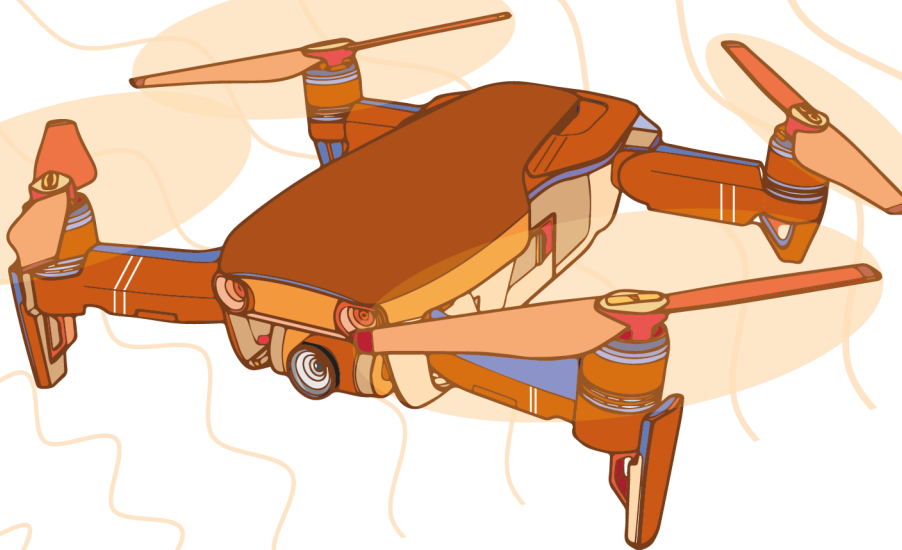


CURSO DE FÍSICA III

Notas de clase

Para estudiantes de ciencias, ingeniería
y licenciaturas en educación



Luis Aphranio Portilla Salazar

êditorial

Universidad de **Nariño**

CURSO DE FÍSICA III

Para estudiantes de ciencias, ingeniería
y licenciaturas en educación

Notas de clase

CURSO DE FÍSICA III

Para estudiantes de ciencias, ingeniería
y licenciaturas en educación

Notas de clase

Luis Aphanio Portilla Salazar

Portilla Salazar, Luis Aphranio

Curso de física III para estudiantes de ciencias, ingeniería y licenciaturas en educación : notas de clase / Luis Aphranio Portilla Salazar. – 1ª. ed.--San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño,2025

268 páginas : ilustraciones, gráficas, tablas, fotografías

Incluye referencias bibliográficas p. 263-265

ISBN: 978-628-7771-09-3 Impreso

ISBN: 978-628-7771-10-9 Digital

1. Física 2. Física—Enseñanza y aprendizaje 3. Física—Educación superior 4. Electroestática y carga eléctrica 5. Campo eléctrico 6. Electrodinámica—Corriente eléctrica. 7. Circuitos resistivos básicos 8. Circuitos capacitivos básicos

537 P852c – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Curso de física III

© Editorial Universidad de Nariño

© Luis Aphranio Portilla Salazar

ISBN impreso: 978-628-7771-09-3

ISBN digital: 978-628-7771-10-9

Primera edición

Corrección de estilo: Gonzalo Jiménez Mahecha

Diseño de cubiertas: Mateo Felipe Delgado

Rediseño de cubiertas: Nathaly Johana Rivadeneira

Diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Febrero de 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

Este trabajo es el resultado de la experiencia de años dedicados a la educación universitaria, fundamentalmente en la Universidad de Nariño, como profesor de Física en los diferentes programas en que el Departamento de Física presta sus servicios

Nota

Las gráficas como esquemas las realiza el autor de estas notas de clase en AutoCAD (2019), con lo cual se puede conservar la escala adecuada; algunas imágenes de fotografías han sido tomadas de portales de Internet en las que se hace la correspondiente referencia

Contenido:

Capítulo 1. Electrostática Carga eléctrica	14
1.1 Introducción	15
1.2 Modelo atómico.....	17
1.3 Formas de cargar eléctricamente un material	21
Por rozamiento	21
Por efecto termoiónico.....	21
Por Efecto piezoeléctrico.....	22
Por Efecto fotoeléctrico	22
Por Efecto de Impacto.....	22
Por influencia	22
1.4 Carga eléctrica	22
Ley de Coulomb.....	23
Ejemplos	24
Electroscopio.....	31
Capítulo 2. Campo eléctrico.....	32
2.1 Líneas de fuerzas de un campo eléctrico	34
2.2 Campo eléctrico debido a dos cargas.....	35
2.3 Campo eléctrico. Caso discreto.....	36
Ejemplos	37
2.4 Campo eléctrico. Caso continuo.....	42
Ejemplos	43
2.5 Ley de Gauss	47
Flujo Eléctrico.	47
2.6 Ley de Gauss en forma diferencial	49
Ejemplos	50
Capítulo 3. Energía y Potencial eléctrica.....	57
3.1 Energía potencial	58
3.2 Potencial eléctrico	60
Diferencia de Potencial.....	62
3.3 Potencial eléctrico. Caso discreto	64
Ejemplos	65
3.4 Potencial eléctrico. Caso continuo.....	66
Ejemplos	66

3.5 Dipolo eléctrico.....	67
3.6 Movimiento de un dipolo por acción de un campo eléctrico	70
Dipolo eléctrico paralelo con el campo	70
Dipolo eléctrico en medio de un campo uniforme.....	71
Dipolo entre dos cargas puntiformes	71
Ejemplos	73
Caso en que el momento dipolar no es paralelo ni antiparalelo	73
3.7 Electrización superficial	75
El poder de las puntas	75
El pararrayos.....	76
Efluvios y efecto corona en líneas de alto voltaje	77

Capítulo 4. Capacitancia..... 79

4.1 Capacitancia.....	80
Ejemplos	82
4.2 Dieléctricos	82
4.3 Energía almacenada en un capacitor.....	84
4.4 Densidad de energía del campo eléctrico.....	85
4.5 Asociación de capacitores	86
Asociación en serie	86
Asociación en paralelo	87
Ejemplos	87
4.6 Historia de la Capacitancia	91
la máquina de Otto Von Guericke.....	91
Electróforo	92
Botella de Leyden.....	92
Máquina de Wimshurst	93
Generador de Van de Graaff.....	94
Capacitores en el mundo electrónico.....	95

Capítulo 5. Electrodinámica. Corriente eléctrica.... 97

5.1 Corriente eléctrica.....	98
5.2 Naturaleza de la corriente eléctrica.....	99
Densidad de Corriente	100
Modelo de gas de electrones para los metales	101

5.3 Galvanoplastia	103
5.4 Conservación de la carga	105
5.5 Ley de Ohm	106
Ejemplos	110
5.6 Resistencia y código de colores	111
La resistencia en la electrónica	112
5.7 Asociación de resistencias	113
Asociación en serie	113
Asociación en paralelo	114
Ejemplos	115
5.8 Ley de Joule y Potencia eléctrica	121
Ejemplos	122
5.9 Capacidad Instalada	123
Ejemplos	124
5.10 Tipo de corrientes.....	125
Corriente continua	125
Corriente alterna	126
Valor eficaz	127
Valor pico a pico	127
5.11 Tipos de distribución eléctrica.....	128
Circuito monofásico.....	128
Circuito bifásico.....	129
Circuito trifásico.....	129
Capítulo 6. Circuitos resistivos básicos	130
6.1 Circuitos	131
Fuentes de poder	131
6.2 Análisis de circuito básico tipo 1	131
Ejemplos	132
6.3 Análisis de circuitos básicos tipo 2.....	139
Ejemplos	140
6.4 Análisis de circuitos básicos tipo 3.....	155
Ejemplos	156
Método de solución por remplazos	157
Método de solución por reducción	158
Método de solución por matrices	159
Método de solución por regla de Cramer	161

6.5	Puente de Wheatstone	164
6.6	Instrumentos de medida.....	165
	Voltímetro.....	165
	Amperímetro	166
	Watímetro.....	166
Capítulo 7. Circuitos capacitivos básicos.....		167
7.1	Circuito capacitivo	168
7.2	Circuito. Resistencia y Capacitor R.C.....	169
	Carga de un Capacitor	170
	Descarga de un Capacitor	173
	Ejemplos	175
7.3	Energía almacenada en un capacitor	176
Capítulo 8. Campo magnético.....		178
8.1	El Imán	179
8.2	Sistema de unidades en el campo magnético	182
8.3	Electromagnetismo	183
8.4	Primer Postulado	183
	Motor lineal	184
	Ciclotrón	185
	Efecto Hall.....	187
	Principio del motor	187
8.5	Segundo Postulado	189
	Movimiento de cargas en presencia de campos eléctrico y magnético.....	190
	Movimiento de cargas cuando E y B son perpendiculares..	191
	Movimiento de cargas cuando E y B son paralelos	192
	Movimiento de cargas en campo magnético convergente ...	193
8.6	Ley de Biot - Savart	194
	Fuerza entre corriente paralelas.....	197
	Campo magnético generado por una espira	198
	Solenoides o grupo de espiras	199
	Toroide	201
8.7	Ley de Gauss para el campo magnético	201
8.8	Densidad de flujo magnético - Ley de Amper	203

Campo magnético generado por la corriente que circula por un hilo conductor	204
Campo magnético generado por un toroide	204
8.9 Que es un Imán	205
Ferromagnetismo	205
Paramagnetismo	206
Diamagnetismo	206
Origen del magnetismo.....	206

Capítulo 9. Campos dependientes del tiempo 208

9.1 Campo dependiente del tiempo	209
Ley de Lenz	210
Aplicación técnica.....	211
9.2 Autoinductancia	211
9.3 Circuito R. L.	212
9.4 Energía del campo magnético.....	215
9.5 Densidad del campo magnético	216
9.6 Circuito R.L.C. (Oscilaciones eléctricas).....	217
Circuitos de oscilaciones libres.....	217
9.7 Circuitos con corriente alterna	219
Fuente de poder - fuerza electromotriz.....	219
9.8 Circuito R. $V \sim$	219
9.9 Circuito L. $V \sim$. Reactancia Inductiva	220
9.10 Circuito C. $V \sim$. Reactancia Capacitiva	223
Ejemplos	224
9.11 Circuito R. L. C. $V \sim$. (Oscilaciones forzadas).....	225
Impedancia	227
Resonancia de la amplitud en un circuito R. L. C.....	230
Potencia media del circuito R. L. C.....	231
Ejemplos	233
9.12 Circuitos Acoplados.....	234
Transformadores	234
Ejemplos	236
Aplicaciones técnicas	237
Carreto de Ruhmkorff.....	237
Soldador de arco.....	238
Bobina de encendido	239

9.13 Ondas electromagnéticas.....	240
Ley de Amper – Maxwell.....	241
Ecuación de Onda	242
Vector de Poynting.....	246
Apéndice.	251
1. Campos vectoriales.	251
2. Productos vectoriales.	253
2.1 Producto escalar o punto	253
Primera definición.....	253
Segunda definición.....	253
Propiedades del producto escalar.....	254
2.2 Producto vectorial	254
Primera definición.....	254
Segunda definición.....	255
3. Integral de línea.....	257
4. Operadores vectoriales	258
4.1 Campo escalar	258
4.2 Operador Nabla.....	258
4.3 Gradiente de una función	259
4.4 Divergencia de un vector	259
Laplaciano	259
4.5 Rotor o rotacional.....	260
4.6 Teorema de la divergencia.....	260
4.7 Teorema de Stokes	260
Bibliografía.....	261
Referencias	263
Acerca del autor	266

Capítulo 1



Electrostática. Carga eléctrica



Fuente. Ventus Ciencias experimentales.

1.1 Introducción

La caída de rayos ha existido desde cuando se formó la atmósfera, es decir, estos fenómenos naturales originaron la vida y, por supuesto recibieron al hombre; desde entonces, han sido una forma de producir fuego, pero al hombre siempre le produjo temor ante el desconocimiento de su naturaleza y el poder que esto implica, así que fue sencillo considerar que, cuando se presentan estos fenómenos, es una manifestación de un Dios que puede estar enojado o simplemente se está manifestando, así que se dedicaron a descifrar estos mensajes; bueno, algunos hasta ahora lo siguen haciendo.

Por otra parte, se cree que los chinos, en el siglo I inventaron la brújula y pasaron muchos años para que se pudiera demostrar que estos dos fenómenos —caída de rayos y brújula— tienen algo en común; otros fenómenos de esta naturaleza fueron algunos juegos de niños, como la atracción de bolitas con ámbar (resina fosilizada de origen vegetal, proveniente de árboles de la familia de las coníferas), o la atracción que ejerce la piedra magnetita (mineral de hierro, formado por óxido ferroso-diférrico $[\text{Fe}_3\text{O}_4]$); el nombre de magnetita se debe a la ciudad griega de Magnesia, donde se encontraba fácilmente y en abundancia), también dos fenómenos muy parecidos, con naturaleza similar a la del rayo y la brújula.

Tales de Mileto, griego (600 a. C.), da a conocer sobre estos fenómenos y, luego, solo en 1600 los estudia el inglés Gilbert, a partir de lo que concluyó que no solo el ámbar podía atraer cuerpos; también otros, a los que les llamó eléctricos; a William Gilbert se le debe que hubiera separado los fenómenos eléctricos de los magnéticos; más tarde aparece la primera máquina eléctrica: se trataba de una esfera de azufre, que se frotaba entre las manos secas y podía atraer pequeños cuerpos y producir pequeñas chispas.

En 1729, el inglés Stephen Gray descubrió la conductividad de algunos materiales y la no conductividad de otros.

En 1733, el francés François du Fay demostró que hay dos clases de electricidad: “vidriosa y resinosa”; cuerpos con la misma carga se repelen

y con carga diferente se atraen; también describió cómo afecta la temperatura con los cuerpos cargados.

En 1746, el alemán Pieter van Musschenbroek descubrió que la electricidad se la puede guardar; así surgió la botella de Leyden como el primer condensador.

En 1748, el norteamericano Benjamin Franklin, que ignoraba lo relativo a algunos descubrimientos europeos, concluyó que los cuerpos cargados contienen un fluido eléctrico constituido por partículas eléctricas; así que los cuerpos electrizados adquieren unas cuantas partículas extra, que pueden ir de uno lado a otro para volverlo eléctrico positiva o negativamente con el otro que interactúa, con lo que enuncia un principio de conservación de energía entre cuerpos eléctricamente neutros. También, realizó experimentos en la atmósfera, consistentes en descargar eléctricamente una nube con utilización de una cometa, con un hilo conductor; descubrió que la electricidad se escapa por las puntas, principio que aplicó en el pararrayos como medio protector ante la descarga eléctrica.

En 1784, el francés Charles-Agustín de Coulomb concibió una balanza de torsión para medir la fuerza eléctrica y formular la primera ley de la electricidad:

$$F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Así,

- 1) Cargas del mismo signo se repelen.
- 2) Cargas de signo contrario se atraen.
- 3) La fuerza de atracción o repulsión es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

En 1819, el danés Hans Christian Ørsted descubrió que la aguja de una brújula se podía mover, cuando cerca de ella circula una corriente a través de un conductor.

Luego, hubo una seguidilla de experimentos e inventos como el telégrafo, el carrito de inducción, los transformadores, los motores, la dinamo y, por último, el teléfono.

En 1830, el inglés Michael Faraday demostró que, al tener campos magnéticos variables, con el tiempo podía inducir una diferencia de potencial en un conductor; de igual forma, el norteamericano Joseph Henry demostraba lo mismo; por la misma época, el ruso Heinrich Friedrich Emil Lenz, al estudiar los mismos fenómenos, formuló la ley que permite predecir el sentido de la corriente inducida.

En 1860, James Clerk Maxwell, del Reino Unido, logró unificar fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría: el **electromagnetismo**, y concluyó con la existencia de ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz.

En 1880, el alemán Heinrich Rudolf Hertz demostró la existencia de estas ondas electromagnéticas; aquí comenzó una carrera sin fin, a la fecha vinculada a las telecomunicaciones, como la radio, la televisión, la Internet, etc.

1.2 Modelo atómico

Al finalizar el siglo XIX, inició una inquietud respecto a saber cuáles son las partículas que conforman la electricidad y la materia en general; desde el siglo VI a. C., el hombre se preguntaba hasta dónde se podían dividir las partículas; los griegos Leucipo y Demócrito se refirieron a átomos, cuyo significado etimológico era: *a* ‘sin’ y *tomos*, ‘división’, así que la palabra significa sin división, de modo que los átomos son partículas a las que no se las puede dividir más, idea que perduró por mucho tiempo.

En 1895, tras los trabajos de John Dalton y Amedeo Avogadro, vuelven las ideas y teorías sobre el átomo y las moléculas.

En 1900, J. J. Thomson descubre que los cationes que producen la luz en los tubos de Crookes son electrones, los mismos que circulan por los conductores para generar la electricidad; así, imaginó un modelo atómico, al que se lo conoce como el “modelo de pudín”, en que una masa con signo positivo alberga pasas con signo negativo distribuidas en toda parte; de modo que los electrones eran las pasas con carga de signo negativo; para comprobar este modelo, Ernest Rutherford, en 1911, efectuó un experimento, denominado la “dispersión de Rutherford”, que consistía en lanzar partículas alfa (α) contra una lámina de oro muy delgada; a partir del análisis estadístico del rebote de las partículas tras colisionar con la fina lámina de oro, se dedujo la existencia de un núcleo, cuyo valor

eléctricamente es positivo e igual a la suma de partículas negativas que se encontrarían por fuera del núcleo; así llegó a la conclusión referida a que el tamaño del núcleo es del orden de $10^{-14}m$.

Con los resultados obtenidos propuso un nuevo modelo atómico en que el núcleo, muy masivo, se encuentra en el centro de la estructura electrónica y que, a su vez, este se encuentra orbitando a su alrededor similar a un sistema planetario; el modelo no se aceptó por no ser coherente con la teoría electromagnética de Maxwell, recién propuesta y comprobada.

En 1913, el danés Niels Bohr, al estudiar el modelo de Rutherford, propuso unos postulados con base en la novedosa mecánica cuántica de Max Planck:

- 1) los electrones giran en órbitas circulares alrededor del núcleo, bajo la fuerza de Coulomb y las leyes de Newton.
- 2) Las únicas órbitas permitidas son aquellas en que el momento angular del electrón orbitante debe ser un múltiplo entero de $\frac{h}{2\pi} \equiv \hbar$, constante de Planck, de tal modo que los únicos niveles permitidos son aquellos que cumplieran con:

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar,$$

donde $n = 1.2.3..$ y $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}Js$

- 3) Cuando un electrón está en una órbita permitida, el electrón no irradia energía (esto condenaba al modelo de Rutherford).

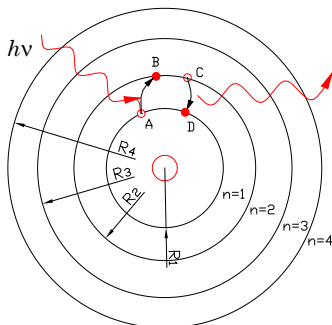


Fig. 1.1. Esquema del modelo atómico de Bohr.

- 4) Si el electrón salta desde una órbita inicial de energía E_i a una órbita final de energía E_f , se emite un fotón de frecuencia:

$$f = \nu = \frac{E_i - E_f}{\hbar}.$$

En este mismo postulado, para que un electrón saltara a un nivel superior, se necesita que absorbiera energía por algún medio, pero de inmediato desaparece la energía excitante, el electrón vuelve a su nivel de origen, para dejar la misma cantidad de energía absorbida en forma de radiación, como se puede ver en la Fig. 1.1.

Por último, el modelo de Arnold Somerffield, de acuerdo con la mecánica cuántica de Erwin Schrödinger, modelo probabilístico en el que está presente el principio de Heisenberg, se propone una estructura fina; es

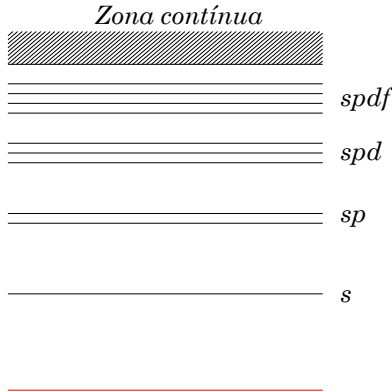


Fig. 1.2. Esquema de los niveles y subniveles.

decir, en cada nivel se presentan subniveles, con lo cual la distribución de los niveles y subniveles queda tal como se puede ver en la Fig. 1.2, donde en la periferia del átomo, por tener una superposición de subniveles, se presenta una banda continua sin mayor cuantización; lo contrario para los niveles internos, así: en el primer nivel solo hay un subnivel, *s*; en el segundo ya hay dos subniveles, *s* y *p*; en el tercero hay *s*, *p*, *d*; en el cuarto *s*, *p*, *d*, *f*, y así sucesivamente; además, las letras tienen su propio significado:

- s*: sharp (sostenido)
- p*: principal
- d*: diffuse
- f*: fundamental

Esto se puede condensar en la Tabla 1.1, que muestra la distribución electrónica de niveles; estos, a su vez, en subniveles; en cada subnivel, la cantidad máxima de orbitales; la suma de los orbitales dará el número máximo de electrones por subnivel y la suma de estos da la cantidad máxima de electrones por nivel.

Tabla 1.1. Distribución electrónica.

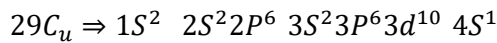
Nivel	Subnivel	Número de orbitales	Número máximo de electrones por orbital	Número de electrones por nivel.
1	s	1	2	2
2	s	1	2	8
	p	3	6	
3	s	1	2	18

	p	3	6	
	d	5	10	
4	s	1	2	32
	p	3	6	
	d	5	10	
	f	7	14	
5	s	1	2	50
	p	3	6	
	d	5	10	
	f	7	14	
	g	9	18	

En la primera columna de la Tabla 1.1 están los niveles, en la segunda los subniveles, en la tercera columna el número de orbitales, en la cuarta columna el número máximo de electrones por orbitales y en la quinta columna el número total de electrones por nivel; a esta configuración se la conoce como estructura electrónica de los átomos.

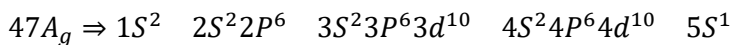
Por ejemplo, el átomo de cobre (Cu) tiene por número atómico 29, lo que significa que debe tener también 29 electrones, siempre y cuando esté eléctricamente neutro.

Así:



Como se puede ver, en la distribución electrónica hay 29 electrones, pero el último debería tener S^2 y solo tiene 1, lo que lleva a que Cu fuese activo químicamente y pueda reaccionar con otros elementos que le aporten ese electrón que le hace falta.

En el caso de la plata (Ag), cuyo número atómico es 47, la estructura electrónica será:



Igual que en el caso anterior, el átomo de la plata tiene 47 electrones, que ha llenado de adentro hacia afuera y, de nuevo, en el nivel 5, el subnivel solo tiene un electrón y debería tener 2; esta característica lleva a que en el núcleo también hubiera 47 protones, lo que lo torna químicamente activo, con lo cual podría reaccionar con otro elemento que le aportase ese electrón que le hace falta y así sucesivamente con cada uno de los elementos químicos.

Así pues, la naturaleza del átomo se constituye por varios elementos, distribuidos de tal modo que forman un paquete bien ordenado; los electrones, respecto al núcleo, se unen mediante fuerzas de corto alcance, de tal manera que a aquellos que están cerca al núcleo los atraen de manera más fuerte que aquellos que se encuentran en la periferia; así, en aquellos materiales formados por átomos con un gran número de electrones es fácil arrancarles unos cuantos, por lo que se dice que dicho material tiene electrones libres; lo contrario ocurriría si el material no tiene los suficientes electrones, por lo que se encontrarían concentrados en los primeros niveles y es muy difícil de arrancarlos y, de lograrlo, se lleva a que el material se alterara, por tener átomos ionizados.

En el caso contrario, en que fuese fácil arrancar electrones sin que se modifique el átomo, se podría estar frente a materiales que permiten se carguen eléctricamente mediante métodos mecánicos, electromagnéticos u otros.

1.3 Formas de cargar eléctricamente un material

Existen algunos materiales que se pueden cargar eléctricamente con facilidad, mientras en otros es un poco más difícil de hacerlo; entre las formas más usuales, se tiene:

Por rozamiento.

La fricción se lleva a cabo por acción mecánica, al pasar un cuerpo en aparente contacto contra otro: puede ser un pedazo de tela contra un sólido, el aire al rozar contra la capota de un carro en movimiento, frotar una barra de vidrio con un pedazo de seda; en este caso, la seda arranca los electrones del vidrio, lo que implica que el vidrio se cargase positivamente, mientras la seda lo hace de forma negativa o, lo que es lo mismo, pensar en que los electrones del vidrio pasan a la seda.

Por efecto termoiónico.

Cuando se calienta un cuerpo, significa que se le está inyectando energía; por tanto, sus moléculas y átomos se encuentran excitados, lo que permite extraerle electrones con relativa facilidad, para dejar al cuerpo con carga positiva; con este principio funcionaron las válvulas de los primeros aparatos electrónicos, como radios y televisores.

Por efecto piezoeléctrico.

Ocurre cuando ciertos cristales, como el cuarzo, al someterlos a presión en determinado ángulo, permite distribuir cargas; este recurso se utilizó en los primeros micrófonos de voz e instrumentos musicales y en sensores que miden presión.

Por efecto fotoeléctrico.

Ocurre cuando la radiación solar incide en ciertos materiales, como el silicio, en el que puede provocar el desprendimiento de electrones, los que pueden aprovecharse para que generen corriente eléctrica y, con ello, un trabajo; en el mercado se los conoce como paneles fotovoltaicos o paneles solares.

Por efecto de impacto.

Ocurre cuando con violencia se golpea un material muy rígido o duro; las cargas se afectan tanto que, entre el extremo golpeado y el pasivo, se genera un gran potencial eléctrico, con lo que se logra hacer saltar chispas entre estos extremos. Una aplicación de este fenómeno está en los encendedores de estufas.

Por influencia

Cuando un cuerpo se carga negativamente genera a su alrededor unas condiciones especiales, que se denominarán Campo eléctrico; si este campo interactúa con otro cuerpo, las cargas negativas del segundo se sentirán afectadas y llevarán a que se alejen, de tal modo que el cuerpo quedará cargado de inmediato con carga positiva, y todo lo contrario, si el primer cuerpo se carga positivamente.

De igual forma ocurre dentro de un conductor; mientras a un extremo lo influye un campo eléctrico, este se carga positivamente, mientras que el otro extremo se carga negativamente.

1.4 Carga eléctrica

Experimentalmente se ha observado que hay cuerpos o materiales que se pueden cargar al utilizar alguno de los métodos estudiados, como fricción, calor, luz solar, entre otros. Una vez cargados por alguno de estos métodos, se puede experimentar; tal como se muestra en la Fig. 1.3, se tienen tres posiciones de los péndulos con lentejas de material que se puede cargar e hilo no conductor de la electricidad estática de las bolitas, así:

En el primer caso, se tiene el par de esferas, que se encuentran cargadas positivamente; allí se presenta una fuerza de repulsión; de igual forma, en el segundo caso, las esferas se han cargado del mismo signo negativamente y también se presenta una fuerza de repulsión; en el tercer caso, las esferas se han cargado de signo contrario, es decir, una positivamente y la otra negativamente; en este caso, se presenta una fuerza de atracción.

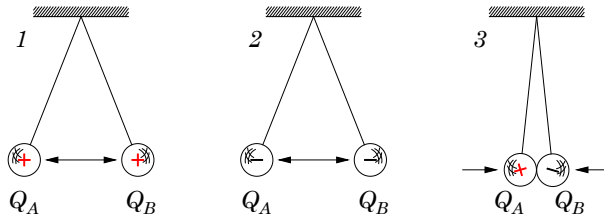


Fig. 1.3. Tres posiciones de esferas cargadas eléctricamente.

Ley de Coulomb

La fuerza mencionada tiene una intensidad que depende inversamente del cuadrado de la distancia y es directamente proporcional al producto de las cargas. Así queda la Ley de **Coulomb**:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.1),$$

donde Q_1 y Q_2 son las cargas en cuestión;
 r , la distancia que separa a las cargas;

k es la constante de proporcionalidad, denominada también constante de Coulomb, cuyo valor es: $k = 8.9814 \times 10^9 N \frac{m^2}{C^2}$.

La unidad de las cargas es el Culombio, que es una unidad muy grande.

De forma analítica, la constante se la puede determinar como: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, donde ϵ_0 es el coeficiente de permisividad eléctrica en el vacío, cuyo valor es:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 8.9974 \times 10^9}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} N^{-1} C^2 m^{-2}$$

Como definición de Culombio, se tiene: $C = 6.25 \times 10^{18}$ electrones. En consecuencia, la carga de un electrón es:

$$e^- = \frac{1}{6.25 \times 10^{18}}$$

$$e^- = 1.6 \times 10^{-19}C$$

La constante ϵ_0 o coeficiente de permisividad eléctrica en el vacío; cuando se mide respecto a este valor, se tienen valores relativos de los materiales en cuestión; entonces, se tiene con el nombre de dielectricidad relativa (Tabla 1.2).

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Tabla 1.2. Dielectricidad de materiales.

Materiales aislantes	Permisividad relativa
Vacío	1
Aire	1.0
Polietileno	1.2
Poliestireno	2.7
Goma	3.0
Papel impregnado	3.0
Baquelita	5.0
Cuarzo	5.0
Vidrio	6.0
Mica	6.0
Vidrio Flint	10.0
Glicerina	50.0
Agua destilada	81.0
Titanato de Bario	1200
Titanato de Estroncio	10000

Ejemplos

1. Calcular la fuerza que se genera entre dos cargas $Q^+ = 3C$ y $Q^- = 7C$, separadas $0.5m$.

Solución

De acuerdo a la ecuación (1.1), recurrir a los valores entregados en el ejemplo:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Al remplazar, se tiene:

$$F = K \frac{(3C)(7C)}{(0.5m)^2}$$

$$F = 9 \times 10^9 N \frac{m^2}{C^2} \frac{21C^2}{0.25m^2}$$

$$F = 756 \times 10^9 N$$

2. Calcular la fuerza que se tiene en la carga 3, de acuerdo a la Fig. 1.4.

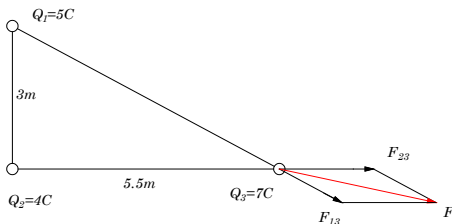


Fig. 1.4. Esquema de las fuerzas eléctricas.

Solución

En la figura se puede ver la dirección de los vectores debido a la acción de las cargas 1 y 2; estos son: 1;3 y 2;3; la resultante de la suma de estas dos fuerzas es la fuerza F ; entonces, se tiene:

$$F = F_{13} + F_{23}.$$

Para su solución, es necesario resolver mediante algún método vectorial; el método analítico resulta un poco largo, pero es más seguro.

En el punto en cuestión, es decir, donde se encuentra la carga 3 y donde se generan las fuerzas F_{13} y F_{23} ; en la Fig. 1.5 se pueden apreciar las fuerzas mencionadas y sus componentes en los ejes x y y .

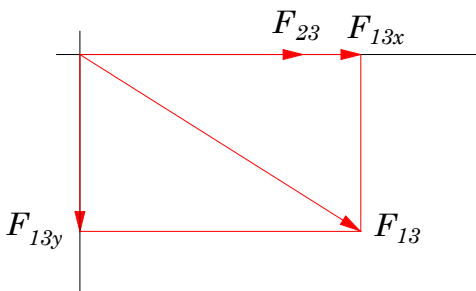


Fig. 1.5. Esquema de las fuerzas F_{13} , F_{23} y sus componentes.

En este caso, la fuerza F_{13} tiene las componentes en los ejes x y y ; en cambio, la F_{23} está sobre el eje x y, por tanto, no tiene componentes en y ; así que la fuerza resultante es:

$$F_r = F_x + F_y,$$

Dónde: $F_x = \sum_{i=1}^2 F_{ix}$ y $F_y = \sum_{i=1}^2 F_{iy}$ Como están ubicadas de

forma ortogonal, la magnitud de la fuerza resultante se puede calcular al recurrir al teorema de Pitágoras:

$$f_r = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

La dirección del vector se da por:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{f_y}{f_x}.$$

Ahora bien, las componentes de la fuerza F_{13} son:

$$F_{13x} = F_{13} \text{Cos}\theta$$

$$F_{13y} = F_{13} \text{Sen}\theta$$

Ahora, como: $F_{13} = K \frac{Q_1 Q_2}{r_{13}^2}$, entonces: $F_{13x} = K \frac{Q_1 Q_2}{r_{13}^2} \text{Cos}\theta$; como no se conoce el ángulo, entonces: $\text{Tan}\theta = \frac{\text{Catetoopuesto}}{\text{Catetoadyacente}}$; esto es:

$$\text{Tan}\theta = \frac{3}{5.5}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} 0.55$$

$$\theta = 28^\circ 36'$$

Para calcular r_{13} , que corresponde a la hipotenusa del triángulo, es:

$$r_{13} = \sqrt{3^2 + 5.5^2}$$

$$r_{13} = 6.26$$

Con estos datos, remplazamos en la ecuación del eje x:

$$f_{13x} = K \frac{(5C)(7C)}{(6.26m)^2} \text{Cos}26^\circ 36'$$

$$f_{13x} = 0.78KN$$

El resultado se lo puede dejar en términos de K ; al terminar, se puede disponer su valor, por facilidad de cálculo.

Ahora la componente en y :

$$f_{13y} = K \frac{Q_1 Q_2}{r_{13}^2} \text{Sen}\theta.$$

Al remplazar los valores ya calculados, se tiene:

$$f_{13y} = K \frac{(5C)(7C)}{6.26^2} \text{Sen}28^\circ 36'$$

$$f_{13y} = 043KN$$

Con estos resultados, se pueden calcular los valores para el eje x ; recuérdese que la componente en x de la fuerza F_{23} es la misma; así:

$$f_x = \sum f_{ix} = f_{13x} + f_{23x}$$

$$f_x = 0.78K + k \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}$$

$$f_x = 078K + k \frac{(4C)(7C)}{(5.5m)^2}$$

$$f_x = 0.78K + 0.93K$$

$$f_x = 1.71KN$$

Para el eje y , se tiene: $F_Y = \sum_{i=1}^2 F_{iy}$; ahora bien, resulta que, según la geometría de la Fig. 1.6, la fuerza en y es negativa ($-$), y es única, dado que no hay componente en y de la fuerza F_{23} ; entonces:

$$f_y = -f_{13y}.$$

Por tanto, $f_y = -0.43KN$ (negativo, porque se dirige hacia abajo).

Como $F_R = F_x + F_y$, entonces la magnitud será:

$$f_r = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

$$f_r = \sqrt{(1.71K)^2 + (0.43)^2}$$

$$f_r = 1.76KN$$

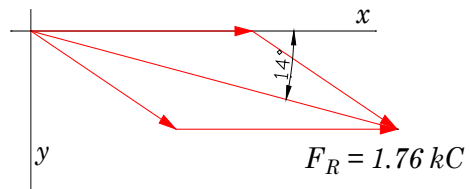


Fig. 1.6. Vector resultante.

Para la dirección:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{f_y}{f_x} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{-0.48}{1.71} \\ \theta &= -14^\circ 6' \end{aligned}$$

Como el ángulo es negativo, entonces se mide de arriba abajo.

3. Dos esferas de igual peso, con cargas eléctricas de igual magnitud $Q = 3 \times 10^{-6}C$ y de signo contrario, cuelgan de hilos de igual longitud; por atracción electrostática, los péndulos adquieren la inclinación como se ve en la Fig. 1.7 ¿Cuál es la masa de los cuerpos?

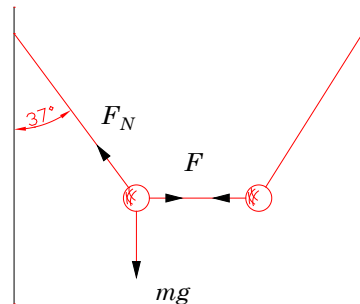


Fig. 1.7. Esquema de dos péndulos que se atraen por la fuerza electrostática entre ellos.

Solución

Como la cuerda de las masas forma un ángulo de 37° y, además, la separación entre las masas es de $0.3m$, en estas condiciones se puede calcular el peso de las masas “ mg ”:

$F_E = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$; al remplazar los valores entregados, queda:

$$\begin{aligned} F_E &= K \frac{(3 \times 10^{-6}C)(3 \times 10^{-6}C)}{(0.3m)^2} \\ F_E &= 0.9N \end{aligned}$$

En la Fig. 1.8, se puede ver los vectores.

Entonces:

$$\begin{aligned} F_{Ex} - T_x &= 0 \\ F_{Ey} - mg &= 0 \end{aligned}$$

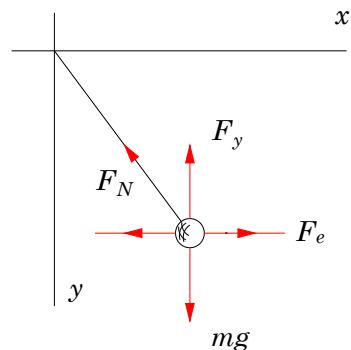


Fig. 1.8. Esquema de la fuerza para una sola carga, de forma aislada.

Para calcular T o F_N :

$$T_x = T \text{Sen}37 = F_E, \text{ así que:}$$

$$T = \frac{0.9N}{0.602}$$

$$T = 1.5N$$

Por otra parte, $T_y - mg = 0$; de aquí ya se puede despejar mg ; si:

$$mg = T \text{Cos}37$$

$$mg = (1.5N)(0.8)$$

$$mg = 1.2N$$

Este es el peso de las lentes.

4. Dos cargas de $0.15C^+$ están separadas $1m$; una tercera carga, de $0.05C^+$, se coloca entre las dos cargas anteriores. ¿En qué punto del eje que las separa, las fuerzas se anulan?

Solución

Si las dos cargas son iguales, entonces en el centro de la distancia que las separa, la fuerza resultante sobre la tercera carga es nula, pues habrá una fuerza a la izquierda y otra a la derecha.

5. Si las que se encuentran separadas por $1m$ son de $3c^+$ y $7c^+$ (Fig. 1.9), ¿cuál es el punto donde las fuerzas con la tercera carga se anulan?

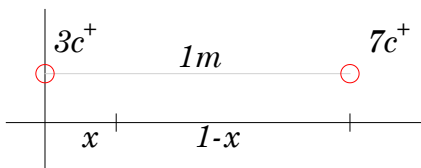


Fig. 1.9. Esquema de la distribución de las cargas.

Solución

Para que se anulen, quiere decir que las fuerzas eléctricas son iguales; esto es:

$$F_{13} = F_{23}.$$

Entonces, las magnitudes de estas fuerzas son:

$$K \frac{Q_1 Q_3}{x^2} = k \frac{Q_2 Q_3}{(1-x)^2}$$

Aquí se anulan la constante y la carga tres; por tanto, queda así:

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(1-x)^2}.$$

De allí se despeja la variable x ; al multiplicar en cruz, se tiene:

$$(1-x)^2 Q_1 = x^2 Q_2$$

Si se desarrolla el binomio, se obtiene:

$$(1 + x^2 - 2x)Q_1 = x^2 Q_2$$

$$Q_1 + x^2 Q_1 - 2x Q_1 = x^2 Q_2$$

Con la organización de estos términos, queda:

$$(Q_1 - Q_2)x^2 - 2Q_1 x + Q_1 = 0$$

Al remplazar los valores dados en el ejemplo, se tiene:

$$(3 - 7)x^2 - 2(3)x + 3 = 0$$

$$4x^2 + 6x - 3 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo orden, cuya solución se obtiene mediante la solución general de las ecuaciones cuadráticas:

$$x_i = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Así que, al remplazar los valores, se tiene:

$$x_i = \frac{-6 \pm 9.17}{8}.$$

De allí se obtienen dos datos:

$$x_1 = 0.40m$$

$$x_2 = -1.9m$$

En este caso, x_2 no es válido. De modo que el valor de $x_1 = 0.4m$ es el válido y, como tal, el otro extremo estará a: $x_2 = 1 - x_1$; esto es: $x_2 = 0.6m$; esto significa que la tercer carga está a $40cm$ de la carga Q_1 o a $60cm$ de Q_2 .

Electroscopio



Fig. 1.10. Electroscopio del Lab.
Fuente: el autor.

Es un aparato destinado a medir la carga de los cuerpos; los hay de muchas formas; en el caso de la Fig. 1.10, es un moderno aparato: la aguja puede girar sobre un eje en el centro de ella; cuando se carga el vástago, lleva también a cargar la aguja, momento en el cual se presenta un rechazo, por estar bajo la misma carga; en este caso la aguja se separa de la línea vertical y su máxima posición sería de forma horizontal; cualquier posición fuera de la vertical es una muestra de que el aparato se encuentra con carga positiva o negativa; cuando en el plato superior se acerca un cuerpo que se encuentre con una carga de signo contrario, la aguja se acerca a la vertical momentáneamente para luego

volverse a separar debido a que entregó la carga que inicialmente tenía y ahora se encuentra con otra, de modo que, de igual forma, todo el sistema se carga del mismo signo y se presenta el nuevo rechazo.

Se debe entender que, en algunos electroscopios de buena marca, la aguja y el vástago se encuentran bien aislados del soporte circular, como se ve en la Fig. 1.10.

Capítulo 2



Campo eléctrico



Fuente: La ciencia de Ward (s.f.).

La fuerza de Coulomb aparece justamente cuando hay dos cargas del mismo signo o signo contrario que definen una fuerza atractiva o repulsiva. La pregunta es: ¿qué genera la fuerza?

Consideremos una carga puntual localizada en algún lugar del espacio; para poder localizarla se puede utilizar otra carga elemental de prueba, la cual puede detectar la presencia de la carga Q_I por la fuerza a distancia que se presenta, lo que significa que Q_I ha modificado el espacio, hay algo que avisa que hay una carga; a esta propiedad que adquiere el espacio se la denomina **campo eléctrico**; de modo que se podría decir que es una parte del espacio dentro del cual la carga que crea el campo es capaz de actuar sobre otra carga cualquiera. Al utilizar una carga elemental de prueba ΔQ para investigar el campo eléctrico generado por la carga Q_I , se puede definir que el campo eléctrico es la razón de la fuerza por unidad de carga. Así:

$$E = \frac{F}{\Delta Q} \quad (2.1).$$

Ahora bien, como $F = K \frac{Q\Delta Q}{r^2}$, entonces, al remplazar en (2.1), queda:

$$E = K \frac{Q}{r^2} \quad (2.2).$$

Esta es la intensidad del campo eléctrico de la carga Q_I ; como la fuerza es un vector, al operar con un escalar, se obtiene otro vector, cuyas unidades son:

$$\vec{E} = \frac{F}{\Delta Q} \left(\frac{N}{C} \right).$$

Estas unidades son: Newton sobre Culombios. Con esto se puede decir que, si hay una carga en algún lugar del espacio, en la carga elemental de prueba se presentará una fuerza; el sensor del equipo que mide registrará esta intensidad:

$$F = E\Delta Q.$$

2.1 Líneas de fuerzas de un campo eléctrico

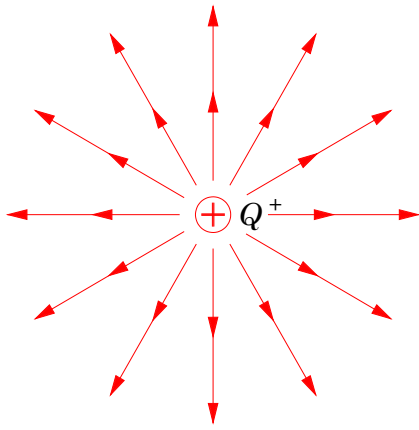


Fig. 2.1. Campo eléctrico generado por una carga positiva.

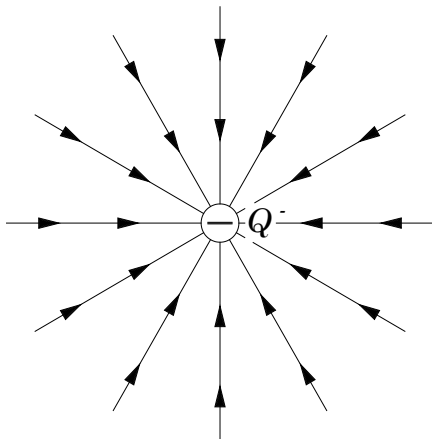


Fig. 2.2. Campo eléctrico generado por una carga negativa.

Este concepto de campo eléctrico lo introdujo Michael Faraday en 1830; permite materializar las propiedades del espacio modificado por la presencia de cargas eléctricas. Bajo las consideraciones de isotropía, linealidad y densidad constante, al campo eléctrico se lo puede graficar de la siguiente forma:

En la Fig. 2.1 se puede ver el campo eléctrico generado por una carga puntiforme positiva; como se ve, se ha dejado de forma convencional que las líneas de fuerza generen vectores salientes de la carga hacia el espacio.

