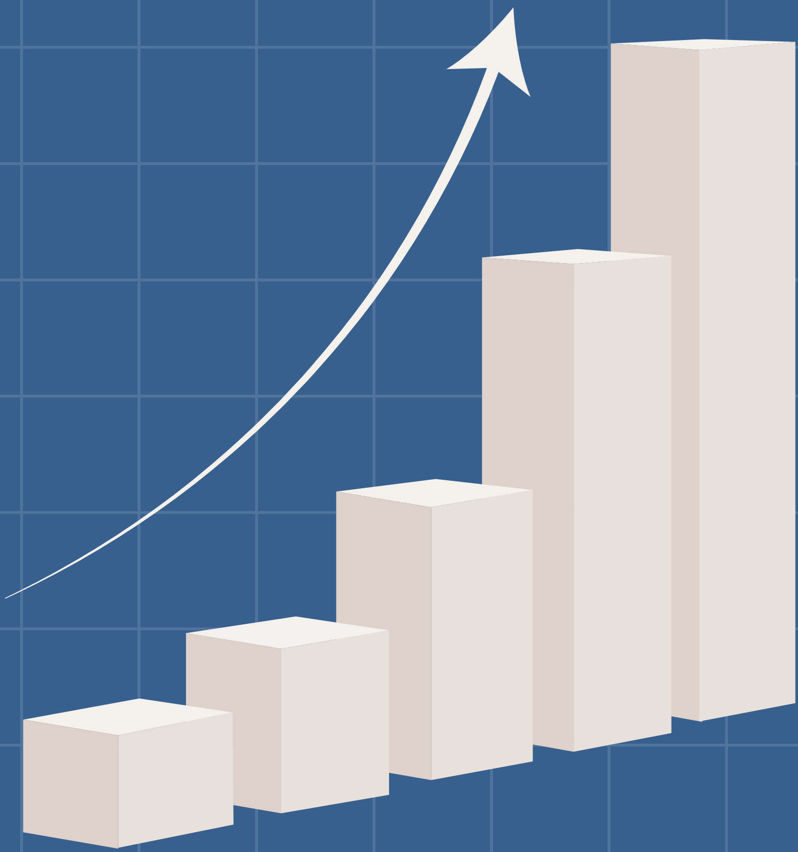
CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Problemas resueltos



Segundo Javier Caicedo Zambrano

Alberto Javier Mesa Guerrero

Editorial
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de **Nariño**

CÁLCULO DE PROBABILIDADES
Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Problemas resueltos

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL
Problemas resueltos

Segundo Javier Caicedo Zambrano
Alberto Javier Mesa Guerrero

êditorial
Universidad de **Nariño**

Caicedo Zambrano, Segundo Javier
Cálculo de probabilidades y estadística inferencial : problemas resueltos / Segundo Javier Caicedo Zambrano, Alberto Javier Mesa Guerrero. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2024

150 p. : ilustraciones, graficas, tablas.

Incluye referencias bibliográficas p. 139
ISBN: 978-628-7679-47-4

1. Cálculo de probabilidades 2. Cálculo de probabilidades--Problemas. 3. Estadística inferencial I. Mesa Guerrero, Alberto Javier

519.2 C133ca – SCDD-Ed. 22

Sección de Biblioteca
"Alberto Quijano Guerrero"

CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL

ISBN: 978-628-7679-47-4

Corrector de estilo: Gérman Chaves Jurado
Diagramación: María Elena Mesías P.
Diseño de cubiertas: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Abril de 2024
San Juan de Pasto – Nariño – Colombia

Contenido

Anexos

Introducción

Esta obra surge por el interés de los autores para atender las solicitudes de profesores y estudiantes, en el sentido de disponer de un libro de texto con la resolución de los ejercicios y problemas propuestos en el libro "CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL", escrito por los mismos autores que publican esta obra. Dicho libro consiste en notas de clase, *en formato de libro de texto*, que fue escrito con el fin de apoyar el desarrollo del curso de Cálculo de Probabilidades y Estadística que los autores ofrecen en la Universidad de Nariño; aquella obra constituye una fuente de consulta y de estudio de temáticas relacionadas con conceptos del cálculo de probabilidades, modelos o distribución de probabilidad y de estadística inferencial. Por su parte, la presente obra complementa dicha publicación, por cuanto resuelve todos los ejercicios y problemas propuestos en el "CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL".

El presente libro está organizado en 3 capítulos. El primero[1], contiene la resolución de los ejercicios y problemas de cálculo de probabilidades; el segundo[2], la resolución de los ejercicios y problemas de modelos de probabilidad; y el tercero[3], la resolución

[1] Escrito por Segundo Javier Caicedo Zambrano, profesor de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

[2] Escrito por Alberto Javier Mesa Guerrero, profesor de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

[3] Escrito por Alberto Javier Mesa Guerrero, profesor de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

de los ejercicios y problemas de estadística inferencial. Finalmente, se incluye una lista de anexos, conformados por tablas de frecuencias y de probabilidades para distribución normal, distribución t de Student, distribución Ji-cuadrado, distribución F y una tabla que muestra el proceso para la prueba de hipótesis para la media.

Los autores agradecen la retroalimentación que realicen los lectores, lo cual contribuye a su mejoramiento.

Capítulo 1

Cálculo de Probabilidades

1. Determinar el número de maneras en que se puede escoger un comité compuesto por 3 hombres y 2 mujeres, de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres.

   Solución:

   $N_1 = 7$ hombres, $n_1 = 3$ hombres.
   $N_2 = 5$ mujeres, $n_2 = 2$ mujeres.

   Se aplica el concepto de combinación y el principio fundamental del conteo, teniendo en cuenta que, el proceso se desarrolla en 2 pasos: primero, de 7 hombres se debe escoger 3; y segundo, de 5 mujeres se debe escoger 2, para lo cual se obtiene lo siguiente:

   $$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{P(n,r)}{r!}.$$

   $$C(7,3) = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{P(7,3)}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35.$$

   $$C(7,3) \times C(5,2) = 35 \times 10 = 350.$$

   El comité se puede escoger de 350 maneras.

[4] Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño.

2. Todos los años se selecciona una delegación de 4 estudiantes de un colegio para asistir a la Asamblea Anual de la Asociación de Estudiantes.

   a) ¿De cuántas maneras puede escogerse la delegación, si hay 12 estudiantes elegibles?

   b) ¿De cuántas maneras, si 2 de los 12 estudiantes elegibles no asisten al mismo tiempo?

Solución:

a) N = 12 alumnos, tamaño de la delegación n=4. alumnos, tamaño de la delegación .
No hay restricción para la formación de las delegaciones, entonces se aplica , así:
$C(n, r)$, así:
$C(12, 4) = 495$.
Los 4 estudiantes se pueden escoger de 495 maneras.

b) La población es de 12 estudiantes, de modo que, si 2 de los estudiantes no pueden asistir al mismo tiempo, se puede escoger la delegación de los 10 restantes, así: $C(10,4)$; o se puede escoger uno de los 2 que no pueden asistir simultáneamente y 3 de los 10 que no tienen ningún impedimento, así:

$C(2,1 \times C(10,3) = 2 \times 120 = 240$.

Teniendo en cuenta las 2 opciones, la delegación se puede escoger de la siguiente manera:

$C(10,4) + C(2,1) \times C(10,3) = 210 + 240 = 450$.

Existen 450 formas de escoger una delegación con las condiciones dadas.

3. En un examen, un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas.

   a) ¿Cuántas maneras tiene para escoger?
   b) ¿Cuántas maneras, si las 3 primeras preguntas son obligatorias?
   c) ¿Cuántas si tiene que contestar 4 de las 5 primeras preguntas?

   Solución:

   a) Como no hay restricción, en general, se escogen 8 de las 10 preguntas, por lo cual, existen 45 maneras posibles de resolver el examen, así:
   $C(10,8) = 45$.

   b) Son 10 preguntas, las 3 primeras son obligatorias: C(3,3), y las faltantes 5, se deben escoger de las 7 restantes: $C(7,5)$; entonces, por el principio fundamental del conteo, se obtiene el siguiente número de posibilidades:
   $C(3,3) \times C(7,5) = 1 \times 21 = 21$.

   c) Tiene que contestar 8 preguntas, pero debe escoger 4 de las primeras 5 y luego, 4 de las 5 restantes, esto es:
   $C(5,4) \times C(5,4) = 25$.

4. El jefe de personal de una compañía desea contratar 2 agentes de ventas de un total de 4 solicitantes. Suponga que los solicitantes varían en cuanto a sus capacidades y habilidades; denote por 1, 2, 3, 4 a los solicitantes, donde 1 es el mejor, 2 el que sigue y así sucesivamente.

   a) Defina el experimento aleatorio.
   b) ¿Cuántos puntos tiene el experimento?
   c) ¿Cuál es el espacio muestral?
   d) Escriba los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:

A = Seleccionar los 2 mejores;
B = Seleccionar al menos uno de los 2 mejores.

Solución:

a) El experimento consiste en contratar 2 agentes de ventas de un total de 4 solicitantes.
$C(4,2) = 6$.
b) $S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (4,3)\}$.
c) $A = \{1,2\}$.
$B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$.

5. Cuatro socios elegidos al azar deben expresar su opinión favorable o contraria a un proyecto determinado.

a) ¿Cuántos puntos tiene el experimento?
b) ¿Cuáles son los resultados?
c) Represente los resultados en un diagrama de árbol.
d) Escriba los resultados de los siguientes sucesos:
A = todos votan a favor;
B = todos votan en contra;
C = por lo menos uno vota a favor.

Solución:

a) Cada uno de los socios tiene 2 opciones para decidir votar a favor (F) o en contra (C) del proyecto, por lo cual, según el principio fundamental del conteo, el total de opciones se determina así:
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 24 = 16$.

b) Ver Tabla 1.

$S = \{FFFF, FFFC, FFCF, FFCC, FCFF, FCFC, FCCF, FCCC, CFFF, CFFC, CFCF, CFCC, CCFF, CCFC, CCCF, CCCC\}$.

Sea X el número de votos a favor del proyecto, así que, X puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4.

Tabla 1. Cálculo de probabilidades: datos problema 5

Resultados	**X**	**Número de casos**
CCCC	0	1
FCCC	1	4
FFCC	2	6
FFFC	3	4
FFFF	4	1
	Total	16

d) Representación de los resultados en un diagrama de árbol (Diagrama 1).

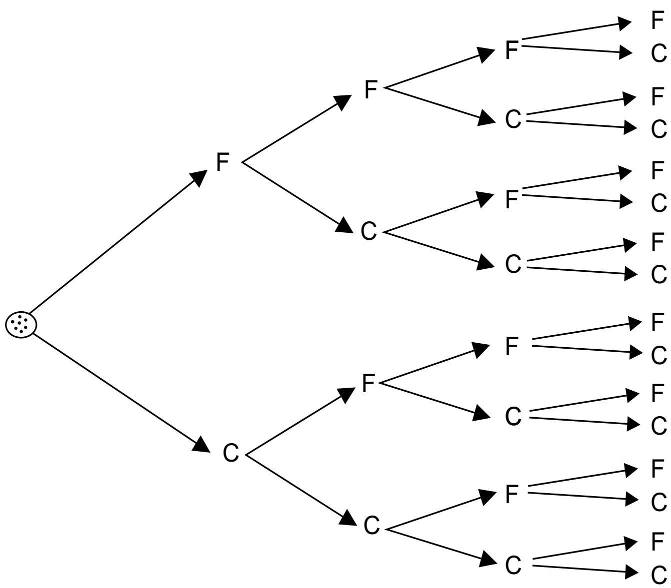


Diagrama 1. Cálculo de probabilidades: Diagrama de árbol problema 5

d) $A = \{FFFF\}$.
$B = \{CCCC\}$.
$C = \{FCCC, CFCC, CCFC, CCCF, FFCC, CCFF, \ldots, FFFC, FFCF, FCFF, CFFF, FFFF\} = S$ - B.

6. Un experimento, consiste en seleccionar 3 piezas de un proceso manufacturero y observar si son defectuosos (D) o no defectuosos (N).

a) Determinar el número de puntos del espacio muestral.
b) Escriba todos los elementos del espacio muestral.
c) Escriba los elementos de los sucesos:
A = el número de piezas defectuosas es cero;
B = hay exactamente 2 defectuosas.

Solución:

a) 23 = 8 (Tabla 2).
D: defectuoso, N: no defectuoso.
$S = \{NNN,\ DNN,\ DDN,\ DDD\}$.

Tabla 2. Cálculo de probabilidades: datos problema 6

D	Número de casos
0	1
1	3
2	3
3	1
Total	**8**

b) $S = \{NNN,\ DNN,\ NDN,\ NND,\ DDN,\ DND,\ NDD,\ DDD\}$.
c) $A = \{NNN\}$, $B\ = \{DDN,\ DND,\ NDD\}$.

7. Un administrador desea implantar un nuevo sistema para la selección de personal en su empresa, el proyecto es presentado para su aprobación, a la junta directiva integrada por 5 miembros.

   a) Determinar el número de puntos del espacio muestral.
   b) ¿Cuál es el espacio muestral?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aprobado el proyecto?

   Solución:

   a) $2^5 = 32$, esto porque cada socio tiene 2 opciones para votar, en favor (F) o en contra (C).
   b) $S = \{CCCCC, CCCCF, ..., CCCFF, ..., CCFFF, ..., CFFFF, FFFFF\}$.
   c) Para que el proyecto sea aprobado se requiere que más de la mitad de los socios voten a favor:
   $C(5,3) + C(5,4) + C(5,5) = 10 + 5 + 1 = 16$.
   $P(A) = \frac{16}{32} = 0,50 = 50\%$.

8. Encuentre la probabilidad para cada uno de los sucesos de los problemas anteriores.

   Solución:

   Problema 1:
   $C(12,5) = 792$ grupos posibles.

   La probabilidad de que el comité esté formado por 3 hombres y 2 mujeres es:

$$P(A) = \frac{350}{792} = 0,44 \ = \ 44\%.$$

Problema 3:

a) Las 3 primeras preguntas obligatorias.
Casos favorables: $C(3{,}3) \times C(7{,}5) = 1 \times 21 = 21$.
Casos posibles: $C(10{,}8) = 45$.

$P(A) = \frac{21}{45} = 0{,}47 = 47\%$.

a) Escoger 4 de las 5 primeras.
Casos favorables: $C(5{,}4) \times C(5{,}4) = 25$
Casos posibles: $C(10{,}8)=45$.

$P(A) = \frac{25}{45} = 0{,}56 = 56\%$.

Problema 4:

Sean los sucesos:

A: seleccionar los 2 mejores; B = seleccionar al menos uno de los mejores.

$P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}17 = 17\%$.

$P(B) = \frac{5}{6} = 0{,}83 = 83\%$.

Problema 5:

$A =$ todos votan a favor.

$$P(A) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%.$$

$B =$ todos votan en contra.

$$P(B) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%.$$

$C =$ por lo menos uno vota a favor:

$$P(C) = \frac{15}{16} = 0{,}9375 = 93{,}75\%.$$

Problema 6:

$A =$ el número de piezas defectuosas es cero.

$B =$ hay exactamente 2 defectuosas.

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

$$P(B) = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 3{,}75\%.$$

9. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Determinar $P(B)$, si:
   a) Si A y B son mutuamente excluyentes.
   b) Si A y B son independientes.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, puesto que A y B son excluyentes.

   De aquí: $P(B) = P(A \cup B) - P(A)$.

   Entonces $P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

b) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, puesto que A y B son independientes.

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$.

   Al factorizar $P(B)$, se obtiene:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)]$.

   Al despejar P(B) resulta:

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{1/12}{3/4} = \frac{1}{9} = 0{,}11 = 11\%.$$

10. Un ingeniero utiliza 2 máquinas A y B, en la construcción de una obra. Las probabilidades de que las máquinas operen correctamente son: $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(\mathrm{B}) = \frac{2}{3}$. La probabilidad de que ambas funcionen correctamente es $\frac{1}{4}$.
Calcular la probabilidad de que:

a) Por lo menos una máquina funcione correctamente.
b) Ninguna funcione correctamente.
c) Solo una, funcione correctamente.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12} =$ $0{,}9166 = 91{,}66\%$.

b) $P(A \cup B)^c = 1 - 0{,}9166 = 0{,}0834 = 8{,}34\%$.

c) $P(A \,\Delta\, B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} = 0{,}9166 -$ $0{,}25 = 0{,}6666 = 66{,}66\%$.

11. Sea el espacio muestral $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ con las siguientes probabilidades: $P(a) = \frac{1}{16}$; $P(b) = \frac{1}{16}$; $P(c) = \frac{1}{8}$; $P(d) = \frac{3}{16}$;

12. $P(e) = \frac{1}{4}$; $P(f) = \frac{5}{16}$.

Sean los sucesos $A = \{a, c, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$.

Calcular:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(A/B)$.

c) $P(A \cup B)$.

d) $P(A - B) = P(A \cap B^c)$.

$B^c = \{a, b\}$.

$A \cap B^c = \{a\}$.

$P(A - B) = P(A \cap B^c) = P(a) = \dfrac{1}{16}$.

13. Una sociedad está conformada por 3 economistas, 4 abogados y 2 ingenieros. Se desea elegir la junta directiva integrada por 3 miembros de la sociedad. Encontrar la probabilidad de que:

a) Todos sus miembros sean de la misma profesión.
b) De que todas las profesiones estén representadas en la junta.

Solución

Casos posibles: $C(9, 3) = 84$.

a) Pueden ser 3 economistas o 3 abogados; los 3 no pueden ser ingenieros, porque sólo hay 2:
Sea el suceso
A: todos los miembros sean de la misma profesión.

Casos favorables: $C(3, 3) + C(4, 3) = 5$.

$P(A) = \dfrac{5}{84}$.

b) Un economista, un abogado y un ingeniero:
Sea el suceso:
B: todas las profesiones estén representadas en la junta.

Casos favorables: $C(3, 1) \times C(4, 1) \times C(2, 1) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

$P(B) = \dfrac{24}{84}$.

14. Si no se permiten repeticiones:
    a) ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los 6 dígitos 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
    b) ¿Cuántos de éstos son menores que 400?
    c) ¿Cuántos son pares?
    d) ¿Cuántos son impares?
    e) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

Solución

a) Aplicando el principio fundamental del conteo (PFC), el primer dígito puede ser cualquiera de los 6, el segundo cualquiera de los 5 restantes y el tercero cualquiera de los 4 restantes, de modo que, la solución se obtiene así:

   $6 \times 5 \times 4 = 120$ o $P(n, r) = P(6, 3) = 120$.

   Se pueden formar 120 números de 3 dígitos diferentes.

b) Aplicando el PFC, el primer dígito sólo puede ser 2 o 3, es decir hay 2 opciones, el segundo cualquiera de los 5 restantes, y el tercero cualquiera de los 4 restantes:

   $2 \times 5 \times 4 = 40$ menores que 400.

c) Aplicando el PFC, un número es par si el último dígito es par, en este caso, sólo hay 2 opciones para el último dígito, 5 opciones para el primer dígito y 4 para el segundo, así:

   $5 \times 4 \times 2 = 40$ pares.

d) Aplicando el PFC:

   $5 \times 4 \times 4 = 80$ impares.

e) Aplicando el PFC:

$5 \times 4 \times 1 = 20$ múltiplos de 5.

15. ¿De cuántas maneras un profesor puede escoger uno o más estudiantes de 6 elegibles?

Solución:

Escoger uno o más estudiantes de un grupo de 6, implica que se puede escoger 1, 2, 3,⋯, 6 del grupo de 6, lo cual se resuelve a través de combinaciones, así:
$C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)= 6+15+20+15+6+1=63.$

16. Simplificar las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{(n+1)!}{n!}.$

$b)\ \dfrac{n!}{(n-2)!}.$

Solución:

$$a)\ \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1.$$

$$b)\ \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

17. ¿Cuántas placas para automóvil se pueden fabricar, si cada placa consta de 2 letras diferentes, seguidas de 3 dígitos diferentes?

Solución:

Del alfabeto castellano, descartando las letras: ñ, ch, ll rr, quedan 26 letras.

Aplicando el PFC, se tiene lo siguiente: la primera letra puede ser cualquiera de las 26 letras; la segunda, cualquiera de las 25 restantes; el primer dígito, cualquiera de los 10; el segundo, cualquiera de los 9 restantes; y el tercero, cualquiera de los 8 restantes, así:

$26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 468000$.

Se puede elaborar 468000 placas con de 2 letras diferentes, seguidas de 3 dígitos diferentes.

Se puede elaborar 468000 placas con de 2 letras diferentes, seguidas de 3 dígitos diferentes.

17. Resolver el problema anterior, si el primer dígito debe ser diferente de cero.

Solución:

En relación con el problema anterior, sólo cambia la escogencia del primer dígito, que no puede ser cero, por lo cual, para este sólo se dispone de 9 opciones, así:

$26 \times 25 \times 9 \times 9 \times 8 = 421200$.

Se puede elaborar 4212000 placas con de 2 letras diferentes, seguidas de 3 dígitos diferentes donde el primero no puede ser 0.

18. Durante una semana determinada, la probabilidad de que unas acciones ordinarias aumenten de precio (A) es 0.30, la probabilidad

de que permanezcan constantes (C) es 0.20; y la probabilidad de que disminuyan de precio (D) es 0.50.

a) ¿Los sucesos A, C y D son excluyentes? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esas acciones aumenten de precio o permanezcan sin cambio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el precio cambie durante la semana?

Solución:

a) Los sucesos A, C y D son excluyentes dado que no pueden ocurrir simultáneamente.

b) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50 = 50\%$.

c) $P(A \cup D) = P(A) + P(D) = 0{,}30 + 0{,}50 = 0{,}80 = 80\%$.

19. Un aparato electrónico consta de 2 partes A y B. Con base en una serie de pruebas, se presuponen las siguientes probabilidades: la probabilidad de que A falle es de 0.20; la probabilidad de que solamente B falle, es 0.15 y la probabilidad de que ambas partes fallen, es 0.15.

Calcular las siguientes probabilidades:
a) Falle B.
b) A o B fallen.
c) Falle solamente A.
d) Falle A si se sabe que ha fallado B.

Solución:

Sean los siguientes eventos:
A: falle la parte A del aparato electrónico; $P(A) = 0{,}20 = 20\%$.

B: falle la parte B del aparato electrónico; $P(B)$ = ?
$B{-}A$: falle solamente B; $P(B - A)$ = 0.15 =15%.

a) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.
Al despejar P(B), se tiene:
$P(B) = P(B{-}A) + P(A \cap B)$ = 0,15 + 0,15 = 0,30 =30%.

b) La probabilidad de que A o B fallen, corresponde a $P(A \cup B)$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}20 + 0{,}30 - 0{,}15 = 0{,}35 = 35\%.$$

c) Que falle solamente A implica que falle A pero no B, entonces:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}20 - 0{,}15 = 0{,}05 = 5\%.$$

d) Que falle A si se sabe que ha fallado B, corresponde a $P(A/B)$, entonces:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}30} = 0{,}50 = 50\%.$$

20. Por estudios de tránsito en una vía, se sabe que el 25% de los vehículos que transitan son de servicio público pesado, el 30% de servicio público liviano y el 45% de servicio particular. También se conoce que la probabilidad de accidente en cada clase de vehículos son 0,2, 0,3 y 0,15, respectivamente. Se desea conocer la probabilidad de accidente en dicha vía (Diagrama 2).

