

**MODELOS 331 CON CARGAS ELECTRICAS EXOTICAS
PARA $\beta = \sqrt{3}$**



EDUARD SUAREZ ARDILA

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister
en Física

Director
PhD. EDUARDO ROJAS PEÑA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PASTO, NARIÑO
2024

Hoja de Aceptación

Dr. William Ponce Gutierrez
Jurado

Dr. Yithsbey Giraldo Usuga
Jurado

Dr. Juan carlos Salazar
Jurado

Dr. Eduardo Rojas Peña
Director

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar gracias al todo poderoso, a quien le debo todo lo que tengo y todo lo que soy. Para Él, todos y cada uno de los triunfos y sacrificios que he tenido durante mi carrera, y a lo largo de toda mi existencia.

Deseo expresar mis más sinceros agradecimientos al profesor Eduardo Rojas, por haberme aceptado como uno de sus estudiantes de trabajo de grado y por su constante atención y exigencia. Su total y decidido apoyo desde el primer instante, tanto en el aspecto profesional como en lo personal, han sido de un valor incalculable. Eduardo, más que un director de trabajo, ha sido un gran amigo, que me ha aconsejado y corregido cuando ha sido necesario, y le debo gran parte de mi anhelo de continuar con mi formación en el maravilloso mundo de la física teórica.

Agradezco al Departamento de Física y en general a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño por haberme dado la oportunidad de realizar mis estudios de maestría y crecer profesionalmente en sus instalaciones, así como al grupo de Física de Altas Energías por acogerme y permitirme ser uno de sus integrantes.

Por último, deseo expresar mis más sinceros agradecimientos a mi esposa, por su paciencia, comprensión, apoyo y solidaridad con este proyecto, por eso, este trabajo también es suyo.

MODELOS 331 CON CARGA ELECTRICA EXOTICA PARA $\beta = \sqrt{3}$

Resumen

Los modelos 331 resultan de gran interés desde el punto de vista teórico y experimental, ya que permiten explicar entre otras cosas la razón por la cual deben existir tres familias de fermiones en la naturaleza y por otra parte tienen parámetros experimentales que pueden acotarse en los aceleradores de partículas como el LHC. En general estos modelos son no universales y por lo tanto tienen corrientes neutras con cambios de sabor (*flavor changing neutral currents* FCNC) para los fermiones del modelo, a diferencia de los modelos universales. Esta característica los vuelve relevantes para el estudio de la fenomenología de la física del sabor. En particular estamos interesados en la clasificación de todos los modelos 331 para el parámetro $\beta = \sqrt{3}$ y en las restricciones experimentales sobre estos. Encontramos varias soluciones donde ocurre cancelación de anomalías entre fermiones de diferentes familias, las cuales resultan de gran interés ya que generan bosones vectoriales neutros pesados no universales. La no universalidad en las cargas de los fermiones del ME bajo un grupo de simetría gauge adicional, generan violación de la carga de sabor leptónica (CLFV) y corrientes neutras con cambios de sabor (FCNC). Por último discutimos bajo qué condiciones los nuevos modelos pueden evadir las restricciones provenientes de estos procesos. Además, también reportamos las cotas para el LHC. **Palabras clave:** Modelo estándar, Modelos 331 y Bosón Z' .

331 MODELS WITH EXOTIC ELECTRICAL CHARGE FOR $\beta = \sqrt{3}$

Abstract

The 331 models are of great interest from the theoretical and experimental point of view, since they allow us to explain, among other things, the reason why there must be three families of fermions in nature and, on the other hand, they have experimental parameters that can be delimited in accelerators of particles like the LHC. In general these models are non-universal and therefore have flavor changing neutral currents (*flavor changing neutral currents* FCNC) for the fermions of the model, unlike the universal models. This feature makes them relevant for the study of the phenomenology of the physics of flavor. In particular we are interested in the classification of all 331 models for the parameter $\beta = \sqrt{3}$ and in the experimental restrictions on them. We found several solutions where anomaly cancellation occurs between fermions of different families, which are of great interest since they generate non-universal heavy neutral vector bosons. The non-universality in SM fermion charges under an additional gauge symmetry group generate leptonic flavor charge violation (CLFV) and flavor changing neutral currents (FCNC). Finally we discuss under what conditions the new models can evade the restrictions coming from these processes. In addition, we also report the bounds for the LHC. **Keywords:** Standard Model, 331 Models and Z' Boson.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teorías Gauge y el Modelo Estándar (ME)	3
2.1. Contenido de Partículas del ME	4
2.2. Lagrangiano del ME	5
2.2.1. Lagrangiano escalar	7
2.3. Generación de masas de los bosones vectoriales	9
2.4. Corrientes neutras y cargadas	13
3. Cancelación de Anomalías Quirales	17
4. Modelo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ con $\beta = \sqrt{3}$	29
4.1. El Modelo Mínimo	30
4.2. Generaciones de Leptones y Quarks	31
4.3. Series irreducibles libres de anomalías y construcción de modelos	34
4.4. Restricciones de LHC y bajas energías	36
5. Resumen y Conclusiones	40
A. Cálculo explícito de anomalías para $\beta = \sqrt{3}$	41
B. Cálculo del operador de carga para $\beta = \sqrt{3}$	44
C. Multipletes del modelo con $\beta = \sqrt{3}$	45
D. Cargas del Z' para un modelo 331 general	47
E. Cálculo de las cargas quirales	50
E.1. Cargas quirales en la representación 3	50
E.2. Cargas quirales en la representación 3^*	50
F. Z-Z' Mixing	52

Capítulo 1

Introducción

El Modelo Estándar (ME) o de Glashow, Weinberg y Salam es una teoría cuántica de campos que tiene como fundamento matemático la teoría de grupos, y se construye a partir de conceptos físicos fundamentales como son la invariancia de gauge y la ruptura espontánea de la simetría [1, 2]. Haciendo uso de transformaciones gauge locales de los campos en cada punto del espacio-tiempo y al imponer invariancia y covariancia de la densidad lagrangiana de la teoría, surgen de manera natural términos que físicamente se interpretan como las interacciones [3]. De esta forma el ME es una teoría de campos invariante de gauge bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, incorporando la interacción fuerte a través del grupo $SU(3)_C$ y la interacción electrodébil a través del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [1, 2, 4, 5].

A pesar del éxito del ME, existen una serie de dificultades teóricas y experimentales las cuales sugieren que éste modelo no es más que una componente válida a bajas energías de una teoría aún más general y fundamental. El modelo no explica el origen de la estructura de 3 familias fermiónicas [6, 7], no predice los valores relativos de la carga eléctrica (la cuantización de la carga eléctrica) [8, 9, 10, 11, 12, 13], no predice los valores de las masas de las partículas ni da una razón fundamental de la amplia jerarquía en los valores de esas masas [14, 15, 16, 17, 18], no incorpora una explicación de la asimetría entre materia y antimateria del universo actual [6], etc. Desde el punto de vista experimental no se ha encontrado de manera contundente manifestaciones más allá del ME, con excepción del sector de neutrinos, los cuales son no masivos dentro del ME.

Sin embargo, en experimentos de neutrinos solares y atmosféricos, se ha demostrado que los neutrinos, aunque muy ligeros, tienen masa distinta de cero [19], suministrando la primera manifestación experimental de nueva física más allá del ME. Para llenar esos vacíos que presenta el modelo, se han propuesto muchas alternativas de teorías más generales y que contienen al ME como una teoría efectiva a la escala electrodébil. Una alternativa ampliamente estudiada en la literatura es una extensión del sector electrodébil del ME, en el cual el grupo de simetría es $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, manteniendo el

mismo grupo de color $SU(3)_C$ (Conocido como modelos 331) originalmente propuesto por V. Pleitez, F. Pisano y P.H Frampton con un contenido de partículas con cargas exóticas [20, 21], y luego estudiado por R. Foot, H. Long y T. Tran con una variación que no contiene cargas exóticas [22].

Dentro de los logros de los modelos 331, se encuentra el hecho de que a partir del modelo es posible entender el por qué de la existencia de tres familias de fermiones en la naturaleza. Este modelo ha sido estudiado bajo diferentes representaciones fermiónicas y una de sus características principales es que el número de familias fermiónicas permitidas se relaciona con la cancelación de anomalías quirales, que es requerida para que la teoría sea renormalizable [23, 24, 25, 26]. Por lo anterior y teniendo en consideración el vacío que existe en la literatura en relación al estudio de modelos con cargas exóticas, este trabajo de grado tiene como finalidad el estudio de modelos 331, particularmente para un $\beta = 3/2$, que no ha sido estudiado más allá del modelo mínimo y que resultan de gran importancia desde el punto de vista teórico como experimental, ya que a través del estudio de estos modelos pueden ser encontrados candidatos a materia oscura, estudiarse violación de CP, entre otras.

Es importante mencionar que en la literatura existen soluciones para β arbitrario [27]; sin embargo, estas soluciones no tienen en cuenta todos los posibles modelos para un β dado. Como veremos, el parámetro β no puede ser arbitrariamente grande, y su valor se encuentra acotado como $|\beta| \lesssim \cot \theta_W \sim 1.8$. Esta condición constituye una restricción muy importante respecto de las posibles realizaciones de la simetría 331 a bajas energías, ya que limita el número de posibles casos no triviales a un conjunto contable. En el capítulo II se realiza una introducción al Modelo Estándar, en el capítulo III se introducen los conceptos básicos de cancelación de anomalías quirales. En el capítulo IV se realiza el estudio del modelo 331 con $\beta = \sqrt{3}$, con la fenomenología asociada al Z' , donde describimos los conjuntos completos de fermiones correspondientes a familias de quarks y leptones con tripletes y anti-tripletes de quiralidad izquierda, así como singletes de $SU(3)_L$. Adicionalmente en este capítulo mostramos los conjuntos libres de anomalías (CLA) que constituyen la base para la construcción del modelo y se enumeran todos los posibles modelos 331 con $\beta = \sqrt{3}$, se calculan las cargas de los fermiones del ME al Z' , se realiza una discusión fenomenológica y se calculan las cotas de colisionadores para la primera familia fermiónica y las condiciones que los modelos deben satisfacer para evitar las restricciones de violación de carga de sabor leptónica (CLFV) y corrientes neutras con cambios de sabor (FCNC). En el capítulo V se presenta el resumen y las conclusiones del presente trabajo de investigación. Los detalles de los cálculos mostrados a lo largo del presente trabajo se encuentran contenidos en los apéndices del mismo.

Capítulo 2

Teorías Gauge y el Modelo Estándar (ME)

Uno de los logros teóricos más preponderantes de la Física de partículas elementales en la última mitad del siglo XX fue la construcción del Modelo Estándar, todo en virtud a su alto nivel predictivo y consecuencia con los experimentos desarrollados hasta la actualidad (con la única falencia en la explicación de la oscilación de neutrinos). De una parte explica satisfactoriamente el decaimiento β en los procesos $\mu \rightarrow e\nu_\mu\bar{\nu}_e$ y $n \rightarrow p e\bar{\nu}_e$, el cual fue originalmente descrito mediante una teoría no renormalizable propuesta por E. Fermi en 1938 y por otro lado predijo la existencia de corrientes débiles cargadas y neutras, halladas experimentalmente en 1973; no obstante, el mayor soporte experimental del modelo radica en el descubrimiento de los bosones gauge W^\pm y Z en el colisionador electrón-positrón del CERN, LEP, en 1983, lo cual confirmó las predicciones hechas por el modelo para las masas de estos bosones débiles. Aunque los logros fenomenológicos son indudables, existen aún muchas cuestiones abiertas en la fundamentación conceptual del modelo, como lo es la explicación de la jerarquía de masas en el espectro fermiónico, la cuantización de la carga y la ausencia fenomenológica de un mecanismo unívoco encargado de explicar el origen de la masas de todas las partículas de la teoría[28, 29].

El Modelo Estándar (ME) o de Glashow, Weinber y Salam es una teoría cuántica de campos que tiene como fundamento matemático la teoría de grupos, y se construye a partir de conceptos físicos fundamentales como son la invariancia de gauge y la ruptura espontánea de la simetría. Haciendo uso de transformaciones gauge localmente aplicadas al espacio-tiempo y al imponer invariancia en la densidad lagrangiana de la teoría, surgen de manera natural términos que físicamente se interpretan como las interacciones. De esta forma el ME es una teoría de campos invariante de gauge bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, incorporando la interacción fuerte a través del grupo $SU(3)_C$ y la interacción electrodébil a través del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

2.1. Contenido de Partículas del ME

El sector fermiónico de quarks y leptones está organizado en tres familias asociadas a las tres clases de neutrinos existentes en la naturaleza, de tal forma que las partes izquierdas se encuentren en dobletes y las derechas en singletes bajo el grupo $SU(2)_L$, con idénticas propiedades excepto por su masa. El contenido de partículas en cada familia es:

$$1^{ra} \text{ familia} : \Psi_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, e_R, d_R, u_R \quad (2.1a)$$

$$2^{da} \text{ familia} : \Psi_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \mu_R, s_R, c_R \quad (2.1b)$$

$$3^{ra} \text{ familia} : \Psi_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \tau_R, b_R, t_R \quad (2.1c)$$

donde los campos derechos (R) e izquierdos (L), están definidos en términos del operador de proyección de quiralidad $P_{L,R}$ en la forma:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad , \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad . \quad (2.2)$$

Esta separación resulta necesaria, debido a que el neutrino no posee masa, y por tanto solo presenta quiralidad izquierda; esto es, en la naturaleza no existen neutrinos con helicidad derecha ($P_R \nu_m = 0$), lo cual es una muestra de que la interacción débil viola la paridad. El sector de quarks se comporta como un doblete bajo el grupo $SU(2)_L$ y como un triplete bajo el grupo $SU(3)_C$, mientras que los leptones son singletes de color.

La materia estable del universo está compuesta por las partículas de la primera generación, mientras que la materia inestable se conforma de las partículas pertenecientes a las otras dos generaciones. Las interacciones fundamentales de la naturaleza, sin contar la gravedad, son mediadas por los siguientes 12 bosones vectoriales intermedarios: el fotón A_μ que media la interacción electromagnética; los bosones W_μ^\pm y Z_μ que median la interacción débil y ocho gluones con carga de color que median la interacción fuerte.

Los generadores del grupo $SU(2)_L$ son proporcionales a las matrices de Pauli σ^i (con $i = 1, 2, 3$) y el generador del grupo $U(1)_Y$ es el operador de hipercarga Y. A partir de los generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, se define el operador de carga Q a través de la relación de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = T_3 + Y \quad , \quad (2.3)$$

donde T_3 es la tercera componente de isospín. En la tabla 1 se presentan los números cuánticos de isospín T , T_3 , Y y Q para los diferentes fermiones del ME. La última columna muestra los números cuánticos de los fermiones del ME asociados al grupo de simetría de gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Fermion	T	T_3	Y	Q	Representación 321
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	1/2	1/2	$-\frac{1}{2}$	0	(1, 2, -1/2)
e_L, μ_L, τ_L	1/2	-1/2	$-\frac{1}{2}$	-1	(1, 2, -1/2)
e_R, μ_R, τ_R	0	0	-1	-1	(1, 1, -1)
u_L, c_L, t_L	1/2	1/2	1/6	2/3	(3, 2, 1/6)
d_L, s_L, b_L	1/2	-1/2	1/6	-1/3	(3, 2, 1/6)
u_R, c_R, t_R	0	0	2/3	2/3	(3, 1, 2/3)
d_R, s_R, b_R	0	0	-1/3	-1/3	(3, 1, -1/3)

Tabla 1. Números cuánticos de isospin e hipercarga de leptones y quarks

A manera de ejemplo y recordando que las matrices de Pauli σ^i son definidas como:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Si tomamos el valor de hipercarga $Y = -\frac{1}{2}$, el operador de carga (2.3) es:

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + Y I_{2 \times 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde se identifican las cargas de los elementos del doblete de leptones con los valores de la diagonal del operador de carga. En otras palabras, los autovalores del operador de carga corresponden a la carga eléctrica de las partículas del doblete.

