and Geometry Experimentation*" definen el nombre original de este programa, aunque ha evolucionado para incluir más áreas de las matemáticas. SageMath es un entorno de cálculos matemáticos que introduce datos matemáticos en forma textual y los despliega en forma textual o tradicional. Mientras que la mayor parte de los entornos de cálculo matemático son entidades independientes, SageMath provee algunos algoritmos por sí mismo y

otros los toma de otros entornos de cálculo matemático. Esta estrategia le permite a SageMath proveer el poder de múltiples entornos de cálculos matemáticos dentro de una arquitectura capaz de evolucionar para satisfacer futuras necesidades.

Otros programas que usan investigadores en matemáticas son NumPy, SciPy, Matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, Rand, Matlab, Mathematica, Maple, Gap, entre otros. En el caso del sistema computacional SageMath, vale la pena resaltar la gran ventaja que tiene por ser software libre, lo que hace que su distribución sea amplia y gratuita, posibilitando de esta manera que pueda usarse por toda la comunidad académica para investigación, exploración y especialmente para la docencia. Además, permite trabajar con implementaciones realizadas por otros investigadores e incluso, las implementaciones que se realizan pueden contribuir al desarrollo de otras investigaciones de ámbito nacional e internacional.

En este texto presentaremos los conceptos básicos de la teoría de códigos correctores de errores. Con el propósito de que el público al que va dirigido este documento sea más amplio, no se harán las demostraciones matemáticas de los teoremas y resultados. Referencias casi que obligadas para alguien que está interesado en adentrarse en el estudio de la teoría de códigos son los libros: Huffman y Pless (2010), Ling y Xing (2004) y Roman (1992). Se hará especial hincapié en la implementación de rutinas computacionales en SageMath dirigidas a presentar de manera clara y concreta, cuando esto sea posible, los conceptos estudiados. Estas implementaciones estarán basadas tanto en los conceptos teóricos, como en las capacidades computacionales que brinda un software libre construido sobre Python como lo es SageMath. La necesidad de la combinación de la teoría y la práctica se destaca en el desarrollo de este documento.

3.2 El computador como un laboratorio para “hacer matemáticas”

Cada vez es más común usar un computador en una actividad matemática, bien sea en la enseñanza, exploración o investigación; tanto que los computadores han pasado de ser una simple herramienta a una componente fundamental para entender algunos conceptos matemáticos avanzados. Según Rainbolt y Gallian (2013), existen cinco formas en las que se puede utilizar un software computacional:

- como una calculadora “elegante”,
- como un medio para calcular ejemplos grandes y complicados,
- como un medio para que los “estudiantes” puedan escribir algoritmos computacionales simples,
- como un medio para producir grandes cantidades de datos de tal

- forma que los “estudiantes” puedan formular una conjetura,
- como un medio para que los “estudiantes” puedan trabajar en forma colaborativa.

En la tercera y la última de las cinco formas se entrecomilla la palabra estudiantes, porque, en nuestro ideal, finalmente tanto el que enseña, como el que aprende e incluso quien investiga siempre es un estudiante.

Blyth y Rainbolt (2010) presentan las siguientes reflexiones acerca del uso GAP para la enseñanza de álgebra abstracta. Una clase tradicional de un curso de álgebra abstracta consiste en que el profesor enuncia una serie de teoremas (con quizás algunos ejemplos en los que se verifica el teorema). Como una alternativa a esta estructura clásica, los estudiantes podrían descubrir algunos de los teoremas incluso antes de que sean motivados por ejemplos. Esto se puede conseguir usando un software para explorar una serie de ejercicios que lleva cada estudiante a encontrar un patrón que ayude a descubrir el teorema deseado. La ventaja de esta aproximación es que el estudiante se apropia del resultado, dado que lo ha descubierto por sí mismo antes de que le haya sido enunciado. Este hecho hace que el aprendizaje sea más agradable y más probable de ser recordado. También, tal vez más importante, este proceso ayuda a que el estudiante tenga un entendimiento más concreto del teorema. Además, el uso del software en algunas situaciones ayuda a que el profesor presente ejemplos y aplicaciones del teorema que podrían ser hechas manualmente, pero que pueden tomar mucho tiempo (Blyth y Rainbolt, 2010).

La dificultad más seria de esta aproximación no tradicional es que puede requerir más tiempo para ser implementada. Esto porque tanto el estudiante como el docente deben capacitarse en el manejo del software. Además, algunos teoremas no pueden ser descubiertos fácilmente por el estudiante por medio de exploraciones guiadas de ejemplos. Sin embargo, se pueden asignar proyectos computacionales como tarea (evitando de esta forma que tomen mucho tiempo de clase) y usar esta técnica únicamente con aquellos teoremas en los cuales el software pueda hacer una contribución significativa al entendimiento del estudiante (Blyth y Rainbolt, 2010).

En este trabajo se presentan algunos de los conceptos básicos de teoría de códigos y la forma de implementarlos usando SageMath; se espera que esto le permita al lector usar estas ideas para comprobar, ejemplificar y posiblemente descubrir por sí mismo algunos de los teoremas de esta teoría y que, a futuro, le posibilite hacer sus propios aportes.

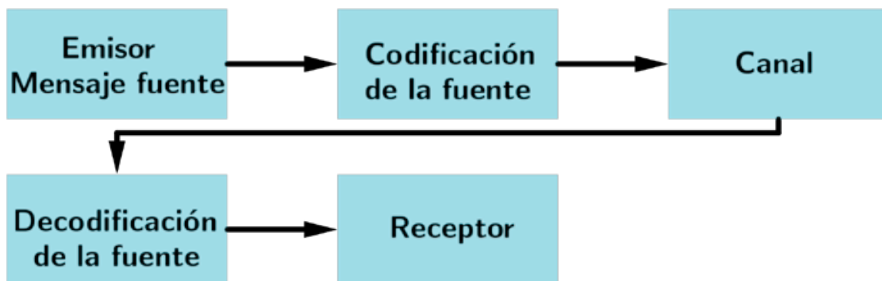
3.3 Introducción a la teoría de códigos

En esta sección se analizará cómo puede interpretarse el proceso de comunicación bajo la suposición de que no se presenten errores en la transmisión. En primer lugar, denominaremos mensaje fuente al conjunto de mensajes que un emisor envía a un receptor; estos pueden estar en el lenguaje tradicional. Estos mensajes se transforman como una cadena de símbolos tomados de un conjunto llamado alfabeto; a este proceso lo denominamos codificación. Suponiendo que no se presentan errores en la transmisión, los mensajes codificados son transmitidos a su destino a través de un canal de comunicación. Estos mensajes se traducen nuevamente al lenguaje usado en el mensaje original; a este proceso le llamamos decodificación de la fuente. La función del decodificador consiste en convertir los mensajes recibidos a mensajes fuente, dado que estos en un principio fueron transformados en símbolos. Una vez hecho esto, los mensajes son recibidos por el receptor tal y como se encontraban originalmente.