Solución:

Ver diagrama 2 y Tabla 3.

$P(B) = P(A1 \cap B) + P(A2 \cap B) + P(A3 \cap B)$ = 0,2075 = 20,75%.

La probabilidad de accidente en la vía es 0,2075 = 20,75%.

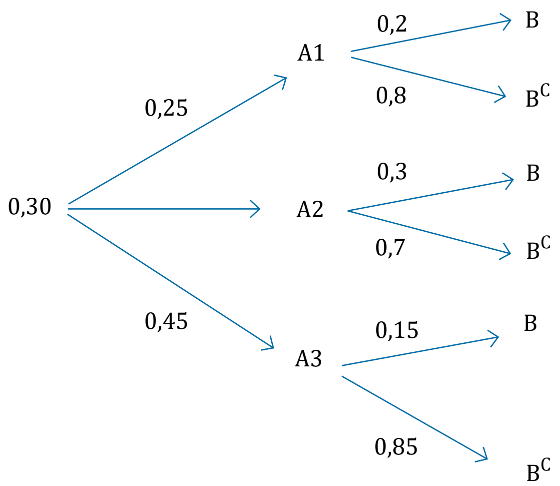


Diagrama 2. Cálculo de probabilidades: Diagrama de árbol problema 20

Tabla 3. Cálculo de probabilidades: datos problema 20

Tipo de vehículos	**Tipo**	**B (Accidente)**	**B^C (No accidente)**	**Total**	
Servicio público pesado	**A1**	5%	20%	25%	**P(A1)**
Servicio público liviano	**A2**	9%	21%	30%	**P(A2)**
Servicio particular	**A3**	6,75%	38,25%	45%	**P(A3)**
Probabilidad total		**20,75%**	**0,7925**	**1,00**	
		P(B)	**P(B^C)**		

21. El 80% de los obreros que ingresan a una planta electrónica, asisten a un curso de capacitación. El 86% de los que asisten al curso cumplen con la cuota de producción, además, el 35% de los obreros que no asistieron al curso cumplen con la cuota de producción (Tabla 4 y Diagrama 3).

 a) ¿Qué probabilidad existe de que un obrero cumpla con la cuota?

b) Si cumple con la cuota, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido al curso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no cumpla con la cuota?
d) Si no cumple con la cuota, ¿cuál es la probabilidad de que no haya asistido?

Solución:

Sean los siguientes eventos:
A: asistir al curso.
C: cumplir con la cuota de producción.
La Tabla 4 contiene probabilidades conjuntas $P(A \cap C)$, $P(A \cap Cc)$, $P(Ac \cap C)$ y $P(Ac \cap Cc)$, y las probabilidades totales.

Tabla 4. Probabilidades conjuntas problema 21

Eventos		**Cumple**	**No cumple**	**Total**
		C	**C^C**	
Asiste	**A**	0,688	0,11	0,80
No asiste	**A^C**	0,07	0,13	0,20
Total		**0,758**	**0,242**	**1,00**
		P(C)	**P(C^C)**	

El Diagrama 3 contiene las probabilidades marginales o totales y condicionales del problema 21.

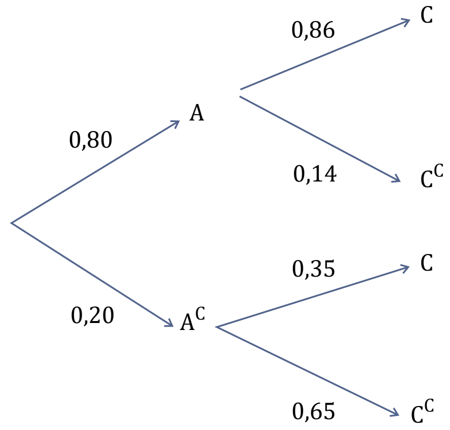


Diagrama 3. Cálculo de probabilidades:
Diagrama de árbol problema 21

$a)\ P(C) = 0{,}758 = 75{,}8\%.$

$$b)\ P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}688}{0{,}758} = 0{,}9076 = 90{,}76\%.$$

$c)\ P(C^C) = 0{,}242 = 24{,}2\%.$

$$d)\ P(A^C/C^C) = \frac{P(A^C \cap C^C)}{P(C^C)} = \frac{0{,}13}{0{,}242} = 0{,}5372 = 53{,}72\%.$$

22. La Tabla 5, presenta los resultados de un experimento para analizar la resistencia de un material, en 200 pruebas.

Tabla 5. Cálculo de probabilidades: datos problema 22

Material	**Resiste (C)**	**No resiste (D)**	**Total**
Tipo (A)	70	50	120
Tipo (B)	40	40	80
Total	**110**	**90**	**200**

Determinar las siguientes probabilidades:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(A \cap C), P(A \cap D), P(A/C), P(B/D), P(A \cup C), P(A^c/D^c),$

$P(B^c/C)$.

Solución:

$$P(A) = \frac{120}{200} = 0{,}60 = 60\%.$$

$$P(B) = \frac{80}{200} = 0{,}40 = 40\%.$$

$$P(C) = \frac{110}{200} = 0{,}55 = 55\%.$$

$$P(D) = \frac{90}{200} = 0{,}45 = 45\%.$$

$$P(A \cap C) = \frac{70}{200} = 0{,}35 = 35\%.$$

$$P(A \cap D) = \frac{50}{200} = 0{,}25 = 25\%.$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}35}{0{,}55} = 0{,}6364 = 63{,}64\%.$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{40}{200}}{\frac{90}{200}} = \frac{40}{90} = 0{,}4444 = 44{,}44\%.$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}60 + 0{,}55 - 0{,}35 = 0{,}80 = 80\%.$$

$$P\left({}^{A^c}/_{D^c}\right) = \frac{40}{110} = 0{,}36 = 36\%.$$

$$P(B^c/C) = \frac{70}{110} = 0{,}6364 = 63{,}64\%.$$

23. Sean A,B y C eventos mutuamente excluyentes, con las siguientes probabilidades: $P(A)$ = 0,2,$P(B)$ = 0,3 y $P(C)$ = 0,2.

    Calcular: $P(A \cup B \cup C)$; $P(Ac \cap (B \cup C))$.

    Solución:

    $P(A \cup B \cup C)$ = 0,20 + 0,30 + 0,20 = 0,70 = 70%. $P(A^c \cap (B \cup C))$ = P($(Ac \cap B)$ ∪ $(Ac \cap C)$) = 0.

24. Se lanza un par de dados. Encuentre la probabilidad de obtener:
    a) Una suma de 8.
    b) Cuando más una suma de 5.

    Solución:

    a) $S = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}$.

       Sea el evento A: la suma es 8.

       Entonces $A = \{(2,6)(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$.

       $P(A) = \frac{5}{36}$.

    b) B: cuando más la suma es 5, entonces,

       $B = \{(1,4)(4,1),(3,2),(2,3)(3,1),(1,3)(2,2),(1,2),(2,1),(1,1)\}$.

       $P(B) = \frac{10}{36}$.

25. Si se eligen al azar 3 libros de un estante que contiene 5 novelas, 3 libros de poemas y un diccionario; determinar la probabilidad de que:
   a) Se seleccione el diccionario.
   b) Se elijan 2 novelas y un libro de poemas.

Solución:

a) Aplicando PFC y combinaciones, se tiene: los 3 libros pueden ser una novela, uno de poemas y un diccionario, o 2 novelas y un diccionario o 2 de poemas y un diccionario, así:

$$\frac{C(5,1)\times C(3,1)\times C(1,1)+C(5,2)\times C(1,1)+C(3,2)\times C(1,1)}{C(9,3)}$$

$$=\frac{5\times 3\times 1+10\times 1+3\times 1}{84}=\frac{15+10+3}{84}=\frac{28}{84}$$

$$=0{,}3333=33{,}33\%.$$

Otra manera es la siguiente: escoger un diccionario y 2 libros de los 8 libros restantes, así:

$$\frac{C(8,2)\times C(1,1)}{C(9,3)}=\frac{28\times 1}{84}=\frac{28}{84}=0{,}3333=33{,}33\%.$$

b) De las 5 novelas se escogen 2 y de los 3 poemas se escoge uno, así:

$$\frac{C(5,2)\times C(3,1)}{C(9,3)}=\frac{10\times 3}{84}=\frac{30}{84}=0{,}3571=35{,}71\%.$$

26. Suponga que en un grupo de 500 estudiantes universitarios se encuentra que 210 fuman, 258 ingieren bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman e ingieren bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas e ingieren bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas, y 52 participan en estas 3 malas prácticas para la salud. Si se elige al azar un miembro de ese grupo, encuentre la probabilidad de que el estudiante:

a) Fume, pero no ingiera bebidas alcohólicas.
b) Coma entre comidas e ingiera bebidas alcohólicas, pero no fume.
c) No fume ni coma entre comidas.

Solución:

Sean los siguientes eventos:
F: estudiantes que fuman.
B: estudiantes que consumen bebidas alcohólicas.
C: Estudiantes que comen entre comidas.

a) $P(F-B) = P(F) - P(F \cap B) = \frac{210}{500} - \frac{122}{500} = \frac{88}{500} = 0{,}16 = 16\%.$

b) $P\big((C \cap B) - F\big) = P(C \cap B) - P(C \cap B \cap F) = \frac{83}{200} - \frac{52}{200} =$ $0{,}155 = 15{,}5\%.$

c) $P(F^c \cap C^c) = P(F \cup C)^c = 1 - P(F \cup C).$

$$P(F \cup C) = P(F) + P(C) - P(F \cap C) = \frac{210}{500} + \frac{216}{500} - \frac{97}{500} = \frac{329}{500}$$
$$= 0{,}658 = 65{,}8\%.$$

Al reemplazar se obtiene:

$P(F^c \cap C^c) = 1 - 0{,}658 = 0{,}342 = 34{,}2\%.$

27. A partir de experiencias previas, un corredor de acciones considera que, bajo las condiciones económicas actuales, un cliente invertirá en bonos libres de impuestos con una probabilidad de 0.6, en fondos mutualistas con una probabilidad de 0.3 y tanto en bonos libres de impuestos como en fondos mutualistas con una probabilidad de 0.15. Encuentre la probabilidad de que el cliente invierta:

a) En bonos libres de impuestos o en fondos mutualistas.
b) Que no inviertan en bonos libres de impuestos ni en fondos mutualistas.

Solución:

Sean los eventos:

L: bonos libres de impuestos.

M: bonos en fondos mutualistas.

$P(L)$ = 0,6; $P(M)$ = 0,3; $P(L \cap M)$ = 0,15 = 15%.

a) Probabilidad de invertir en alguno de los 2 fondos:
$P(L \cup M) = P(L)+P(M) - P(L \cap M)$ = 0,6 + 0,3 − 0,15 = 0,75 = 75%.

b) h Probabilidad de no invertir en ninguno de los 2 fondos:
$P((L \cup M)c)$ = 1−$P(L \cup M)$ =1 − 0,75 = 0,25 = 25%.

28. La probabilidad de que una estación de servicio sirva gasolina a 0, 1, 2, 3, 4, 5 o más automóviles durante un periodo de 30 minutos, son: 0.03, 0.18, 0.24, 0.28, 0.10 y 0.17, respectivamente. Encuentre la probabilidad de que:
   a) Más de 2 automóviles reciban gasolina.
   b) Máximo 4 reciban gasolina.
   c) Por lo menos 4 reciban gasolina.

Solución:

Sean los sucesos:

A: más de 2 autos reciben gasolina; $A = \{3,4,5\ o\ más\}$.

B: máximo 4 autos reciben gasolina; $B = \{0,1,2,3,4\}$.

C: por lo menos 4 reciben gasolina; $B = \{4,5\ o\ más\}$.

a) $P(A)$ =0,28 + 0,10 + 0,17 = 0,55 = 55%.

b) $P(B)$ = 0,03 + 0,18 + 0,24 + 0,28 + 0,10 = 0,83 = 83%.

c) $P(C)$ = 0,10 + 0,17 = 0,27 = 27%.

29. Si R es el evento de que un convicto haya cometido un robo armado y D es el evento de que este convicto haya vendido droga, plantee

en palabras, qué probabilidades están expresadas en los siguientes casos:
a) $P(R/D)$.
b) $P(D^c/R)$.
c) $P(R^c/D)$.

Solución:

a) Probabilidad de que haya cometido un robo, si vendió droga.
b) Probabilidad de que no haya vendido droga, si realizó un robo.
c) Probabilidad de que no haya robado, si vendió droga.

30. En la Tabla 6, se clasifica una muestra aleatoria de 200 adultos, de acuerdo al género y nivel de educación.

Tabla 6. Cálculo de probabilidades: datos problema 30

Educación	Masculino	Femenino	Total
Primaria	38	45	83
Secundaria	28	50	78
Universitaria	22	17	39
Total	**88**	**112**	**200**

Si se elige al azar una persona de este grupo, encuentre la probabilidad de que:
a) La persona sea hombre, dado que tiene educación secundaria.
b) La persona no tenga grado universitario si es mujer.

Solución:

Sean los eventos:
H: la persona elegida es hombre.
S: la persona elegida tiene nivel de educación secundario.
F: la persona elegida es mujer.
U: la persona elegida tiene nivel de educación universitario.

a)

$$P(H/S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{28}{200}}{\frac{78}{200}} = \frac{28}{72} = 0{,}3589 = 35{,}89\%.$$

b)

$$P(U^c/F) = \frac{P(U^c \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{95}{200}}{\frac{112}{200}} = \frac{95}{112} = 0{,}8482 = 84{,}82\%.$$

31. En el último año, de un grupo de 100 estudiantes de educación superior, 42 estudiaron matemáticas, 68 psicología, 54 historia, 22 matemáticas e historia, 25 matemáticas y psicología, 7 estudiaron historia, pero no matemáticas ni psicología, 10 estudiaron las 3 áreas y 8 no estudiaron ninguna de las 3. Si se elige al azar un estudiante determine la probabilidad de que:
    a) La persona estudie psicología, si no estudia matemáticas.
    b) Que una persona estudie psicología, si estudia historia y matemáticas.

Solución:

Sean los eventos:
P: estudia Psicología.
M: estudia matemáticas.
H: estudia historia.

a)

$$P(P/M^c) = \frac{P(P \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(P - M)}{P(M^c)}.$$

$$P(P - M) = P(P) – P(P \cap M) = 0{,}68 - 0{,}25 = 0{,}43 = 43\%.$$

Al reemplazar se obtiene:

$$P(P/M^c) = \frac{P(P \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(P - M)}{P(M^c)} = \frac{0{,}43}{0{,}58} = 0{,}7241 = 72{,}41\%.$$

b)

$$P\left(\frac{P}{H \cap M}\right) = \frac{P(P \cap H \cap M)}{P((H \cap M)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{22}{100}} = \frac{0{,}10}{0{,}22} = 0{,}4545 = 45{,}45\%.$$

32. La probabilidad de que un médico diagnostique en forma correcta una determinada enfermedad es de 0.7. Dado que el médico hace un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que un paciente presente una demanda es 0.9. Determinar la probabilidad de que el doctor haga un diagnóstico incorrecto y el paciente presente la demanda.

Solución:

Sean los eventos:
C: diagnóstico correcto del paciente
I: diagnóstico incorrecto del paciente
D: el paciente presenta una demanda

$P(C)$ = 0,70; $P(I)$ = 0,30; $P(D/I)$ = 0,90.

33. La policía planea hacer respetar los límites de velocidad utilizando radares en 4 ubicaciones diferentes dentro de los límites de la ciudad. Los radares operan el 40%, 30%, 20% y 10% del tiempo en cada una de las cada de las localidades L1, L2, L3 y L4. La probabilidad de que la persona rebase los límites de velocidad en cada uno de esos lugares son 0.2, 0.1, 0.5 y 0.2, respectivamente. Determinar la probabilidad de que una persona reciba una multa.

Solución:

Sean los eventos:
L1: tiempo que está activo el radar en el lugar 1.
L2: tiempo que está activo el radar en el lugar 2.
L3: tiempo que está activo el radar en el lugar 3.
L4: tiempo que está activo el radar en el lugar 4.
R: rebasa la velocidad

$P(L1) = 0{,}40; P(L2) = 0{,}30; P(L3) = 0{,}20; P(L4) = 0{,}10.$

$P(R/L1) = 0{,}2 = 20\%.$

$P(R/L2) = 0{,}1 = 10\%.$

$P(R/L3) = 0{,}5 = 50\%.$

$P(R/L4) = 0{,}2 = 20\%.$

$$P(R) = P(L1) \times P(R/L1) + P(L2) \times P(R/L2) + P(L3) \times P(R/L3) + P(L4) \times P(R/L4).$$

$$P(R) = 0{,}40 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}20 \times 0{,}5 + 0{,}10 \times 0{,}20 = 0{,}23 = 23\%.$$

La probabilidad de que reciba una multa es del 23%.

34. A un sospechoso se le aplica un suero de la verdad, que se sabe es confiable en el 90% cuando la persona es culpable y en el 99% cuando es inocente. Si el sospechoso se escogió de un grupo del cual sólo el 5% han cometido alguna vez un crimen y el suero indica que la persona es culpable, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea inocente? (Diagrama 4 y Tabla 7)

Solución:

Sean los eventos:
I: el acusado es inocente.
C: el acusado es culpable.
$P+$: prueba resulta positiva.
$P-$: prueba resulta negativa.

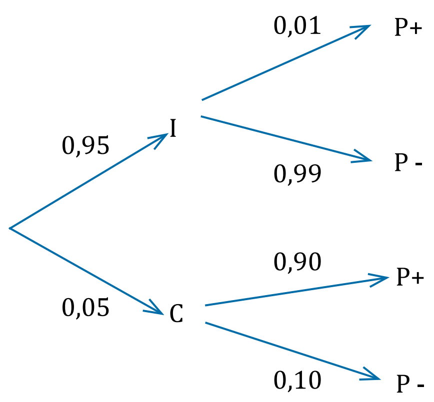


Diagrama 4. Cálculo de probabilidades:
Diagrama de árbol problema 34

Tabla 7. Cálculo de probabilidades: datos problema 34

Eventos		**Prueba +**	**Prueba -**	**Total**
		P+	**P-**	
Inocente	**I**	0,0095	0,9405	0,95
Culpable	**C**	0,045	0,005	0,05
Probabilidad total		**0,0545**	**0,9455**	**1,00**
		P(P+)	**P(P-)**	

35. Un empresario cuenta con la opción de invertir en 2 de 5 proyectos en el próximo año; el empresario ignora que solo 3 de esos 5 proyectos producirán ganancias. Suponga que se eligen 2 proyectos al azar.
   a) ¿Cuál es el experimento aleatorio?
   b) ¿Cuántos puntos tiene el espacio muestral?
   c) Determinar la probabilidad de que mínimo uno de los proyectos que producen ganancia sea escogido.
   d) Encontrar la probabilidad de que máximo 2 de los proyectos que no producen ganancia, sean escogidos.

Solución:

a) Invertir en 2 de 5 proyectos el próximo año.

b) $C(5{,}2) = 10$.

c) Entre los 5 proyectos hay 3 que producen ganancias, p aplicación del PFC y combinaciones, se tiene:

$C(3{,}1) \times C(2{,}1) + C(3{,}2) = 3 \times 2 + 3 = 9.$

$P = \dfrac{9}{10}.$

d) Casos favorables:

$$\begin{aligned} C(2{,}0) \times C(3{,}2) + C(2{,}1) \times C(3{,}1) + C(2{,}2) \times C(3{,}0) \\ = 1 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 10. \end{aligned}$$

Casos posibles: C(5,2)=10.

$P = \dfrac{10}{10} = 1 = 100\%.$

36. Una empresa de servicios evalúa el funcionamiento de una podadora para sus clientes. El cliente dispone de muchas posibilidades para escoger, puesto que hay podadoras fáciles de operar, de dificultad mediana y de difícil operación, las hay caras o baratas, con reparación costosa, regular o barata.

Determinar la probabilidad de que:

a) Un cliente solicite una podadora de fácil operación, barata y de reparación regular.
b) Solicite una podadora de dificultad mediana en la operación.
c) Solicite una podadora barata.

Solución:

Sean los eventos:
F: podadoras de fácil operación.
M: podadoras de mediana dificultad de operación.
D: podadoras de difícil operación.

B: podadoras baratas.
C: podadoras costosas.
R: podadoras de costosa reparación.
S: podadoras de regular costo de reparación.
T: podadoras de barata reparación.

Se asume que todos los eventos son equiprobables.

a) $P(F \cap B \cap S) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

b) $P(M) = \frac{1}{3}$.

c) $P(B) = \frac{1}{2}$.

37. Un fabricante del producto A tiene registro sobre la calidad de su producto; la tabla que sigue contiene el número de unidades defectuosas encontrados en 200 unidades del producto, distribuidos en 6 grupos (Tabla 8).

Tabla 8. Cálculo de probabilidades: datos problema 37

Número de unidades defectuosas	**Frecuencia observada**
0	100
1	60
2	20
3	5
4	5
5	10
Total	**200**

a) Elaborar una distribución de probabilidades y representarla gráficamente.
b) Calcular el valor esperado, la varianza y la desviación estándar.
c) Encontrar la función acumulativa y calcular la probabilidad de que haya por lo menos 2 defectuosos.

Solución:

Sea la variable:
X: número de unidades defectuosas en cada muestra.
a) Ver Tabla 9.

Tabla 9. Cálculo de probabilidades: frecuencias problema 37

X	**Frecuencia observada**	$f(x)=P(X=x)$	$x\times f(x)$	$(x-\mu)2\times f(x)$	$F(x)$
0	100	0,5	0	0,428	0,5
1	60	0,3	0,3	0,3	0,8
2	20	0,1	0,2	0,4	0,9
3	5	0,025	0,075	0,225	0,925
4	5	0,025	0,1	0,4	0,95
5	10	0,05	0,25	1,25	1
Total	200	1	0,925	3,003	

b) Valor esperado de X: $E(X) = \mu = \sum x \times f(x) = 0{,}925$.
Varianza de X: $Var(X) = \sum (x-\mu)^2 \times f(x) = 3{,}003$.
Desviación estándar de X: es la raíz cuadrada no negativa de la varianza, entonces, $S = \sqrt{3{,}003} = 1{,}7329$.

c) $P(X \geq 2) = 0{,}1 + 0{,}025 + 0{,}025 + 0{,}05 = 0{,}20 = 20\%$.

O por el complemento:

$P(X \geq 2) = 1 - P(x<2) = 1-P\ (x\leq 1) = 1 - F(1) = 1-0{,}8 = 0{,}2 = 20\%$.

38. Si A y B son sucesos independientes, demostrar que:

b) a) A y B^c son independientes.
c) b) A^c y B son independientes.