2.2. Lagrangiano del ME

La densidad lagrangiana del ME está descrita en la forma:

$$\mathcal{L}_{SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \quad (2.5)$$

donde $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ y \mathcal{L}_3 se definen como [29, 30, 31]:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad , \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \sum_m \left\{ \bar{\Psi}_{Lm} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_{Lm} + \bar{\Psi}_{Rm} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_{Rm} \right\} \quad , \quad (2.6b)$$

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad , \quad (2.6c)$$

$$\mathcal{L}_4 = \sum_m \left\{ g_m \bar{\Psi}_{Lm} \Phi \Psi_{Rm} + g_m^* \bar{\Psi}_{Rm} \Phi^\dagger \Psi_{Lm} \right\} \quad (2.6d)$$

donde \mathcal{L}_1 representa la densidad lagrangiana de Yang-Mills o de bosones de gauge y corresponde al término cinético de los bosones de gauge que provienen de la invariancia local de la teoría bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. La densidad lagrangiana \mathcal{L}_2 está asociada con la parte cinética de los fermiones, donde m hace referencia a las tres generaciones o familias de fermiones: leptones e, μ, τ con sus respectivos neutrinos, y los quarks u, c, t con sus respectivas parejas de quarks. La densidad lagrangiana \mathcal{L}_3 contiene el sector escalar o de ruptura espontánea de simetría y la densidad lagrangiana \mathcal{L}_4 corresponde al lagrangiano de Yukawa que dota de masa a los quarks. Las constantes g_m son las denominadas constantes de Yukawa y el doblete escalar Φ se define en la forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.7)$$

donde los bosones ϕ^\pm y ϕ_2 corresponden a bosones de Goldstone que permiten a través del mecanismo de Higgs dotar de masa a las partículas intermediarias de la interacción débil y al bosón de Higgs.

Si tomamos el valor de hipercarga $Y = \frac{1}{2}$, el operador de carga para el doblete Φ es:

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + Y I_{2 \times 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que la carga de la componente superior del campo Φ es 1 y la carga de la componente inferior del doblete es 0. Es importante hacer hincapié que en el ME los neutrinos no poseen masa y por tanto no tienen una componente derecha asociada en el lagrangiano de Yukawa.

Asociado a los términos cinéticos de los campos de gauge, tanto abelianos como no abelianos, se definen los tensores de curvatura:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad , \quad (2.8a)$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_1 f_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad , \quad (2.8b)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_2 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.8c)$$

En estas expresiones, $B_{\mu\nu}$ es el tensor de gauge construido a partir del generador del grupo $U(1)_Y$, $F_{\mu\nu}^i$ son los tensores de gauge construidos a partir a los 3 generadores del grupo $SU(2)_L$, y $G_{\mu\nu}^a$ son los tensores de gauge construidos a partir de los ocho generadores de $SU(3)_C$. Finalmente, f_{ijk} y f_{abc} son las denominadas constantes de estructura del grupo de Lie $SU(2)_L$ y $SU(3)_C$ respectivamente.

La derivada covariante D_μ , se define de forma tal que la densidad lagrangiana sea localmente invariante de gauge, lo cual es posible si se introducen 3 campos vectoriales $\mathbf{W} = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ correspondientes a los tres generadores $T^i = \sigma^i/2$ del grupo $SU(2)_L$, con una constante de acoplamiento g , y un campo vectorial B_μ asociado al generador Y del grupo $U(1)_Y$, con una constante de acoplamiento g' . La derivada covariante es:

$$D_\mu \Psi_R = \left(\partial_\mu - ig' Y B_\mu \right) \Psi_R \quad , \quad (2.9a)$$

$$D_\mu \Psi_L = \left(\partial_\mu - ig \sum_1^3 T^i W_\mu^i - ig' Y B_\mu \right) \Psi_L \quad , \quad (2.9b)$$

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - ig \sum_1^3 T^i W_\mu^i - ig' Y B_\mu \right) \Phi \quad . \quad (2.9c)$$

2.2.1. Lagrangiano escalar

El sector de Higgs esta caracterizado por dotar de masa al bosón de Higgs y a los bosones de gauge físicos de la teoría W_μ^\pm y Z_μ^0 , como consecuencia de implementar el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría (RES) o mecanismo de Higgs. Este sector esta descrito mediante la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad , \quad (2.10)$$

donde D_μ (ver ecuación 2.9c) es la derivada covariante que hace local a la densidad lagrangiana, μ^2 es un parámetro arbitrario, λ es un factor perturbativo mayor que cero para que el potencial esté acotado inferiormente y tenga un estado fundamental y Φ es el doblete escalar definido en la expresión (2.7).

Teniendo en cuenta la forma del potencial se presentan dos situaciones dependiendo del signo del parámetro μ^2

(a) Corresponde al caso donde $\mu^2 > 0$, en el cual este término es como de masa, y por tanto (2.10) describe cuatro campos escalares complejos de idéntica masa, en presencia de un potencial de auto-interacción; o lo que es lo mismo, (2.10) describe dos partículas bosónicas de espín cero, masivas y auto-interactuantes

(b) Corresponde al caso de $\mu^2 < 0$. En esta situación, se dice que el sistema presenta ruptura espontánea de la simetría $U(1)$, ya que el estado vacío de la teoría tiene una simetría menor a la del sistema, es decir que $\delta\langle\Phi\rangle_0 \neq 0$. Este es el caso de interés, que se estudia a continuación.

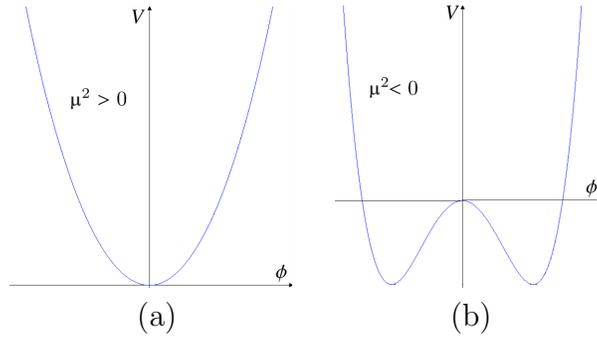


Figura 2.1: Potencial del Lagrangiano Escalar

El estado base del campo de Higgs se obtiene al encontrar el valor del campo que minimiza el potencial $V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$, donde el caso de interés físico ocurre cuando $\mu^2 < 0$, es decir, cuando se puede presentar RES electrodébil.

Con la implementación del mecanismo de Higgs, la simetría electrodébil es espontáneamente rota a través del esquema $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$. Ya que el estado vacío de la teoría es degenerado, y puesto que este debe ser univaluado, se escoge de manera arbitraria uno de los infinitos estados de vacío, de tal forma que una de las componentes del doblete toma un valor esperado en el vacío distinto de cero. En particular se adopta el valor: $\langle H \rangle_0 = \nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$. Con esta escogencia particular, el valor esperado del campo en el vacío toma la forma:

$$\langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} \langle\phi^+\rangle_0 \\ \langle\phi^0\rangle_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle\phi_3\rangle_0 + i\langle\phi_4\rangle_0 \\ \langle H \rangle_0 + i\langle\phi_2\rangle_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \quad . \quad (2.11)$$

Como es necesario hacer una teoría de perturbaciones, el campo Φ se redefine alrededor del estado fundamental, a través de una traslación a lo largo del eje real con respecto

al valor esperado $\langle H \rangle_0$, de acuerdo a la transformación:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H - \nu + i\phi_2 \end{pmatrix} , \quad (2.12)$$

de esta manera, el nuevo estado base corresponde al estado de vacío del campo Φ' .

Cuando se reemplaza el campo Φ' dado por la relación (2.12) en la densidad lagrangiana (2.10), se obtiene el ME con ruptura espontánea de la simetría, siendo la simetría remanente la $U(1)_{em}$ del electromagnetismo. Como consecuencia del mecanismo de Higgs, los bosones de gauge débiles W_μ^\pm y Z_μ , así como el bosón de Higgs (H) adquieren masa en relación al valor esperado del campo en el vacío, en tanto el campo asociado al fotón permanece sin masa como se explicita en la siguiente sección.

2.3. Generación de masas de los bosones vectoriales

Para ver como se generan las masas de los bosones de gauge, partimos de la densidad lagrangiana del sector escalar, aplicando la derivada covariante D_μ sobre el doblete Φ en su estado de mínima energía, es decir, sobre el estado de vacío de la teoría (2.11), donde se ha roto la simetría de forma espontánea según el esquema: $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$. Aplicando la derivada covariante (2.9c) sobre (2.11), tenemos que:

$$(D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0) = \left[\left(\partial_\mu - \frac{ig}{2} \sigma^i W_\mu^i - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[\left(\partial^\mu - \frac{ig}{2} \sigma^i W^{\mu i} - \frac{ig'}{2} B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] .$$

Como \mathbf{W} forma un triplete de bosones gauge y σ son las tres matrices de Pauli, se tiene:

$$\sigma \cdot W_\mu = \sigma_1 W_\mu^1 + \sigma_2 W_\mu^2 + \sigma_3 W_\mu^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 ,$$

con lo cual, la derivada covariante puede ser escrita en la forma:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_\mu^3 & 0 \\ 0 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right\} - \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

De la expresión precedente, para que se respete la conservación de la carga, se definen los bosones de gauge cargados:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad , \quad (2.14)$$

y los bosones de gauge neutros:

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \quad , \quad (2.15a)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_\mu^3 + gB_\mu) \quad . \quad (2.15b)$$

Aplicando las definiciones (2.14-2.15) en la relación (2.13), se encuentra:

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i\alpha}{2}Z_\mu - ieA_\mu & -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu + \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}Z_\mu \end{pmatrix} \quad , \quad (2.16)$$

donde $\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ y $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ es la carga eléctrica. Todos los elementos de la matriz anterior son obtenidos de forma directa a excepción del elemento matricial (1,1), el cual es obtenido a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}Z_\mu + eA_\mu &= \frac{g^2 - g'^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(\frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(\frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2(g^2 + g'^2)} [(g^2 - g'^2)(gW_\mu^3 - g'B_\mu) + 2gg'(g'W_\mu^3 + gB_\mu)] \\ &= \frac{1}{2(g^2 + g'^2)} [g^3W_\mu^3 - g^2g'B_\mu - g'^2gW_\mu^3 + g'^3B_\mu + 2gg'^2W_\mu^3 + 2g^2g'B_\mu] \\ &= \frac{1}{2(g^2 + g'^2)} [g^2(gW_\mu^3 + g'B_\mu) + g'^2(gW_\mu^3 + g'B_\mu)] = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{2} \quad . \end{aligned}$$

Aplicando la derivada covariante anterior sobre la ecuación (2.11) tenemos que:

$$D_\mu \Phi_0 = \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i\alpha}{2}Z_\mu - ieA_\mu & -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ -\frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu + \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-ig\nu W_\mu^+}{2} \\ \frac{i\nu}{2}\sqrt{\frac{g^2 + g'^2}{2}}Z_\mu \end{pmatrix} \quad .$$

Con lo anterior tenemos que:

$$(D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0) = \begin{pmatrix} \frac{ig\nu W_\mu^-}{2} & -\frac{i\nu}{2}\sqrt{\frac{g^2 + g'^2}{2}}Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-ig\nu W^{\mu+}}{2} \\ \frac{i\nu}{2}\sqrt{\frac{g^2 + g'^2}{2}}Z^\mu \end{pmatrix} \quad ,$$

$$(D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0) = \frac{g^2 \nu^2}{4} W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{g^2 + g'^2}{2} \right) Z_\mu Z^\mu + 0 A_\mu A^\mu . \quad (2.17)$$

De la última expresión y como consecuencia de la ruptura de la simetría electrodébil, los bosones de Goldstone no aparecen en el espectro de partículas y los bosones W_μ^\pm y Z_μ , así como el bosón de Higgs H , aparecen como partículas físicas con masas dadas por:

$$M_W = \frac{g\nu}{2} , \quad (2.18a)$$

$$M_Z = \frac{\nu}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} , \quad (2.18b)$$

$$M_H = \sqrt{2\lambda} \nu . \quad (2.18c)$$

El campo asociado al fotón A_μ queda sin masa. Podemos redefinir las constantes de acoplamiento de los grupos de gauge con el ángulo de Weinberg θ_W en la forma:

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} , \quad \text{sen } \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} . \quad (2.19)$$

Con lo anterior, podemos reescribir las masa de los bosones W_μ^\pm y Z_μ , así como la carga fundamental en la forma:

$$M_Z = \frac{g\nu}{2 \cos \theta_W} , \quad M_W = M_Z \cos \theta_W , \quad e = g \text{sen } \theta_W . \quad (2.20)$$

Por otro lado y teniendo como base el ángulo de Weinberg, podemos ver que los campos A_μ^\pm y Z_μ se pueden representar como una rotación a partir de una transformación ortogonal de la forma:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \text{sen } \theta_W \\ -\text{sen } \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \text{sen } \theta_W \\ -B_\mu \text{sen } \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W \end{pmatrix} . \quad (2.21)$$

Podemos escribir de una manera alterna la derivada covariante (2.9b), como se sigue a continuación. Recordando que \mathbf{W} forma un triplete de bosones gauge y σ son las tres matrices de Pauli, entonces:

$$\sigma \cdot W_\mu = \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + \sigma_3 W_\mu^3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} + \sigma_3 W_\mu^3 .$$

Reescribiendo la matriz que contiene a los bosones W_μ^\pm :

$$\sigma \cdot W_\mu = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^- + \sigma_3 W_\mu^3 .$$

Con todo lo anterior y recordando las expresiones (2.15), (2.19), (2.20), (2.21), la derivada covariante D_μ se transforma en:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_1^3 T^i W_\mu^i - ig' Y B_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} T^+ W_\mu^+ - \frac{ig}{\sqrt{2}} T^- W_\mu^- - ig T^3 W_\mu^3 - ig' Y B_\mu ,$$

donde T^+ y T^- se definen como:

$$T^\pm = T^1 \pm iT^2 = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] ,$$

es decir:

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Operando de forma explícita los últimos dos términos de la ecuación anterior y considerando la expresión para el operador de carga dado por la ecuación de Gell-Mann-Nishijima (2.3), se tiene que:

$$\begin{aligned} igT^3 W_\mu^3 + ig' Y B_\mu &= igT^3 W_\mu^3 + ig'(Q - T^3) B_\mu = iT^3(gW_\mu^3 - g'B_\mu) + ig'QB_\mu \\ &= iT^3(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \frac{g\sqrt{g+g'}}{g\sqrt{g-g'}} + ig'Q \left(\cos\theta_W A_\mu - \text{sen}\theta_W Z_\mu \right) \\ &= \frac{ig}{\cos\theta_W} T^3 Z_\mu - \frac{igQ}{\cos\theta_W} \text{sen}^2\theta_W Z_\mu + ieQA_\mu . \end{aligned}$$

Con lo anterior, la la derivada covariante D_μ toma la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} \left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^- \right) - \frac{ig}{\cos\theta_W} Z_\mu \underbrace{(T^3 - Q \text{sen}^2\theta_W)}_{\text{Carga débil del } Z} . \quad (2.22)$$

Donde usamos las identidades $e = g' \cos\theta_W$ y $g'/g = \tan\theta_W$

2.4. Corrientes neutras y cargadas

Para calcular las corrientes fermiónicas del Modelo Estándar, definimos los multipletes:

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \nu_{em} \\ e_m \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u_m \\ d_m \end{pmatrix}_L \quad (2.23)$$

Donde m hace referencia a las tres generaciones o familias de fermiones: leptones e, μ, τ con sus respectivos neutrinos, y los quarks u, c, t con sus respectivas parejas de quarks. Para calcular las cantidades covariantes (invariantes de gauge) de los dobletes de $SU(2)_L$, tenemos a partir de las expresiones (2.6b) y (2.22) que:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i &= \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \left[\partial_\mu - ieQA_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} \left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^- \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{\cos \theta_W} Z_\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) \right] \Psi_i . \end{aligned}$$

Desarrollando explícitamente la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i &= \sum_i \left[\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - ieA_\mu \bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i - \frac{ig}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{\Psi}_i \gamma^\mu T^+ \Psi_i + (W_\mu^- \bar{\Psi}_i \gamma^\mu T^- \Psi_i) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{\cos \theta_W} Z_\mu \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) \Psi_i \right] \quad (2.24) \end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior, definimos las corrientes cargadas asociadas a los bosones W_μ^\pm y las corrientes neutras de los bosones Z_μ y A_μ en la forma:

$$J_W^{\mu\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu T^\pm \Psi_i , \quad (2.25a)$$

$$J_Z^\mu = \frac{1}{\cos \theta_W} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) \Psi_i , \quad (2.25b)$$

$$J_{EM}^\mu = \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i . \quad (2.25c)$$

Donde cada una de las corrientes cargadas y neutras definidas en las ecuaciones (2.25) son invariantes de gauge y por tanto pueden aparecer en el lagrangiano del sistema. Es importante hacer notar que las corrientes $J_W^{\mu\pm}$ y J_Z^μ solamente afectan los dobletes de $SU(2)_L$ y no afecta las partes derechas de los fermiones, ya que son singletes de $SU(2)_L$

y por ende su autovalor de T^3 es 0. Sin embargo, la corriente electromagnética afecta de igual manera a las componentes izquierdas como derechas, solamente que en el caso de las componentes derechas el valor de la hipercarga de las componentes derechas es igual a la carga eléctrica Q , de la relación de Gell-Mann-Nishijima (2.3), como se puede observar en la Tabla 1 y el cálculo de los valores propios del operador de carga mostrados.