El esquema de comunicación descrito anteriormente se muestra en la Figura 3.4.

Figura 3.4

Esquema de comunicación



Nota. Fuente propia.

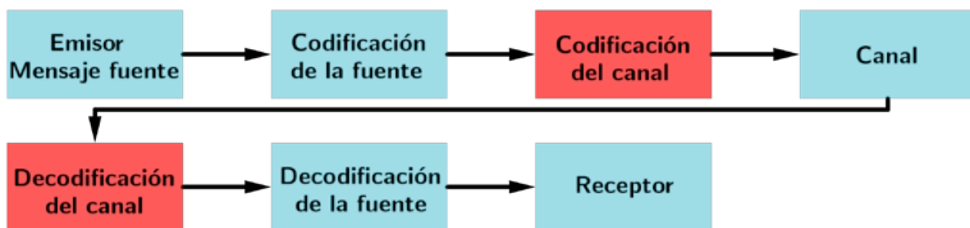
Dado que estamos asumiendo que en la transmisión de los mensajes no hay errores, esto hace que el esquema anterior sea deficiente, dado que no siempre el mensaje enviado es el mensaje recibido. Por supuesto, sabemos que esta situación no refleja la realidad ni siquiera en los procesos más simples de comunicación, como lo es la conversación directa entre emisor y receptor. Cuando estamos conversando con otra persona pueden surgir errores de pronunciación, ruido en el ambiente e inclusive errores en la interpretación de un determinado mensaje. Todas estas circunstancias que puedan dificultar la comunicación son consideradas como "ruido".

Si se produjo algún error por causa del ruido durante la transmisión, es muy probable que el receptor no se dé cuenta y reciba un mensaje equivocado que lo lleve a una mala interpretación de la situación y que, inclusive aunque note el error, no pueda corregirlo. Esto nos sucede a diario cuando estamos escribiendo un correo electrónico, un mensaje de WhatsApp o un documento en un procesador de textos como Word u OpenOffice. Al escribir una palabra muchas veces, el procesador de texto subraya la palabra si es que hemos cometido un error ortográfico o incluso si existe un error en la conjugación. Al subrayar la palabra, el programa nos está diciendo que ha encontrado errores en la palabra y que deberían ser corregidos; a este procedimiento lo denominaremos *detección*. En otros momentos, el auto corrector del programa detecta el error y cambia la palabra automáticamente por la que pareciera ser la correcta; este mecanismo lo llamaremos *corrección*.

Este tipo de situaciones sugiere la modificación del esquema de comunicación presentado en la Figura 3.4. Para esto se introducen un bloque de codificación del canal y otro de decodificación del canal. La función del primero es realizar una segunda codificación a los mensajes ya codificados por la fuente; en este proceso se añaden símbolos de redundancia que permitan determinar errores en el mensaje original. El segundo bloque es la decodificación del canal; su función es detectar y corregir los errores. El proceso continúa con el decodificador de la fuente, el cual ya describimos anteriormente. El nuevo esquema de comunicación se muestra en la Figura 3.5.

Figura 3.5

Esquema de comunicación modificado



Nota. Fuente propia.

Cabe resaltar que tanto el emisor como el receptor conocen la codificación de los mensajes; por lo tanto, si en la transmisión de algún mensaje codificado ocurre el máximo número de errores admitido, el receptor es capaz de detectarlo, aunque no siempre puede corregirlo. La razón de esta cuestión es que, a diferencia de la Criptografía, la teoría de Códigos no está interesada en mantener ocultos los mensajes; su objetivo principal es detectar y corregir los errores producidos en la transmisión. Además, los mensajes que se transmiten sobre los canales de comunicación solo son importantes para el emisor y el receptor; en ellos no se maneja información confidencial, como cuentas bancarias, claves secretas, documentos oficiales, etc. El caso en el cual se desee mantener oculta la información le concierne a la Criptografía.

Surgen entonces las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se realizan los procesos de codificación y decodificación de los mensajes?
- ¿Cómo se detectan y corrigen los errores producidos en la transmisión?

3.4 Construcción de elementos básicos en SageMath

Dado que SageMath está construido sobre la base de Python, varias de las aplicaciones o funcionalidades que tiene Python pueden ser utilizadas en SageMath. Por supuesto, aquí presentamos únicamente aquellas que utilizaremos en el desarrollo del trabajo; sin embargo, para tener un panorama más completo donde se expliquen de forma más completa y detallada todas las potencialidades de este software, invitamos al lector interesado a visitar la página web del proyecto SageMath: <https://www.sagemath.org/>, o consultar los libros: Zimmermann et al (2018) y Bard (2020).

En esta sección mostraremos las instrucciones para construir algunos elementos básicos en SageMath. Existen diferentes tipos de datos en SageMath; algunos son: `integers`, `floats`, `boolean` y `strings`.

A continuación presentamos algunos ejemplos de cómo construir elementos de estos tipos en SageMath.

Integer o entero

```
sage: 11
```

```
11
```

Float o real

```
sage: 2.14
```

```
2.140000000000000
```

String o cadena

```
sage: 'Hola Facultad de Ciencias Exactas y Naturales'
```

```
'Hola Facultad de Ciencias Exactas y Naturales'
```

Observe que para definir una `string` o cadena, esta debe estar contenida entre comillas. En SageMath podemos verificar la clase de un objeto usando el comando `type()`.

```
sage: type(11)
```

```
<class 'sage.rings.integer.Integer'>
```

```
sage: type(2.14)
```

```
<class 'sage.rings.real_mpfr.RealLiteral'>
```

```
sage: type('Hola Facultad de Ciencias Exactas y Naturales')
```

```
<class 'str'>
```

Además, podemos convertir los diferentes tipos de datos usando las funciones:

- `float()`: para convertir un cadena o un número a un número real.
- `str()`: para convertir un número o un objeto a una cadena.
- `int()`: para convertir un número o una cadena a un entero.

```
sage: float(2)
```

```
2.0
```

```
sage: str(2)
```

```
'2'
```

```
sage: int('11100')
```

```
11100
```

Existe otro tipo de datos que se conocen como `bool` o booleanos. Estos pueden tomar únicamente dos valores: `True` o `False`.

```
sage: type(True)
```

```
<class 'bool'>
```

```
sage: type(False)
```

```
<class 'bool'>
```