Solución:

a) $P(A \cap Bc) = (P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
Teniendo en cuenta que A y B son independientes,
$P(A \cap B) = P(A)$ x $P(B)$. Entonces, $P(A \cap Bc) = P(A) - P(A)$ x $P(B)$.
Al factorizar $P(A)$: $P((A \cap B^c)) = P(A)[1 - P(B)]$.
Entonces, $P(A \cap B^c) = P(A)$ x $P(B^c)$.
Por lo anterior, se cumple que los eventos A y Bc son independietes.

b) $P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$ x $P(B)$.
Al factorizar $P(B)$: $P(B \cap A^c) = P(B)[1 - P(A)]$.
$P(B \cap A^c) = P(B)$ x $P(A^c)$.
Se concluye que los eventos B y Acson independientes.

39. Los compradores de volúmenes grandes de mercancía utilizan con frecuencia esquemas de muestreo de inspección para controlar la calidad de las mercancías que arriban. Los lotes de mercancías, son rechazados o aceptados sobre la base de los resultados obtenidos al inspeccionar algunos artículos seleccionados del lote. Suponga que un inspector de una planta procesadora de alimentos, ha aceptado el 98% de los lotes que son de buena calidad. Además, el inspector acepta el 94% de todos los lotes. El 5% de los lotes son de mala calidad. Elaborar el diagrama de árbol y la tabla de probabilidad correspondiente. Además, calcular el porcentaje de lotes que son:

a) Rechazados y de mala calidad.
b) Rechazados o de mala calidad.
c) Rechazados si son de mala calidad.

d) Aceptados si son de buena calidad.
e) Elabore un diagrama de árbol y la tabla correspondiente

Solución:

Sean los eventos:
A: lotes aceptados
R: lotes rechazados
B: lotes de buena calidad
M: lotes de mala calidad

a) $P(R \cap M) = 0{,}041 = 4{,}1\%$.

b) $P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) = 0{,}06 + 0{,}05 - 0{,}041 = 0{,}069 = 6{,}9\%$

c)

$$P(R/M) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}041}{0{,}05} = 0{,}82 = 82\%.$$

d)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}931}{0{,}95} = 0{,}98 = 98\%.$$

e) Ver Tabla 10 y Diagrama 5.

Tabla 10. Cálculo de probabilidades: datos problema 39

PRODUCTOS		**A**	**R**	**TOTAL**
Buena calidad	**B**	0,931	0,019	0,95
Mala calidad	**M**	0,009	0,041	0,05
Probabilidad total		0,94	0,06	1,00

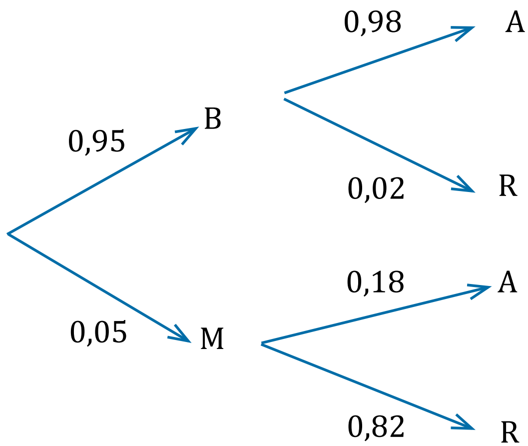


Diagrama 5. Cálculo de probabilidades:
Diagrama de árbol problema 39

40. Una empresa de correo distribuye la correspondencia de tarjetas de crédito, así: un 10% son de la zona norte, de ellos el 30% están vencidos; el resto son de la zona sur y de ellos el 10% están vencidos. Si un recibo está vencido:

    a) ¿Cuál es el porcentaje de tarjetas vencidas?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la zona norte si está vencida?

Solución:

Sean los eventos:
N: tarjetas de crédito de la zona norte
S: tarjetas de crédito de la zona sur
A: tarjetas de crédito al día
V: tarjetas de crédito vencidas

a) Ver Diagrama 6.

El porcentaje de tarjetas vencidas se determina así:
$P(V) = P(N)\ P(V/N) + P(S)\ P(V/S)\ P(V) = 0{,}10 \times 0{,}3 + 0{,}90 \times 0{,}1 = 0{,}12$ =12%

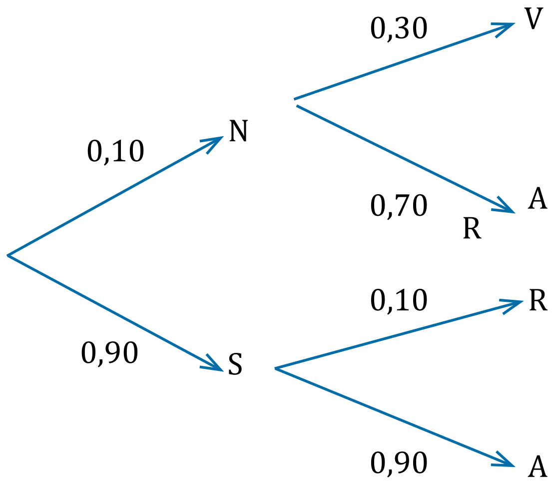


Diagrama 6. Cálculo de probabilidades: Diagrama de árbol problema 40

b) $P(N/V)) = \frac{P(N\cap V)}{P(V)} = \frac{P(N)\times P(V/N)}{P(V)} = \frac{0{,}10\times 0{,}30}{0{,}12} = 0{,}25 = 25\%$.

Capítulo 2

Modelos de Probabilidad

1. Debido a las altas tasas de interés, una firma consultora, indica que el 30% de sus cuentas por cobrar están vencidas. Si un contador escoge aleatoriamente 5 de esas cuentas, determinar la probabilidad de que:

   a) Ninguna de las cuentas esté vencida.
   b) Exactamente 2 estén vencidas.
   c) La mayoría de las cuentas de la muestra, estén vencidas.

   Solución:

   Sea X la variable aleatoria que indica el número de cuentas vencidas entre cinco. Los valores que toma X son $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
   $n = 5$, $p = 30\%$.

   $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, donde $q = 1 - p$.

   Al reemplazar se obtiene:

   $P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} 0{,}3^x \times 0{,}7^{5-x}$.

   a) Ninguna de las cuentas esté vencida:

   $$P(X = 0) = f(0) = \binom{5}{0} 0{,}3^0 \times 0{,}7^5 = 0{,}1681 = 16{,}81\%.$$

b) Exactamente 2 estén vencidas.

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{5}{2} 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 0{,}3087 = 30{,}87\%.$$

c) La mayoría de las cuentas de la muestra, estén vencidas.

$$P(x \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5).$$

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{5}{3} 0{,}3^3 \times 0{,}7^2 = 0{,}1323 = 13{,}23\%.$$

$$P(X = 4) = f(4) = \binom{5}{4} 0{,}3^4 \times 0{,}7 = 0{,}02835 = 2{,}835\%.$$

$$P(X = 5) = f(5) = \binom{5}{5} 0{,}3^5 \times 0{,}7^0 = 0{,}0024 = 0{,}24\%.$$

$$P(X{\geq}3)\text{v} = f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}1323 + 0{,}02835 + 0{,}0024 = 0{,}1635 = 16{,}35\%.$$

2. Se desea elegir una junta directiva formada por un presidente, un tesorero y un secretario.
   a) ¿Cuántas planchas diferentes se pueden postular, si la asamblea está compuesta por 20 miembros y todos tienen igualdad de derechos para pertenecer a la junta?
   b) Si su candidato para presidente es la persona A, ¿cuál es la probabilidad de que el candidato A quede elegido en ese cargo?

Solución:

a) $P(20{,}3) = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$

b) $$\frac{1 \times 19 \times 18}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{20}.$$

3. Las calificaciones de una evaluación, se distribuyen normalmente con media μ = 3, 8 y desviación estándar σ = 0, 3. Determinar el porcentaje de estudiantes que obtuvieron calificaciones:
   a) a) Por debajo de 4.
   b) b) Por encima de 3, 5.
   c) c) Entre 3, 5 y 4, 0.

   Solución:

   a) $\mu = 3{,}8.$

   $\sigma = 0{,}3.$

   $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

   $$Z = \frac{4 - 3{,}8}{0{,}3} = 0{,}67.$$

   $P(X<4) = P(Z < 0{,}67) = 0{,}7454 = 74{,}54\%.$

4. La probabilidad de que un potencial cliente haga una compra es del 20%. Un vendedor visita 10 clientes para ofrecer su producto.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 3 clientes hagan una compra?
   b) ¿Cuál es el valor esperado o promedio de clientes que hacen la compra, la varianza y la desviación estándar asociada a los 10 clientes?

   Solución:

   Sea X la variable aleatoria que indica el número de clientes que hacen la compra. Los valores que toma X son $x = 0, 1, 2, \cdots, 10$.

X tiene distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0{,}20$.

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

Al reemplazar se obtiene:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0{,}2^x \times 0{,}8^{10-x}.$$

a) $P(X<3) = f(0) + f(1) + f(2)$.

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{10}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^{10} = 0{,}1073 = 10{,}73\%.$$

$$P(X = 1) = f(1) = \binom{10}{1} \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^9 = 0{,}2684 = 26{,}84\%.$$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{10}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^8 = 0{,}3020 = 30{,}20\%.$$

$P(X<3) = f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}1073 + 0{,}2684 + 0{,}3020 =$
$0{,}6777 = 67{,}77\%$.

b) Valor esperado:

$E(X) = np = 10 \times 0{,}20 = 2$.

Varianza:
$npq = 10 \times 0{,}20 \times 0{,}80 = 1{,}6$.

Desviación estándar:
$\sqrt{npq} = \sqrt{1{,}6} = 1{,}26$.

5. Suponga que en una plantación de café el 40% de las plantas están infectados con broca. Para detectar la presencia del insecto se toma una muestra aleatoria de 100 plantas:
a) ¿Cuál es la variable aleatoria para medir la infección?

b) ¿Qué distribución de probabilidad será adecuada?
c) Calcule la probabilidad de que más del 50% de las plantas examinadas tengan broca.

Solución:

a) X: número de plantas infectadas; x = 0,1, $\cdots$, 100.
b) Es un modelo binomial con p=0,40 y n=100; en este caso se aproxima a la distribución normal:

Media: $\mu = np = 100 \times 0{,}40 = 40$.
Varianza: $npq = 100 \times 0{,}40 \times 0{,}60 = 24$.
Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{24} = 4{,}89$.

Cuando en un modelo binomial la muestra es grande y la probabilidad de éxito está cerca de 0,5, el modelo binomial se aproxima a una distribución normal, así:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

c)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{50 - 40}{4{,}89} = 2{,}04.$$

$P(X>50) = P(Z>2{,}04) = 1-P(Z<2{,}04) = 1-0{,}9793 = 0{,}0207 = 2{,}07\%$.

6. El 10% de las semillas de cierta planta no germinan. Las semillas se empaquetan en cajas de 10 unidades y se venden con la garantía de que por lo menos 9 de ellas germinarán. Si un cliente compra una caja, ¿cuál es la probabilidad de que ésta cumpla la garantía

Solución:

X: número de semillas que germinan; x = 0,1, $\cdots$, 10.
n = 10; p = 0,90..

$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Al reemplazar se obtiene:

$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0{,}9^x \times 0{,}1^{10-x}$.

Se cumple la garantía si germinan por lo menos 9 semillas:

$P(X \geq 9) = f(9) + f(10)$.

$P(X = 9) = f(9) = \binom{10}{9} 0{,}9^9 \times 0{,}1^1 = 0{,}3874 = 38{,}74\%$.

$P(X = 10) = f(10) = \binom{10}{10} 0{,}9^{10} \times 0{,}1^0 = 0{,}3486 = 34{,}86\%$.

$P(\geq 9) = f(9) + f(10) = 0{,}3874 + 0{,}3486 = 0{,}7360 = 73{,}60\%$.

$P(\geq 9) = f(9) + f(10) = 0{,}3874 + 0{,}3486 = 0{,}7360 = 73{,}60\%$.

La probabilidad de que una caja de 10 semillas cumpla la garantía es del 73,60%.

7. Una compañía de seguros considera que solamente el 0,1% de la población le ocurre cierto tipo de accidente cada año. ¿Cuál debe ser el costo (X) de una póliza de 10 millones de pesos para que la compañía tenga una utilidad promedio de $10000 anuales por cada póliza vendida? (Tabla 11).

Solución:

1. Sea X la variable aleatoria que denota la utilidad.

Tabla 11. Modelos de probabilidad: datos problema 7

Evento	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
Accidente	-\$10.000.000	0,001	-\$10.000
No accidente		**0,999**	
	Total	**1**	**\$10.000**

Se debe determinar el valor de C talque $E(X) = 10000$.

$-\$10000 + 0{,}999 \times C = \$10000;$

$$C = \frac{\$20000}{0{,}999} = \$20020.$$

El costo a pagar por la póliza es de \$20,020.

Prueba:

Analizar la Tabla 12.

Tabla 12. Modelos de probabilidad: prueba de solución problema 7

	x	**f(x)**	$\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
Accidente	-\$10.000.000	0,001	-\$10.000
No accidente	\$20.020	0,999	\$20.000
	Total	1	\$10.000

8. Suponga que los 4 motores de un avión comercial, operan independientemente y que la probabilidad de que un motor falle durante un vuelo, es 0.01. El avión puede llegar a su destino si por lo menos un motor está en buenas condiciones. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión no llegue a su destino?

Solución:

Sea la variable aleatoria:
X: número de motores que fallan; $x = 0, 1, 2, 3, 4$.
Con $n = 4$ y $p = 0{,}01$, la variable X tiene distribución binomial.

Al reemplazar se obtiene:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

El avión no llega a su destino si fallan los 4 motores, esto es:

$$P(X = 4) = f(4) = \binom{4}{4} 0{,}01^4 \times 0{,}99^0 = 1 \times 10^{-8} \approx 0.$$

9. Debido a las altas tasas de interés, una compañía informa, que el 30% de sus cuentas por cobrar están vencidas. Si un contador escoge aleatoriamente 5 de esas cuentas, ¿Qué modelo de probabilidad utilizaría para encontrar las siguientes probabilidades?:
   a) ¿Cuál es la variable aleatoria?
   b) Ninguna cuenta vencida.
   c) Exactamente 2 vencidas.
   d) La mayoría vencidas.

Solución:

a) Variable aleatoria:
   X: número de cuentas vencidas; $x = 0, 1, \cdots, 5$
   X tiene distribución Binomial: $n = 5$; $p = 0{,}30$.

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

Al reemplazar se obtiene:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} 0{,}3^x \times 0{,}7^{5-x}.$$

b) $P(X = 0) = f(0) = \binom{5}{0} 0{,}3^0 \times 0{,}7^5 = 0{,}5905 = 59{,}05\%$.

c) $P(X = 2) = f(2) = \binom{5}{2} 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 0{,}3087 = 30{,}87\%$.

d) $P(x \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5)$.

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{5}{3} 0{,}3^3 \times 0{,}7^2 = 0{,}1323 = 13{,}23\%.$$

$$P(X = 4) = f(4) = \binom{5}{4} 0{,}3^4 \times 0{,}7^1 = 0{,}0284 = 2{,}84\%.$$

$$P(X = 5) = f(5) = \binom{5}{5} 0{,}3^5 \times 0{,}7^0 = 0{,}0024 = 0{,}24\%.$$

P(X≥3) = $f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}1323 + 0{,}0284 + 0{,}0024$
= 0,1631 = 16,31%.

10. Al sistema de contabilidad de una empresa ingresan diariamente 15 registros contables (N), de los cuales, 5 se digitan con error. Se toma una muestra de 4 registros. Calcular la probabilidad de que:
    a) En la muestra no haya registros con error.
    b) Por lo menos uno de los 4 registros tenga error.

Solución:

Variable aleatoria:

X: número de registros contables con error. X = 0, 1, 2, 3, 4.

X tiene distribución hipergeométrica.

$N = 15$, $N_1 = 5$, $N_2 = 10$, $n = 4$

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{k}} = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{4-x}}{\binom{15}{4}}.$$

a)

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} = 0{,}1538 = 15{,}38\%.$$

b) Utilizando la ley del complemento, se tiene:

$P(x \geq 1) = 1 - f(0) = 1 - 0{,}1538 = 0{,}8462 = 84{,}62\%.$

11. Un comerciante recibe un pedido de 20 televisores, de los cuales, 4 son defectuosos. Si toma al azar una muestra de 3 aparatos, calcular la probabilidad que:
    a) No haya televisores defectuosos en la muestra.
    b) Exactamente uno sea defectuoso.

Variable aleatoria:

X: número de televisores defectuosos; $x = 0,1,2,3.$
$N = 20, N_1 = 4, N_2 = 16, n = 3.$

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{x}\binom{16}{3-x}}{\binom{20}{3}}.$$

a)

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = 0{,}1053 = 10{,}53\%.$$

b)

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = 0{,}4210 = 42{,}10\%.$$

13. El 40% de los empleados de una compañía tiene seguro de vida. Si se toma una muestra aleatoria de 10 empleados:
    a) ¿Cuál es la función de probabilidad para las personas aseguradas?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las personas estén aseguradas?
    c) ¿Qué indica la variable aleatoria?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una persona esté asegurada?
e) ¿Cuál es y cómo se interpreta el valor esperado y la desviación estándar?

Solución:

Variable aleatoria:

a) X: número de empleados que tienen seguro de vida; x= 0, 1, 2,⋯, 10.
b) La variable X tiene distribución binomial con n=10 y p=0,4.

$$P(X=x)=f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=f(x)=\binom{10}{x}0{,}40^x\times 0{,}60^{10-x}.$$

a) $P(X=x)=f(x)=\binom{10}{x}0{,}40^x\times 0{,}60^{10-x}$

b) $P(X=10)=f(10)=\binom{10}{10}0{,}4^{10}\times 0{,}60^0=0{,}4^{10}=0{,}0001485.$

c) Variable aleatoria X: representa número de empleados con seguro de vida.
d) $P(x \geq 1) = 1 - f(0)$.

$$P(X=0)=f(0)=\binom{10}{0}0{,}4^0\times 0{,}6^{10}=0{,}0060=0{,}60\%.$$

$$P(X\geq 1)=1-f(0)=1-0{,}0060=0{,}9940=99{,}40\%.$$

e) Valor esperado de x: $E(X)=np=10\times 0{,}4=4$.

En una muestra de 10 personas se espera que 4 tengan seguro

Desviación estándar de X: Raiz cuadrada de la varianza.

$Var(X)$: $npq=10\times 0{,}4\times 0{,}6=2{,}4$.

Desviación estándar: $\sigma=1{,}549$.

Lo más probable es que el número de empleados con seguro de vida esté en el intervalo (4 – 1.549,4 + 1.549), que redondeado corresponde al intervalo (2, 6).

14. El Hemacitómetro es un aparato que se utiliza para medir la densidad de células por cuadrícula. Según experimentos anteriores, se conoce que el promedio de células por cuadrícula es igual a 4. Calcule la probabilidad de que en las próximas mediciones, se encuentre por lo menos 3 células por cuadrícula.

Solución:
Variable aleatoria:
X: células por cuadrícula; $x = 0, 1, 2,\cdots$
La variable X tiene distribución de Poisson con media $\lambda = 4$ células por cuadrícula.

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4}4^x}{x!}.$$

Por ley del complemento, se tiene:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2).$$

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0{,}0183 = 1{,}83\%.$$

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 0{,}0732 = 7{,}32\%.$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 0{,}1464 = 14{,}64\%.$$

$P(X\geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)]$.

$P(X\geq 3) = 1-P(X<3) = 1-(0{,}0183+0{,}0732+0{,}1464) = 0{,}7621 = 76{,}21\%$.

15. El salario promedio de los trabajadores de una empresa es de $ 3800 por hora y la desviación estándar es de $250.
   a) ¿Qué porcentaje de empleados gana menos de $ 4000 la hora?
   b) Si se toma una muestra de 25 empleados, ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio sea superior a $ 3600?

Solución:
Variable aleatoria:
X: salario por hora de los empleados.

a)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{4000 - 3800}{250} = 0,8.$$

$P(X < 4000) = P(Z < 0,8) = 0,7881 = 78,81\%.$

El 78,81% de los empleados gana menos de $4000 la hora.

b)

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3600 - 3800}{250/\sqrt{25}} = 4.$$

$P(\overline{X} > 3600) = P(Z > 4) = 0.$

16. Al examinar la longitud del tronco madre del Pemphigus populitransversus, se encontró que la variable se distribuye normalmente con media 4,4 mm y desviación estándar 0,12 mm. Determinar el porcentaje de troncos que tendrán las siguientes longitudes:
    a) Superior a 4,50 mm.
    b) Entre 4,20 y 4,65 mm

Solución:
Variable aleatoria:
X: longitud del tronco madre del Pemphigus populitransversus.

a)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{4,5 - 4,4}{0,12} = 0,83.$$

$P(X > 4,5) = P(Z > 0,83) = 1 - P(Z < 0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033 = 20,33\%.$

b)

$$Z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{4{,}2-4{,}4}{0{,}12} = -1{,}67.$$

$$Z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{4{,}65-4{,}4}{0{,}12} = 2{,}08.$$

$P(4{,}2 < X < 4{,}65) = P(-1{,}67 < Z < 2{,}08) = P(Z < 2{,}08) - P(Z < -1{,}67) =$ $0{,}9812 - 0{,}0475 = 0{,}9337 = 93{,}37\%$.

17. Suponga que en una cosecha de tomate de la variedad Hamstead, solamente el 60% cumplen con la especificación de frutos de buena calidad. La mercancía se empaca en cajas de 30 unidades y se despachan al mercado nacional. En el departamento de compras, el encargado de control de calidad, revisa aleatoriamente una caja de cada envío. Si más de la mitad de los frutos cumplen con las medidas de buena calidad, el envío es aceptado; de lo contrario, lo rechaza.
a) Calcular la media, la varianza y la desviación estándar.
b) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el envío?
c) ¿Cuál es la probabilidad de aceptarlo?

Solución:

a) X: número de unidades de buena calidad: $x=0,1,2,\cdots,30$.
Media: $\mu = np = 30 \times 0{,}60 = 18$.
Varianza: $\sigma^2 = npq = 30 \times 0{,}60 \times 0{,}40 = 7{,}2$.
Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{7{,}2} = 2{,}683$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el envío?
Modelo Binomial: $n = 30$, $p = 0{,}60$.

Aproximación del modelo binomial a normal:

Media: $E(X) = \mu = np = 30 \times 0{,}60 = 18$.
Varianza: $V(X) = \sigma^2 = npq = 30 \times 060 \times 0{,}40 = 7{,}2$.
Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{7.2} = 2{,}683$.