El caso contrario ocurre cuando la carga es de naturaleza negativa; en este caso, se considera que el campo eléctrico colineal con las líneas de fuerza lo constituyen vectores entrantes a la carga; en la Fig. 2.2 se han dibujado en el plano; en el caso de estar en 3D, lo que se tiene es una esfera formada por los vectores, en el primer caso salientes y en el segundo entrantes.

Como se puede ver en la expresión (2.2), la intensidad del campo eléctrico disminuye con el cuadrado

de la distancia y, en este caso, se asemeja muchísimo al campo gravitacional visto en el Capítulo 6 del libro Física I para estudiantes de Ciencias, Ingeniería y Ciencias de la Educación.

Entonces, se dice que un campo eléctrico es ideal si se presentan las siguientes características: isotropía (velocidad de propagación del campo eléctrico constante en cualquier dirección), linealidad se refiere a que el

coeficiente de permisividad del campo eléctrico también es constante y finalmente la densidad de la carga en el cuerpo debe estar distribuida de manera homogénea.

2.2 Campo eléctrico debido a dos cargas

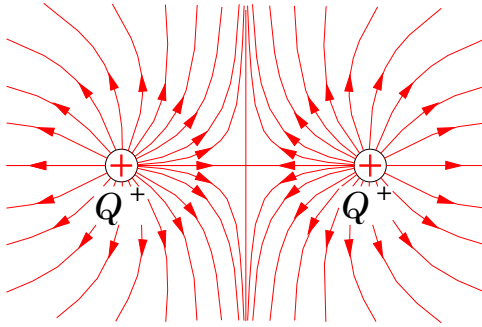


Fig. 2.3. Líneas de campo resultado de la presencia de dos cargas del mismo signo.

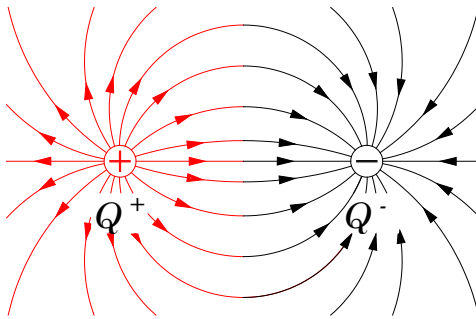


Fig. 2.4. Líneas de campo resultado de la presencia de dos cargas de signo contrario.

En la Fig. 2.3, se puede ver el resultado de tener dos cargas del mismo signo; en este caso, son dos cargas positivas; las líneas de fuerza no se cortan, se acercan lo suficiente para definir un campo eléctrico de más o menos intensidad, así que una carga de prueba colocada donde el campo eléctrico está más saturado simplemente responderá de acuerdo a las características eléctricas del medio.

Como el campo eléctrico de las cargas positivas es saliente de la carga, en el sistema de dos cargas el campo eléctrico seguirá la misma consigna del campo puntiforme; en el caso de ser una pareja de cargas negativas, donde el campo eléctrico es entrante, pues simplemente se cambia el sentido de los vectores y, con el mismo esquema de

cargas positivas, será el campo eléctrico de cargas negativas.

Un caso especial se da cuando las cargas son de diferente signo, es decir, una carga positiva y otra negativa; en este caso, se puede ver en la Fig. 2.4, el campo eléctrico de la carga positiva es saliente y el campo eléctrico de la carga negativa es entrante; así se conforma lo que se denominará un dipolo eléctrico.

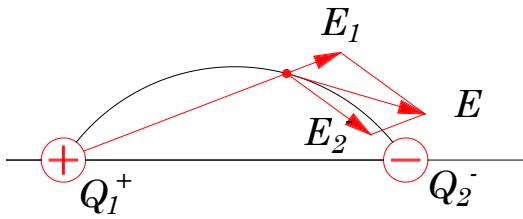


Fig. 2.5. Vector resultante de dos campos.

Ahora bien, en un punto cualquiera de una línea de fuerza producida por un dipolo, se siente el campo eléctrico de las dos cargas; esto es: E_1 proviene de la carga Q_1 y E_2 proviene de Q_2 , con lo cual se puede graficar el vector eléctrico resultante E y, tal como se ve en

la Fig. 2.5, este vector es tangente a la línea de fuerza o, mejor, la línea de fuerza es el resultado de la sumatoria de vectores resultante de la suma vectorial parcial. Para las dos cargas, se tiene que el vector resultante es:

$$E = E_1 + E_2.$$

Si se trata de encontrar la fuerza, entonces se tiene:

$$F = \int_a^b EdQ \quad (2.3).$$

¡Atención!: la integral tiene la característica de ser una *integral de línea*; es decir, a lo largo de la línea de fuerza de a hasta b . La pregunta que surge es: ¿qué ocurre cuando hay más de dos cargas?

En este caso, se puede considerar un caso discreto, donde se sumarán de forma vectorial los diferentes campos eléctricos.

2.3 Campo eléctrico. Caso discreto

En la Fig. 2.6, se puede ver la carga elemental de prueba definida como Q ; esta carga elemental siente el campo eléctrico de Q_1 y de Q_2 que se encuentran a Δr_1 y Δr_2 de Q . A su vez, las cargas Q_1 y Q_2 están a r_1 y r_2 del punto $(0, 0)$ del sistema de referencia.

Entonces, en estas condiciones, el campo eléctrico en Q es:

$$E = E_1 + E_2.$$

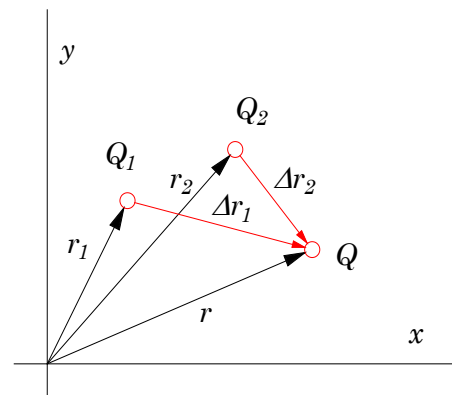


Fig. 2.6. Esquema vectorial de dos cargas sobre la carga elemental de

Si E_1 y E_2 se expresa como (2.2), entonces se tiene:

$$E = k \frac{Q_1}{\Delta r_1^2} + k \frac{Q_2}{\Delta r_2^2}.$$

Pero como $\Delta r_1 = |r - r_1|$ y $\Delta r_2 = |r - r_2|$, al remplazar, se tiene:

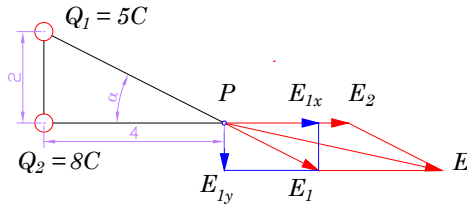
$$E = k \frac{Q_1}{(r-r_1)^2} + k \frac{Q_2}{(r-r_2)^2}.$$

Si hay más de dos cargas, y en general para n cargas, se tiene:

$$E = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(r-r_i)^2} \quad (2.4).$$

Ejemplo

1. Calcular el campo eléctrico en el punto P de dos cargas que se encuentran a las distancias, tal como se ve en la Fig. 2.7.



Solución.

Vectorialmente, de acuerdo a la Fig. 2.7, se tiene:

$$E = E_1 + E_2.$$

Fig. 2.7. Esquema de la distribución del campo proveniente de dos cargas sobre el punto P.

Al utilizar coordenadas vectoriales, también se puede escribir:

$$E = E_x + E_y.$$

Para poder desarrollar esta expresión, se requiere calcular E_x y E_y ; entonces,

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}.$$

Ahora bien, $E_{1x} = E_1 \cos \alpha$, donde α es el ángulo, que se puede calcular como: $\tan \alpha = \frac{c.o.}{c.a} = \frac{2}{4} = 0.5$, de tal manera que $\alpha = \tan^{-1} 0.5 = 26^\circ 33'$.

Entonces, $E_{1x} = k \frac{Q_1}{r_1^2} \cos(26^\circ 33')$; aquí surge otro problema: ¿Cuánto vale r_1 ? Para responder a esta pregunta, al observar la Fig. 2.7, se tiene que:

$r_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47$ unidades de longitud. Así, si se remplazan todos estos datos, se tiene:

$$E_{1x} = K \frac{5C}{(4.47)^2} \text{Cos}26^\circ33'$$
$$E_{1x} = 0.224K$$

El campo eléctrico E_{2x} , por estar en el mismo eje x , no tiene componente en y ; por tanto, la expresión completa queda:

$$E_x = 0.224K + \frac{Q_2}{r_2^2} K$$
$$E_x = 0.224K + \frac{8C}{4^2} K$$
$$E_x = 0.224K + 0.5K$$
$$E_x = 0.724K$$

Se opera en forma similar para encontrar el campo proyectado en el eje y ; esto es:

$$E_y = E_{1y} + E_{2y}.$$

La única proyección que se tiene en el eje y es, E_{1y} ; la componente E_{2y} es nula, por estar la carga Q_2 en el mismo eje x ; así, no hay componente en y ; entonces, el campo eléctrico en el eje y es:

$$E_y = E_{1y} \text{Sen} \alpha$$
$$E_y = K \frac{Q_1}{r_1^2} \text{Sen}26^\circ33'$$
$$E_y = K \frac{5C}{(4.47)^2} 0.447$$
$$E_y = 0.112K$$

¡Atención!: de acuerdo a la Fig.2.7 la componente E_{1y} es negativa.

Así, la magnitud del vector se puede calcular como:

$$E = E_x + E_y$$

$$e = \sqrt{0.724^2 + 0.112^2}K$$

$$e = 0.733K$$

Ahora, la dirección se puede calcular:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{-0.112}{0.724}$$

$$\theta = -8^{\circ}47'$$

Y para el sentido, al observar la Fig.2.7 se puede decidir que está en el cuarto cuadrante.

2. De acuerdo con la Fig. 2.8, donde se tienen dos cargas de $6 \times 10^{-6}C$, pero de signo contrario, y separadas $0.5 m$, calcular el campo eléctrico en un punto equidistante de las cargas a $1m$ de la línea que separa a las cargas.

Solución.

De forma general, el campo eléctrico es:

$$E = E_1 + E_2.$$

Y, de acuerdo con componentes, el campo eléctrico se puede calcular como:

$$E = E_x + E_y,$$

Donde $E_x = E_{1x} + E_{2x}$ y $E_y = E_{1y} + E_{2y}$.

A partir de la Fig. 2.8, se puede ver que el campo eléctrico en x se anula: $E_x = 0$, debido a la simetría; por tanto, solo queda el campo en el eje y :

$$E_y = K \frac{Q_1}{r_1^2} \text{Sen}\alpha + k \frac{Q_2}{r_2^2} \text{Sen}\beta.$$

Para solucionarlo, se requiere determinar α y las magnitudes de los radios. Así: $\alpha = \text{Tan}^{-1} \frac{0.25}{1} = 14^{\circ}2'$ y

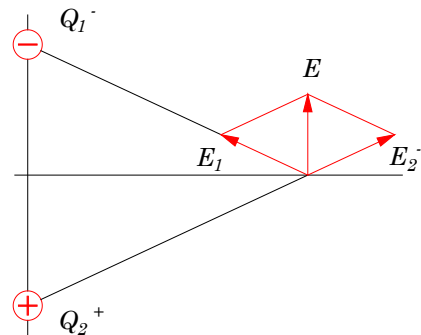


Fig. 2.8. Esquema de la distribución de las cargas.

la magnitud del radio es: $r = \sqrt{0.25^2 + 1^2} = 1.03m$.

Con estos datos, se puede remplazar para encontrar el campo eléctrico en E_{1y} :

$$E_{1y} = K \frac{-6 \times 10^{-6}C}{(1.03m)^2} \text{Sen}14^\circ$$

$$E_{1y} = -1.36 \times \frac{10^4C}{N}$$

Por otra parte, la carga 2, que es positiva, tiene un valor similar, por tratarse de un montaje simétrico. De modo que:

$$E_{2y} = 1.36 \times \frac{10^4C}{N}.$$

Por tanto, el valor de $E_y = 2E_{1y} = 2.74 \times \frac{10^4C}{N}$; como el campo eléctrico sobre el eje x es nulo, entonces solo queda el campo eléctrico en el eje y :

$$E = E_y$$

$$e = 2.74 \times \frac{10^7C}{N}$$

Como se puede ver en la Fig. 2.8, solo queda el vector en el eje y , con un ángulo de 90° , con sentido en el primer cuadrante.

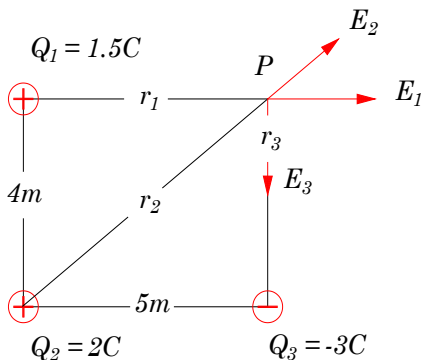


Fig. 2.9. Distribución de las cargas Q_1 , Q_2 , Q_3 respecto al punto P.

3. De acuerdo con la Fig. 2.9, encontrar el campo eléctrico en el punto P, generado por las cargas Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Solución.

Al igual que en los casos anteriores, el campo eléctrico es:

$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

Pero, para resolver este tipo de suma vectorial, se puede solucionar por medio del método de componentes vectoriales; por tanto, se tiene:

$$E = E_x + E_y,$$

donde $E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x}$; esto es:

$E_x = k \frac{Q_1}{r_1^2} \text{Cos}\alpha + K \frac{Q_2}{r_2^2} \text{Cos}\beta + K \frac{Q_3}{r_3^2} \text{Cos}\gamma$, donde $r_1 = 5m$, $r_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6.4m$ y, por último $r_3 = 4m$; por otra parte, se deben conocer los ángulos; esto es: $\alpha = 0$, porque está sobre el eje x ; $\beta = \text{Tan}^{-1} \frac{4}{5} = 38^\circ 39'$ y, por último, $\gamma = 90$, por estar sobre el eje y .

De modo que, al remplazar, se tiene:

$$E_x = K \frac{Q_1}{r_1^2} + K \frac{Q_2}{r_2^2} \text{Cos}(38.65) + 0$$

$$E_x = K \frac{1.5C}{(5m)^2} + K \frac{2C}{(6.4m)^2} 0.781K$$

$$E_x = 0.06K + 0.038K$$

$$E_x = \frac{0.098KC}{N}$$

Para el eje y , se tiene: $E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y}$; si se remplazan los valores ya calculados, se tiene:

$$E_y = k \frac{Q_1}{r_1^2} \text{Sen}\alpha + k \frac{Q_2}{r_2^2} \text{Sen}\beta + K \frac{Q_3}{r_3^2} \text{Sen}\gamma$$

$$E_y = K \frac{2C}{(6.4m)^2} \text{Sen}(38.65) + K \frac{-3C}{(4m)^2} \text{Sen}90^\circ$$

$$E_y = 0.03K - 0.188K$$

$$E_y = -\frac{0.158KC}{N}$$

Con estos resultados, el vector campo eléctrico es (véase en la Fig. 2.10):

$$E = 0.098K i - 0.157K j,$$

donde la magnitud es:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$e = \sqrt{0.098^2 + 0.158^2} K$$

$$e = 0.185K \frac{C}{N}$$

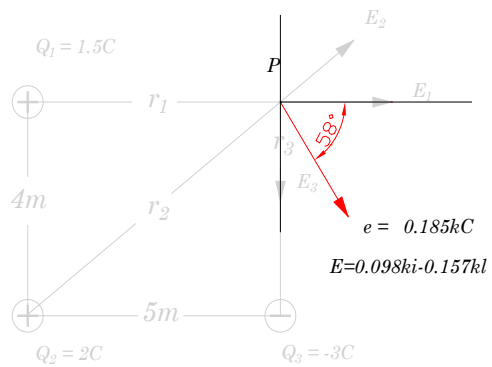


Fig. 2.10. Vector resultante.

La dirección es:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{-0.158}{0.098}$$

$$\theta = -58^{\circ}11'$$

2.4 Campo eléctrico. Caso continuo

En este caso, cuando se tiene un cuerpo no puntiforme y, por el contrario, el cuerpo tiene una geometría regular o irregular, muy lejos de ser una carga puntiforme, como ocurre en un cuerpo de forma lineal, superficial o sólidos irregulares, etc. (véase Fig. 2.11).

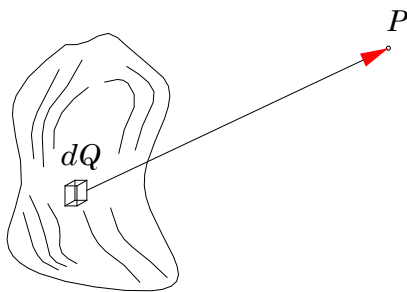


Fig. 2.11. Cuerpo sólido continuo.

Entonces, para calcular el campo eléctrico de un cuerpo de estas características, que se encuentre cargado eléctricamente y que, además, la carga se encuentre distribuida de forma homogénea, o sea, la densidad de carga $\rho = \frac{Q}{V}$ (carga por unidad de volumen) debe ser constante, entonces el campo eléctrico quedará expresado como:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \quad (2.5).$$

Ahora bien, como $dQ = \rho dV$, entonces el campo eléctrico queda:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \iint_V \frac{dV}{r^2}.$$

O, simplemente, se puede escribir como:

$$E = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dV}{r^2} \quad (2.6).$$

Como la integral es de volumen, significa que, al resolver, se debe trabajar en las tres dimensiones (x, y, z .)

Ejemplos.

1. Calcular el campo eléctrico en el punto P que se encuentra a una distancia a del hilo conductor, tal como se puede ver en la Fig. 2.12.

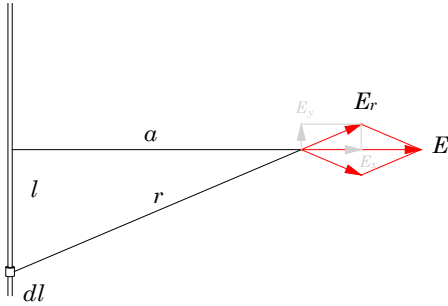


Fig. 2.12. Campo eléctrico en el punto P de un hilo conductor.

Solución

En el punto P hay infinitos campos eléctricos, generados por cada elemento de longitud del hilo conductor que se encuentra cargado; sin embargo, se puede resumir que el campo eléctrico se descompone en x y en y . Según esto, el campo eléctrico es:

$$E_r = E_x + E_y.$$

Como se puede ver en la Fig. 2.12, las componentes en el eje y se anulan por tratarse de un hilo lo bastante largo comparado con a , lo que significa que la proyección que establece el punto P es como si partiera al hilo en dos partes iguales; en este caso, las componentes sobre el eje y , al llevar al límite, habrá tantas positivas como negativas, lo que significa que, al sumar, todas se anulan, razón por la cual solo quedan las componentes del eje x , es decir, $E_r = E_x$.

Ahora bien, como en el hilo conductor prevalece la dimensión longitud, entonces se refiere a la densidad de carga lineal $\mu = \frac{dQ}{dl}$; por tanto, $dQ = \mu dl$, que se remplazará en (2.6). Esto es:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\mu dl}{r^2}.$$

Como $E = E_x$, entonces E_x se puede expresar como: $E_x = E \cos\theta$; por tanto, (2.6) se puede escribir como:

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dl}{r^2} \cos\theta.$$

En esta expresión se encuentran tres variables: dl , r y θ , por lo que se deben hacer transformaciones para dejar una sola variable. De modo que de la Fig. 2.12, se tiene: $\tan\theta = \frac{l}{a}$; por tanto, $l = a \tan\theta$, donde $dl = a \sec^2\theta d\theta$ y el radio se lo puede expresar como: $\cos\theta = \frac{a}{r}$; así que $r = \frac{a}{\cos\theta}$, expresión que se puede escribir como: $r = a \sec\theta$; al remplazar estos valores en la expresión general, se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{a \sec^2\theta d\theta}{a^2 \sec^2\theta} \cos\theta \\ E_x &= \frac{\mu}{4\pi a \epsilon_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta d\theta \\ E_x &= \frac{\mu}{4\pi a \epsilon_0} (\sin\theta - \sin\theta_0) \end{aligned}$$

Como se trata de un hilo muy largo comparado con a , entonces, al realizar aproximaciones gaussianas, se tiene que, para ángulos pequeños: $\tan\theta \cong \sin\theta$; por tanto:

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi a \epsilon_0} (\tan\theta - \tan\theta_0).$$

A partir de la Figura 2.12, se tiene: $\tan\theta = \frac{l_1}{\sqrt{a^2+l_1^2}}$ y $\tan\theta_0 = \frac{l-l_1}{\sqrt{a^2+(l-l_1)^2}}$; al

remplazar y al tener en cuenta que, al integrar, si se toma desde el punto de intersección con la línea que separa al punto P hacia abajo, es negativa, y hacia arriba positiva:

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi a \epsilon_0} \left(\frac{l_1}{\sqrt{a^2+l_1^2}} + \frac{l-l_1}{\sqrt{a^2+(l-l_1)^2}} \right).$$

Como se ha dicho que el hilo conductor es muy largo para la distancia donde se encuentra el punto P, lo que lleva a considerar como si estuviera en el centro, por tanto, $l_1 = \frac{l}{2}$, lo que significa que $l - l_1 = \frac{l}{2}$, lo mismo que

el valor de r corresponde prácticamente a la mitad de la longitud. Por tanto, se tiene:

$$E_r = E_x = \frac{\mu}{4\pi a \epsilon_0} \left(\frac{l}{\frac{l}{2}} + \frac{l}{\frac{l}{2}} \right)$$

$$E_r = \frac{\mu}{2\pi a \epsilon_0}$$

En el año 1897, J. J. Thomson descubrió al electrón, que se convierte en la primera partícula subatómica en ser observada de forma indirecta; los tubos de descarga similar a los que se ve en la Fig. 2.13, donde los electrones, una vez son acelerados desde el cátodo en el ánodo, pasan por entre un campo eléctrico y magnético, Thomson observó que un campo eléctrico lograba desviar el chorro de electrones, efecto que se tornaba evidente cuando los electrones golpean la escala de la pantalla; Thomson encontró una relación entre el valor del campo eléctrico y el valor de la desviación medida en la escala.

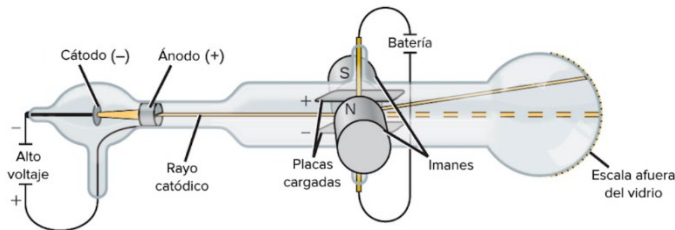


Fig. 2.13. Esquema de un tubo de descarga utilizado por Thomson. Fuente: Olmo (2017, p. 7).

De acuerdo con la Fig. 2.14, se puede ver que el electrón llega al sector de campo eléctrico y lo recorre a lo largo de a ; la carga, una vez sale de este sector, ya se ha desviado de su camino inicial de tal forma que, si no hay otra fuerza, el electrón viajaría de modo rectilíneo hasta golpear la pantalla que se encuentra a una distancia d en el punto P a y cm por debajo de la línea central, tal como se ve en la geometría de la Fig. 2.14, con lo cual se ha formado el ángulo θ .

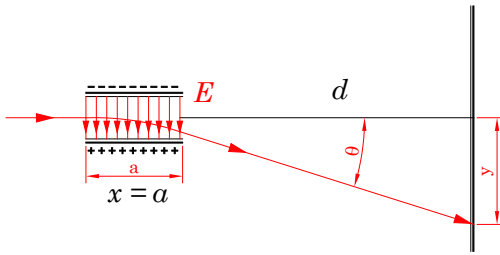


Fig. 2.14. Esquema del tubo de descarga de Thomson.

En este sector, el campo eléctrico actúa sobre el eje y ; a lo largo del eje x no hay ningún factor que alterase su recorrido, por tanto, se tienen dos movimientos:

En el eje x , hay movimiento MRU, mientras que en el eje y se tiene un MRUA; esto es,

para el eje x , se tiene: $x = v_0 t$.

Para el eje y , se tiene: $y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$; ahora bien, como $E = \frac{F}{Q}$, y además $F = ma$; por tanto,

$$a = \frac{EQ}{m} \quad (2.7).$$

Se debe entender que la carga Q es el electrón e . De modo que, al remplazarlo en la ecuación cinemática, se tiene: $y = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{Ee}{m} t^2$; de la ecuación de posición del eje x , se tiene que: $t = \frac{x}{v_0}$; por otra parte, no hay velocidad inicial v_0 al entrar al sector del campo eléctrico debido a que el haz de electrones lo hace de forma perpendicular al campo eléctrico; por tanto, la ecuación cinemática en el eje y queda:

$$y = \frac{1}{2} \frac{Ee}{m} \frac{x^2}{v_0^2}.$$

A partir de la Fig. 2.14, se puede ver que $\text{Tan} \theta = \frac{y}{d}$, de modo que, al derivar la función respecto a x , se tiene:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{Ee}{v_0^2 m} x)_{x=a}.$$

Entonces, queda:

$$\frac{y}{d} = \frac{Ee}{v_0^2 m} a.$$

Como no se conoce la carga, ni la masa del electrón, entonces, se establece el cálculo de la relación carga – masa:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0^2 y}{E a d}.$$

Históricamente, esta relación la encontró Thomson:

$$\frac{e}{m} = 1.77 \times \frac{10^{-11}C}{Kg\cdot m}.$$

Thomson dejaba para la posteridad esta relación, de tal forma que aquel que encontrara el valor de e , también encontraría el valor de la masa m , y Millikan, en 1909, encontró el valor de la carga elemental e :

$$e = 1.602 \times 10^{-19}C.$$

Con lo cual la masa del electrón es:

$$m = 9.109 \times 10^{-28}Gramos$$

Con esto quedó develada la naturaleza de la electricidad: los electrones que viajan por el interior de los tubos de Crookes y, por extensión, se asume que son los mismos que viajan por los conductores y producen la carga electrostática. Por estos hallazgos, Thomson recibió el premio Nobel de Física en 1906 y Millikan en 1923.

2.5 Ley de Gauss

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un físico matemático alemán que contribuyó mucho tanto en Matemáticas como en Física y, en general, en la ciencia; en el campo de la Física formuló el teorema sobre el campo eléctrico, que también se puede aplicar a los flujos ideales.

En un medio lineal ($\epsilon_0 = cte$) homogéneo ($\rho_{carga} = cte$) e isótropo ($v = cte$), cualquier carga modifica su espacio de forma radial y lo hace a la velocidad de la luz.

Flujo eléctrico

Se ha dicho que el campo eléctrico se define por líneas de campo; ahora se trata de precisar el concepto de flujo eléctrico y se entenderá como la medida del número de líneas de campo que puedan pasar por una superficie.

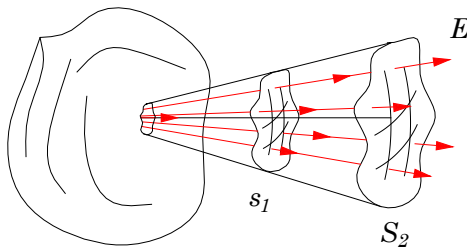


Fig. 2.15. Esquema de las líneas de campo que salen de un cuerpo cargado.

Cuando la superficie atravesada por el campo eléctrico es cerrada, por algún lugar deja salir líneas de campo, lo que, en primer lugar, significa que en el interior hay una carga y, en segundo lugar, la cantidad de líneas de campo por unidad de área es proporcional a la magnitud del campo eléctrico (Fig. 2.15).

A partir de esto, se puede decir que:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S} \propto E.$$

Para salir de la proporcionalidad y encontrar una igualdad, falta una constante de proporcionalidad:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S} = \epsilon_0 E,$$

donde ϵ_0 es el coeficiente de permisividad eléctrica; así, el número de líneas de campo que pasa por la superficie es:

$$\Delta N = \epsilon_0 \Delta S E.$$

Si se trata de una superficie cerrada y al llevar al límite el número de líneas, se puede expresar como:

$$N = \int_S \epsilon_0 E dS \quad (2.8),$$

donde la integral es de superficie, de tal modo que cuando la superficie fuera cerrada se expresaría como: $\oint_S ds$; si esto corresponde a una esfera, entonces, el área es: $4\pi r^2$, donde r es el radio de la esfera gaussiana y el campo eléctrico es: $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$. Por tanto (2.8), se puede escribir:

$$N = 4\pi r^2 \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}.$$

Con lo cual se concluye que el número de líneas de campo es igual a la carga eléctrica:

$$N = Q.$$

Entonces, (2.8) se podría expresar así:

$$N = Q = \int_S \epsilon_0 E dS.$$

A partir de esta expresión, se puede deducir la Ley de Gauss:

$$\int_S E_N ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.9).$$

Esta expresión se conoce como **Ley de Gauss**, donde E_N es el campo eléctrico normal a la superficie con la que interactúa, como se ve en la Fig. 2.16.

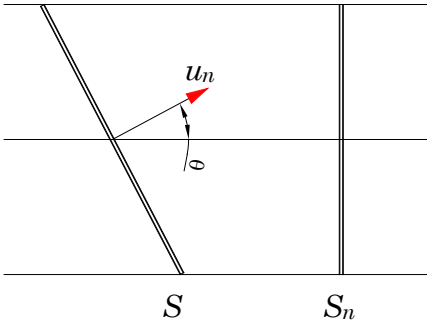


Fig. 2.16. Vector normal del campo eléctrico y proyección de la superficie.

Ahora bien, de forma general, el campo eléctrico es normal a la superficie cuando se cumple: $E_N = E \cos \theta$; por tanto, la expresión (2.9) queda:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_S E \cos \theta ds.$$

2.6 Ley de Gauss en forma diferencial

Para expresar la Ley de Gauss en forma diferencial, se puede proceder mediante aplicación de la teoría del cálculo vectorial; para este caso, en Anexo se provee el procedimiento adecuado; se trata del Teorema de la Divergencia, que es justamente el operador Nabla, que opera escalarmente con un vector; esto es:

$$\int_V \text{div} \phi dV = \oint_S \phi \cdot ds,$$

donde el volumen se contiene en la superficie gaussiana, de modo que: a partir de la Ley de Gauss (2.9): $\int_S E_N ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$, de acuerdo con el Teorema de la Divergencia, la expresión $\int_S E_N ds$ se puede escribir como: $\int_V \text{div} \phi dV$; por tanto, la Ley de Gauss queda:

$$\int_V \text{div} \phi dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div}\phi \int_V dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Al desarrollar la integral, se tiene un volumen, de tal modo que:

$$\operatorname{div}\phi = \frac{Q}{V\epsilon_0}.$$

Pero $\frac{Q}{V}$ es densidad de carga ρ ; por tanto,

$$\operatorname{div}\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Esta expresión también se la puede simbolizar como:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.10).$$

Como se demuestra en Anexo: $\nabla \cdot E = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$, de tal forma que, para una sola dirección, se puede escribir la Ley de Gauss como:

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Ejemplos

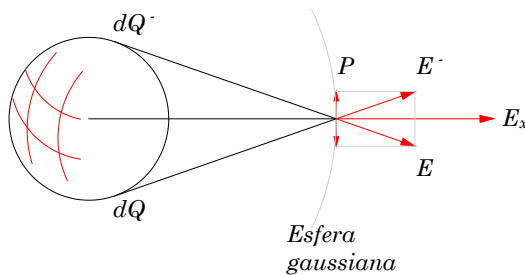


Fig. 2.17. Campo eléctrico de una esfera maciza de material no conductor.

1. Calcular el campo eléctrico de una esfera maciza de material conductor (Fig. 2.17) en: a) por fuera de la esfera, b) sobre la superficie, c) en el interior de la esfera.

Solución

a) El campo eléctrico en el punto P , que proviene de los extremos de la esfera maciza, se descompone en componentes,

tanto en el eje x como en el eje y ; es decir:

$$E_r = E_x + E_y.$$

En el caso del eje y , se puede observar que hay tantos vectores positivos como los hay negativos, de modo que, por simetría, todos estos vectores se anulan y solo quedan las componentes en el eje x ; entonces:

$$E_r = E_x.$$

Ahora bien, $E_x = E \cos \theta$. Al aplicar la Ley de Gauss, se tiene: $\int_S E \cos \theta u_N ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$; como el campo eléctrico coincide con el eje x , resulta radial; por tanto, el ángulo entre E_r y u_N es cero. Entonces, $\cos 0 = 1$, lo que significa que la expresión de Gauss se expresa como:

$$\int_S E ds = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

La integral se aplica en la esfera gaussiana dada por el radio, donde se encuentra el punto P en referencia; por tanto: $\int_S ds = 4\pi r^2$; entonces:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Al despejar E, se tiene:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}.$$

Esto muestra que el campo eléctrico es igual al campo de una carga puntiforme, resultado que será igual en cualquier punto por fuera de la esfera cargada homogéneamente.

b) Cuando el punto P está sobre la esfera, por temas de simetría, se tiene que $r = a$; por tanto, la esfera gaussiana coincide con la esfera del material conductor. De modo que:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2}.$$

c) Cuando el punto está dentro de la esfera. De forma hipotética, se entenderá que la esfera maciza se encuentra cargada de manera homogénea, por tanto, $r < a$.

Como la esfera es maciza y el material que se carga lo hace de forma homogénea, entonces se tiene una densidad volumétrica constante: $\rho = \frac{Q}{V}$; por otra parte, como el radio gaussiano es menor que el radio de la esfera, cuyo volumen es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, y el volumen de la esfera de

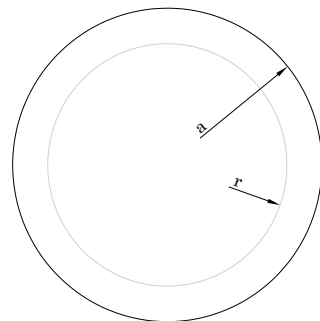


Fig. 2.18. Esfera de material y esfera gaussiana.

material es: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, la densidad es igual para las dos esferas (Fig. 2.18); entonces,

$$\rho_r = \rho_e$$

$$\frac{Q_r}{\frac{4}{3}\pi r^2} = \frac{Q_a}{\frac{4}{3}\pi a^2}$$

Arreglando términos se tiene

$$Q_r = \frac{r^3}{a^3} Q_a$$

Al aplicar el Teorema de Gauss: $\int_s E ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$, se tiene:

$$\int_s E ds = \frac{r^3 Q_a}{a^3 \epsilon_0}$$

$$E = \frac{r^3 Q_a}{4\pi r^2 a^3 \epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_a r}{4\pi a^3 \epsilon_0}$$

Este sería el campo en el interior de la esfera conductora.

2. Encontrar el campo eléctrico de una esfera hueca de material conductor (Fig. 2.19): a) fuera de la esfera, b) sobre la esfera y c) en el interior de la esfera.

Solución

a) De forma similar al caso anterior, el campo eléctrico por fuera de la esfera, si se trata de una esfera cargada homogéneamente, se convierte en una carga puntiforme; por tanto, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

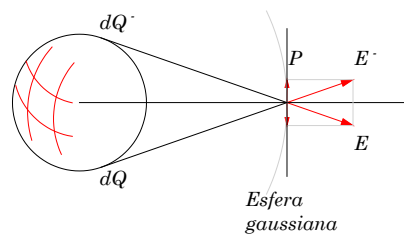


Fig. 2.19. Campo eléctrico de una esfera hueca.

b) Calcular el campo eléctrico cuando $r = a$; es decir, sobre la superficie de la esfera. A partir del caso anterior, se puede decir que el campo eléctrico es:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

c) Calcular el campo eléctrico en el interior de la esfera. Ver fig. 2.20 Este resultado es muy importante para realizar aplicaciones teóricas y prácticas, pues en cualquier punto en el interior de la esfera hueca, por efectos de simetría, el campo eléctrico es NULO: $E = 0$, puesto que siempre hay campos eléctricos tanto a la derecha como a la izquierda y en todas las direcciones, cuyo resultado es cero. Esto es lo que se presenta en una jaula de Faraday.

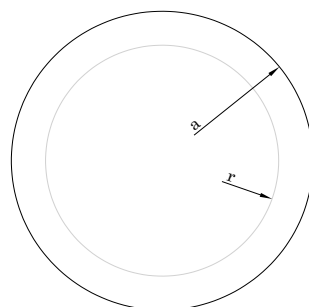


Fig. 2.20. Radios de la esfera hueca y la esfera gaussiana.

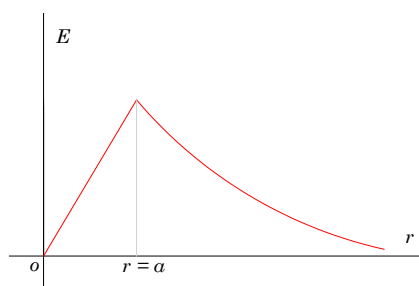


Fig. 2.21. Comportamiento del campo eléctrico de una esfera maciza.

En la Fig. 2.21 se puede ver el comportamiento del campo eléctrico de una esfera maciza; en el interior, el campo eléctrico varía linealmente con el radio, hasta llegar al valor máximo, mientras que por fuera de la esfera el campo eléctrico decae con el inverso del cuadrado de la distancia.

En la Fig. 2.22 se puede ver el comportamiento del campo eléctrico de una esfera hueca; es decir, un cascarón cargado de forma homogénea; como se dijo, en cualquier punto del interior de la esfera el campo eléctrico siempre es nulo, mientras que por fuera la intensidad decae con el cuadrado de la distancia, igual como ocurre con una esfera maciza.

3. Encontrar el campo eléctrico de un hilo muy largo en un punto en el espacio, como se puede ver en la Fig. 2.23.

Solución.

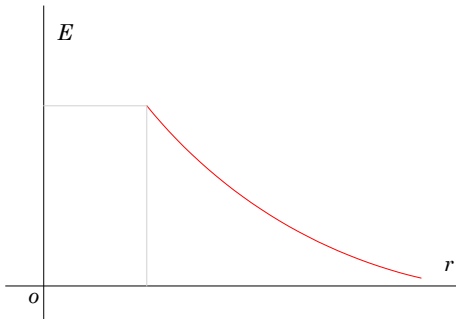


Fig. 2.22. Comportamiento del campo eléctrico de una esfera hueca.

es como si se partiera el hilo en dos partes iguales, de modo que, de acuerdo a la Ley de Gauss, se tiene: $\int_s E ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

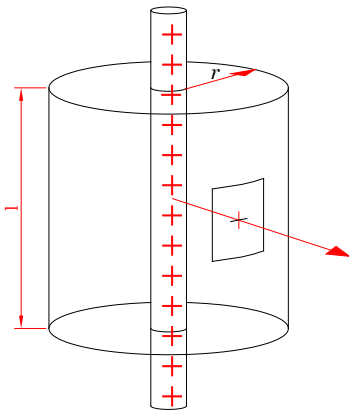


Fig. 2.23. Hilo conductor muy largo.

El ejemplo es similar al analizado en los campos eléctricos continuos; para el análisis, se considera un hilo muy largo en que, al ejecutar los cálculos, la distancia hasta donde se calcula el campo eléctrico resulta muy pequeña comparada con la longitud del hilo conductor, por lo que, cuando se trata de establecer el cálculo hacia cada lado de la proyección del punto P

Como se trata de un hilo muy largo, entonces se puede referir a una densidad de carga lineal $\mu = \frac{Q}{l}$, de modo que $Q = \mu l$, en que, al remplazar, se tiene:

$$\int_s E ds = \frac{\mu l}{\epsilon_0},$$

donde la integral se efectúa sobre el perímetro del cilindro gaussiano y el largo del hilo conductor; esto es: $\int_s ds = 2\pi r l$, donde r es la distancia donde se encuentra el punto P (radio de la superficie gaussiana cilíndrica); así, la Ley de Gauss y el campo eléctrico se expresan como:

$$E(2\pi r l) = \frac{\mu l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\mu l}{2\pi r \epsilon_0}$$

Este resultado es similar al encontrado en el campo eléctrico de un hilo conductor por medio del cálculo integral.

4. Campo eléctrico en el punto P del espacio alejado, producido por una superficie muy grande.

Solución.

Si se analiza como si fuera una caja por donde todo el campo eléctrico entra por un lado y, luego, sale por el extremo opuesto, hay tres posibilidades de analizar: lo que ocurre en la superficie 2, la superficie 0 o la superficie de la lámina en sí y la superficie 1, por donde sale el campo eléctrico; esto es:

$$\int_S E ds = \int_{s_2} E ds_2 + \int_{s_0} E ds_0 + \int_{s_1} E ds_1.$$

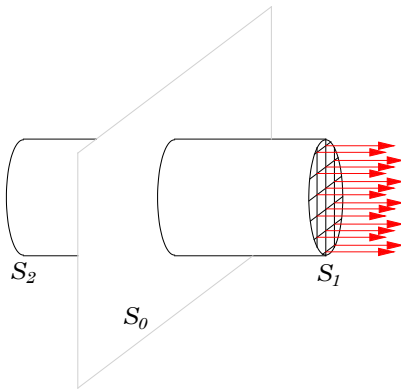


Fig. 2.24. Campo eléctrico generado por una superficie muy grande.

Como se puede ver en la Fig. 2.24, en el centro no hay flujo, únicamente en los extremos, pues todo lo que entra sale por el lado contrario; por tanto, el flujo en el centro es: $\int_S E ds = 0$; ahora bien, el flujo en los extremos, o sea en s_1 y s_2 , es igual, no se desperdicia nada; entonces, se tiene:

$$\int_S E ds = E s_1 + E s_2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Así,

$$E = \frac{Q}{2s\epsilon_0}.$$

Ahora bien, si se define densidad de carga superficial a: $\sigma = \frac{Q}{s}$, entonces, esto queda:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

que es el campo eléctrico producido por una superficie.

5. Campo eléctrico entre las placas planas de un condensador o capacitor.

Solución.

Como se puede ver en la Fig. 2.25, a un condensador lo forman dos placas, donde cada placa produce un campo eléctrico $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; por tanto, en un condensador que tiene dos placas, el campo eléctrico será la suma del campo eléctrico producido por cada superficie; o sea:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

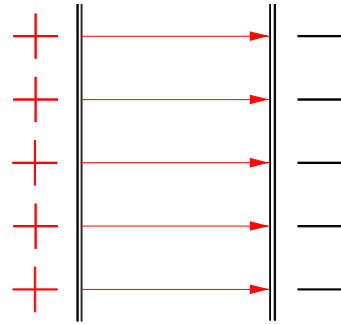


Fig. 2.25. Condensador de dos superficies.

Además, el campo eléctrico en el interior de las placas se considera uniforme, siempre y cuando las placas definieran una densidad de carga constante, lo que permite que se sumara sin ninguna dificultad.

Capítulo 3



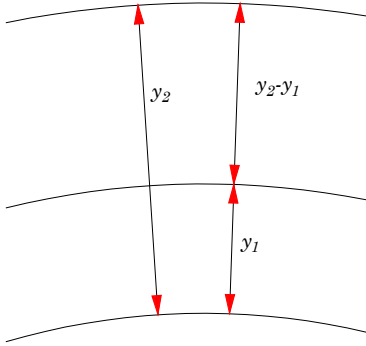
Energía y Potencial Eléctrico



Fuente: Ok diario (2021).

3.1 Energía Potencial

Al recordar que la energía potencial de fuerza conservativa gravitacional (Curso de Física I, Capítulo 5) se la puede expresar como: $U = mgh$, donde



h se refiere a la altura a la que se encuentran los cuerpos respecto a una superficie equipotencial s_1 , que, en ese caso, puede ser el nivel del mar o cualquier otra superficie que se tomase como punto de partida, en la Fig. 3.1 se pueden ver dos superficies equipotenciales respecto a una inicial, de modo que cada superficie permite obtener una energía potencial:

$$U_1 = mgy_1$$

$$U_2 = mgy_2$$

Fig. 3.1. Superficies equipotenciales.

con base en esto, se puede encontrar la diferencia de energías potenciales entre las superficies equipotenciales:

$$U_2 - U_1 = mgy_2 - mgy_1$$

$$\Delta U = mg\Delta y$$

Por otra parte, el trabajo se ha definido como: $w = \int_{y_1}^{y_2} F dr$; en el caso de tener una fuerza constante, se tiene:

$$w = F \int_{y_1}^{y_2} dr$$

$$w = F(y_2 - y_1)$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$w = F\Delta y.$$

Como es la definición del trabajo, entonces es igual a la expresión:

$$w = \Delta U.$$

Al igualar estas dos expresiones, se tiene:

$$\Delta U = F\Delta y.$$

Si esto se lleva al límite, es decir: $\Delta y \rightarrow dy$ y $\Delta U \rightarrow dU$, se obtiene:

$$F_y = -\frac{dU}{dy}.$$

Como $r = f(x, y, z)$; es decir: $r = r_x i + r_y j + r_z k$, entonces, para la fuerza en el eje en r es $\frac{d}{dr} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$; por tanto, se tiene:

$$\frac{dU}{dr} = -F.$$

Al considerar las tres dimensiones, la expresión se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot U = -F.$$

Al operador entre paréntesis se lo conoce como operador Nabla; obsérvese que entre el operador y la energía potencial hay un producto escalar; por tanto, se tiene un gradiente, de modo que, de forma sintética, se lo expresa como:

$$\nabla \cdot U = -F.$$

Según anexo, cuando el operador se aplica escalarmente con una función escalar, como es la energía potencial, resulta un gradiente, por lo que se puede decir que el gradiente de la energía potencial es igual a menos la fuerza: $\text{Gra}U = -F$.