Además, SageMath cuenta entre otras estructuras datos como: *list*, *set* y *vector*. Una *list* o lista se usa para almacenar elementos en una única variable. Los elementos que se almacenan en una lista pueden ser de diferentes tipos: *integer*, *string*, *float*, *bool* e incluso *list*; esto es, una lista puede contener otras listas. A continuación presentamos algunos ejemplos:

```
sage: L = [1, 2, 3, ["casa", 2], 3, True]
```

```
sage: L
```

```
[1, 2, 3, ['casa', 2], 3, True]
```

Observe que en la segunda línea escribimos *L* para poder ver los elementos que componen a la lista *L*. Para recorrer los elementos de la lista *L*, usamos el comando $L[i]$, donde i representa el $(i + 1)$ -ésimo de la lista *L*, teniendo en cuenta que el primer elemento de la lista se consigue digitando $L[0]$.

```
sage: L[0]
```

```
1
```

Por ejemplo, para obtener el cuarto elemento de *L* debemos escribir $L[3]$:

```
sage: L[3]
```

```
['casa', 2]
```

En SageMath existen varios métodos integrados que podemos utilizar para trabajar con listas. Algunos de los que utilizaremos en este trabajo son los siguientes:

- `append()`: Adiciona un elemento al final de la lista.
- `clear()`: Borra todos los elementos de la lista.
- `copy()`: Retorna una copia de la lista.
- `count()`: Retorna el número de elementos en la lista con el valor dado.
- `extend()`: Adiciona los elementos en un objeto iterable a la lista.

- `index()`: Retorna el índice de un elemento en la lista.
- `insert()`: Inserta un elemento a la lista.
- `pop()`: Borra un elemento de la lista en la posición dada.

Por ejemplo,

```
sage: L.extend ( [ 9, 8 ] ) ; L
[1, 2, 3, ['casa', 2], 3, True, 9, 8]
```

```
sage: L.extend ( [ 0, 1 ] ) ; L
[1, 2, 3, ['casa', 2], 3, True, 9, 8, [0, 1]]
```

Un set o conjunto se puede construir usando las llaves `{ }`, como usualmente lo hacemos en matemáticas. Por ejemplo, para construir el conjunto $C = \{1, 2, 3, 'casa', 3\}$, hacemos

```
sage: C = { 1, 2, 3, "casa", 3 } ; C
{1, 2, 'casa', 3}
```

Observemos que como C es un conjunto, al escribir el elemento repetido 3 en él, SageMath únicamente reconoce uno de estos elementos, a diferencia de lo que pasa en las listas. Para construir vectores en SageMath, podemos utilizar diferentes métodos:

```
sage: V1 = vector ( { 1, 2, 3, 3 } ) ; V1
(1, 2, 3, 3)
```

```
sage: V2 = vector ( { 1, 2, 3, 3.2 } )
sage: V2
(1.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000,
3.2000000000000000)
```

```
sage: V3 = vector ( ( 1, 2, 3 ) ) ; V3
(1, 2, 3)
```

```
sage: V4 = vector ( IntegerRing(), { 1, 2, 3 } ) ; V4
(1, 2, 3)
```

En este último método, en el primer término escribimos `IntegerRing()`, lo que significa que para este vector se está especificando que sus entradas pertenecen al anillo de los enteros. Aunque

el resultado es el mismo al método usado para construir V_3 , observamos que esto en realidad nos muestra una forma de construir vectores con entradas en anillos diferentes a los enteros, como, por ejemplo, en cuerpos finitos, herramienta que será muy útil en las próximas secciones.

Los cuerpos finitos se pueden construir mediante el comando $\text{GF}(q)$, donde q es una potencia de un número primo. A continuación se presentan ejemplos para construir cuerpos finitos.

Cuerpo finito con 2 elementos: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

```
sage: GF ( 2 )
```

```
Finite Field of size 2
```

Cuerpo finito con 3 elementos: $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$.

```
sage: K= GF ( 3 ) ; K
```

```
Finite Field of size 3
```

Cuerpo finito con 25 elementos: \mathbb{F}_{25}

```
sage: K25= GF ( 5**2 )
```

Entonces, para construir un vector cuyas entradas sean elementos de \mathbb{F}_3 , se escribe:

```
sage: v= vector( GF(3), [ 1, 0, 2 ] ) ; v
```

```
(1,0,2)
```

3.5 Códigos de bloque y códigos lineales

En este apartado primero presentaremos una serie de definiciones, para las cuales daremos ejemplos con el ánimo de que puedan ser más entendibles para el lector.

Definición 3.5.1 — Códigos de bloque. Sean $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ un conjunto finito, llamado alfabeto, y n un entero positivo. Una n -upla o n -tupla de A es una lista (b_1, b_2, \dots, b_n) ordenada de elementos de A . Sea A^n el conjunto de todas las n -uplas de A . Cualquier subconjunto no vacío C de A^n se denomina código de bloque q -ario. Cada elemento en C se llama palabra código y si C contiene M elementos, entonces diremos que el código C tiene longitud n y tamaño M o simplemente que C es un (n, M) -código. Un subconjunto de un código C es un subcódigo de C . Si C no es de bloque, se dice que C es de longitud variable.

Un ejemplo de código de longitud variable es el idioma español. El código C sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$ definido por $C = \{(0), (1, 0), (1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ es un código de longitud variable. En este trabajo la palabra código siempre significará código de bloque.

Este código de longitud variable se puede construir en SageMath escribiendo:

```
sage: C= {'0', '10', '11', '100', '101', '111'}
```

Normalmente el conjunto que conforma el alfabeto es tomado de un cuerpo finito de orden q ; es decir $A = \mathbb{F}_q$, donde q es una potencia de un primo. Cuando un código C tiene como alfabeto a \mathbb{F}_2 o \mathbb{F}_3 , diremos que es un código binario o ternario, respectivamente.

Ejemplo 3.5.1 Los siguientes son códigos de bloque:

- $C_1 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es un $(3, 4)$ -código binario.
- $C_2 = \{(2, 0, 1, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1)\}$ es un $(4, 5)$ -código ternario.

Cuando no haya confusión, se denotará un vector de la forma (v_1, v_2, \dots, v_n) simplemente como $v_1 v_2 \cdots v_n$.