Se aplica corrección de continuidad para transformar la variable discreta X en la variable continua X'.

$$Z = \frac{X' - \mu}{\sigma} = \frac{15{,}5 - 18}{2{,}683} = -0{,}93.$$

El envío se rechaza si por caja hay 15 o menos frutos de buena calidad.
$P(X<15) = P(X'<15{,}5) = P(Z<-0{,}93) = 0{,}1761 = 17{,}61\%$.
(probabilidad de rechazar el envío).

c) ¿Cuál es la probabilidad de aceptarlo?
$P(X > 15) = P(X' > 15{,}5) = P(z > -0{,}93) = 1 - 0{,}1761 = 0{,}8239 = 82{,}39\%$.
Probabilidad de aceptar el envío.
Aplicando la distribución binomial con n=30 y p=0,6, se tiene:
$P(X < 15) = F(15) = \sum_{x=0}^{15} \binom{30}{x} 0{,}6^x 0{,}4^{15-x} = 0{,}1753 = 17{,}53\%$
valor que se aproxima al valor 17,61%, calculado con la distribución normal.

18. El peso medio de las frutas de un gran cargamento es de 15 onzas y la desviación estándar es de 1,62 onzas. Si su peso está distribuido normalmente, ¿qué porcentaje de frutas tendrá un peso entre 18 y 20 onzas?

Solución:

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18 - 15}{1{,}62} = 1{,}85$$

$$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{20 - 15}{1{,}62} = 3{,}09.$$

$P(18 < X < 20) = P(1{,}85 < Z \ < 3{,}09) = P(18 < X < 20) =$
$P(Z < 3{,}09) - P(Z < 1{,}85) = 0{,}9990 - 0{,}9678 = 0{,}0312 = 3{,}12\%.$

19. Los recaudos diarios del impuesto predial, se distribuyen normalmente, con un promedio de 35 millones diarios y desviación estándar de 5 millones de pesos. Encuentre la probabilidad de que un día cualquiera se recaude:
    a) Más de 48 millones.
    b) Menos de 40 millones.
    c) Entre 30 y 40 millones.

    Solución:
    Variable aleatoria:
    X: recaudo diario de impuesto predial
    Media: μ = 35 millones de pesos
    Desviación estándar: σ = 5 millones de pesos

a)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{48 - 35}{5} = 2{,}6.$$

$P(X > 48) - P(Z > 2{,}6) = 1 - P(Z < 2{,}6) = 1 - 0{,}9953 = 0{,}0047$
$= 0{,}47\%$

b)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{40 - 35}{5} = 1$$

$P(X < 40) = P(Z < 1) = 0{,}8413 = 84{,}13\%.$

c)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 35}{5} = -1$$

$P(30 < X < 40) = P(-1 < Z \ < 1) = P(Z < 1) - P(Z < \ -1)$
$= 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826 = 68{,}26\%.$

20. La distribución salarial de los empleados de una empresa es normal con media \$800000 y desviación típica \$60000. Determinar el porcentaje de empleados que gana:
    a) Menos de \$900000
    b) Más de \$620000

Solución:
Variable aleatoria:
X: salario de los empleados.
Media: $\mu = \$800000$.
Desviación estándar: $\sigma = \$60000$.

a)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{900000 - 800000}{60000} = 1{,}67.$$

$$P(X < 900000) - P(Z < 1{,}67) = 0{,}9525 = 95{,}25\%.$$

b)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{620000 - 800000}{60000} = -3.$$

$$P(X > 620000) = P(Z > -3) = P(Z < 3) = 0{,}9987 = 99{,}87\%.$$

21. La vida útil de cierta marca de baterías es normal, con media 30 meses y desviación estándar 6 meses. Calcular el porcentaje de baterías que tendrán una duración:
    a) Menor de 24 meses.
    b) Entre 24 y 40 meses.
    c) Superior a 40 meses.

Solución:
Variable aleatoria:
X: vida útil de baterías.
Media: μ = 30 meses.
Desviación estándar: σ = 6 meses.

a)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{24-30}{6} = -1.$$

$P(X < 24) = P(Z < -1) = 0,1587 = 15,87\%.$

b)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{40-30}{6} = 1,67.$$

$P(X < 40) = P(Z < 1,67) = 0,9525 = 95,25\%.$

$P(24 < X < 40) = P(-1 < Z < 1,67) =$
$P(Z < 1,67) - P(Z < -1) = 0,9525 - 0,1587 = 0,7938 = 79,38\%$

c)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{40-30}{6} = 1,67.$$

$P(X > 40) = P(Z > 1,67) = 1 - P(Z < 1,67) = 1 - 0,9525 =$
$0,0475 = 4,75\%.$

22. Los agentes de aduanas de los Estados Unidos, chequean los documentos de las mercancías que entran al país para ver si cada envío se encuentra debidamente legalizado. Los registros del departamento muestran que el 50% de los envíos tiene su documentación correcta. Si se toma una muestra aleatoria de 8 envíos, utilizando el modelo Binomial, calcule la probabilidad de que por lo menos uno tenga su documentación debidamente legalizada.

Solución:

$n = 8,\ p = 0,5.$
X: número de documentos legalizados; $x = 0, 1, \cdots, 8.$

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = f(x) = \binom{8}{x} 0{,}5^x \times 0{,}5^{8-x}.$$

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{8}{0} 0{,}5^0 \times 0{,}5^8 = 0{,}0039 = 0{,}39\%.$$

$$P(X \geq 1) = 1 - f(0) = 1 - 0{,}0039 = 0{,}9961 = 99{,}61\%.$$

23. La probabilidad de que un cierto tipo de componente se comporte adecuadamente bajo condiciones de alta temperatura es del 90 %. Si el dispositivo tiene 6 componentes, calcular la probabilidad de que:

    a) Todos los componentes se comporten adecuadamente; es decir, que ninguno falle.

    b) Falle por lo menos uno de los componentes.

Solución:

a) Todos los componentes se comporten adecuadamente.
$n = 6$, $p = 0{,}9$.

x: número de componentes que se comportan adecuadamente; $x = 0, 1, 2, \cdots, 6$.

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = f(x) = \binom{6}{x} 0{,}9^x \times 0{,}1^{6-x}.$$

$$P(X = 6) = f(6) = \binom{6}{6} 0{,}9^6 \times 0{,}1^0 = 0{,}5314 = 53{,}14\%.$$

b) Falle por lo menos uno de los componentes.
$p = 0, 10$, $q = 1 - p = 0{,}9$.

x: número de componentes que fallan: $0,1,2,\cdots,6$.

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{6}{0} 0{,}10^0 \times 0{,}90^6 = 0{,}5314.$$

La probabilidad de que no falla ninguno es 53,14%.

$P(X \geq 1) = 1 - f(0) = 1 - 0{,}5314 = 0{,}4686 = 46{,}86\%$.

La probabilidad de que falle por lo menos 1, es 46,86%.

24. El promedio de clientes que llegan a la ventanilla de un banco es 4 por minuto. Cuál será la función de probabilidad y la variable aleatoria para determinar la probabilidad de que durante el próximo minuto:

a) No lleguen clientes.
b) Lleguen máximo 3 clientes.
c) Lleguen por lo menos 4 clientes.

Solución:

Variable aleatoria:

X: número de clientes que llegan a la ventanilla de un banco, por minuto; $x = 0, 1, 2, \cdots$

Media: $\lambda = 4$ clientes por minuto.

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4}4^x}{x!}.$$

a) Modelo de Poisson con media 4 clientes por minuto.

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0{,}0183 = 1{,}83\%.$$

b)

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 0{,}0732 = 7{,}32\%.$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 0{,}1464 = 14{,}64\%.$$

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{e^{-4}4^3}{3!} = 0{,}1952 = 19{,}52\%.$$

$$P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$= 0{,}0183 + 0{,}0732 + 0{,}1464 + 0{,}1952 = 0{,}4331 = 43{,}31\%.$$

25. Determinar el área bajo la curva de una distribución normal estandarizada (Z) en cada uno de los siguientes casos:
   a) $P(0 < Z < 1{,}2)$.
   b) $P(-0{,}68 < Z < 0)$.
   c) $P(-O{,}46 < Z < 2{,}21)$.
   d) $P(Z < -1{,}28)$.
   e) $P(Z > 2{,}33)$.

Solución:

a) $P(0 < Z < 1{,}2) = P(Z < 1{,}2) - P(Z(< 0) = 0{,}8849 - 0{,}5 = 0{,}3849 = 38{,}49\%$.

b) $P(-0{,}68 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0{,}68) = 0{,}5 - 0{,}2483 = 0{,}2517 = 25{,}17\%$.

c) $P(-0{,}46 < Z < 2{,}21) = P(Z < 2{,}21) - P(Z < -0{,}46) = 0{,}9864 - 0{,}3228 = 0{,}6636 = 66{,}36\%$.

d) $P(Z < -1{,}28) = 0{,}1003 = 10{,}03\%$.

e) $P(Z > 2{,}33) = 1 - P(Z < 2{,}33) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099 = 0{,}99\%$.

26. Determinar el valor de K en una distribución normal estandarizada, en cada uno de los siguientes casos:
a) $P(Z < K) = 0{,}05 = 5\%$.
b) $P(Z > K) = 0{,}01 = 1\%$.
c) $P(Z < K) = 0{,}95 = 95\%$.
d) $P(K1 < Z < K2) = 0{,}98 = 98\%$.
e) $P(Z > K) = 0{,}90 = 90\%$.

Solución:

Se utiliza la tabla de la Distribución Normal para buscar la probabilidad dada y determinar el valor de K.
a) $P(Z < K) = 0{,}05$; $K = -1{,}64$.
b) $P(Z > K) = 0{,}01$; $K = 2{,}32$.
c) $P(Z < K) = 0{,}95$; $K = 1{,}64$.
d) $P(K1 < Z < K_2) = 0{,}98$; $K1 = -2{,}32$, $K_2 = 2{,}32$.
e) $P(Z > K) = 0{,}90$; $K = -1{,}28$.

27. La empresa de energía A empezará a promover la conservación de energía, ofreciendo tasas de descuento a los consumidores que mantengan su uso de energía por debajo de ciertos estándares establecidos. Un reporte reciente de la empresa afirma que el 70% de los residentes en la ciudad donde está la empresa A ha reducido su uso de energía eléctrica, lo suficiente para ser tenidos en cuenta en tarifas de descuento. Supongamos que selecciona al azar 10 usuarios, entonces, determinar la probabilidad de que:
a) Por lo menos 7 reciban descuentos.
b) Máximo 4 reciban descuentos.
c) Todos reciban descuentos.

Solución:

Variable aleatoria:

X: número de usuarios que reciben descuentos; $x = 0,1,2,\cdots,10$.

La variable aleatoria X tiene distribución binomial con

$n = 10$ y $p = 0,7$.

$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0,7^x \times 0,3^{10-x}$.

a)

$$P(X = 7) = f(7) = \binom{10}{7} 0,7^7 \times 0,3^3 = 0,2668 = 26,68\%.$$

$$P(X = 8) = f(8) = \binom{10}{8} 0,7^8 \times 0,3^2 = 0,2335 = 23,35\%.$$

$$P(X = 9) = f(9) = \binom{10}{9} 0,7^9 \times 0,3^1 = 0,1211 = 12,11\%.$$

$$P(X = 10) = f(10) = \binom{10}{10} 0,7^{10} \times 0,3^0 = 0,0282 = 2,82\%.$$

$$P(X \geq 7) = f(7)) + f(8) + f(9) + f(10) = 0,6496 = 64,96\%.$$

b)

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{10}{0} 0,7^0 \times 0,3^{10} = 0.$$

$$P(X = 1) = f(1) = \binom{10}{1} 0,7^1 \times 0,3^9 = 0.$$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{10}{2} 0,7^2 \times 0,3^8 = 0,0014 = 0,14\%.$$

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{10}{3} 0,7^3 \times 0,3^7 = 0,0090 = 0,90\%.$$

$$P(X = 4) = f(4) = \binom{10}{4} 0,7^4 \times 0,3^6 = 0,0367 = 3,67\%.$$

$$P(X \leq 4) = f(0)) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0,0471 = 4,71\%$$

c)

$$P(X = 10) = f(10) = \binom{10}{10} 0{,}7^{10} \times 0{,}3^{0} = 0{,}0282 = 2{,}82\%.$$

28. Los diámetros interiores de tubos de acero producidos por una fábrica, tienen distribución normal, con media 10 pulgadas y desviación estándar 0.1 pulgada. Tubos con diámetros superiores a 10,17 e inferiores a 9,83 pulgadas, se consideran de mala calidad. ¿Qué porcentaje de la producción cumple las especificaciones de buena calidad?

Solución:

$\mu = 10; \sigma = 0{,}1; Ls = 10{,}17;\ Li = 9{,}83.$

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{9{,}83 - 10}{0{,}1} = -1{,}7.$$

$$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10{,}17 - 10}{0{,}1} = 1{,}7.$$

$P(9{,}83 < X < 10{,}17) = P(-1{,}7 < Z < 1{,}7) = P(Z < 1{,}7) - P(Z < -1{,}7) = 0{,}9554 - 0{,}0446 = 0{,}9108 = 91{,}08\%.$

El 91,08% de la producción cumple con las especificaciones de buena calidad.

Capítulo 3

Estadística Inferencial

1. Un estudiante gasta mensualmente un promedio de $ 25000 en materiales, con desviación estándar $ 4.000. Si se elige al azar una muestra de 25 estudiantes, ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de la muestra sea inferior a $26000?

   Solución:

   μ = 25000; σ = 4.000; n = 25; $\overline{X}$ < 26000.

Según el teorema central del límite, la variable se aproxima a una distribución normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

$P(\overline{X} < 26000) = ?$

Estandarizar la variable $\overline{X}$:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{26000 - 25000}{4000/\sqrt{25}} = 1{,}25.$$

$P(\overline{X} < 26000) = P(Z < 1{,}25) = 0{,}8943 = 89{,}43\%.$

La probabilidad de que el promedio de la muestra sea inferior a $26000 es 0,8943 = 89,43%.

2. El contenido de nicotina de cierta marca de cigarrillos tiene distribución normal con media desconocida y desviación estándar 1 miligramo.
   a) ¿Cuál es el error estándar de la media poblacional?
   b) ¿Cuál es el margen de error?
   c) Construir un intervalo del 95% de confianza para la media con base a una muestra de 36 cigarrillos, cuyo contenido promedio de nicotina es de 30 miligramos.

Solución:

$\sigma = 1; 1 - \alpha = 0{,}95; n = 36;\ \overline{X} = 30.$

Si el grado de confianza es 95%, entonces $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

a) Error estándar de la media poblacional:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}.$$

b) Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{36}} = 1{,}96 \times \frac{1}{6} = 0{,}33.$$

c) Intervalo de confianza:

$$P\left(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E\right) = 1 - \alpha$$

$$P(30 - 0{,}33 < \mu < 30 + 0{,}33) = 0{,}95 = 95\%;$$

$$P(29{,}67 < \mu < 30{,}33) = 0{,}95 = 95\%.$$

Con un 95% de confiablidad, se puede concluir que la media de la población está comprendida entre 29,67 y 30,33 miligramos de nicotina.

3. La probabilidad de que un estudiante de Ingeniería de Sistemas apruebe Cálculo I es del 50%. Si en el curso hay 50 estudiantes, cuál es la probabilidad de que:
a) Más del 54% gane la materia.
b) Menos del 48% gane la materia.
c) Entre el 48% y el 54% aprueben la materia.

Solución:

$p = 0{,}5;\ q = 1 - p = 0{,}5; n = 50.$

Según el teorema central del límite, la variable $\hat{p}$ se aproxima a una distribución normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

a) La variable $\hat{p}$ que corresponde a la proporción de estudiantes que aprueban la materia tiene una distribución aproximadamente normal con media y desviación estándar $\sqrt{\frac{pq}{n}}$, cuya aproximación es más precisa a medida que aumenta el tamaño de la muestra, entonces:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}54 - 0{,}50}{\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{50}}} = 0{,}57.$$

$$P(\hat{p} > 0{,}54) = P(Z > 0{,}57) = 1 - 0{,}7157 = 0{,}2843 = 28{,}43\%.$$

b)

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}48 - 0{,}50}{\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{50}}} = -0{,}28.$$

$P(\hat{p} < 0{,}48) = P(Z < -0{,}28) = 0{,}3897 = 38{,}97\%$.

c) $P(0{,}48 < p\hat{}< 0{,}54) = P(-0{,}28 < Z < 0{,}57) = P(Z < 0{,}54) - P(Z < -0{,}28) = 0{,}7054 - 0{,}3897 = 0{,}3067 = 30{,}67\%$.

4. Cierto aparato electrónico tiene una duración media de 1500 horas y una desviación estándar de 120 horas. Si se toma una muestra aleatoria de 36 aparatos, determinar la probabilidad de que el promedio:
   a) Sea inferior a 1540 horas.
   b) Esté entre 1480 y 1540 horas.

Solución:

Por el teorema central del límite, la variable $\overline{\mathrm{X}}$ se aproxima a la distribución normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

a) Sea inferior a 1540 horas.

$\mu = 1500 \quad \sigma = 120 \quad n = 36 \quad \overline{X} = 1540.$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1540 - 1500}{120/\sqrt{36}} = 2.$$

$P(\overline{X} < 1540) = P(Z < 2) = 0{,}9772 = 97{,}72\%$.

b) Esté entre 1480 y 1540 horas.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1480 - 1500}{120/\sqrt{36}} = -1.$$

$$P(\overline{X} < 1480) = P(Z < -1) = 0{,}1587 = 15{,}87\%.$$

$$P(1480 < \overline{X} < 1540) = P(-1 < Z < 2) =$$

$$P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185 = 81{,}85\%.$$

5. Un fabricante de tubos fluorescentes afirma que la vida media de este material es de 1600 horas y la desviación estándar 420 horas. Los consumidores creen que el fabricante exagera. Para comprobarlo, se toma una muestra de 64 tubos y se encuentra que la vida media es de 1500 horas. ¿Quién tiene la razón a un nivel de significancia del 1%.

Solución:

μ = 1600; σ = 420; n = 64; x = 1500; α = 0,01 = 1%.

En todas las pruebas de hipótesis el nivel de significancia α divide a la curva en 2 regiones: región de rechazo y región de aceptación, donde α corresponde a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, hecho que se conoce como Error tipo I, su magnitud es α.

Cuando el tamaño de la muestra es mayor que 30 y la desviación estándar de la población es conocida, se aplica la distribución normal.

Ho: μ = 1600 (tiene razón el fabricante).
$H1$: μ < 1600 (tienen razón los compradores).

Si $\alpha = 0{,}01$, entonces el valor Z crítico es $Z_\alpha = -2{,}33$.

Para tomar la decisión se determina Z calculado:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1500 - 1600}{420/\sqrt{64}} = -1{,}9.$$

Regla de decisión:

$si\ Z_{cal} < \ Z_\alpha$, se rechaza la Ho, de lo contrario se acepta Ho.

Decisión:

Como $Zcal \quad -1{,}9 \ \ Z\alpha = -2{,}33$, no hay evidencia para rechazar Ho, ; por lo tanto, tiene razón el fabricante.

Utilizando p-value:

Si $p{-}value{<}\alpha$, se rechaza la hipótesis nula; caso contrario se acepta.

Como p−value es $P(Z < -1{,}9) = 0{,}0287$ es mayor que $\alpha = 0{,}05$, no hay evidencia para rechazar Ho (Figura 1).

La región de rechazo corresponde al nivel de significancia α.

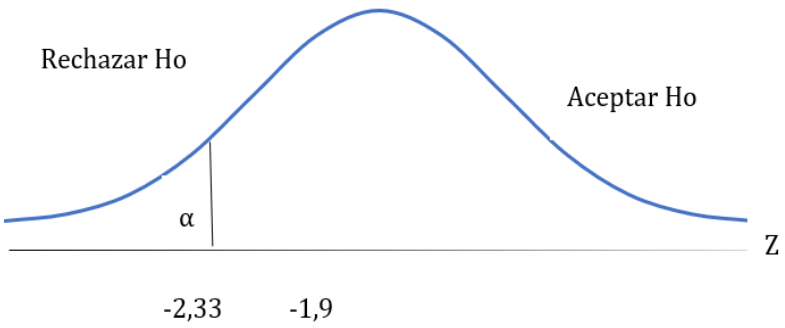


Figura 1. *Estadística inferencial: representación gráfica problema 5*

6. La media y la desviación típica de la carga máxima soportada por 60 cables son 11.09 y 0.73 toneladas, respectivamente. Calcular los límites del 95% de confianza para la media de todos los cables de este tipo.

Solución:

$\sigma = 0{,}73; 1 - \alpha = 0{,}95; n = 60; \overline{X} = 11{,}09$ toneladas.

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}73}{\sqrt{60}} = 0{,}094.$$

Margen de error:

Si grado de confianza es 95%, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 0{,}094 = 0{,}018.$$

Intervalo de confianza:

$P\left(\overline{X} - E < \mu < \overline{x} + E\right) = 1 - \alpha.$

$P(11{,}09 - 0{,}018 < \mu < 11{,}09 + 0{,}018) = 0{,}95 = 95\%.$

$P(11{,}072 < \mu < 11{,}108) = 0{,}95 = 95\%.$

Con un 95% de confiablidad, se puede concluir que la media de toneladas de carga soportada por los cables en la población, está comprendida entre 11,072 y 11,108

7. Dos muestras aleatorias tomadas de poblaciones normales, con varianzas idénticas y desconocidas dan los siguientes resultados muestrales:

$$n_1 = 30; n_2 = 40;\ \overline{X}_1 = 10;\ \overline{X}_2 = 25;\ S_1 = 34{,}6;\ S_2 = 30.$$

Contrastar la hipótesis de que la verdadera diferencia de las medias $\mu 1 - \mu 2$ es -10, frente a la alternativa de que es menor que -10, a un nivel de significancia del 5%.

Solución:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta = -10.$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 = \delta < -10.$

Si $\alpha = 0{,}05$ entonces el valor de Z crítico es $Z_\alpha = -1{,}64.$

La variable $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$, según el teorema central del limite se aproxima a una distribución normal porque las 2 muestras no son menores que 30 y las varianzas de las muestras se pueden estimar como varianzas poblacionales. Si las 2 muestras fueran menores que 30, se aplicaria la distribución t.

Estandarizar la Variable $\overline{D}$:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{D} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(10 - 25) - (-10)}{\sqrt{\frac{34{,}6^2}{30} + \frac{30^2}{40}}} = -0{,}63.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$, se Rechaza Ho; caso contrario, se acepta Ho.

Decisión:

Como $Z_{cal} = -0{,}63 > Z\alpha = -1{,}64$, entonces no hay evidencia para rechazar Ho (Figura 2); por lo tanto, la verdadera diferencia de promedios entre las 2 poblaciones sí es −10.

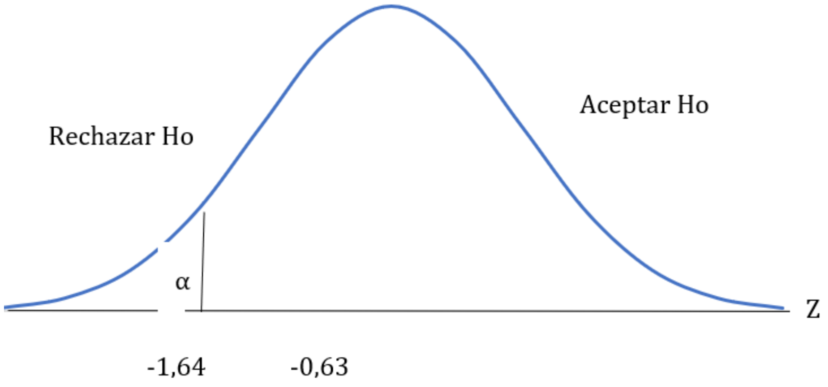


Figura 2. Estadística inferencial: representación gráfica problema 7

8. Un fabricante de tubos fluorescentes afirma que la vida media de este material es de 1600 horas y la desviación estándar 420 horas. Los consumidores creen que el fabricante exagera. Para comprobarlo, se toma una muestra de 64 tubos y se encuentra que la vida media es de 1500 horas. ¿Quién tiene la razón a un nivel de significancia del 1%?