Aplicando las ecuaciones (2.25a) sobre un doblete de quarks tenemos que:

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_L \gamma^\mu d_L \quad , \quad (2.26a)$$

$$J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad . \quad (2.26b)$$

De la expresión (2.26a), vemos que el estado inicial es como un d y el estado final es como un u , por lo cual el efecto de la corriente $J_W^{\mu+}$, es aumentar la carga eléctrica del sistema, ya que pasamos de una partícula con carga $Q_d = -1/3$ a una partícula con carga $Q_u = 2/3$, por la absorción de un W^+ con carga $+1$. De manera análoga, de la expresión (2.26b), vemos que el estado inicial es como un u y el estado final es como un d , por lo cual el efecto de la corriente $J_W^{\mu-}$, es disminuir la carga eléctrica del sistema, ya que pasamos de una partícula con carga $Q_u = 2/3$ a una partícula con carga $Q_d = -1/3$, por la absorción de un W^- con carga -1 .

En resumen, las corrientes cargadas permiten el intercambio de las partículas del doblete de quarks, aumentando o disminuyendo la carga de la partícula inicial, en tanto que las corrientes neutras (2.25b) y (2.25c) no cambian las componentes del doblete y la carga es invariante. Los resultados (2.26) se pueden generalizar para todos los índices de familia $i = 1, 2, 3$ y se suma sobre dichos índices.

Siguiendo el mismo razonamiento realizado para el doblete de quarks, aplicando las ecuaciones (2.25a) sobre un doblete de leptones tenemos que:

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L \quad , \quad J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L \quad . \quad (2.27)$$

Podemos identificar la relación entre las corrientes $J_W^{\mu+}$ y $J_W^{\mu-}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
[J_W^{\mu+}]^\dagger &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L \right]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \bar{\nu}_L^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (\nu_L^\dagger \gamma^0)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \nu_L \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 \nu_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_L^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \nu_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L = J_W^{\mu-} \quad , \quad (2.28)
\end{aligned}$$

donde hemos usado las identidades $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ y $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

Ahora, introducimos los índices de familia, que agrupan los quarks en dos vectores de tres componentes como se muestra a continuación:

$$u_i = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad d_i = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad (2.29)$$

agrupando los quarks con carga $+2/3$ en un vector y aquellos con carga $-1/3$ en otro.

Así, siendo i el índice de familia, podemos generalizar las corrientes fermiónicas de la forma:

$$J_W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \quad . \quad (2.30)$$

Todo el acoplamiento a fermiones presentado, ha sido realizado en el espacio de interacción, pero para poder obtener los estados que son observables experimentalmente, debemos rotar al espacio de masa. Estos estados físicos son combinaciones lineales de los estados de interacción. Para rotar al espacio de masa (que se denotará con los estados primados), introducimos una matriz U de rotación, la cual tendrá índices de familia, más no índices espinoriales. Así, la rotación de los estados de interacción a los estados de masa será descrita en la forma:

$$\begin{aligned}
d_L^i &= (U_L^d)^{ij} d_L^{\prime j} = U_L^d d' \quad , \\
u_L^i &= (U_L^u)^{ij} u_L^{\prime j} = U_L^u u' \quad . \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (2.30)

$$\begin{aligned}
J_W^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U_L^{u\ ij} u_L'^j)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu U_L^{d\ ik} d_L'^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_L'^j)^\dagger (U_L^{u*})_{ji}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu U_L^{d\ ik} d_L'^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu U_{ji}^{u* \dagger} U_{ik}^d d_L'^k \\
&= \frac{q}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu \underbrace{(U_L^{u\dagger} U_L^d)}_{V_{jk}^{\text{CKM}}} d_L'^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu V_{jk}^{\text{CKM}} d_L'^k \quad , \tag{2.32}
\end{aligned}$$

donde V_{jk}^{CKM} es la matriz unitaria de Cabibo-Kobayashi-Maskawa, cuyas entradas son determinadas experimentalmente. Esta matriz es sumamente importante para la fenomenología de las interacciones débiles y únicamente aparece en corrientes cargadas con cambios de sabor.

Para leptones puede definirse una matriz similar que mezcla las diferentes familias. Esta matriz, V_{ij}^{PMNS} se denomina de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. Con esto tendríamos que la corriente para leptones, en el espacio de masas, es dada por

$$J_W^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}'_{Li} \gamma^\mu V_{ij}^{\text{PMNS}} \nu'_j . \tag{2.33}$$

La matriz CKM aparece definida en la corriente J_W^+ , en tanto que la PMNS aparece definida en la corriente J_W^- , lo que se debe puramente a razones históricas, e implica que la matriz CKM debe aparecer dagada en una corriente J_W^+ , mientras que la PMNS aparece dagada en J_W^- , todo esto en razón de (2.30). Es importante hacer énfasis que sólo en las corrientes cargadas existe cambio de sabor.

Capítulo 3

Cancelación de Anomalías Quirales

Por anomalía entendemos la invalidez de una simetría de la acción clásica debido al proceso de cuantización. Si la simetría clásica no se preserva durante el proceso de cuantización, se dice entonces que la teoría presenta una anomalía. Existen varios tipos de anomalías y cada una depende de la simetría a la que se encuentre asociada. Entre ellas se encuentran las anomalías quirales, las anomalías abelianas y no abelianas, anomalías supersimétricas, anomalías gravitacionales, entre otras.

Las anomalías presentan una doble característica, por un lado, se requieren para explicar resultados experimentales como el decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, y por otra parte y de gran importancia en la Teoría Cuántica de Campos, las anomalías quirales de la teoría deben ser canceladas, para que la teoría sea renormalizable. El requerimiento de cancelación de anomalías conlleva consecuencias importantes. En el caso del modelo electrodébil, la cancelación de anomalías quirales impone el balance entre el número de quarks y de leptones para que la teoría sea renormalizable. En general, el concepto de cancelación de anomalías es fundamental en la construcción de modelos físicos de la naturaleza como los modelos más allá del modelo estándar de partículas elementales.

Las anomalías cuánticas son contribuciones que se obtienen a cierto tipo de topologías que no pueden existir en el Lagrangiano de la teoría, ya que pueden conducir a problemas de renormalización de la misma y por ende la presencia de términos divergentes. A nivel clásico (*Tree level*), los procesos permitidos son los que proporcionan los diferentes vértices de interacción de la teoría, pero a nivel de correcciones cuánticas (*loops*), se espera que no existan procesos con el número típico de patas externas que no estén en el lagrangiano de la teoría, los cuales contribuyen con términos anómalos y a la divergencia de las corrientes axial-vectorial.

Un posible diagrama que puede existir a nivel de un loop es el que se muestra en la figura (3.1) donde entran dos fotones y sale un Z .

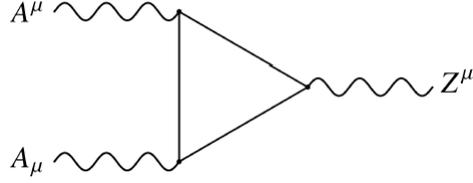


Figura 3.1: Anomalía triangular

Si para este diagrama aparece explícitamente en el lagrangiano un término de la forma:

$$gA^\mu \partial_\nu A_\mu Z^\nu \quad , \quad (3.1)$$

es posible reabsorber la divergencia asociada a este diagrama a través de la constante de acoplamiento g mediante el proceso de renormalización. Este proceso redefine las constantes de acoplamiento de tal forma que la teoría se vuelva coherente, consistente y no contenga infinitos. Si por el contrario, el término (3.1) no aparece en el lagrangiano y el diagrama existe, se tendrá una divergencia en la teoría y por tanto no podrá ser renormalizable, debido a que no habría una forma de redefinir la teoría para que sea finita y coherente. Cuando esto ocurre tenemos lo que se denomina una *anomalía*, y para que la teoría sea consistente y no tenga infinitos sin cancelar, la única forma es que estos diagramas, de alguna forma deben hacerse cero. El diagrama considerado para este análisis es mostrado en la figura (3.1) y se denomina *Anomalía triangular*, que consiste en la contribución del “Triángulo” formado por tres propagadores fermiónicos y tres bosones de gauge.

Los vértices permitidos a *tree level* de la teoría son:

Vértices axiales	$ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 a_f$,
Vértices vectoriales	$-ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu v_f$,

donde g es una constante de acoplamiento y los λ^a aparecen por ser vértices asociados a un grupo de gauge. Estos vértices son tanto para corrientes neutras como para corrientes cargadas. En términos del proyector de quiralidad izquierda (2.2), podemos condensar los dos tipos de vértices en la forma:

$$-g \bar{\Psi} \gamma^\mu P_L \frac{\lambda^a}{2} \Psi Z_\mu \quad . \quad (3.2)$$

A partir de los vértices axial-vectorial, es posible calcular la amplitud invariante para un diagrama triangular, el cual es generalmente anómalo, como el que se muestra a continuación:

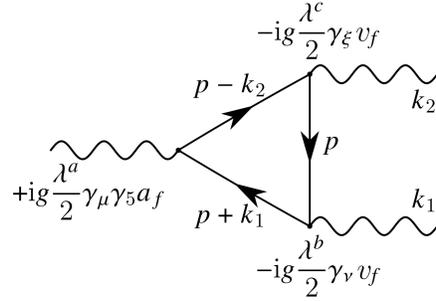


Figura 3.2: Anomalía triangular sin cambio de sabor.

Si se considera que el diagrama (3.2) es para corriente neutra, es decir sin cambios de sabor en los vértices de interacción, el fermión dentro del diagrama triangular es una partícula virtual y esta constituido por estados de partícula y antipartícula a través de una combinación lineal. En el diagrama las flechas son empleadas para llevar en consideración la conservación del momentum en cada vértice. Los γ_i en cada vértice del diagrama dan cuenta de los generadores del grupo gauge asociado a cada bosón de gauge presente en el diagrama triangular.

Adicional al diagrama (3.2), es posible obtener un diagrama cruzado como se muestra a continuación:

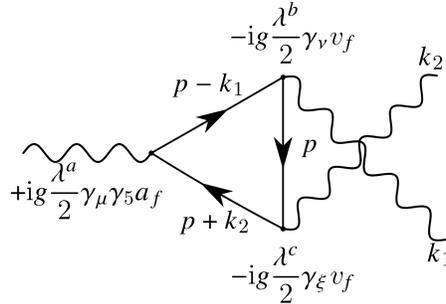


Figura 3.3: Anomalía triangular - Diagrama cruzado.

Al observar el diagrama cruzado (3.3) en relación con el diagrama fundamental (3.2), los generadores de los grupos asociados a cada uno de los bosones de gauge con momento $K_1 \rightarrow \lambda^b$ y $K_2 \rightarrow \lambda^c$ permanecen invariantes, pero en posiciones diferentes en el diagrama triangular. La existencia de este diagrama cruzado permite la cancelación de anomalías proveniente del diagrama fundamental (3.2), para asegurar que la teoría no

tenga infinitos y pueda ser renormalizable a todos los órdenes en teoría de perturbaciones.

Para el diagrama (3.2), la amplitud de probabilidad invariante de tres vértices puede ser escrita en la forma:

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu \epsilon^\nu \epsilon^\xi T_{\mu\nu\xi}^{abc} &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \left(-ig \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\xi v_f \right) \epsilon_{k_2}^\xi \frac{i}{\not{p} - m} \right. \\
&\quad \times \left. \left(-ig \frac{\lambda^b}{2} \gamma_\nu v_f \right) \epsilon_{k_1}^\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \left(ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 a_f \right) \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \right] \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_2}^\xi (i)^3 \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\quad \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\xi \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] . \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Donde los términos ϵ^μ , ϵ^ν y ϵ^ξ , corresponden a las funciones de onda de los bosones presentes en el diagrama triangular. Procediendo de forma análoga para el diagrama cruzado (3.3), la amplitud invariante es:

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu \epsilon^\nu \epsilon^\xi T_{\mu\nu\xi}^{abc} &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \left(-ig \frac{\lambda^b}{2} \gamma_\nu v_f \right) \epsilon_{k_1}^\nu \frac{i}{\not{p} - m} \right. \\
&\quad \times \left. \left(-ig \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\xi v_f \right) \epsilon_{k_2}^\xi \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \left(ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 a_f \right) \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \right] \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_2}^\xi \epsilon_{k_1+k_2}^\mu (i)^3 \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\quad \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\xi \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] . \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Comparando las amplitudes de los diagramas (3.3) y (3.4), la forma funcional de las dos expresiones es idéntica, salvo el orden de los generadores en el término cruzado está cambiado y los signos de los momentos k_1 y k_2 . Estas integrales son divergentes. Sin embargo, en el límite de $P \rightarrow \infty$, las masas de los fermiones en el diagrama triangular, así como los momentos de los bosones de gauge de las patas externas k_1 y k_2 son despreciables.