Al aplicar estos conceptos matemáticos a la fuerza eléctrica, a la que también se considera conservativa, se tiene:

$F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, donde $r = f(x, y, z)$; entonces, la ecuación será:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -F.$$

De donde se puede deducir la energía potencial:

$$\begin{aligned} \partial U &= -K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} dr \\ \int_0^U dU &= \int_0^r -K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \\ U &= -K Q_1 Q_2 \int_0^r \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

Al desarrollar la integral, se tiene:

$$U = -K \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (3.1).$$

Esta ecuación representa la energía potencial eléctrica, que se puede medir con las mismas unidades de la energía potencial mecánica; es decir, en julios o ergios.

3.2 Potencial eléctrico

En general, el potencial eléctrico se define como la energía potencial por unidad de carga eléctrica; algo muy similar al potencial gravitacional, que también es energía potencial por unidad de masa. De modo que:

$$V = \frac{U}{Q} \quad (3.2).$$

La unidad para este nuevo concepto es:

$$[V] = \frac{[\text{Julios}]}{[\text{Coulombios}]} = \text{Voltios}.$$

Entonces, esta unidad, muy conocida (**voltios**), mide el potencial eléctrico.

Ahora bien, si se recurre a la expresión de la energía potencial, se tiene:

$$V = K \frac{Q_1}{r} \quad (3.3).$$

Este es el potencial para una carga puntiforme.

Si la carga se encuentra en un medio donde hay linealidad, e isotropía, y, además, el cuerpo se ha cargado de forma homogénea, esto es:

$$\text{Linealidad:} \quad \varepsilon_0 \Rightarrow \text{Cte.}$$

$$\text{Isotropía:} \quad v \Rightarrow \text{Cte}$$

$$\text{Homogeneidad:} \quad \rho_Q \Rightarrow \text{Cte,}$$

Entonces, cabe preguntarse: ¿qué relación hay entre el potencial eléctrico y el campo eléctrico?

Como el campo eléctrico para una carga puntiforme se ha definido como:

$$E = K \frac{Q}{r^2}$$

y el potencial eléctrico es:

$$V = K \frac{Q}{r},$$

de estas dos ecuaciones se puede deducir que:

$$V = Er \quad (3.4).$$

Cuando se trata de analizar cantidades pequeñas, se puede expresar como:

$$dV = E dr.$$

La solución es:

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} E dr.$$

De la primera integral se tiene una diferencia de **potencial eléctrico**

$$V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} E dr,$$

que también se puede expresar como:

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} E dr \quad (3.5).$$

Esta expresión se entiende como diferencia de potencial eléctrico, que también se mide en voltios.

Por otra parte, la expresión $dV = E dr$, se puede escribir como:

$$\frac{dV}{dr} = -E.$$

Como $r = f(x, y, z)$, entonces: $\frac{d}{dr} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$; por tanto, se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot V = -E.$$

Como ya se sabe, el operador entre paréntesis es el operador Nabla, de forma sintética se puede escribir como:

$$\nabla \cdot V = -E \quad (3.6).$$

Lo que se debe leer como gradiente de V .

A partir de la expresión o Ley de Gauss: $\nabla \cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, la que se lee como divergencia de E debido a que, cuando el operador Nabla opera

escalarmente con un **vector** como \mathbf{E} , se obtiene una divergencia, cuyo resultado es un escalar.

Ahora bien, si a la ecuación (3.6) se le aplica nuevamente el operador Nabla de forma escalar, se tiene:

$$\nabla \cdot \nabla \cdot V = -\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{-\rho}{\epsilon_0}.$$

Esta expresión se puede escribir de forma sintética:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.7),$$

donde a la expresión ∇^2 se la denomina operador laplaciano, de modo que también se puede escribir como: $\text{lap}V = -\rho/\epsilon_0$.

Diferencia de potencial

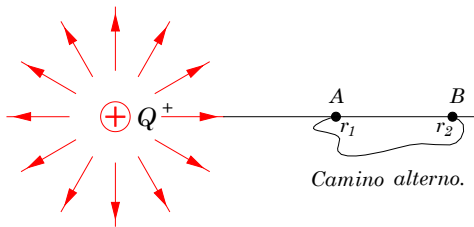


Fig. 3.2. Campo eléctrico de una carga puntiforme.

Para volver al potencial generado por una carga puntiforme (Fig. 3.2), en el punto A hay un potencial eléctrico y, de igual forma, en el punto B, lo que significa que entre A y B hay una **diferencia de potencial** eléctrico de tal modo que se puede expresar como:

$$V_B - V_A = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $V_B - V_A = \Delta V$ es la diferencia de potencial, lo que permite que haya trabajo, para ir desde el punto A al punto B; los puntos A y B representan la superficie equipotencial cuyos radios o distancias a la carga son r_1 y r_2 , de modo que, para pasar de A a B, se puede hacer por infinitos caminos, pero lo único que importa es la diferencia de potencial que se expresa respecto a las superficies equipotenciales.

Ahora bien, como se trata de una carga puntiforme, entonces esta expresión queda:

$$V_B - V_A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

También, se puede expresar como:

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Esta expresión se puede escribir como la diferencia de potencial:

$$\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Por otra parte, esta expresión se puede escribir como:

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi r_2 \epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi r_1 \epsilon_0},$$

lo que significa que $V_2 = \frac{Q}{4\pi r_2 \epsilon_0}$ y $V_1 = \frac{Q}{4\pi r_1 \epsilon_0}$.

Ahora bien, si r_2 es muy grande, entonces este potencial se torna cero y, por tanto, la expresión solo queda:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi r_1 \epsilon_0},$$

lo que significa que solo queda el potencial de la fuente 1.

Por supuesto que, en este caso, no hay diferencia de potencial y, como tal, no habrá trabajo. Esto muestra que hay mayor potencial eléctrico cuando la distancia es pequeña y se desvanece cuando la distancia aumenta.

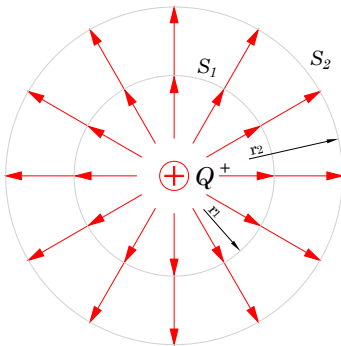


Fig. 3.3. Superficies equipotenciales.

En la Fig. 3.3 se puede ver un esquema de superficies equipotenciales generadas por la carga puntiforme Q , donde cada superficie equipotencial tiene el potencial eléctrico:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi r_1 \epsilon_0} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{Q}{4\pi r_2 \epsilon_0}.$$

Para pasar de s_1 a s_2 , aparte de que hay infinitas formas de hacerlo, solo cuando se hubiera realizado el salto, entonces se ha realizado trabajo; es decir, se ha acumulado una diferencia de potencial equivalente al trabajo realizado; esto es: $\Delta V = \frac{\Delta U}{\Delta Q}$, a partir

de donde la variación de la energía potencial es: $\Delta U = \Delta V \Delta Q$; ahora, por definición del trabajo, se tiene que: $w = \Delta U$; o sea, el trabajo es igual a la

diferencia de energía potencial, por tanto, de acuerdo con estas expresiones, el trabajo eléctrico es:

$$w = \Delta V \Delta Q \quad (3.8).$$

A partir de esto se debe concluir que, para que haya trabajo eléctrico debe haber una diferencia de potencial; si no hay diferencia de potencial, sencillamente NO hay trabajo.

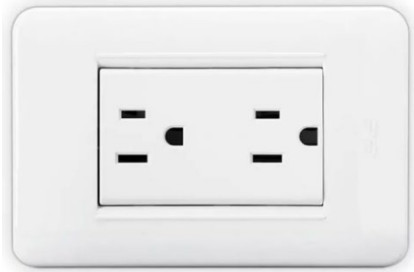


Fig. 3.4. Tomacorriente con polo a tierra. Fuente: Mercado libre (s.f.).

Este es el caso de un tomacorriente, como se ve en la Fig. 3.4, donde hay dos entradas; es decir, entre las dos se define una diferencia de potencial; esto es: $V_2 - V_1 = \Delta V$; solo así hay trabajo eléctrico.

Por tanto, no habrá ningún trabajo eléctrico si solo se conecta un cable a una de las aberturas planas, al igual que ocurre cuando al caminar en una

superficie horizontal no se hace trabajo, o hacer contacto con un solo cable de energía, tal como lo hacen las aves posadas en las cuerdas de distribución eléctrica; ellas no sienten ningún efecto que las moleste, pero, si por algún motivo una parte de su cuerpo establece contacto con el otro cable o con un polo a tierra, probablemente no será lo mismo, pues de inmediato se genera una diferencia de potencial y habrá un trabajo eléctrico, que las puede llevar a un desenlace fatal.

La vida se reduce a tener en la membrana celular una diferencia de potencial de 30 mv cuando hay toda la vitalidad necesaria; de lo contrario, esta diferencia de potencial desaparece.

3.3 Potencial eléctrico. Caso discreto

Los casos discretos de potenciales eléctricos son aquellos producidos por cargas puntiformes sobre un punto específico P, como se ve en la Fig. 3.5,

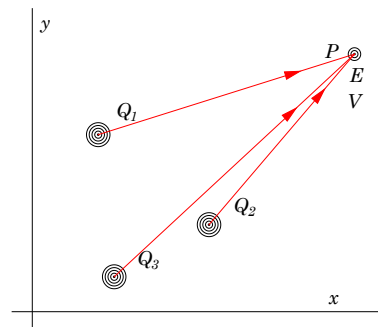


Fig. 3.5. Distribución de cargas de forma discreta.

donde se trata de encontrar el campo y el potencial eléctrico proveniente de las cargas Q_1 , Q_2 , y Q_3 .

El potencial eléctrico en P corresponde a la sumatoria de los potenciales parciales; esto es:

$$V(r) = K \frac{Q_1}{r_1} + K \frac{Q_2}{r_2} + K \frac{Q_3}{r_3} + \dots + K \frac{Q_N}{r_N}.$$

Si se simplifica, se tiene:

$$V(r) = K \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (3.9).$$

Ejemplo.

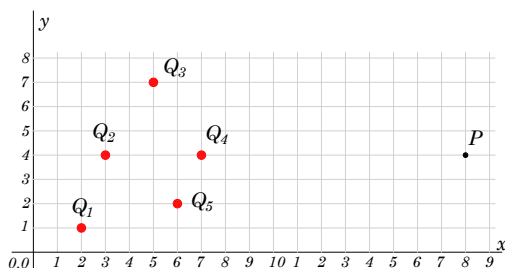


Fig. 3.6. Distribución de cargas.

1. Encontrar el potencial eléctrico en el punto P proveniente de las cargas que se encuentran distribuidas en el plano de la Fig. 3.6, cuyos valores son: $Q_1 = 5C$, $Q_2 = 3C$, $Q_3 = -7C$, $Q_4 = 5C$ y $Q_5 = 9C$.

Solución

De acuerdo con la expresión (3.9), se tiene:

$$V(r) = K \frac{Q_1}{r_1} + K \frac{Q_2}{r_2} + K \frac{Q_3}{r_3} + K \frac{Q_4}{r_4} + K \frac{Q_5}{r_5}$$

$$V(r) = K \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \frac{Q_4}{r_4} + \frac{Q_5}{r_5} \right)$$

Al remplazar valores de coordenadas de posición, de acuerdo con la Fig. 3.6, y valores de las cargas, se tiene:

$$V(r) = K \left(\frac{5}{\sqrt{15^2+3^2}} + \frac{3}{14} + \frac{-7}{\sqrt{12^2+3^2}} + \frac{5}{10} + \frac{9}{\sqrt{11^2+2^2}} \right).$$

Con la resolución de los radicales y la solución completa, se tiene:

$$V(r) = K \left(\frac{5}{15.3} + \frac{3}{14} - \frac{7}{12.37} + \frac{5}{10} + \frac{9}{11.18} \right)$$

$$V(r) = K(0.33 + 0.21 - 0.57 + 0.50 + 0.81)$$

$$V_{(r)} = 1.28K\text{voltios.}$$

3.4 Potencial eléctrico. Caso continuo

Cuando se trata de encontrar el potencial eléctrico de cuerpos cargados de forma homogénea en puntos relativamente cercanos, como se ve en la Fig. 3.7, el punto cercano es P y el cuerpo de densidad de carga homogénea donde hay un elemento de volumen dV y la densidad de carga $\rho = \frac{dQ}{dV}$; por tanto, $dQ = \rho dV$.

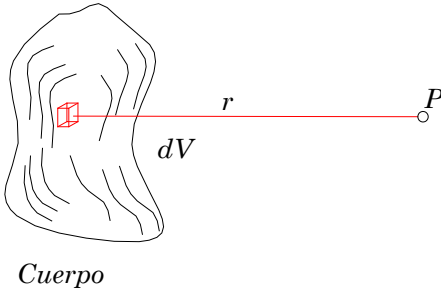


Fig. 3.7. Esquema de cuerpo cargado de forma homogénea.

Entonces, el potencial eléctrico para casos continuos se puede escribir como:

$$V_{(r)} = K \int_0^r \frac{dQ}{r} \quad (3.10).$$

Ahora bien, como la carga se la puede escribir como: $dQ = \rho dV$, entonces el potencial eléctrico queda:

$$V_{(r)} = K \int_0^r \frac{\rho dV}{r}.$$

Como la densidad de carga es constante y la constante de Coulomb es $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, entonces el potencial eléctrico queda:

$$V_{(r)} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{dV}{r}.$$

Ejemplo

Encontrar el potencial eléctrico en el punto P generado por una barra muy larga cargada de forma homogénea, como se ve en la Fig. 3.8.

Solución

Se debe recordar que el campo eléctrico generado por una varilla muy larga en un punto P es: $E = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r}$.

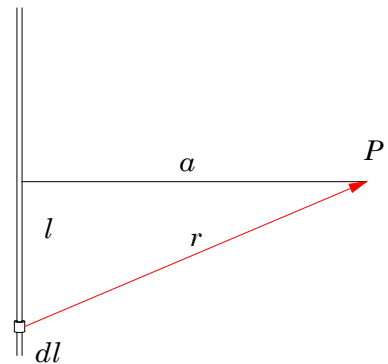


Fig. 3.8. Potencial eléctrico generado por una barra muy larga.

Por otra parte, el potencial eléctrico se define como:

$dV = -E dr$; al combinar estas dos ecuaciones, se tiene:

$$dV = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r} dr,$$

donde μ es la densidad de carga lineal. Al solucionar, se tiene:

$$\int_{V_0}^V dV = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r}$$

$$V - V_0 = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

Como $r_0 = 0$ y $V_0 = 0$, entonces se tiene:

$$V = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln r.$$

Ahora bien, como $r = \sqrt{a^2 + (l - l_1)^2}$, al remplazarlo, queda:

$$V = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{a^2 + (l - l_1)^2}).$$

Por otra parte, como $\mu = \frac{Q}{l}$, entonces:

$$V = -\frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln(\sqrt{a^2 + (l - l_1)^2}).$$

3.5 Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico es un conjunto de dos cargas eléctricas positiva y negativa separadas por una distancia a . Ahora interesa saber cómo es el campo y potencial eléctrico en un punto por fuera del eje del dipolo.

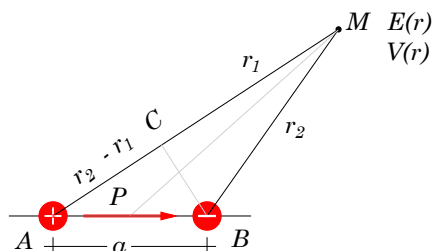


Fig. 3.9. Dipolo formado por dos cargas de signo contrario.

Al conjunto de cargas de igual intensidad y de signo contrario se lo define como momento dipolar $P = Qa$, que también mide la intensidad.

Para calcular el potencial eléctrico en el punto M, se procede como en un caso discreto:

$$V(r) = \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q^+}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

$$V_{(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_{(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Como r_1 y r_2 son muy cercanos, entonces: $r_1 r_2 = r^2$, de modo que:

$$V_{(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r^2} \right).$$

A partir de la Fig. 3.9, se puede decir que en el triángulo ABC, la hipotenusa es AB y $r_2 - r_1$ es el cateto adyacente; por tanto: $\text{Cos}\theta = \frac{r_2 - r_1}{a}$; entonces, la diferencia de camino es: $r_2 - r_1 = a \text{Cos}\theta$; por tanto, el potencial eléctrico en el punto M es:

$$V_{(r)} = \frac{Qa \text{Cos}\theta}{4\pi r^2 \epsilon_0}.$$

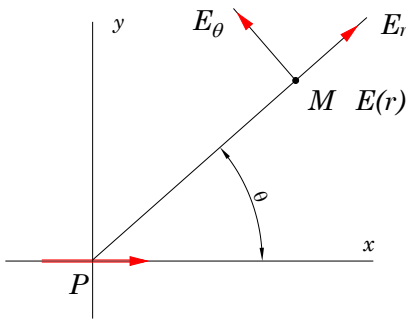


Fig. 3.10. Campo eléctrico en el punto P.

Ahora bien, para calcular el campo eléctrico en el punto M, se debe considerar según la Fig. 3.10, en el punto M, el campo eléctrico se lo puede determinar por dos componentes nuevas: se trata de una componente radial E_r y una componente angular E_θ , lo que quiere decir que se está frente a un tratamiento de coordenadas polares, así:

$$E = E_r + E_\theta.$$

Si se trata de calcular el campo eléctrico de forma radial E_r , se puede partir de $E_r = -\frac{dV}{dr}$, como $V_{(r)}$ ya se conoce, entonces la expresión queda:

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Qa \text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right).$$

Al resolver la derivada parcial respecto al radio, se tiene:

$$E_r = \frac{2Qa \text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Como $P = Qa$ momento dipolar, entonces se puede escribir así:

$$E_r = \frac{2P \text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Este resultado positivo indica que el campo está saliendo, se aleja del dipolo.

Para calcular el campo eléctrico en la dirección angular se tiene en cuenta que $S = r\theta$, entonces se puede plantear: $E_\theta = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\frac{\partial V}{\partial(r\theta)}$; en este caso, se trata respecto a θ ; esto es:

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Si se reemplaza el valor de V , se tiene:

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{PCos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)$$

$$E_\theta = \frac{PSen\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Como los dos vectores son ortogonales, entonces el vector campo eléctrico es: $E_{(r)} = E_r + E_\theta$, de modo que la magnitud es:

$$e = \sqrt{\left(\frac{PSen\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)^2 + \left(\frac{2PCos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)^2}.$$

Al factorizar se obtiene la magnitud del vector campo eléctrico:

$$e = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{Sen^2\theta + 4Cos^2\theta}$$

$$e = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 - Cos^2\theta + 4Cos^2\theta}$$

$$e = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3Cos^2\theta + 1}$$

Para la dirección, se tiene:

$$\alpha = Tan^{-1} \frac{c. opuesto}{c. adyacente}$$

Con el remplazo de lo que corresponde a cada uno de los catetos, se tiene:

$$\alpha = Tan^{-1} \frac{\frac{PSen\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}}{\frac{2PCos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$

$$\alpha = Tan^{-1} \frac{Sen\theta}{2Cos\theta}$$

$$\alpha = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{Tan} \theta \right)$$

Como se puede ver, el ángulo es independiente de la distancia a la que se encuentra el punto, del tamaño del dipolo y de la carga; solo depende del ángulo respecto al momento dipolar.

3.6 Movimiento de un dipolo por acción de un campo eléctrico.

Dipolo eléctrico paralelo con el campo.

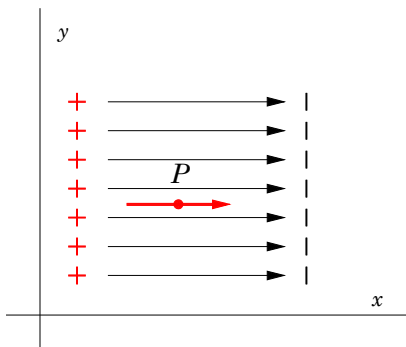


Fig. 3.11. Dipolo paralelo al campo eléctrico.

Este caso se presenta cuando el momento dipolar es paralelo con el campo eléctrico (Fig. 3.11); entonces, como el momento dipolar es: $P = Qa$, de acuerdo con la segunda Ley de Newton, para que se dé el movimiento debe haber una fuerza que, en este caso, es una fuerza eléctrica. Por tanto, como $E = \frac{F}{Q}$, la fuerza es: $F = EQ$.

Ahora bien, como el campo eléctrico, al salir de la carga, decrece con el cuadrado de la distancia, así los extremos del dipolo estarán frente a dos campos eléctricos con valor muy cercano:

$$F = Q(E_2 - E_1).$$

Como la diferencia es muy pequeña, entonces se puede escribir: $F = QdE$; sin que se alterase la expresión, también se puede escribir como: $F = \frac{QdE}{dx} dx$, donde $Qdx = P$; ahora, al remplazar, se tiene:

$$F = P \frac{dE}{dx}.$$

El sentido de la fuerza lo da el valor de la derivada, así: si $\frac{dE}{dx} > 0$, el movimiento será de izquierda a derecha, y si $\frac{dE}{dx} < 0$, el movimiento será de derecha a izquierda.

Dipolo eléctrico en medio de un campo uniforme

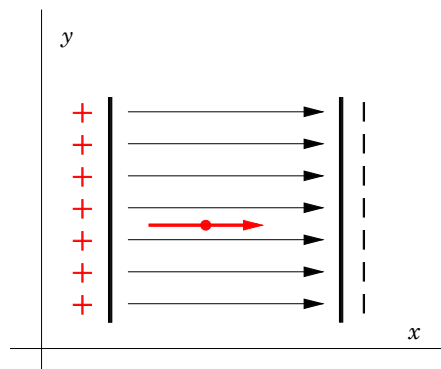


Fig. 3.12. Campo uniforme.

El campo uniforme se presenta en medio de dos placas paralelas que se pueden cargar de manera homogénea (Fig. 3.12).

Como el campo eléctrico de una placa es: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, entonces para dos placas es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Como se puede ver, el campo eléctrico es uniforme; entonces, la fuerza se determina por:

$$F = P \frac{dE}{dx}.$$

Ahora bien, debido a que el campo eléctrico es uniforme, entonces $\frac{dE}{dx} = 0$; por tanto, la fuerza es nula, lo que quiere decir que el dipolo estará quieto; no se mueve, porque no hay fuerza.

Dipolo entre dos cargas puntiformes

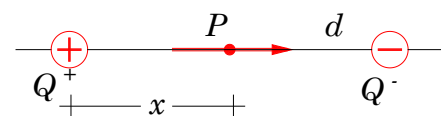


Fig. 3.13 campo proveniente de una carga puntiforme.

Cuando un dipolo se encuentra entre dos cargas puntiformes a una distancia x de una de ellas, como se ve en la Fig. 3.13, el dipolo se moverá a la izquierda o la derecha dependiendo del valor de las cargas y de la distancia a ellas.

O sea que, en la posición del dipolo, el campo eléctrico es: $E = E_{Q^+} + E_{Q^-}$; como las cargas se hallan separadas una distancia d unidades de longitud, entonces el dipolo está a x de la primera carga y a $d - x$ de la segunda carga; es decir:

$$E = \frac{Q^+}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \frac{Q^-}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2}.$$

Al factorizar, se tiene:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2} \right).$$

Si se recurre a la expresión de la fuerza, se tiene: $F = P \frac{dE}{dx}$, lo que significa que habría que ver la derivada del campo eléctrico:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2} \right)$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(d-x)^3} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(d-x)^3} - \frac{1}{x^3} \right)$$

Aquí se presentan estos casos:

1) Si las cargas son de igual intensidad y el dipolo está en el centro de ellas, se tendría que $\frac{dE}{dx} = 0$, lo que significa que el dipolo no se mueve.

2) En caso contrario, cualquiera que fuese el valor de Q^+ y Q^- , el dipolo se moverá hacia la derecha o hacia la izquierda y el valor de x se daría por:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^+}{x^3} - \frac{Q^-}{(d-x)^3} \right) = 0.$$

Entonces:

$$\frac{Q^+}{x^3} = \frac{Q^-}{(d-x)^3}$$

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt[3]{\frac{Q^-}{Q^+}}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = \sqrt[3]{\frac{Q^-}{Q^+}}$$

$$x = \frac{d}{1 + \sqrt[3]{\frac{Q^-}{Q^+}}}$$

Esta expresión determina la posición del dipolo para cualquier valor de las cargas y cualquier distancia entre ellas y en dicho punto la intensidad del campo eléctrico es igual.

Ejemplo.

Dos cargas de 3 y -5 Culombios se separan $12m$. ¿En qué punto de la línea que las une el campo eléctrico se anula?

Solución.

En ese punto, se sabe que $\frac{dE}{dx} = 0$; por tanto, la expresión obtenida para este caso es:

$$x = \frac{12}{\sqrt[3]{\frac{5}{3}+1}} = 5.49, \text{ valor que, al remplazar en la expresión de la derivada}$$

del campo eléctrico respecto a x , es:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3}{5.49^3} + \frac{5}{(12 + 5.49)^3} \right)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (-0.02 + 0.02)$$

$$\frac{dE}{dx} = 0$$

En efecto, la derivada del campo eléctrico respecto a x es nula.

Caso en que el momento dipolar no es paralelo ni antiparalelo.

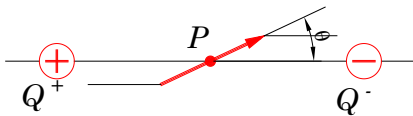


Fig. 3.14. Cuando el momento dipolar no se alinea con el campo eléctrico.

Como se puede ver en la Fig. 3.14, el momento dipolar no se alinea con el campo eléctrico; por tanto, está formando un ángulo respecto a la línea que une las cargas.

Como en los extremos del dipolo hay cargas que al interactuar con el campo eléctrico formado por las cargas Q^+ y Q^- se genera una fuerza que intenta hacerlo rotar, lo que indica que se presenta un torque, así:

$$\tau = aF\text{Sen}\theta.$$

De acuerdo con el sentido del giro, que es positivo o negativo, por conveniencia se tiene que siempre el sentido antihorario es negativo. Ahora bien, como: $F = QE$, entonces, al combinarlas, se tiene:

$$\tau = aQE\text{Sen}\theta.$$

Ahora, como $aQ = P$, entonces, $\tau = PE \sin\theta$ es la expresión de la magnitud de un producto vectorial; por tanto, vectorialmente se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}.$$

Por otra parte, la fuerza también se la puede expresar como $F = -\nabla \cdot U$ (gradiente de la energía potencial). Al rotar cada extremo del dipolo, describe un arco que es: $s = a\theta$; además, el operador Nabla respecto a coordenadas cartesianas se expresa como: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, pero respecto a coordenadas polares es:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial(a\theta)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Esto significa que $\frac{\partial U}{\partial S} = -F = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \theta}$, algo que se puede expresar como: $-aF = \frac{\partial U}{\partial \theta}$, pero la expresión aF es el momento de una fuerza o torque τ ; por tanto, se puede expresar como:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \tau.$$

Así, la energía potencial queda: $\partial U = \tau \partial \theta$; además, como $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{P} \times \mathbf{E})$, entonces se tiene: $\partial U = PE \sin\theta$, cuya solución es:

$$\int_{U_1}^{U_2} dU = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (P \times E) d\theta.$$

Como la magnitud del producto vectorial es: $|\mathbf{P} \times \mathbf{E}| = pe \sin\theta$, por tanto, al remplazar, se tiene:

$$\int_{U_1}^{U_2} dU = \int_{\theta_1}^{\theta_2} pe \sin\theta d\theta$$

$$U_2 - U_1 = pe(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Si $\theta_1 = 0$, entonces la energía potencial en el punto de partida también es nula; esto es: $U_1 = 0$; por tanto:

$$U = pe \cos\theta.$$

Esta expresión corresponde a un producto escalar; esto es:

$$U = P \cdot E.$$

Aquí se trata de energía potencial en términos del momento dipolar y campo eléctrico.

3.7 Electrización superficial

Una consecuencia del mutuo rechazo de las cargas del mismo signo que se encuentren en un cuerpo electrizado lleva a que en el interior del cuerpo no hubiera cargas que desequilibraran eléctricamente al cuerpo; por el contrario, estas cargas salen a la superficie y dejan el interior del conductor libre de cualquier potencial eléctrico; este hecho se tiene en una jaula de Faraday, que puede resultar el interior de un coche de capota metálica; de igual forma ocurre en un conductor de energía eléctrica (un cable): la electricidad fluirá sobre la superficie.

El poder de las puntas

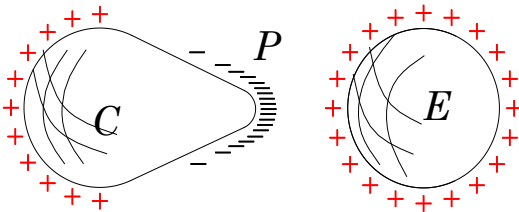


Fig. 3.15. Distribución de las cargas en cuerpos homogéneos y no homogéneos.

Cuando un conductor se provee de puntas, se descarga con mayor facilidad que aquel que no las tiene; entonces, la pregunta que surge es: ¿por qué ocurre esto?

Si revisamos la definición del potencial eléctrico: $V = \frac{Q}{4\pi r_1 \epsilon_0}$, se

puede advertir que el potencial es inversamente proporcional al radio; en el caso de una punta muy aguda, el radio es muy pequeño, lo que lleva a que el potencial eléctrico fuese muy alto; la aglomeración de cargas en las puntas lleva a que la densidad de carga aumentase; a esto se lo denomina rigidez eléctrica. En estas condiciones, las cargas escapan por repulsión del resto de cargas; al escapar, se golpean con las partículas del aire, lo que produce una ionización que, en zonas oscuras, se vería como finos hilos de luz de color violeta; de igual manera, se siente el olor a ozono, debido a la ionización del oxígeno del aire.

En la Fig. 3.15, se pueden ver dos cuerpos: uno con punta P y el otro es una esfera. El solo hecho de acercarse a la esfera lleva a que el cuerpo con punta se cargara



Fig. 3.16. Molinete electrostático.
Fuente: 2Bach (2014).

por influencia, lo que distribuye la carga positiva al extremo C; en seguida, las cargas escapan por la punta y los cuerpos se han descargado.

En la Fig. 3.16, se puede ver un molinete electrostático, que gira cuando se encuentre cargado; el movimiento se logra debido a la tercera Ley de Newton: la carga, al escapar por las puntas, lleva a que reaccione el molinete, con lo cual se genera una velocidad de rotación; en los extremos de las puntas, en área oscura, se verá una tenue luz de color violeta, señal de que el aire se ha ionizado por el escape de cargas eléctricas.

El pararrayos

Benjamín Franklin (1706-1790) efectuó muchos experimentos sobre electricidad, por lo que concluyó que las tormentas eléctricas no son más que una manifestación de electricidad estática entre las nubes y la tierra; para demostrarlo, en 1753 realizó el experimento de la cometa con un hilo conductor, observó que del extremo del hilo conductor en tierra se producían descargas eléctricas continuas, lo que le permitió desarrollar la teoría del pararrayo; de forma



Fig. 3.17. Rayo sobre la torre CN Tower. Toronto, Canadá. Fuente: Heinrich (2008).

independiente, el checo Prokop Divis, en 1754, también, inventaba el pararrayos. Franklin, tras publicar un artículo sobre el uso de varillas de acero con puntas en el extremo superior, sobre el techo de las casas, llevó a que desde entonces se utilizara de forma masiva el pararrayos, por lo que disminuyó los accidentes por caída de rayos.

En 1919, Nicola Tesla dio la explicación correcta al funcionamiento del pararrayos y, por supuesto, rebatió lo que había planteado Franklin. De modo que el pararrayos se compone de tres elementos fundamentales: el electrodo o captador de carga (pararrayos) en material duro y buen conductor; el cable de cobre grueso (número cero) que va desde el pararrayos hasta una toma en tierra; la toma o el extremo del pararrayos en tierra, que debe estar en una parte húmeda, con buena conductividad eléctrica; por lo general, se suele utilizar tierra revuelta con sal o sulfato de cobre, en depósito no menor a un metro cúbico. Hoy en día, se pueden utilizar varillas Copperweld para el pararrayos, de las mismas que se utilizan en las instalaciones eléctricas y el electrodo en tierra; dos o tres varillas conectadas en paralelo sobre la tierra tratada, por lo general lejos de la toma a tierra para las instalaciones eléctricas de edificios. En la Fig. 3.17 se puede ver el salto de un potente rayo sobre el pararrayos de la CN Tower o Canadian National Tower. En muchas ocasiones, los árboles altos soportan caídas de rayos, con consecuencias muy graves para el árbol que, en la mayoría de los casos, muere.

Efluvios y efecto corona en líneas de alto voltaje

Los ingenieros eléctricos trabajan para llevar la energía eléctrica desde los lugares de producción, como las centrales eléctricas, a los lugares más recónditos del planeta; para lograrlo, utilizan largos cables de transmisión; como un arte de esta práctica: cuanto más lejos, más alto el voltaje, por lo que la pregunta que surge es: ¿hasta qué voltaje se puede transmitir?

La respuesta es: hay líneas de transmisión de hasta 380.000 voltios: y ¿por qué no hay líneas de mayor voltaje? La respuesta indica que se torna muy costoso; en principio, las líneas de alto voltaje están desnudas y sin peligro para las aves, si se llegan a posar en ellas, debido a que solo se trata de una superficie equipotencial, pero, por encima de este voltaje, el aire que circunda a la línea se afecta tanto que, al final, se ioniza y deja saltar los electrones desde los cables, lo que produce una luz de color

violeta,¹ como la que se ve en la Fig. 3.18, que resulta muy visible en una noche oscura; además, genera un sonido muy particular y la producción

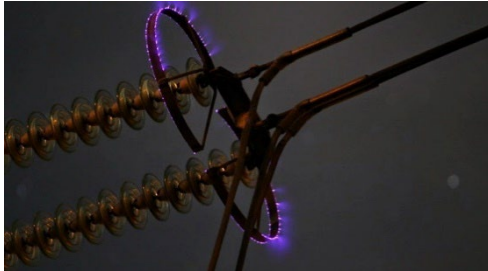


Fig. 3.18. Fotografía de un efecto de corona por alto voltaje en líneas de alta tensión. Fuente: Sahu (2016)

de ozono, lo que significa que la línea de alta tensión hace un trabajo que, a la postre, resulta una pérdida; por esta razón, no es posible incrementar el voltaje de manera indefinida.

El escape de los electrones por filos o puntas de los conductores produce el viento eléctrico o el efluvio eléctrico, lo que genera el sonido característico de este tipo de transmisión eléctrica; se debe

anotar que, cuando se ve o se siente un escape de alto voltaje, se debe informar a la autoridad competente, porque se está frente a un peligro inminente de descarga eléctrica, lo que puede resultar muy peligroso.

¹ Experiencia personal. Era un domingo del año 1994; me encontraba en el sur de Colombia, entre el municipio de Pupiales e Ipiales, en un auto Renault 6, con mi mamá, mi esposa y mis dos pequeños hijos; durante ese viaje, se desató una tormenta: inició con un fuerte aguacero, luego cayó granizo en abundancia y después volvió a caer agua, con vientos y descargas eléctricas por doquier; de repente, una luz muy fuerte cayó desde el cielo cargado de nubes oscuras a una porcelana aislante de alta tensión sobre un poste de madera; el asunto se hallaba a una distancia de unos 200 m desde donde estábamos; tras la descarga, una fuerte luz de color rosado y violeta iluminaba en la porcelana, luego cayó por la posteadura, se iluminó el piso y desapareció; por supuesto, vinieron las preguntas de todos por el fenómeno observado; no tenía mayor argumentación para dar la explicaciones y traté de llegar a Pasto, a mi biblioteca averiguar de qué se trataba; después de un buen tiempo, entendí que se trataba obviamente de una descarga eléctrica, que había generado un efluvio eléctrico y una descarga en corona; aún cuando escribo esto, tengo la imagen de ese fenómeno.

Capítulo 4



Capacitancia



Fuente: Boston Museum of Science (2012)

A medida que se iba conociendo más sobre la electricidad, una de las prácticas científicas fue poder almacenarla; gran asombro despertaba tener cuerpos con gran capacidad de carga; quizá lo primero solo era que se pudiera almacenar para efectuar experimentos curiosos.

En la imagen de la portada de este capítulo se ve un par de condensadores de Van de Graaff (por el nombre de su inventor); son el centro de atención del Museo de la Ciencia de Boston, pues se muestra el poder de la electricidad, al ser almacenada y utilizarla cuando se requiera. Este capítulo da respuesta a esa inquietud al analizar el concepto de capacitancia.

4.1 Capacitancia

A partir de la expresión matemática del potencial eléctrico: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$, se deduce que la relación de la carga y el potencial eléctrico es:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (4.1).$$

A esta relación se la denomina **capacitancia**; sus unidades son: $\frac{\text{Coulombios}}{\text{Voltios}} = \text{Faradios}$. Esta es una unidad muy grande, por lo cual se suelen utilizar unidades más pequeñas, como se puede observar en la Tabla 4.1:

Tabla 4.1. Nombre de la unidad y su respectivo factor.

Unidad	Factor
faradio	10^0
mili faradio	10^{-3}
micro faradio	10^{-6}
nano faradio	10^{-9}
pico faradio	10^{-12}

Como se puede ver en la Tabla, los factores que caracterizan a las unidades corresponden a números muy grandes.

Por otra parte, la definición de capacitancia permite establecer que la constante $4\pi\epsilon_0 x$ corresponde a la capacitancia, de modo que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 x = \frac{Q}{V} \quad (4.2).$$

Así las cosas, la capacitancia se puede comparar con un tanque de almacenamiento de agua, con lo cual el elemento que puede almacenar energía eléctrica se denominará **capacitor**.

Según la Fig. 4.1, se tiene un capacitor de caras paralelas; las placas de material conductor se cargan de forma homogénea por inducción electrostática; una se cargará positivamente, mientras que la otra lo hace de forma negativa; a este conjunto de placas se lo denominará capacitor o condensador.

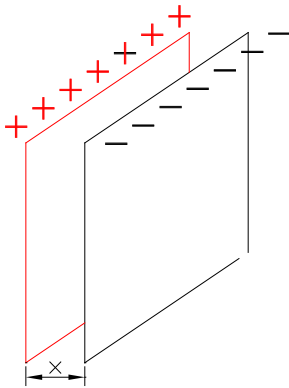


Fig. 4.1. Placas paralelas de un capacitor.

Ahora bien, surge la pregunta: ¿cómo almacena energía?

El campo eléctrico generado por dos láminas es: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, donde la densidad de carga por unidad de área es sigma, es decir: $\sigma = \frac{Q}{A}$; por tanto, el campo eléctrico será: $E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$.

Por otra parte, como $dV = Edx$, cuando r solo depende de x , al combinar estas expresiones, se tiene:

$$dV = \frac{Q}{A\epsilon_0} dx.$$

Como solución a esta expresión, se tiene:

$$\int_0^V dV = \int_0^x \frac{Q}{A\epsilon_0} dx.$$

Como la integración se efectúa desde puntos iniciales cero, entonces, lo que se tiene es:

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0} x,$$

de donde se puede deducir que la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{x} \quad (4.3).$$

En este caso, se puede ver que la capacitancia es inversamente proporcional a la distancia entre las dos placas y directamente proporcional

a su área, de modo que, para que pudiera almacenar energía eléctrica se necesita tener placas paralelas grandes y lo más cercanas posible.

Ejemplo

¿De qué tamaño deben ser las placas de un condensador para que almacene un faradio y estén separadas solo un milímetro?

Solución

A partir de la expresión (4.3), se tiene:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{x} = 1 \text{ faradio},$$

de donde se puede despejar el área:

$$A = \frac{1fx}{\epsilon_0}.$$

Si se rempazan los valores correspondientes, se tiene:

$$A = \frac{1f(10^{-3}m)}{8.85 \times \frac{10^{-12}N^2}{Cm^2}}$$

$$A = 0.11 \times 10^9 m^2$$

Este resultado señala que, para almacenar un faradio, se necesita $1.1 \times 10^9 m^2$, que es una superficie grande; si se la considera cuadrada, se podría calcular el lado del cuadrado:

$$l = \sqrt{1.1 \times 10^9 m^2}$$

$$l = 10488m$$

Este resultado significa que se necesita un cuadrado de lámina conductora de $l = 10.5Km$ por lado, razón por la cual, en la práctica, se refiere a unidades muchísimo más pequeñas, que se pudieran almacenar en elementos pequeños, de acuerdo con el orden de factores de la Tabla 4.1.

4.2 Dieléctricos

Ahora bien, ¿qué se puede colocar entre dos placas? En el ejemplo previo se utilizó aire, pero, para distancias aún más pequeñas, se pueden utilizar otros medios, como papel parafinado u otro medio aislante que pudiera evitar que saltaran chispas cada vez que el sistema del capacitor se carga;

en la Fig. 4.2, se pueden distinguir las placas conductoras y el medio aislante o dieléctrico.

Por otra parte, se define como constante dieléctrica o rigidez eléctrica del material aislante que se coloca entre las placas, como se puede ver en la Figura 4.2, y en la Tabla 4.2 se pueden ver los valores de algunos materiales utilizados en la técnica electrónica, a la relación entre la capacitancia absoluta y la del vacío, se le llama capacitancia relativa, esto es:

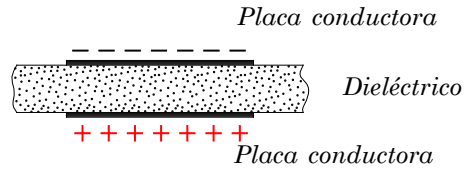


Fig. 4.2. Sistema de placas y medio aislante.

$k = \frac{C}{C_0}$, donde C_0 es la capacitancia en el vacío; por tanto, la constante es una unidad adimensional.

Tabla 4.2. Valores de la constante de capacitancia de algunos materiales.

Material	k
Aire seco	1.006
Baquelita	7.0
Vidrio	7.5
Mica	5.0
Plástico de micro celulosa	9.0
Papel parafinado	2.0
Caucho	3.0
Teflón	2.0
Aceite de transformador.	4.0

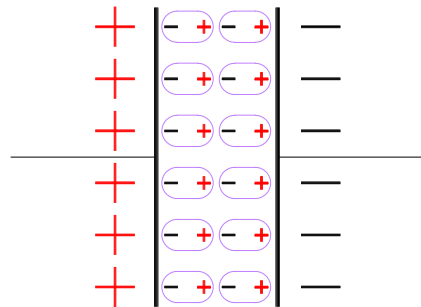


Fig. 4.3. Polarización de un material dieléctrico en medio de dos placas paralelas.

Este material dieléctrico tiene la propiedad de polarizar sus moléculas, con lo que aumenta la rigidez dieléctrica, de tal modo que se genera una barrera a la carga de las placas del capacitor, como se ve en la Fig. 4.3, lo que evita que se descargue ya fuese con lentitud o de forma súbita mediante chispas en las que, por supuesto, de presentarse, se destruye el material dieléctrico; entre las características que debe tener el dieléctrico están:

1) Un material altamente dieléctrico permite menores separaciones entre las placas.

- 2) Un buen material dieléctrico incrementa la capacidad del capacitor.
- 3) Permite emplear mayores voltajes sin el peligro de ruptura del dieléctrico.
- 4) Por lo general, el material dieléctrico provee de resistencia mecánica a la armadura del capacitor, con lo que se logra con este la miniaturización del producto.

Por otra parte, la forma o geometría de los capacitores también define un valor, tal como se puede ver en la Tabla 4.3:

Tabla 4.3. Capacitancia, de acuerdo a la forma geométrica.

Tipo de capacitor	Fórmula
Capacitor de placas paralelas con área A y separación d	$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$
Capacitor esférico de radio R	$C = 4\pi\epsilon_0 R$
Capacitor cilíndrico de longitud l y radio a y b (interior y exterior)	$C = \frac{l}{2kLn\left(\frac{b}{a}\right)}$
Capacitor esférico hueco, con radio a y b (interno y externo)	$C = \frac{ab}{k(b-a)}$

4.3 Energía almacenada en un capacitor

Debido a que la capacitancia se ha definido como: $C = \frac{Q}{V}$, y, además, el potencial eléctrico se define como: $V = \frac{dU}{dQ}$, entonces, $dU = VdQ$; al combinar estas expresiones, se tiene:

$$dU = \frac{Q}{C} dQ$$

$$\int_{U_i}^{U_2} dU = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{Q}{C} dQ$$

Si se considera que la energía potencial inicial es cero y, como tal, la carga inicial también sería cero, entonces la expresión queda:

$$U = \frac{1}{2C} Q^2 \quad (4.4).$$

Ahora bien, como $C = \frac{Q}{V}$, al combinarlo con la expresión (4.4), se tiene:

$$U = \frac{1}{2}QV \quad (4.5).$$

De modo que la expresión (4.5) es la energía almacenada en un capacitor; por tanto, esta energía se dispone para un eventual trabajo donde se tuviera que utilizar un capacitor.