Solución:

$\mu = 2800; \sigma = 280; n = 100.$

$P(\overline{X} < 2900) = ?$

Cuando el tamaño de la muestra es mayor que 30 y la desviación estándar de la población es conocida, se aplica la distribución normal.

Estandarizar la variable $\overline{X}$:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2900 - 2800}{280/\sqrt{100}} = 3{,}57.$$

$$P(\overline{X} < 2900) = P(Z < 3{,}57) = 0{,}9998 = 99{,}98\%.$$

9. Se desea conocer la resistencia media a la ruptura de cierta clase de material. Una muestra de 40 cables elegidos al azar revela una tensión media de ruptura igual a 2400 libras y una desviación típica de 150 libras. Determinar el intervalo del 95% de confianza para la verdadera resistencia media a la ruptura de los cables.

Solución:

$\sigma = 150$; $1-\alpha = 0{,}95$; $n = 40$; $\overline{X} = 2400$ libras.

El problema cumple las condiciones de una distribución normal.

Si grado de confianza es 95%, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{150}{\sqrt{40}} = 23{,}71.$$

Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 23{,}71 = 46{,}47.$$

Intervalo de confianza:

$$P\left(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E\right) = 1 - \alpha$$

$$P(2400 - 46.47 < \mu < 2400 + 46{,}47) = 0{,}95 = 95\%.$$

$$P(2353{,}53 < \mu < 2446{,}47) = 0{,}95 = 95\%.$$

Con un 95% de confiablidad, se puede concluir que la media de la población está comprendida entre 2353,53 y 2446,47 de tensión de ruptura.

10. Un fabricante afirma que, al menos el 20% del público prefiere su producto. Se toma una muestra aleatoria de 100 personas para verificar su afirmación, 16 de las cuales expresaron su preferencia por el producto. ¿Esta información es suficiente evidencia para refutar la afirmación del fabricante a un nivel de significancia del 5%?

Solución:

$p = 20\%; n = 100; \hat{p} = 16\%; \alpha = 0{,}05 = 5\%.$

La variable $\hat{p}$ cumple las condiciones de una distribución normal.

$H_0: p = 0{,}20$ (afirmación del fabricante).

$H_1: p < 0{,}20.$

Si grado de confianza es 5%: $Z_\alpha = -1{,}64.$

Estandarizar la variable $\hat{p}$:

$$z_{cal} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}16 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{100}}} = -1.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $Z_{cal} = -1 > Z_\alpha$ = -1,64, no hay evidencia para rechazar H_0 (Figura 3); por lo tanto, la afirmación del fabricante es correcta.

Otra forma de resolver el problema es utilizando p-value:

Si $p - value = P(Z > Z_{cal}) > \alpha$ se acepta la hipótesis nula.

Como $p - value = P(Z < Z_{cal}) = P(Z < -1) = 0{,}1587 > \alpha = 0{,}05$, por lo tanto, no hay evidencia para rechazar H_0.

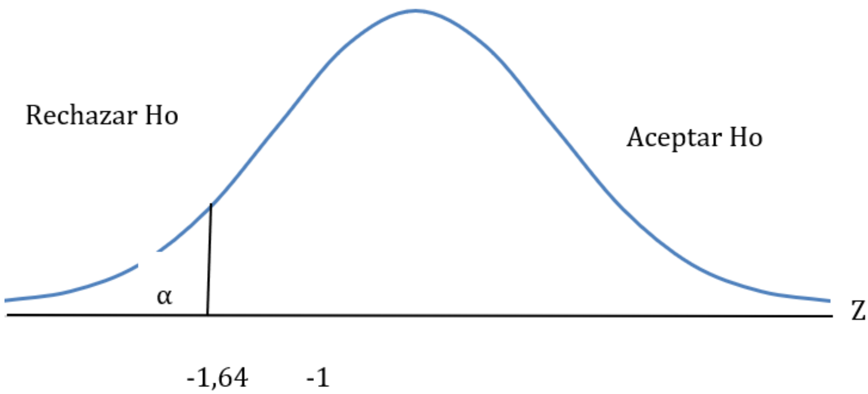


Figura 3. Estadística inferencial: representación gráfica problema 10

11. Los salarios diarios en cierta empresa están distribuidos normalmente con una media de \$1320. Si el 9% de las medias de los salarios diarios en una muestra de 36 obreros es inferior a \$1250, ¿cuál es la desviación estándar de los salarios diarios de esa empresa?

Solución:

$\mu = 1320$ pesos; $\sigma = ?$; $n = 36$; $P\left(\overline{X} < 1250\right) = 9\%$.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1250 - 1320}{\sigma/\sqrt{36}}.$$

Al despejar σ:

$$\sigma = \frac{\left(\overline{X} - \mu\right)\sqrt{n}}{Z} = \frac{(1250 - 1320)\sqrt{36}}{-1{,}34} = 313{,}43.$$

La desviación estándar de los salarios diarios es \$313,43.

12. De cada una de 2 poblaciones normales e independientes, con medias iguales y desviaciones 6,40 y 7,20, respectivamente, se extraen muestras de 64 elementos. Encontrar la probabilidad de que la diferencia entre las medias muestrales sea superior a 0,60.

Solución:

$\mu_1 = \mu_2;\ \mu_1 - \mu_2 = 0;\ \sigma_1 = 6{,}40 \text{ y } \sigma_2 = 7{,}20; n = 64.$

$\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2.$

Según el problema:

$\left|\overline{D}\right| = \left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|.$

Estandarizar la variable $\overline{D}$:

$$Z_{cal} = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{|0{,}60| - 0}{\sqrt{\dfrac{6.4^2}{64} + \dfrac{7{,}2^2}{64}}} = 0{,}5.$$

$$P\left(\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| < 0{,}60\right) = P(|Z| < 0{,}5) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) =$$
$$= P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}5) = 0{,}6914 - 0{,}3085 = 0{,}383 = 38{,}3\%.$$

Entonces,

$P\ (|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| > 0{,}60) = 1 - P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 0{,}60) = 1 - 0{,}3085 = 0{,}6915 = 69{,}15\%.$

13. El 46% de los sindicatos del país están en contra de comerciar con China Continental. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 100 sindicatos muestre que más del 52% tienen la misma posición?

Solución:

Como la muestra es 100 la variable $\hat{p}$ tiene distribución normal.

Estandarizar la variable:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}52 - 0{,}46}{\sqrt{\frac{0{,}46 \times 0{,}54}{100}}} = 1{,}20.$$

$P(\hat{p} > 0{,}52) = P(Z > 1{,}2) = 1 - P(Z < 1{,}2) =$
$1 - 0{,}8849 = 0{,}1151. = 11{,}51\%.$

14. Sea X la vida útil de cierto aparato electrónico, con media desconocida y desviación típica 4000 horas. Una muestra aleatoria de 100 observaciones dio como resultado una media de 30000 horas de duración. Construir un intervalo del 95% de confianza para la verdadera media de duración.

Solución:

$\sigma = 4000; 1 - \alpha = 0{,}95;\ n = 100;\ \overline{X} = 30000.$

El problema cumple las condiciones de una distribución normal.

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{100}} = 400.$$

Margen de error:

Si grado de confianza es 95%, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 400 = 784.$$

Intervalo de confianza:

$P(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E) = 1 - \alpha.$

$P(30000 - 784 < \mu < 30000 + 784) = 0{,}95 = 95\%.$

$P(29216 < \mu < 30784) = 0{,}95 = 95\%.$

Con un 95% de confiablidad se puede concluir que la media de la vida útil del aparato electrónico en la población está comprendida entre 29216 y 30784 horas.

15. Las fábricas A y B elaboran 2 tipos de cables que tienen resistencia media a la rotura de 4500 y 4000 libras, con desviaciones 200 y 300 libras, respectivamente. Si se comprueban 50 cables de A y 100 de B. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de resistencia a la rotura de A sea al menos 600 libras más que B?

Solución:

$\mu_1 = 4500; \mu_2 = 4000; \sigma_1 = 200$ y $\sigma_2 = 300; n_1 = 50;\ n_2 = 100.$

$P(\overline{D} = \overline{X}_A - \overline{X}_B) \geq 600 =?.$

$\delta = \mu_1 - \mu_2 = 4500 - 4000 = 500.$

Estandarizar la variable $\overline{D}$:

$$z = \frac{\overline{D} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{600 - 500}{\sqrt{\frac{200^2}{50} + \frac{300^2}{100}}} = 2{,}42.$$

$P(\overline{X}_A - \overline{X}_B \geq 600) = P(Z > 2{,}42) = 0{,}078 = 7{,}8\%.$

16. Un fabricante de autos sostiene que sus vehículos consumen en promedio 5,5 galones de gasolina cada 100 kilómetros. Un vendedor de la compañía comprueba el consumo de gasolina de 35 autos y encuentra que el consumo medio de este grupo es de 5,65 galones por cada 100 kms, por lo que sospecha que el consumo podría ser superior a la afirmación del fabricante. Si la desviación estándar del consumo es 0,35 galones, ¿será cierta la afirmación del fabricante a un nivel de significancia del 1%?

Solución:

μ = 5,5 galones; σ = 0,35; n_1 = 0,35; $\overline{X}$ = 5,65.

El problema cumple las condiciones de una distribución normal.

Ho: μ = 5,5 galones por cada 100 km (tiene razón el fabricante).
$H1$: μ > 5,5 galones por cada 100 km (tienen razón el vendedor).
Si α = 0,01 = 1%, entonces, valor de Z crítico Z_α = 2,33.

Se determina Z calculado Z_{cal} y se compara con crítico Z_α.

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5{,}65 - 5{,}5}{0{,}35/\sqrt{35}} = 2{,}53.$$

Regla de decisión

Si $Z_{cal} > Z_\alpha$, se rechaza la H_0, caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como Z_{cal} = 2,53 > Z_α = 2,33, hay evidencia para rechazar H_0 (Figura 4); por lo tanto, el vendedor tiene la razón, el consumo de gasolina es superior a 5,5 galones por cada 100 kilómetros.

Utilizando p-value:

Si $p{-}value = P(Z > Z_{cal}) > \alpha$, se acepta la hipótesis nula; caso contrario se rechaza $H0$.

Como $p{-}value = P(Z > Z_{cal}) = P$ $(Z>2{,}53) = 0{,}0057 < \alpha = 0{,}01$, entonces hay evidencia para rechazar H_0; por lo tanto, hay evidencia para apoyar la sospecha del vendedor, el consumo de gasolina es superior a 5,5 galones por cada 100 km de recorrido (Figura 4)

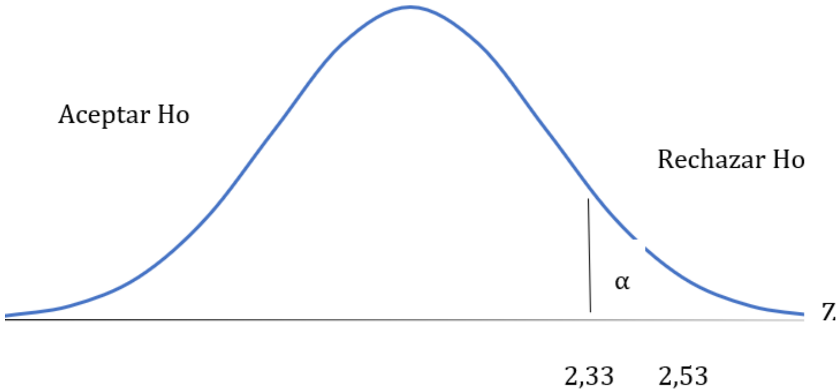


Figura 4. Estadística inferencial: representación gráfica problema 16

17. Una investigación en una universidad realizada para determinar si poseer un automóvil es perjudicial al rendimiento académico de los estudiantes, se basó en 2 muestras aleatorias de 100 alumnos cada una.

El promedio de rendimiento y la varianza de los estudiantes en las muestras fueron:

Sin automóvil: $X_1 = 2{,}70$; $S_1^2 = 0{,}36$; $n_1 = 100$; $n_2 = 100$.
Con automóvil: $X_2 = 2{,}54$; $S_2^2 = 0{,}40$.

¿Presentan los datos suficiente evidencia que indiquen que el rendimiento académico de los estudiantes es superior al de los estudiantes que tienen automóvil a un nivel de significancia del 5%?

Solución:

Como los tamaños de las muestras son mayores que 30, las varianzas poblacionales se estiman con las varianzas muestrales.

μ_1: rendimiento académico de los estudiantes sin automóvil.
μ_2: rendimiento académico de los estudiantes con automóvil.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 - \mu 2 = \delta = 0)$.

$H1$: $\mu_1 > \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 = \delta > 0)$.

Si $\alpha = 0{,}05 = 5\%$, el valor de Z crítico: Z_α=1,64.

Se encuentra $z\ calculado$ y se compara con $z\ crítico$:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{D} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(2{,}70 - 2{,}54) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}36}{100} + \frac{0{,}40}{100}}}$$

$$= \frac{0{,}16 - 0}{\sqrt{\frac{0{,}36}{100} + \frac{0{,}40}{100}}} = 1{,}84.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} > Z_\alpha$, se Rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como Z_{cal} = 1,84 > Z_{α} = 1,64 no hay evidencia para aceptar H_O (Figura 5); por lo tanto, se puede concluir que el rendimiento académico de los estudiantes que no tienen auto es significativamente superior al rendimiento de los que poseen auto.

Utilizando p-value:

$p\text{−}value = P(Z > Z_{cal}) > \alpha$, se acepta la hipótesis nula; caso contrario, se rechaza H_O.

Como $p\text{−}value = P(z > 1{,}84) = 0{,}0329 < \alpha = 0{,}05$ se rechaza H_O.

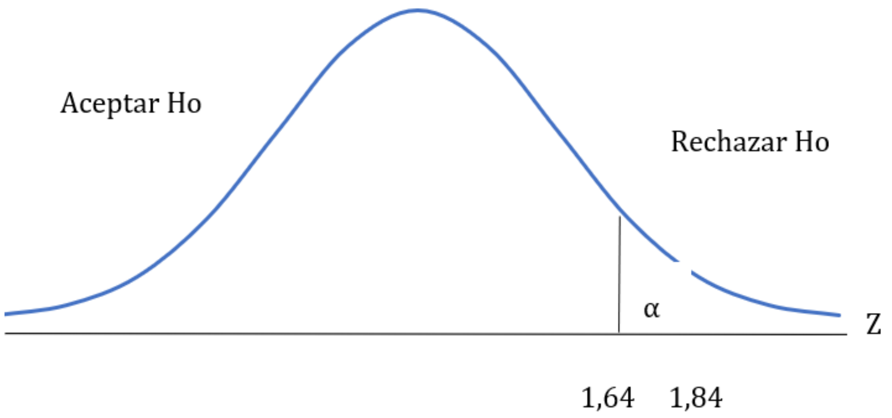


Figura 5. Estadística inferencial: representación gráfica problema 17

18. Las lámparas que fabrica cierta empresa, tienen una vida media de 800 horas y una desviación estándar de 60 horas. Determinar la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 406 lámparas, la vida media:

a) Esté entre 790 y 810 horas.
b) Sea superior a 820 horas.

Solución:

μ = 800 horas; σ = 60 horas; n = 406 lámparas.

Como el tamaño de la muestra es superior a 30 y se conoce la desviación estándar de la población, el problema cumple las condiciones de una distribución normal.

a)

$$P(790 < \overline{X} < 810) = ?$$

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{790 - 800}{60/\sqrt{406}} = -3,35.$$

$$Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{810 - 800}{60/\sqrt{406}} = 3,35.$$

$$P(790 < \overline{X} < 810) = P(-3,35 < Z < 3,35) =$$

$$P(Z < 3,35) - P(Z < -3,35) = 0,9996 - 0,0004 = 0,9992 = 99,92\%$$

b)

$$P(\overline{X} > 820) = ?$$

$$Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{60/\sqrt{406}} = 6,7.$$

$$P(\overline{X} > 820) = P(Z > 6,7) = 0.$$

19. Una muestra de 200 artículos producidos por una máquina debe tener como especificaciones un diámetro medio de 3.6 cms. Si la desviación estándar es de 0,21 cms, plantear una regla de decisión del 5% de significancia para determinar a partir de

qué valores la máquina no cumple con las especificaciones (Sugerencia H_0: m = 3,6 cms, cumple las especificaciones).

Solución:

μ = 3,6 cm; σ = 0,21 cm; n = 200 artículos.

El problema cumple las condiciones de la distribución normal.

H_0: $\mu = 3{,}6$ cm (cumple las especificaciones).
H_1: $\mu \neq 3{,}6$ cm (no cumple las especificaciones).

$$P\left(K_1 < \overline{X} < K_2\right) = P(-1{,}96 < Z < 1{,}96) = 0{,}95 = 95\%.$$

$$K_1 = \mu - Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}6 - 1{,}96\frac{0{,}21}{\sqrt{200}} = 3{,}57.$$

$$K_2 = \mu + Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}6 + 1{,}96\frac{0{,}21}{\sqrt{200}} = 3{,}63.$$

Regla de decisión

Si $K_1 < \overline{X} < K_2$ la máquina cumple las especificaciones; por lo tanto, si el promedio de la muestra es menor que 3,57 cm o mayor que 3,63 cm, la máquina no cumple las especificaciones.

20. El número de horas de duración de una pila para transistores tiene distribución normal, con media 100 horas y desviación 20 horas.

Si se toma muestras de 36 pilas, ¿qué porcentaje de pilas tendrá una duración promedio entre 97 y 105 horas?

Solución:

$\mu = 100$ horas; $\sigma = 20$ horas; $n = 36$ pilas.

$P(97 < \overline{X} < 105) =?$

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{97 - 100}{20/\sqrt{36}} = 0{,}9.$$

$$Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{105 - 100}{20/\sqrt{36}} = 1{,}5.$$

$P(97 < \overline{X} < 105) = P(0{,}9 < \mathrm{Z} < 1{,}5) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1{,}5) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0{,}9) = 0{,}9332 - 0{,}8159 = 0{,}1173 = 11{,}73\%.$

El 11,73% de las pilas tendrá una duración promedio entre 97 y 105 horas.

21. Se sabe que cierta marca de computadores tiene el 65% del mercado. Si se toma 2 muestras de 200 usuarios cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia entre la primera y la segunda muestra sea superior al 10% en las preferencias de los usuarios de esa clase de computadores?

Solución:

$n_1 = n_2 = 200$; $p = 0{,}65$.

El problema cumple las condiciones de una distribución normal.

$\widehat{\Delta P} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2.$

$\Delta P = p_1 - p_2.$

$P(\widehat{\Delta P} > 0{,}10) =?$

Estandarizar la variable $\widehat{\Delta P}$:

$$Z = \frac{\widehat{\Delta P} - \Delta P}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}} = \frac{0{,}10 - 0}{\sqrt{\frac{0{,}65 \times 0{,}35}{200} + \frac{0{,}65 \times 0{,}35}{200}}} = 2{,}09$$

$P\left(\widehat{\Delta P} > 0{,}10\right) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0{,}10) = P(Z > 2{,}09) = 1 - p(Z < 2{,}09) = 1 - 0{,}98217 = 0{,}0183. = 1{,}83\%$.

22. Se ha determinado que la capacidad de un puente es de 28 toneladas en promedio, con desviación estándar 5 toneladas. Una muestra de 30 camiones que transitan por esa vía tiene un promedio de 30,5 toneladas. Comprobar si se está sobrepasando la capacidad del puente a un nivel de significancia del 5%.

Solución:

$\mu = 28$ toneladas; $\sigma = 0{,}05 = 5\%$; $n = 30$; $\overline{X} = 30{,}5$ toneladas.

El problema cumple las condiciones de una distribución normal.

$H_0 : \mu = 28$ (no sobrepasa la capacidad del puente).

$H_1 : \mu > 28$ (sobrepasa la capacidad del puente).

Si $\alpha = 0{,}05 = 5\%$ entonces, Z crítico: $Z_\alpha = 1{,}64$.

Se determina Z_{cal} y se compara con Z_α:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{30{,}5 - 28}{5/\sqrt{30}} = 2{,}74.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} > Z_\alpha$ se rechaza la H_0; caso contario, se acepta H_0.

Regla de decisión:

Si Z_{cal}>$Z\alpha$ se rechaza la H_0; caso contario, se acepta H_0.

Decisión: Como Z_{cal} = 2,74 > Z_α = 1,64, no existe evidencia para aceptar H_0 (Figura 6); por lo tanto, se puede concluir que se está sobrepasando la capacidad del puente.

Utilizando p-value:

Si $p{-}value = P(Z > Z_{cal}) > \alpha$ se acepta H_0, caso contrario se rechaza H_0.

Como $p{-}value = P(z > 2{,}74) = 0{,}0031 < \sigma = 0{,}05$, no existe evidencia para aceptar H_0; por lo cual, con una confianza del 95% se puede afirmar que se está sobrepasando la capacidad del puente.

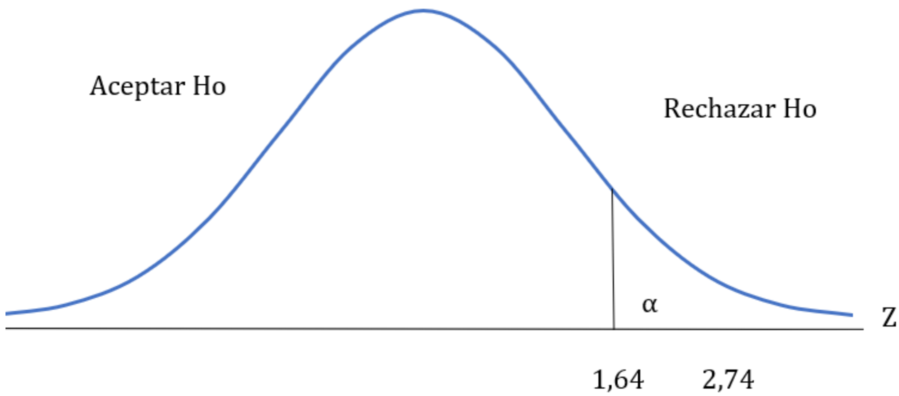


Figura 6. Estadística inferencial: representación gráfica problema 22

23. Se selecciona una muestra aleatoria de 500 compradores de un centro comercial, con el fin de determinar la distancia promedio que recorren hasta allí. La muestra revela que el promedio es 23,5

millas y la desviación estándar 10,4 millas. ¿Cuáles son los límites del 95% de confianza para la verdadera media de la población?