Con lo anterior en consideración, podemos manipular los términos dentro de la traza de las integrales (3.3) y (3.4) como se sigue a continuación.

$$\begin{aligned}
(\not{p} - \not{k}_i)^2 - m^2 &= (\not{p} - \not{k}_i - m)(\not{p} - \not{k}_i + m) = (p - k_i)^2 - m^2 \quad , \\
\not{p}^2 - m^2 &= (\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2 \quad , \\
(\not{p} + \not{k}_i)^2 - m^2 &= (\not{p} + \not{k}_i - m)(\not{p} + \not{k}_i + m) = (p + k_i)^2 - m^2 \quad .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $i = 1, 2$ y se ha tenido en cuenta que:

$$\not{p}^2 = (p_\mu \gamma^\mu)(p^\mu \gamma_\mu) = p^2 \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\mu}_1 = p^2 \quad .$$

Con esto, la traza de la ecuación (3.3) puede ser rescrita en la forma:

$$\text{Tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_2 + m}{(p - k_2)^2 - m^2} \gamma_\xi \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{p} + \not{k}_1 + m}{(p + k_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \quad . \tag{3.6}$$

Ahora, recordando que la integral se evalúa en el límite de $P \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow 0$), la expresión (3.6) toma la forma:

$$\frac{1}{B} (p - k_2)^\alpha p^\beta (p + k_1)^\sigma \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\xi \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5] \quad , \tag{3.7}$$

donde B es el escalar:

$$B = \left[(p - k_2)^2 p^2 (p + k_1)^2 \right] \quad .$$

Ahora, si realizamos el cambio de variable $p \rightarrow -p'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p' \quad ,$$

donde hemos usado la identidad:

$$\int_{-a}^a dp \quad \rightarrow \quad \int_a^{-a} -dp' = \int_{-a}^a dp' \quad .$$

Con este cambio de variable tenemos que:

$$p - k_2 \rightarrow -(p + k_2) \quad \text{y} \quad p + k_1 \rightarrow -p + k_1 \quad , \tag{3.8}$$

De tal forma que la expresión para la traza (3.6) se transforma en:

$$\frac{1}{\tilde{B}} \left[-(p + k_2)^\alpha p^\beta (p - k_1)^\sigma \right] \text{Tr} (\gamma_\alpha \gamma_\xi \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5) \quad , \tag{3.9}$$

donde \tilde{B} es el escalar:

$$\tilde{B} = \left[(p + k_2)^2 p^2 (p - k_1)^2 \right] \quad .$$

Para manipular estas expresiones necesitamos el operador de conjugación de carga, que se define de tal forma que:

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^\mu C &= C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu\top} \quad , \\ C\gamma_5 C^{-1} &= +\gamma_5^\top \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir de operaciones matriciales se tiene que:

$$\text{Tr}[M] = \sum_i M_{ii} = \sum_i M_{ii}^\top = \text{Tr}[M^\top] \quad ,$$

por lo que la traza de la expresión (3.9) se transforma en:

$$\text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\xi \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5] = \text{Tr}[(\gamma_\alpha \gamma_\xi \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5)^\top] = \text{Tr}[\gamma_5^\top \gamma_\mu^\top \gamma_\sigma^\top \gamma_\nu^\top \gamma_\beta^\top \gamma_\xi^\top \gamma_\alpha^\top] \quad . \quad (3.11)$$

A partir de las identidades (3.10), la traza de la expresión (3.9) puede ser rescrita como:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\xi \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5] &= \text{Tr}[C\gamma_5 C^{-1}(-1)C\gamma_\mu C^{-1} \cdots (-1)C\gamma_\alpha C^{-1}] \\ &= \text{Tr}\left[C\gamma_5 \underbrace{C^{-1}C}_1 \gamma_\mu \underbrace{C^{-1}C}_1 \cdots \underbrace{C^{-1}C}_1 \gamma_\alpha C^{-1}\right] (-1)^6 \\ &= \text{Tr}[C\gamma_5 \gamma_\mu \cdots \gamma_\alpha C^{-1}] \\ &= \text{Tr}\left[\gamma_5 \gamma_\mu \cdots \gamma_\alpha \underbrace{C^{-1}C}_1\right] \\ &= \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\xi \gamma_\alpha] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\xi \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\mu] \\ &= -\text{Tr}[\gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\xi \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_5] \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (3.3), la amplitud invariante para el diagrama fundamental (3.1) de tres vértices se transforma como se sigue a continuación:

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu \epsilon^\nu \epsilon^\xi T_{\mu\nu\xi}^{abc} &= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p+k_2)^\alpha p^\beta (p-k_1)^\sigma (-1)^2}{(p+k_2)^2 p^2 (p-k_1)^2} \times \text{Tr}[\gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\xi \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_5] \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+k_2)^2 p^2 (p-k_1)^2} \\
&\times \text{Tr} \left\{ \left[(p-k_1)^\sigma \gamma_\sigma \right] \gamma_\nu \left[p^\beta \gamma_\beta \right] \gamma_\xi \left[(p+k_2)^\alpha \gamma_\alpha \right] \gamma_\mu \gamma_5 \right\} \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{(\not{p}-\not{K}_1)}{(\not{p}-\not{K}_1)^2} \gamma_\nu \frac{\not{p}}{p^2} \gamma_\xi \frac{(\not{p}+\not{K}_2)}{(\not{p}+\not{K}_2)^2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{(\not{p}-\not{K}_1)} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma_\xi \frac{1}{(\not{p}+\not{K}_2)} \gamma_\mu \gamma_5 \right] .
\end{aligned}$$

Comparando el resultado anterior con la ecuación para la amplitud del diagrama cruzado (3.4), se puede observar que en el límite de $m \rightarrow 0$ las dos expresiones son similares excepto por el orden de los generadores λ^i . Sumando las expresiones para el término directo y para el término cruzado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu \epsilon^\nu \epsilon^\xi (T_{1\mu\nu\xi}^{abc} + T_{2\mu\nu\xi}^{abc}) &= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \left(\frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} + \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{(\not{p}-\not{K}_1)} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma_\xi \frac{1}{(\not{p}+\not{K}_2)} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \\
&= (-ig)^3 v_f^2 a_f \epsilon_{k_1+k_2}^\mu \epsilon_{k_1}^\nu \epsilon_{k_1}^\xi (i)^3 \left\{ \frac{\lambda^c}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} \frac{\lambda^a}{2} \\
&\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{(\not{p}-\not{K}_1)} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma_\xi \frac{1}{(\not{p}+\not{K}_2)} \gamma_\mu \gamma_5 \right] .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Como un solo fermión es el que se encuentra circulando a través del loop del diagrama triangular, las matrices γ^i , poseen dos índices matriciales en su representación fundamental, de tal manera que su producto se encuentra contraído y por tanto se reduce a la traza del diagrama triangular considerado. Es decir que:

$$\lambda_{ij}^a \lambda_{jk}^b \lambda_{ki}^c .$$

En general se debe sumar sobre todos los diagramas que posean el mismo estado inicial y final, por lo que en virtud de la ecuación (3.13) existirá un factor global en el cálculo de la amplitud invariante de cada posible diagrama que contribuya a la anomalía triangular de la forma:

$$\sum_f v_f^2 a_f \text{Tr} [\{T^c, T^c\} T^a] = \sum_f v_f^2 a_f \text{Tr} [T^a \{T^b, T^c\}] , \quad (3.14)$$

donde $T^i = \frac{1}{2}\lambda^i$. Los factores v_f y a_f dan cuenta del acoplamiento vectorial-axial de los fermiones con los bosones de gauge de las patas externas del diagrama triangular. En el caso de QCD el factor $a_f = 0$, por lo cual solo existiran acoplamientos de tipo vectorial entre los fermiones y los bosones de gauge, lo que conduce a que la anomalía asociada al diagrama triangular sea nula inmediatamente. Sin embargo también podrían existir diagramas de anomalías con los tres acoplamientos de tipo axial.

En general tenemos que para una partícula con acoplamiento izquierdo, la regla de Feynman está dada por

$$-ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} , \quad (3.15)$$

en tanto que para las interacciones que acoplan a la parte derecha, la regla de Feynman respectiva es:

$$-ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \frac{(1 + \gamma_5)}{2} . \quad (3.16)$$

De las expresiones anteriores, se puede observar que los acoplamientos izquierdos y derechos entran con diferente signo en la parte axial (proporcional a γ_5), por lo que la contribución de las partes izquierdas, típicamente, se cancela con la contribución de las partes derechas, tal como ocurre en el caso de QCD y QED, que acoplan con igual intensidad a las partes derechas e izquierdas de todas las partículas. Por otro lado, la interacción débil solamente acopla a la parte izquierda de los fermiones y por tanto no hay cancelación automática de las anomalías de los diagramas triangulares.

En general, podemos escribir un vértice de interacción en la forma:

$$-ig \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu (v_f - \gamma_5 a_f) . \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Para partículas izquierdas: } & a_f = \frac{1}{2}, \quad v_f = +\frac{1}{2}. \\ \text{Para partículas derechas: } & a_f = -\frac{1}{2}, \quad v_f = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si las componentes derechas e izquierdas están en la misma representación del grupo, se define la anomalía total en la forma:

$$A(L, R) = A_L^{abc} - A_R^{abc} \quad . \quad (3.18)$$

Donde las anomalías izquierdas y derechas ($A_{L,R}^{abc}$) presentes en el modelo están definidas en la forma:

$$A_{L(R)}^{abc} = \sum_f \text{Tr} [T_{L,R}^a \{T_{L,R}^b, T_{L,R}^c\}] \quad . \quad (3.19)$$

Para un modelo descrito bajo un grupo de simetría de gauge $SU(n) \times U(1)$, todas las anomalías del modelo pueden ser canceladas si se satisface que $A(L, R) = 0$. Podemos escribir la ecuación (3.19), expresando los generadores del grupo de gauge T^i , como operadores que actúan sobre una base de kets $|\Psi\rangle$, que representan los fermiones del ME o del modelo en consideración. Con lo anterior:

$$A_{L(R)}^{abc} = \sum_{\Psi} \langle \Psi | T_{L,R}^a \{T_{L,R}^b, T_{L,R}^c\} | \Psi \rangle \quad . \quad (3.20)$$

Podemos expresar el conjunto de fermiones del ME por $\{\Psi_i\}$ como la suma de los fermiones en los multipletes Ψ como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Psi = \cup_j \Psi_j \quad .$$

De esta manera, la suma sobre todos los fermiones la podemos expresar como una suma sobre todos los multipletes:

$$\sum_{\psi_i} = \sum_{\Psi} \sum_{\psi_i \in \Psi} \quad .$$

Con las anteriores definiciones, la ecuación (3.20) puede ser escrita en la forma:

$$A_{L(R)}^{abc} = \sum_{\Psi} \sum_{\Psi_i \in \Psi} \langle \Psi | T_{L,R}^a \{T_{L,R}^b, T_{L,R}^c\} | \Psi \rangle \quad .$$

Ahora, introduciendo el operador identidad sobre los fermiones de cada multiplete:

$$1_{d_{\Psi} \times d_{\Psi}} = \sum_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j| \quad . \quad (3.21)$$

La ecuación (3.20) se transforma en:

$$\begin{aligned} A_{L(R)}^{abc} &= \sum_{\Psi} \sum_{\Psi_i \in \Psi} \langle \Psi_i | T_{L,R}^a | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \{T_{L,R}^b, T_{L,R}^c\} | \Psi_i \rangle \\ &= \sum_{\Psi} \sum_{i,j} T_{i,j}^a \{T^b, T^c\}_{j,i} \quad . \end{aligned} \quad (3.22)$$

En la ecuación anterior, se ha cambiado de una suma sobre todos los fermiones a una suma sobre todos los multipletes del diagrama triangular, lo que resulta de gran importancia para la construcción de nuevos modelos, como los modelos más allá del ME, puesto que para que estas teorías sean renormalizables deben ser libres de anomalías.

Si el generador de un grupo T_{ij}^a se tiene que:

$$T_{ij}^a \rightarrow T_{ij}^a = Q_{\Psi}^a \delta_{ij} \ .$$

Lo anterior implica que el operador T_{ij}^a es proporcional a la identidad con carga única Q_{Ψ} para todo el multiplete Ψ . Con lo anterior en consideración la ecuación (3.22) se transforma en:

$$A^{abc} = \sum_{\Psi} \sum_i Q_{\Psi}^a \{T^b, T^c\}_{i,i} = \sum_{\Psi} Q_{\Psi}^a \text{Tr}_{\Psi} [\{T^b, T^c\}] \ . \quad (3.23)$$

Donde Tr_{Ψ} es la traza en la representación generada por los fermiones ψ_i en el multiplete Ψ_i y Q_{Ψ}^a es la carga abeliana del multiplete Ψ asociado al grupo de gauge $U(1)$. Si en la ecuación (3.23), todos los multipletes Ψ estan en la representación fundamental de $SU(n)$, es decir, los generadores T^i son matrices $n \times n$, se tiene que:

$$\text{Tr}_{\Psi} [\{T^b, T^c\}] = \frac{\delta^{ab}}{n} 1_{n \times n} + \underbrace{d^{abc} T^c}_{\text{suma sobre } c} \ . \quad (3.24)$$

Con lo anterior, la expresión (3.23) puede ser simplificada como:

$$A^{abc} = \delta^{ab} \sum_{\Psi} Q_{\Psi}^a \ , \quad (3.25)$$

donde se ha considerado el hecho que $\text{Tr}[1_{n \times n}] = n$ y que $\text{Tr}[T^i] = 0$. Los coeficientes d^{abc} son números reales y se anulan para el caso del grupo de gauge $SU(2)$. Ahora, si consideramos que los generadores T^b y T^c son diagonales, asociados a dos grupos abelianos $U(1)_b$ y $U(1)_c$:

$$T^b = Q_{\Psi}^a \delta_{il} \ , \quad T^c = Q_{\Psi}^a \delta_{lj} \ .$$

Podemos escribir la ecuación (3.23) en la forma:

$$A^{abc} = 2 \sum_{\Psi} Q_{\Psi}^a Q_{\Psi}^b Q_{\Psi}^c d_{\Psi} \ , \quad (3.26)$$

donde se ha considerado que la dimensión de la matriz identidad es del tamaño del multiplete Ψ y d_Ψ es la dimensión del multiplete correspondiente en la representación fundamental. Por otra parte, la ecuación (3.26) es usada en la evaluación de las anomalías quirales $U(1)^3$ y $U(1)_Y^2 \otimes U(1)'$, que con gran frecuencia aparecen en el análisis de cancelación de anomalías.

En general para grupos $SU(n)$ con $n \geq 3$, la ecuación (3.22) puede ser escrita como se sigue a continuación:

$$\begin{aligned}
A^{abc} &= \sum_{\Psi} \sum_{i,j} T_{i,j}^a \{T^b, T^c\}_{j,i} = \sum_{\Psi} \text{Tr} [T^a \{T^b, T^c\}] \\
&= \sum_{\Psi} \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^{bc}}{n} 1_{n \times n} + d^{bcd} T^d \right) T^a \right] = \sum_{\Psi} \text{Tr} [d^{bcd} T^d T^a] \\
&= \sum_{\Psi} d^{bcd} \text{Tr} [T^d T^a] = \sum_{\Psi} d^{abc} \quad . \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Esta cantidad se obtiene independientemente si los multipletes son derechos o izquierdos, por lo cual su diferencia es cero y la anomalía se cancela. Si se considera el caso en el que las patas externas de la anomalía triangular corresponden a bosones del grupo de gauge $SU(3)_C$, puesto que la interacción fuerte acopla de igual forma a sus partes derechas e izquierdas, la anomalía $A(R, L)$ es cancelada automáticamente, lo que no ocurre en el ME debido a que el grupo de gauge $SU(2)$ acopla de forma diferente los fermiones de quiralidad izquierda con respecto a los de quiralidad derecha. Cuando una interacción acopla igual a los multipletes derechos y a los izquierdos se dice que hay *simetría vectorial*, de lo contrario es una *simetría quiral*.

La ecuación (3.27), no resulta de gran interés en el ME por las consideraciones realizadas anteriormente, pero para modelos con simetrías de gauge extendidas como los modelos 331, la interacción electrodébil es descrita a través del grupo de gauge $SU(3)_L$, donde en general el acoplamiento a las partes derechas no es igual a las partes izquierdas, por lo cual no está garantizada la cancelación de la anomalía correspondiente. Para $n \geq 3$, cuando no existen partes derechas (o izquierdas), las anomalías pueden ser canceladas a través de las representaciones conjugadas.

Los generadores de los grupos de gauge $SU(n)$ satisfacen el álgebra de Lie:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad , \tag{3.28}$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo de gauge. Es posible construir una representación no equivalente para los generadores definidos como $\tilde{T}^a = -T^{a*}$, los cuales satisfacen el álgebra de Lie:

$$[-T^{a*}, -T^{b*}] = if^{abc}(-T^{c*}) \quad . \quad (3.29)$$

Esta representación no equivalente se denomina representación conjugada de $SU(n)$. Si reemplazamos el resultado anterior en la ecuación (3.22) tenemos que:

$$\begin{aligned} A_{conjugada}^{abc} &= \sum_{\bar{\Psi}} \text{Tr} \left[\tilde{T}^a \{ \tilde{T}^b, \tilde{T}^c \} \right] = \sum_{\bar{\Psi}} \text{Tr} \left[-T^{a*} \{ -T^{b*}, -T^{c*} \} \right] \\ &= \sum_{\bar{\Psi}} \text{Tr} \left[T^{a*} \{ T^{b*}, T^{c*} \} \right] = - \left(\sum_{\Psi} d^{abc} \right)^* = - \sum_{\bar{\Psi}} d^{abc} \quad , \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde hemos usado el hecho que d^{abc} es un número real. Con lo anterior se obtiene que:

$$A^{abc} + A_{conjugada}^{abc} = d^{abc} \left(\sum_{\Psi} 1 - \sum_{\bar{\Psi}} 1 \right) = d^{abc} (I - \bar{I}) = 0 \quad , \quad (3.31)$$

donde $I(\bar{I})$ representa el número de multipletes (antimultipletes). En las teorías quirales se debe tener el mismo número de fermiones en la representación normal como en la representación conjugada, a fin de que exista cancelación de anomalías y la teoría sea renormalizable, como es el caso de los modelos 331. En el apéndice A, se detalla la forma en la que es calculada la anomalía quiral $[SU(3)_C]^2 U(1)_X$ para el modelo 331 con $\beta = \sqrt{3}$. Las demás anomalías quirales del modelo, $[SU(3)_L]^2 U(1)_X$, $[Grav]^2 U(1)_X$, $[U(1)_X]^3$ y $[SU(3)_L]^3$ son calculadas de forma equivalente.