4.4 Densidad de energía del campo eléctrico.

A partir de la ecuación (4.5), se puede concluir que la energía también se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2}CV^2.$$

Ahora bien, como, a partir de la ecuación (4.3), la capacitancia se puede calcular como: $C = \frac{A\epsilon_0}{x}$, y, además la diferencia de potencial eléctrico entre las placas de un condensador se puede escribir: $V = Ex$, por tanto, si reemplazamos todo esto, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{x} (Ex)^2.$$

Al organizar esta expresión, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad,$$

donde A es el área de las placas y x la distancia entre las placas; ahora bien, Ax define un volumen, por lo que se puede escribir como:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

donde la expresión $\frac{U}{V}$ es la densidad de energía del campo eléctrico, denotada como:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.6).$$

En esta expresión, no hay ninguna referencia sobre la capacitancia; solo queda en términos del campo eléctrico; por tanto, es la energía almacenada en el campo eléctrico y se torna evidente cuando se trata de arrastrar una carga desde el infinito hasta un punto finito en medio de un campo eléctrico, pues se necesita hacer un trabajo, lo que significa aplicar una energía para poder lograrlo.

4.5 Asociaciones de capacitores

En electrónica, es muy frecuente tener circuitos eléctricos donde se encuentran capacitores o condensadores conectados de muchas formas y con varias funciones por cumplir; en este caso, solo se tendrá en cuenta al capacitor como medio de almacenamiento. Para que se pudiera distinguir entre tantos otros elementos electrónicos se acostumbra dibujarlo: $\text{---}||\text{---}$ En algunos casos, es necesario polarizar las placas, sobre todo cuando se trata de capacitores electrolíticos. Bien, entre las asociaciones de capacitores, por ahora se tienen dos formas: en serie y en paralelo. Esto es:

Asociación en serie

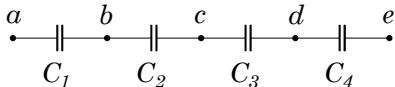


Fig. 4.4. Asociación de capacitores en serie.

Una asociación en serie no es más que un grupo de capacitores conectados o unidos uno tras otro, como se ve en la Fig. 4.4.

Para resolver esta asociación, se parte de que la diferencia de potencial de todo el grupo es igual a la suma de sus partes; esto es:

$$V_{ae} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de}.$$

Como $v = \frac{Q}{C}$, entonces al combinarlas, se tiene:

$$\frac{Q}{C_{ae}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \frac{Q}{C_4}.$$

Como, en esta asociación, la carga es la misma, entonces esto queda:

$$\frac{1}{C_{ae}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}.$$

En general, si son N capacitores, se puede escribir como:

$$\frac{1}{C_{equivalente}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (4.7).$$

O sea, para encontrar el inverso de la capacitancia equivalente, se suman los inversos de los valores de los capacitores.

Asociación en paralelo

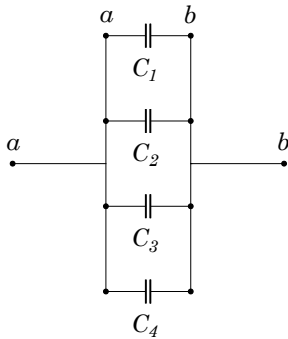


Fig. 4.5. Asociación de capacitores en paralelo.

Como se puede ver en la Fig. 4.5, los capacitores se conectan o unen en paralelo, pues hay una gran diferencia en la asociación previa; en este caso, los extremos a y b están con una diferencia de potencial, de tal forma que todos los capacitores están bajo la misma diferencia de potencial, lo que indica que:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N.$$

En este caso, N capacitores se han conectado de esta forma; por tanto, esto se puede escribir como:

$$C_{ab}V_{ab} = C_1V_{ab} + C_2V_{ab} + C_3V_{ab} + \dots + C_NV_{ab}.$$

Al factorizar y cancelar el potencial, queda:

$$C_{equivalente} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N.$$

De forma sintética, se puede expresar así:

$$C_{equivalente} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (4.8).$$

O sea, para encontrar el valor equivalente de la capacitancia, se efectúa la suma directa de las capacitancias o valores de los capacitores.

Ejemplo

1. Calcular el valor equivalente de esta asociación de capacitores, con los siguientes valores:

$$C_1 = 15\mu f \quad C_2 = 18\mu f \quad C_3 = 12\mu f \quad C_4 = 20\mu f$$

$$C_5 = 10\mu f \quad C_6 = 30\mu f \quad C_7 = 25\mu f$$

Solución

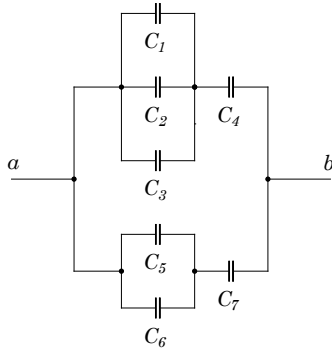


Fig. 4.6. Asociación de capacitores tanto en paralelo como en serie.

Para resolver este tipo de ejercicios, es necesario proceder de forma metódica, con la resolución de asociaciones pequeñas y sencillas.

En la Fig. 4.6, se puede ver que hay dos asociaciones en paralelo; por tanto, se procede a hacerlo así:

Obsérvese que los capacitores C_1 , C_2 , y C_3 se han conectado en paralelo y, para resolver este caso, se utiliza la expresión (4.7), de modo que:

$$C_{equivalente} = \sum_{i=1}^N C_i.$$

Esto es:

$$C_8 = \sum_{i=1}^3 C_i$$

$$C_8 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_8 = (15 + 18 + 12)\mu f$$

$$C_8 = 45\mu f$$

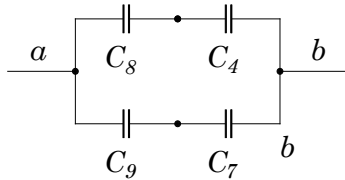


Fig. 4.7. Nueva asociación de capacitores.

Para los capacitores C_5 y C_6 , se procede de igual forma:

$$C_9 = C_5 + C_6$$

$$C_9 = (10 + 30)\mu f$$

$$C_9 = 40\mu f$$

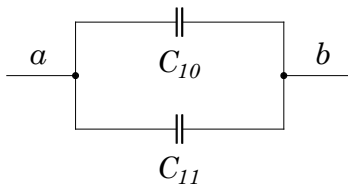


Fig. 4.8. Segunda asociación de capacitores.

Ahora bien, la nueva asociación de capacitores (Fig. 4.7) se puede reducir aún más: C_8 y C_4 están en serie, lo mismo que C_9 y C_7 (Fig. 4.7); esto es:

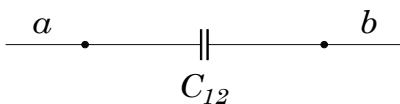


Fig. 4.9. Capacitor equivalente.

$$\frac{1}{C_{10}} = \frac{1}{C_8} + \frac{1}{C_4}.$$

Al remplazar los valores con que se cuenta (Fig. 4.8), queda así, pues sus valores son:

$$\frac{1}{C_{10}} = \frac{1}{45} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{C_{10}} = 0.022 + 0.05$$

$$C_{10} = 13.89\mu f$$

De igual forma para C_{11} :

$$\frac{1}{C_{11}} = \frac{1}{C_9} + \frac{1}{C_7}$$

$$\frac{1}{C_{11}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{25}$$

$$C_{11} = 15.38\mu f$$

Por último, se puede encontrar el valor del capacitor equivalente cuando se encuentre el valor de C_{12} a partir de la última asociación en paralelo de C_{10} y C_{11} (Fig. 4.9):

$$C_{12} = C_{10} + C_{11}$$

Al incorporar los valores encontrados, se tiene:

$$C_{12} = (13.89 + 15.38)\mu f$$

$$C_{12} = 29.27\mu f$$

Este valor de C_{12} es el representativo o equivalente de toda la asociación de capacitores, lo que significaría que, en vez de tener dicha asociación, se podría colocar un capacitor de $29.27\mu f$.

2. Resolver la asociación como se muestra en la Fig. 4.10, cuyos valores son:

$$C_1 = 15\mu f \quad C_2 = 20\mu f \quad C_3 = 12\mu f \quad C_4 = 10\mu f$$

$$C_5 = 8\mu f \quad C_6 = 25\mu f \quad C_7 = 30\mu f \quad C_8 = 28\mu f$$

$$C_9 = 18\mu f \quad C_{10} = 17\mu f \quad C_{11} = 50\mu f$$

Solución

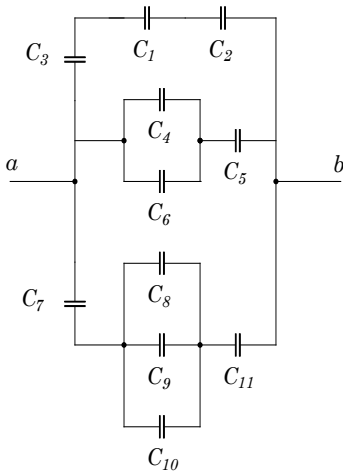


Fig. 4.10. Asociación de capacitores.

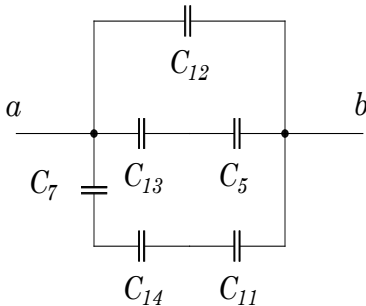


Fig. 4.11. Nueva asociación de capacitores.

Como en el caso anterior, para solucionarlo se buscan pequeñas asociaciones, sencillas de resolver; en este caso, C_1 , C_2 y C_3 están en serie, C_4 y C_6 están en paralelo, lo mismo que C_8 , C_9 y C_{10} ; así, esto es:

$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$; al remplazar los valores, se tiene: $\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12}$, con lo cual se tiene que: $C_{12} = 5\mu f$.

Para resolver la asociación de C_4 y C_6 , por estar en paralelo, se hará la suma de forma directa:

$C_{13} = C_4 + C_6$; al remplazar valores, se tiene: $C_{13} = 10 + 25$, de modo que: $C_{13} = 35\mu f$.

De igual forma, para la asociación de C_8 , C_9 y C_{10} , que están en paralelo y, por tanto, se resuelve al efectuar la suma directa: $C_{14} = C_8 + C_9 + C_{10}$. Al remplazar los valores, se tiene: $C_{14} = 28 + 18 + 17$; por tanto, $C_{14} = 63\mu f$; con estos nuevos valores se tiene una nueva asociación (véase Fig. 4.11), en la cual se tienen otras pequeñas asociaciones, como es el caso de C_{13} y C_5 , que están en serie; lo mismo ocurre con C_7 , C_{14} y C_{11} .

Entonces: $\frac{1}{C_{15}} = \frac{1}{C_{13}} + \frac{1}{C_5}$; al remplazar los valores, se tiene: $\frac{1}{C_{15}} = \frac{1}{35} + \frac{1}{8}$, con lo cual $C_{15} = 6.511\mu f$.

Para la asociación de C_7 , C_{14} y C_{11} , que también están en serie, se tiene: $\frac{1}{C_{16}} = \frac{1}{C_{14}} + \frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_7}$; al remplazar valores, se tiene: $\frac{1}{C_{16}} = \frac{1}{63} + \frac{1}{50} + \frac{1}{30}$, con lo cual $C_{16} = 14.085\mu f$; así se tiene una nueva asociación.

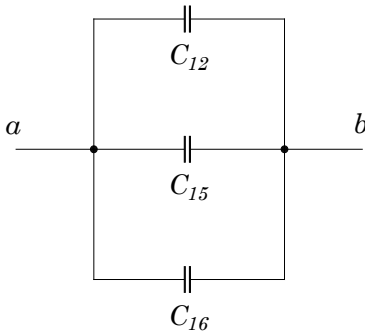


Fig. 4.12. Nueva asociación: todos están en paralelo.

En esta nueva asociación (Fig. 4.12), los capacitores resultantes están en paralelo; por tanto, para encontrar el capacitor resultante, solo queda efectuar la suma de forma directa: $C_{17} = C_{12} + C_{15} + C_{16}$; al remplazar los valores, se tiene:

$$C_{17} = 5 + 6.51 + 14.085.$$

Con esto se tiene que el capacitor equivalente es:

$$C_{17} = 25.59\mu\text{f}.$$

4.6 Historia de la Capacitancia

Los fenómenos eléctricos y magnéticos se conocían desde hacía mucho tiempo; caldeos, griegos y demás pueblos antiguos se refieren a estos fenómenos sin poder formular alguna explicación científica satisfactoria.

En 1600, William Gilbert, médico de la reina Isabel I, fue el primero en distinguir claramente entre fenómenos eléctricos y fenómenos magnéticos; fue el primero en asignar el nombre de eléctrico, palabra que deriva de la palabra griega *elektron*, que es el nombre del ámbar; con una serie de experimentos, realizados de forma metódica, se anticipó a la existencia de fuerzas a distancia, con lo que se rompe el paradigma de la fuerza de contacto de Aristóteles; señaló que la caída de los cuerpos posiblemente se debía a un gran imán en el interior de la tierra.

La máquina de Otto von Guericke.

Los primeros generadores electrostáticos se denominan máquinas de fricción, debido al rozamiento, proceso que se necesitaba para que el cuerpo se cargara. La primera máquina que se describe en la historia de la electricidad se remonta al año de 1663, cuando el alemán Otto von Guericke utilizó una esfera de azufre, la que, al frotarla con las manos



Fig. 4.13. Grabado sobre una esfera de azufre y su inventor. Fuente: Sheila Terry/Science Photo Library

secas o con algún paño, fácilmente se electrizaba; posteriormente se colocó en un eje, para facilidad de rotación, y colocada dentro de otro globo de vidrio, tal como se puede ver el grabado de la Fig. 4.13, la máquina rudimentaria en principio inspiró para construir nuevas versiones. Luego, hacia el año 1706, Francis Hauksbee mejoró el diseño al llevar a que girara rápidamente una esfera de vidrio. En principio, estas máquinas se utilizaron para efectuar experimentos en circos y demás.

El electróforo.

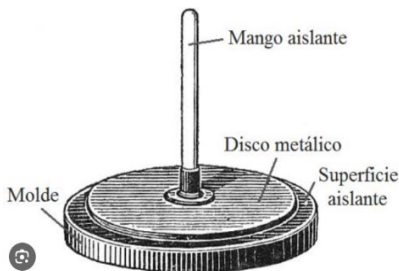


Fig. 4.14. Esquema de electróforo en lámina metálica y vástago dieléctrico. Fuente: Caristo 2~commonswiki (2015).



Fig. 4.15. Botella de Leyden lab. Fuente: El autor.

El primer electróforo lo inventó el físico sueco Johan Carl Wilcke (1732-1796). Luego, el científico italiano Alessandro Volta lo perfeccionó y dio a conocer en el mundo científico, al acuñar el nombre de *electróforo*, que procede del griego y quiere decir: *portador de electricidad*.

El instrumento consta de un disco metálico unido a un vástago de material dieléctrico (Fig. 4.14); la placa se coloca sobre una superficie aislante; la carga se logra por inducción o por fricción; al colocarlo sobre la superficie aislante, se conforma un capacitor primitivo; la superficie aislante hace el papel de material dieléctrico; así, el instrumento podía acumular y guardar energía electrostática por un tiempo prudente, sobre todo en días secos.

Botella de Leyden.

El alemán Ewald Georg von Kleist y el irlandés Pieter van Musschenbroek, de forma independiente, desarrollaron la idea; el irlandés, en la Universidad de Leyden, de donde proviene su nombre, en 1746, cuando buscaba cargar el agua contenida en un recipiente; sin embargo, uno de sus ayudantes sintió que la botella también se cargaba sin agua. Un año más

tarde, el británico William Watson descubrió que la botella podía mejorar si se colocaba un recubrimiento metálico por la parte externa; así, se logró hacer chispas de forma espectacular.

Entonces, el capacitor de Leyden básicamente consiste en un recipiente de vidrio de boca ancha, en el que se coloca una fina capa metálica en el interior, pegada a la pared del vidrio; además, una varillita que sale por la tapa aislante establece contacto con la fina lámina de aluminio interna; por fuera también lleva un recubrimiento metálico, como se puede ver en la Fig. 4.15, de modo que el vidrio opera de material dieléctrico; de esta forma se conforma un capacitor que puede acumular energía; la carga lo puede hacer por influencia o por contacto con otros cuerpos cargados; este capacitor puede guardar por mayor tiempo miles de voltios de energía electrostática.

Máquina de Wimshurst.



Fig. 4.16. Máquina de Wimshurst. Fuente: El autor.

Es un instrumento generador de electricidad estática de alto voltaje que utiliza el principio triboeléctrico; la máquina la desarrolló James Wimshurst (1832-1903). Capaz de generar grandes cantidades de electricidad, que puede producir chispas de centímetros de alcance.

El sistema que utiliza para producir la carga es el principio de triboelectricidad, lo que significa que debe tener dos materiales conductores, como cobre y aluminio, y un dieléctrico; en el caso de la máquina que se ve en la Fig. 4.16, los discos son de acrílico; en ellos se

encuentran unas plaquitas de aluminio pegadas más unas escobillas de cobre adheridas al chasis que roza con las placas de aluminio. La rotación de los discos se establece en sentido contrario mediante un juego de poleas, donde una de ellas tiene la correa torcida, para que se pudiera invertir el sentido de rotación, pero se conservara la misma rapidez angular. La carga que se genera debido a la rotación se acumula en los capacitores de Leyden, uno con carga positiva y el otro con carga negativa; la descarga se logra mediante fuertes chispas entre las esferas, como elemento terminal de las varillas de los capacitores, como se puede ver en la Fig. 4.16.

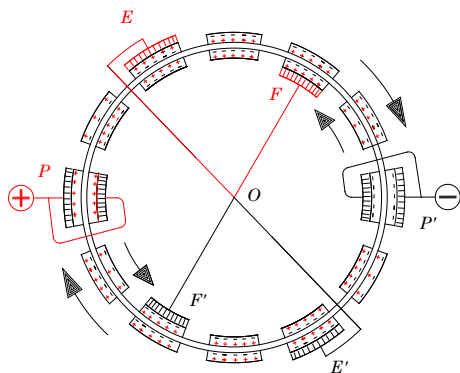


Fig. 4.17. Esquema de una máquina de Wimshurst.

En la Fig. 4.17 se puede ver un esquema de máquina de Wimshurst, donde los platos se representan por anillos con 12 placas de aluminio, con uno que gira hacia la derecha y el otro a la izquierda. Las escobillas E y E' se unen por una sola barra conductora, lo mismo las escobillas F y F' colocadas de tal modo que forman un ángulo de 60° , y dos peines P y P' recogen la carga de las placas tanto del anillo exterior como del interior; tal como se puede

ver en la Fig. 4.17, las escobillas E y E' dan la carga a las placas de aluminio y en los peines P y P' se recoge esta carga. Un detalle muy importante radica en que la varilla de las escobillas de un lado están con carga positiva y las del otro lado con carga negativa; como lo que ocurre en un material conductor, las cargas se redistribuyen y generan una polarización en sus extremos; los peines, que son puntas colocadas diametralmente, recogen las cargas; en la Fig. 4.16 se puede ver el sistema de almacenamiento de las cargas con los capacitores o botellas de Leyden; los extremos de las varillas siempre terminan en esferas; aquí es necesario recordar que en estas geometrías, las cargas se distribuyen de forma homogénea; en el evento en que hubiera una esfera de menor tamaño o, en su defecto, terminan en puntas, el potencial energético aumenta, y este es el caso del efecto de las puntas.

Generador de Van de Graaff.

Este es un aparato que puede acumular muchísima carga; lo creó, en 1931, Rober Jemison van de Graaff (1901-1967); en principio, el aparato lo creó como un acelerador de partículas, pero debido a su requerimiento de didáctica, se han elaborado aparatos mucho más pequeños, que muestran el poder de la carga electrostática; como se puede ver en la Fig. 4.18, básicamente cuenta con una esfera hueca metálica, que puede ser de aluminio en la parte superior de dos columnas de acrílico u otro material aislante; por entre estas columnas gira una banda sinfín de material aislante, como el caucho, que lleva electrones desde la tierra



Fig. 4.18, Generador de Van de Graaff, en el laboratorio. Fuente: el autor.



Fig. 4.19 Capacitores que se encuentran en el comercio. Fuente: Schrader (2011)

hasta la esfera y los recoge un peine que se encuentra en el interior de la esfera; el movimiento de la banda se logra mediante una pequeña manivela o con la ayuda de un motorcito; así, un pequeño aparato de estos puede alcanzar hasta los siete millones de voltios, lo suficiente como para llevar a que se erizaran los cabellos de una persona que se encuentre totalmente aislada, como se puede observar en la fotografía que encabeza el Capítulo 2.

La esferita se encuentra conectada a tierra, con lo cual se genera una diferencia de potencial de la magnitud mencionada en que, de forma súbita, puede saltar una chispa para dejar al aparato en condiciones de equilibrio eléctrico.

Capacitores en el mundo electrónico.

En el mundo de la electrónica moderna, se encuentran condensadores y capacitores de todas la formas y tamaños; se denominan condensadores cuando el dieléctrico es seco, como cerámica u otro material; en la Fig. 4.19 se pueden ver diferentes tipos de capacitores; a aquellos que se parecen a unos círculos, que por lo general son de capacitancia muy baja, se los denomina condensadores, al igual que el de placas paralelas, que pueden girar unas a otras con el fin de aumentar o disminuir la capacitancia, como se puede observar en la

Fig. 4.19 en los que parece ver el interior de ellos utilizados para sintonizar una emisora en un radio de tipo analógico; al variar la posición del dial, varía la capacitancia natural del sistema, se lo utiliza en el caso de circuitos resonadores o sintonizadores; así, el sistema se convertía en un buscador de frecuencias excitadoras, provenientes de alguna emisora;

de esta forma se lograba sintonizar la emisora deseada al entrar en resonancia; hoy en día, cambia un poco con la utilización de la radio digital. Los capacitores alargados y de mayor volumen son de láminas de aluminio enrolladas con un dieléctrico en medio, como el papel parafinado, y cuando son de mayor tamaño se encuentran embebidos en aceite electrolítico, pero siempre uno encima de otro, sin que pudiera haber contacto entre los materiales conductores.

Capítulo 5



Electrodinámica. Corriente eléctrica



Fuente: iStock (s.f.).

5.1 Corriente eléctrica

Cuando se habla de la corriente eléctrica de inmediato nuestra mente se traslada a los cables de alta y baja tensión suspendidos de grandes torres; de igual forma, está presente en las cuerdas que pasan por el frente de nuestras viviendas, también en el funcionamiento de los electrodomésticos, ya fuesen radios, televisores secadores de cabello, cargadores de celulares, etc., y todo esto está bien. Así que, igual que en los capítulos previos, se necesita revisar la historia de esta parte.

A pesar de que los fenómenos eléctricos producidos por peces y otros animales se conocían desde hace mucho tiempo, sin embargo, en 1714, R. A. de Réaumur explicó la propiedad de peces de ríos que dan sacudidas violentas; según el investigador, creía que el fenómeno se desarrollaba por la contracción muscular.

En 1790, el médico italiano Luigi Galvani realizó múltiples experimentos con las ancas de la rana, para llegar a la conclusión de que los músculos son como pequeñas botellas de Leyden cargadas positivamente en el interior y con carga negativa en la parte exterior; cada contracción es una convulsión tóxica.

En 1800, Alessandro Volta presentó ante la Royal Society londinense un proyecto que podía producir corriente eléctrica: se trataba de una serie de pares de discos separados por cartón impregnados en salmuera, con un diámetro de 3 cm; en su momento, no se tenía la unidad de medida; con la conexión en serie del par de discos se lograba aumentar el voltaje a voluntad, lo que superaba las limitaciones que tenían las máquinas electrostáticas; científicos de toda Europa y América conocieron rápido el flujo eléctrico a través de hilos metálicos.

En 1829, el alemán Georg Simon Ohm descubrió la Ley que lleva su nombre; en 1841, James Prescott Joule descubrió que la corriente eléctrica podía generar calor en los conductores y, en 1845, Gustav Kirchhoff extendió la Ley de Ohm a dos, tres dimensiones, con lo que dedujo la Ley de nudos.

Con este brevísimo resumen histórico, se puede establecer una definición de la corriente eléctrica como la razón de la carga en función del tiempo; esto es:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1).$$

Esto significa la cantidad de cargas que pueden pasar; si se la trata de cuantificar en la unidad del tiempo, la unidad de medida es:

$$\left[\frac{dq}{dt}\right] = \left[\frac{\text{Culombios}}{\text{segundos}}\right] = [\text{Amperio}] = \text{Am}.$$

Ahora, se establece un resumen de unidades de medida de todos los conceptos hasta ahora vistos, como se puede ver en la Tabla 5.1:

Tabla 5.1. Conceptos eléctricos, símbolo y unidades.

CONCEPTO	SÍMBOLO	UNIDAD
Carga eléctrica	Q	Culombio
Energía potencial eléctrica	U	Julio
Potencial eléctrico	V	Voltio
Capacitancia	C	Faradio
Corriente eléctrica	I	Amperio

5.2 Naturaleza de la corriente eléctrica

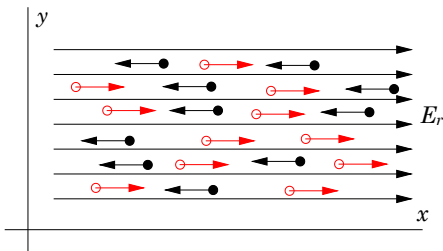


Fig. 5.1. Esquema sobre la naturaleza de la corriente eléctrica.

Se sabe que las cargas eléctricas en presencia de un campo eléctrico se mueven de acuerdo con la naturaleza del campo eléctrico y el signo de las cargas; en el caso de un campo eléctrico emergente, las cargas negativas se moverían en sentido contrario al campo y las cargas positivas en el mismo sentido del campo eléctrico; en la Fig. 5.1 se puede apreciar cómo el campo eléctrico

emergente se dirige hacia la derecha; entonces, las cargas negativas viajan hacia la izquierda, mientras que las cargas eléctricas positivas viajan hacia la derecha.

En sentido estricto, sobre la naturaleza de la electricidad, las cargas negativas son electrones libres del material conductor (plata, oro, cobre o aluminio) y las cargas positivas son los huecos que dejan los electrones; de modo que, en realidad, la corriente eléctrica se debe al flujo de electrones con cargas negativas, PERO desde un comienzo se pensó en las

cargas positivas, razón por la cual, y de forma convencional, el sentido de la corriente eléctrica es el de las cargas positivas; es decir, al seguir el campo eléctrico (en electrónica, se debe tomar en cuenta el sentido de las cargas negativas).

En los conductores como cobre, oro, aluminio, plata, hay electrones libres que se mueven y dejan huecos, que son las cargas positivas que corresponden a los átomos; por supuesto, estos no se mueven; los huecos van siendo rellenados por el paso de los electrones, cuando se mueven en sentido contrario al campo.

Densidad de corriente.

Se define como la cantidad de corriente que pase por la unidad de área; esto es:

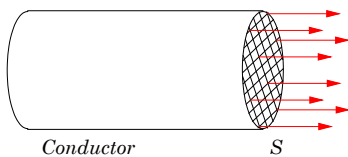


Fig. 5.2. Esquema de un conductor.

$$J = \frac{dI}{dS} \quad (5.2),$$

a partir de donde se puede establecer que:

$$dI = JdS$$

$$I = \int_S J \cdot dS$$

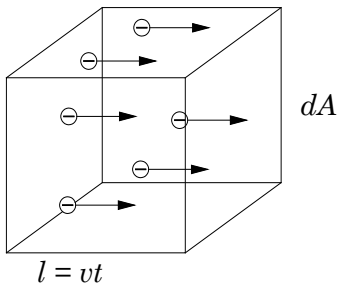


Fig. 5.3. Esquema del movimiento de cargas en la unidad de volumen.

Esta ecuación explica por qué razón hay unos cables o conductores más gruesos que otros (véase Fig. 5.2); es decir, por aquellos cables gruesos puede viajar más corriente que por unos finos hilos; esto se puede ver con mucha claridad en el cableado de un vehículo: los cables que van de la batería al motor de arranque son muy gruesos, pues se necesita que viaje mucha corriente, pero aquellos que encienden lámparas son relativamente delgados, pues no es

necesaria tanta corriente.

En el caso de tener un conductor en estado líquido, como en la Fig.5.3, el volumen se definiría por el tamaño de las aristas del cubo:

$$V = l \times l \times l.$$

También,

$$V = l \times A.$$

Ahora bien, uno de los lados puede ser determinado por la velocidad y el tiempo empleado: $l = vt$; por tanto, se tiene:

$$V = vtA.$$

De modo que un elemento de volumen es: $dV = vdtA$.

Como la densidad de carga volumétrica es: $\rho = \frac{Q}{V}$, y también se puede definir como: $\rho = ne$, donde n es número de cargas y e cargas o electrones, y como $Q = \rho V$, entonces se tiene:

$$Q = nevA.$$

De modo que un elemento de carga será:

$$dQ = nevdtA.$$

Como la corriente eléctrica es: $I = \frac{dQ}{dt}$, entonces, un diferencial de la corriente eléctrica se puede expresar como:

$$dI = nev dA.$$

Donde, $\frac{dI}{dA} = nev$ es la densidad de corriente; por tanto, se tiene:

$$J = nev.$$

Finalmente, se tiene:

$$J = \rho v \quad (5.3),$$

donde v se denomina **velocidad de arrastre**, con lo que se determinan dos formas referidas a cómo se muevan las cargas.

Modelo de gas de electrones para los metales.

Considérese un modelo ideal de un conductor, como el cobre, que tiene 29 electrones, de los cuales 28 se encuentran en capas intensamente ligadas; el electrón externo o último está por fuera de las capas cerradas y, por tanto, básicamente es libre, puede moverse por la estructura cristalina del cobre; al existir un campo exterior, estos electrones están con movimiento térmico, se mueven al azar en todas las direcciones y chocan con los átomos de la red cristalina; entonces, se puede considerar a los

electrones libres como parte de un gas de electrones, en el que el conductor es una especie de recipiente. Sin embargo, en este estado, los electrones tienen velocidades muy altas por un breve tiempo; con ajustes de la mecánica cuántica, se considera que del orden de $\frac{10^6 m}{s}$ a temperaturas ambiente de 27°C , a diferencia de que la velocidad de arrastre promedio es del orden de $\frac{10^{-4} m}{s}$.

Ahora bien, si al material conductor de cobre se lo somete a una diferencia de potencial, de inmediato da lugar a un campo eléctrico dentro del conductor, donde todos los electrones libres se aceleran en la misma dirección, pero en sentido opuesto al campo. Así, estas cargas se aceleran de acuerdo a la segunda Ley de Newton:

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

De acuerdo con la ecuación (2.8): $a = \frac{eE}{m}$, y como, además, la velocidad de la carga es $v = at$, al remplazar la aceleración, se tiene:

$$v = \frac{eE}{m} t.$$

Esto muestra que la velocidad de los electrones aumenta con el tiempo. Ahora bien, como este tiempo lo emplea la carga entre un golpe y otro, por tanto, el tiempo se remplazará por τ y se lo denominará tiempo de relajación o **tiempo libre medio**, de modo que la ecuación se expresa como:

$$v = \frac{eE}{m} \tau.$$

Si esta expresión se remplaza en (5.3), donde $J = \rho v$, se tiene:

$$J = \rho \frac{e\tau}{m} E.$$

Ahora bien, como la densidad de carga también se la puede escribir como: $\rho = ne$, entonces, al final se tiene:

$$J = \frac{ne^2\tau}{m} E \quad (5.4).$$

Esto da pie para pensar en dos formas de moverse las cargas eléctricas, al depender del medio donde lo hacen:

1) **Corriente de convección:** la velocidad es del orden de cm/s, como lo que ocurre en el interior de un electrolito cuando se efectúa un proceso de galvanoplastia; en este caso, las cargas son iones que se depositan en el electrodo de recubrimiento y lo hacen de forma muy lenta, lo que lleva a que el proceso conllevara su tiempo; en este caso, las cargas salen del electrodo y recorren el material electrolítico para depositarse en el cátodo.

2) **Corriente de conducción:** la velocidad es de $C = \frac{300000Km}{s}$. Esta es la velocidad con que se propaga el campo eléctrico debido a la diferencia de potencial que se ubique en los extremos de un conductor (cable sólido o de hilos). Con la presencia del campo eléctrico, todas las cargas (electrones libres) se manifiestan, de modo que, para tener la respuesta de la corriente eléctrica, solo basta con que las cargas del extremo final del conductor se movieran, sin importar que hubieran viajado.

5.3 Galvanoplastia

Este es un proceso electroquímico en el que se puede depositar un metal sobre otro a través de una solución salina, con el objetivo tanto de modificar las condiciones superficiales como aumentar la resistencia a la corrosión o dar mayor dureza al desgaste, entre otros; la denominación de cada proceso se determina por el material a depositar, como se puede ver en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2. Nombre que recibe la galvanoplastia de acuerdo con el material depositado.

Material a depositar	Símbolo	Proceso Galvánico
Oro	Au	Dorado
Plata	Ag	Plateado
Cobre	Cu	Cobreado
Zinc	Zn	Cincado
Cromo	Cr	Cromado
Níquel	Ni	Niquelado

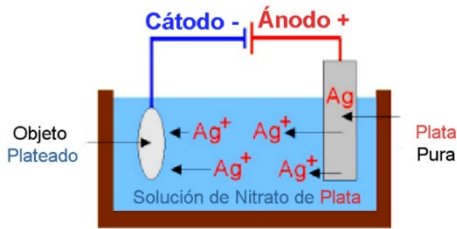


Fig. 5.4. Proceso de plateado.
Fuente: Joyas4you (2016).

El espesor de la placa depositada es directamente proporcional al tiempo que dure el proceso; es decir, el número de cargas o iones depositados. En la Fig. 5.4 se puede ver un proceso de plateado: el ánodo es el electrodo de plata pura y el objeto a platear es el electrodo o cátodo que recibe los iones de plata; los cuerpos se sumergen en una

solución de Nitrato de plata que permite la conductividad; se debe entender que, para que se efectúe el proceso, se necesita de una fuente de electricidad, con una densidad de corriente necesaria para que se produzca el proceso de depósito.

Junto a este fenómeno está la **electrólisis**: supongamos que se establece un campo eléctrico debido a una diferencia de potencial ubicado entre los electrodos que se encuentran sumergidos en una solución de sal común (NaCl); al pasar una corriente eléctrica, habrá unos iones positivos que viajan en la misma dirección del campo y caen al electrodo positivo o **ánodo**, y otros iones negativos que viajarán en sentido opuesto al campo eléctrico y caerán en el electrodo negativo o **cátodo**, con lo que se ha dado una disociación de la molécula de cloruro de sodio; es decir:



En principio, supongamos que la molécula no tiene carga eléctrica pues la conforman cantidades iguales de cargas eléctricas positivas y negativas; al disociarse, las cargas lo hacen de forma proporcional a la unidad fundamental de la carga e ; es decir, habrá $Q^+ = ne$ y $Q^- = ne$, donde n es el número entero de la carga fundamental.

Después de un tiempo, cada electrodo tendrá un cierto número de cargas que define una masa, de tal modo que en cada electrodo hay: $M = Nm$, donde N es el número de iones y m la masa del ion relacionando; así, se tienen estas dos expresiones, que cuantifican la cantidad de material depositado:

$$\frac{Q}{M} = \frac{ne}{Nm}$$

5.4 Conservación de la carga

El principio de conservación de la carga, al igual que el de la masa en un nodo de conductores se manifiesta la conservación de la carga; en general, se debe entender que la carga contenida en una región disminuye si se presenta una corriente que sale a través de la superficie: esto es, al considerar una superficie esférica por donde van a pasar las cargas que se encuentran en su interior, de inmediato se genera una corriente, que se puede expresar como:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Además,

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Al combinarlas, se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ahora bien, como $Q = \rho V$, entonces, se puede decir que: $dQ = \rho dV$; por tanto, $Q = \iiint_V \rho dV$; al combinar estas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.5).$$

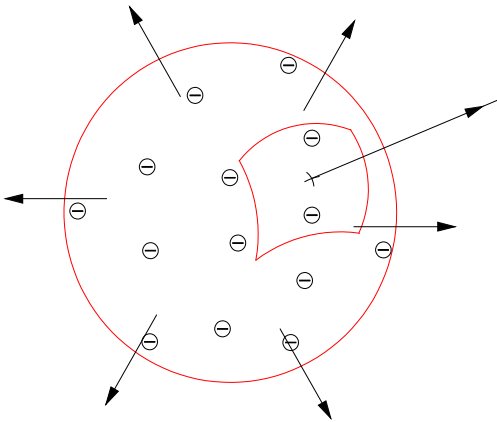


Fig. 5.5. Esquema de esfera que contiene N cargas.

Esta es la expresión de la conservación de la energía en forma de cálculo integral, cuyo significado es: la superficie S corresponde al volumen V contenido, es decir, se trata de la esfera de la Fig. 5.5, y el signo menos significa que a medida que la corriente aumenta en la superficie, la carga contenida en el volumen disminuye; por tanto, la variación de la densidad de carga volumétrica respecto al

tiempo es igual a la densidad de corriente a través de la superficie del volumen.

Ahora bien, según el Apéndice 4.6, Teorema de la Divergencia:

$$\iint_S J \cdot dS = \iiint_V \nabla \cdot J dV.$$

Al aplicarlo a la ecuación (5.5) encontrada, se tiene:

$$\iint_S J \cdot dS = \iiint_V \nabla \cdot J dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV.$$

Obsérvese que la integral de volumen tanto en el lado derecho como en el izquierdo es la misma; por tanto, la expresión queda:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.6).$$

Esta es la expresión para la conservación de la energía expresada en términos de cálculo diferencial, de modo que la divergencia de la densidad de corriente es igual a la variación de la densidad volumétrica de carga respecto al tiempo; también se puede decir que la densidad de la corriente que diverge es igual a la disminución de la carga concentrada en el volumen a medida que pasa el tiempo.

Cuando la densidad volumétrica de carga se mantiene constante, entonces $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; por tanto, el otro término queda: $\nabla \cdot J = 0$. Esto ocurre cuando no hay pérdida de energía en un nodo donde se distribuye la energía por los filamentos o conductores; es decir, la corriente se expresaría como: $\sum_{i=1}^n I = 0$, algo que se conoce con el nombre de Ley de Kirchhoff, que se verá luego.

5.5 Ley de Ohm

Cuando la corriente que circula por un conductor sea de cobre, aluminio u otro conductor, siempre tendrá una caída de potencial así: $I \propto \Delta V$; es decir, hay una proporcionalidad que, para expresarla en términos de igualdad, habrá que poner una constante de proporcionalidad; esto es:

$$V = RI \quad (5.7),$$

donde R , constante de proporcionalidad, aquí se denomina resistencia, que se puede expresar como: $R = \frac{V}{I}$, cuyas unidades son:

$$[R] = \left[\frac{\text{voltios}}{\text{Amperios}} \right] = [\text{Ohmios}] = \Omega.$$

Como su nombre lo indica, la resistencia es algo que se opone al paso de la corriente; en otras palabras, el material se resiste a que pasen cargas eléctricas; por tanto, esta resistencia depende de la longitud del conductor: entre más largo, mayor será la resistencia e inversamente proporcional al área por donde va a circular; o sea, entre mayor sea la corriente, exige mayor área del conductor. Por otra parte, el material es fundamental; no todos los metales son buenos conductores; esta propiedad se denomina conductividad, cuya cantidad inversa será la resistividad del material. A partir de esto, se puede expresar que la resistencia es:

$$R = \gamma \frac{l}{S} \quad (5.8).$$

De acuerdo con la conductividad o resistividad, se tiene esta clasificación de los materiales, como se muestra en la Tabla 5.1:

Tabla 5.1. Listado de materiales con su conductividad y resistividad.

Conductor	Símbolo	Conductividad	Resistividad
Plata	Ag	$6.8 \times 10^7 (\Omega^{-1}m^{-1})$	$1.47 \times 10^{-8} (\Omega m)$
Cobre	Cu	5.8	1.72
Oro	Au	4.1	2.44
Aluminio	Al	3.64	2.75
Wolframio	W	1.90	5.25
Acero	Acero	0.50	20
Plomo	Pb	0.45	22
Mercurio	Hg	0.11	95

Como se puede ver en la Tabla 5.1, el mejor conductor es la plata, seguido del cobre y del oro; en el mercado cotidiano, este tipo de conductores no se encuentran debido al costo elevado; por tanto, lo más usual es el cobre y el aluminio y, como tal, de acuerdo a los valores, hay una pérdida por el hecho de no ser el mejor conductor; en el caso de las líneas de transmisión nacional, son de aluminio, y en casos específicos, en las plantas de distribución, puede haber pequeñas líneas de cobre. De acuerdo con esto, cabe la pregunta: ¿qué lleva a que fueran buenos o malos conductores?

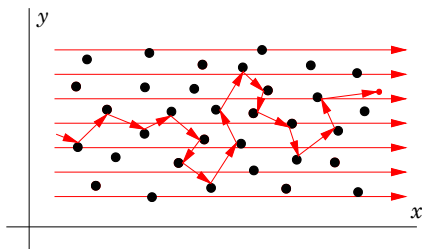


Fig. 5.6. Movimiento de cargas por una red cristalina de un conductor.

En la Fig. 5.6, se tiene un esquema aproximado de una red de átomos de un material conductor por el que viajan cargas eléctricas libres que, en este caso, serán los electrones libres. En estas cargas, con la presencia de una diferencia de potencial, entre los extremos del conductor se mueven debido al campo eléctrico, pero, en dicho

movimiento, las cargas chocan con los átomos mucho más grandes que se encuentran de forma estacionaria en la red; de modo que pensar en el movimiento de una carga como lo que se puede ver en la Fig. 5.6 es demasiado intrincado, y claro que viaja, pero, para lograr establecer un milímetro de recorrido gastaría mucho tiempo; sin embargo, hay un recorrido característico libre de choques; a este recorrido se lo denomina **camino libre medio**, característico para cada material. Ahora bien, este camino libre medio se altera con la temperatura del material, pues entre mayor fuese la energía, los átomos vibran más; por tanto, es como si se hincharan, lo que aumenta el espacio circundante y el camino libre medio disminuye; lo que macroscópicamente se muestra es que el material adquiere más resistividad. Más aún, el excesivo golpe de los electrones con los átomos del material incrementa la temperatura; por ende, cabe preguntarse ¿qué pasa si el material tiene sus átomos quietos, que no vibran; es decir, el material está totalmente frío a $0\text{ }^{\circ}\text{K}$.

En este caso, el camino libre medio se incrementa de forma muy notoria y las cargas pueden viajar sin mayores tropezones; en este caso, se está frente a un fenómeno de **superconductividad**; en la técnica moderna se tienen materiales que lo logran antes de llegar al cero absoluto; el reto de los científicos a nivel mundial es tener un material que presentara esta propiedad a temperatura ambiente.

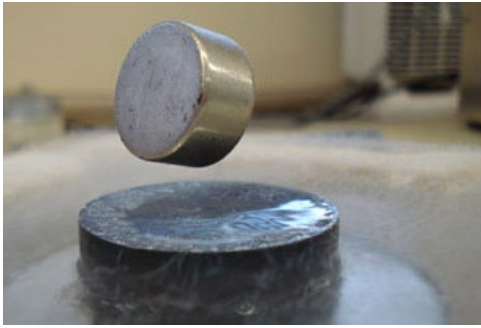


Fig. 5.7. Efecto de levitación o de Meissner.
Fuente: Ingenieros.es (s.f).

En 1986, los alemanes Karl Alexander Müller y Johannes Gerg Bednorz descubrieron que la superconductividad se lograba a temperaturas altas, en referencia al cero absoluto, con materiales cerámicos, lo que les valió para obtener el Premio Nobel de Física en 1987.

El efecto de levitación de un objeto de cerámica sobre un imán a temperatura muy baja, como se puede ver en la Fig. 5.7, se conoce con el nombre de efecto Meissner; cuando se estudie el concepto de campo magnético, volveremos sobre este efecto.