Los códigos del Ejemplo 3.5.1 se pueden construir en SageMath escribiendo:

```
sage: C1= [vector(GF(2), [0, 0, 0]), vector(GF(2), [0, 1, 1]), vector(GF(2), [1, 1, 0]), vector(GF(2), [1, 1, 1])]; C1
[(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)]
```

```
sage: C2=[vector(GF(3), (2,0,1,0)), vector(GF(3), (1,0,2,0)), vector(GF(3), (1,1,2,2)), vector(GF(3), (2,2,1,1)), vector(GF(3), (2,1,2,1))]; C2
[(2, 0, 1, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1)]
```

Observemos que para los dos códigos construimos dos listas cuyos elementos son vectores binarios y ternarios, respectivamente. En este caso podemos sumar, por ejemplo, dos elementos de C_1 digitando:

```
sage: C1[1] + C1[2]
(1, 0, 1)
```

A continuación presentamos la definición de distancia de Hamming.

Definición 3.5.2 — Distancia de Hamming. Sean x, y palabras de longitud n sobre un alfabeto A . La distancia de Hamming entre x y y , denotada por $d(x, y)$, se define como el número de posiciones en las cuales x y y difieren; es decir: si $x = x_1x_2 \dots x_n$ y $y = y_1y_2 \dots y_n$, entonces

$$d(x, y) = |\{i : 1 \leq i \leq n, x_i \neq y_i\}|.$$

Teorema 3.5.1 Sean x, y, z palabras de longitud n sobre A . Entonces

1. $0 \leq d(x, y) \leq n$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Desigualdad triangular)

El concepto de distancia de Hamming se utiliza en el proceso de decodificación. Sea C un código; supongamos que palabras código son enviadas a través un canal de comunicación. Si x es una palabra recibida, la decodificación por distancia mínima decodifica x a c_x , si $d(x, c_x)$ es mínima entre todas las distancias a las palabras código; es decir:

$$d(x, c_x) = \min\{d(x, c) : c \in C\}.$$

Definición 3.5.3 — Distancia mínima de un código. La distancia mínima de un código C , denotada por $d(C)$, se define por $d(C) = \min\{d(c, d) : c, d \in C, c \neq d\}$.

Diremos que un código C de longitud n , tamaño M y distancia mínima $d = d(C)$ es un (n, M, d) -código.

Calcular la distancia de un código consiste en determinar la menor distancia de Hamming entre todas las parejas distintas de elementos de C ; sin embargo, si el tamaño del código es relativamente grande, esta comparación puede llevar mucho tiempo. La importancia de la distancia de un código radica en que este concepto está relacionado con la capacidad de detección y corrección de errores, como veremos en lo que sigue.

Definición 3.5.4 — Código detector de t -errores. Un código C detecta t -errores si cada vez que se envía una palabra código y ocurren entre 1 y t errores durante la transmisión, la palabra resultante no es

una palabra código. Un código C detecta exactamente t -errores, si este detecta t errores, pero no detecta $t + 1$ errores (es decir, existe al menos una palabra código, la cual, cambiando $t + 1$ coordenadas, origina una nueva palabra código).

Un resultado que relaciona la distancia mínima y que simplifica en algo los cálculos se enuncia a continuación.

Teorema 3.5.2 Un código C detecta exactamente t -errores si y solo si $d(C) = t + 1$.

De esta forma, si ocurren t -errores en la transmisión de una palabra código, entonces se dice que ocurrió un error de tamaño t .

Corolario 3.5.1 Sea C un código. Entonces $d(C) = d$ si y solo si C detecta exactamente $(d - 1)$ -errores.

El Corolario 3.5.1 permite determinar el número de errores que un código es capaz de detectar. Sin embargo, nada se ha dicho hasta ahora sobre la corrección de esos errores.

Definición 3.5.5 — Código corrector de t -errores. Asumiendo que los empates son considerados como errores, un código C corrige t -errores si la decodificación por distancia mínima corrige todos los errores de tamaño t o menos en cualquier palabra código. Un código C corrige exactamente t -errores, si este corrige t -errores, pero no corrige $(t + 1)$ -errores. Dicho de otra forma, todos los errores de tamaño t son corregidos, pero al menos un error de tamaño $t + 1$ es decodificado incorrectamente.

Ejemplo 3.5.2 Considere el código binario de repetición $C = \{000, 111\}$. Usando la decodificación por distancia mínima se tiene:

- Si 000 es enviada y un error ocurre en la transmisión, entonces las posibles palabras recibidas son 001, 010 y 100. Aquí, primero hay una detección del error, ya que ninguna de estas palabras hace parte del código. En cualquier caso, la palabra recibida será decodificada a 000, ya que la decodificación por distancia mínima decodifica la de menor distancia entre la palabra recibida y las palabras del código. Similarmente se tiene para la palabra código enviada 111, bajo la consideración de que se ha cometido un error en la transmisión.
- Por otro lado, si se envía 000 y ocurren 2 errores en la transmisión, entonces las posibles palabras recibidas son 011, 110 y 101. Aunque el código es capaz de detectar los errores (ya que su distancia

mínima es 3) no los corrige correctamente, ya que, para cualquier palabra recibida 011,110 y 101, la decodificación por distancia mínima la decodificará a 111. Por lo tanto, C es un código que corrige exactamente un error.

Un resultado que permite determinar el número de errores que es capaz de corregir un código en función de su distancia se presenta a continuación.

Teorema 3.5.3 Un código C corrige exactamente t -errores si y solo si $d(C) = 2t + 1$ o $d(C) = 2t + 2$.

El resultado anterior puede expresarse de forma equivalente de la siguiente forma.

Corolario 3.5.2 Sea C un código. Entonces $d(C) = d$ si y solo si C corrige exactamente $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ -errores.

De esta forma, los corolarios 3.5.1 y 3.5.2 muestran la importancia de la distancia del código C , puesto que establecen las capacidades de detección y de corrección del código; por supuesto, entre más grande la distancia mínima de un código mayor cantidad de errores puede detectar y corregir.

```
def dis ( a, b ):
    """Esta función calcula la distancia entre dos palabras."""
    if len (a) == len (b):
        l = len (a)
        d = 0
        for i in [ 0 .. l -1 ]:
            if a[ i ] != b[ i ]:
                d= d+1
        return d
    else:
        return('Las palabras deben ser de la misma longitud')
```

Por ejemplo, podemos calcular la distancia entre palabras de la siguiente forma:

```
sage: dis( '00', '10' )
1
```

```
sage: x = vector( GF(3), (0, 1, 2) )
sage: x = vector( GF(3), (1, 1, 0) )
sage: dis( x, y )
```

```
2
```