Capítulo 4

Modelo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ con $\beta = \sqrt{3}$

Los modelos 331 están basados en el grupo de gauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ y representan una extensión al grupo de simetría gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ del ME, donde el sector electrodébil del ME $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es extendido al grupo de simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, introduciendo una nueva carga X . Como en el ME, el grupo de color $SU(3)_C$ es vectorial (libre de anomalías); sin embargo, a diferencia de este, los quarks (tripletes de color) y leptones izquierdos (singletes de color) transforman como las representaciones no equivalentes de $SU(3)_L$, 3 y 3^* .

Dos clases de modelos pueden aparecer en el estudio de los modelos 331, a fin de que exista cancelación de anomalías quirales y la teoría sea renormalizable. Por una parte los modelos universales de una familia donde las anomalías se cancelan en cada familia como en el ME, y por otra parte, los modelos no universales en los cuales la cancelación de anomalías se da por la mezcla entre las diferentes familias del ME.

Dado que los modelos 331 deben ser compatibles con el ME, es necesario generar el subgrupo $U(1)_Q$ a partir del grupo de gauge $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, o equivalentemente, obtener una representación de la carga dentro de este grupo extendido. De esta manera, para los modelos 331 el operador de carga eléctrica más general posible en el sector electrodébil extendido es definido como:

$$Q = \alpha T_{L3} + \beta T_{L8} + X I_3, \quad (4.1)$$

donde $T_a = \lambda_a/2$, siendo λ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) las matrices de Gell-Mann de $SU(3)_L$ normalizadas como $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$. $I_3 = \text{Diag}(1, 1, 1)$ es la diagonal de la matriz identidad de dimensión 3×3 , X es el número cuántico del grupo $U(1)_X$, que puede ser obtenido a partir de la cancelación de anomalías y β es un parámetro libre que puede ser fijado de acuerdo a la carga eléctrica del contenido fermiónico del modelo, por lo

que en principio pueden construirse infinitos modelos 331 [24, 25, 27, 32]. En nuestro caso, el parámetro β está definido como $\beta = \frac{2b}{\sqrt{3}}$. Si en el operador de carga (4.1) se considera que $\alpha = 1$, el grupo de isospín de $SU(2)_L$ del ME está contenido en el grupo $SU(3)_L$.

Tomando en consideración la forma matricial de las matrices de Gell-Mann y que $\alpha = 1$, el operador de carga eléctrica Q en la representación $\mathbf{3}$ puede ser escrito como (Ver Apéndice B):

$$Q[3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{3}} + X \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Tras implementar el principio gauge en este modelo, sabemos que a fin de preservar la invariancia de gauge local, es necesaria la inclusión de los 8 campos de gauge A_μ^α de $SU(3)_L$, los cuales transforman de acuerdo a la representación adjunta $3 \otimes 3^*$ en la forma [24, 25]:

$$A_\mu = \sum_\alpha \lambda_\alpha A_\mu^\alpha = \sqrt{2} \begin{pmatrix} D_{1\mu}^0 & W_\mu^+ & K_\mu^{(b+1/2)} \\ W_\mu^- & D_{2\mu}^0 & K_\mu^{(b-1/2)} \\ K_\mu^{-(b+1/2)} & K_\mu^{-(b-1/2)} & D_{3\mu}^0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

donde $D_{1\mu}^0 = A_\mu^3/\sqrt{2} + A_\mu^8/\sqrt{6}$, $D_{2\mu}^0 = -A_\mu^3/\sqrt{2} + A_\mu^8/\sqrt{6}$, y $D_{3\mu}^0 = -2A_\mu^8/\sqrt{6}$. Los índices superiores de los bosones de gauge en la ecuación (4.3) representan la carga eléctrica de las partículas, siendo algunas de ellas funciones del parámetro b [33].

Se han estudiado ampliamente los modelos 331 para $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($b = 1/2$) sin la presencia de partículas con carga exótica [24, 25]; sin embargo, para el caso de $\beta = \sqrt{3}$ ($b = 3/2$), solamente se ha estudiado el modelo mínimo, el cual no contiene leptones exóticos cargados ni neutrinos derechos [20, 21]. Los modelos 331 con $\beta = \sqrt{3}$ son de gran interés teórico y experimental, ya que permiten explicar la existencia de las tres familias de fermiones a través de la cancelación de anomalías en modelos no unifamiliares de fermiones del ME, lo que hace que sea de interés para el estudio de la fenomenología de la física del sabor.

4.1. El Modelo Mínimo

Pleitez y Frampton propusieron los modelos no universales 331 [20, 21] como ejemplos de extensiones del sector electrodébil con violación del número leptónico, donde el número de familias está determinado por la cancelación de anomalías. En la literatura existen muchos ejemplos de modelos sin cargas eléctricas exóticas, estos modelos han

sido adecuadamente clasificados y su fenomenología es bien conocida [24, 25, 26]. El modelo original de Pleitez y Frampton tiene cargas eléctricas exóticas en el sector de quarks y no en el sector leptónico y corresponde a lo que se conoce en la literatura como el modelo con $\beta = \sqrt{3}$ [34].

En las referencias [21, 23], se muestra que para $b = 3/2$ (i.e., $\beta = \sqrt{3}$), la siguiente estructura fermiónica de quiralidad izquierda es libre de todas las anomalías de gauge presentes en el modelo 331: $\psi_{iL}^T = (l^-, \nu_l^0, l^+)_L \sim (1, 3^*, 0)$, $Q_{iL}^T = (u_i, d_i, X_i)_L \sim (3, 3, -1/3)$, $Q_{3L}^T = (d_3, u_3, Y) \sim (3, 3^*, 2/3)$; donde $l = e, \mu, \tau$ corresponde al índice de familia leptónica, $i = 1, 2$ para las dos primeras familias de quarks, y los números cuánticos después de la tilde (\sim) cuentan para la representación 3-3-1. Los campos de quiralidad derecha son: $u_{aL}^c \sim (3^*, 1, -2/3)$, $d_{aL}^c \sim (3^*, 1, 1/3)$, $X_{iL}^c \sim (3^*, 1, 4/3)$ y $Y_L^c \sim (3^*, 1, -5/3)$, donde $a = 1, 2, 3$ es el índice de familia de quarks, y se presentan tres quarks exóticos con cargas eléctricas: $-4/3$ y $5/3$ respectivamente. Esta versión es el denominado *minimal model* en la literatura, puesto que no contiene en su estructura leptones exóticos, incluyendo posibles neutrinos de quiralidad derecha.

4.2. Generaciones de Leptones y Quarks

Partiendo de la forma del operador de carga para los modelos con $\beta = \sqrt{3}$ en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$, se calcularon los posibles multipletes de quarks y leptones para diferentes valores del número cuántico de hipercarga X del operador de carga (Ver Apéndice C), a través de los cuales se construyeron una serie de conjuntos completos de leptones S_{Li} y de quarks S_{Qi} , que contienen tripletes (anti-tripletes) y singletes de $SU(3)$. Estas series deben contener al menos una generación de fermiones del ME. De la ecuación (4.1), para $\beta = \sqrt{3}$, las cargas eléctricas de los diferentes tripletes en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$ son:

$$\begin{aligned} Q_{\text{QED}}(\mathbf{3}) &= \text{Diag}(1 + X, X, -1 + X) \\ Q_{\text{QED}}(\mathbf{3}^*) &= \text{Diag}(-1 + X, X, 1 + X) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las expresiones generales para las cargas del Z' , considerando que el ángulo de mezcla $Z - Z'$ es igual a cero se detallan en el Apéndice D. Para los campos del ME contenidos en las series completas de fermiones: $S_{L1}, S_{L2}, S_{L3}, S_{Q1}$ y S_{Q2} , las cargas del Z' son mostradas en las tablas 4.1-4.5, respectivamente.

- Generación leptónica $S_{L1} = [(\nu_e^0, e^-, E_2^{--}) \oplus e^+ \oplus E_2^{++}]_L$ con números cuánticos $(1, 3, -1)$; $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$ respectivamente. Las cargas del Z' para los campos del ME se muestran en la tabla 4.1.

$\ell = (\nu_L, e_L)^T \subset 3, e_R \subset 1$ (como en S_{L1})		
Campos	$g_{Z'}\epsilon_L^{Z'}$	$g_{Z'}\epsilon_R^{Z'}$
ν_e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{2\cos^2\theta_W - 3}{\sqrt{3(1-4\sin^2\theta_W)}}$	0
e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{2\cos^2\theta_W - 3}{\sqrt{3(1-4\sin^2\theta_W)}}$	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{3}\sin^2\theta_W}{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}$

Tabla 4.1: Cargas quirales del Z' para leptones del ME y neutrinos de quiralidad derecha contenidos en S_{L1} . θ_W es el ángulo de mezcla electrodébil (Ángulo de Weinberg)

- Serie $S_{L2} = [(e^-, \nu_e^0, E_1^+) \oplus e^+ \oplus E_1^-]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 0)$; $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$, respectivamente. Las cargas del Z' para los campos del ME se muestran en la tabla 4.2.

$\ell = (\nu_L, e_L)^T \subset 3^*, e_R \subset 1$ (como en S_{L2})		
Campos	$g_{Z'}\epsilon_L^{Z'}$	$g_{Z'}\epsilon_R^{Z'}$
ν_e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}{2\sqrt{3}}$	0
e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{3}\sin^2\theta_W}{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}$

Tabla 4.2: Cargas quirales del Z' para leptones del ME y neutrinos de quiralidad derecha contenidos en S_{L2}

- Serie $S_{L3} = [(e^-, \nu_e^0, e^+)]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 0)$. Las cargas del Z' para los campos del ME se muestran en la tabla 4.3.

$\ell = (\nu_L, e_L)^T, e_R \subset 3^*$ (como en S_{L3})		
Campos	$g_{Z'}\epsilon_L^{Z'}$	$g_{Z'}\epsilon_R^{Z'}$
ν_e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}{2\sqrt{3}}$	0
e	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{g_L}{\cos\theta_W} \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta_W}}{\sqrt{3}}$

Tabla 4.3: Cargas quirales del Z' para leptones del ME y neutrinos de quiralidad derecha contenidos en S_{L3}

- Serie $S_{Q1} = [(d, u, Q_1^{5/3}) \oplus u^c \oplus d^c \oplus Q_1^c]_L$ con números cuánticos $(3, 3^*, 2/3)$; $(3^*, 1, -2/3)$; $(3^*, 1, 1/3)$ y $(3^*, 1, -5/3)$, respectivamente. Las cargas del Z' para los campos del ME se muestran en la tabla 4.4.

$q = (u_L, d_L)^T \subset 3^*, u_R, d_R \subset 1$ (como en S_{Q1})		
Campos	$g_{Z'} \epsilon_L^{Z'}$	$g_{Z'} \epsilon_R^{Z'}$
u	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{1}{2\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$	$-\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{2\sin^2 \theta_W}{\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$
d	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{1}{2\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{\sin^2 \theta_W}{\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$

Tabla 4.4: Cargas quirales del Z' para quarks del ME contenidos en S_{Q1}

- Serie $S_{Q2} = [(u, d, Q_2^{-4/3}) \oplus u^c \oplus d^c \oplus Q_2^c]_L$ con números cuánticos $(3, 3, -1/3)$; $(3^*, 1, -2/3)$; $(3^*, 1, 1/3)$ y $(3^*, 1, 4/3)$, respectivamente. Las cargas del Z' para los campos del ME se muestran en la tabla 4.5.

$q = (u_L, d_L)^T \subset 3, u_R, d_R \subset 1$ (como en S_{Q2})		
Campos	$g_{Z'} \epsilon_L^{Z'}$	$g_{Z'} \epsilon_R^{Z'}$
u	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{1-2\sin^2 \theta_W}{2\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$	$-\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{2\sin^2 \theta_W}{\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$
d	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{1-2\sin^2 \theta_W}{2\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$	$\frac{g_L}{\cos \theta_W} \frac{\sin^2 \theta_W}{\sqrt{3(1-4\sin^2 \theta)}}$

Tabla 4.5: Cargas quirales del Z' para quarks del ME contenidos en S_{Q2}

Con el objeto de cancelar anomalías y que la teoría sea renormalizable, es importante introducir tripletes y anti-tripletes de leptones exóticos; por ejemplo, $S_{E1} = [(N_1^0, E_4^+, E_3^{++}) \oplus E_4^- \oplus E_3^{--}]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 1)$; $(1, 1, -1)$ y $(1, 1, -2)$, respectivamente. En este trabajo no se reportan las cargas del Z' asociadas a los campos fermiónicos exóticos, puesto que se asume que la masa de dichos campos es muy grande.

Por otro lado, a partir de los multipletes que pueden ser construidos para $\beta = \sqrt{3}$, se tienen series de leptones exóticos, como la serie $S_{E2} = [(E_5^+, N_2^0, E_6^-) \oplus E_5^- \oplus E_6^+]_L$ con números cuánticos $(1, 3, 0)$; $(1, 1, -1)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente. Una serie más reducida (económica) es $S_{E3} = [(E_5^+, N_2^0, E_5^-)]$, la cual presenta idénticas contribuciones a las anomalías del modelo como la serie S_{E2} , pero diferente carga del Z' . Sin embargo, estos detalles no resultan de interés para la fenomenología del modelo a bajas energías, por lo que no se incluye S_{E3} en la Tabla 4.6.

4.3. Series irreducibles libres de anomalías y construcción de modelos

La Tabla 4.6 muestra las contribuciones a las anomalías de cada serie completa de fermiones construidas en el apartado 4.2 para los modelos con $\beta = \sqrt{3}$, las cuales son calculadas a partir del formalismo presentado en el capítulo 3. En el Apéndice 1 se detallan los cálculos respectivos. A partir de esta tabla, es posible encontrar conjuntos irreducibles libres de anomalías (CLA) [26], los cuales son mostrados en la Tabla 4.7. Para la cancelación de anomalías, se procede a sumar los elementos de cada una de las columnas de la Tabla 4.6 para cada uno de los CLA de la Tabla 4.7 (Ver Apéndice A). Los CLA irreducibles Q_i^I , Q_i^{II} y Q_i^{III} relacionados en la Tabla 4.7 corresponden a conjuntos de fermiones con una familia de quarks, dos familias de quarks o tres familias de quarks, respectivamente. Estos conjuntos se pueden combinar para construir modelos de tres familias como se muestra en la Tabla 4.8. Existen 33 modelos diferentes (sin considerar todos los posibles “embeddings” o arreglos). Estos modelos también se pueden ampliar agregando conjuntos de leptones vector-like, L_i , indicados en la segunda columna de la Tabla 4.7.

Para ejemplificar las posibles “embeddings”, mostramos algunos casos en Tabla 4.10. La elección de los modelos relacionados en la Tabla 4.10 muestra cómo la fenomenología depende de los fermiones del ME escogidos en el modelo. Por ejemplo en el caso de M10, el “embedding” determina si está fuertemente acoplado. Se eligió el modelo M17 porque tenía varios “embeddings”. El modelo M3 corresponde al modelo “minimal” descrito en la sección 4.1. Por otro lado, el modelo M4 es similar al modelo M3, con la diferencia de que este modelo es no universal en el sector leptónico.