Por otra parte, para una zona pequeña de un conductor, la Ley de Ohm se expresa como: $V = IR$. Además, la resistencia se expresa como: $R = \gamma \frac{l}{S}$; al remplazar en la fórmula de la Ley de Ohm, se tiene: $V = I\gamma \frac{l}{S}$, lo que se puede escribir como: $\frac{V}{l} = \gamma \frac{I}{S}$. Ahora bien, como $E = \frac{V}{l}$ y $J = \frac{I}{S}$, entonces la Ley de Ohm queda:

$$E = \gamma J \quad (5.9).$$

Y si se ubica a la conductividad como el inverso de la resistividad, se tiene:

$$E = \frac{1}{\sigma} J.$$

Por tanto, se puede escribir como:

$$J = \sigma E \quad (5.10).$$

Esta es la expresión de la Ley de Ohm en forma vectorial en términos de la conductividad.

Al comparar con (5.4) $J = \frac{ne^2\tau}{m} E$, se tiene que la conductividad corresponde a:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Esta conductividad es propia de las características del material, independiente del campo aplicado al conductor y depende del número de electrones libres, del tiempo libre medio y es inversamente proporcional a la masa.

Ahora se tiene una imagen de la corriente eléctrica como un gas de electrones, que se mueven y atropellan con los átomos de la red cristalina del conductor y generan un incremento en la energía interna, manifestación macroscópica como una elevación de la temperatura del conductor.

En el caso del cobre, se puede calcular el tiempo libre medio, con los siguientes datos: $\sigma = 5.7 \times 10^7$; $n = 8.4 \times \frac{10^{28} \text{partículas}}{\text{m}^3}$; $m = 9 \times 10^{-31} \text{kg}$ y $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$.

Con estos datos se puede encontrar el tiempo de relajación:

$$\tau = \frac{\sigma m}{ne^2}$$

$$\tau = \frac{(5.7 \times 10^7)(9 \times 10^{-31})}{(8.4 \times 10^{28})(1.6 \times 10^{-19})^2}$$

Al final, se tiene:

$$\tau = 2.4 \times 10^{-14} \text{s}.$$

Ejemplos

1. ¿Qué resistencia tiene un cable de cobre cuya longitud es de 50m y calibre 16 ?

Solución.

Cuando se trata de calibres de alambre, se expresan en AWG, lo que significa: American Wire Gauge. En español, es el calibre de alambres redondos de conducción eléctrica para uso residencial no ferrosos, utilizado desde 1857. De modo que un calibre AWG16 equivale a 1.31mm^2 , como se puede ver en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2. Calibres de alambre conductores.

Calibre A.W.G.	Diámetro mm	Sección mm^2
0000	11.58	105.32
000	10.38	84.62
00	9.36	68.81
0	8.25	53.46
2	6.54	33.59
4	5.18	21.07
6	4.11	13.27

8	3.26	8.35
10	2.59	5.27
12	2.05	3.30
14	1.62	2.06
16	1.29	1.31
18	1.02	0.82

Fuente: <https://unicrom.com/conductores-electricos/>

Por otra parte, la resistividad del cobre es: $\gamma = 1,72 \times 10^{-8}$; entonces, al reemplazar estos valores, se tiene:

$$R = \gamma \frac{l}{S}$$

$$R = (1.72 \times 10^{-8} \Omega m) \frac{50m}{1.31 \times 10^{-6} m^2}$$

$$R = 66 \times 10^{-2} \Omega$$

$$R = 0.66 \Omega$$

2. ¿Qué calibre debe tener una extensión de cobre de $100m$ de longitud, si el material tiene una resistencia de $0,5 \Omega$?

Solución

En este caso, es muy claro que se debe despejar la sección transversal del alambre; esto es:

$$S = \gamma \frac{l}{R}$$

Al reemplazar valores, se tiene:

$$S = (1.7 \times 10^{-8} \Omega m) \frac{100m}{0.5 \Omega}$$

$$S = 3.4 mm^2$$

El calibre, que comercialmente se compara con la Tabla de calibres, se acerca a un calibre *12*.

5.6 Resistencia y codificación de colores



Fig. 5.8. Símbolo de una resistencia.

Todos los artefactos eléctricos, llámense televisor, estufa, secadora de cabellos, tienen una resistencia propia del artefacto, la que se denomina resistencia interna y, como todas las resistencias, se mide en

ohmios (véase Fig. 5.8); se debe tener en cuenta que la resistencia interna puede variar con la temperatura del aparato; en el caso de una estufa, la resistencia aumenta cuando aumenta la temperatura; sin embargo, los fabricantes hacen bien sus cálculos para que este dato no varíe demasiado, pero el valor que se entrega en la ficha técnica siempre es un promedio.

La resistencia en la electrónica.

Tabla 5.3. Colores, con su correspondiente codificación

Color	Valor
Negro	0
Marrón o café	1
Rojo	2
Naranja	3
Amarillo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Gris	8
Blanco	9
Dorado	5%
Plateado	10%

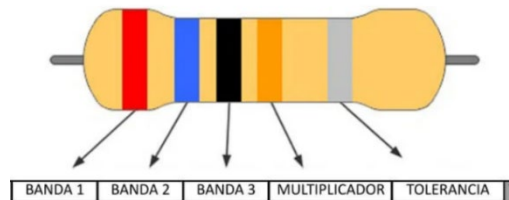


Fig. 5.9. Banda de colores de un resistor.

En la ingeniería electrónica, se encuentran elementos resistivos de todos los tamaños y valores que, en los circuitos, llevan a lo que la mente humana diseñó que hicieran; en los esquemas y planos eléctricos y electrónicos, simbólicamente se representa como un camino muy sinuoso, que representa la dificultad que hay para que circule la corriente eléctrica; para definir el valor, se ha elaborado una gama de colores que representan valores, como se muestra en la Tabla 5.3; los dos últimos colores se presentan en porcentajes, lo que indica el nivel de tolerancia que tiene la resistencia. De modo que el resistor viene con una codificación de colores; como se muestra en la Fig. 5.9, el resistor tiene 5 bandas de colores; el último será la banda de color dorado o plateado, o carecer de ella. La primera banda corresponde al primer dígito, la segunda y tercera son dígitos, mientras que la cuarta banda es el multiplicador o factor; esto es:

Rojo	2	Azul	6	Violeta	7	Naranja	3	Plateado	10%
------	---	------	---	---------	---	---------	---	----------	-----

Por tanto, el valor de la resistencia es:

$$R = 267 \times 1000$$

$$R = 267000\Omega$$

El color plateado tiene una tolerancia de 10 %, lo que significa que el valor del resistor puede estar con el 10% por arriba o por debajo; esto es:

$$\text{porcentaje} = 267000 \times 0.1 = 26700$$

$$\text{Porcentaje por debajo} = 267000 - 26700 = 240300$$

$$\text{Porcentaje por encima} = 267000 + 26700 = 293700$$

Rango de tolerancia = $[240300 < R < 293700]$.

Esto quiere decir que el valor de la resistencia está entre los dos valores que conforman el rango.

Si los valores anteriores corresponden a una resistencia, pero con banda dorada, entonces la tolerancia es del 5%; por tanto, el rango será:

$$\text{porcentaje} = 267000 \times 0.05 = 13350$$

$$\text{Porcentaje por debajo} = 267000 - 13350 = 253650$$

$$\text{Porcentaje por encima} = 267000 + 13350 = 280350$$

Rango de tolerancia = $[253650 < R < 280350]$.

Como se puede ver en este caso, el rango es mucho más estrecho, lo que quiere decir que la resistencia es más precisa para circuitos de mayor exigencia y exactitud.

5.7 Asociación de resistencias.

La asociación de resistencias se refiere a cómo se deben o pueden conectar las resistencias en un circuito; las hay de dos tipos: en serie y en paralelo.

Asociación en serie

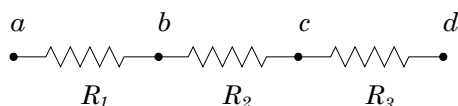


Fig. 5.10. Asociación de resistencias en serie.

Este tipo de asociación de resistencias significa que se debe conectar una en seguida de otra; así, las que se necesite (véase Fig. 5.10). Por tanto, se puede decir que la diferencia de potencial de todo el

grupo es la suma de la caída de potencial en cada resistencia; esto es:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}.$$

Al aplicar la Ley de Ohm, se tiene:

$$IR_{ad} = IR_{ab} + IR_{bc} + IR_{cd},$$

o lo que es lo mismo:

$$IR_T = IR_1 + IR_2 + IR_3.$$

Como se ve, la corriente es la misma que pasa por todas las resistencias; por tanto, se tiene:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3.$$

En general, cuando se trata de muchas resistencias, se puede expresar como:

$$R_T = \sum_{i=1}^n r_i.$$

O sea que, en este caso, el valor de la resistencia total o equivalente es la suma de las demás resistencias.

Asociación en paralelo

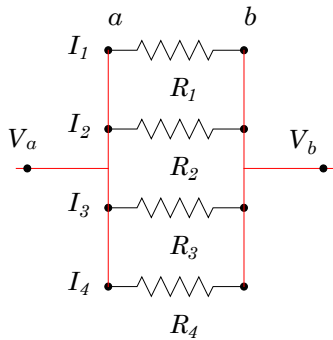


Fig. 5.11. Asociación de resistencias en paralelo.

Este tipo de asociación de resistencias (Fig. 5.11) significa que a una misma diferencia de potencial se conectan todas las resistencias y, en cada nodo, hay una distribución de acuerdo con la Ley de conservación de la carga $\nabla \cdot J = 0$, lo que permite establecer que la corriente que llega se distribuye de forma equitativa según la Ley de Kirchoff es: $\sum_{i=1}^n I_i = 0$; por otra parte, la Ley de Ohm establece: $V_{ab} = IR$, de donde $I = \frac{V}{R}$; de acuerdo con la Ley de Kirchoff:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Al combinar con la ley de Ohm, se tiene:

$$\frac{V_{ab}}{R_T} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3} + \frac{V_{ab}}{R_4}.$$

Como se puede ver, todas las resistencias se someten a la misma diferencia de potencial; por tanto, queda:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

En general, esto se puede expresar como la suma de los inversos:

$$\frac{1}{R_T} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Ejemplos

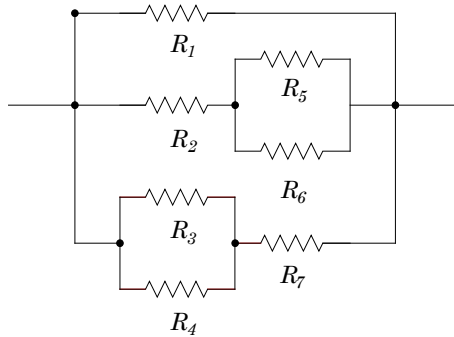


Fig. 5.12. Asociación de resistencias.

1. Resolver la siguiente asociación de resistencias (Fig. 5.12), que tienen estos valores:

R_1	=	12Ω	R_2	=	20
R_3	=	15	R_4	=	18
R_5	=	17	R_6	=	30
R_7	=	35			

Solución

Obsérvese que, en la Fig. 5.12, dentro de la asociación, hay pequeñas asociaciones en paralelo y en serie; se trata de resolver primero las que estén en paralelo o en serie, a partir de la facilidad que se tuviera; en este caso, se resolverán primero las que están en paralelo. Entonces:

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{18} = \frac{18 + 15}{270}$$

$$\frac{1}{R_8} = \frac{33}{270}$$

$$R_8 = 8.18\Omega$$

Ahora,

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{17} + \frac{1}{30} = \frac{30 + 17}{510}$$

$$\frac{1}{R_9} = \frac{47}{510}$$

$$R_9 = 10.8\Omega$$

Como se puede ver en la Fig. 5.13, en la nueva asociación de resistencias hay dos líneas en serie, lo que se resuelve de la siguiente forma: R_2 y R_9 están en serie y, por tanto, se efectúa la suma de modo directo:

$$R_{10} = R_2 + R_9.$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$R_{10} = 20 + 10.8$$

$$R_{10} = 30.8\Omega$$

Ahora, R_7 y R_8 también están en serie:

$$R_{11} = R_7 + R_8.$$

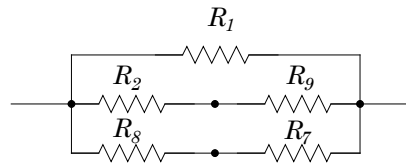


Fig. 5.13. Primera solución.

Al remplazar los valores, se tiene:

$$R_{11} = 8.18 + 35$$

$$R_{11} = 43.18\Omega$$

Ahora bien, han quedado tres resistencias en paralelo (Fig. 5.14), lo que se resuelve de una vez:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30.8} + \frac{1}{43.18}$$

$$\frac{1}{R_e} = 0.08 + 0.03 + 0.02$$

$$R_e = 7.51\Omega$$

Bueno, este es el valor de la resistencia equivalente, lo que significa que toda la asociación de resistencias puede remplazarse por una sola de valor 7.51Ω , como se ve en la Figura 5.15.

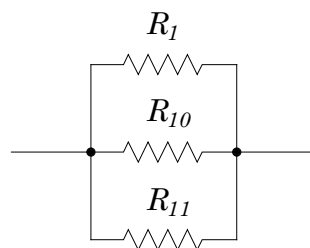


Fig. 5.14. Segunda y última solución.



Fig. 5.15. Resistencia equivalente.

2. Resolver la siguiente asociación de resistencias:

R_1	=	12Ω	R_2	=	20
R_3	=	15	R_4	=	7
R_5	=	18	R_6	=	25
R_7	=	16			

Solución

En la Fig. 5.16 se puede ver que hay dos asociaciones de resistencias en paralelo; por tanto, se iniciará con la resolución de estas dos asociaciones:

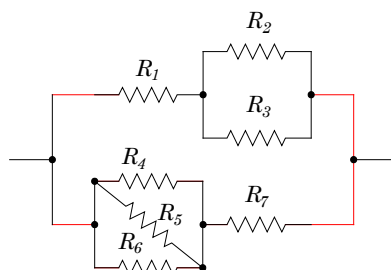


Fig. 5.16. Asociación de resistencias en serie y en paralelo.

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{18} + \frac{1}{25}$$

$$R_8 = 4.184\Omega$$

De igual forma con la segunda asociación:

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{20} + \frac{1}{15}$$

$$R_9 = 8.57\Omega$$

Con estos resultados, se tiene una nueva asociación (Fig. 5.17).

En esta nueva asociación, se observan dos grupos de resistencias en serie, con lo cual se tiene:

$$R_{10} = R_1 + R_9$$

$$R_{10} = 12 + 8.57$$

$$R_{10} = 20.57\Omega$$

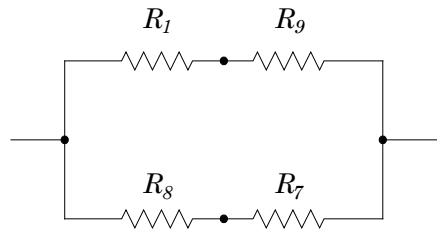


Fig. 5.17. Nueva asociación.

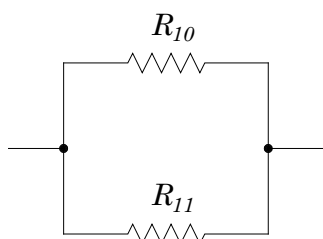
La segunda asociación es:

$$R_{11} = R_8 + R_7$$

$$R_{11} = 4.184 + 16$$

$$R_{11} = 20.184\Omega$$

Por último, se tiene una asociación de dos resistencias en paralelo (Fig. 5.18):



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{20.57} + \frac{1}{20.184}$$

$$R_e = 10.148\Omega$$

Fig. 5.18. Nueva asociación de dos resistencias.

Bueno, este es el valor de la resistencia equivalente.

3. Encontrar la resistencia equivalente de la asociación de la Fig. 5.19:

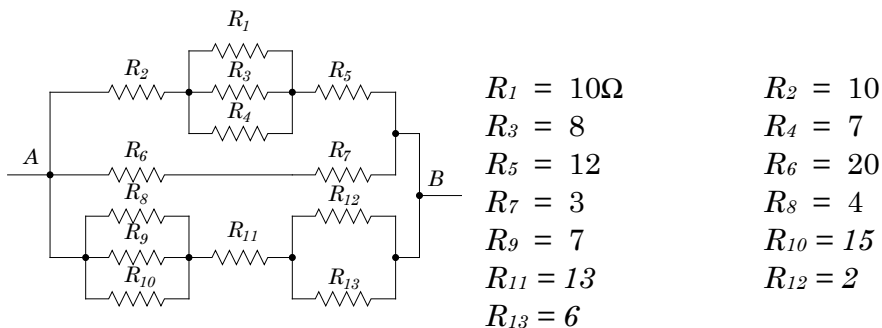


Fig. 5.19. Asociación de resistencia.

Solución

En la Fig. 5.19 se pueden ver cuatro asociaciones pequeñas, tres de ellas en paralelo y una en serie. Por tanto, se resuelve inicialmente en paralelo, en serie y en paralelo.

$$\frac{1}{R_{14}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\frac{1}{R_{14}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7}$$

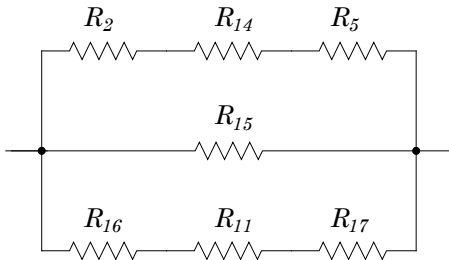
$$R_{14} = 2.7\Omega$$

En seguida, se resuelve la asociación que está en serie:

$$R_{15} = R_6 + R_7$$

$$R_{15} = 20 + 3$$

$$R_{15} = 23\Omega$$



Ahora, se resuelve la asociación en paralelo:

$$\frac{1}{R_{16}} = \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}}$$

$$\frac{1}{R_{16}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}$$

$$R_{16} = 2.19\Omega$$

Fig. 5.20. Asociación resultante de la primera ronda de soluciones.

Y en la última asociación de esta primera parte, se tiene:

$$\frac{1}{R_{17}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}}$$

$$\frac{1}{R_{17}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$R_{17} = 1.5\Omega$$

Con estos resultados se tiene la nueva asociación. En la Fig. 5.20 se puede ver como quedó al solucionar las cuatro asociaciones; en este caso, se tienen dos nuevas asociaciones en serie:

$$R_{18} = R_2 + R_{14} + R_5$$

$$R_{18} = 10 + 2.7 + 12$$

$$R_{18} = 24.7\Omega$$

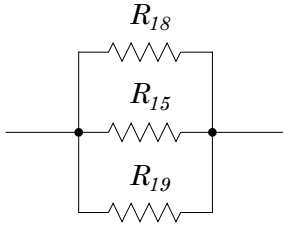
Y

$$R_{19} = R_{16} + R_{11} + R_{17}$$

$$R_{19} = 2.19 + 13 + 1.5$$

$$R_{19} = 16.69\Omega$$

Por último, la Fig. 5.21 muestra la última asociación, que se encuentra en paralelo; por tanto, la resistencia equivalente es:



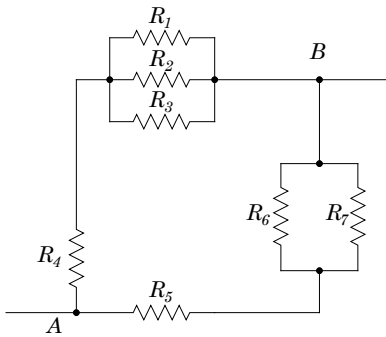
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{18}} + \frac{1}{R_{15}} + \frac{1}{R_{19}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{24.7} + \frac{1}{23} + \frac{1}{16.69}$$

$$R_e = 2.306\Omega$$

5.21. Última asociación.

Este es el resultado de la resistencia equivalente: significa que una resistencia de este valor reemplaza a toda la asociación.



4. Calcular la resistencia equivalente de la asociación de resistencias de la Fig. 5.22:

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 8$$

$$R_3 = 7$$

$$R_4 = 9$$

$$R_5 = 2$$

$$R_6 = 4$$

$$R_7 = 3$$

Fig. 5.22. Asociación de resistencia.

Solución.

Resolver en casa.

5.8 Ley de Joule y potencia eléctrica

Los múltiples golpes de las cargas sobre los átomos llevan a que aumentara la energía interna del material, lo que se manifiesta en un aumento de la temperatura del conductor; todo depende del propósito que se tuviera sobre el conductor: si se necesita para que se caliente o simplemente es un efecto casual por la transmisión de la energía eléctrica; en el primer caso, se está hablando de estufas, calentadores de agua, duchas, etc.; en el segundo caso, se trata de cables que pueden calentarse y producir accidentes por sobrecarga eléctrica; en fin: todo esto

es una manifestación de la energía eléctrica en términos de Potencia, con la cual se puede efectuar trabajo. Esto es:

La corriente eléctrica se define como $I = \frac{dQ}{dt}$ y la potencia mecánica como $P = \frac{dw}{dt}$, además, como el trabajo eléctrico se había definido como: $w = VQ$, entonces, al remplazar en la ecuación de la potencia, se tiene:

$$P = \frac{v dQ}{dt}.$$

Con lo cual, se tiene:

$$P = VI \quad (5.8).$$

De modo que la potencia es el producto del potencial eléctrico por la corriente que circula; ahora bien, se puede combinar con la Ley de Ohm: $V = IR$, con lo cual se tiene:

$$P = I^2 R$$

$$P = \frac{v^2}{R}$$

Cualquiera de estas dos expresiones se puede utilizar, de acuerdo a las circunstancias que se tuvieran y las unidades serán vatios simbolizado como wtt

Ejemplo

1. ¿Cuánta energía se consume en una estufa por la cual circula una corriente de $15Am$ a una diferencia de potencial de $12 Vol$?

Solución

Decir cuánta energía se consume o cuál es la potencia disipada es lo mismo; por tanto, es calcular el potencial eléctrico; así: $P = VI$; al remplazar, se tiene:

$$P = (12Vol)(15Am).$$

De modo que la potencia es:

$$P = 1800wtt.$$

2. Las especificaciones de un electrodoméstico son: resistencia interna 144Ω y $120Vol$. ¿Cuál es la potencia del electrodoméstico?

Solución

Si los datos entregados son resistencia y voltaje, la potencia se la deberá calcular con la expresión más apropiada:

$$P = \frac{v^2}{R}.$$

Por tanto, al remplazar los datos, se tiene:

$$P = \frac{(120Vol)^2}{144\Omega}$$
$$P = 100vatios$$

3. En las especificaciones de un motor industrial, se tiene la siguiente información: potencia de $1.5 Hp$, voltaje de trabajo $440 voltios$. ¿Cuál es la resistencia interna del motor?

Solución

En primer lugar, un caballo de fuerza (Hp) tiene la siguiente equivalencia: $1 Hp = 745.7 vatios$; por tanto 1.5 serán $1118.55 vatios$; con estos datos, al remplazar en la ecuación de potencia, se tiene:

$$R = \frac{v^2}{P}$$
$$R = \frac{(440vol)^2}{1118.55Vatios}$$
$$R = 173.1\Omega$$

5.9 Capacidad instalada

Se define como la cantidad de electrodomésticos que consumen energía en una residencia, edificio o local. Cuando se piensa a futuro, se considera cuáles serán los electrodomésticos mínimos que se fueran a conectar en una residencia; esta capacidad instalada la da el perito, cuando se solicita una acometida a una vivienda; por tanto, es un parámetro netamente técnico que determina la capacidad de un usuario para consumir energía. Por ejemplo, en una vivienda de interés social, en el momento de establecer el peritaje, se escribe que (Tabla 5.4):

Tabla 5.4. Listado de una capacidad instalada.

Item	Elemento	Can	Pot	Und	S. Total
1	Bombillas	4	100	W	400
2	Televisores	4	300	W	1200
3	Estufa	1	2500	W	2500
4	Licuadaora	1	800	W	800
5	Plancha	1	1500	W	1500
6	Secador de cabello	1	500	W	500
7	Ducha eléctrica	1	1800	W	1800

Potencia instalada 8700w, que equivalen a 8.7 Kw (kilovatios).

Con base en la instalación, se estratifica a la residencia; por lo general, las viviendas de un sector determinado tienen similar instalación; por tanto, al sector se le define el estrato. Ahora bien, la empresa distribuidora de energía define los calibres de los alambres de la acometida de acuerdo a la máxima capacidad instalada; si, con el tiempo, aumentan los electrodomésticos y se sobrepasa la capacidad instalada, es responsabilidad del propietario de la vivienda y lo que se debería hacer es solicitar otra acometida de mayor capacidad, para que no hubiera un recalentamiento de la acometida.

En general, la potencia se define como: $P = \frac{w}{t}$, y la potencia eléctrica es: $P = IV$; entonces, el trabajo eléctrico es: $w = Pt$; es decir:

$$w = IVt,$$

que se mide en vatios-hora; como el consumo es grande, entonces se acostumbra medir en kilovatios hora.

Ejemplo

En una residencia, de acuerdo a la capacidad instalada, la empresa comercializadora de energía cobra a 120 pesos el kilovatio hora. ¿Cuánto se paga por el trabajo eléctrico para que funcione una plancha de 1500w durante 1 hora diaria y una estufa de 2500w que trabaja 6 horas diarias?

Solución

Como la plancha trabaja una hora diaria, entonces, en el mes son 30 horas; por tanto, el costo al mes es:

$$\text{Costo} = 1.5kw)(30h)(120\text{pesos})$$

$$\text{Costo} = \$5400$$

Para la estufa, son 6 horas diarias; por tanto, al mes, son 180 horas, lo que significa:

$$\text{Costo} = (2.5\text{kw})(180\text{h})(\$120)$$

$$\text{Costo} = \$54000$$

Por tanto, por el trabajo eléctrico de los dos electrodomésticos, se debe pagar un total de

\$ 59400.

5.10 Tipos de corrientes

Desde cuando el físico italiano Alessandro Volta (1745-1827) inventó la pila voltaica, lograda con el apilamiento de discos de zinc y cobre separados por cartón impregnado de un electrolítico, vinieron más invenciones con el mismo esquema e intercambio de elementos químicos; así surgió la pila, aparato que pudo pasar y mantener electricidad en conductores.

Corriente continua.

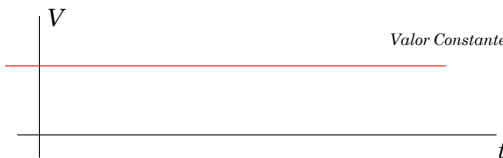


Fig. 5.23. Función de la corriente eléctrica en voltaje en función del tiempo.

En la Fig. 5.23 se puede ver cómo el voltaje se mantiene constante a medida que pasa el tiempo; esta es la principal característica de una pila o batería, en que, de acuerdo con la Ley de Ohm $V = IR$; mientras haya una resistencia

de por medio, se genera una corriente I con igual característica que el potencial; a esto se lo denomina corriente directa, se la simboliza como C.D. y, por supuesto, se aplica la ley de Ohm, y potencia eléctrica igual a como se las ha establecido.

Las primeras redes eléctricas que se extendieron en las ciudades europeas, norteamericanas, en Latinoamérica, fue Argentina y parte del Brasil, correspondían a líneas con corriente continua, utilizadas para alumbrado público; luego se introdujo a las industrias y posteriormente a las residencias; el alumbrado se hacía con lámparas de arco; así que, las

primeras centrales eléctricas producían corriente directa para el alumbrado. Una desventaja que se presentaba era la caída de potencial cuando las líneas eran muy largas. Además, en este tipo de corriente, se debe tener en cuenta que siempre hay dos líneas: una positiva y la otra negativa.

Corriente alterna.

Después de la Ley de Faraday, que indicaba cómo se puede obtener una diferencia de potencial en los terminales de una espira de un conductor cuando se mueve delante de un campo magnético (Ley de inducción electromagnética), los investigadores iniciaron la búsqueda para mejorar este principio extraordinario; este tipo de corriente eléctrica se logró obtener mediante unas espiras que rotaran frente a un campo magnético para provocar una fuerza electromotriz (fem), en 1860, el italiano Antonio Pacinotti ensambló el primer prototipo de motor; la máquina lograba convertir la energía mecánica en un flujo de electrones con movimiento continuo: era un **dinamo**; en poco tiempo, se dieron cuenta que la dinamo era reversible; es decir, al ponerle corriente se convertía en una máquina que podía girar; así surgió el primer motor de la Historia.

Por otra parte, sin realizar armaduras y conexiones complicadas, también se lograba generar corriente desde unas espiras rectangulares que giran frente a un campo magnético uniforme, solo que este flujo de electrones tiene la principal característica de ser oscilatorio; es decir, surgió la corriente alterna, y el dispositivo fue el alternador.

La nueva distribución de la corriente alterna se le debe a Nikola Tesla, en 1887, después de construir su motor de inducción eléctrica, cuyo funcionamiento se lograba con energía eléctrica alterna; de igual forma, podía funcionar como generador de corriente alterna; para entonces, Tesla trabajaba en los laboratorios de Thomas Alva Edison.

La distribución de la corriente continua a grandes distancias presentaba el inconveniente del calentamiento del conductor y disipación de la energía; en cambio, en la corriente alterna se puede elevar el potencial y llevarla a grandes distancias sin pérdida significativa, lo que reduce drásticamente los costos de distribución; lo único que se necesitaba era el uso del transformador (cuyo funcionamiento se explicará en su momento), que permite elevar y bajar el potencial y la corriente.

Después de que Edison se opusiera a la comercialización de la energía alterna, al final se impuso por muchas razones; hoy en día, en todos los países del mundo se comercializa la energía alterna.

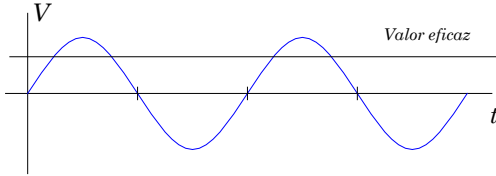


Fig. 5.24. Función sinusoidal para la corriente alterna.

Así, la principal característica de la energía eléctrica alterna es como se muestra en la Fig. 5.24; es decir, es una función sinusoidal perfecta, cuya frecuencia es de 60Hz , un valor eficaz de 120 voltios y los conductores que la transmiten

cambian de polaridad 60 veces en un solo segundo; este es el valor que hoy en día se maneja en todo el mundo.

De modo que el voltaje se representa por: $V = V_0 \text{Sen}(wt + \alpha)$ y la corriente se representa por: $I = I_0 \text{Sen}(wt + \alpha)$.

Valor eficaz.

Ya fuese en la tensión o potencial eléctrico o corriente, el valor eficaz se define como el valor cuadrático medio de una magnitud eléctrica alterna; se lo denota como RMS (del inglés: *root mean square*); también se establece una comparación con la corriente eléctrica continua; es decir, que tanto C.D. y C. A. producen un calentamiento igual sobre una resistencia por la que circula la corriente. Matemáticamente, se lo puede calcular como:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^T i^2(t) dt}.$$

Y de forma análoga para la tensión o el potencial eléctrico:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^T v^2(t) dt}.$$

Valor pico a pico.

Es el valor de la tensión o potencial eléctrico o de la corriente, medido desde el pico mínimo hasta el pico máximo de la señal alterna; tal como se puede ver en la Fig. 5.24, estos valores generalmente se toman en cuenta en cálculos de electrónica.

5.11 Tipos de distribución eléctrica.

La distribución moderna de la electricidad se clasifica por niveles, en función de la tensión de operaciones, de acuerdo con la siguiente nominación:

Nivel 1	Sistema con tensión menor a 1Kv
Nivel 2	Sistema con tensión mayor a 1Kv y menor a 30Kv
Nivel 3	Sistema con tensión mayor a 30Kv y menor a 57.5Kv
Nivel 4	Sistema con tensión mayor a 57.5 Kv y menor a 220Kv

De esta forma, las líneas de distribución, en todo Colombia, se pueden clasificar en uno de estos niveles; además, la interconexión que se llevó a cabo tras el apagón por un largo verano a comienzos de la década de los 90 lleva a que todo el potencial eléctrico se encuentre interconectado; así, se apoyan entre todas las hidroeléctricas para mantener una tensión de *120 voltios* en las viviendas.

En la distribución eléctrica se establece con base en la fase o línea viva de *120 voltios* y la línea de tierra, lo que genera las siguientes acometidas o circuitos:

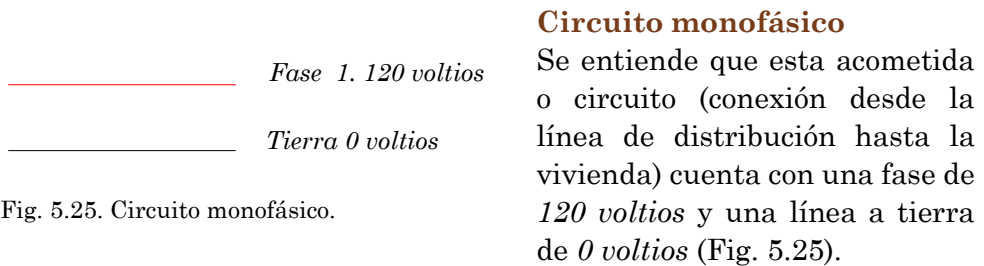
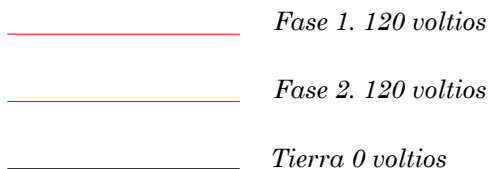


Fig. 5.25. Circuito monofásico.

Se utiliza en la mayoría de las distribuciones de viviendas de interés social, a la que se puede conectar cualquier electrodoméstico que no necesite más de una fase.

Circuito bifásico



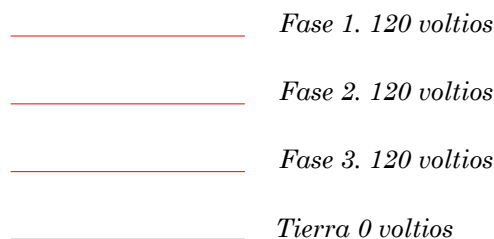
Es una acometida o circuito de dos fases de 120 voltios cada una y una tercera línea a tierra de 0 voltios (Fig. 5.26).

Se utiliza generalmente en las viviendas de estrato 3 y 4; por lo general, los electricistas

Fig. 5.26. Circuito bifásico.

distribuyen una fase para luminarias y otra fase para los tomacorrientes en los que se puede conectar cualquier electrodoméstico, incluidos aquellos que necesitan de dos fases, como estufas y hornos.

Circuito trifásico



Es una acometida o circuito de tres fases de 120 voltios cada una y una línea a tierra de 0 voltios (Fig. 5.27).

Se utiliza generalmente para estratos 5 y 6 y parques industriales y comerciales donde se necesita mucha energía para poder realizar

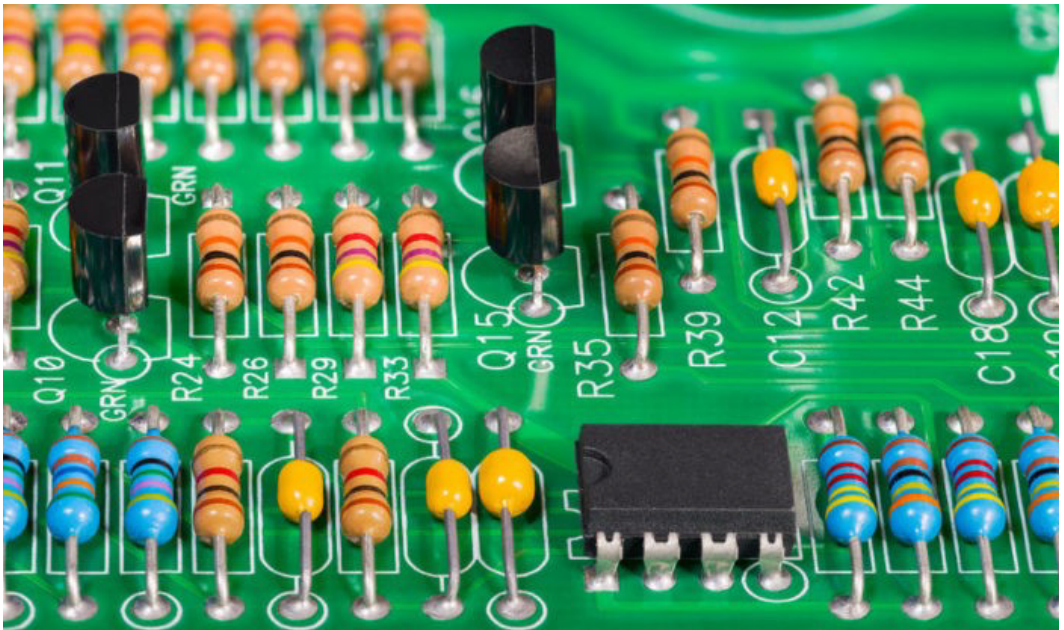
Fig. 5.27. Circuito trifásico.

trabajo mecánico, eléctrico u otro; se puede conectar cualquier electrodoméstico, incluidos aquellos que necesitan de tres fases, como motores trifásicos, hornos, estufas industriales, etc.

Capítulo 6



Circuitos resistivos básicos



Fuente: Kubeš (2019).

6.1 Circuitos

Un circuito es un camino cerrado que sigue la corriente eléctrica; al salir de un borne de la pila o batería, en su curso la corriente eléctrica se encontrará con innumerables aparatos que, en definitiva, se resumen en resistencias conectadas en serie, en paralelo y, en algunos casos, conectados de tal forma que no es ni en serie ni en paralelo, pero, al final, la corriente llega al otro borne de la batería y termina allí el circuito eléctrico.

Fuentes de poder

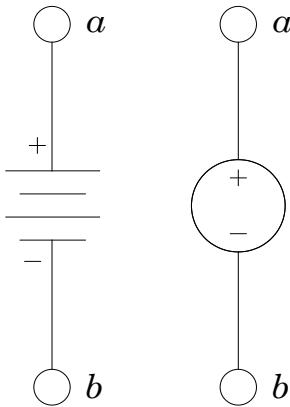


Fig. 6.1. Simbología de las fuentes de poder alterna y continua o directa.

Las fuentes forman parte fundamental de un circuito; sin ellas no habría circulación de corriente; pueden ser de corriente constante o de voltaje variable; es decir, las primeras definen una corriente directa y provienen de una batería o acumulador, mientras que las segundas definen una corriente alterna, donde la tensión o el potencial es variable con el tiempo; provienen de un generador movido por algún tipo de energía: hidráulica, térmica, eólica, etc. Para representarlas en un circuito eléctrico o electrónico, la simbología de estas fuentes se establece como se muestra en la Fig. 6.1.

En los dos tipos de fuentes, la corriente circula por ellas y deja en los extremos a y b , extremos polarizados para las baterías y acumuladores, o un extremo vivo o con fase de determinado voltaje para la fuente de corriente alterna.

Es conveniente aclarar que las fuentes pueden dar o recibir carga, razón por la cual se pueden interconectar en serie o en paralelo, como se verá luego, para mejorar o mantener el potencial eléctrico.

Por otra parte, también se debe aclarar que existe otro tipo de fuentes, donde la corriente varía con el tiempo y no necesariamente de forma sinusoidal; puede ser exponencial, discreta o aleatoria, etc.

6.2 Análisis de circuitos básicos tipo 1

Como la corriente, al pasar por cualquier electrodoméstico o aparato eléctrico en general cumple con la Ley de Ohm de acuerdo a la resistencia

interna del aparato, entonces se aplicará la Ley hasta donde fuese necesario, y su análisis se establecerá mediante algunos ejemplos.

Ejemplos

1. Una lámpara de 100Ω de resistencia interna se conecta a 110vol . ¿Cuál es la corriente que circula por la bombilla?

Solución.

Para responder al problema planteado es necesario elaborar un esquema y, en lo posible, un adecuado plano eléctrico que facilite ver las variables que se establecen en el problema.

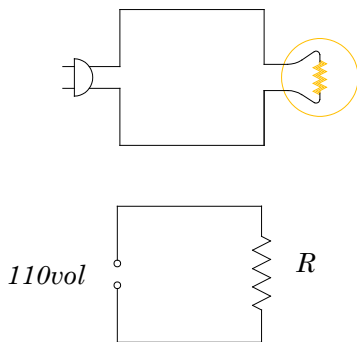


Fig. 6.2. Esquema y plano eléctrico.

En la Fig. 6.2 se pueden ver un esquema y un plano básico del asunto en referencia. En el plano se puede apreciar que la bombilla se ha remplazado por una resistencia; si se está familiarizado con este tipo de simbología es mucho más fácil; además, las ecuaciones a utilizar son para corriente continua; según la Ley de Ohm:

$$V = IR,$$

con lo cual se puede calcular la corriente que circula por la bombilla:

$$I = \frac{V}{R}$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$I = \frac{110\text{vol}}{100\Omega}$$

$$I = 1.1\text{Am}$$

De modo que la corriente que circula por la resistencia es de 1.1Am .

2. Con los datos del ejemplo previo, calcular la potencia que se disipa en la resistencia.

Solución.

Como la ecuación de la potencia eléctrica es:

$$P = IV$$

$$P = (1.1Am)(110vol)$$

$$P = 121vatios$$

3. Se tiene una extensión formada por un alambre de sección transversal $1mm^2$ y una resistividad de $7 \times 10^{-6}\Omega m$. ¿Qué longitud debe tener para que circule una corriente de $2Am$ cuando se la conecta a una tensión de $140vol$?

Solución.

A partir de la definición de la resistencia: $R = \gamma \frac{l}{S}$, y la Ley de Ohm $V = IR$, al combinar, se tiene:

$$l = \frac{VS}{I\gamma}$$

Si se reemplazan los valores entregados en la información del ejemplo, se tiene:

$$I = \frac{(140vol)(10^{-3}m)^2}{(2Am)(7 \times 10^{-6}\Omega m)}$$

$$I = 10m \equiv 1000Cm$$

4. Por un aparato eléctrico, cuya resistencia interna es 10Ω , se conecta a una diferencia de potencial de $50vol$ durante $20sg$. ¿Qué cantidad de electricidad pasa por el aparato y cuál es la energía disipada?

Solución.

1) Según la Ley de Ohm: $V = IR$ y, además, $I = \frac{Q}{t}$, al reemplazar la corriente, se tiene:

$$V = \frac{QR}{t}$$

Si se despeja Q y reemplazan los valores, se tiene:

$$Q = \frac{Vt}{R}$$

$$Q = \frac{(50\text{vol})(20\text{sg})}{10\Omega}$$

$$Q = 100C$$

2) Energía disipada. Como se trata de la potencia, por tanto,

$$P = IV.$$

Con los datos obtenidos, se tiene:

$$P = \frac{Q}{t}V$$

$$P = \frac{(100C)(50\text{vol})}{20\text{sg}}$$

$$P = 250\text{vatios}$$

5. En la etiqueta de un electrodoméstico se puede leer: $50W$ a 100vol . ¿Qué se debe hacer para conectarlo a una diferencia de potencial de 120vol ?

Solución.

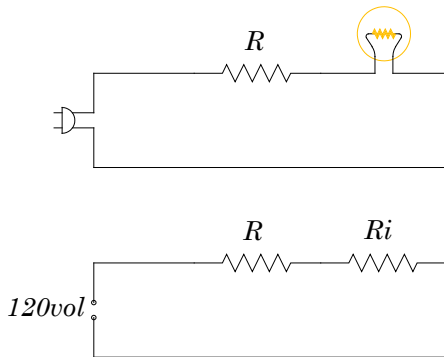


Fig. 6.3. Esquema y plano eléctrico.

Como hay una diferencia de potencial mayor a la que la especificación del aparato indica, de no tomarla en cuenta se corre el riesgo de dañar al aparato; por tanto, lo que se debe hacer es colocar una resistencia en serie, y ¿cuál debe ser el valor?

En la Fig. 6.3 se pueden ver el esquema y el plano; en este último, la resistencia interna del aparato (una lámpara) se simboliza como una resistencia cualquiera; por

tanto, con los valores entregados se puede calcular la resistencia interna del aparato.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$R = \frac{V^2}{P}$$

Al remplazar valores, se tiene:

$$R = \frac{(100vol)^2}{50w}$$

$$R = 200\Omega$$

Este valor es la resistencia interna del aparato; ahora, es necesario conocer la corriente que circula por el circuito. Para ello, a partir de la ecuación de la potencia:

$$P = IV$$

$$I = \frac{P}{V}$$

$$I = \frac{50W}{100vol}$$

$$I = 0.5Am$$

En el nuevo circuito también debe pasar la misma corriente; de lo contrario, habrá riesgo de daño; por tanto, según la Ley de Ohm, se tiene:

$$V = IR$$

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{120vol}{0.5Am}$$

$$R = 240\Omega$$

Este resultado significa que el valor total de la resistencia es de 240Ω , pero como están conectadas en serie, entonces: $R_e = R_i + R$, de donde se puede despejar R ; esto es:

$$R = R_e - R_i$$

$$R = 240 - 200$$

$$R = 40\Omega$$

Y este es el valor de la resistencia que se debe conectar en serie con el aparato y, en estas condiciones, no hay ningún riesgo de daño.

6. En el circuito de la Fig. 6.4, si $R_e = 11\Omega$, calcular el valor de la resistencia R si las dos resistencias son iguales; de igual forma, calcular la potencia disipada si la diferencia de potencial entre a y b es de 50vol .