Ahora, con esta función se puede implementar otra que calcule la distancia mínima de un código, como se muestra a continuación:

```
def dis_min ( C ):
    """ Esta función calcula la distancia mínima de un código de bloque
    C y además entrega 2 palabras del código cuya distancia es la
    distancia mínima del código """
    u = C[0]
    v = C[0]
    n = len( u ) # la longitud en el código
    d = n+1
    m = len( C ) # el tamaño del código
    for i in [ 0..m-2 ] :
        for j in [ i+1..m-1 ] :
            if dis( C[i] , C[j] ) < d :
                d = dis( C[i], C[j] )
                u = C[i]
                v = C[j]
    return [ d, u, v ]
```

```
sage: dis_min(C1)
[1, (0,1,1), (1,1,1)]
```

```
sage: dis_min(C2)
[2, (2,0,1,0), (1,0,2,0)]
```

Según la Definición 3.5.3, en principio para calcular la distancia mínima de un (n, M) -código es necesario encontrar alrededor de $\binom{M}{2}$ distancias mínimas entre palabras distintas. Este hecho no es muy conveniente dado que si M es muy grande, el cálculo se hace muy dispendioso, incluso si se utiliza la función `dis_min` implementada.

Hasta el momento, más allá de ser un conjunto, no le hemos exigido ninguna condición adicional a un código de bloque C . A continuación, veremos que si el código es un espacio vectorial, esto resulta en ciertas ganancias; inicialmente en lo que tiene que ver con el cálculo de la distancia mínima del código.

Definición 3.5.6 — Código lineal. Un código lineal L de longitud n sobre \mathbb{F}_q es un subespacio vectorial de \mathbb{F}_q^n .

Dado que L es un subespacio vectorial, a partir de su dimensión podemos calcular fácilmente su tamaño; esto es $M = q^k$, donde k es la dimensión de L como espacio vectorial sobre \mathbb{F}_q . De esta manera, si L tiene dimensión k sobre \mathbb{F}_q , se dice que L es un $[n, k]$ -código lineal. Además, si L tiene distancia mínima d , L se denomina un $[n, k, d]$ -código lineal. A continuación presentamos algunos ejemplos de códigos lineales.

Ejemplo 3.5.3 Los siguientes son ejemplos de códigos lineales:

- $L_1 = \mathbb{F}_q^n$ y $L_2 = \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo en \mathbb{F}_q^n . Por un lado L_1 es un $[n, n]$ -código que consiste en todas las palabras del espacio; por otro lado, L_2 es un $[n, 0]$ -código; es el código lineal con un único elemento; en realidad, este código no es muy útil en la práctica.
- $L_3 = \{(\lambda, \dots, \lambda) : \lambda \in \mathbb{F}_q\}$. Este es un $[n, 1]$ -código lineal y se conoce como código de repetición por la forma de sus palabras. Para valores de n relativamente grandes, tanto la capacidad de detección como la de corrección de este código es muy buena dado que $d(L_3) = n$.
- $L_4 = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$. Este es un código lineal con base $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ y de esta forma tiene dimensión 2. Además, su distancia mínima $d(L_4) = 2$; es decir, L_4 es un $[4, 2, 2]$ -código lineal.

Definición 3.5.7 — Peso. Sea x una palabra en \mathbb{F}_q^n . El peso de x , denotado por $wt(x)$, se define como el número de coordenadas no nulas en x ; esto es $wt(x) = d(x, \mathbf{0})$, donde $\mathbf{0}$ es la palabra cero de \mathbb{F}_q^n . Adicionalmente, para un código lineal L , se define el peso mínimo del código, denotado como

$$wt(L) = \min\{wt(x) : x \in L, x \neq \mathbf{0}\}.$$

El siguiente resultado muestra si tenemos un código lineal de tamaño M ; para encontrar su distancia mínima se debe calcular $M - 1$ pesos.

Teorema 3.5.4 Si L un código lineal sobre \mathbb{F}_q , entonces $d(L) = wt(L)$.

En general, un código que no sea un espacio vectorial se denomina código no lineal. Un código lineal definido sobre el campo \mathbb{F}_2 , \mathbb{F}_3 o \mathbb{F}_4 se denomina código lineal binario, ternario o cuaternario, respectivamente. La siguiente función permite encontrar el peso de un código sea o no lineal.

```
def peso_min ( C ):
    """Esta función calcula el peso mínimo del código C y retorna una
    palabra del código que tiene este peso."""
    x = C[0]
    w = len( x )
    F = x.base ring ()
    vect_cero = vector( F, {w-1: 0} )
    for c in C :
        if dis( c,vect_cero )<w and c!= vect_cero:
            w = dis ( c,vect_cero)
            x=c
    return [ w, x ]
```

Con ayuda de esta función podemos verificar el cálculo de los pesos de los códigos C1 y C2, como se muestra a continuación.

```
sage: peso_min ( C1 )
[2, (0, 1, 1)]
```

```
sage: peso_min ( C2 )
[2, (2, 0, 1, 0)]
```

Recordemos que los códigos anteriores son códigos no lineales. Anotamos que nuestra función `peso_min` se puede utilizar con códigos lineales, como con el código L_4 del Ejemplo 3.5.3.

```
sage: L4 = [vector( GF(2), (0,0,0,0) ),vector(GF(2), (1,0,1,
0) ),vector(GF(2), (0,1,0,1) ),vector( GF(2), (1,1,1,1) ) ]
sage: peso_min(L4)
[2, (1, 0, 1, 0)]
```

Estos cálculos nos permiten verificar que la condición de que en el Teorema 3.5.4 el código sea lineal es necesaria y además conjeturar que para un código de bloque se cumple la desigualdad $d(C) \leq wt(C)$ e incluso afirmar que la igualdad se puede dar aunque el código no sea lineal.

3.6 Codificación y decodificación en códigos lineales

Dado que un código lineal es un subespacio vectorial, sus elementos quedan totalmente descritos como combinación lineal de los elementos de cualquiera de sus bases. Una matriz cuyas filas forman una base para el subespacio recibe un nombre especial y es de gran utilidad en los procesos de codificación y decodificación.

Definición 3.6.1 – Matriz generadora. Sea L un $[n, k]$ -código lineal. Una matriz G de tamaño $k \times n$, cuyas filas forman una base para L , es llamada una matriz generadora para el código L .

Si L es un $[n, k]$ -código lineal con matriz generadora G , entonces

$$L = \{xG : x \in \mathbb{F}_q^k\}.$$

Es decir, una matriz generadora G para un $[n, k]$ -código lineal, permite realizar el proceso de codificación del canal de la Figura 3.5, multiplicando por la izquierda de G las palabras $x \in \mathbb{F}_q^k$, realizando de esta manera la adición de los $n - k$ símbolos de redundancia.