Anomalías	S_{L1}	S_{L2}	S_{L3}	S_{Q1}	S_{Q2}	S_{E1}	S_{E2}
$[SU(3)_C]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0	0
$[SU(3)_L]^2 U(1)_X$	-1	0	0	2	-1	1	0
$[\text{Grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	6	0	0	-12	6	-6	0
$[SU(3)_L]^3$	1	-1	-1	-3	3	-1	1

Tabla 4.6: Contribución a las anomalías del modelo para cada familia de quarks S_{Q_i} , leptones S_{L_i} y leptones exóticos S_{E_i} , de los modelos 331 con $\beta = \sqrt{3}$.

i	Vector-like lepton set (L_i)	One quark set (Q_i^I)	Two quarks set (Q_i^{II})	Three quarks set (Q_i^{III})
1	$S_{E2} + S_{L2}$	$S_{E2} + 2S_{L1} + S_{Q1}$	$S_{L1} + S_{L2} + S_{Q1} + S_{Q2}$	$3S_{L1} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
2	$S_{E1} + S_{L1}$	$S_{E1} + 2S_{L2} + S_{Q2}$	$S_{L1} + S_{L3} + S_{Q1} + S_{Q2}$	$3S_{L2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
3	$S_{E2} + S_{L3}$	$S_{E1} + S_{L2} + S_{L3} + S_{Q2}$		$3S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
4		$S_{E1} + 2S_{L3} + S_{Q2}$		$2S_{L2} + S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
5				$S_{L2} + 2S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$

Tabla 4.7: CLAs para $\beta = \sqrt{3}$. Se muestra en esta tabla, la clasificación de los CLAs de acuerdo con el contenido de familias de quarks, i.e., Q_i^I , Q_i^{II} , y Q_i^{III} . Combinaciones de estos conjuntos con tres familias de quarks y leptones del ME pueden ser considerados como modelos 331

	Modelos	
M1	Q_1^{III}	$3S_{L1} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M2	Q_2^{III}	$3S_{L2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M3	Q_3^{III}	$3S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M4	Q_4^{III}	$2S_{L2} + S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M5	Q_5^{III}	$S_{L2} + 2S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M6	$Q_1^{II} + Q_1^I$	$3S_{L1} + S_{L2} + S_{E2} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M7	$Q_1^{II} + Q_2^I$	$S_{L1} + 3S_{L2} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M8	$Q_1^{II} + Q_3^I$	$S_{L1} + 2S_{L2} + S_{L3} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M9	$Q_1^{II} + Q_4^I$	$S_{L1} + S_{L2} + 2S_{L3} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M10	$Q_2^{II} + Q_1^I$	$3S_{L1} + S_{L3} + S_{E2} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M11	$Q_2^{II} + Q_2^I$	$S_{L1} + 2S_{L2} + S_{L3} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M12	$Q_2^{II} + Q_3^I$	$S_{L1} + S_{L2} + 2S_{L3} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M13	$Q_2^{II} + Q_4^I$	$S_{L1} + 3S_{L3} + S_{E1} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M14	$Q_1^I + Q_2^I + Q_3^I$	$2S_{L1} + 3S_{L2} + S_{L3} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M15	$Q_1^I + Q_2^I + Q_4^I$	$2S_{L1} + 2S_{L2} + 2S_{L3} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M16	$Q_1^I + Q_3^I + Q_4^I$	$2S_{L1} + S_{L2} + 3S_{L3} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M17	$Q_2^I + Q_3^I + Q_4^I$	$3S_{L2} + 3S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M18	$3Q_1^I$	$6S_{L1} + 3S_{E2} + 3S_{Q1}$
M19	$2Q_1^I + Q_2^I$	$4S_{L1} + 2S_{L2} + 2S_{E2} + S_{E1} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M20	$2Q_1^I + Q_3^I$	$4S_{L1} + S_{L2} + S_{L3} + S_{E1} + 2S_{E2} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M21	$2Q_1^I + Q_4^I$	$4S_{L1} + 2S_{L3} + S_{E1} + 2S_{E2} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
M22	$3Q_2^I$	$6S_{L2} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M23	$2Q_2^I + Q_1^I$	$2S_{L1} + 4S_{L2} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M24	$2Q_2^I + Q_3^I$	$5S_{L2} + S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M25	$2Q_2^I + Q_4^I$	$4S_{L2} + 2S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M26	$3Q_3^I$	$3S_{L2} + 3S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M27	$2Q_3^I + Q_1^I$	$2S_{L1} + 2S_{L2} + 2S_{L3} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M28	$2Q_3^I + Q_2^I$	$4S_{L2} + 2S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M29	$2Q_3^I + Q_4^I$	$2S_{L2} + 4S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M30	$3Q_4^I$	$6S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M31	$2Q_4^I + Q_1^I$	$2S_{L1} + 4S_{L3} + 2S_{E1} + S_{E2} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$
M32	$2Q_4^I + Q_2^I$	$2S_{L2} + 4S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$
M33	$2Q_4^I + Q_3^I$	$S_{L2} + 5S_{L3} + 3S_{E1} + 3S_{Q2}$

Tabla 4.8: Modelos de tres familias contruidos de los conjuntos irreducibles libres de anomalías (Table 4.7). Es posible encontrar (trivialmente) nuevos modelos, adicionando series de leptones vector-like; sin embargo no consideramos estas posibilidades en nuestro conteo a menos que sean necesarias para completar las familias de leptones.

En general, nosotros encontramos tres posibles clases de modelos que se describen a continuación:

- Modelos completamente no universales: Esto sucede si integramos cada una de las familias del ME en conjuntos diferentes; por ejemplo, una de las posibles configuraciones para el modelo M12 de la Tabla 4.8 es colocar la primera familia de leptones en S_{L3} y las familias de leptones restantes en S_{L1} y S_{L2} respectivamente. Esta clase de modelos suele tener restricciones muy fuertes de FCNC y CLFV.
- Modelos Universales: En algunos de los CLA, hay configuraciones con las tres familias de leptones del ME en conjuntos con los mismos números cuánticos; lo mismo se aplica para las tres familias de quarks del ME. Por ejemplo, en el modelo M26 relacionado en la Tabla 4.8, es posible tener todas las tres familias del ME en los conjuntos $3S_{L3} + 3S_{Q2}$. Los campos restantes son considerados fermiones exóticos y son necesarios para la cancelación de anomalías.
- Los modelos 2 + 1: La mayoría de los CLA tienen configuraciones donde dos familias están en conjuntos con los mismos números cuánticos y la tercera familia está en un conjunto diferente. Para evitar las restricciones más fuertes de FCNC, es necesario que los dobletes izquierdos de las dos primeras familias de quarks del ME posean idénticos números cuánticos. Esta condición también es deseable para las familias de leptones, aunque algunos modelos podrían evitar las restricciones de FCNC sin satisfacer esta condición. Un ejemplo típico de estos modelos es el modelo mínimo de Pisano-Pleitez-Frampton [20, 21], $3S_{L3} + S_{Q1} + 2S_{Q2}$ (el modelo M3 en la Tabla 4.8). Este modelo es universal en el sector leptónico y no universal en el sector de quarks.

4.4. Restricciones de LHC y bajas energías

Para el análisis de restricciones se consideran los resultados obtenidos del experimento ATLAS del CERN, de resonancias dileptónicas de alta masa en el rango de masas entre los 250GeV a 6TeV, en colisiones protón-protón con una energía de centro de masa de $\sqrt{s} = 13$ TeV durante la segunda corrida del Large Hadron Collider (LHC) con una luminosidad integrada de 139 fb^{-1} [35]. Estos datos se obtuvieron de búsquedas de bosones Z' decayendo a dileptones. Se obtiene la cota inferior para la masa del Z' , de la intersección entre las predicciones teóricas para la sección transversal y la cota superior

reportada por el experimento ATLAS con un nivel de confianza del 95 %.

Utilizamos las expresiones dadas en las referencias Ref. [36, 37, 38] para calcular la sección transversal teórica. Suponemos que el ángulo de mezcla θ de $Z - Z'$ es igual a cero para estos límites (ver apéndice F). En la Tabla 4.9 se presentan las restricciones del LHC para algunos modelos. Es importante enfatizar que los leptones de la primera familia, es decir, el electrón y su neutrino, deben estar contenidos en S_{L3} ya que es el único escenario donde el electrón derecho tiene acoplamientos con el Z' menor que 1. Por otro lado, la Tabla 4.9 muestra la mejor opción para modelos con las dos primeras generaciones de leptones contenidas en el conjunto S_{L3} , como ocurre con el modelo mínimo (M3), en el que la primera y segunda familia de leptones tienen los mismos números cuánticos, lo cual evita posibles problemas de CLFV y FCNC. Para evitar restricciones más fuertes de FCNC en el sector de quarks, las cargas izquierdas de los quarks de las dos primeras familias deben ser idénticas [39]; esta condición es asumida con el objeto de calcular la cota inferior para la masa del Z' mostrada en la Tabla 4.9.

Particle content first generation	LHC-Lower limit in TeV
$S_{L3} + S_{Q1}$	7.3
$S_{L3} + S_{Q2}$	6.4

Tabla 4.9: Las familias de leptones S_{L1} y S_{L2} están fuertemente acopladas (Para S_{L1} y S_{L2} el doblete de leptones izquierdos ℓ y el singlete leptónico cargado derecho e_R tienen acoplamientos mayores que 1, respectivamente). Por lo tanto, sólo S_{L3} es fenomenológicamente viable para la primera familia. Dependiendo del contenido de quarks, es decir, S_{Q1} o S_{Q2} , tenemos dos restricciones diferentes.

Es importante enfatizar que los acoplamientos no universales del Z' modifican procesos tales como [40]: conversión coherente $\mu - e$ en un átomo muónico, mezclas $K^0 - \bar{K}^0$ y $B - \bar{B}$, ϵ y ϵ'/ϵ , desintegraciones leptónicas y semileptónicas (por ejemplo, $\mu \rightarrow e\gamma$) que, si se observa en el futuro, los modelos no universales podrían ser favorecidos sobre los modelos universales. Para modelos con acoplamientos del bosón Z' diferentes a la tercera familia, existen diferentes predicciones para los anchos de decaimiento $B(t \rightarrow Hu)$ y $B(t \rightarrow Hc)$. Estas predicciones están fuertemente suprimidas por los colisionadores [41].

En la Tabla 4.10, SC significa fuertemente acoplado, indicando que en los conjuntos S_{L1} y S_{L2} , el acoplamiento del electrón derecho es mayor que uno, lo que impone fuertes restricciones en el colisionador. Por otro lado, a pesar de que existan acoplamientos del Z' mayores que uno con los campos fermiónicos de la primera generación del ME, estos se encuentran fuertemente suprimidos por los colisionadores [36]. Si embargo, los

modelos fuertemente acoplados resultan de gran interés en varias aproximaciones fenomenológicas [39, 42]; por esta razón, es importante darse cuenta de la existencia de estos modelos, que naturalmente aparecen en modelos 331 con grandes valores del parámetro β de la teoría.

En relación a los límites sobre partículas exóticas, las restricciones sobre la masa de un leptón pesado secuencial se encuentran por encima de los 100 GeV [43]. Para los quarks exóticos t' y b' , los rangos de masa permitidos están por encima de los 1370 GeV y 1570 GeV, respectivamente [43]. Las restricciones sobre campos con cargas eléctricas exóticas son más débiles, puesto que los algoritmos de identificación asumen que las cargas son proporcionales a la carga del electrón [10].

Model	j	SM Lepton Embeddings	Universal	2 + 1	Quark Configuration	LHC-Lower limit
$M3 = Q_3^H$ (Minimal)	-	$[3S_{L3}^{\ell+e^+}]$	✓	×	$2S_{Q2} + S_{Q1}$	6.4 TeV
$M4 = Q_4^H$	-	$[2S_{L2}^{\ell+e^+} + S_{L3}^{\ell+e^+}]$	×	✓	$2S_{Q2} + S_{Q1}$	6.4 TeV
$M6 = (Q_1^I + Q_2^H)^j$	1	$[3S_{L1}^{\ell+e^+}] + S_{L2} + S_{E2}$	✓	×	$2S_{Q1} + S_{Q2}$	SC
	2	$[2S_{L1}^{\ell+e^+} + S_{L2}^{\ell+e^+}] + S_{L1} + S_{E2}$	×	✓	$2S_{Q1} + S_{Q2}$	SC
$M17 = (Q_2^I + Q_3^I + Q_4^I)^j$	1	$[3S_{L2}^{\ell+e^+}] + 3S_{L3} + 3S_{E1}$	✓	×	$3S_{Q2}$	SC
	2	$[3S_{L3}^{\ell+e^+}] + 3S_{L2} + 3S_{E1}$	✓	×	$3S_{Q2}$	6.4 TeV
	3	$[2S_{L2}^{\ell+e^+} + S_{L3}^{\ell+e^+}] + S_{L2} + 2S_{L3} + 3S_{E1}$	×	✓	$3S_{Q2}$	6.4 TeV
	4	$[S_{L2}^{\ell+e^+} + 2S_{L3}^{\ell+e^+}] + 2S_{L2} + S_{L3} + 3S_{E1}$	×	✓	$3S_{Q2}$	6.4 TeV
$M10 = (Q_1^I + Q_2^H)^j$	1	$[3S_{L1}^{\ell+e^+}] + S_{L3} + S_{E2}$	✓	×	$2S_{Q1} + S_{Q2}$	SC
	2	$[2S_{L1}^{\ell+e^+} + S_{L3}^{\ell+e^+}] + S_{L1} + S_{E2}$	×	✓	$2S_{Q1} + S_{Q2}$	7.3 TeV

Tabla 4.10: “Embeddings” alternativos de los campos del ME para algunos de los modelos relacionados en la Tabla 4.8. Los conjuntos de leptones entre corchetes (azul) contienen los campos del modelo estándar. Los superíndices corresponden al contenido de partículas del ME, donde ℓ ($\bar{\ell}$) representa un doblete de leptones izquierdo contenido en un triplete de $SU(3)_L$ (antitriplete), y e^+ (e^-) es el leptón cargado derecho contenido en un triplete de $SU(3)_L$ (singlete). El símbolo ✓ significa que al menos dos (2+1) o tres familias (universales) tienen las mismas cargas bajo el grupo de simetría de gauge. La cruz × representa lo contrario. Las restricciones del LHC se obtienen de Tabla 4.9 para embeddings en los que podemos elegir las mismas cargas del Z' para las dos primeras familias, en caso contrario dejamos el espacio en blanco. Para evitar un modelo fuertemente acoplado en el sector leptónico, es necesario que la primera familia de leptones (electrón y neutrino electrónico) esté contenida en S_{L3} . Esta característica puede ser útil para distinguir entre las diferentes embeddings. Los embeddings también definen el contenido de partículas exóticas en cada caso [44].

La presencia de leptones exóticos doblemente cargados puede generar nuevos canales de desintegración en colisiones protón-protón a muy altas energías. En la Figura (4.1), el diagrama de Feynman para el proceso $q\bar{q} \rightarrow Z' \rightarrow E^{++}E^{--} \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma \rightarrow \ell^+ \ell\ell^- \mu^+\mu^- (\tau^+\tau^-)$, genera cuatro leptones en el estado final (el leptón exótico doblemente cargado aparece en S_{L1} , que acopla fuertemente el Z' ; por esta razón, para evitar restricciones del colisionador, nos restringimos a leptones de la segunda o tercera familia). Por otro lado, los quarks exóticos modifican la mezcla $K^0 - \bar{K}^0$, como se muestra en la Figura (4.2). Los fermiones con cargas eléctricas exóticas pueden contribuir a

varios procesos; sin embargo, un estudio exhaustivo de estos procesos está más allá del propósito de este trabajo.

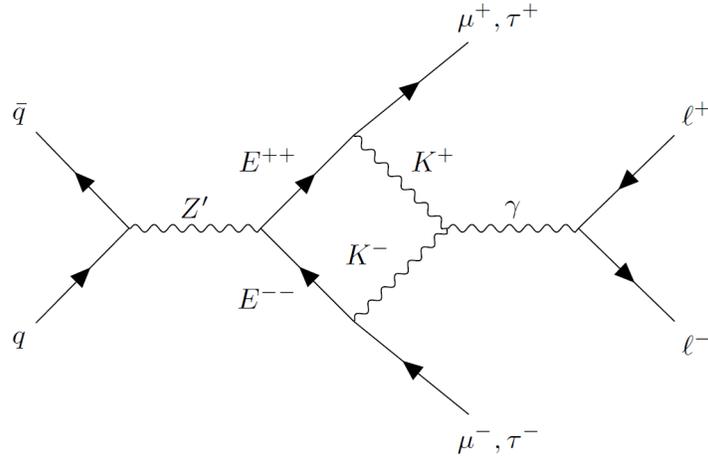


Figura 4.1: Contribución de leptones exóticos doblemente cargados al proceso $q\bar{q} \rightarrow Z' \rightarrow E^{++}E^{--} \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma \rightarrow \ell^+\ell^-\mu^+\mu^- (\tau^+\tau^-)$.