Solución:

$\sigma = 10,4; 1 - \alpha = 0,95$; $n = 500$; $\overline{X} = 23,5$.

Según el teorema central del límite, la variable $\overline{X}$ se aproxima a una distribución normal.

Si el grado de confianza es 0,95, entonces $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10,4}{\sqrt{500}} = 0,465.$$

Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \times 0,465 = 0,91.$$

Intervalo de confianza:

$$P(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E) = 1 - \alpha.$$

$P(23,5 - 0,91 < \mu < 2.3,5 + 0,91) = 0,95 = 95\%$.
$P(22,59 < \mu < 24,41) = 0,95 = 95\%$.

Con un 95% de confiablidad, se puede concluir que la media de la población está comprendida entre 22,59 y 24,41 millas.

24. En el problema anterior, ¿cuál debería ser el tamaño de muestra, si se desea un error máximo de 1,5 millas y una confiabilidad del 98%?

Solución:

$\sigma = 10.$

Margen de error: $e = 1{,}5$ millas.

Si el grado de confiablidad $1 - \alpha = 98\%$, entonces $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33.$

$$n = \frac{Z^2\sigma^2}{e^2} = \frac{2.33^2 \times 10{,}4^2}{1{,}5^2} = 261.$$

El tamaño de la muestra para que se cumplan estos requisitos es de 261 compradores.

25. Una compañía transnacional instituyó recientemente un programa de seguridad en el trabajo para reducir el tiempo perdido debido a accidentes de trabajo. En los 48 meses siguientes a la implantación del programa, el tiempo perdido a causa de accidentes de trabajo promedió 91 horas por mes, con una desviación estándar de 14 horas. En los 50 meses anteriores al programa de seguridad el tiempo perdido era de 108 horas y la desviación estándar 12 horas. Estime la diferencia del tiempo perdido debido a accidentes de trabajo antes y después del programa de seguridad, usando un intervalo del 90% de confianza.

Solución:

$n1 = 48; \overline{x}_1 = 91; S_1 = 14; n_2 = 50;\ \overline{x}_2 = 108;\ S_2 = 12; 1 - \alpha = 90\%.$

$\delta = \mu_1 - \mu_2.$

Como el tamaño de cada muestra es mayor que 30, la varianza de la población se puede estimar con la varianza de la muestra, así: estimación de σ_1 = 14, estimación de σ_2 = 12.

Error estándar de la diferencia de promedios

$$\sigma_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{14^2}{48} + \frac{12^2}{50}} = 2{,}64.$$

Si el grado de confianza es del 90%, entonces $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64.$

Margen de error:

$Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\overline{D}} = 1{,}64 \times 2{,}64 = 4{,}33.$

Diferencia de promedio antes y después:

$\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 108 - 91 = 17.$

$P(\overline{D} - E < \mu_1 - \mu_2 < \overline{D} + E) = 0{,}90 = 90\%.$

$P(17 - 4{,}33 < \mu_1 - \mu_2 < 17 + 4{,}33) = 0{,}90 = 90\%.$

$P(12{,}67 < \mu_1 - \mu_2 < 17 + 21{,}33) = 0{,}90 = 90\%.$

Con el 90% de confianza se puede afirmar que la verdadera diferencia del tiempo perdido debido a accidentes de trabajo, antes y después del programa de seguridad, está entre 12,67 y 21,33 horas.

26. Contrastar la hipótesis de que la variabilidad de compras anuales de 2 tipos de clientes son diferentes, a un nivel de significancia del 5%, sabiendo que en una muestra de 12 clientes, la varianza fue 40, y en otra muestra de 10 clientes la varianza fie 30.

Solución:

$n_1 = 12;\ n_2 = 10; S_1^2 = 40;\ S_2^2 = 30.$

Para contrastar 2 varianzas se aplica la distribución F de Fisher.

$$\mathrm{H}_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Longrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1.$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Longrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

Grados de libertad:

$v_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11;\ v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9.$

$$F_1\ crítico\ (\frac{\alpha}{2} = 0{,}025; v_1 = 11; v_2 = 9) = 0{,}28.$$

$$F_2\ crítico\ (1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}975; v_1 = 11, v_2 = 9) = 3{,}9.$$

F calculado: F_{cal}

$$F_{cal} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{40}{30} = 1{,}33.$$

Regla de decisión:

Si F_1 *crítico* < F_{cal}< F_2 *crítico*, entonces se acepta $H0$; en caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como 0,28 < F_{cal} = 1,33 < 3,9, no hay evidencia para rechazar H_0; por lo tanto, las varianzas de las 2 poblaciones son iguales (Figura 7).

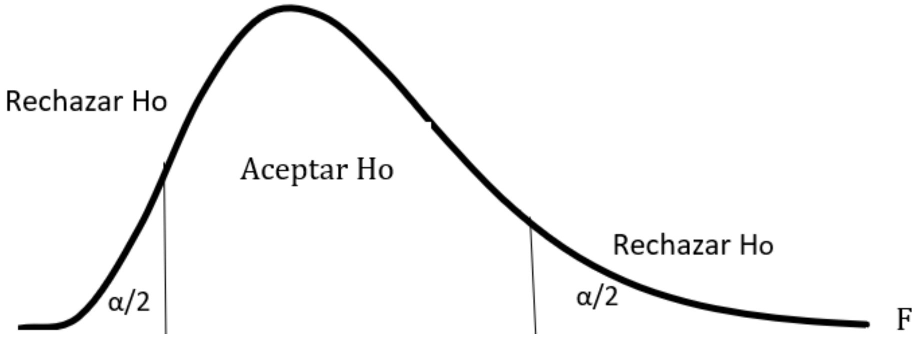


Figura 7. Estadística inferencial: representación gráfica problema 26

27. Se ha determinado que el consumo promedio de gaseosas en la ciudad es de 5300 botellas diarias, con desviación 250 botellas. Sin embargo, el gerente de la empresa Coca Cola asegura que el consumo ha disminuido. En este sentido, se toma una muestra durante los últimos 30 días y se encuentra que el promedio es de 4500 botellas. Determinar, a un nivel de significancia del 1%, si el consumo ha disminuido efectivamente.

Solución:

μ = 5300 botellas diarias; σ = 250; n = 30; $\bar{X}$ = 4500;α = 0,01 = 1%.

Los datos cumplen la distribución normal.

Ho: $\mu = 5300$ botellas diarias.

$H1$: $\mu < 5300$ botellas diarias.

Si $\alpha = 0{,}01 = 1\%$, entonces, $Z_{\alpha} = -2{,}33$.

Se determina Z_{cal} y se compara con Z_{α}:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4500 - 5300}{250/\sqrt{30}} = -17{,}5.$$

Reglas de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_{\alpha}$, se rechaza la H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $Z_{cal} = -17{,}5 < Z_{\alpha} = -2{,}33$, no existe evidencia para aceptar H_0 (Figura 8).

Utilizando p-value:

Como $p\text{–}value = P(\, Z < Z_{cal}) = P(Z < -17{,}5) = 0 < \alpha = 0{,}01$, no existe evidencia para aceptar Ho; esto es, el consumo promedio de gaseosas en la ciudad es menor que 5300 botellas diarias (Figura 8).

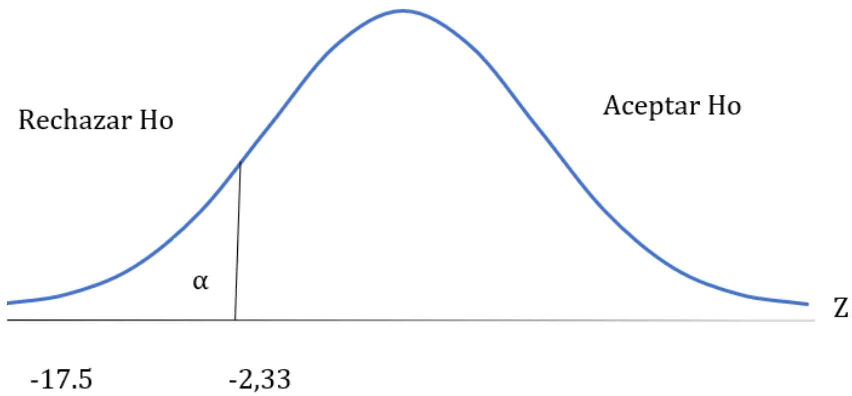


Figura 8. Estadística inferencial: representación gráfica problema 27

28. Se toman 2 muestras independientes de 25 empleados cada una, la primera de la empresa A y la segunda de la empresa B. Se obtiene los siguientes resultados: promedios 500 y 800 de unidades producidas a la semana, respectivamente; y desviaciones $S_1 = 25$, $S_2 = 10$. Comprobar la hipótesis de que las varianzas sean iguales o diferentes con un nivel de significancia a = 5% .

Solución:

$n_1 = 25;\ n_2 = 25; S_1 = 25;\ S_2 = 10.$

Para contrastar 2 varianzas se aplica la distribución F de Fisher.

$$\mathrm{H}_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Longrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1.$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Longrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq\ 1.$$

Grados de libertad:

$v_1 = 25 - 1 = 24;\ v_2 = 25 - 1 = 24.$

$v_1 = n_1 - 1 = 25 - 1 = 24;\ v_2 = n_2 - 1 = 25 - 1 = 24.$

$$F_1\ crítico(\frac{\alpha}{2} = 0.025, v_1 = 24, v_2 = 24) = 0{,}44.$$

$$F_2\ crítico\ (1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}025 = 0.975, v_1 = 24, v_2 = 24) = 2{,}30.$$

F calculado: F_{cal}

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{25^2}{10^2} = \frac{625}{100} = 6{,}25.$$

Regla de decisión:

Si F_1 *crítico* < F_{cal}<F_2 *crítico*, entonces se acepta $H0$; en caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como $F_{ca\,l}$= 6,25 > F_2 = 2,30, no existe evidencia para aceptar H_0; por lo tanto, las varianzas de las 2 poblaciones son diferentes (Figura 9).

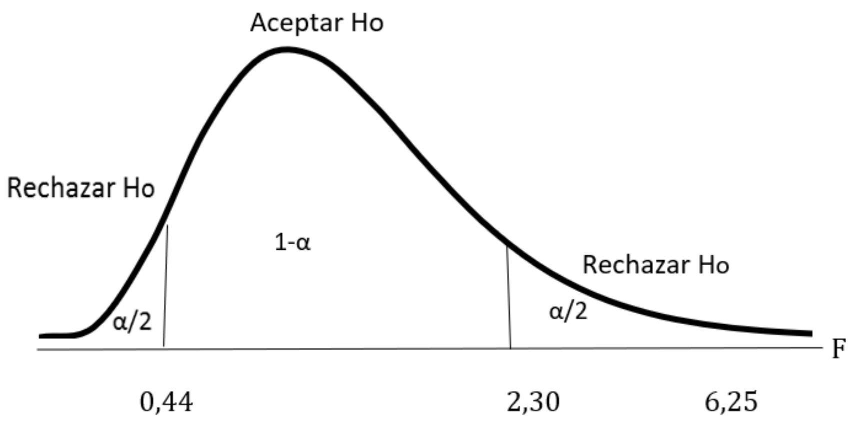


Figura 9. Estadística inferencial: representación gráfica problema 28

29. El puntaje promedio en una prueba de aptitud es de 375 puntos y la desviación estándar 48 puntos. Si la probabilidad de que el promedio muestral esté comprendido entre 370 y 380 es del 95%, determinar el tamaño de la muestra.

Solución:

Si $P\left(375 < \overline{X} < 380\right) = 95\%$, el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{380 - 375}{48/\sqrt{n}} = 1{,}96.$$

Al despejar $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}96 \times 48}{5} = 18{,}816.$$

Entonces, $n = 18{,}816^2 = 354$.

30. La proporción de audiencia de TV que ve cierto programa el sábado en la noche, fue del 50% según se ha encontrado previamente. Se cree que la proporción ha bajado. Para comprobarlo, se tomó una muestra de 100 televidentes y se encontró que 45 veían el programa. Si el nivel de significancia es del 1%, ¿se puede concluir que la proporción ha bajado efectivamente?

Solución:

p = 50%; n = 100; X = 45; α = 0,01 = 1%

El problema cumple con las condiciones de la distribución normal.

$H_0: p = 0{,}50$ (proporción de audiencia de TV)

$H_1: p < 0{,}50.$

$Z_\alpha = -2{,}33.$

$$Z_{cal} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}45 - 0{,}50}{\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{100}}} = -1.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión: Como $Z_{cal} = -1 > Z_\alpha = -2{,}33$, existe evidencia para aceptar H_0 (Figura 10); por lo tanto, hay evidencia que la audiencia de TV no ha bajado significativamente.

Utilizando p-value:

Como $p\text{−}value$ = $P(Z<-1)$ = 0,1587 > α = 0,01 existe evidencia para aceptar H_0 (Figura 10); por lo tanto, hay evidencia que la audiencia de TV no ha bajado significativamente.

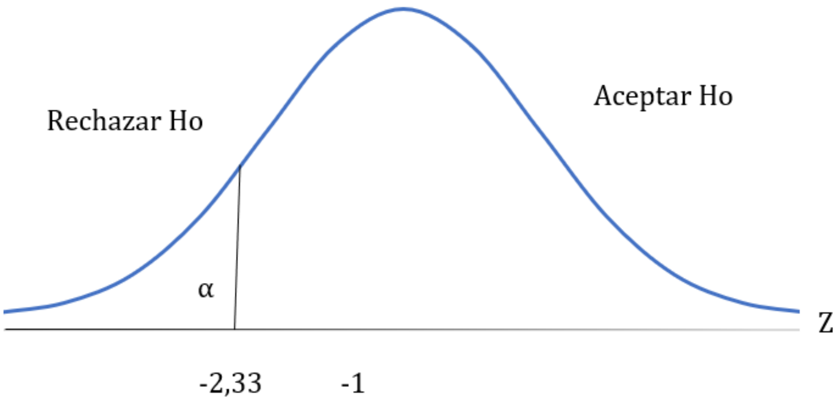


Figura 10. Estadística inferencial: representación gráfica problema 30

31. Se desea comprobar las hipótesis de que la productividad media de los empleados de la fábrica A es igual a la de la fábrica B, versus a que sean diferentes a un nivel de significancia del 5%. Para tal fin, se toman muestras independientes de cada fábrica de 6 empleados y se mide su productividad, así:

    Muestra 1 (A): 20, 18, 19, 15, 14, 13.
    Muestra 2 (B): 17, 15, 15, 14, 13, 13.

    a) Contrastar las hipótesis:

       H_0: $\mu_1 = \mu_2$.

       H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Antes de contrastar las hipótesis se debe determinar promedio y varianza de cada muestra:

Muestra A:

$\overline{X}_1 = 16{,}5;$ varianza sesgada: $S_1^2 = 6{,}92;$

variaza insesgada: $\hat{S}_1^2 = 8{,}3.$

Muestra B:

$\overline{X}_2 = 14.5;$ varianza sesgada: $S_2^2 = 1{,}92;$

variaza insesgada: $\hat{S}_2^2 = 2{,}3.$

b) El intervalo del 98% de confianza para la verdadera diferencia de medias.

Solución:

En este problema se aplica la distribución t para muestras pequeñas independientes y desviaciones poblacionales desconocidas.

a)

Se utiliza la distribución t de Student para 2 muestras pequeñas e independientes.

Muestra 1:

$\overline{X}_1 = 16{,}5;$ varianza: $S_1^2 = 6{,}92.$

Muestra 2:

$\overline{X}_2 = 14.5;$ varianza: $S_2^2 = 1{,}92.$

Fábrica A:

Media: $\overline{X}_1 = 16{,}5;$ varianza sesgada: $S_1^2 = 6{,}92;$ varianza insesgada.

Diferencia de promedios:

$\overline{D} = \overline{X_1} - \overline{X_2} = 16{,}5 - 14{,}5 = 2.$

El producto del tamaño de la muestra por la varianza sesgada e insesgada se relaciona por la siguiente expresión:

$n_1 S_1^2 = (\,n_1 - 1)\hat{S}_1^2.$

Fábrica A:

$n_1 S_1^2 = 6 \times 6{,}92 = 41{,}5.$

$(\,n_1 - 1)\hat{S}_1^2 = 5 \times 8{,}3 = 41{,}5.$

Fábrica B:

$n_2 S_2^2 = 6 \times 1{,}92 = 11{,}5.$

$(\,n_2 - 1)\hat{S}_2^2 = 5 \times 2{,}3 = 11{,}5.$

En el problema se utiliza la varianza sesgada.

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \times n_2}} = \sqrt{\frac{6 \times 6{,}92 + 6 \times 1{,}92}{6 + 6 - 2}} \times \sqrt{\frac{6 + 6}{6 \times 6}}$$

$$= \sqrt{\frac{41{,}5 + 11{,}5}{6 + 6 - 2}} \times \sqrt{\frac{6 + 6}{6 \times 6}} = 1{,}32.$$

Si $\alpha = 0{,}05 = 5\%$ y grados de libertad $= n_1 + n_2 - 2 = 6 + 6 - 2 = 10$; $t\ crítico\ = t_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33.$

Se determina t_{cal} y se compara con $t_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$t_{cal} = \frac{\overline{D} - \delta}{\sigma_{\overline{D}}} = \frac{2 - 0}{1{,}32} = \ 1{,}51.$$

Regla de decisión:

Si $-2{,}23 < t_{cal} < 2{,}23$ se acepta $\mathrm{H_O}$; caso contrario se rechaza $\mathrm{H_O}$.

Decisión:

Como $-2{,}23 < t_{cal} = 1{,}51 < 2{,}23$, no hay evidencia para rechazar H_O (Figura 11); por lo tanto, no existe evidencia para afirmar que los promedios de las 2 poblaciones sean diferentes.

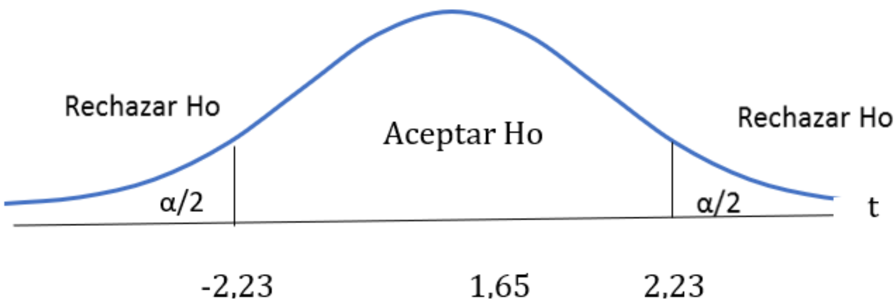


Figura 11. Estadística inferencial: representación gráfica problema 31

b) El intervalo del 95% de confianza para la verdadera diferencia de medias

Margen de error con 95% de confianza:

$E = t\,\sigma_{\overline{D}} = 2{,}33 \times 1{,}32 = 3{,}07.$

$P\left(\overline{D} - t\,\sigma_{\overline{D}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{D} + t\,\sigma_{\overline{D}}\right) = 0{,}95 = 95\%.$

$P(2 - 3{,}07 < \mu_1 - \mu_2 < 2 + 3{,}07) = 0{,}95 = 95\%;$

$P(-1{,}07 < \mu_1 - \mu_2 < 5{,}07) = 0{,}95 = 95\%.$

Como límite inferior es negativo y límite superior positivo, se puede concluir que no existe diferencia entre los 2 promedios poblacionales.

32. La Tabla 13 indica el número de artículos producidos por 3 máquinas. El jefe de control de calidad sabe que todas están funcionando correctamente.

Tabla 13. Estadística inferencial: datos problema 32

Calidad	**Máquina 1**	**Máquina 2**	**Máquina 3**	**Total**
Buenos	50	47	56	153
Defectuosos	5	14	8	27
Total	55	61	64	180

Si el porcentaje de defectuosos esperado es igual al 15% en cada una de las máquinas:

a) Calcular las frecuencias esperadas bajo la hipótesis del jefe.

b) Comprobar con un nivel de significancia del 5%, si las máquinas están operando correctamente.

Solución:

Frecuencias esperadas (Tabla 14) se obtienen multiplicando total vertical de cada columna de la tabla 14 por total horizontal de la misma tabla, dividido entre el gran total, así:

$$\frac{55 \times 153}{180} = 46{,}75.$$

Este proceso se repite para cada celda de la tabla 23.

Tabla 14. Estadística inferencial: frecuencias esperadas problema 32

Calidad	**Máquina 1**	**Máquina 2**	**Máquina 3**	**Total**
Buenos	46,75	51,85	54,4	153
Defectuosos	8,25	9,15	9,6	27
Total	55	61	64	180

En este problema se aplica la distribución Ji-cuadrado con con 5% de significancia y 2 grados de libertad.

$$\frac{(fo - fe)^2}{fe}.$$

Cálculo de Ji-cuadrado (Tabla 15): el valor de cada celda de la tabla 24 se determina de la siguiente manera:

Tabla 15. Estadística inferencial: cálculo de Ji-cuadrado problema 32

Calidad	**Máquina 1**	**Máquina 2**	**Máquina 3**	**Total**
Buenos	0,226	0,454	0,047	
Defectuosos	1,280	2,571	0,267	
Total	1,506	3,024	0,314	4,84

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 4{,}84.$$

Este valor corresponde al Ji-cuadrado de prueba (estadígrafo de prueba).

Ji-cuadrado crítico con 5% de significancia y 2 grados de libertad:

$\chi^2_{\alpha} = 5{,}99.$

Planteamiento de hipótesis:

H_0: las máquinas están operando correctamente (es lo que sabe el jefe).
H_1: las máquinas no están operando correctamente.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\alpha}$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 4{,}84 < \chi^2_{\alpha} = 5{,}99$ no existe evidencia para rechazar H_0 (Figura 12); por lo tanto, existe evidencia que las máquinas están operando correctamente.Como no existe evidencia para rechazar (Figura 12); por lo tanto, existe evidencia que las máquinas están operando correctamente.

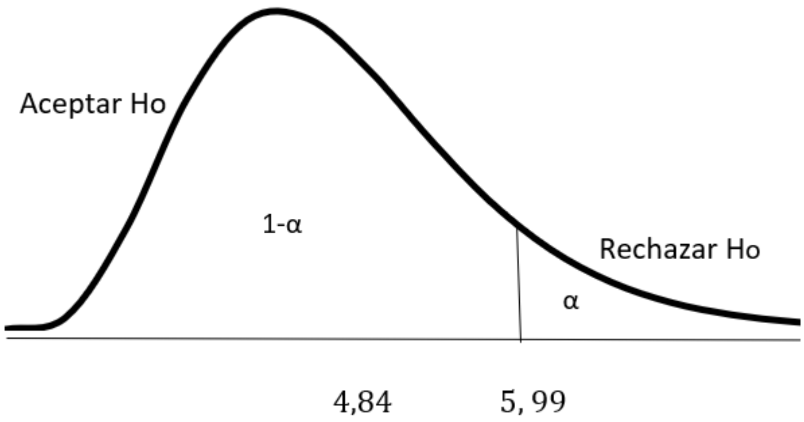


Figura 12. Estadística inferencial: representación gráfica problema 32

33. La variable X representa el número de vehículos vendidos en un concesionario de la ciudad de Pasto, en cada día de la semana pasada (Tabla 16).