Para el código L_4 , ver Ejemplo 3.5.3, tenemos que una matriz generadora está dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esta nueva información podemos construir este código en SageMath escribiendo:

```
sage: G = matrix( GF(2), [ [1,0,1,0], [0,1,0,1] ] )
sage: C = LinearCode(G); C
[4, 2] linear code over GF(2)
```

Esto permite que podamos manipular y conocer algunas propiedades del código. La última línea nos confirma que este es un código de longitud 4 y dimensión 2. Adicionalmente, para códigos lineales SageMath tiene el método `minimum_distance()` que permite obtener la distancia mínima del código, de la siguiente forma:

```
sage: C.minimum_distance()
2
```

Para codificar un mensaje $x \in \mathbb{F}_q^k$ en SageMath se puede hacer de dos formas. La primera consiste en realizar la operación xG . Su-

pongamos que se desea codificar con el código C el mensaje $x = 01$; entonces, digitamos:

```
sage: x = vector ( GF(2), [0, 1] ); x*G
(0, 1, 0, 1)
```

Esto significa que la palabra recibida es $xG = (0, 1, 0, 1)$. La segunda forma para conseguir este resultado en SageMath es utilizar el método `encode()`, como se muestra a continuación.

```
sage: C.encode( x )
(0, 1, 0, 1)
```

Observemos que lo que se ha hecho es agregarle símbolos de redundancia al mensaje transmitido. En este ejemplo, se puede identificar claramente cuál es el mensaje que se deseaba transmitir inicialmente. Esto no siempre sucede; en este ejemplo se presenta esta situación porque la matriz generadora tiene una forma muy especial, la cual definimos a continuación.

Definición 3.6.2 — Matriz generadora en la forma estándar. Sea L un $[n, k]$ -código. Una matriz generadora G para L en la forma $G = (I_k|A)$, se llama matriz generadora en la forma estándar.

Aunque debemos recordar que el propósito original de la teoría de códigos no es esconder los mensajes, para mostrar que el proceso de codificación puede transformar un poco más el mensaje que se quiere transmitir, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6.1 Considere el código ternario L cuya matriz generadora está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para codificar la palabra $x = 12012$ escribimos:

```
sage: G = matrix(GF(3), [[1, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 2], [0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1],
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2]])
```

```
sage: L = LinearCode ( G )
sage: x = vector( GF(3), [ 1,2,0,1,2 ] )
sage: L.encode( x )
(1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0)
```

La última línea nos indica que la palabra recibida es $y = 1022011120$, la cual difiere por mucho de la palabra enviada x .

Dado que un código lineal es un subespacio vectorial, entonces su complemento ortogonal también es un código lineal. Este nuevo código es una de las herramientas que se utiliza para desarrollar la decodificación en códigos lineales.

Definición 3.6.3 – Código dual. Sea L un $[n, k]$ -código lineal. El conjunto

$$L^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n : x \cdot c = 0, \text{ para todo } c \in L\},$$

se denomina el código dual de L .

Dicho de otra forma, el código dual es el complemento ortogonal del código lineal L . Algunas características de los códigos duales se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 3.6.1 Sea L un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_q .

1. Si G es una matriz generadora para L , entonces

$$L^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n : xG^T = 0\}.$$

2. L^\perp es un $[n, n-k]$ -código lineal, por lo tanto $\dim(L) + \dim(L^\perp) = n$.
3. $(L^\perp)^\perp = L$.

De esta forma, el código dual de un código lineal L también es un código lineal y por lo tanto tiene matriz generadora, la cual denominamos matriz de control de paridad, cuya definición presentamos a continuación.

Definición 3.6.4 – Matriz de control de paridad. Una matriz de control de paridad H para un código lineal L , es una matriz generadora para el código dual L^\perp . Una matriz generadora para el código dual en la forma $H = (-A^T | I_{n-k})$ se llama matriz de control de paridad en la forma estándar.

Ahora, como las filas de una matriz de control de paridad forman una base para el espacio dual L^\perp , entonces tenemos que

$$L = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{y}H^T = \mathbf{0} \}.$$

Dado un código lineal podemos establecer una forma de obtener su dual resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. En SageMath, por ejemplo, podemos conseguir el código dual y la matriz de control de paridad del código C ingresando los siguientes comandos:

```
sage: Cperp = C.dual_code(); Cperp
[4, 2] linear code over GF(2)
```

```
sage: C.parity_check_matrix ()
[1 0 1 0]
[0 1 0 1]
```

```
sage: Cperp.generator_matrix ()
[1 0 1 0]
[0 1 0 1]
```

Las dos últimas entradas nos comprueban que el código dual C^\perp , esto es C_{perp} , tiene como matriz generadora la matriz de control de paridad del código C .

Ahora estudiaremos cómo realizar el proceso de decodificación con códigos lineales. Veamos ahora una forma general de decodificación para códigos lineales.

Definición 3.6.5 – Síndrome. Sea L un $[n, k]$ -código lineal con matriz de control de paridad H . Para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$, $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}H^T$ se denomina el síndrome de \mathbf{x} .

Claramente, un vector $\mathbf{x} \in L$ si y solo si $s(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Este hecho se convierte en la principal propiedad para determinar si una palabra pertenece o no al código dado; es decir, el cálculo del síndrome permite detectar errores, esto claro cuando no se han cometido más de $d - 1$ errores.

Definición 3.6.6 – Clases laterales. Sean L un código lineal de longitud n sobre \mathbb{F}_q , $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$ un vector de longitud n ; se define la clase

lateral de L determinada por x como el conjunto

$$x + L = \{x + c : c \in L\}.$$

Al elemento x suele denominarse representante de la clase lateral $x + L$ y, además, que dos clases laterales son iguales si y solo si la diferencia de sus representantes pertenece al código L ; esto es, puede demostrarse que $x + L = y + L$ si y solo si $x - y \in L$. A partir de esto, se puede obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.6.2 Sea L un $[n, k]$ -código con matriz de control de paridad H . Entonces, $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ tienen el mismo síndrome si y solo si pertenecen a la misma clase lateral de L .

De esta forma, la decodificación con un código lineal se puede hacer de la siguiente forma:

1. Supongamos que se recibe una palabra $y \in \mathbb{F}_q^n$.
2. Se calcula el síndrome $s(y) \in \mathbb{F}_q^{n-k}$.
3. Se encuentra el síndrome $s(x)$ para uno de los representantes de cada una de las clases laterales $x + C$. De esta forma, podemos determinar la clase lateral $x + C$ a la que pertenece el vector y ; esto es, aquella tal que $s(x) = s(y)$.
4. Así la palabra y se decodifica como la palabra código $c = y - a$, donde a es la palabra de menor peso en la clase lateral $x + C$.