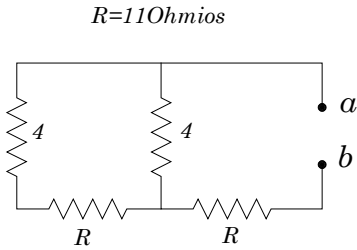


Fig. 6.4. Circuito donde hay dos resistencias de valor desconocido.

Solución.

1) En este circuito, las resistencias del lado izquierdo están en serie. Como $R = 4\Omega$, por tanto: $R_i = R + 4\Omega$, de modo que el nuevo circuito se representa en la Fig. 6.5.

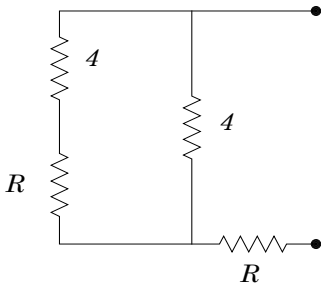


Fig. 6.5. Nuevo circuito a partir del circuito de la fig. 6.4.

Ahora, en este nuevo circuito, se puede ver que la resistencia R_i y $R = 4\Omega$ de la Fig. 6.6 está en paralelo; por tanto:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{4 + R} + \frac{1}{4}$$

Al resolver, se tiene el valor de R_2 :

$$R_2 = \frac{4(4+R)}{8+R}.$$

Ahora bien, en el circuito de la fig 6.7, se tiene que R ; por tanto, la resistencia equivalente será:

$$R_e = R_2 + R.$$

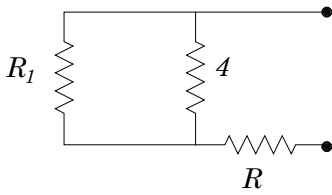


Fig. 6.6. Nuevo circuito a partir del circuito de la fig 6.5.

Al remplazar, se tiene:

$$R_e = \frac{4(4 + R)}{8 + R} + R$$

$$R_e = \frac{4(4 + R) + (8 + R)R}{8 + R}$$

Como en el ejemplo se da el valor de la resistencia equivalente, entonces:

$$11 = \frac{4(4 + R) + (8 + R)R}{8 + R}$$

$$4(4 + R) = (8 + R)(11 - R).$$

Al resolver todo, se tiene:

$$R^2 + R - 72 = 0.$$

Como se puede ver en la Fig. 6.7, se trata de una ecuación de segundo grado, por lo cual la solución se encuentra con la ecuación general de la ecuación cuadrática:

$$R_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al remplazar, se tendrán dos soluciones:

$$R_i = 8\Omega$$

$$R_{ii} = -9\Omega$$

En este caso, una resistencia negativa no tiene ningún significado; por tanto, la resistencia buscada es $R_i = 8\Omega$.

2) Como se conocen la resistencia equivalente y la diferencia de potencial, entonces:

$$P = \frac{v^2}{R_e}$$

$$P = \frac{(50\text{vol})^2}{11\Omega}$$

$$P = 227\text{vatios}$$

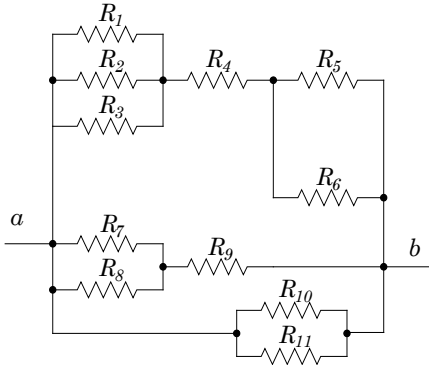


Fig. 6.8. Asociación de resistencias.

7. Calcular la potencia disipada en el circuito de la Fig. 6.8.

- | | |
|------------------|---------------|
| $R_1 = 8 \Omega$ | $R_7 = 12$ |
| $R_2 = 3$ | $R_8 = 7$ |
| $R_3 = 7$ | $R_9 = 9$ |
| $R_4 = 4$ | $R_{10} = 15$ |
| $R_5 = 1$ | $R_{11} = 18$ |
| $R_6 = 10$ | |

8. Calcular la potencia disipada en el circuito de la Fig. 6.9, si la corriente que pasa por el punto a es de 8.5 Am y los valores de las resistencias son:

- | | |
|------------------|---------------|
| $R_1 = 8 \Omega$ | $R_6 = 20$ |
| $R_2 = 10$ | $R_7 = 30$ |
| $R_3 = 12$ | $R_8 = 35$ |
| $R_4 = 10$ | $R_9 = 25$ |
| $R_5 = 15$ | $R_{10} = 40$ |

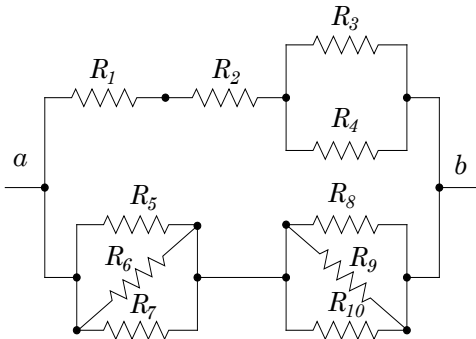


Fig. 6.9. Circuito con asociación de resistencias.

9. ¿Qué potencia se disipa cuando circula una corriente de 60 Am en el punto a , si cada resistencia del circuito es de 120Ω , dispuestas como se ve en la Fig. 6.9?

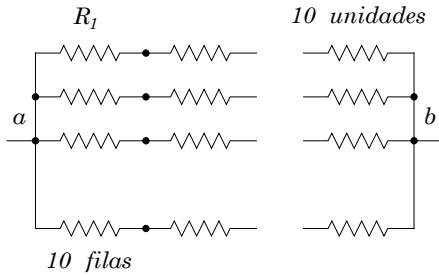


Fig. 6.10. Circuito con asociación de resistencias de igual nominación.

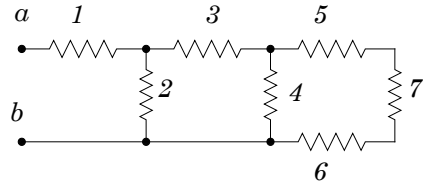


Fig. 6.11. Calcular la corriente en la resistencia 1.

10. Qué corriente circula por el punto a , si los extremos se conectan a una red de 120vol y el valor de las resistencias es:

$$\begin{aligned} R_1 &= 25\Omega & R_2 &= 50 \\ R_3 &= 18 & R_4 &= 30 \\ R_5 &= 45 & R_6 &= 60 \\ R_7 &= 35 \end{aligned}$$

11. Qué corriente podrá pasar por la resistencia 1 del circuito de la Fig. 6.11, si los extremos a y b se conectan a 12 vol , y el valor de las resistencias es:

$$R_1 = 25\Omega \quad R_2 = 30 \quad R_3 = 32 \quad R_4 = 28$$

6.3 Análisis de circuitos básicos tipo 2

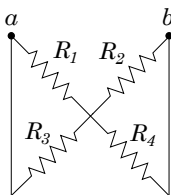


Fig. 6.12. circuito de tipo 2

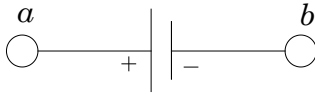
Las fuentes eléctricas, como pilas, baterías, acumuladores, producen electricidad directa y la corriente puede circular por los circuitos conectados a ellas, para producir energía mecánica, energía lumínica, calorífica, etc. Así que a estas fuentes que producen energía de forma continua se las denominará generadores o fuerza electromotriz; dentro de estas unidades, la energía química se transforma en energía eléctrica potencial por unidad de carga:

$$E = \frac{\Delta w}{\Delta Q}$$

También, se la denomina *fem.* (fuerza electromotriz), con igual significado de energía eléctrica por unidad de carga.



Cuando se tiene una ΔV , Diferencia de potencial eléctrico, se está al frente de una fuente de trabajo.

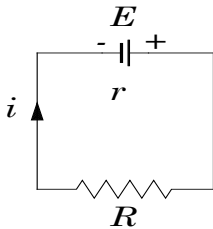


Por último, para tomar en cuenta las fuentes de poder, se las puede simbolizar como se ve en la Fig. 6.13; cuando el potencial es muy alto, se simbolizará con la primera imagen; de lo contrario, está bien con la segunda imagen. Por otra parte, las fuentes de poder también

Fig. 6.13. Esquemas de fuentes de poder o fuerza electromotriz.

tienen resistencia interna que, en el momento de efectuar el análisis, habrá de tomarse en cuenta. Para revisar estos conceptos, se hará mediante ejemplos, que pueden ilustrar muy bien.

Ejemplos



1. En el circuito de la Fig. 6.14, se trata de analizar cuál es la corriente que circula por la resistencia R , si la fuente de poder tiene un voltaje V y una resistencia interna r .

Fig. 6.14. Esquema de circuito básico con resistencia interna.

Solución.

Al seguir el sentido de la corriente, la resistencia R y la resistencia interna r están en serie; por tanto, hay una resistencia equivalente o resultante:

$$R_e = R + r.$$

Sobre la pregunta, ¿cuál es la corriente?, se aplica la Ley de Ohm:

$$V = IR,$$

de donde se tiene:

$$I = \frac{V}{R + r}$$

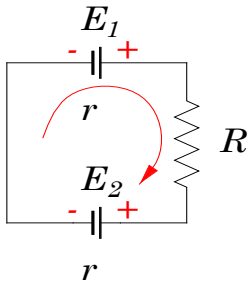


Fig. 6.15. Esquema de circuito con dos fuentes y una resistencia.

2. En el circuito de la Fig. 6.15, se tiene un aparato eléctrico cuya resistencia es de $R=10\ \Omega$, al que se le conectan dos fuentes eléctricas: un generador de $24\ \text{vol}$ y un receptor de $18\ \text{vol}$, las dos fuentes con resistencia interna de: $r_1 = 5\ \Omega$ y $r_2 = 3\ \Omega$. ¿Cuál es la corriente que circula por el aparato eléctrico?

Solución.

De acuerdo con la Ley de Ohm, se tiene:

$$V = IR.$$

Al observar el sentido de la corriente, en la Fig. 6.15, se tiene que las fuentes están en serie con la resistencia del aparato eléctrico y, por tanto, se tiene:

$$V_1 - V_2 = I(R + r_1 + r_2).$$

Si se despeja la corriente, se tiene:

$$I = \frac{V - V'}{R + r_1 + r_2}$$

Al remplazar los valores entregados en el ejemplo, se tiene:

$$I = \frac{(18 - 24)\text{vol}}{(10 + 5 + 3)\Omega}$$

$$I = -0.33\text{Am}$$

El signo menos se debe a que el sentido de la corriente es lo contrario del que se había supuesto.

3. En la Fig. 6.16, se puede ver un circuito donde hay cuatro fuentes de poder. ¿Cuál es la corriente que circula por el circuito?

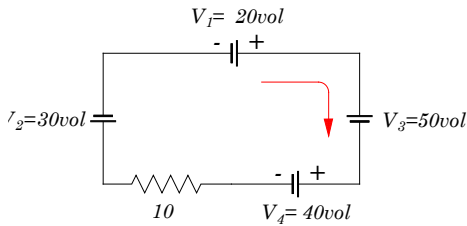


Fig. 6.16. Esquema de un circuito con más de dos fuentes de poder.

Solución.

Cuando hay más de dos fuentes de poder, en ocasiones es muy difícil definir el sentido de la corriente, por lo que se asume un sentido arbitrario, con el que se realiza el análisis; al final, habrá un signo positivo o negativo que define realmente el verdadero sentido de la corriente.

Ahora bien: al considerar que las fuentes de poder de 20 y 40 volts son los emisores y las fuentes de 30 y 50 volts son los receptores, al aplicar la Ley de Ohm, se tiene:

$$V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = IR.$$

Por tanto, la corriente que circula es:

$$I = \frac{V_1 - V_2 - V_3 + V_4}{R}.$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$I = \frac{(20 - 30 - 50 + 40)vol}{10 \Omega}$$

$$I = \frac{-20vol}{10\Omega}$$

$$I = -2Am$$

Nuevamente, el signo menos indica que el sentido de la corriente es contrario al que se había supuesto.

4. En la Fig. 6.17 se tiene un circuito con dos resistencias en paralelo; la corriente generada por la fuente debe circular por las dos resistencias, lo que al final se convierte en la resistencia equivalente; de modo que: ¿cuál será la corriente que circula por la resistencia equivalente?

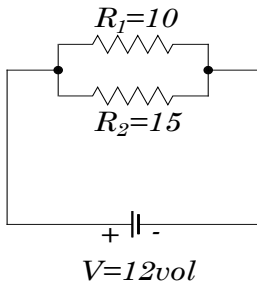


Fig. 6.17. Esquema de circuito con dos resistencias en paralelo.

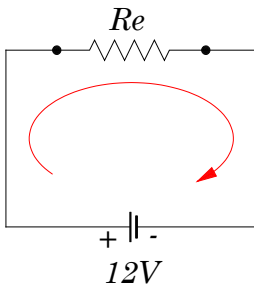


Fig. 6.18. Nuevo esquema eléctrico respecto al de la Fig. 6.17.

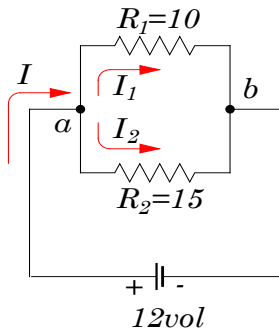


Fig. 6.19. Esquema de circuito con distribución de la corriente.

se parte en dos: I_1 y I_2 ; por tanto, por conservación de la carga eléctrica en dicho punto, se tiene:

Solución.

Como las resistencias están en paralelo, entonces esta asociación de resistencias es:

$$\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Al remplazar los valores de las resistencias, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_e} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \\ \frac{1}{R_e} &= 0.1 + 0.07 \\ \frac{1}{R_e} &= 0.17 \\ R_e &= 6 \Omega \end{aligned}$$

El nuevo circuito ha quedado como el que indica la Fig. 6.18; por tanto, con la Ley de Ohm se calcula la corriente.

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R} \\ I &= \frac{12\text{vol}}{6\Omega} \\ I &= 2\text{Am} \end{aligned}$$

Esta es la corriente que circula y pasa por la resistencia R equivalente.

5. Con los valores del ejemplo anterior y los resultados, calcular la corriente que pasa por cada resistencia.

Solución.

Obsérvese que en el nodo a la corriente

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0.$$

Esta Ley se conoce como Ley de Kirchoff; es decir, en el nodo **a** y el nodo **b**, se tiene:

$$I = I_1 + I_2.$$

Por otra parte, en los nodos o puntos **a** y **b** hay una diferencia de potencial de 12vol ; por tanto, las corrientes son:

$$I_1 = \frac{12\text{vol}}{10\Omega}$$

$$I_1 = 1.2\text{Am}$$

y

$$I_2 = \frac{12\text{vol}}{15\Omega}$$

$$I = 0.8\text{Am}$$

Al comprobar con la Ley de Kirchoff, se tiene:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 1.2\text{Am} + 0.8\text{Am}$$

$$I = 2\text{Am}$$

Este valor de la corriente se había obtenido al calcular la resistencia equivalente.

En el ejemplo anterior también se puede calcular la potencia disipada por cada resistencia; como ya se conocen las corrientes, calcular la potencia resulta muy sencillo. Las dos resistencias se someten a la diferencia de tensión definida por los nodos **a** y **b**, por tanto, para la resistencia $R_1 = 10\Omega$, la potencia es:

$$P_1 = I_1 V_{ab}$$

$$P_1 = (1.2\text{Am})(12\text{vol})$$

$$P_1 = 14.4\text{vatios}$$

Y para la resistencia $R_2 = 15\Omega$, se tiene una potencia de:

$$P_2 = I_2 V_{ab}$$

$$P_2 = (0.8\text{Am})(12\text{vol})$$

$$P_2 = 9.6\text{vatios}$$

Si la pregunta gira en torno a la potencia disipada en el circuito, entonces se debería calcular sobre la resistencia equivalente, es decir, sobre 6Ω , de modo que:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$P = \frac{(12\text{vol})^2}{6 \Omega}$$

$$P = 24\text{vatios}$$

Esta también es la suma de P_1 y P_2 .

6. En el circuito de la Fig. 6.20, calcular las potencias disipadas.

Solución.

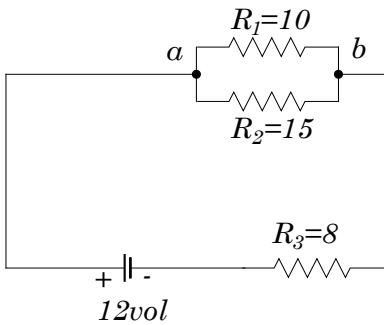


Fig. 6.20. Esquema de circuito con tres resistencias.

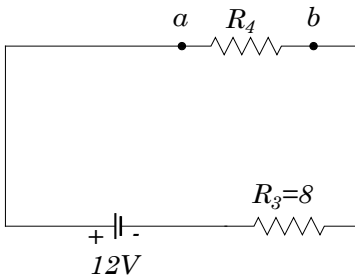


Fig. 6.21. Nuevo circuito, al resolver la asociación de resistencias en paralelo.

Obsérvese en la Fig. 6.20 que el circuito es casi igual que el anterior, solo que hay una resistencia más en el curso de la circulación de la corriente; esto cambia algunas cosas para realizar el cálculo pertinente. En primer lugar, se debería resolver la asociación de resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

$$R_4 = 6\Omega$$

Ahora bien, las resistencias R_4 y R_3 del ejemplo quedan en serie, como se ve en el nuevo circuito de la Fig. 6.20; por tanto, la resistencia equivalente es:

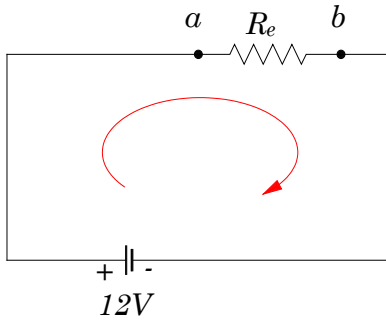
$$R_e = R_4 + R_3$$

$$R_e = (6 + 8)\Omega$$

$$R_e = 14\Omega$$

Esta es la resistencia resultante de todo el circuito, que se encuentra sometida a la diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b**, como se puede ver en el circuito de la Fig. 6.22.

Ahora bien (véase la Fig. 6.22), la corriente eléctrica en este circuito es:



$$I = \frac{V}{R}$$

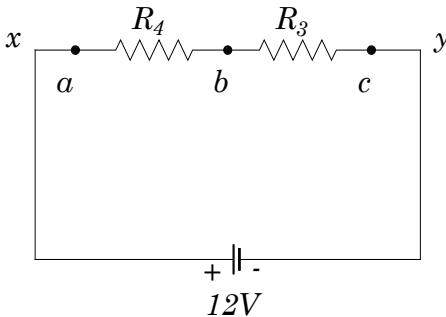
$$I = \frac{12\text{vol}}{14\Omega}$$

Por último, se tiene:

$$I = 0.86\text{Am}$$

Fig. 6.22. Circuito final.

Ahora volvemos al circuito de la Fig. 6.19, en el punto **a** la corriente se divide en I_1 y I_2 ; una forma para calcular estas corrientes es calcular el potencial que hay en dicho circuito entre **a** y **b**, por estar R_3 entre la asociación de resistencias y la fuente. Esto es:



$$V_{xy} = V_{ab} + V_{bc}$$

$$12 = V_{ab} + V_{bc}$$

Fig.6.23. Circuito con tres puntos de potencial eléctrico.

La corriente que circula por R_4 y R_3 es igual, por tanto (Fig. 6.23), los voltajes de V_{ab} y V_{bc} son:

$$V_{ab} = IR_4 = (0.86\text{Am})(6\Omega) = 5.16\text{vol}$$

$$V_{bc} = IR_3 = (0.86\text{Am})(8\Omega) = 6.88\text{vol}$$

Con estos valores, se puede calcular la corriente que pasa por R_1 y R_2 ; obsérvese que la diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b** del circuito de la Fig. 6.19 es: 5.16vol ; por tanto:

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{5.16\text{vol}}{10\Omega} = 0.516\text{Am.}$$

Y la corriente que pasa por la resistencia R_2 es:

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{5.16\text{vol}}{15\Omega} = 0.34\text{Am.}$$

De acuerdo con la Ley de Kirchoff, se tiene:

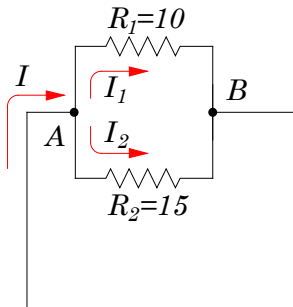
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = (0.516 + 0.34)\text{Am}$$

$$I = 0.86\text{Am}$$

Este es un valor igual al ya calculado (Fig. 6.24).

Ahora bien, con todos los datos obtenidos, se puede calcular la potencia disipada en las resistencias:



$$P_1 = I_1 V_{ab} = (0.516\text{Am})(5.16\text{vol}) = 2.66\text{vatios}$$

$$P_2 = I_2 V_{ab} = (0.34\text{Am})(5.16\text{vol}) = 1.73\text{vatios}$$

$$P_3 = I V_{bc} = (0.86\text{Am})(6.88\text{vol}) = 5.92\text{vatios}$$

Por último, la potencia del circuito será la suma:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = (2.66 + 1.73 + 5.92)\text{vatios}$$

$$P = 10.33\text{vatios}$$

Fig. 6.24. Esquema sobre las corrientes I_1 y I_2 .

Esto también se puede resolver como:

$$P = IV$$

$$P = (0.86\text{Am})(12\text{vol})$$

$$P = 10.33\text{vatios}$$

Como se puede ver, la potencia se puede calcular de las dos formas.

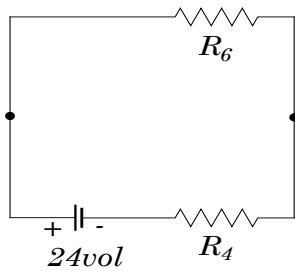


Fig. 6.27. Nuevo circuito respecto al circuito de la Fig. 6.26.

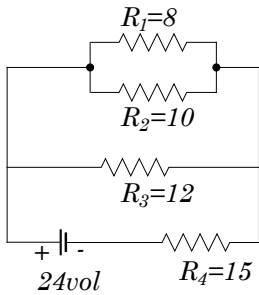


Fig. 6.25. Esquema de un circuito más complejo.

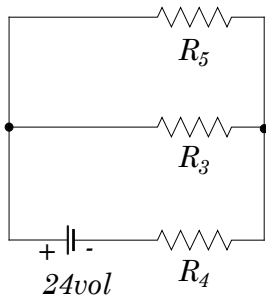


Fig. 6.26. Nuevo circuito respecto al circuito de la Fig. 6.25.

7. En el circuito de la Fig. 6.25, calcular las corrientes que circulan por cada una de las resistencias y, de igual forma, la potencia disipada en cada una.

Solución.

1) Como en todos los circuitos, para conocer la corriente es necesario resolver la asociación de resistencias. Para esto, se inicia con la parte superior del circuito, donde \$R_1\$ y \$R_2\$ están en paralelo; esto es:

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$$

$$R_5 = 4.44\Omega$$

Con esto se tiene un circuito como el representado en la Fig. 6.26; ahora, las resistencias \$R_5\$ y \$R_3\$ están en paralelo; por tanto, su solución será:

$$\frac{1}{R_6} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_6} = \frac{1}{4.44} + \frac{1}{12}$$

$$R_6 = 3.24\Omega$$

Con este valor, se tiene el nuevo circuito, de la Fig. 6.27, donde las resistencias \$R_6\$ y \$R_4\$ están en serie, por lo que, al resolver, queda:

$$R_e = R_6 + R_4.$$

Al remplazar los valores, se tiene:

$$R_e = 3.24 + 15$$

$$R_e = 18.24\Omega$$

Una vez resuelta esta asociación, el circuito ha quedado con una sola resistencia, con la cual se puede calcular la corriente que circula por el circuito:

$$I = \frac{V}{R_e}$$

$$I = \frac{24\text{vol}}{18.24\Omega}$$

$$I = 1.32\text{Am.}$$

Esta es la corriente que pasa en su totalidad por R_4 .

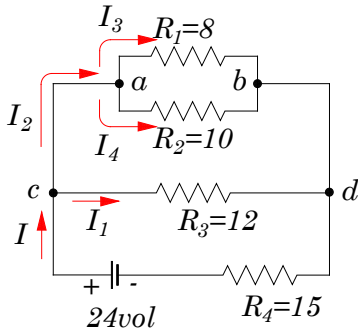


Fig. 6.28. Circuito con cinco corrientes circulantes.

Ahora bien, volvamos al circuito original: en él, se puede ver que hay 4 tipos de corrientes más, para un total de 5 corrientes que pasan por las resistencias, como se muestra en el circuito de la Fig. 6.28.

En el circuito de la Fig. 6.29, se puede ver cómo la corriente I se divide en I_1 e I_2 ; para calcular los valores, es necesario conocer la diferencia de potencial en los puntos c y d ; como la corriente que circula por la resistencia

R_4 es de 1.32 Am, entonces, en el circuito de la Fig. 6.30, se tiene que R_4 está en serie con R_6 ; por tanto, la corriente es la misma. Con este dato se puede calcular la caída de tensión en cada resistencia:

$$V_{xy} = V_{cd} + V_{de};$$

es decir:

$$V_{cd} = IR_{cd} = (1.32\text{Am})(3.24\Omega) = 4.28\text{vol}$$

$$V_{de} = IR_4 = (1.32\text{Am})(15\Omega) = 19.8\text{vol}$$

Para comprobar estos resultados, sumamos estos valores como indica la ecuación de caída de potenciales:

$$V_{xy} = (4.28 + 19.8)vol = 24vol$$

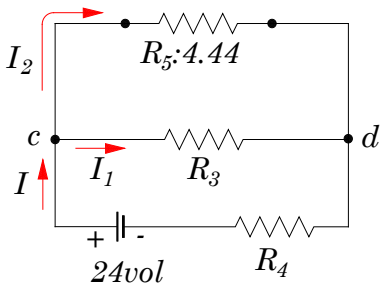


Fig. 6.29. Esquema donde están las dos corrientes: I_1 e I_2 .

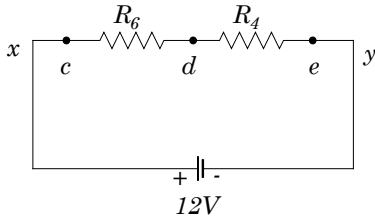


Fig. 6.30. Esquema resultado de tener R_5 y R_3 en paralelo.

como la diferencia de potencial V_{cd} ya se conoce (véase Fig. 6.31), entonces se pueden calcular las corrientes:

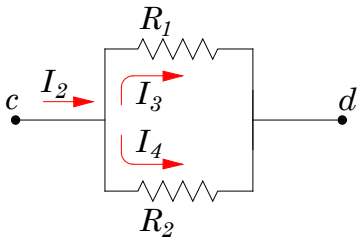


Fig. 6.31. Esquema de la primera parte del circuito de la Fig. 6.29.

Resultado igual al de la fuente de poder.

Ahora bien, con los valores de la caída de potencial se pueden calcular las corrientes I_1 e I_2 del circuito de la Fig. 6.29:

$$I_1 = \frac{V_{cd}}{R_3} = \frac{4.28vol}{12\Omega} = 0.36Am$$

$$I_2 = \frac{V_{cd}}{R_5} = \frac{4.28vol}{4.44\Omega} = 0.96Am$$

Según la Ley de Kirchoff, la suma de estas corrientes debe dar la corriente inicial; esto es:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = (0.36 + 0.96)Am$$

$$I = 1.32Am$$

Esta es la corriente ya calculada. Ahora quedan por calcular los valores de I_3 e I_4 ;

$$I_3 = \frac{V_{cd}}{R_1} = \frac{4.28vol}{8\Omega} = 0.54Am$$

$$I_4 = \frac{V_{cd}}{R_2} = \frac{4.28vol}{10\Omega} = 0.428Am$$

De nuevo, la suma de estos dos resultados dará el valor de la corriente I_2 :

$$I_2 = I_3 + I_4 = 0.54 + 0.428 = 0.96Am.$$

Este valor ya se había calculado.

2) Con los valores ya calculados, se puede calcular la potencia disipada en cada una de las resistencias:

$$P_0 = IV_{de} = (1.32Am)(19.8vol) = 26.14vatios$$

$$P_1 = I_1V_{cd} = (0.36Am)(4.28vol) = 1.54vatios$$

$$P_3 = I_3V_{cd} = (0.54Am)(4.28vol) = 2.31vatios$$

$$P_4 = I_4V_{cd} = (0.42Am)(4.28vol) = 1.83vatios$$

La suma de todas las potencias será la potencia disipada por el circuito, igual a la potencia calculada con la corriente total circulante y la resistencia equivalente del circuito:

$$P = IV = (1.32Am)(24vol) = 31.68vatios$$

8. Hacer cálculos idénticos para el circuito representado en la Fig. 6.32, donde los valores de las resistencias son:

$$R_1 = 18\Omega, \quad R_2 = 15, \quad R_3 = 12, \quad R_4 = 8, \\ R_5 = 5, \quad R_6 = 4, \quad R_7 = 4.$$

Solución.

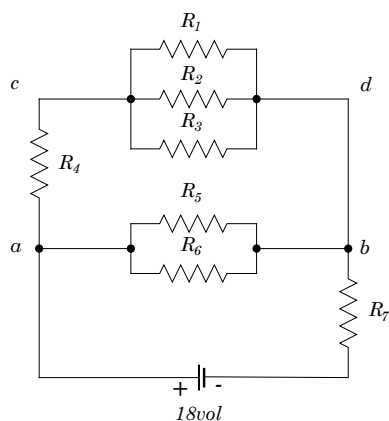


Fig. 6.32. Circuito con mayor complejidad.

Para resolver el circuito, es necesario resolver las asociaciones de resistencias en paralelo y en serie. La primera asociación que se encuentra en paralelo es:

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Al reemplazar los valores, se tiene:

$$\frac{1}{R_8} = \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12}$$

$$R_8 = 4.854\Omega$$

La siguiente asociación de resistencias también está en paralelo; esto es:

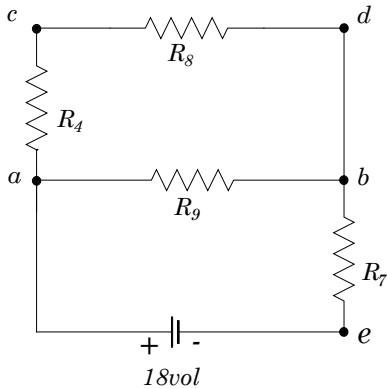


Fig. 6.33. Nuevo circuito a partir del circuito de la Fig. 6.32.

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$

$$R_9 = 2.22\Omega$$

Con estos valores se obtiene un nuevo circuito, como el que se muestra en la Fig. 6.33, donde las resistencias R_8 y R_9 reemplazan a las asociaciones en paralelo; ahora, las resistencias 4 y 8 están en serie; al reducirlas, queda así:

$$R_{10} = R_4 + R_8$$

$$R_{10} = (8 + 4.854)\Omega$$

$$R_{10} = 12.854\Omega$$

Así, el nuevo circuito es el mostrado en la Fig. 6.34, donde R_{10} y R_9 están en paralelo.

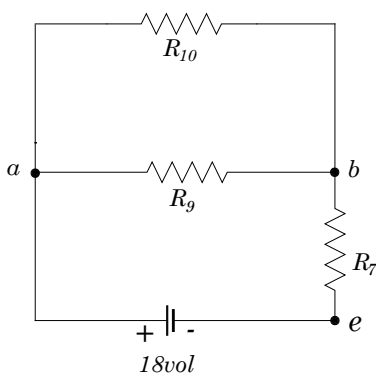


Fig. 6.34. Nuevo circuito a partir del circuito de la Fig. 6.33.

Con esto, al resolver esta nueva asociación, el circuito queda:

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_9}$$

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{1}{12.854} + \frac{1}{2.22}$$

$$R_{11} = 1.845\Omega$$

De nuevo, con este resultado, el circuito se ha reducido de tal forma que ahora quedan dos resistencias en serie: R_{11} y R_7 , tal como se puede ver en el circuito representado en la Fig. 6.35.

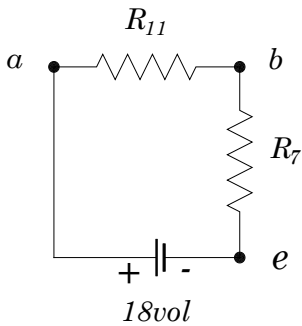


Fig. 6.35. Nuevo circuito a partir del circuito de la Fig. 6.34.

En este circuito, las resistencias R_{11} y R_7 , que están en serie, se reducen a una sola para terminar la asociación de todas las resistencias; el resultado será el valor de la resistencia equivalente.

Entonces, se tiene:

$$R_e = R_{11} + R_7$$

$$R_e = 1.845 + 4$$

$$R_e = 5.845\Omega$$

Con este resultado, en el que se han reducido todas las resistencias a un solo valor, se puede calcular la corriente que circula por el circuito de la Fig. 6.35. A partir de la Ley de Ohm, se tiene:

$$I = \frac{V}{R_e}$$

$$I = \frac{18\text{vol}}{5.845\Omega}$$

$$I = 3.08\text{Am}$$

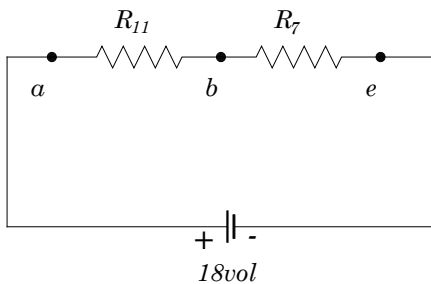


Fig. 6.36. Circuito igual al mostrado en la Fig. 6.35, con una distribución mejorada para poder ver las caídas de potencial.

Para encontrar las corrientes sobre el circuito de la Fig. 6.34 en el punto a , es necesario encontrar la diferencia de potencial ab y be del circuito de la Fig. 6.35.

Por estas dos resistencias circula la misma cantidad de corriente, de tal forma que las caídas de tensión son:

$$V_{ab} = IR_{11} = (3.08\text{Am})(1.845\Omega)$$

$$V_{ab} = 5.675\text{vol}$$

$$V_{be} = IR_7 = (3.08\text{Am})(4\Omega)$$

$$V_{be} = 12.32\text{vol}$$

Ahora bien, en el circuito de la Fig. 6.34, podemos conocer qué cantidad de corriente pasa por las resistencias R_{10} y R_9 ; como R_{11} , que está entre a y b , reemplaza a R_{10} y R_9 como se conoce la caída de potencial, por tanto, la corriente que pasa por esta resistencia es:

$$I_{10} = \frac{V_{ab}}{R_{10}} = \frac{5.675\text{vol}}{12.854\Omega} = 0.442\text{Am}$$

$$I_9 = \frac{V_{be}}{R_9} = \frac{5.675\text{vol}}{2.22\Omega} = 2.557\text{Am}$$

Para comprobarlo, por la Ley de Kirchoff, se tiene:

$$I = I_{10} + I_9 = 0.442 + 2.557 = 3.08\text{Am},$$

que es la corriente total que circula por el circuito.

Ahora bien, R_{10} es la resistencia que reemplaza a R_4 y R_8 , por tanto, en estas resistencias hay una caída de potencial; según el circuito de la Fig. 6.37, es:

$$V_{ad} = V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}.$$

Así,

$$V_{ac} = I_{10}R_4 = (0.442\text{Am})(8\Omega)$$

$$V_{ac} = 3.536\text{vol}$$

Y para la resistencia R_8 :

$$V_{cb} = I_{10}R_8 = (0.442\text{Am})(4.854\Omega)$$

$$V_{cb} = 2.145\text{vol}$$

La suma de estas caídas de potencial es $V_{ab} = 3.536 + 2.145 = 5.68\text{vol}$, un valor ya calculado.

Una vez conocido este valor, se pueden calcular los valores de I_1 , I_2 , e I_3 :

$$I_1 = \frac{V_{cd}}{R_1} = \frac{2.145}{18} = 0.119\text{Am}$$

$$I_2 = \frac{V_{cd}}{R_2} = \frac{2.145}{15} = 0.143\text{Am}$$

$$I_3 = \frac{V_{cd}}{R_3} = \frac{2.145}{12} = 0.179Am$$

Como ya se conoce la caída de potencial V_{ab} , entonces, para calcular las corrientes en las resistencias R_5 y R_6 :

$$I_5 = \frac{V_{ab}}{R_5} = \frac{5.676}{5} = 1.135Am$$

$$I_6 = \frac{V_{ab}}{R_6} = \frac{5.676}{4} = 1.419Am$$

Ahora se pueden calcular las potencias disipadas en cada una de las resistencias; esto es:

$$P_1 = I_1V_{cd} = (0.119Am)(2.145vol) = 0.255vatios$$

$$P_2 = I_2V_{cd} = (0.179Am)(2.145vol) = 0.307vatios$$

$$P_3 = I_3V_{cd} = (0.179Am)(2.145vol) = 0.384vatios$$

$$P_4 = I_{10}V_{ac} = (0.442Am)(3.536vol) = 1.563vatios$$

$$P_5 = I_5V_{ab} = (1.135Am)(5.676vol) = 6.442vatios$$

$$P_6 = I_6V_{ab} = (1.419Am)(5.676vol) = 8.054vatios$$

Y, por último:

$$P_7 = I_7V_{be} = (3.0Am)(12.32vol) = 36.96vatios.$$

Como en los casos anteriores, la suma de estas potencias será el consumo total, de 54 vatios; también, de forma muy rápida, se tiene que:

$$P = IV$$

$$P = (3Am)(18vol)$$

$$P = 54vatios$$

Este resultado es igual a la suma de las potencias parciales.

6.4 Análisis de circuitos básicos tipo 3

En muchos casos, los circuitos se tornan más complejos; solo la asociación de resistencias se puede encontrar en situaciones complicadas, como se puede ver en el circuito de la Fig. 6.38, donde las resistencias no están ni en serie

ni en paralelo; sin embargo, la teoría para resolver este tipo de casos ya se conoce: es la Ley de Ohm expandida, que se conoce como malla.

Ejemplo. 1. En la Fig. 6.38, se puede ver un circuito de tipo 3, donde hay tres resistencias intercaladas por dos fuentes, lo que lo torna difícil de resolver con el procedimiento que se traía, pues las resistencias no están ni en serie ni en paralelo.

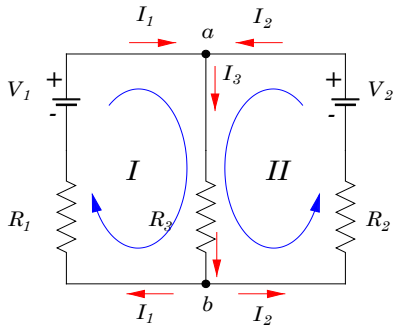


Fig. 6.38. Circuito de tipo 3.

En la Fig., se puede ver que hay dos partes, que se denominarán mallas I y II; además, en el nodo **a**, la corriente I_3 se forma por la suma de I_2 e I_1 , de modo que tenemos la primera ecuación:

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1).$$

De igual forma ocurre en el nodo **b**.

Por otra parte, en la malla I, se puede desarrollar la Ley de Ohm, al seguir el sentido que de forma arbitraria se ha dispuesto:

$$V_1 = I_3 R_3 + I_1 R_1 \quad (2).$$

En la malla II, y al seguir el sentido de la corriente que se ha escogido, se tiene:

$$V_2 = I_3 R_3 + I_2 R_2 \quad (3).$$

Si las fuentes tienen un valor de: $V_1 = 16\text{vol}$, $V_2 = 27\text{vol}$, y los valores de las resistencias son: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, entonces las ecuaciones 1, 2 y 3 quedan:

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$16 = 6I_3 + 2I_1 \quad (2)$$

$$27 = 6I_3 + 5I_2 \quad (3)$$

Hay varios procedimientos para desarrollar este sistema de ecuaciones matemáticas; veremos algunos:

1) Método de solución por remplazos

A partir de la ecuación (1), se puede decir que: $I_1 = I_3 - I_2$ (4), que se puede remplazar en (2):

$$16 = 6I_3 + 2(I_3 - I_2).$$

Si se lo desarrolla, se tiene:

$$16 = 6I_3 + 2I_3 - 2I_2$$

$$16 = 8I_3 - 2I_2$$

Si se despeja I_2 , se tiene:

$$I_2 = \frac{8I_3 - 16}{2}$$

$$I_2 = 4I_3 - 8 \quad (5)$$

Al remplazar este resultado en (3), se tiene:

$$27 = 6I_3 + 5(4I_3 - 8)$$

$$27 = 6I_3 + 20I_3 - 40$$

$$27 = 26I_3 - 40$$

Por último, si se despeja I_3 , se tiene:

$$I_3 = \frac{27 + 40}{26}$$

$$I_3 = 2.58Am$$

Si este valor se remplaza en (5), se tiene:

$$I_2 = 4I_3 - 8$$

$$I_2 = 4(2.58Am) - 8$$

$$I_2 = 2.32Am$$

Y ahora se remplazan estos valores en la ecuación (1) para tener el valor total de las corrientes:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_3 - I_2$$

$$I_1 = 2.58 - 2.32$$

$$I_1 = 0.26Am$$

De modo que las respuestas son:

$$I_1 = 0.26Am$$

$$I_2 = 2.31Am$$

$$I_3 = 2.58Am$$

Como prueba, se puede remplazar en cualquiera de las ecuaciones y siempre se obtendrá una identidad.

2) Método de solución por reducción

Como las ecuaciones obtenidas son:

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$16 = 6I_3 + 2I_1 \quad (2)$$

$$27 = 6I_3 + 5I_2 \quad (3)$$

A partir de la ecuación (1), se tiene: $I_1 = I_3 - I_2$, lo que, al remplazarlo en la ecuación (2), lleva a:

$$16 = 6I_3 + 2(I_3 - I_2)$$

$$16 = 8I_3 - 2I_2 \quad (5)$$

Si se escriben (5) y (3):

$$16 = 8I_3 - 2I_2 \quad (5)$$

$$27 = 6I_3 + 5I_2 \quad (3)$$

Si se multiplica a (5) por 5 y a (3) por 2, se tiene:

$$80 = 40I_3 - 10I_2$$

$$54 = 12I_3 + 10I_2$$

Al sumar este sistema de ecuaciones, se llega a:

$$134 = 52I_3 + 0$$

$$I_3 = 2.58Am$$

Si a este valor se lo reemplaza en (3), se puede despejar I_2 :

$$27 = 6I_3 + 5I_2$$

$$27 = 6(2.58Am) + 5I_2$$

$$I_2 = 2.32Am$$

Y, por último, si se reemplazan estos resultados en la ecuación (1), se ha resuelto todo:

$$I_1 = I_3 - I_2$$

$$I_1 = 2.58 - 2.32$$

$$I_1 = 0.26Am$$

Como se puede ver, los resultados son iguales.

3) Método de solución por matrices

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$16 = 6I_3 + 2I_1 \quad (2)$$

$$27 = 6I_3 + 5I_2 \quad (3)$$

Al organizar las tres ecuaciones, se tiene:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$2I_1 + 0 + 6I_3 = 16$$

$$0 + 5I_2 + 6I_3 = 27$$

Con el ordenamiento de los coeficientes, queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 6 & 27 \end{vmatrix}$$

Al ampliar la matriz, se multiplica a (1) por -2 y se la suma a la segunda fila. Esto hasta lograr tener una fila con ceros y una única variable, así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-2 & 0-2 & 6+2 & 16 \\ 0 & 5 & 6 & 27 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 16 \\ 0 & 5 & 6 & 27 \end{vmatrix}$$

Para convertir el 5 en 0, se puede multiplicar a esta fila por 2 y a la fila (2) multiplicarla por 5 y luego se restan; esto es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 16 \\ 0 & -10+10 & 40+12 & 80+54 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 52 & 134 \end{vmatrix}$$

Cada columna es una corriente, por tanto:

$$52I_3 = 134$$
$$I_3 = \frac{134}{52}$$
$$I_3 = 2.58Am$$

Si se reemplaza este valor en la fila (2), se tiene el valor de la corriente 2:

$$-2I_2 + 8I_3 = 16$$
$$-2I_2 + 8(2.58) = 16$$
$$I_2 = 2.32Am$$

Y, por último, la corriente 1 es:

$$I_1 = I_3 - I_2$$
$$I_1 = 2.58 - 2.32$$
$$I_1 = 0.26Am$$

4) Método de solución por regla de Cramer

Los valores de las variables se encuentran al conocer los determinantes, de la siguiente forma:

$$I_1 = \frac{[I_1]}{[I]} \quad I_2 = \frac{[I_2]}{[I]} \quad I_3 = \frac{[I_3]}{[I]}$$

Primero, encontramos el determinante de todo el sistema:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$2I_1 + 0 + 6I_3 = 16$$

$$0 + 5I_2 + 6I_3 = 27$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 6 & 27 \end{vmatrix}$$

Con base en esta organización, se pueden obtener los determinantes para cada variable:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & 6 \\ 27 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 16 & 6 \\ 0 & 27 & 6 \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 27 \end{vmatrix}$$

La solución de estos determinantes es:

$$I = |1(0 \times 6 - 5 \times 6) - 1(2 \times 6 - 0 \times 6) + (-1)(2 \times 5 - 0 \times 0)| = -52|$$

$$I_1 = -1(16 \times 6 - 27 \times 6) + (-1)(16 \times 5) = -14$$

$$I_2 = 1(16 \times 6 - 27 \times 6) + (-1)(2 \times 27) = -120$$

$$I_3 = 1(-5 \times 16) - 1(2 \times 27) = -134.$$

De modo que los valores se encuentran así:

$$I_1 = \frac{[I_1]}{[I]} = \frac{-14}{-52} = 0.27Am$$

$$I_2 = \frac{[I_2]}{[I]} = \frac{-120}{-52} = 2.31Am$$

$$I_3 = \frac{[I_3]}{[I]} = \frac{-134}{-52} = 2.58 \text{ Am}$$

Como se puede ver, con cualquiera de los procedimientos se puede efectuar el cálculo de las variables que se proponen; en mi concepto, el primero o este último son muy buenos y sencillos de utilizar; sin embargo, la decisión le corresponde al lector.