Tabla 16. Estadística inferencial: datos problema 33

Día	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
X	3	5	7	8	9

Calcular:

a) La media y la desviación estándar de las ventas.

b) Determinar un intervalo del 95 % de confianza para el verdadero promedio de ventas.

Solución:

Como la muestra es pequeña y se desconoce la desviación estándar de la población, se aplica la distribución .

a) La media y la desviación estándar de las ventas.

$\overline{X} = 6{,}4;\ varianza = S^2 = 4{,}64;\ desviación\ estándar = S = 2{,}154$

b) Determinar un intervalo del 95 % de confianza para el verdadero promedio de ventas.

Distribución t de Student:

Valor de t con 95% de confianza y 4 grados de libertad: $t_\alpha = 2{,}78$.

Error estándar:

$$S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{2{,}154}{\sqrt{4}} = 1{,}077.$$

Margen de error:

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times S_{\overline{X}} = 2{,}78 \times 1{,}077 = 2{,}99.$

$P\left(X - E < \mu < \overline{X} + E\right) = 1 - \alpha.$

$P(6{,}4 - 2{,}99 < \mu < 6{,}4 + 2{,}99) = 0{,}95 = 95\%;$

$P(3{,}41 < \mu < 9{,}39) = 0{,}95 = 95\%.$

El número promedio de vehículos vendidos diariamente en un concesionario de la ciudad de Pasto está entre 3,41 y 9,39.

34. Una empresa dedicada a la construcción proporciona guantes a sus empleados para que desarrollen adecuadamente sus funciones. En estas condiciones, se recomienda un nuevo tipo de guantes de mayor duración, pero que evidentemente serán más costosos. La empresa comprará los nuevos guantes, si su vida media es significativamente superior a 120 días, de lo contrario, seguirá usando los actuales. La empresa toma una muestra de

36 pares de guantes, encontrando un promedio de 125 días. Si la desviación estándar es de 18 días y el nivel de significancia del 1%, ¿cuál será la decisión de la empresa? (H_0: μ = 120 $días$).

Solución:

El problema cumple las condiciones de la distribución normal.

H_0: $\mu = 120\ días$ (no comprar los nuevos guantes).
H_1: $\mu > 120\ días$ (comprar los nuevos guantes).
Nivel de significancia $\alpha = 0{,}01 = 1\%$.
Si $\alpha = 1\%$, entonces, $Z_\alpha = es$ 2,33.

Se determina Z_{cal} y se compara con Z_α:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{125 - 120}{18/\sqrt{36}} = 1{,}67.$$

Regla de decisión:

Si Z_{cal} > Z_α, se rechaza la H_0; caso contrario se acepta H_0.

Decisión:

Como Z_{cal} = 1,67 < Z_α = 2,33, no existe evidencia para rechazar H_0 (Figura 13); por lo tanto, la empresa no debería comprar los nuevos guantes.

Utilizando p-valor:

Si $p - value$ = $P(Z > Z_{cal})$ > α se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

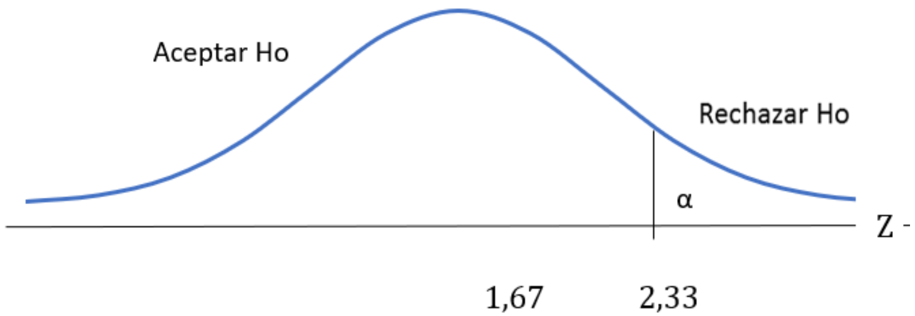


Figura 13. Estadística inferencial: representación gráfica problema 34

35. El porcentaje de alumnos que aprueban una materia, según se ha encontrado previamente, es del 80%; se cree que el rendimiento aumentará para el presente año. Para comprobarlo se tomó una muestra de 30 alumnos y se encuentra que el 83% gana la materia. Si el nivel de significancia es del 5%, ¿se puede concluir que el rendimiento académico ha mejorado?

Solución:

$p = 80\%; n = 30; \hat{p} = 0{,}83 = 83\%; \alpha = 0{,}05 = 5\%.$

$H_0: p = 0{,}80.$

$H_1: p > 0{,}80.$

$Z_\alpha = 1{,}64.$

$$Z_{cal} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}83 - 0{,}80}{\sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{30}}} = 0{,}41.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} > Z_{\alpha}$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $Z_{cal} = 0{,}41 < Z_{\alpha} = 1.64$, no hay evidencia para rechazar H_0 (Figura 14); es decir, no hay evidencia para concluir que el rendimiento académico haya mejorado.

Utilizando p-value:

Si $p - value = P(Z > Z_{cal}\ ) > \alpha$ se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Como $p - value = P(Z > Z_{cal} = 0{,}41) = 0{,}3409 > \alpha = 0{,}05$, se acepta H_0.

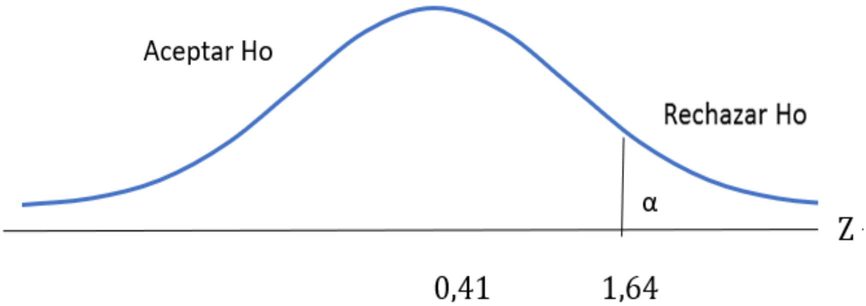


Figura 14. Estadística inferencial: representación gráfica problema 35

36. Suponga que las utilidades de su empresa siguen una distribución normal, el administrador afirma que estas ascienden a la suma de 50 millones de pesos en promedio y que la desviación estándar

es 6 millones. Los empleados de la compañía creen que el monto de utilidades es inferior. Para comprobarlo toman una muestra de 10 empresas similares y encuentran una media de 46 millones de pesos:

a) ¿Quién tiene la razón a un nivel de significancia del 1%?

b) Encuentre los límites del 95% de confiabilidad para las utilidades de la empresa.

Solución:

a) ¿Quién tiene la razón a un nivel de significancia del 1%?

$n = 0{,}10;\ \overline{X} = 46$ millones de pesos; $\sigma = 6$ millones de pesos.

$H_0:\ \mu = 50\ millones$ (afirmación del fabricante).

$H_1:\ \mu < 50$ millones (afirmación de los vendedores).

Si $\alpha = 0{,}01 = 1\%$, entonces, $Z_\alpha = -2{,}33$.

Se determina Z_{cal} y se compara Z_α:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{46 - 50}{6/\sqrt{10}} = -2{,}1.$$

Regla de decisión:

Si $Z_{cal} < Z_\alpha$, se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $Z_{cal} = -2{,}1 > Z_\alpha = -2{,}33$, se acepta H_0, esto es, no hay evidencia para concluir que la media de las utilidades sea inferior a 50 millones de pesos; es decir, el administrador tiene la razón.

Utilizando p-value:

Si $p{-}value$ = $P(Z< Z_{cal})$ > α se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Como $p{-}value = P(Z < -2{,}1) = 0{,}0179 > \alpha = 0{,}01$, entonces se acepta H_0.

b) *Error estándar de la media:*

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1{,}897.$$

Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma/\sqrt{n} = 1{,}96 \times \sigma/\sqrt{n} = 1{,}96 \times 6/\sqrt{10} = 3{,}72.$$

Límites de confianza:

$$P\left(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E\right) = 0{,}95 = 95\%.$$

$$P(46 - 3{,}72 < \mu < 46 + 3{,}72) = 0{,}95 = 95\%.$$

$$P(42{,}28 < \mu < 49{,}72) = 0{,}95 = 95\%.$$

Con el 95% de confiabilidad se puede afirmar que la media de las utilidades de la empresa están entre 42,28 y 49,52 millones de pesos.

37. Las siguientes son las cifras de ventas (X) que reportaron 12 vendedores a su empresa:

X = 10, 12, 13, 15, 20, 24, 22, 25, 20, 24, 25, 23.

a) Probar la hipótesis de que el promedio de ventas en la población es diferente de 24, a un nivel del 5%.

b) Probar la hipótesis de que la varianza s2 es menor que 32 con a = 0,05.

c) Encontrar los límites del 95% para la verdadera varianza y desviación estándar.

Solución:

a) $\overline{X} = 19{,}42; S^2 = 27{,}41;$ desviación estándar $= S = 5{,}24.$

Se aplica la distribución t:

$H_0: \mu = 24.$

$H_1: \mu \neq 24.$

Si $\alpha = 0{,}05 = 5\%$, con 11 grados de libertad,

valor de t crítico$=t_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}20.$

Se determina t_{cal} y se compara con $t_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$t_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{19{,}42 - 24}{5{,}24/\sqrt{11}} = -2{,}89.$$

Regla de decisión:

Si t_{cal} se encuentra entre -2,20 y 2,20 se acepta la H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como t_{cal} = $-2{,}89$ no se encuentra en el intervalo (-2,20, 2,20), entonces no existe evidencia para aceptar H_0; esto es, el promedio poblacional es diferente a 24 (Figura 15).

Utilizando p-value:

$p\text{−}value$ = 0,014 es menor que α , no existe evidencia para aceptar Ho.

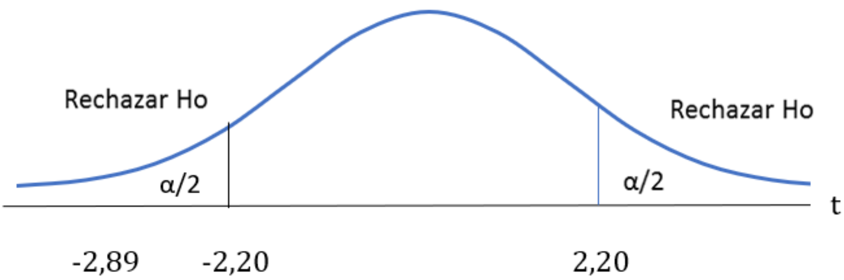


Figura 15. Estadística inferencial: representación gráfica (a) problema 37

b)

Se aplica la distribución Ji-cuadrado.

H_0: $\sigma^2 = 32$.

H_1: $\sigma^2 < 32$.

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}05$ y 11 grados de libertad: $\chi^2_\alpha = 4{,}57$.

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \frac{n \times S^2}{\sigma^2} = \frac{12 \times 27{,}41}{32} = 10{,}28.$$

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha}$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 10{,}28 > \chi^2_{\alpha} = 4{,}57$ no existe evidencia para rechazar H_0; esto es, la varianza de la población es igual a 32 (Figura 16).

Aplicando p-value:

Como p−value = $P(x^2 < 10{,}28,\ v = 11) = 0{,}4946 > \alpha = 0{,}05$ no existe evidencia para rechazar H_0.

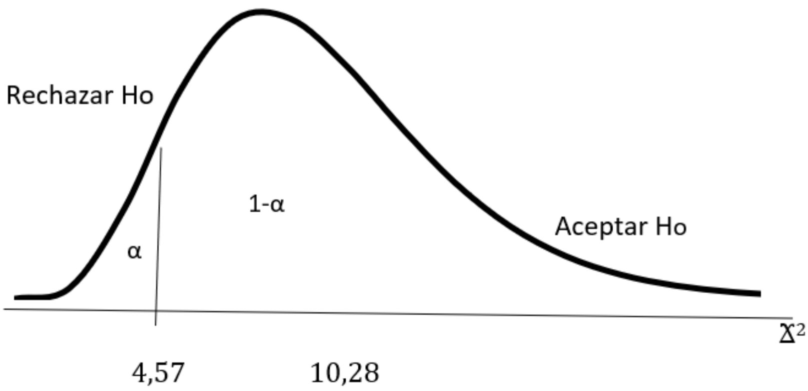


Figura 16. Estadística inferencial: representación gráfica (b) problema 37

c) Se aplica la distribución Ji-cuadrado.

Valores de Ji-cuadrado con 95% de confianza y 11 grados de libertad:

$\chi_1^2 = 3{,}82;\ \chi_2^2 = 21{,}92.$

$$Li = \frac{ns^2}{\chi_2^2} = \frac{12 \times 27{,}41}{21{,}92} = 15.$$

$$Ls = \frac{ns^2}{\chi_1^2} = \frac{12 \times 27{,}41}{3{,}82} = 86{,}1.$$

$P(15 < \sigma^2 < 86{,}1) = 0{,}95 = 95\%.$

$P\left(\sqrt{15} < \sqrt{\sigma^2} < \sqrt{86{,}1}\right) = 0{,}95 = 95\%.$

$P(3{,}87 < \sigma < 9{,}28) = 0{,}95 = 95\%.$

Con un 95 % de confiabilidad se puede afirmar que la desviación estándar de las ventas en la población se encuentra entre 3,87 y 9,28.

38. El director de una empresa quiere averiguar si existe alguna relación entre la participación de los empleados en los programas de la empresa y el estrato socioeconómico según el área residencial, con a del 5%. Los datos se presentan en la Tabla 17.

Tabla 17. Estadística inferencial: datos problema 38

Participación	**Estrato bajo**	**Estrato medio**	**Estrato alto**	**Total**
Nunca	20	32	40	92
Ocasional	15	28	44	87
Regular	10	18	23	51
Total	**45**	**78**	**107**	**230**

Solución:

Planteamiento de hipótesis:

H_0: no existe relación entre la participación de los empleados en los programas de la empresa y el estrato socioeconómico.

H_1: existe relación entre la participación de los empleados en los programas de la empresa y el estrato socioeconómico.

Frecuencias esperadas (Tabla 18).

Tabla 18. Estadística inferencial: frecuencias esperadas problema 38

Participación	Estrato bajo	Estrato medio	Estrato alto	Total
Nunca	18	31,2	42,8	92
Ocasional	17,02	29,50	40,47	87
Regular	9,98	17,30	23,73	51
Total	45	78	107	230

Cálculo de Ji-cuadrado (Tabla 19).

Tabla 19. Estadística inferencial: cálculo de Ji-cuadrado problema 38

Participación	Estrato bajo	Estrato medio	Estrato alto	Total
Nunca	0,2222	0,0205	0,1832	0,4259
Ocasional	0,2401	0,0767	0,3072	0,6240
Regular	0,0000	0,0287	0,0222	0,0510
Total	**0,46**	**0,13**	**0,51**	**1,10**

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 1{,}10.$$

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}05$ y 4 grados de libertad: $\chi^2_{\alpha} = 9{,}49$.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\alpha}$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 1{,}10 < \chi^2_{\alpha} = 9{,}49$
H_0; es decir, la participación de los empleados es independiente del estrato socioeconómico (Figura 17).

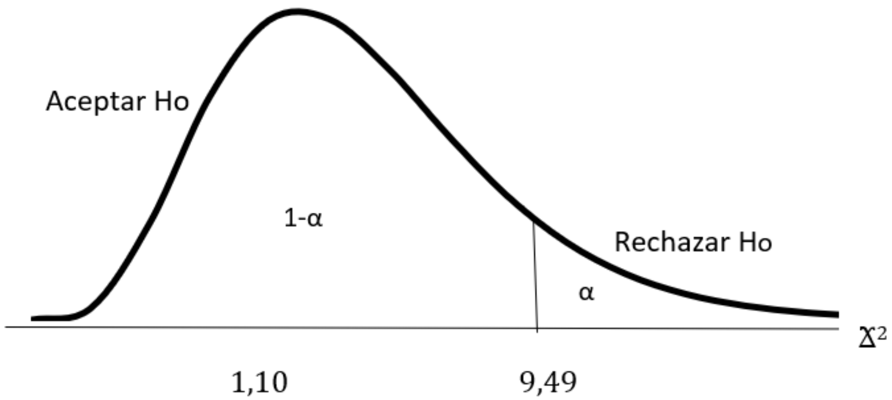


Figura 17. Estadística inferencial: representación gráfica problema 38

39. La Tabla 20 muestra el número de horas perdidas por accidentes de trabajo en 6 plantas de una fábrica, antes y después de ponerse en marcha un programa de seguridad industrial. ¿Los datos proporcionan suficiente evidencia para concluir que el programa

fue efectivo para reducir los accidentes que causan pérdidas de tiempo a un a del 5%?

Tabla 20. Estadística inferencial: representación problema 39

Planta	A	B	C	D	E	F
Antes del programa	40	64	42	70	58	30
Después del programa	37	58	40	65	52	29

Solución:

Se supone que las horas perdidas por accidentes de trabajo dependen de la efectividad del programa de seguridad industrial puesto en marcha, por lo cual, dichas horas deberían disminuir al poner en marcha el mencionado programa.

Se aplica la distribución para muestras pareadas pequeñas y dependientes.

Analizar Tabla 21.

Tabla 21. Estadística inferencial: análisis de datos problema 39

Planta	Antes	Después	D	D^2
A	40	37	3	9
B	64	58	6	36
C	42	40	2	4
D	70	65	5	25
E	58	52	6	36
F	30	29	1	1
Total			**23**	**111**

$$\sum D = 23; \sum D^2 = 111.$$

$$\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{23}{6} = 3{,}83.$$

Error estándar de la diferencia de medias:

$$S_{\overline{D}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum D^2 - \dfrac{(\sum D)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\dfrac{111 - \dfrac{(23)^2}{6}}{6-1}}}{\sqrt{6}} = 0{,}87.$$

μ_1: media de horas perdidas antes de poner en marcha el programa.

μ_2: media de horas perdidas después de poner en marcha el programa.

Planteamiento de hipótesis:

$H0$: $\mu_1 = \mu_2$; $\mu_1 - \mu_2 = \delta = 0$.
$H1$: $\mu_1 > \mu_2$; $\mu_1 - \mu_2 = \delta > 0$.

Valor de t crítico con α = 0,05 y 5 grados de libertad: t_α = 2, 02.

Se determina t calculado y se compara con t crítico

$$t_{cal} = \frac{\overline{D} - \delta}{\sigma_{\overline{D}}} = \frac{3{,}83 - 0}{0{,}87} = 4{,}4.$$

Regla de decisión:

Si $t_{cal} > t_\alpha$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $t_{cal} = 4{,}4 > t_{\alpha} = 2{,}\ 02$ existe evidencia para rechazar H_0 (Figura 18); por lo tanto, los datos sí suministran suficiente evidencia para afirmar con un 95% de confianza que el programa fue efectivo para reducir el número de horas perdidas por accidentes de trabajo.

Utilizando p-value:

Como $p - valor = P(t > 4{,}4;\ 5\ gl) = 0{,}003 < \alpha = 0{,}05$ entonces se rechaza H_0 .

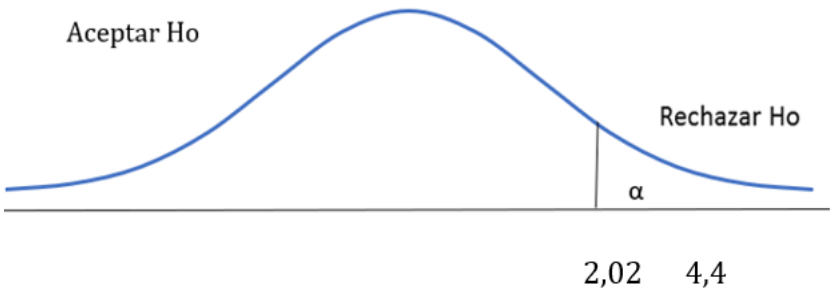


Figura 18. Estadística inferencial: representación gráfica problema 39

40. La Tabla 22 muestra la relación existente entre las notas de estudiantes en Matemáticas y en Estadística. Contrastar la hipótesis de que los resultados son independientes a un nivel de significancia a del 5%.

Tabla 22. Estadística inferencial: datos problema 40

Estadística	**Matemáticas**			**Total**
	Alta	**Media**	**Baja**	
Alta	56	71	12	139
Media	47	163	38	248
Baja	14	42	85	141
Total	**117**	**276**	**135**	**528**

Solución:

Planteamiento de hipótesis:

H_0: Los resultados del rendimiento en Matemáticas y Estadística son independientes.

H_1: Los resultados del rendimiento en Matemáticas y Estadística son dependientes.

Frecuencias observadas (Tabla 23).

Tabla 23. Estadística inferencial: frecuencias observadas problema 40

Estadística	**Matemáticas**			**Total**
	Alta	**Media**	**Baja**	
Alta	56	71	12	139
Media	47	163	38	248
Baja	14	42	85	141
Total	**117**	**276**	**135**	**528**

Frecuencias esperadas (Tabla 24).

Tabla 24. Estadística inferencial: frecuencias esperadas problema 40

Estadística	**Matemáticas**			**Total**
	Alta	**Media**	**Baja**	
Alta	30,80	72,66	35,54	139
Media	54,95	129,64	63,41	248
Baja	31,24	73,70	36,05	141
Total	**117**	**276**	**135**	**528**

Cálculo de Ji-cuadrado (Tabla 25).

Tabla 25. Estadística inferencial: cálculo de Ji-cuadrado problema 40

Estadística	**Matemáticas**			**Total**
	Alta	**Media**	**Baja**	
Alta	20,616	0,038	15,592	36,245
Media	1,151	8,587	10,182	19,920
Baja	9,517	13,638	66,461	89,616
Total				**145,70**

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 145{,}70.$$

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}05$ y 4 grados de libertad: $\chi^2_{\alpha} = 9{,}49$

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\alpha}$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 145{,}70 > \chi^2_{\alpha} = 9{,}49$ no existe evidencia para aceptar H_0; es decir, existe evidencia para concluir que las notas de matemáticas y estadística son dependientes (Figura 19).

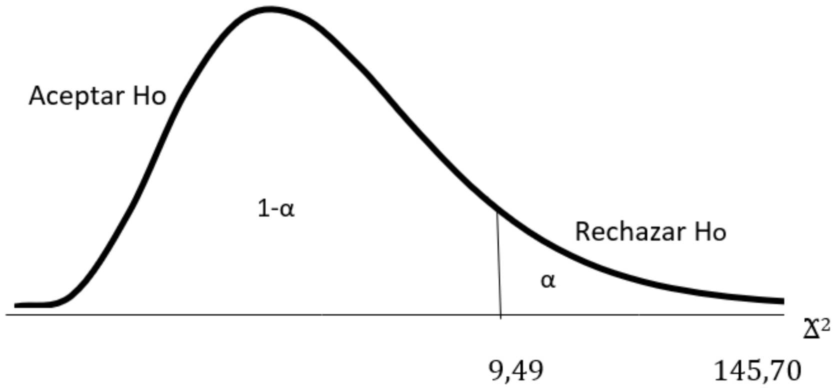


Figura 19. Estadística inferencial: representación gráfica problema 40

41. Suponga que 2 grupos de estudiantes realizan una evaluación idéntica. El primer grupo está formado por 18 estudiantes del colegio 1, con promedio 85 y varianza 240; el segundo grupo, está constituido por 12 estudiantes del colegio 2, con promedio 80 y varianza 340. Determinar los límites de 98 % de confianza para la verdadera diferencia de promedios.