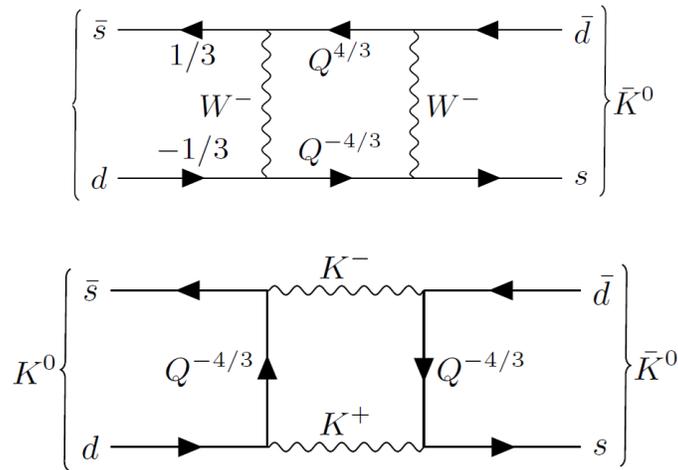


Figura 4.2: Contribución de los quarks exóticos a la mezcla $K^0 - \bar{K}^0$.

Capítulo 5

Resumen y Conclusiones

Dado que para los modelos 331, el valor absoluto del parámetro β debe ser menor que $\beta \lesssim \cot \theta_W = 1.8$ (para $\sin^2 \theta_W = 0.231$ en el esquema de renormalización del ME a la escala de energía del Z-polo), y que los valores de β están aún más limitados por el hecho de que las cargas de los bosones vectoriales son enteras, los posibles valores de este parámetro son reducidos a unos pocos casos. Para un modelo realista, el máximo valor posible corresponde a $\beta = \sqrt{3} \sim 1.73$. Este caso es gran importancia ya que contiene el modelo “minimal” de Pleitez-Frampton.

En este trabajo, se construyeron tres conjuntos de familias de leptones S_{Li} , dos familias de quarks, S_{Qi} y dos familias de leptones exóticos S_{Ei} , para los cuales calculamos su contribución a las anomalías del modelo 331. Como resultado de nuestro análisis, obtuvimos 14 CLA (Conjuntos libres de anomalías) irreducibles, a partir de los cuales construimos 33 modelos 331 no triviales (sin considerar los diferentes embeddings) con al menos tres quarks y tres familias de leptones para cada caso. Cada uno de estos embeddings constituye un modelo fenomenológicamente distinguible; sin embargo, limitamos nuestro análisis de los posibles embeddings a algunos casos.

Del mismo modo, del análisis desarrollado en el trabajo de los modelos 331 con $\beta = \sqrt{3}$, se reportan los acoplamientos de los campos del ME con el bosón Z' para todas las posibles familias de quarks y leptones, así como las cotas inferiores de la masa del Z' . Nosotros también analizamos las condiciones bajo las cuales los modelos reportados evitan FCNC y CLFV. Por otro lado, también se observó que los modelos fuertemente acoplados aparecen de forma natural y requieren de valores muy elevados para la masa Z' . Estos modelos fuertemente acoplados, pueden ser útiles en enfoques fenomenológicos específicos basados en modelos con fuerte dinámica. En el futuro sería necesario realizar un análisis detallado de cada modelo encontrado en el marco del trabajo; sin embargo, este análisis está más allá del alcance del presente trabajo de grado.

Apéndice A

Cálculo explícito de anomalías para $\beta = \sqrt{3}$

Para un modelo descrito bajo un grupo de simetría de gauge $SU(n) \times U(1)$, todas las anomalías del modelo pueden ser canceladas si se satisface que:

$$A_L^{abc} - A_R^{abc} = 0 \quad . \quad (\text{A.1})$$

Donde las anomalías izquierdas y derechas ($A_{L,R}^{abc}$) presentes en el modelo están definidas en la forma:

$$A_{L(R)}^{abc} = Tr_{\Psi_{L(R)}} [\{T^a, T^b\}T^c] \quad . \quad (\text{A.2})$$

Donde $\Psi_{L(R)}$ representa los multipletes izquierdos (derechos) del modelo y los coeficientes a, b y c es una combinación arbitraria de los generadores del grupo de simetría de gauge. Para este modelo extendido 331 con $\beta = \sqrt{3}$, consideramos el siguiente conjunto de anomalías quirales de la teoría: $[SU(3)_C]^2U(1)_X$, $[SU(3)_L]^2U(1)_X$, $[Grav]^2U(1)_X$, $[U(1)_X]^3$ y $[SU(3)_L]^3$.

A partir de la ecuación (A.2), podemos evaluar cada una de las anomalías anteriores para cada uno de los conjuntos cerrados descritos anteriormente. Como ejemplo de los cálculos realizados mostramos explícitamente los resultados obtenidos para la anomalía $[SU(3)_L]^2U(1)_X$ como se sigue a continuación:

$$\begin{aligned} A_L^{abc} &= \sum_{\Psi_L} Tr [\{T^a, T^b\}T^c] = \sum_{\Psi_L} Tr [\{T^a, T^b\}] Y_{\Psi} \\ &= \sum_{\Psi_L} Tr \left[\frac{1}{3} \delta^{ab} I + d^{abc} T^c \right] Y_{\Psi} = \frac{1}{3} \sum_{\Psi_L} Tr [I] \delta^{ab} Y_{\Psi} = \sum_{\Psi_L} \delta^{ab} Y_{\Psi} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

- $S_{L1} = [(\nu_e^0, e^-, E_2^{--}) \oplus e^+ \oplus E_2^{++}]_L$ con números cuánticos $(1, 3, -1); (1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = -1$
- $S_{L2} = [(e^-, \nu_e^0, E_1^+) \oplus e^+ \oplus E_1^-]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 0); (1, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = 0$
- $S_{L3} = [(e^-, \nu_e^0, e^+)]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 0)$. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = 0$
- $S_{Q1} = [(d, u, Q_2) \oplus u^c \oplus d^c \oplus Q_2^c]_L$ con números cuánticos $(3, 3^*, 2/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3)$ y $(3^*, 1, -5/3)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = \frac{2}{3}(3) = 2$
- $S_{Q2} = [(u, d, Q_1) \oplus u^c \oplus d^c \oplus Q_1^c]_L$ con números cuánticos $(3, 3, -1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3)$ y $(3^*, 1, 4/3)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = (-\frac{1}{3})(3) = -1$
- $S_{E1} = [(N_1^0, E_4^+, E_3^{++}) \oplus E_4^- \oplus E_3^{-}]_L$ con números cuánticos $(1, 3^*, 1); (1, 1, -1)$ y $(1, 1, -2)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = 1$
- $S_{E2} = [E_5^+, N_2^0, E_6^-] \oplus E_5^- \oplus E_6^+]_L$ con números cuánticos $(1, 3, 0); (1, 1, -1)$ y $(1, 1, 1)$ respectivamente. $A_L^{abc} = \sum_{\Psi_L} Y_{\Psi} = 0$

Donde se han tenido en consideración las identidades para los generadores de SU(N):

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{3}\delta^{ab}I + d^{abc}T^cT^c \quad ; \quad Tr(T^i) = 0 \quad .$$

A partir del desarrollo mostrado, encontramos la segunda línea de la Tabla (4.6):

Anomalías	S_{L1}	S_{L2}	S_{L3}	S_{Q1}	S_{Q2}	S_{E1}	S_{E2}
$[SU(3)_L]^2U(1)_X$	-1	0	0	2	-1	1	0

Procediendo de forma análoga para cada una de las cinco anomalías consideradas en el modelo 331, se construyó la Tabla (4.6) presentada en el capítulo 4.

Con el objeto de evidenciar la cancelación de anomalías, se muestra el proceso explícitamente para un CLA de cada uno los conjuntos L_i, Q_i^I, Q_i^{II} y Q_i^{III} relacionados en la Tabla (4.7).

Anomalías	S_{E2}	S_{L2}	$S_{E2} + S_{L2}$
$[SU(3)_C]^2U(1)_X$	0	0	0
$[SU(3)_L]^2U(1)_X$	0	0	0
$[\text{Grav}]^2U(1)_X$	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	0	0	0
$[SU(3)_L]^3$	1	-1	0

Anomalías	S_{E2}	S_{L1}	S_{Q1}	$S_{E2} + 2S_{L1} + S_{Q1}$
$[SU(3)_C]^2 U(1)_X$	0	0	0	0
$[SU(3)_L]^2 U(1)_X$	0	-1	2	0
$[\text{Grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	0	6	-12	0
$[SU(3)_L]^3$	1	1	-3	0

Anomalías	S_{L2}	S_{L1}	S_{Q1}	S_{Q2}	$S_{L1} + S_{L2} + S_{Q1} + S_{Q2}$
$[SU(3)_C]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0
$[SU(3)_L]^2 U(1)_X$	0	-1	2	-1	0
$[\text{Grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	0	6	-12	6	0
$[SU(3)_L]^3$	-1	1	-3	3	0

Anomalías	S_{L1}	S_{Q1}	S_{Q2}	$3S_{L1} + 2S_{Q1} + S_{Q2}$
$[SU(3)_C]^2 U(1)_X$	0	0	0	0
$[SU(3)_L]^2 U(1)_X$	-1	2	-1	0
$[\text{Grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	6	-12	6	0
$[SU(3)_L]^3$	1	-3	3	0

Apéndice B

Cálculo del operador de carga para $\beta = \sqrt{3}$

Teniendo en consideración la forma matricial de las matrices de Gell-Mann y que $\alpha = 1$, el operador de carga eléctrica Q en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$ puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 Q[\mathbf{3}] &= \alpha T_{L3} + \beta T_{L8} + XI_3 \quad , \quad Q[\mathbf{3}^*] = -\alpha T_{L3} - \beta T_{L8} + XI_3 \quad . \\
 Q[\mathbf{3}] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{3}} + X \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Si en la ecuación anterior tomamos el valor del parámetro $\beta = \sqrt{3}$, el operador de carga eléctrica Q en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$ puede ser escrito como:

$$Q[\mathbf{3}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + X & 0 \\ 0 & 0 & -1 + X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -1 + X \end{pmatrix} , \tag{B.2}$$

$$Q[\mathbf{3}^*] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + X & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + X & 0 \\ 0 & 0 & 1 + X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 + X \end{pmatrix} . \tag{B.3}$$

Apéndice C

Multipletes del modelo con $\beta = \sqrt{3}$

Para construir los diferentes múltipletes del modelo 331 con $\beta = \sqrt{3}$, se evalúa el operador de carga Q en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$, para diferentes valores del número cuántico de hipercarga X , de tal manera que se reproduzca el contenido de partículas del ME en las primeras dos componentes del triplete de $SU(3)_L$. Partiendo de lo anterior, los tripletes de quarks y leptones izquierdos de $SU(3)_L$ que pueden ser definidos para cada una de las familias del SM son:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ q \end{pmatrix}_L, \quad \chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ l \end{pmatrix}_L. \quad (\text{C.1})$$

El sector de quarks se comporta como un triplete bajo el grupo $SU(3)_C$, mientras que los leptones son singletes de color. Para simplificar la notación, el operador de carga Q en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\mathbf{3}^*$ puede ser escrito como $Q[\mathbf{3}] = \text{Diag}(1+x, x, -1+x)$ y $Q[\mathbf{3}^*] = \text{Diag}(-1+x, x, 1+x)$. Con lo anterior, a continuación se calculan los diferentes multipletes para $\beta = \sqrt{3}$ con números cuánticos $[SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_X]$.

▪ $X = 0$	→	$\Psi_L^T = (e^-, \nu_e, E_1^+)$	→	$(1, \mathbf{3}^*, 0)$
▪ $X = 0$	→	$\Psi_L^T = (e^-, \nu_e, e^+)$	→	$(1, \mathbf{3}^*, 0)$
▪ $X = 0$	→	$\Psi_L^T = (E_5^+, N_2^0, E_6^-)$	→	$(1, \mathbf{3}, 0)$
▪ $X = -1/3$	→	$\chi_L^T = (u, d, Q_1)$	→	$(3, \mathbf{3}, -1/3)$
▪ $X = 2/3$	→	$\chi_L^T = (d, u, Q_2)$	→	$(3, \mathbf{3}^*, 2/3)$
▪ $X = -1$	→	$\Psi_L^T = (\nu_e, e^-, E_2^{--})$	→	$(1, \mathbf{3}, -1)$
▪ $X = 1$	→	$\Psi_L^T = (N_1^0, E_3^+, E_4^{++})$	→	$(1, \mathbf{3}^*, 1)$

$$\begin{array}{llll}
\blacksquare X = 1/3 & \rightarrow & \chi_L^T = (u^c, d^c, Q_1^c) & \rightarrow & (3^*, 3^*, 1/3) \\
\blacksquare X = -2/3 & \rightarrow & \chi_L^T = (d^c, u^c, Q_2^c) & \rightarrow & (3^*, 3, -2/3)
\end{array}$$

Apéndice D

Cargas del Z' para un modelo 331 general

A bajas energías, el grupo de simetría de gauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ de los modelos 3-3-1, rompe espontáneamente a la teoría efectiva $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_{8L} \otimes U(1)_X \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Partiendo de las derivadas covariantes para corrientes neutras, se obtiene la siguiente densidad lagrangiana de interacción:

$$-\mathcal{L} \supset g_L J_{3L}^\mu A_{3L\mu} + g_L J_{8L}^\mu A_{8L\mu} + g_X J_X^\mu A_{X\mu}, \quad (\text{D.1})$$

la cual puede ser escrita de una forma más compacta como:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{NC} &= g_i J_{i\mu} A_i^\mu = g_j J_{j\mu} O_{jk} O_{kl}^T A_l^\mu, \\ &= \tilde{g}_k \tilde{J}_{k\mu} \tilde{A}_k^\mu, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

donde $\tilde{A}_k^\mu = O_{kl}^T A_l^\mu$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} (A_1^\mu, A_2^\mu) &= (A_{8L}^\mu, A_X^\mu) \quad , \\ (\tilde{A}_1^\mu, \tilde{A}_2^\mu) &= (B^\mu, Z'^\mu) \quad , \\ (g_1 J_1^\mu, g_2 J_2^\mu) &= (g_L A_{8L}^\mu, g_X A_X^\mu) \quad , \\ (\tilde{g}_1 \tilde{A}_1^\mu, \tilde{g}_2 \tilde{A}_2^\mu) &= (g_Y J_Y^\mu, g_{Z'} J_{Z'}^\mu) \quad . \end{aligned}$$

En el régimen de altas energías, la simetría es espontáneamente rota de acuerdo con el esquema de ruptura $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U_X(1) \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_{8L}(1) \otimes U_X(1) = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y(1) \otimes U'(1)$, donde los bosones asociados al grupo de gauge se obtienen de la transformación:

$$\begin{pmatrix} A_{3L} \\ B^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & O_{2 \times 2}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{3L} \\ A_{8L}^\mu \\ A_X^\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Seguidamente, la cadena de ruptura $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U_Y(1) \otimes U'(1) \rightarrow SU(3)_C \otimes U_{\text{QED}}(1)$, permite obtener los bosones de gauge de la teoría, como se muestra a continuación (siendo θ_W el ángulo de Weinberg):

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_W & \cos \theta_W & 0 \\ \cos \theta_W & -\sin \theta_W & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{3L} \\ B^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Donde se obtienen los campos correspondientes al ME A^μ y Z^μ , y un bosón vectorial pesado Z' . Procediendo de forma similar para las corrientes, y limitándonos a los campos sobre los que actúa la submatriz ortogonal $Q_{2 \times 2}$, de la expresión (D.2) se obtiene que $\tilde{g}_k \tilde{J}_k^\mu = g_j J_j^\mu O_{jk}$, es decir:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k \tilde{J}_{k\mu} &= (g_Y J_Y^\mu, g_{Z'} J_{Z'}^\mu) = (g_L J_{L8}^\mu, g_X J_X^\mu) \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}, \\ &= (g_L J_{L8}^\mu O_{11} + g_X J_X^\mu O_{21}, g_L J_{L8}^\mu O_{12} + g_X J_X^\mu O_{22}). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Donde la matriz ortogonal O tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

por lo cual podemos reescribir la ecuación (D.5) en la forma:

$$\begin{aligned} g_Y J_Y^\mu &= g_L J_{L8}^\mu \cos \omega + g_X J_X^\mu \sin \omega, \\ g_{Z'} J_{Z'}^\mu &= -g_L J_{L8}^\mu \sin \omega + g_X J_X^\mu \cos \omega. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