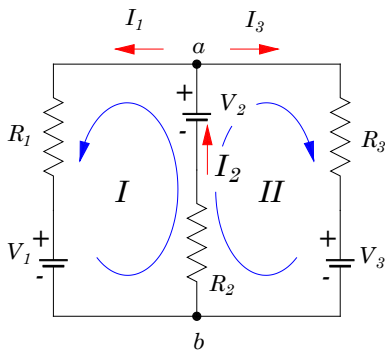


Fig. 6.39. Circuito tipo 3, con tres fuentes de poder.

2. En el circuito de la Fig. 6.39, se tienen tres resistencias y tres fuentes de poder. Calcular las corrientes que circulan por las resistencias y la potencia disipada, cuando los valores de las fuentes y de las resistencias son:

$$V_1 = 9\text{vol}, V_2 = 4\text{vol}, V_3 = 14\text{vol}; R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega \text{ y } R_3 = 10\Omega.$$

Solución.

En el circuito se puede apreciar que se presentan dos mallas, con fuente y resistencia; además, comparten una fuente y una resistencia; en el nodo **a**, la corriente se bifurca y vuelve a encontrar en el nodo **b**.

De forma que la Ley de Kirchoff en el nodo **a** es:

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (1).$$

En este caso, las ecuaciones son:

En la malla I, al seguir el sentido de la circulación de la corriente, se tiene:

$$V_2 + I_1 R_1 - V_1 + I_2 R_2 = 0.$$

Si se organizan los términos, queda así:

$$V_2 - V_1 + I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0.$$

Al remplazar los valores, se obtiene:

$$4 - 9 + 5I_1 + 10I_2 = 0$$

$$-5 + 5I_1 + 10I_2 = 0$$

Cuando se reducen los términos, queda:

$$-1 + I_1 + 2I_2 = 0 \quad (2).$$

En la malla II:

$$V_2 + I_3R_3 - V_3 + I_2R_2 = 0$$

$$V_2 - V_3 + I_3R_3 + I_2R_2 = 0$$

Si se remplazan los valores, se tiene:

$$4 - 14 + 10I_3 + 10I_2 = 0$$

$$-10 + 10I_3 + 10I_2 = 0$$

Al reducir los términos, se obtiene:

$$-1 + I_3 + I_2 = 0 \quad (3).$$

Así, las ecuaciones obtenidas son:

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (1)$$

$$-1 + I_1 + 2I_2 = 0 \quad (2)$$

$$-1 + I_3 + I_2 = 0 \quad (3)$$

El sistema se resolverá al efectuar remplazos y sustituciones:

A partir de la ecuación (1), se puede despejar: $I_1 = I_2 - I_3$, y se puede remplazar en (2), para obtener:

$$-1 + (I_2 - I_3) + 2I_2 = 0$$

$$-1 + 3I_2 - I_3 = 0$$

Por último, se tiene:

$$I_3 = 3I_2 - 1 \quad (4).$$

Si este resultado (4) se remplaza en la ecuación (3), se tiene:

$$-1 + 3I_2 - 1 + I_2 = 0$$

$$4I_2 = 2$$

$$I_2 = 0.5Am$$

Ahora bien, este resultado se puede remplazar en (4):

$$I_3 = 3I_2 - 1$$

$$I_3 = 3(0.5Am) - 1$$

$$I_3 = 0.5Am$$

Y, por último, si remplazamos estos valores en la ecuación (1) modificada, se tiene:

$$I_1 = I_2 - I_3$$

$$I_1 = 0.5 - 0.5$$

$$I_1 = 0Am$$

Resulta que no es tan sorprendente encontrar mallas por donde no circula corriente.

6.5 Puente de Wheatstone

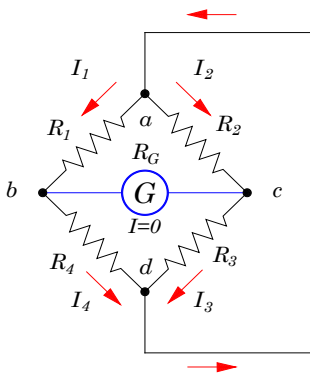


Fig. 6.40. Puente de

Es un circuito cuya asociación de resistencias permite medir valores de resistencias con alta precisión (Fig. 6.40). El puente está en equilibrio cuando el galvanómetro registra cero, lo que quiere decir que no hay corriente que circule por el galvanómetro.

De modo que la corriente que circula por R_1 y R_4 es igual a la que fluye por R_2 y R_3 ; esto significa que las ecuaciones se escriben así:

$$V_a - V_b = I_1 R_1$$

$$V_{ab} = I_2 R_2$$

Ahora bien, la condición es que en el galvanómetro no aparece ninguna corriente; entonces:

$$V_{bc} = V_b - V_c = R_G I = 0.$$

Esto quiere decir que los potenciales en los extremos b y c son iguales; esto es:

$$V_b = V_c.$$

Por tanto, lo que queda es:

$$V_{ab} = V_{ac} = I_1 R_1 = I_2 R_2.$$

De igual forma ocurre en la parte inferior:

$$V_{bd} = V_d - V_b = I_4 R_4$$

$$V_{dc} = V_c - V_d = I_3 R_3$$

Como: $V_{bd} = V_{cd}$, se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{I_1 R_1}{I_4 R_4} = \frac{I_2 R_2}{I_3 R_3}$$

Como las corrientes son iguales, solo queda la relación de resistencias:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Por ejemplo, si R_4 es la resistencia que varía y $R_1 = 18\Omega$, $R_2 = 25\Omega$ y $R_3 = 12\Omega$:

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{R_1}{R_2} R_3 \\ R_4 &= \frac{18}{25} 12 \\ R_4 &= 8.64\Omega \end{aligned}$$

El punto de equilibrio se logra en este momento y aquí el circuito sirve de instrumento de medida. El aparato tiene dos resistencias constantes: una variable y la otra es la resistencia de prueba; el dial de la resistencia variable gira hasta que en el galvanómetro marque cero.

6.6 Instrumentos de medida

Con base en las Leyes de Ohm y los conceptos sobre corriente eléctrica, se han diseñado instrumentos de medida para cada variable eléctrica así:

Voltímetro.

Es un instrumento de medida que sirve para medir diferencias de potencial; siempre estará *conectado en paralelo* con el aparato al que se fuera a medir la diferencia de potencial en busca de los puntos **a** y **b**.

Amperímetro.

Es un instrumento que puede medir la corriente que circula por un aparato; el instrumento de medida siempre *se conectará en serie*, para que circule por el amperímetro, la corriente que va a circular por el aparato.

Vatímetro.



Fig. 6.41. Multímetros: análogo (años 80/90) y digital (año 2000). Fuente: ETSIT- UPM (2010).

Es un instrumento que sirve para medir la potencia; es decir, hay en él, tanto un voltímetro como un amperímetro.

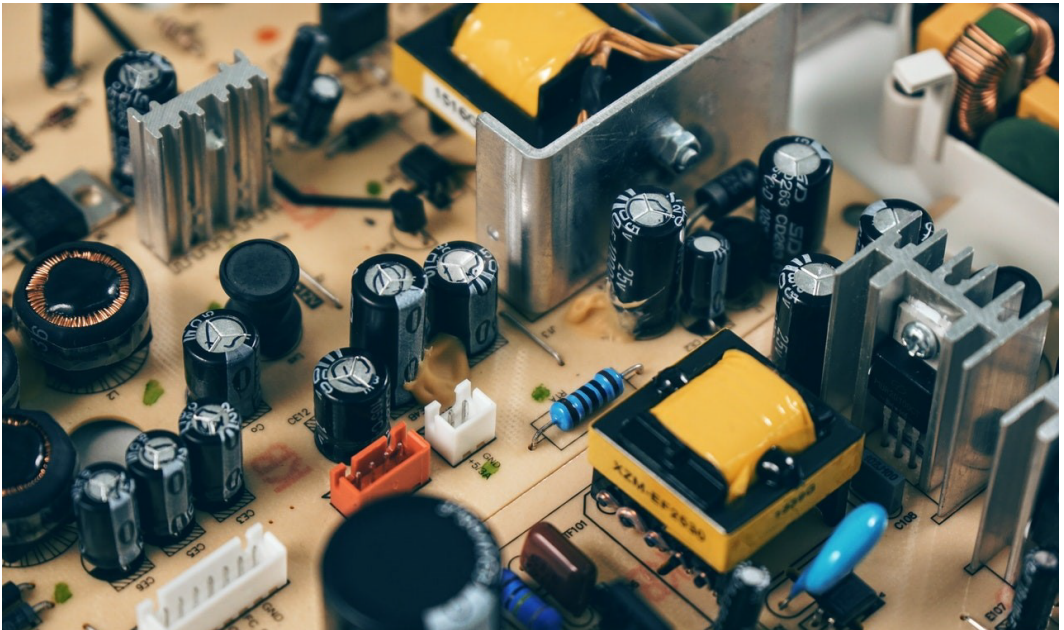
En el mercado, hoy en día se encuentran instrumentos de medida que pueden ser voltímetros amperímetros y con muchas más funciones. En la Fig. 6.41 se pueden ver dos tipos de generaciones de tecnología avanzada: el primero es un multiprobador análogo; en él se puede ver

una fina aguja que, al girar, marca el valor de lo que está midiendo; por supuesto, se trata de un aparato muy delicado. El segundo, de color amarillo, es un multiprobador digital con muchas funciones de medir, de mayor precisión y casi a prueba de golpes. En una primera generación, los instrumentos se separaban; en una segunda generación, los instrumentos se unificaron, por lo que recibieron la denominación de multiprobador y, en una tercera generación, los instrumentos de medida se convirtieron en instrumentos digitales, con más funciones, mucho más precisos y sencillos de manejar.

Capítulo 7



Circuitos capacitivos básicos



Fuente: Pixabay (2016).

Como ya se explicó en el Capítulo 4, hay varios tipos de capacitores, diseñados específicamente para que cumplieran una función determinada, basada en el concepto de lo que es la capacitancia.

En este capítulo, se analizará cómo circula la corriente en circuitos básicos en los que habrá fuentes de poder y capacitores, como ocurre en el caso del circuito de la Fig. 7.1.

7.1 Circuito capacitivo

En el circuito de la Fig. 7.1, se tienen tres condensadores y una fuente de poder. ¿Cuál es la carga total almacenada en el circuito, si el valor de los capacitores es de: $C_1 = 3\mu f$ $C_2 = 4\mu f$ $C_3 = 2\mu f$ y una fuente de poder de $V = 120vol.$?

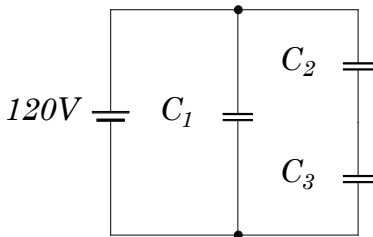


Fig. 7.1. Circuito de tipo capacitivo.

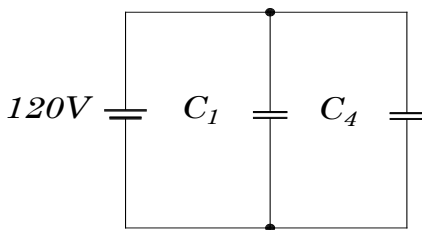


Fig. 7.2. Nuevo circuito a partir del circuito de la Fig. 7.1.

Solución.

En primer lugar, se debe resolver la asociación de condensadores C_2 y C_3 ; por tanto, es necesario encontrar el condensador que los reemplaza:

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Al reemplazar los valores, se tiene:

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_4 = 1.33\mu f$$

Con este resultado, el circuito ha quedado como el circuito de la Fig. 7.2, donde C_1 y C_4 están en paralelo. Por tanto,

$$C_e = C_1 + C_4$$

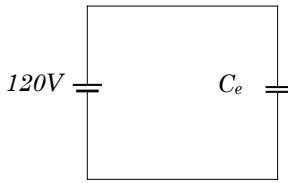


Fig. 7.3. Circuito capacitivo resultante.

Al remplazar valores, se tiene:

$$C_e = 3 + 1.33$$

$$C_e = 4.33\mu f$$

Con este resultado se tiene un circuito capacitivo sencillo, como el representado en la Fig. 7.3.

Como la capacitancia se define: $C = \frac{q}{V}$,

entonces, la carga total es: $Q_T = CV$; si se remplace, se tiene:

$$Q_T = C_e V$$

$$Q_T = (4.33\mu f)(120vol)$$

$$Q_T = 519.6\mu C$$

Si se pide calcular la corriente que circula por el circuito, significa analizar con más atención, como se efectúa en el siguiente ejemplo.

7.2 Circuito. Resistencia Capacitor R.C.

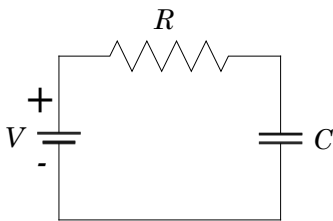


Fig. 7.4. Circuito RC.

Un circuito RC es como el que se tiene en la Fig. 7.4, donde al circuito lo alimenta la fuente de poder V , de modo que la corriente empezará a fluir a través de la resistencia, y en el capacitor se almacena la energía; aquí la pregunta que surge es: ¿qué ocurre cuando hubiera llegado al límite?

De igual forma, se puede pensar en un circuito donde solo queden el capacitor y la resistencia; en este caso, el capacitor se descargaría a través de la resistencia. Aquí la pregunta es: ¿cómo es el desarrollo de la corriente a medida que pasa el tiempo, en cualquiera de los dos procesos?

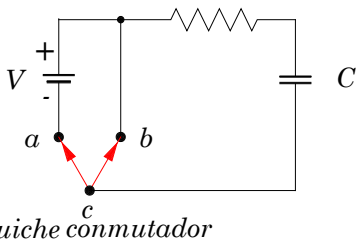


Fig. 7.5. Circuito conmutador.

En la Fig. 7.5, se tiene un circuito con suiche conmutable, que permite realizar los dos procesos mencionados: si el suiche conecta en *a*, la fuente de poder cargaría al capacitor a través de la resistencia, y al conectar en *b*, lo descargaría.

Carga de un capacitor

Corresponde al primer caso, cuando el condensador se carga por la acción de la fuente de poder (Fig. 7.6).

En estas condiciones, la fuente suministra la corriente que circula por la resistencia y llega hasta el capacitor; esto es:

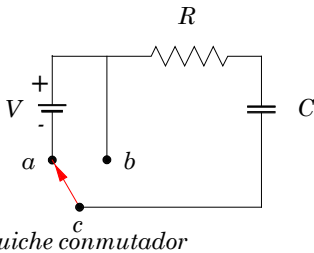


Fig. 7.6. Circuito de carga del capacitor.

$$V = V_R + V_C.$$

Esto se puede escribir como:

$$V - V_R - V_C = 0.$$

Ahora bien, las caídas de potencial en el resistor y el capacitor son:

$$V_R = IR \quad \text{y} \quad V_C = \frac{Q}{C}.$$

Al remplazar estos resultados, se tiene:

$$V - IR - \frac{Q}{C} = 0.$$

Como el proceso de la circulación de la corriente se debe ver en función del tiempo, entonces lo más adecuado es que se efectuara una derivación con respecto al tiempo; esto es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt}R + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}$$

Como la energía de la fuente de poder se mantiene constante, entonces: $\frac{dV}{dt} = 0$; por tanto, la ecuación queda:

$$\frac{dI}{dt}R + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0$$

Como $I = \frac{dQ}{dt}$, entonces la ecuación queda:

$$\frac{dI}{dt}R + \frac{I}{C} = 0 \quad (1).$$

Esta es una ecuación diferencial; al ordenar los términos, se puede resolver por simple integración:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt$$

La primera integral es un logaritmo y en la segunda la resistencia y la capacitancia son valores constantes que salen de la integral; por tanto,

$$\ln I - \ln I_0 = -\frac{1}{RC}t.$$

Si se utiliza la función inversa exponencial, se tiene:

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

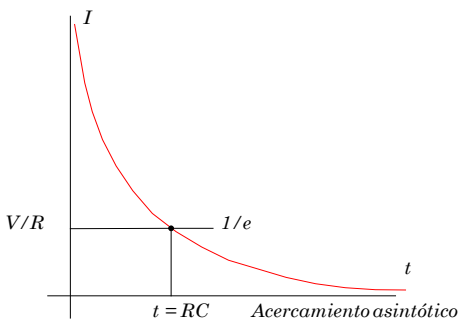


Fig. 7.7. Curva exponencial de la intensidad de la corriente en función del tiempo.

Como se puede ver, este un resultado en que se muestra que la circulación de la corriente es de tipo exponencial, que decrece a medida que pasa el tiempo; es decir, al principio se presenta una buena

intensidad de la corriente, pero, a medida que pasa el tiempo, esta intensidad va disminuyendo hasta llegar, en la práctica, a cero, como se puede ver en la Fig. 7.7.

Cuando el tiempo es justamente: $t = RC$, la ecuación queda:

$$I = I_0 e^{-1}$$

$$I = \frac{I_0}{e}$$

Como $I_0 = \frac{V}{C}$, entonces, al remplazar, se tiene: $I = \frac{V}{eC}$, más aún, la corriente es: $I = \frac{dQ}{dt}$.

$$\frac{dQ}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

A partir de aquí se puede despejar la carga del capacitor:

$$dQ = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} dt.$$

Si se resuelve la ecuación, se tiene:

$$\int_0^Q dQ = I_0 \int_0^t e^{-\frac{t}{RC}} dt.$$

Como solución a esta ecuación, después de efectuar la integración, se tiene:

$$Q_t = I_0 \left(-RC e^{-\frac{t}{RC}} + RC e^0 \right).$$

Por último, se tiene:

$$Q_t = I_0 RC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Al final, como $I_0 = \frac{V}{C}$, al remplazar, queda:

$$Q_t = VC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

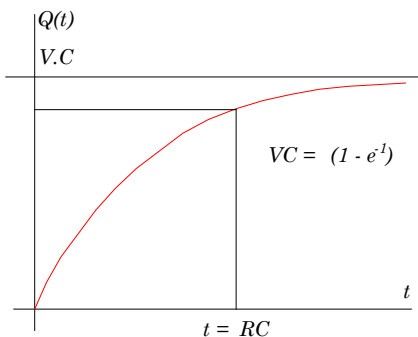


Fig. 7.8. Curva de la intensidad de la corriente en función del tiempo.

La gráfica de esta ecuación corresponde a la Fig. 7.8; allí se puede apreciar cómo se produce la carga del capacitor, pero, al llegar a un tiempo límite, la corriente se torna lenta y se acerca de forma asintótica a la carga límite del capacitor; en la práctica, cuando se ha dado la carga, no fluye más corriente.

Se debe anotar que se conoce como constante de carga al producto de la capacitancia por la resistencia RC ; en general, se deja R como variable del circuito. Así, se puede utilizar el circuito como un contador de tiempo o temporizador.

Descarga de un capacitor

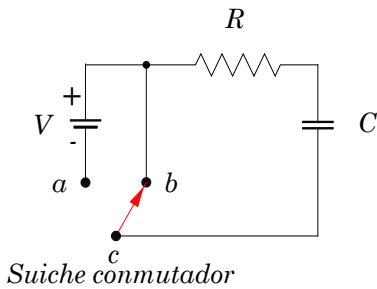


Fig. 7.9. Con el conmutador en la posición **b**, se produce un circuito de descarga.

Cuando el suiche conmutador se ha colocado en la posición **b**, como se ve en la Fig. 7.9, y con el capacitor a plena carga, se inicia una descarga controlada, pues la corriente circulará por la resistencia y, al depender de su valor, se tendrá el tiempo de descarga.

Por tanto, la descarga se realiza cuando el potencial eléctrico del capacitor se reduce en la resistencia; esto es:

$$V_C = -V_R.$$

Como $V_C = \frac{Q}{C}$ y $V_R = IR$, entonces, al remplazar, se tiene: $\frac{Q}{C} = -IR$; si se deriva respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = -\frac{dI}{dt} R$$

Como $\frac{dQ}{dt} = I$, entonces, al remplazar y desarrollar la ecuación, se tiene:

$$\frac{I}{C} = -\frac{dI}{dt} R$$

Con una nueva disposición de los términos, queda:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt$$

Esta ecuación se puede resolver por simple integración:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

cuya solución es:

$$\ln I - \ln I_0 = -\frac{t}{RC}$$

Al aplicar la función inversa exponencial, se obtiene:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

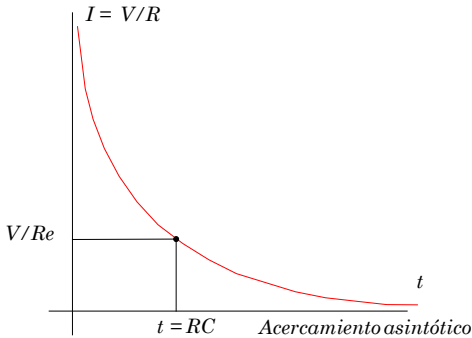


Fig. 7.10. Curva exponencial de descarga del capacitor.

Esta es la ecuación de descarga; obsérvese que esta ecuación es similar a la ecuación de carga; es decir, esta es la forma como circula la corriente por la resistencia.

La constante del tiempo RC , ajustable con la variación de R , determina el tiempo para que:

$$\frac{V}{R} = \frac{V'}{eR}$$

Como se puede ver en la Fig. 7.10, para este valor, el tiempo será: $t = RC$, que es un concepto básico para un posible circuito gobernador o temporizador de un electrodoméstico.

Ahora bien, veamos cómo se comporta la carga en el capacitor: como la corriente es $I = \frac{dQ}{dt}$, al remplazarla en la ecuación de descarga, queda:

$$\frac{dQ}{dt} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

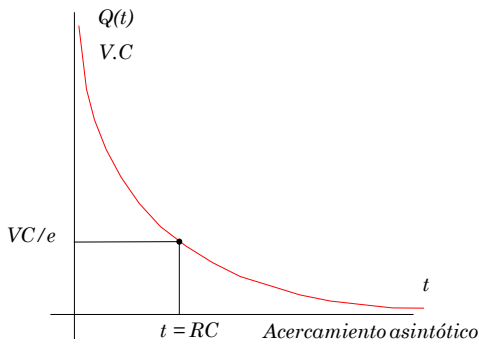
Si se ordenan los términos, se obtiene:

$$\int_{Q_0}^Q dQ = -\int_0^t I_0 e^{-\frac{t}{RC}} dt.$$

Al resolver las integrales, se tiene:

$$Q - Q_0 = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ahora bien, como $Q_0 = CV_0$ y $I_0 = \frac{V}{R}$, al remplazar, se tiene:



$$Q - CV_0 = -CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$Q = V_0 C e^{-\frac{t}{RC}}$$

Su gráfica se puede apreciar en la Fig. 7.11, y, de forma muy similar a las anteriores, permite diseñar contadores de tiempo o temporizadores.

Fig. 7.11. Curva exponencial de la descarga de un capacitor.

Ejemplo.

1. En un circuito RC se tiene: $C = 2.0\mu f$ y una resistencia $R = 5000\Omega$, energizado por una fuente de $100vol$. Calcular el tiempo que se necesita para cargar un capacitor hasta una diferencia de potencial del 99%. Si luego se descarga a través de una resistencia de 20000Ω , determinar la corriente inicial y a los 15 segundos.

Solución.

1) Para calcular la caída de tensión $V_t = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, para que llegue al 99%, es:

$$0.99V = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Al efectuar el despeje del tiempo, se tiene:

$$e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - 0.99$$

Si se aplica la función inversa, se tiene:

$$-\frac{t}{RC} = \ln(0.01)$$

$$t = -RC \ln(0.01)$$

$$t = (5000\Omega)(2.0\mu f)(\ln 0.01)$$

$$t = 0.046s$$

2) Para calcular la corriente inicial, se puede considerar cuando el tiempo es cero:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entonces, para $t = 0$, se obtiene:

$$I = I_0 e^{-\frac{0}{RC}}$$
$$I = I_0 = \frac{V}{R} = \frac{100 \text{vol}}{20000 \Omega} = 0.005 \text{Am}$$

3) Para calcular la corriente a los 15 segundos, se puede utilizar la misma ecuación:

$$I_{15s} = I_0 e^{-\frac{0.15}{20000 \times 2 \times 10^{-6}}}$$
$$I_{15s} = I_0 e^{-3.75} = 0.0235 I_0$$

Ahora bien, como $I_0 = \frac{V}{R} = 0.005 \text{Am}$, entonces, la corriente a los 15 segundos queda:

$$I = (0.02352)(0.005) = 0.000117 \text{Am}$$

7.3 Energía almacenada en un capacitor

Para que se pueda cargar un capacitor, es necesario gastar o utilizar energía, que la entrega una fuente de poder; así, en el capacitor se acumula carga que define una capacitancia, de tal forma que se genere una diferencia de potencial; esto es: $V = \frac{Q}{C}$. Para traer un elemento de carga dQ desde el infinito a un estado finito, se debe hacer un trabajo: $dw = vdQ$; si se conjugan las expresiones anteriores, se tiene:

$$dw = \frac{Q}{C} dQ$$

Por concepto de conservación de energía, se tiene:

$$dE = \frac{Q}{C} dQ$$
$$\int_0^E dE = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

Por tanto, la solución a la integral es:

$$E = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Esta es la energía acumulada en el capacitor, que puede entregarse en el momento en que el circuito así lo requiera.

Por ejemplo, en el caso de un capacitor esférico donde $C = 4\pi\epsilon_0 R$, quedaría:

$$E = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Capítulo 8



Campo magnético



Fuente: <https://www.google.com/search?sca>

Hasta ahora se puede resumir en: cargas en reposo generan un campo eléctrico y cargas en movimiento generan corriente eléctrica; si el movimiento es constante, genera corriente eléctrica directa y, de tener cargas oscilantes, generan corrientes pulsantes o alternas.

8.1 El imán

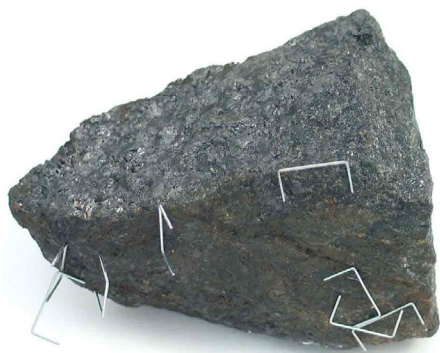


Fig. 8.1. Óxido de hierro-diferrico magnético (Fe_3O_4).

El campo magnético lo utilizaron los chinos cuando inventaron la brújula, por los años 1040; sin embargo, la piedra magnetita se conocía desde la era arcaica; se le daban ciertas propiedades; “como lo que ocurre hoy”, se dan propiedades místicas a figuras de barro en las que se han incrustado pequeños imanes para que atraigan el dinero y la prosperidad.

Se conocía que la piedra magnetita atraía a pedazos de hierro, níquel (Fig. 8.1). Así, el nombre de magnetismo proviene del lugar donde se encontraba la magnetita, es decir, en la ciudad griega de Magnesia.

Muchos años pasaron para que el hombre le diera utilidad distinta a las que le asignaban las creencias, mitos y leyendas.

Una vez conocida la ley de Coulomb para el campo eléctrico, también se asoció con el magnetismo, así que por primera vez se tuvo una ecuación que describiera algo del magnetismo:

$$F = \mu \frac{M_{g1}M_{g2}}{r^2} \quad (8.1),$$

donde M_{g1} y M_{g2} son las masas magnéticas y r la distancia que las separa; luego, se dieron cuenta de algo asombrosos, no era posible aislar las masa magnéticas norte o masa magnética sur, como se había advertido, en un

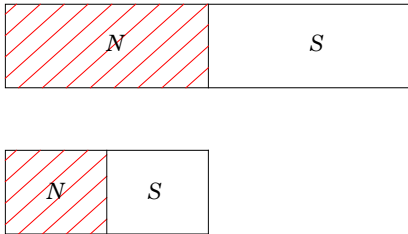


Fig. 8.2. Inspiración de las masas magnéticas.

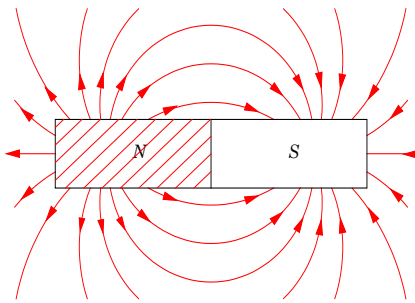


Fig. 8.3. Líneas de fuerza generadas por el campo magnético.

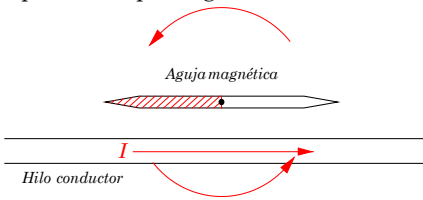


Fig. 8.4. Momento de una fuerza en la aguja por la interacción del campo magnético debido a la corriente eléctrica.

experimento sencillo, pero muy concluyente, al partir un pedazo de imán y observar que quedaba con dos partes: dos masas magnéticas, pues no se logra separar las masas; siempre que se divide un imán, vuelve aparecer otro más pequeño con dos masas magnéticas, como se puede ver en la Fig. 8.2; debido a que no es posible separarlas, se las denomina polos magnéticos, sin embargo los resultados fueron muy parecidos; con la Ley de Coulomb, se tienen fuerzas de atracción y repulsión, cuya intensidad varía inversamente con el cuadrado de la distancia que las separa; la constante de proporcionalidad, en unos primeros cálculos, estaba por el orden de 10^{-7} .

William Gilbert, en 1580, realizó experimentos sumamente cuidadosos: una de las observaciones se relacionó con las líneas de fuerza; se obtuvo al esparcir limaduras de hierro sobre un imán; cuando está debajo de un papel, como se puede ver en la Fig. 8.3, las líneas de campo observadas, muy similares a las del campo eléctrico, surgen en el polo norte y entran en el polo sur.

En 1819, Hans Christian Oersted observó que una aguja imantada se movía por un hilo conductor, por el cual circulaba corriente eléctrica; este

experimento despertó mucho interés, pues por primera vez se observaba una interacción entre la corriente eléctrica y el campo magnético. En la Fig. 8.4, se puede ver cuando la aguja se encuentra paralela al hilo conductor y en este circula una corriente; de inmediato se presenta un torque o un momento de fuerza que la hace girar para disponer la aguja perpendicular al hilo conductor. Poco tiempo después se observó la interacción entre hilos conductores; André-Marie Ampère (matemático francés) precisó el valor de la fuerza entre dos conductores paralelos, construyó electroimanes y los comparó con los imanes permanentes; en 1820, logró asociar el campo magnético con la corriente eléctrica.

Otros, como Jean-Baptiste Biot, Félix Savart y Pierre-Simon Laplace calcularon de forma aislada la fuerza que actúa sobre un conductor. En 1835, se desarrollaron aparatos, como el telégrafo, y, con él, hubo que desarrollar el alfabeto Morse. En 1841, Heinrich Rohmkorff entendió la corriente de inducción, con lo cual, desarrolló el carrito que lleva su nombre, y así se convertía en uno de los primeros transformadores.

Michael Faraday (1791-1867) logró obtener la electricidad a partir del movimiento oscilatorio de un imán frente a un devanado de hilo conductor, lo que llevó a la Ley de Faraday.

James Clerk Maxwell (1831-1879) se expresaba de Faraday como la mente más luminosa del momento, que vio líneas de fuerza que atravesaban el espacio donde nadie había visto cosa alguna; demostró las relaciones matemáticas entre corriente eléctrica y magnetismo, predijo sobre la existencia de ondas electromagnéticas, con lo cual surgió la teoría electromagnética. Sin embargo, la naturaleza de los imanes permanentes no era lo suficientemente clara.

Solo tardó 30 años para que Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) descubriera las ondas electromagnéticas; al igual que Maxwell, Hertz murió muy temprano, y fueron su sobrino, quien recibiera el Premio Nobel de Física, y su hijo Gustav quien inventara la ultrasonografía.

En 1890, Édouard Branly descubrió un detector de ondas electromagnéticas, más eficientes que el de Hertz; en 1895, Aleksandr S. Popov desarrolló la teoría de las antenas; en 1899, Guillermo Marconi logró establecer la primera comunicación interoceánica entre Inglaterra y Francia; en 1907, para la Primera Guerra Mundial, se logró enviar

mensajes a través del Océano Atlántico; en 1969, en el viaje a la luna, la humanidad pudo experimentar cómo es la comunicación desde el vacío y desde el lado opuesto de la luna, conocer sus imágenes y demás; en 2002, se masifica la Internet y se mejoran las comunicaciones con el servidor más grande World Wide Web; de aquí el prefijo www.

8.2 Sistema de unidades en el campo magnético

En el sistema de unidades internacionales (SI), el campo magnético \mathbf{B} viene dado en teslas, donde $T = 1 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$; ahora bien, el tesla es una unidad muy grande, por lo que el campo magnético corriente se suele expresar en gauss (G), medida que corresponde al Sistema CGS, de modo que

$$1T = 10^4G.$$

Como referencia, el campo magnético de la tierra es de unos 0.5G, el de un imán pequeño permanente alcanza unos 100G y el de un gran imán puede estar por encima de unos 20.000G; el campo magnético de los aceleradores de partículas alcanza hasta los 60.000G.

El vector campo magnético, designado como \mathbf{B} , también se refiere como inducción magnética o densidad de flujo magnético, que se debe distinguir de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} , donde $H = \mu B$, que es completamente diferente, pero muy utilizada en la solución de problemas y en la presentación de ecuaciones de magnetismo.

En el SI, la unidad de \mathbf{H} es el Amper-vuelta por metro; en el sistema CGS, se utiliza el oersted (Oe), con esta equivalencia:

$$1\text{amper} - \frac{\text{vuelta}}{\text{m}} = 4\pi \times 10^{-3}\text{Oe}$$

El flujo magnético ϕ a través de una superficie \mathbf{A} normal a las líneas de \mathbf{B} se define como $\phi = BA$; en el SI, la unidad para ϕ es el weber y en el sistema CGS es el maxwell (Mx), donde:

$$1Wb = 10^8Mx.$$

A partir de esto se demuestra que \mathbf{B} es una densidad de flujo.

8.3 Electromagnetismo

Para tratar sobre el electromagnetismo, se planteará lo más importante y básico posible para que se entienda y puedan realizar las aplicaciones pertinentes. Así, se desarrollará con base en dos postulados:

8.4 Primer postulado.

Cuando una corriente elemental $I dl$ situada en un campo magnético B experimenta una fuerza dF , que se expresa por:

$$dF = I \times B dl \quad (8.2).$$

La fuerza está en newton, la corriente en amperios y B densidad de flujo que, a su vez, es $B = \mu H$, donde μ es el coeficiente de permisividad magnética en el vacío y H , la intensidad del campo magnético, se mide en Amper – vueltas. Entonces, (8.2) se puede expresar como:

$$F = \oint I \times B dl.$$

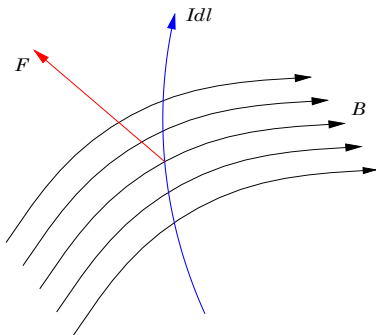


Fig. 8.5. Fuerza de Lorentz.

Debido a que es un producto vectorial, también se puede escribir como: $df = Idl B \text{Sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre I y B ; también se la expresa como $I = \int_l I B \text{Sen} \theta dl$.

En la Fig. 8.5 se puede apreciar la fuerza generada por la corriente eléctrica I en presencia del campo magnético B .

En seguida, unas aplicaciones del primer postulado.

1) Motor lineal

El principio del motor lineal está justamente en la fuerza de Lorentz; el movimiento se logra si el conductor tiene la facilidad de moverse rodando

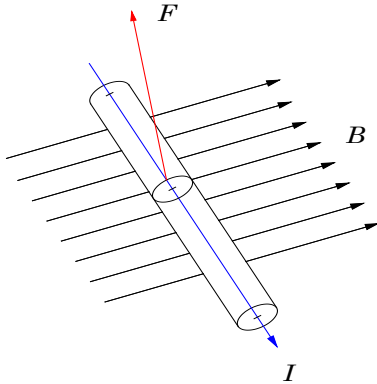


Fig. 8.6. Fuerza de Lorentz perpendicular al campo magnético B .

sobre un par de rieles que le transmiten la corriente eléctrica y, bajo la presencia de un campo magnético; en la Fig. 8.6 se puede ver que el conductor circular podría rodar sobre una pista; bajo la acción del campo magnético, aparece la fuerza perpendicular al conductor y la pista.

Ahora bien, el producto vectorial, como una forma de recrear el sentido de la corriente, del campo magnético y de la fuerza, tal como se ve en la Fig. 8.7, se puede establecer con los dedos de la mano derecha, por lo que se denomina

Ley de la mano derecha, donde el dedo índice debe coincidir con el sentido de la corriente, el dedo medio con el campo magnético y el pulgar, como respuesta, señala la fuerza, al abrir los dedos de forma ortogonal.

En la técnica, un motor lineal es, como el representado en la Fig. 8.8, un rodillo que puede girar y desplazarse sobre los rieles, que le transmiten

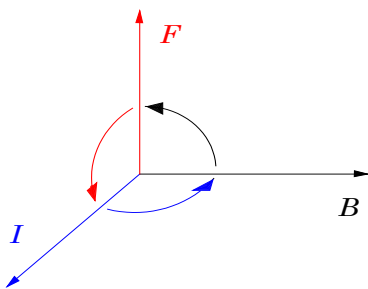


Fig. 8.7. Sentido de los vectores del producto vectorial.

la corriente; en la Fig. 8.9 se tiene una fotografía de un motor lineal, sigue los principios expresados y se encuentra en el Museo Casa de la Ciencia y el Juego de Pasto, que diseñó y elaboró el autor de este libro.

A partir de la definición del postulado: $dF = Idl \times B$; ahora bien, como $I = \frac{dQ}{dt}$, al remplazarlo, se tiene:

$$dF = \frac{dQ}{dt} dl \times B.$$

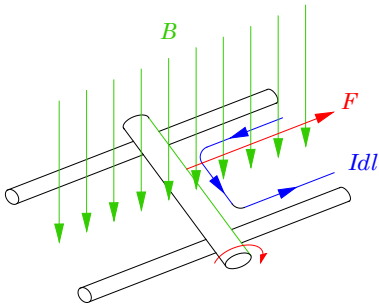


Fig. 8.8. Motor lineal.



Fig. 8.9. Fotografía de un motor lineal. Museo de la casa de la ciencia y el juego, en Pasto.

Fuente: Luis Portilla.

se puede expresar como: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a su vez: $v = r\omega$; entonces, al remplazar en la ecuación del periodo, se tiene: $T = \frac{2\pi}{v}r$; es decir, que el periodo queda: $T = \frac{2\pi mv}{QBv}$

Pero como $v = \frac{dl}{dt}$, entonces, esto queda así:

$$dF = dQv \times B.$$

De modo que la fuerza quedará:

$$F = Qv \times B \quad (8.3).$$

Con base en este resultado, todas las aplicaciones que se presentan tienen efecto.

Ciclotrón. Cuando una carga penetra en un campo magnético con una velocidad determinada v , la carga (carga negativa) se desvía y, al seguir moviéndose, genera un movimiento circular; si hay una fuerza externa que la mantenga girando, la partícula seguirá haciendo círculos.

En este caso, la fuerza magnética es la fuerza centrípeta, de modo que, en condiciones de equilibrio, se puede escribir:

$$QvB = \frac{mv^2}{r},$$

de tal forma que: $r = \frac{mv}{QB}$.

Por otra parte, el periodo de rotación

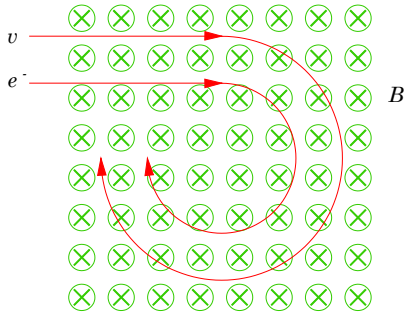


Fig. 8.10. Campo magnético que entra al libro y la carga eléctrica penetra de manera perpendicular de izquierda a derecha.

$$T = \frac{2\pi m}{QB} \quad (8.4).$$

En cuanto al periodo de rotación de las cargas respecto a un centro definido es inversamente proporcional por la intensidad del campo y de la carga y directamente proporcional por el tamaño de la carga, en este caso se pueden plantear los siguientes interrogantes cuando la carga parte del reposo y acelera por la acción de una diferencia de potencial.

- Calcular la velocidad final.

Solución. Para resolver este interrogante, se puede partir del principio de conservación de la energía: $U = QV = \frac{1}{2}mv^2$; entonces, al despejar la velocidad, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{2QV}{m}}$$

Ahora, si con la velocidad adquirida penetra en un campo magnético B perpendicularmente (Fig. 8.10), ¿cuál es el radio que describe?

Solución. De acuerdo a la tercera Ley de Newton: $F = QvB = m\frac{v^2}{r}$; como ya se conoce la velocidad, al remplazarla, se tiene:

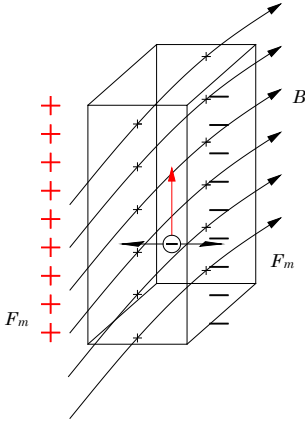
$$rQB = m\sqrt{\frac{2QV}{m}}$$

Como lo que se quiere averiguar es el radio, entonces:

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{Q}} \quad (8.5).$$

Efecto Hall

Cuando se tiene un conductor plano, como una cinta, en presencia de un campo magnético B cuyo sentido entra al libro, los electrones de carga negativa que viajan hacia arriba (vector de color rojo) tienden a moverse hacia la derecha, como se puede ver en la Fig. 8.11, polarizando la cinta más negativa de un lado que del otro. Ahora, esto también lleva a que se genera una fuerza eléctrica, que se pueden equilibrar así:



$$F_E = QE,$$

y la fuerza magnética:

$$F_m = QvB.$$

En el momento del equilibrio, se tiene:

$$QE = QvB.$$

Al final, se tiene: $v = \frac{E}{B}$; es decir que

$$E = v \times B \quad (8.6).$$

Con esto se puede calcular la velocidad en el conductor que, en este caso, será la velocidad de arrastre.

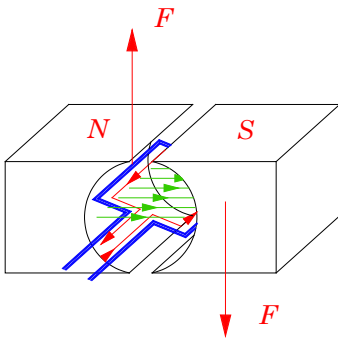


Fig. 8.12. Esquema de una espira de motor.

En la pandemia, se propuso utilizar este principio para la captura de virus, si se conoce su carga eléctrica.

Principio del motor

Es una máquina a la que se le puede inyectar energía eléctrica para que él convierta en energía mecánica. Con base en el primer postulado, se puede entender el funcionamiento del motor.