A continuación, presentamos un ejemplo de decodificación para una palabra con el código C , dado anteriormente.

Ejemplo 3.6.2 Supongamos que queremos enviar la palabra código $x = 0101$ y que se introduce un error en la primera componente, es decir que se recibe la palabra $y = x + err$, donde $err = 1000$. En SageMath, con ayuda del método `decoder('Syndrome')`, podemos simular el proceso de decodificación de esta palabra escribiendo:

```
sage: x = vector( GF(2), [ 0, 1, 0, 1 ] )
sage: err = vector( GF(2), [ 1, 0, 0, 0 ] )
sage: y=x+err
sage: y in C
```

False

```
sage: D=C.decoder('Syndrome'); D
```

```
Syndrome decoder for [4, 2] linear code over GF(2) handling
errors of weight up to 2
```

```
sage: D.decode_to_code(y)
```

```
(0, 1, 0, 1)
```

Debemos anotar que este proceso funciona bien mientras se cumplan las condiciones del Corolario 3.5.2; esto es, se decodificará correctamente mientras el número de errores no sea mayor que $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$. En el siguiente ejemplo mostramos que si se cometen más errores este proceso puede llevar a una decodificación errónea.

Ejemplo 3.6.3 Consideremos el código L dado en el Ejemplo 3.6.1. Supongamos que queremos transmitir la palabra código $x = 1022011120$ y que se cometen 2 errores; en este caso, que se recibe la palabra $y = \mathbf{c} + 1000000010 = 2022011100$.

```
sage: x = vector(GF(3), [1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0])
```

```
sage: err = vector(GF(3), [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0])
```

```
sage: y=x+err; y
```

```
(2, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 0)
```

```
sage: y in L
```

```
False
```

```
sage: D=L.decoder('Syndrome')
```

```
sage: D.decode_to_code(y)
```

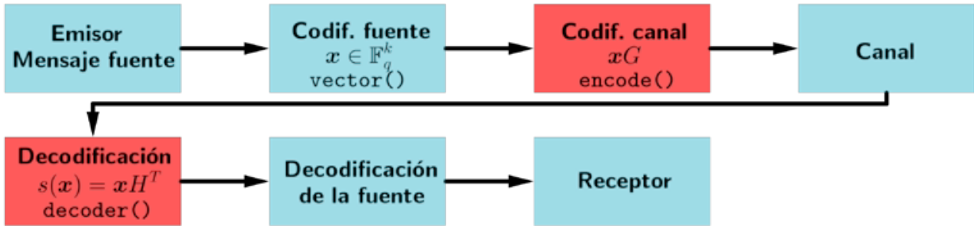
```
(1, 0, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 0)
```

Claramente, la decodificación es errónea ya que esta no fue la palabra enviada.

Del trabajo realizado, el esquema de comunicación modificado, presentado en la Figura 3.5, se ve influenciado por el uso de códigos lineales y SageMath, como se muestra en la Figura 3.6.

Figura 3.6

Esquema de comunicación modificado



Nota. Fuente propia.

3.7 Conclusiones

El estudio de la teoría de códigos correctores de errores es una rama de las matemáticas que desde hace varias décadas viene llamando la atención de investigadores matemáticos y de otras áreas relacionadas. Se debe resaltar que las estructuras algebraicas que se utilizan para construir códigos pueden ser utilizadas para adelantar los procesos de codificación y de decodificación, como se demostró en este documento con la familia de códigos lineales.

Existen diferentes tipos de códigos que deben ser estudiados en el futuro, es importante reconocer sus propiedades matemáticas y sus aplicaciones a otras ciencias. Entre estas familias de códigos se destacan: códigos cíclicos, códigos de Hamming, códigos BCH, códigos de Reed-Muller, códigos de Reed-Solomon, entre otros. Un problema que se continua investigando en esta área consiste en construir códigos con distancia mínima grande y con un número considerable de palabras.

Finalmente, destacamos que SageMath es una herramienta poderosa para la creación, análisis y simulación de los procesos de codificación y decodificación. Este software ofrece bibliotecas especializadas para experimentar con diferentes familias de códigos correctores de errores. En futuras investigaciones se deben explorar las potencialidades de SageMath tanto para la investigación como para la enseñanza de este tópico.

Bibliografía

Bard, G. V. (2020). Sage para Estudiantes de Pregrado (D. Sejas Viscarra, Trad.) American Mathematical Society.

Blyth, R. D. y Rainbolt, J. G. (2010). Discovering theorems in abstract algebra using the software GAP. *Primus*, 20(3), 217-221.
doi:10.1080/10511970802119714

Costa Vianna, M. L., Kappes Marques, J. P. y de Campos, M. L. (2016). O Uso de Códigos Corretores de Erros em Comunicações Acústicas Submarinas (conferência). *XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Santarém, Brasil.

Creedon, L. y Hughes, K. (2019). Derivations on group algebras with coding theory applications. *Finite Fields and Their Applications*, 56, 247-265. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ffa.2018.11.005>

Engelbert, D., Overbeck, R. y Schmidt, A. (2007). A summary of McEliece-type cryptosystems and their security. *Journal of Mathematical Cryptology*, 1, 151–199. doi:<https://doi.org/10.1515/JMC.2007.009>

Hamming, R. W. (1950). Error detecting and error correcting codes. *The Bell System Technical Journal*, 29, 147–160. doi:10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x

Huffman, W. C. y Pless, V. (2010). *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge University Press.

Ling, S. y Xing, C. (2004). *Coding theory: a first course*. Cambridge University Press.

Malkevitch, J. (2003). Digital Revolution (Part III) - Error Correction Codes. American Mathematical Society. <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-errors1>

Marcel, G. (1949). Notes on Digital Coding. *Proc. IRE*, 37(6), 657.

May, E. E. (2004). Towards a biological coding theory discipline. *New Thesis*, 1, 19–38.

McEliece, R. J. (1978). A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory (Informe n° 42-44). *DSN Progress report*, 114-116. https://tmo.jpl.nasa.gov/progress_report2/42-44/44N.PDF

Pinch, R. (1997). Coding theory: the first 50 years. *Plus Magazine*. <https://plus.maths.org/content/coding-theory-first-50-years>

Pinto, R., Rocha Malonek, P., & Vettori, P. (2015). *Coding theory and applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-17296-5>

Polcino Milies, C. (2019). Group algebras and coding theory: a short survey. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 37(1), 153-166. doi:<http://dx.doi.org/10.18273/revint.v37n1-2019008>

Rainbolt, J. y Gallian, J. (2013). *Abstract algebra with GAP*. Obtenido de Brooks/Cole Cengage Learning. <https://mathstat.slu.edu/~rainbolt/linebreakolt/manual8th.htm>

Roman, S. (1992). *Coding and information theory*. Springer-Verlag.