Solución:

$n_1 = 18;\ \overline{X}_1 = 85;\ \overline{X}_2 = 80; n_2 = 12;\ \sigma_1^2 = 240;\ \sigma_2^2 = 340; 1 - \alpha = 0{,}98.$

$\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 85 - 80 = 5.$

$$\sigma_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{240}{18} + \frac{340}{12}} = 6{,}45.$$

Valor de z con el 98% de confianza: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33.$

Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \ \sigma_{\overline{D}} = 2{,}33 \times 6{,}45 = 15{,}03.$$

$$P\left(\overline{D} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \ \sigma_{\overline{D}} < \delta < \overline{D} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \ \sigma_{\overline{D}}\right) = 0{,}98 = 98\%.$$

$$P(5 - 15{,}03 < \delta < 5 + 15{,}03) = 0{,}98. = 98\%.$$

$$P(-10{,}03 < \delta < 20{,}03) = 0{,}98. = 98\%.$$

Como el límite inferior es negativo y el superior positivo, se puede concluir que no existe diferencia entre las medias de los puntajes en las 2 poblaciones.

42. El promedio y la varianza de las ventas de un supermercado en los últimos 15 días fueron \$ 340000 y \$ 400000, respectivamente. Determinar un intervalo del 98% de confianza para la verdadera varianza y la desviación estándar.

Solución:

Valores de Ji-cuadrado con 98% de confianza y 14 grados de libertad:

$$\chi_1^2 = 4{,}66; \ \chi_2^2 = 29{,}14.$$

$$Li = \frac{ns^2}{\chi_2^2} = \frac{25 \times 400000}{29{,}14} = 343{,}17.$$

$$Ls = \frac{ns^2}{\chi_1^2} = \frac{25 \times 400000}{4{,}66} = 2145{,}9.$$

$P((343{,}17 < \sigma^2 < 2145{,}9) = 0{,}98 = 98\%.$

$P\left(\sqrt{343{,}17} < \sqrt{\sigma^2} < \sqrt{2145{,}9}\right) = 0{,}98 = 98\%.$

$P(18{,}5 < \sigma < 46{,}3) = 0{,}98 = 98\%.$

Con un 98 % de confiabilidad se puede afirmar que la desviación estándar de las ventas en población se encuentra entre 18,5 y 46,3.

43. Se desea estimar el salario promedio (m) de todos los empleados públicos del municipio. Para tal fin, se toma una muestra de 200 empleados y se encuentra que el promedio es $280.000 y la desviación estándar $30.000.

a) ¿Cuál sería el margen de error?
b) Determinar un intervalo del 95% de confiabilidad para el verdadero promedio.

Solución:

a) Valor de Z con 95% de confianza es $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

Error estándar:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{30000}{\sqrt{200}} = 2121.$$

Margen de error:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\overline{X}} = 1{,}96 \times 2121 = 4157.$$

b) Intervalo de confianza:

$$P\left(\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E\right) = 1 - \alpha.$$

$$P(280000 - 4{,}157 < \mu < 280000 + 4157) = 0{,}95 = 95\%.$$
$$P(245.873 < \mu < 284.157) = 0{,}95 = 95\%.$$

Con un 95% de confianza se puede concluir que el verdadero promedio salarial se encuentra entre$ 245873 y $284157 pesos..

44. A continuación, se presenta el número de transistores que no satisfacen un requisito de calidad de producción en 20 muestras de 10 transistores cada una. Pruebe la hipótesis de que los datos se aproximan a la distribución Binomial con n=10 y p = 0,30, a un nivel de significancia del 5%.

Transistores defectuosos (X): 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10
Cantidad de muestras (fo): 0; 1; 2; 4; 5; 5; 2; 1; 0; 0;

Solución:

Problema de bondad de ajuste a un modelo binomial.

Planteamiento de hipótesis (Tabla 26):

H_0: los datos observados se aproximan a una distribución binomial.

H_1: los datos observados no se aproximan a una distribución binomial.

Tabla 26. Estadística inferencial: datos problema 44

x	fo	f(x)
0	0	0,0282
1	1	0,1211
2	2	0,2335
3	4	0,2668
4	5	0,2001
5	5	0,1029
6	2	0,0368
7	1	0,0090
8	0	0,0014
9	0	0,0001
10	0	0,0000
	20	1

Cuando la frecuencia es menor que 5 se agrupan los datos (Tabla 27).

Tabla 27. Estadística inferencial: agrupación de frecuencias problema 44

x	fo	f(x)	fe	$(fo\text{-}fe)^2/fe$
0 a 3	7	0,6496	13,0	2,76
4	5	0,2001	4,0	0,25
5 a 10	8	0,1503	3,0	8,30
	20	1,0000	20,0	**11,31**

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 11{,}31.$$

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}05$ y 2 grados de libertad: $\chi^2_\alpha = 5{,}99$.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_\alpha$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 11{,}31 > \chi^2_\alpha = 5{,}99$ no existe evidencia para aceptar H_0; por lo tanto, los datos observados no se ajustan a una distribución binomial (Figura 20).

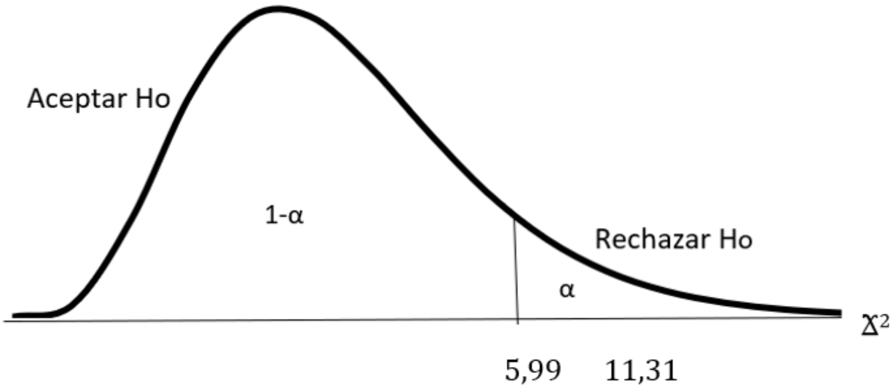


Figura 20. Estadística inferencial: representación gráfica problema 44

45. Probar las hipótesis con un nivel de significancia del 1%.

H_0: El número de fallas mecánicas de una planta se aproxima a la distribución de Poisson con media 2,5; n = 40.

H_1: El número de fallas mecánicas de una planta no se aproxima a la distribución de Poisson con media 2,5; n = 4

Número de fallas (X): 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13.
Frecuencia observada ($f0$): 1; 6; 8; 10; 7; 4; 3; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0.

Solución:

Prueba de bondad de ajuste a un modelo de Poisson.

Ver Tabla 28 y Tabla 29.

Tabla 28. Estadística inferencial: datos problema 45-parte a

x	**fo**	**f(x)**
0	1	0,0821
1	6	0,2052
2	8	0,2565
3	10	0,2138
4	7	0,1336
5	4	0,0668
6	3	0,0278
7	1	0,0099
8	0	0,0031
9	0	0,0009
10	0	0,0002
11	0	0,0000
12	0	0,0000
13	0	0,0000
	40	1,0000

Tabla 29. Estadística inferencial: datos del problema 45-parte b

x	fo	f(x)	fe	(fo-fe)²/fe
0 a 1	7	0,2873	11,49	1,7558
2	8	0,2565	10,26	0,4981
3	10	0,2138	8,55	0,2457
4	7	0,1336	5,34	0,5131
5 a 13	8	0,1088	4,35	3,0579
Total	40	1,0000	40,00	**6,07**

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 6{,}07.$$

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}01$ y 4 grados de libertad: $\chi^2_{\alpha} = 13{,}28$.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\alpha}$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 6{,}07 < \chi^2_{\alpha} = 13{,}28$ existe evidencia para aceptar H_0, por lo tanto, los datos observados sí se aproximan a una distribución de Poisson (Figura 21).

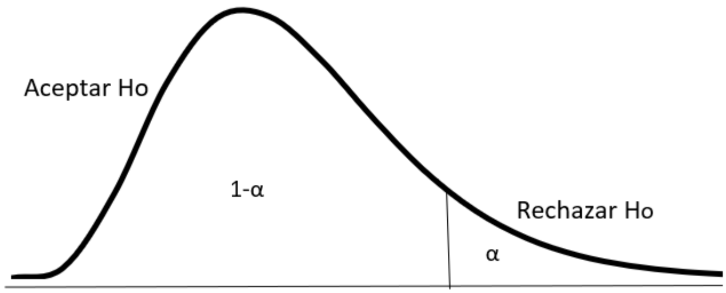


Figura 21. Estadística inferencial: representación gráfica problema 45

46. La Tabla 30, muestra el número de accidentes en una muestra de 56 fábricas.
Comprobar la siguiente hipótesis con un nivel de significancia del 5%.

H_0: la distribución de frecuencias se ajusta a una distribución normal.

H_1: la distribución de frecuencias no se ajusta a una distribución normal.

Solución:

Determinar media y desviación estándar

Tabla 30. Estadística inferencial: datos problema 46

Número de accidentes	f_0
1,45–1,75	6
1,75–2,05	12
2,05–2,35	14
2,35–2,65	9
2,65–2,95	8
2,95–3,25	7
Total	**56**

Analizar Tabla 31, Tabla 32 y Tabla 33.

Tabla 31. Estadística inferencial: análisis de datos problema 46, parte a

Li	Ls	fo	x	xfo	$x2fo$
1,45	1,75	6	1,6	9,6	15,36
1,75	2,05	12	1,9	22,8	43,32
2,05	2,35	14	2,2	30,8	67,76
2,35	2,65	9	2,5	22,5	56,25
2,65	2,95	8	2,8	22,4	62,72
2,95	3,25	7	3,1	21,7	67,27
	Total	**56**		**129,8**	**312,68**

Tabla 32. Estadística inferencial: análisis de datos problema 46, parte b

Media de X	2,32
Media de	5,584
Varianza	0,21
Desviación estándar	0,46

Tabla 33. Estadística inferencial: análisis de datos problema 46, parte c

L_i	L_s	f_o	$P(x<L_s)$	$P(x<L_i)$	$P(L_i < x < L_s)$	f_e	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
1,45	1,75	6	0,10825	0,02946	0,07879	4,4122	0,5714
1,75	2,05	12	0,27996	0,10825	0,17171	9,6157	0,5912
2,05	2,35	14	0,52789	0,27996	0,24793	13,8841	0,0010
2,35	2,65	9	0,76513	0,52789	0,23724	13,2854	1,3823
2,65	2,95	8	0,91556	0,76513	0,15044	8,4244	0,0214
2,95	3,25	7	0,97876	0,91556	0,06320	3,5390	3,3846
	Total	**56**					**5,9519**

Ji-cuadrado calculado:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = 5{,}95.$$

Ji-cuadrado crítico con $\alpha = 0{,}05$ y 3 grados de libertad: $\chi^2_\alpha = 7{,}81$.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_\alpha$ se rechaza H_0; caso contrario, se acepta H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 5{,}95 < \chi^2_\alpha = 7{,}81$ existe evidencia para aceptar H_0, por lo tanto, los datos observados sí se aproximan a una distribución normal (Figura 23).

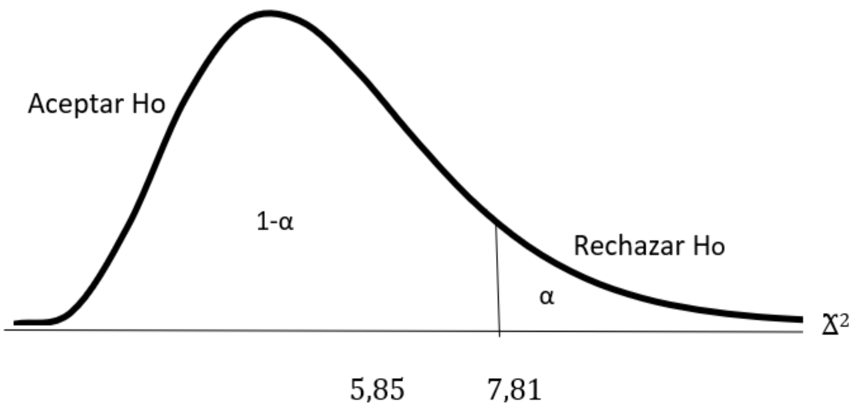


Figura 22. Estadística inferencial: representación gráfica problema 46

Bibliografía

Canavos, G. C. 1984. *Probabilidad y Estadística* Ma. Graw Hill-México. México D.F. p. 651.

Chou, Y.L. 1977. *Análisis Estadístico*. Ed. Interamericana. México. México D.F.

Hanke J. E. & Arthur G. Reitsh. 1994. *Estadística para negocios*. Mc Graw Hill. Madrid España.

Kazmier, L. 1987. *Estadística para la Administración y la Economía*. Serie Schaum. Mc Graw Hill. México. México D.F.

Levin, R. & Rubin, D. 1994. *Estadística para administradores*. Prentice Hall. México México D.F.

Martínez, B. Ciro. 1987. *Estadística*. Ed. ECOE. Bogotá. Colombia.

Mendenhall, W. 1979. *Introducción a la probabilidad y Estadística*. Wastworth Internacional. E.E.UU. Massachusetts.

Mesa, J. & Caicedo, J. 2020. Introducción a la Estadística Descriptiva. Universidad de Nariño. Colombia, Pasto-Nariño.

Mesa, J. & Caicedo, J. 2021. Cálculo de Probabilidades y Estadística Inferencial. Universidad de Nariño. Colombia. Pasto-Nariño.

Miller, J. R. 1964. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. 5a. Ed. Prentice May Hispanoamericana S.A México. México D.F.

Spiegel, M. 1970. *Estadística. Teoría y 875 problemas resueltos*. Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill. México. México. México D.F.

Walpole, M. Y. (2007). Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Octava Edición. México. México D.E. Pearson.

Anexos

ANEXO A: TABLA PARA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$\boldsymbol{P(Z<Z_0)}$ corresponde a áreas a la izquierda de $\boldsymbol{Z_0}$.

Ejemplo:

Determinar la probabilidad que $Z < 2{,}54$

$P(Z < 2{,}54) = 0{,}9945$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997

Fuente: elaboración propia con función de Excel

ANEXO B. TABLA PARA DISTRIBUCIÓN t

La primera fila corresponde a las áreas a la izquierda de un valor t y la primera columna representa los grados de libertad.

Ejemplo:

Determinar el valor t que deja a la izquierda un área de 0,995 con ν = 6 grados de libertad.

t (0,995; 6) = 3,71

Eso significa que, la probabilidad de que P ($t \leq$ 3,71; ν = 6) = 0,995

ν	0,995	0,990	0,975	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
1	63,66	31,82	12,71	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,41	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,05	2,68	2,18	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,35	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127

ν	0,995	0,990	0,975	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
19	2,86	2,54	2,09	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,85	2,53	2,09	1,33	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,49	2,06	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1,31	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,05	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126

ANEXO C. TABLA PARA DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADO

La primera fila corresponde a las áreas a la izquierda de un valor χ^2 y la primera columna representa los grados de libertad.

Ejemplo:

Determinar el valor χ^2 que deja a la izquierda un área 0,975 con ν =10 grados de libertad.

χ^2 (0,975; 10) = 20,48

Eso significa que, la probabilidad de que $P(\chi^2 \leq 20{,}48; \nu = 10) = 0{,}975$.

ν	0,995	0,99	0,975	0,9	0,75	0,50	0,25	0,1	0,025
1	7,88	6,63	5,02	2,71	1,32	0,45	0,10	0,02	0,00
2	10,60	9,21	7,38	4,61	2,77	1,39	0,58	0,21	0,05
3	12,84	11,34	9,35	6,25	4,11	2,37	1,21	0,58	0,22
4	14,86	13,28	11,14	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,48
5	16,75	15,09	12,83	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	0,83
6	18,55	16,81	14,45	10,64	7,84	5,35	3,45	2,20	1,24
7	20,28	18,48	16,01	12,02	9,04	6,35	4,25	2,83	1,69
8	21,95	20,09	17,53	13,36	10,22	7,34	5,07	3,49	2,18
9	23,59	21,67	19,02	14,68	11,39	8,34	5,90	4,17	2,70
10	25,19	23,21	20,48	15,99	12,55	9,34	6,74	4,87	3,25
11	26,76	24,72	21,92	17,28	13,70	10,34	7,58	5,58	3,82
12	28,30	26,22	23,34	18,55	14,85	11,34	8,44	6,30	4,40
13	29,82	27,69	24,74	19,81	15,98	12,34	9,30	7,04	5,01
14	31,32	29,14	26,12	21,06	17,12	13,34	10,17	7,79	5,63
15	32,80	30,58	27,49	22,31	18,25	14,34	11,04	8,55	6,26
16	34,27	32,00	28,85	23,54	19,37	15,34	11,91	9,31	6,91
17	35,72	33,41	30,19	24,77	20,49	16,34	12,79	10,09	7,56
18	37,16	34,81	31,53	25,99	21,60	17,34	13,68	10,86	8,23
19	38,58	36,19	32,85	27,20	22,72	18,34	14,56	11,65	8,91

ν	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,9**	**0,75**	**0,50**	**0,25**	**0,1**	**0,025**
20	40,00	37,57	34,17	28,41	23,83	19,34	15,45	12,44	9,59
21	41,40	38,93	35,48	29,62	24,93	20,34	16,34	13,24	10,28
22	42,80	40,29	36,78	30,81	26,04	21,34	17,24	14,04	10,98
23	44,18	41,64	38,08	32,01	27,14	22,34	18,14	14,85	11,69
24	45,56	42,98	39,36	33,20	28,24	23,34	19,04	15,66	12,40
25	46,93	44,31	40,65	34,38	29,34	24,34	19,94	16,47	13,12
26	48,29	45,64	41,92	35,56	30,43	25,34	20,84	17,29	13,84
27	49,64	46,96	43,19	36,74	31,53	26,34	21,75	18,11	14,57
28	50,99	48,28	44,46	37,92	32,62	27,34	22,66	18,94	15,31
29	52,34	49,59	45,72	39,09	33,71	28,34	23,57	19,77	16,05
30	53,67	50,89	46,98	40,26	34,80	29,34	24,48	20,60	16,79
40	66,77	63,69	59,34	51,81	45,62	39,34	33,66	29,05	24,43
50	79,49	76,15	71,42	63,17	56,33	49,33	42,94	37,69	32,36
60	91,95	88,38	83,30	74,40	66,98	59,33	52,29	46,46	40,48
70	104,21	100,43	95,02	85,53	77,58	69,33	61,70	55,33	48,76
80	116,32	112,33	106,63	96,58	88,13	79,33	71,14	64,28	57,15
90	128,30	124,12	118,14	107,57	98,65	89,33	80,62	73,29	65,65
100	140,17	135,81	129,56	118,50	109,14	99,33	90,13	82,36	74,22

ANEXO D. TABLA DISTRIBUCIÓN F

La primera fila corresponde a los grados de libertad $v1$ y la primera columna a los grados de libertad v_2. Todos los valores de F que aparecen dentro de la tabla, dejan a la izquierda un área de 0,95 y a la derecha un área de 0,05.

Ejemplo:

Determinar el valor F que deja a la izquierda un área 0,95 con $\nu_1 = 10$ y $\nu_2 = 8$ grados de libertad.

$F\ (0{,}95; \nu_1 = 10; \nu_2 = 8) = 3{,}35$

Eso significa que, la probabilidad de que $P\ (F \leq 3{,}35;\ \nu_1 = 10, \nu_2 = 8) = 0{,}95$

Área a la izquierda: 0,95

ν_1/ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	250,1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,4	19,4	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,7	8,6
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,9	5,8	5,7
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,6	4,6	4,5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,9	3,9	3,8
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,5	3,4	3,4
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,2	3,2	3,1
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,0	2,9	2,9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,8	2,8	2,7
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,7	2,6	2,6
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,6	2,5	2,5
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,5	2,5	2,4
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,5	2,4	2,3
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,4	2,3	2,2
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,4	2,3	2,2
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,3	2,2	2,1

ν_1/ν_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,3	2,2	2,1
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,2	2,2	2,1
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,2	2,1	2,0
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,2	2,1	2,0
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,2	2,1	2,0
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,1	2,0	2,0
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,1	2,0	1,9
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,1	2,0	1,9
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,1	2,0	1,9
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,1	2,0	1,9
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,0	2,0	1,9
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,0	1,9	1,9
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,0	1,9	1,8
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,9	1,8	1,7
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,8	1,7	1,6
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,8	1,7	1,6

Acerca de los autores

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Profesor de Tiempo Completo, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Alberto Javier Mesa Guerrero.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Estadístico en Salud, Universidad de Antioquia. Profesor en categoría Asociado de la Universidad de Nariño. Correo electrónico: soundmesa@yahoo.com.

editorial
Universidad de Nariño

Cálculo de Probabilidades y Estadística Inferencial
Fecha de Publicación: Abril de 2024
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Esta obra surge por el interés de los autores para atender las solicitudes de profesores y estudiantes, en el sentido de disponer de un libro de texto con la resolución de los ejercicios y problemas propuestos en el libro "CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL", escrito por los mismos autores que publican esta obra. Dicho libro consiste en notas de clase, *en formato de libro de texto*, que fue escrito con el fin de apoyar el desarrollo del curso de Cálculo de Probabilidades y Estadística que los autores ofrecen en la Universidad de Nariño, el cual se constituye en una fuente de consulta y de estudio de temáticas relacionadas con conceptos del cálculo de probabilidades, modelos de distribución de probabilidad y de estadística inferencial. La presente obra complementa dicha publicación, por cuanto resuelve todos los ejercicios y problemas propuestos en el capítulo ocho del libro "CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA INFERENCIAL".

El presente libro está organizado en tres capítulos. El primero, contiene la formulación de ejercicios y problemas relacionados con el cálculo de probabilidades, los modelos de probabilidad y la estadística inferencial. El segundo capítulo, contiene la resolución de todos los ejercicios y problemas formulados en el primer capítulo, clasificados en las mismas categorías en las que se formulan. El capítulo tres, contiene una lista de anexos, conformados por tablas de frecuencias y de probabilidades para distribución normal, distribución t de Student, distribución Chi cuadrado, distribución F y una tabla que muestra el proceso para la prueba de hipótesis para la media.

Los autores agradecen la retroalimentación que realicen los lectores, lo cual contribuye a su mejoramiento.

ISBN: 978-628-7679-47-4
9 786287 679474

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904
ai Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023
120 Años Universidad de Nariño
Editorial Universidad de Nariño