El operador de carga en una representación 3-dimensional esta dado como:

$$Q_{\text{QED}} = T_{L3} + \beta T_{L8} + X I_3, \quad (\text{D.8})$$

donde se identifica el operador de hipercarga Y como:

$$Y = \beta T_{L8} + X. \quad (\text{D.9})$$

De esta ecuación, es posible obtener una relación entre las corrientes (las corrientes son proporcionales a las cargas) en la forma:

$$J_Y^\mu = \beta J_{L8}^\mu + J_X^\mu. \quad (\text{D.10})$$

Comparando este resultado con (D.7) tenemos que:

$$\beta = \frac{g_L \cos \omega}{g_Y}, \quad 1 = \frac{g_X \sin \omega}{g_Y}. \quad (\text{D.11})$$

Ahora, teniendo en consideración que $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$, se obtiene que:

$$\left(\frac{\beta}{g_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{g_X}\right)^2 = \frac{1}{g_Y^2}. \quad (\text{D.12})$$

Para el ME, $g_L \approx 0.652$ y $g_Y = g_L \tan \theta_W$. Con estas equivalencias, podemos despejar g_X de la ecuación (D.12) en la forma:

$$g_X = \frac{g_L \tan \theta_W}{\sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \theta_W}}. \quad (\text{D.13})$$

Estas expresiones muestran que el parámetro β no puede tener un valor arbitrariamente grande debido a la restricción $\beta \lesssim \cot \theta_W$; Se debe tener cierto cuidado con esta aproximación, ya que se trata de una desigualdad que depende del esquema de renormalización. Con este resultado, tenemos que:

$$\cos \omega = \frac{\beta}{g_L} g_Y = \beta \tan \theta_W, \quad \sin \omega = \sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \theta_W}. \quad (\text{D.14})$$

De la ecuación (D.7) y los resultados mostrados en este apartado, las cargas del Z' son:

$$g_{Z'\epsilon_{Z'}} = -g_L T_{8L} \sin \omega + g_X X_X \cos \omega, \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} g_{Z'\epsilon_{Z'}} &= -g_L T_{L8} \sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \theta_W} + \beta \frac{g_L \tan^2 \theta_W X}{\sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \theta_W}} \\ &= g_L \left(-T_{L8} \tilde{\alpha} + \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X \right), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

donde $\tilde{\alpha} = \sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \theta_W} = \frac{1}{\cos \theta_W} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta_W}$ para $\beta = \sqrt{3}$.

Apéndice E

Cálculo de las cargas quirales

E.1. Cargas quirales en la representación 3

A continuación, se presentan las cargas del Z' para un conjunto de fermiones que representan el contenido de partículas de una generación de leptones o quarks, tanto para tripletes izquierdos de $SU(3)_L$, como de fermiones derechos en un singlete de $SU(3)_L$, a partir de las cuales se obtienen las tablas (4.1-4.5) mostradas en el capítulo 4. En general se tiene que:

$$g_{Z'\epsilon_L^{Z'}}(3) = g_L \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta\frac{\tan^2\theta_W}{\tilde{\alpha}}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta\frac{\tan^2\theta_W}{\tilde{\alpha}}X & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta\frac{\tan^2\theta_W}{\tilde{\alpha}}X \end{pmatrix},$$

$$g_{Z'\epsilon_R^{Z'}}(3) = g_L\beta\frac{\tan^2\theta_W}{\tilde{\alpha}}X_R. \quad (\text{E.1})$$

En la segunda expresión se inserta el subíndice R a la carga X del singlete derecho, para enfatizar que este difiere del número cuántico del triplete izquierdo de $SU(3)_L$, es decir, X . Si la carga conjugada del fermión derecho se identifica con la tercera componente de un triplete, tendremos que:

$$g_{Z'\epsilon_R^{Z'}}(3) = -g_L \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta\frac{\tan^2\theta_W}{\tilde{\alpha}}X \right). \quad (\text{E.2})$$

E.2. Cargas quirales en la representación 3^*

Con el fin de realizar la cancelación de anomalías de $SU(3)_L$, los tripletes deben ser puestos en la representación conjugada 3^* . En general, para cualquier conjunto de generadores T^a de una simetría $SU(N)$ con $N \leq 3$ existe otro conjunto de generadores

$-T^{a*}$, que satisfacen la misma álgebra de Lie como se muestra en la ecuación (3.29). Este conjunto de generadores conduce a la llamada representación conjugada de $SU(N)$. Con estos generadores, podemos construir operadores de carga y multipletes que contengan partículas del ME. Para comparar con la representación conjugada, utilizamos los proyectores:

$$p_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Estos proyectores no deben confundirse con los operadores de permutación, ya que el propósito de estos operadores es comparar solamente las dos primeras filas de los operadores de carga. \tilde{p}_{12} también permuta los dos primeros autovalores para hacer una comparación adecuada con el operador conjugado. Podemos obtener X^C , es decir, la carga del triplete 3^* en la representación conjugada, a partir de la ecuación:

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_{12} (T_{L3} + \beta T_{L8} + X I_3) \tilde{p}_{12}^T \\ &= p_{12} (-T_{L3} - \beta T_{L8} + X^C I_3) p_{12}^T, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

donde se observa que solamente los signos de los generadores de $SU(3)$ son cambiados.

Esta ecuación matricial es equivalente a un par de ecuaciones lineales acopladas. Estas ecuaciones tienen como solución: $X^C = \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}} + X\right) = (1 + X)$. A partir de un tratamiento equivalente se obtiene la representación conjugada de $T_{3L} - \beta T_{8L} + X^C$, que genera las mismas cargas eléctricas pero en diferente orden. Se verificó que ambos esquemas contribuyen de manera idéntica a las anomalías, mostrando el mismo contenido de partículas y modelos asociados. Para los tripletes izquierdos en la representación conjugada 3^* y fermiones derechos en un singlete de $SU(3)_L$, la carga del Z' se obtiene en la forma:

$$\begin{aligned} g_{Z'} \epsilon_L^{Z'}(3^*) &= g_L \begin{pmatrix} +\frac{1}{2\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X^C & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{2\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X^C & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X^C \end{pmatrix}, \\ g_{Z'} \epsilon_R^{Z'}(3^*) &= g_L \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X^C. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Si la carga conjugada del fermión derecho es identificado con la tercera componente de un triplete de $SU(3)_L$, la carga del Z' está dada como: $g_{Z'} \epsilon_R^{Z'} = -g_L \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\alpha} + \beta \frac{\tan^2 \theta_W}{\tilde{\alpha}} X^C\right)$.

Apéndice F

Z - Z' Mixing

El ángulo de mezcla θ entre Z y Z' se encuentra fuertemente restringido [45], i.e., $\theta < 10^{-3}$; sin embargo, en ciertos análisis fenomenológicos, sigue siendo útil desarrollar expresiones para los autoestados de masa en la forma:

$$\begin{aligned} Z_1^\mu &= Z^\mu \cos \theta + Z'^\mu \sin \theta, \\ Z_2^\mu &= -Z^\mu \sin \theta + Z'^\mu \cos \theta. \end{aligned} \tag{F.1}$$

En el régimen de bajas energías, Z_1 es identificado con el boson Z de la interacción electrodébil del Modelo Estándar. En orden de mantener invariante la densidad lagrangiana del modelo, esta rotación de los campos debe ser compensada por la correspondiente rotación de las corrientes en la forma:

$$\begin{aligned} g_1 J_1^\mu &= g_Z J_Z^\mu \cos \theta + g_{Z'} J_{Z'}^\mu \sin \theta, \\ g_2 J_2^\mu &= -g_Z J_Z^\mu \sin \theta + g_{Z'} J_{Z'}^\mu \cos \theta. \end{aligned} \tag{F.2}$$

A partir de las cuales obtenemos que:

$$\begin{aligned} g_1 Q_1 &= g_Z Q_Z \cos \theta + g_{Z'} Q_{Z'} \sin \theta, \\ g_2 Q_2 &= -g_Z Q_Z \sin \theta + g_{Z'} Q_{Z'} \cos \theta. \end{aligned} \tag{F.3}$$

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579-588 (1961) doi:10.1016/0029-5582(61)90469-2
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264-1266 (1967) doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264
- [3] E. S. Abers and B. W. Lee, Phys. Rept. **9**, 1-141 (1973) doi:10.1016/0370-1573(73)90027-6
- [4] S. L. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani, física Rev. D **2** (1970), 1285-1292 doi:10.1103/PhysRevD.2.1285
- [5] M. Gell-Mann, física Letón. **8** (1964), 214-215 doi:10.1016/S0031-9163(64)92001-3
- [6] P. Langacker, física representante **72** (1981), 185 doi:10.1016/0370-1573(81)90059-4
- [7] P. Fayet, [arXiv:hep-ph/9812300 [hep-ph]].
- [8] C. A. de Sousa Pires and O. P. Ravinez, Phys. Rev. D **58**, 035008 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.58.035008 [arXiv:hep-ph/9803409 [hep-ph]].
- [9] P. V. Dong and H. N. Long, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6677-6692 (2006) doi:10.1142/S0217751X06035191 [arXiv:hep-ph/0507155 [hep-ph]].
- [10] D. Romero Abad, J. R. Portales and E. Ramirez Barreto, Pramana **94**, no.1, 84 (2020) doi:10.1007/s12043-020-01955-4 [arXiv:2003.01057 [hep-ph]].
- [11] F. Pisano, Mod. Phys. Lett. A **11**, 2639-2647 (1996) doi:10.1142/S0217732396002630 [arXiv:hep-ph/9609358 [hep-ph]].
- [12] A. Doff and F. Pisano, Mod. Phys. Lett. A **14**, 1133-1142 (1999) doi:10.1142/S0217732399001218 [arXiv:hep-ph/9812303 [hep-ph]].
- [13] C. A. de Sousa Pires, Phys. Rev. D **60**, 075013 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.60.075013 [arXiv:hep-ph/9902406 [hep-ph]].

- [14] A. E. Cárcamo Hernández and R. Martínez, PoS **PLANCK2015**, 023 (2015) [arXiv:1511.07997 [hep-ph]].
- [15] C. Csáki and P. Tanedo, doi:10.5170/CERN-2015-004.169 [arXiv:1602.04228 [hep-ph]].
- [16] P. P. Novichkov, J. T. Penedo and S. T. Petcov, JHEP **04**, 206 (2021) doi:10.1007/JHEP04(2021)206 [arXiv:2102.07488 [hep-ph]].
- [17] W. Rodejohann and U. Saldaña-Salazar, JHEP **07**, 036 (2019) doi:10.1007/JHEP07(2019)036 [arXiv:1903.00983 [hep-ph]].
- [18] Y. Giraldo and E. Rojas, [arXiv:1511.08858 [hep-ph]].
- [19] S. M. Bilenky, C. Giunti y W. Grimus, prog. Parte. Núcleo física **43** (1999), 1-86 doi:10.1016/S0146-6410(99)00092-7 [arXiv:hep-ph/9812360 [hep-ph]].
- [20] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **46**, 410-417 (1992) doi:10.1103/PhysRevD.46.410 [arXiv:hep-ph/9206242 [hep-ph]].
- [21] P. H. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69**, 2889-2891 (1992) doi:10.1103/PhysRevLett.69.2889
- [22] R. Foot, H. N. Long and T. A. Tran, Phys. Rev. D **50**, no.1, R34-R38 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.50.R34 [arXiv:hep-ph/9402243 [hep-ph]].
- [23] J. W. F. Valle and M. Singer, Phys. Rev. D **28**, 540 (1983) doi:10.1103/PhysRevD.28.540
- [24] W. A. Ponce, J. B. Florez and L. A. Sanchez, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 643-660 (2002) doi:10.1142/S0217751X02005815 [arXiv:hep-ph/0103100 [hep-ph]].
- [25] W. A. Ponce, Y. Giraldo and L. A. Sanchez, Phys. Rev. D **67**, 075001 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.67.075001 [arXiv:hep-ph/0210026 [hep-ph]].
- [26] R. H. Benavides, Y. Giraldo, L. Muñoz, W. A. Ponce and E. Rojas, [arXiv:2111.02563 [hep-ph]].
- [27] R. A. Diaz, R. Martínez and F. Ochoa, fisica Rev. D **72**, 035018 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.035018 [arXiv:hep-ph/0411263 [hep-ph]].
- [28] W. Hollik, [arXiv:hep-ph/9811313 [hep-ph]].
- [29] M. Herrero, NATO Sci. Ser. C **534** (1999), 1-59 doi:10.1007/978-94-011-4689-0_1 [arXiv:hep-ph/9812242 [hep-ph]].

- [30] L. H. Ryder, Cambridge University Press, 1996, ISBN 978-0-521-47814-4, 978-1-139-63239-3, 978-0-521-23764-2 doi:10.1017/CBO9780511813900
- [31] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Addison-Wesley, 1995, ISBN 978-0-201-50397-5
- [32] R. A. Diaz, R. Martinez and F. Ochoa, *Phys. Rev. D* **69**, 095009 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.095009 [arXiv:hep-ph/0309280 [hep-ph]].
- [33] P. Byakti and P. B. Pal, [arXiv:2008.01266 [hep-ph]].
- [34] V. Pleitez, arXiv:2112.10888 [hep-ph], 5th Colombian Meeting on High Energy Physics (ComHep), 30/11-04/12/2020.
- [35] G. Aad *et al.* [ATLAS], *Phys. Lett. B* **796** (2019), 68-87 doi:10.1016/j.physletb.2019.07.016 [arXiv:1903.06248 [hep-ex]].
- [36] J. Erler, P. Langacker, S. Munir, and E. Rojas, *JHEP* **11** (2011), 076 doi:10.1007/JHEP11(2011)076, [arXiv:1103.2659 [hep-ph]].
- [37] C. Salazar, R. H. Benavides, W. A. Ponce and E. Rojas, *JHEP* **07** (2015), 096 doi:10.1007/JHEP07(2015)096 [arXiv:1503.03519 [hep-ph]].
- [38] R. H. Benavides, L. Muñoz, W. A. Ponce, O. Rodríguez and E. Rojas, *Int. J. Mod. Phys. A* **33** (2018) no.35, 1850206 doi:10.1142/S0217751X18502068 [arXiv:1801.10595 [hep-ph]].
- [39] P. Langacker, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009), 1199-1228 doi:10.1103/RevModPhys.81.1199 [arXiv:0801.1345 [hep-ph]].
- [40] P. Langacker and M. Plumacher, *Phys. Rev. D* **62** (2000), 013006 doi:10.1103/PhysRevD.62.013006 [arXiv:hep-ph/0001204 [hep-ph]].
- [41] A. Tumasyan *et al.* [CMS], *JHEP* **02** (2022), 169 doi:10.1007/JHEP02(2022)169 [arXiv:2112.09734 [hep-ex]].
- [42] C. T. Hill and E. H. Simmons, *Phys. Rept.* **381** (2003), 235-402 [erratum: *Phys. Rept.* **390** (2004), 553-554] doi:10.1016/S0370-1573(03)00140-6 [arXiv:hep-ph/0203079 [hep-ph]].
- [43] R. L. Workman *et al.* [Particle Data Group], *PTEP* **2022** (2022), 083C01 doi:10.1093/ptep/ptac097
- [44] E. Suarez, R. H. Benavides, Y. Giraldo, W. A. Ponce and E. Rojas, *J. Phys. G* **51** (2024) no.3, 035004 doi:10.1088/1361-6471/ad1e21 [arXiv:2307.15826 [hep-ph]].
- [45] J. Erler, P. Langacker, S. Munir and E. Rojas, *JHEP* **08** (2009), 017 doi:10.1088/1126-6708/2009/08/017 [arXiv:0906.2435 [hep-ph]].