Salavati, A. H. (2010). *Applications of coding theory in biological systems*. unpublished.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423.

Shi, M., Alahmadi, A. y Solé, P. (2017). *Codes and Rings. Theory and Practice*. (D. Perrin, Ed.) Academic Press.

Singh, H. (2019). Code based Cryptography: *Classic McEliece*. ArXiv. <https://arxiv.org/abs/1907.12754>

Solé, P. (2009). *Codes over rings*. World Scientific.

Wang, X. H., Istepanian, R. S., Song, Y. H., & May, E. E. (2003). Review of application of coding theory in genetic sequence analysis (Conference). *Proceedings 5th International Workshop on Enterprise Networking and Computing in Healthcare Industry (HealthCom)*, Santa Mónica, Estados Unidos <https://doi.org/10.1109/HEALTH.2003.1218711>

Yockey, H. P. (2005). *Information theory, evolution, and the origin of life*. Cambridge University Press.

Zimmermann, P., Casamayou, A., Cohen, N., Connan, G., Dumont, T., Fousse, L., . . . y Thomas, H. (2018). *Computational mathematics with SageMath*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Los autores

4.1 German Enrique Ramos Zambrano

Realizó estudios de maestría y doctorado en el Instituto de Física Teórica de la Universidade Estadual Paulista (Sao Paulo – Brasil). Actualmente es docente del Departamento de Física de la Universidad de Nariño y también del programa de maestría en Física de la Universidad de Nariño. Pertenece al grupo de Altas Energías y sus líneas de investigación son teoría clásica y cuántica de campos.

4.2 Zulma Estela Muñoz Burbano

Licenciada en Química de la Universidad de Nariño, realizó estudios de especialización en Docencia de la Química en la Universidad de Nariño, Docencia Universitaria en la Universidad Cooperativa de Colombia, Maestría y Doctorado en Educación en la Universidad de Nariño y estudios de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales modalidad de cotutela en la Universitat de Valencia (España). Actualmente, es docente del programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental y de la Maestría en Educación de la Universidad de Nariño (Colombia). Es investigadora activa del del Grupo GIDEP en la línea de enseñanza de las ciencias y formación de profesores. Como interés investigativo asume la enseñanza de la Química en la educación secundaria, la formación de profesores de ciencias naturales, la enseñanza de la física y química moderna en la educación secundaria.

4.3 John Hermes Castillo Gómez

Matemático, de la Universidad del Cauca. Realizó estudios de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Antioquia y Doctorado en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. Actualmente es Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, prestando principalmente sus servicios al programa de Licenciatura en Matemáticas. En su trayectoria como docente, ha tenido a su cargo asignaturas de matemáticas en los programas de Licenciatura en Matemáticas, Ingeniería Civil, Ingeniería de Sistemas y Física de la misma universidad. Es integrante y coordinador en la Universidad de Nariño del Grupo de investigación Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM.

Índice de Tablas

2.1 Relación de años transcurridos desde finalización de Educación Secundaria a ingreso a la Universidad	46
2.2 Ítems desarrollados en el Pre-test	46
2.3 Alfa de Cronbach	47
2.4 Resultados primer ítem	49
2.5 Resultados ítem 2	49
2.6 Resultados ítem 3	50
2.7 Resultados ítem 4	50
2.8 Resultados ítem 5	51
2.9 Resultados ítem 6	51
2.10 Resultados ítem 7	52
2.11 Resultados ítem 8	52
2.12 Actividades por sesión. Fuente: esta investigación	56
2.13 Hechos que se relacionan con la crisis de la Física Clásica	58
2.14 Efecto fotoeléctrico	59
2.15 Espectros atómicos	59
2.16 Qué es electrón	60
2.17 Niveles de energía	60
2.18 Números cuánticos	61
2.19 Orbital	61
2.20 Spin	62

Índice de figuras

1.1 En la primera figura, el punto y es influenciado causalmente por puntos que están en Σ . En la segunda figura, y influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en Σ	13
1.2 Contorno de integración usado en la derivación de (1.8)	13
2.1 Proceso de investigación - Fuente: esta investigación	45
2.2 Promedio por ítemen Pre - test	48
2.3 Construcción de la secuencia de enseñanza. Fuente: esta investigación	54
2.4 Diferencia entre resultados del Pre - test y Post - test	57
3.1 Claude Shannon	74
3.2 Richard Hamming	74
3.3 Marcel Golay	74
3.4 Esquema de comunicación. Fuente: Elaboración propia	81
3.5 Esquema de comunicación modificado. Fuente: Elaboración propia	82
3.6 Esquema de comunicación modificado. Fuente: Elaboración propia	101

èditorial

Universidad de **Nariño**

**Teoría de fotones,
estructura atómica de la materia
y códigos lineales**

Año de publicación: 2024
San Juan de Pasto – Nariño – Colombia

La Colección permanente de libros de la facultad de ciencias exactas y naturales de la Universidad de Nariño es una obra de publicación anual, expone reflexiones inéditas de los grupos de investigación de la FACIEN, centra la atención en la investigación en Ciencias Naturales, en Matemáticas y en las Didácticas de las Ciencias Naturales y Exactas. En ocasiones, con el objeto de establecer redes de investigación pública trabajos de otros grupos de investigación. Este libro, titulado *Teoría de fotones, estructura atómica de la materia y Códigos lineales* se estructura en tres capítulos. En el primero, se describe un estudio simpléctico de los campos electromagnéticos y de Dirac en coordenadas de plano nulo, puntualmente, se evidencia que la simetría de Gauge del campo electromagnético persiste en tal sistema de coordenadas, igualmente que, la implementación de la condición de Gauge de plano nulo garantiza obtener los corchetes generalizados asociados a los campos fundamentales. En el segundo capítulo, por su parte, se caracteriza los conceptos que futuros educadores en ciencias naturales relacionan con la estructura atómica de la materia y establece cómo evolucionan tras la aplicación de una secuencia de enseñanza. Finalmente, en el tercer capítulo, se exponen conceptos básicos de la teoría de códigos correctores de errores y se caracteriza el papel que desempeña el SageMath en la ejemplificación de tales conceptos.