Una espira es un conductor sólido que puede girar alrededor de su eje axial;

cuando está en medio de un campo magnético B , se cumple en ella el primer postulado, la fuerza de Lorenz; es decir:

$$F = Idl \times B.$$

Si sobre esta espira circula una corriente I , se tiene la siguiente fenomenología:

En el lado derecho de la espira de la Fig. 8.12, el sentido de la corriente entra al libro; el campo magnético está de izquierda a derecha; por tanto, en esta parte, la fuerza que se tiene es hacia abajo, como se ve en la Fig. 8.12; en el otro lado de la espira, la corriente está saliendo y el campo magnético conserva su sentido de izquierda a derecha; entonces, la fuerza, según la Ley de la mano derecha es hacia arriba. Según estos dos lados de la espira, se genera una dupla, dos torques que hacen girar la espira en sentido horario; para que el proceso continúe, hace falta que en

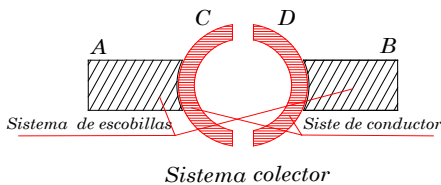


Fig. 8.13. Sistema de colector.

un extremo haya un colector con escobillas; el sistema consta de un colector circular partido en dos: C y D , de la Fig. 8.13; cada una, se conecta con un lado de la espira; dos escobillas que hacen contacto sin frenar a la montura A y B , de la Fig. 8.13. El sistema generalmente se

fabrica de cobre y las escobillas en carbono; esta combinación, que se utiliza universalmente, produce poco chisporroteo en el momento de establecer el contacto, con muy bajo coeficiente de rozamiento y muy buena conductividad.

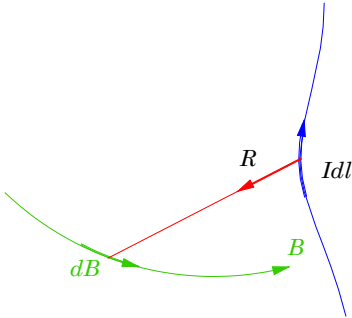
Este sistema lleva a que la corriente está continuamente entrando por el lado derecho cada vez que da la vuelta por inercia y se repite de forma indefinida o hasta que dure la conexión con la fuente.

Un devanado es un conjunto de espiras; entonces, cada espira produce una dupla; de la cantidad de espiras que haya, será la fuerza del motor. En general, todos los motores eléctricos de los vehículos, como de plumilla, arranque, ventilación y demás, son de este tipo; hay en ellos pequeños y medianos imanes permanentes que generan el campo magnético; también se encuentran en la mayoría de los juguetes.

Después de la máquina de vapor y los motores a gasolina, este tipo de motores ha realizado su propia revolución industrial en el mundo.

8.5 Segundo Postulado

A este postulado se lo denomina **Ley de Ampère-Laplace**. Un elemento de corriente Idl produce un campo magnético dB en un punto que se encuentra a una distancia r . Se lo expresa así:



$$dB = \frac{\mu_0 I \times R}{4\pi r^2} dl \quad (8.7).$$

En la Fig. 8.14 se puede ver cómo el elemento de corriente genera un elemento de campo magnético a una distancia r . De modo que el campo magnético se puede expresar como:

$$B_{(r)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl_{(r)} \times \vec{R}}{r^2} \quad (8.8),$$

Fig. 8.14. Un elemento de corriente genera un elemento de campo magnético.

donde \vec{R} es el vector unitario, que se define como: $\vec{R} = \frac{R}{r}$ (el vector sobre su

magnitud); como la corriente es constante, entonces, sale de la integral y, respecto a esta integral cerrada, se refiere a que el campo magnético envuelve al conductor, de allí que el campo magnético se encuentra alrededor del conductor en infinitas capas concéntricas.

Otro tipo de notación puede ser:

$$B_{(r)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{u_r \times u_R}{r^2} dl.$$

Este tipo de notación es mucho más sencillo de entender debido a que el producto vectorial se establece respecto a la corriente y el vector posición del punto en cuestión. Ahora bien, si se piensa la corriente eléctrica en función de la densidad, entonces: $dl = JdS$; al remplazar, queda:

$$B_{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V \frac{J_r \times R}{r^2} dVol.$$

Cuando se trata de una carga móvil, entonces, como $I = \frac{dQ}{dt}$, al remplazar en la ecuación (8.7), se tiene: $dB_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \times \frac{\vec{R}}{r^2} dl$, pero como $v = \frac{dl}{dt}$, entonces se tiene:

$$dB_r = \frac{\mu_0}{4\pi} dQ \frac{v \times \vec{R}}{r^2},$$

o lo que es lo mismo:

$$B_r = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{v \times \vec{R}}{r^2} \quad (8.9).$$

Movimiento de cargas en presencia de campo eléctrico y magnético.

Cuando una carga tiene ante sí dos campos E y B , se presentan las fuerzas eléctrica y magnética o de Lorenz, así: como la corriente se define como: $I = \iint J dS$; por otra parte, la corriente de conducción se define como: $J = \sigma E$ y la corriente de convección como $J = \rho v$.

Es muy importante tener en cuenta este concepto: la corriente de conducción no produce campo eléctrico por fuera del conductor debido a que las fuerzas eléctricas se neutralizan entre electrones y iones, mientras que las cargas móviles sí generan campo eléctrico.

De modo que, para una carga puntiforme, la fuerza se expresa como:

$$F_T = F_E + F_B$$

$$F_T = QE + Qv \times B$$

Al factorizar la carga, se tiene:

$$F_T = Q(E + v \times B).$$

Ahora bien, cuando se trata de una nube de cargas, se debe pensar en una densidad de carga $\rho = \frac{Q}{V}$; por tanto, la carga es $Q = \rho V$; es decir, la situación queda así:

$$F = \rho V(E + v \times B) \quad (8.10).$$

Por otra parte, $v \times B$ es equivalente a un campo eléctrico, según la ecuación (8.6).

Ahora bien, cuando una carga se mueve en un campo eléctrico, la trayectoria que sigue es parabólica:

$$y = \frac{QE}{2mv_x^2} x^2,$$

donde el eje de la parábola es paralelo a la dirección de \mathbf{E} .

Movimiento de cargas cuando \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares.

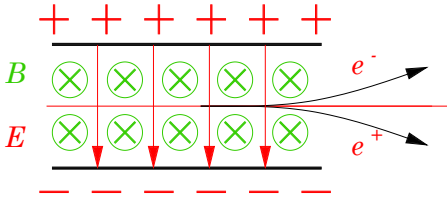


Fig. 8.15. Movimiento de cargas bajo la presencia de campos eléctrico y magnético.

Ahora, considérese que el campo eléctrico \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{B} ; en este caso, como se ve en la Fig. 8.15, el campo eléctrico desvía a la partícula hacia arriba si es negativa y hacia abajo si es positiva, pero el campo magnético hace lo contrario, cuando el campo eléctrico la desvía hacia arriba, el

campo magnético lo hace hacia abajo; entonces, la respuesta del instrumento de medida será que no hay desviación, con lo cual habrá que calibrar muy bien los campos eléctrico y magnético; o sea que, en este caso, se puede decir que

$$F_E = F_m.$$

Es decir, que se puede establecer:

$$0 = Q(E + v \times B),$$

con lo cual se llega a la relación referida a que $v = \frac{E}{B}$ (cuando los campos están de forma ortogonal).

Con estos experimentos, J.J. Thomson logró encontrar la relación carga/masa, cuyo valor fue: $\frac{Q}{m} = 1.76 \times \frac{10^{11}C}{Kg}$, con lo que dejó la forma para que quien encuentre la carga encontrara la masa, o al revés.

Años más tarde, Robert A. Millikan encontró el valor de la carga: $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ y, de inmediato, se podía calcular el valor de la masa: $m = 9.1 \times 10^{-31}Kg$.

Movimiento de cargas cuando E y B son paralelos.

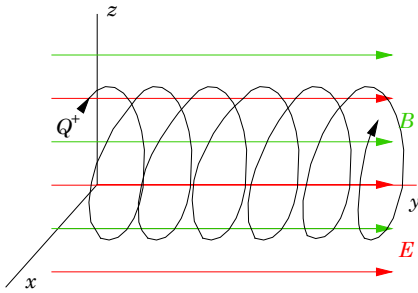


Fig. 8.16. Campos eléctrico y magnético con igual dirección.

La consideración que se va a plantear radica en que el campo eléctrico y el campo magnético tienen la misma dirección y sentido; así como se puede ver en la Fig.8.16, la partícula, por un lado, se desvía en la dirección del campo eléctrico y, por la otra, la partícula se somete a la fuerza de Lorentz, lo que la torna circular, con lo cual, en el desarrollo total del movimiento, la partícula describe un movimiento helicoidal, en que se

aleja del origen del campo eléctrico; esto ocurre, por supuesto, para una partícula positiva; en el caso de ser electrones, la helicoide sería en sentido contrario al que se muestra.

En la dirección del eje y acciona el campo eléctrico; por tanto, describe un movimiento acelerado, que se define por las ecuaciones cinemáticas:

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2,$$

y la velocidad es:

$$v_y = v_{0y} + at,$$

donde $a = \frac{QE}{m}$ y, si $v_0 = 0$, entonces las ecuaciones quedan:

$$y = \frac{QE}{2m}t^2$$

$$v_y = \frac{QE}{m}t$$

Por otra parte, se tiene que: $ma = F = Qv \times B$; por tanto, la aceleración es:

$$a = \frac{Qv \times B}{m} \quad (8.11).$$

Esta aceleración se establece sobre la partícula y la aleja del origen del campo, en este caso hacia la derecha.

Como ya se ha visto, el radio de la trayectoria es: $r = \frac{vm}{QB}$; al desarrollar el movimiento, la partícula se desplaza hacia la derecha y se aleja cada vez más; es decir, es una helicoidal de paso variable que aumenta, pero mantiene el radio de curva constante.

Movimiento de cargas en campo magnético convergente.

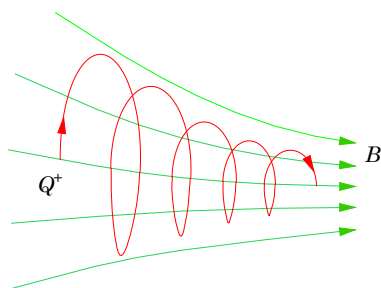


Fig. 8.17. Campo magnético convergente.

En los casos anteriores, cuando una partícula entra en un campo magnético no tiene otra alternativa que girar; ahora bien, cuando el campo magnético es convergente, significa que en la convergencia la intensidad del campo magnético es mayor; por tanto, la partícula girará con menor radio cada vez que se acerca a la convergencia, debido a que el radio de curvatura es:

$$r = \frac{vm}{QB}; \text{ aquí se ve cómo el radio es}$$

inversamente proporcional al campo magnético. Y la velocidad lineal se puede expresar como: $v = rw$; entonces, al remplazar el radio se tiene:

$$v = \frac{vm}{QB} w.$$

Al cancelar la velocidad y despejar la velocidad angular, resulta:

$$w = \frac{QB}{m}.$$

Esta es la expresión libre de la velocidad con la que entra la partícula al campo, por tanto, se concluye que la frecuencia angular w de todos los electrones es la misma; al dividir por 2π , se encuentra la frecuencia natural del ciclotrón: $f = \frac{w}{2\pi}$.

Ahora bien, cuando el campo es intensamente convergente, el radio de la órbita disminuye tanto que recorre la espiral cada vez más de prisa y más apretado, lo que puede conllevar una anulación del movimiento o un rebote; esto es algo a lo que se denomina “efecto pinch”, y es la forma de confinar la materia en estado plasmático, debido a que no hay contacto con otro

material; por tanto no hay problema con temperaturas críticas de materiales que se pudieran fundir.

Como parte de la evolución de la tierra, resulta que el polo norte y el polo sur representan un gran imán, cuyo polo norte es el sur y el sur es el norte terrestre, razón por la cual funcionan las brújulas donde el norte de la aguja de la brújula apunta al norte geográfico terrestre; se cree que muchas aves migratorias utilizan este campo magnético para migrar de sur a norte y viceversa.

El campo magnético se extiende por fuera de nuestra atmósfera; es una zona denominada magnetósfera, donde se forma un campo magnético con

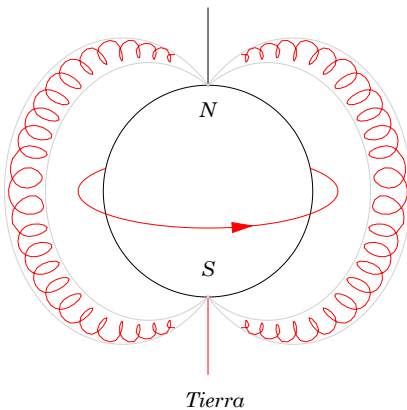


Fig. 8.18. Cinturones de Van Allen.

convergencia en los polos norte y sur, lo cual se convierte en una trampa para las partículas cargadas eléctricamente que vienen del espacio, pero fundamentalmente proviene del sol como viento solar; lo descubrió el satélite estadounidense Explorer 1, en un principio un proyecto fallido; estos cinturones magnéticos llevan el nombre del descubridor: James van Allen (Fig. 8.18).

8.6 Ley de Biot-Savart

La Ley de Ampère-Laplace establece que una corriente genera un campo magnético a una distancia determinada; la ley de Biot-Savart, en concordancia con la Ley de Ampère, es:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \times R}{r^2} dl.$$

Si se tiene en cuenta el vector unitario de la corriente, se obtiene:

$$dB_{(r)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{u_T \times u_R}{r^2} dl.$$

Como se tiene un producto vectorial, entonces se puede escribir:

$$dB_r = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \text{Sen}\theta,$$

donde $\mu_T \times \mu_r = \text{Sen}\theta$ y θ es el ángulo entre los vectores unitarios μ_T y μ_r ; entonces, el campo magnético por fuera del conductor en el punto P del espacio es:

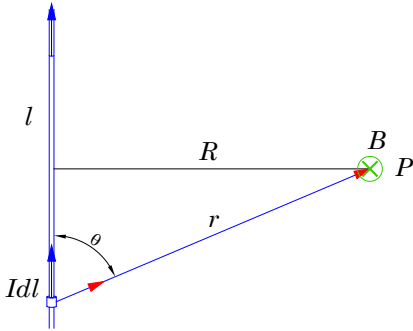


Fig. 8.19. Esquema de la localización del punto **P** donde hay que calcular el campo magnético.

En el punto **P** de la Fig. 8.19, el campo magnético está entrando al libro localizado por el radio vector r , de modo que la Ley de Ampère queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{cable}} \frac{1}{r^2} \text{Sen}\theta dl.$$

Dentro de la integral se encuentran tres variables, θ , r , dl , lo que imposibilita solucionarla; por tanto, se deben reducir estas variables a una sola, de modo que:

El ángulo θ formado entre la corriente **I** y el radio posición r del punto **P** permite dejar todas las variables en términos del ángulo; entonces: $\text{Tan}\theta = \frac{R}{l}$, con lo cual se tiene: $l = \frac{R}{\text{Tan}\theta}$, de donde: $l = R\text{Cot}\theta$.

Si se la deriva, se tiene:

$$dl = R\text{Cose}^2\theta d\theta.$$

Por otra parte, $\text{Sen}\theta = \frac{R}{r}$, de donde $r = \frac{R}{\text{Sen}\theta}$; también: $r = R\text{Cose}\theta$, pero el radio vector está elevado al cuadrado, entonces: $r^2 R^2 \text{Cose}^2\theta$.

Así, al remplazar en la Ley de Ampère, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\text{Sen}\theta R \text{Cose}^2\theta}{R^2 \text{Cose}^2\theta} d\theta$$

Al simplificar y ponderar las cantidades constantes, la expresión queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \text{Sen}\theta d\theta,$$

cuya solución resulta muy sencilla, de modo que:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\text{Cos}\pi - \text{Cos}0).$$

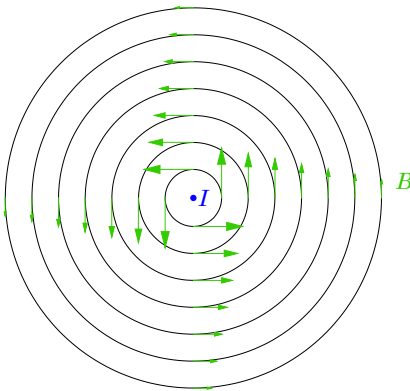


Fig. 8.20. Campo magnético generado por una corriente eléctrica.



Fig. 8.21. Campo magnético rotacional alrededor del conducto de soldador de arco. Fuente: fotografía del autor.

Esta solución queda en términos de:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (8.12).$$

Este resultado se conoce como Ley de Biot-Savart, dos científicos franceses, Jean Baptista Biot (1791-1862) y Félix Savart (1791-1841), que reportaron el cálculo de forma independiente.

Como se puede ver en la expresión (8.12), el campo magnético es inversamente proporcional a la distancia al punto y directamente proporcional a la intensidad de la corriente.

En la Fig. 8.20, se puede ver cómo la magnitud del vector campo magnético disminuye con la distancia hasta desaparecer en el infinito; además, a partir de la Ley de Ampère-Laplace, se puede observar el producto vectorial $u_T \times u_r$.

En la Fig. 8.21, se tiene una fotografía del campo magnético formado por limaduras de hierro alrededor de un cable de soldadura de arco de 100 Am; en este caso, la corriente eléctrica es alterna, pero el campo magnético se puede ver muy claro,

Fuerza entre corrientes paralelas.

En la Fig. 8.22, se tienen dos hilos conductores separados por una distancia α , la corriente que circula por el hilo conductor 1 tiene el mismo

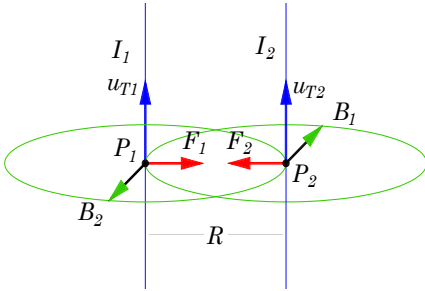


Fig. 8.22. Esquema de la interacción entre campos magnéticos producidos por corrientes paralelas.

sentido de la corriente eléctrica en el hilo conductor 2; por tanto, el hilo conductor 1 se convierte en el generador del campo magnético 1 que interactúa sobre el conductor 2, lo que genera una fuerza; de modo que el resultado de la Ley de Biot-Savart en el punto P_2 es: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$, donde R es la separación de los dos hilos conductores, como se ve en la Fig. 8.22, y la Ley de Biot-Savart en el punto P_1

es: $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$; para cualquiera de los dos puntos se aplica el primer postulado; es decir: $F = \int I \times B dl$, de modo que, al remplazar el valor del campo magnético, se tiene:

$$F = \int_{h.c.} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} dl,$$

donde la integral es sobre el hilo conductor; como las corrientes son constantes, entonces salen de la integral y solo queda la integral a lo largo del hilo conductor:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \int_0^l dl.$$

Por último, esto queda:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} l.$$

Ahora bien, si la corriente I de 1 Amp y $R = 1m$, al remplazar, se tiene:

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \frac{m}{n})(1A)^2}{(2\pi)(1m)} = 2 \times 10^{-7} \frac{N}{m}.$$

Esta es una nueva forma de definir el Newton en función de la corriente eléctrica, o definir también el amperio.

Campo magnético generado por una espira.

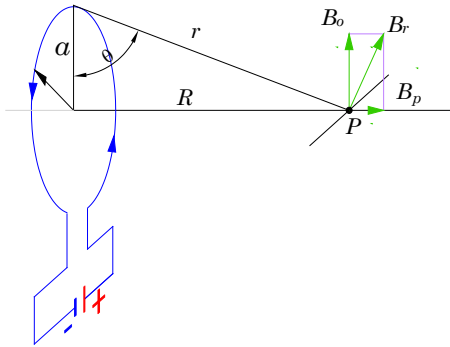


Fig. 8.23. Campo magnético en el punto P generado por una espira.

En este caso, se analizará cómo es el campo magnético generado por una espira de radio a en el punto P sobre el eje axial de la espira, por fuera del plano de la espira (Fig. 8.23). De modo que en el punto P el campo magnético se forma por un campo magnético ortogonal o perpendicular y paralelo al eje axial de la espira; esto es:

$$B_r = B_o + B_p.$$

El campo magnético perpendicular al eje se forma alrededor del eje de tal modo que este campo se anula y, por tanto, queda únicamente el campo magnético paralelo, de modo que el campo magnético paralelo se puede escribir como:

$$B_r = B_p = B \cos \theta.$$

Ahora bien, de acuerdo al segundo postulado, el campo magnético en el punto P es:

$$B = \int \frac{\mu_0 I u_T \times u_r}{4\pi r^2} dl,$$

donde $u_T \times u_r = \text{Sen}90^\circ = 1$; por tanto, lo que queda es:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{\text{linea}} dl,$$

donde la integral es a lo largo del conductor, pero este conductor forma una circunferencia; por tanto, la integral es: $\int_{\text{linea}} dl = 2\pi a$; así, al remplazar este resultado, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I 2\pi a}{4\pi r^2}.$$

Si se simplifican términos, queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a}{2r^2}.$$

Ahora bien, como el campo magnético paralelo es la proyección, entonces: $B_r = B \cos\theta$, por lo que, al remplazar, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \cos\theta.$$

Además, el $\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, sobre el triángulo que se tiene en la Fig. 8.23.

Entonces, el coseno es: $\cos\theta = \frac{a}{r}$, de modo que, al remplazar, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a a}{2r^2 r}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \quad (8.13)$$

A partir de la Fig. 8.23, se puede entender que $r = \sqrt{a^2 + R^2}$; por tanto, al remplazarlo, se tiene:

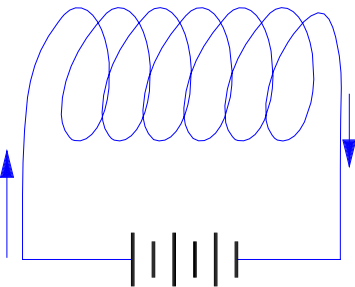
$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si se simplifica, y si R es pequeño, entonces al cuadrado sería más pequeño; o sea que esto queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (8.14).$$

Solenoides o grupo de espiras.

Como ya se acabó de encontrar que el campo magnético de una espira es: $B_r = \frac{\mu_0 I}{2a}$, algo que se puede expresar como:



$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2(\sqrt{a^2 + R^2})^3},$$

este es el campo magnético de una espira; ahora, si son N espiras, tal como se muestra en la Fig. 8.24, se tiene:

$$dB_r = \frac{\mu_0 I a^2}{2(\sqrt{a^2 + R^2})^3} NdR$$

Fig. 8.24. Grupo de espiras en un solenoide.

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2} \int \frac{dR}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

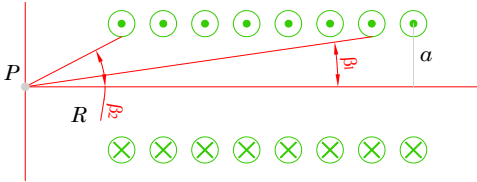


Fig. 8.25. Esquema interno de un solenoide.

Como en la integral hay más de una variable, entonces, para dejar la expresión en una sola variable, se puede proceder así:

A partir de la Fig. 8.25, se puede observar que:

$$\tan \beta = \frac{a}{R}, \text{ de donde } R = a \cot \beta,$$

con lo cual se tiene: $dR = -a \operatorname{cosec}^2 \beta d\beta$; al remplazar, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2} \int \frac{a \operatorname{cosec}^2 \beta}{(a^2 + a^2 \cot^2 \beta)^{\frac{3}{2}}} d\beta$$

Al mejorar esta expresión, se puede trabajar en el denominador, y resulta que: $(a^2 + a^2 \cot^2 \beta)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a^2 + a^2 \cot^2 \beta})^3 = (a \sqrt{1 + \cot^2 \beta})^3$, pero:

$\sqrt{1 + \cot^2 \beta} = \operatorname{cosec} \beta$; entonces, al remplazar, se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^3 N}{2 a^3} \int \frac{\operatorname{cosec}^2 \beta}{\operatorname{cosec}^3 \beta} d\beta$$

Al simplificar, queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I N}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} d\beta$$

Ahora bien, resulta que $\operatorname{cosec} \beta = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}$; por tanto, la ecuación queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I N}{2} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \operatorname{sen} \beta d\beta$$

donde $\beta_0 \approx 0$ y $\beta_1 \approx \pi$; por tanto, esto queda:

$$B_r = \frac{\mu_0 I N}{2} (\operatorname{Cos} 0 - \operatorname{Cos} \pi)$$

$$B_r = \frac{\mu_0 IN}{2}(1 + 1)$$

con lo cual queda:

$$B_r = \mu_0 IN \quad (8.15).$$

Este es el resultado para un solenoide no muy largo; en caso de tener un solenoide largo, donde el radio resulta despreciable con la longitud, es decir: ($l \gg a$), y

$$B_r = \frac{\mu_0 IN}{l} \quad (8.16).$$

Y lo contrario, si la bobina tiene un radio muy grande comparado con la longitud: ($l \ll a$).

$$B_r = \frac{\mu_0 IN}{2a}$$

Toroide.

Se trata de un arrollamiento de un hilo conductor sobre un núcleo circular, de tal forma que el campo magnético se confina en el interior del material y no se presenta campo magnético por fuera de este núcleo (Fig. 8.25); ahora bien, el campo magnético del toroide en el interior, por ahora, se acepta que es:

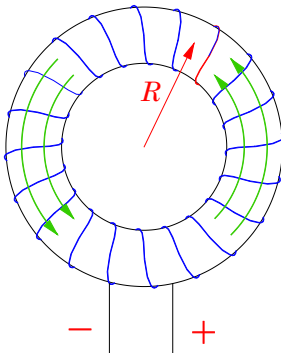


Fig. 8.25. Esquema de un toroide.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

donde R es el radio medio.

8.7 Ley de Gauss para el campo magnético

Así como ocurre con el campo eléctrico,

$$\Phi = \int_S E dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

También se puede referir a la Ley de Gauss para el campo magnético. Por ahora, el concepto de flujo eléctrico Φ y, al aplicar el Teorema de la Divergencia, se obtiene: $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Ahora bien, a diferencia del campo eléctrico, las líneas del campo magnético son **cerradas**, es decir, no tienen principio ni fin: pueden ser circulares o elípticas o asumir otras formas, pero, al final, son cerradas.

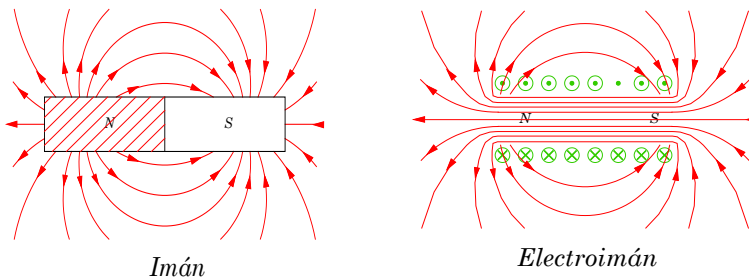


Fig. 8.26. Comparación de las líneas de campo de un imán y un electroimán.

En la Fig. 8.26, se muestran las líneas de campo de un imán sólido y un electroimán: en este último, resulta mucho más evidente que las líneas de campo son cerradas, pues se puede ver experimentalmente que las líneas de campo se continúan en el interior con o sin núcleo; quizá, en el contexto histórico, se entienda que no era posible ver en el interior de un imán, pero cuando se entendió que el campo magnético es un resultado de la corriente eléctrica, se pudo entender que estas líneas de campo son continuas en el interior del imán. Debido a que las líneas de campo son continuas, se puede afirmar que el flujo magnético es nulo; es decir:

$$\Phi_B = 0.$$

Por tanto:

$$\Phi_B = \iint_S B dS = 0 \quad (8.17).$$

Al aplicar el Teorema de la Divergencia $\int_V \text{Div} B dV = \oint_S B dS$, se tiene:

$$\oint_S B dS = 0,$$

y, por ende,

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (8.18).$$

Así, la divergencia del campo magnético es nula.

8.8 Densidad de flujo magnético - Ley de Ampère

Como una alternativa del postulado 2, donde se relacionan los campos magnéticos con corrientes eléctricas, se puede deducir la Ley de Ampère-Laplace, así:

De acuerdo a la ley de Biot-Savart se tiene: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, un campo magnético circular concéntrico alrededor del eje axial del hilo conductor.

Ahora bien: si se realiza una integración de línea a cada lado, significa que, como el campo magnético es circular, entonces la integración a lo largo de dicha línea de campo dará la corriente eléctrica; esto es:

$$\oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint dl.$$

Como ya se ha visto antes, la integral de línea cerrada da el perímetro de la circunferencia de radio R ; esto es: $\oint dl = 2\pi R$, de modo que:

$$\oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R.$$

Si se simplifica, se tiene la Ley de Ampère expresada en forma integral:

$$\oint B dl = \mu_0 I \quad (8.19).$$

La integral cerrada del campo magnético, la constituye las líneas de campo, que se generan por una corriente eléctrica; con esta ecuación, se está viendo la interacción que existe desde el campo magnético hacia quien lo genera, la corriente eléctrica, que puede fluir por un hilo:

$$\lambda_B = \mu_0 I.$$

Ahora bien: como la corriente eléctrica, en términos de la densidad de corriente, es: $I = \int_S J dS$, al remplazarla, se tiene:

$$\lambda_B = \mu_0 \int_S J dS.$$

Esto también se puede expresar como:

$$\oint_l B dl = \mu_0 \oint_S J ds.$$

A partir del Teorema de Stokes, se tiene: $\oint_l Fdl = \oint_S RotFdS$; entonces, al aplicar este resultado, se tiene:

$$\oint_l Bdl = \oint_S RotBdS = \mu_0 \oint_S JdS.$$

Por tanto, se tiene:

$$RotB = \mu_0 J.$$

La expresión rotacional ($RotB$) de \mathbf{B} también se denomina circulación de \mathbf{B} y se simboliza como: $RotB$; es lo mismo que: $\nabla \times B$; entonces, la Ley de Ampère queda expresada en forma diferencial:

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (8.20).$$

Campo magnético generado por la corriente que circula por un hilo conductor

Calcular el campo magnético generado por un hilo conductor muy largo en el punto \mathbf{P} , que se encuentra a una distancia \mathbf{R} , en el espacio.

Solución. A partir de la fórmula de Ampère en forma integral, se tiene: $\oint Bdl = \mu_0 I_C$. El largo o perímetro de la circunferencia donde se desarrolla el campo magnético es

$\int_c dl = 2\pi R$. Por tanto, el campo magnético es: $B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi R}$; este resultado ya se lo ha obtenido por otro método mucho más largo y complicado, de modo que la Ley de Ampère facilita mucho el cálculo del campo magnético.

Campo magnético generado por un Toroide

Si se supone que el radio promedio o el radio que pasa por el centro del toroide es \mathbf{r} :

Solución. Una vez más, a partir de la Ley de Ampère: $\oint Bdl = \mu_0 I_C$; en este caso, la corriente que circula es: $I_C = NI$; al remplazar y aprovechar el resultado del primer caso, se tiene: $B = \frac{\mu_0 NI_C}{2\pi r}$, donde \mathbf{r} se encuentra entre el radio externo y el radio interno: ($b < r < a$), donde \mathbf{b} es el radio externo y \mathbf{a} el radio interno.

Entonces, habrá un radio medio: $d = \frac{a+b}{2}$; con base en esto, se plantea la circunferencia media; ahora bien, el perímetro de la circunferencia media

es: $2\pi d$; entonces: $Per = 2\pi \left(\frac{a+b}{2}\right) = \pi(a+b)$. Por otra parte, N es el número de vueltas total, así n será el número de vueltas por unidad de longitud; esto es: $n = \frac{N}{Per} = \frac{N}{\pi(a+b)}$; por tanto: $N = n\pi(a+b)$; al remplazar lo anterior, se tiene:

$$B = \frac{\mu_0 n \pi (a+b) I}{2\pi r}$$

Cuando el radio medio $d = \frac{a+b}{2}$ es r , al remplazar, se tiene:

$$B = \mu_0 n I,$$

que corresponde al campo magnético en el centro del toroide, un resultado ya calculado.

8.9 ¿Qué es un imán?

En el contexto histórico, así se conoce a la piedra de magnetita; después, cuando el hombre pudo manipular el acero, aparecieron imanes a partir del acero y se encontró que esta propiedad magnética es muy propia de los metales ferrosos, propiedad que se caracterizó de acuerdo a la susceptibilidad magnética μ , comparada con la susceptibilidad magnética del vacío μ_0 .

De acuerdo con esta permisividad magnética, se puede establecer esta clasificación:

Ferromagnetismo	$\mu \gg \mu_0$
Paramagnetismo	$\mu > \mu_0$
Diamagnetismo	$\mu < \mu_0$

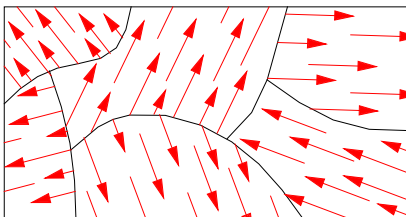


Fig. 8.27. Dominios de un material ferromagnético.

Ferromagnetismo. Un material ferromagnético es todo aquel susceptible de magnetizarse

En la Fig. 8.27, se puede ver el esquema de los dominios o partes del material cuyo campo magnético se encuentra orientado de forma aleatoria; por tanto, el resultado final del magnetismo es nulo, pues se anulan unos a otros; el

material, en estas condiciones, es susceptible de magnetizarse a través de algún medio donde los dominios se pudieran orientar en un solo sentido.

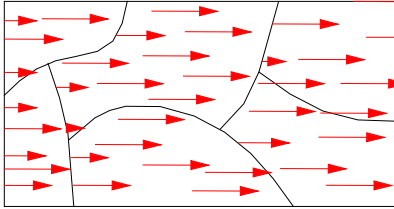


Fig. 8.28. Esquema de un material donde los dominios se encuentran orientados.

Los materiales ferromagnéticos susceptibles de magnetizarse a través de fuerza mecánica, como golpes, tensiones o compresiones deformantes, torsiones o bajo la influencia de campos magnéticos externos, pueden afectar a los dominios y así lograr un material con magnetismo permanente, como es el caso del material de la Fig. 8.28, donde, por algún medio de los mencionados, se ha logrado que todos

los dominios se encuentren orientados. Con algunos materiales, como el Hierro, el Cobalto, el Níquel y compuestos entre estos materiales, como son los aceros, se pueden fabricar imanes permanentes o, al menos, operantes por un buen tiempo tras recibir el tratamiento adecuado para la imantación.

Paramagnetismo. Esta característica es propia de los materiales que pueden imantarse temporalmente y pasan por fuertes picos de imantación, para retornar a su estado natural; entre estos materiales se encuentran el Hierro dulce, el Magnesio, el Titanio, el Silicio y el Wolframio, entre otros.

Diamagnetismo. Se encuentra en materiales que, cuando se encuentran frente a un campo magnético externo, invierten el sentido del campo magnético para generar un campo magnético contrario al externo; entre estos materiales, se pueden mencionar el Cobre, el Aluminio, el agua, el Bismuto, los gases nobles, el Oro, el Silicio y el Germanio, entre otros.

Origen del magnetismo. Para entender la naturaleza del magnetismo, se debe llegar a las entrañas propias del átomo, donde los electrones juegan un papel importante, así como lo hacen en la corriente eléctrica.

El electrón, además de formar parte de la estructura atómica, para dar equilibrio eléctrico, de forma aproximada, se puede decir que se encuentra en

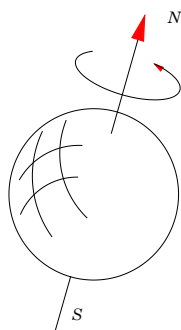


Fig. 8.29.
Representación de
espín de un electrón.

movimiento en órbitas con movimiento de traslación; además, el electrón rota sobre su propio eje, algo a lo que se ha denominado **espín electrónico** (Fig. 8.29). La suma de estos espines conforma los dominios del material, así que el espín electrónico se comporta como la unidad del magnetismo, así como lo es para la corriente eléctrica. Se afirma, también, que el espín es un momento angular que tiene las partículas por el solo hecho de existir, algo a lo que se denomina intrínseco, es de $\frac{1}{2}$ y no se asocia con giros o movimientos; con esto se conforma en el cuarto número cuántico, término acuñado en los años 1920.

Hasta la fecha, no se conoce cuál es la naturaleza del electrón; es decir, no se ha logrado dividir un electrón, por lo que se lo considera una de las partículas subatómicas más dura de la naturaleza, unas 1836 veces más pequeña que su compañero, el protón, con lo cual conforma el 0.06% de la materia.

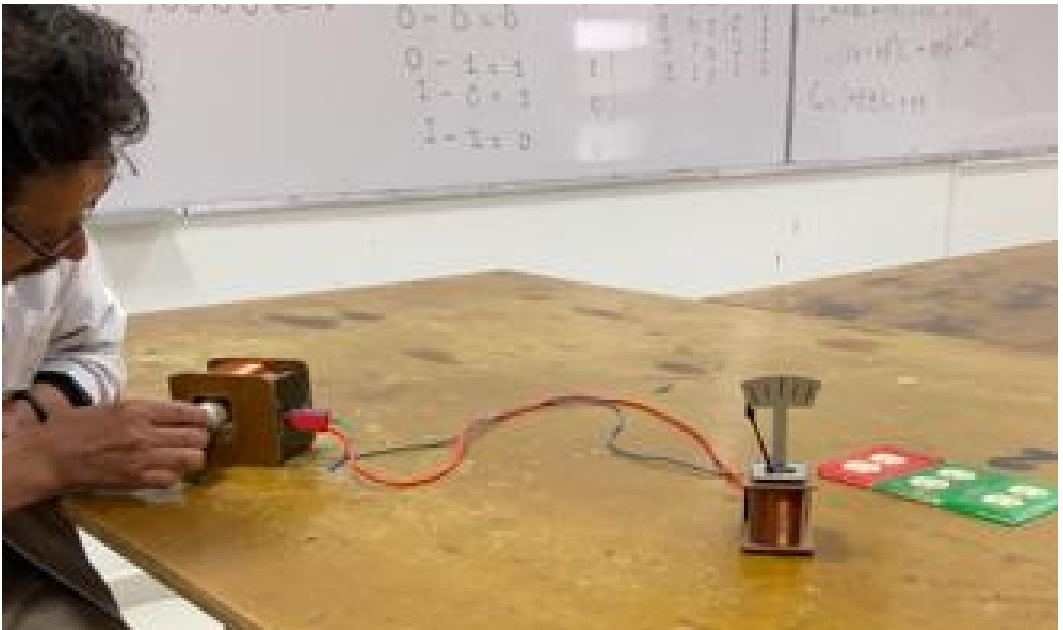
A estas partículas se les debe la electricidad, el magnetismo, la conductividad térmica y, en gran medida, determinan las uniones atómicas iónicas o covalentes.

El origen de los electrones se acepta por ahora como las partículas que se formaron en los primeros milisegundos de la gran explosión, el *Big Bang*; desde entonces, forman parte de los átomos y estos de la materia en general; los electrones pueden adherirse fuertemente a un átomo o se los puede encontrar libremente y saltan de un átomo a otro, como ocurre en el caso de los materiales conductores.

Capítulo 9



Campos dependientes del tiempo



Lab de Física - Universidad de Nariño. Fotografía: 30 de noviembre del 2023.
En la fotografía, el profesor Fredy Santacruz mueve el imán). Fuente: el autor.

9.1 Campos dependientes del tiempo

Estos campos son aquellos que están continuamente cambiando con el tiempo; es decir no son estacionarios, como puede ser el caso del campo magnético de un imán; sin embargo, si a un imán se lo hace oscilar de forma armónica o mediante cualquier otro tipo de movimiento, su entorno se ve afectado por tener también un flujo magnético variable; de modo que un flujo de campo magnético se lo puede expresar como:

$$\phi = \oint_S B dS \quad (9.1),$$

donde el flujo es el campo magnético que pasa por un área; ahora bien, si el imán que oscila lo efectúa frente a una espira que corta las líneas de campo, se establece una diferencia de potencial en los extremos de la espira, esto es lo que constituye la Ley de Faraday; así:

$$v_E = -\frac{d\phi}{dt} \quad (9.2).$$

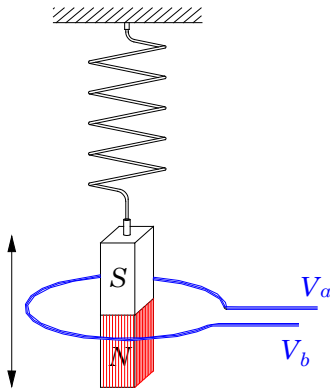


Fig. 9.1. Esquema de una espira y un imán con movimiento oscilatorio.

En la Fig. 9.1, se puede ver un imán dotado de movimiento oscilatorio armónico simple debido al resorte del que se suspende, lo que lleva a que el campo magnético del imán se tornase dependiente del tiempo, con lo cual en los extremos de la espira se genera una diferencia de potencial, que cambia de polaridad al cambiar el sentido del movimiento del imán.

Entonces, ¿qué ocurre en el interior del hilo conductor?

Las cargas móviles, que son los electrones libres del material del conductor, de forma aproximada se puede decir que están quietos, pero, bajo la presencia del campo magnético variable con el tiempo, las cargas responden al movimiento y salen de su posición de equilibrio, lo que significa que cada vez que lo hacen se genera una variación en el campo eléctrico de cada carga, con lo cual en los extremos del conductor se presenta una diferencia de potencial.

A partir del Capítulo 3, se tiene la ecuación (3.5): $V_E = - \int E dl$; al combinarla con la ecuación (9.2), se tiene:

$$V_E = - \int_l E dl = - \frac{d\phi_B}{dt},$$

Con lo cual se puede igualar la segunda parte; esto es:

$$\int_l E dl = \frac{d\phi_B}{dt}.$$

Ahora bien, ocurre que, a partir de la expresión (9.1) $\phi_B = \iint_S B dS$, al remplazarla, queda:

$$\int_l E dl = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B dS \quad (9.3).$$

Esta es la conocida Ley de Faraday, expresada en forma integral.

A partir del teorema de Stoques (véase Apéndice 4.7), donde se establece que: $\int_l E dl = \iint_S \text{Rot} E dS$, si esto se aplica a la Ley de Faraday, se tiene:

$$\int_l E dl = \iint_S \text{Rot} E dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B dS,$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \text{Rot} E &= - \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times E &= - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (9.4). \end{aligned}$$

Esta es la Ley de Faraday-Henry, expresada en forma diferencial.

Ley de Lenz. El físico alemán Heinrich Lenz, no muy satisfecho con la propuesta de Faraday, describió la dirección de la corriente inducida en el experimento, con lo cual propuso una regla sencilla para complementar estos casos; a medida que el polo norte del imán se acerca, la respuesta de la bobina genera una corriente, de tal forma que el campo magnético que generado se oponga al campo magnético del imán y, cuando el imán se aleja, se genera una corriente opuesta a la variación del campo magnético; en cualquier caso, la fuerza magnética inducida en la bobina siempre será opuesta al campo magnético dependiente del tiempo. Más tarde, Hermann von Helmholtz señaló que la Ley de Lenz no es más que la conservación de la energía.

Aplicación técnica

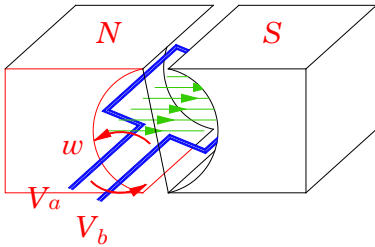


Fig. 9.2. Esquema de un generador de energía eléctrica.

Una de las aplicaciones de la Ley de Faraday que cambió al mundo fue la generación de electricidad; por primera vez se tiene la fábrica en la que se puede generar la electricidad; de hecho, años antes se había logrado tener un motor, ahora había llegado el momento para que este motor se convirtiera en generador. En la Fig. 9.2, se tiene una espira que gira dentro de un campo

magnético; al girar, el área transversal de la espira cambia con respecto al campo magnético estacionario de los imanes permanentes, lo que lleva a que el flujo cambie con el tiempo y, al depender de la velocidad w que tuviera, será la variación del movimiento de los electrones libres expresados como variación del potencial V_a y V_b .

Como la variación del flujo magnético es alternante, entonces el potencial eléctrico también lo es; o sea, $B_t = BSenwt$; por tanto, la diferencia de potencial en los extremos se expresará como:

$$\nabla \times E = - \frac{\partial BSenwt}{dt}.$$

Con esto, se convierte en un generador de corriente alterna, con frecuencia w .

9.2 Autoinductancia

Cuando se hace circular corriente por un conductor de longitud l , no es lo mismo que fuese recto a que estuviese enrollado y formase una espira o una bobina; es decir, de haber varias vueltas juntas, el asunto es mucho más evidente y, si se cierra el circuito con una corriente pulsante o que variase con el tiempo, como es el caso de una corriente alterna (CA), así este fenómeno es muy propio de las bobinas.

Como el flujo ϕ es proporcional a la corriente I , entonces, se puede decir:

$$\phi = LI \quad (9.5),$$

donde a la constante de proporcionalidad L se la denomina *autoinductancia* del circuito; como unidades de medida se utilizan los henrios.

De modo que, si el campo magnético varía, la corriente también lo hace; de acuerdo a la Ley de inducción electromagnética, se induce una fuerza electromotriz (fem) en el circuito; esto es:

$$V_L = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

El signo menos indica que el potencial eléctrico se opone a la variación de la corriente, ya fuese que aumentara o disminuyera.

Dado a que la autoinductancia también es variable, entonces el potencial dependiente de esta variación es:

$$V_L = -\frac{d}{dt}(LI).$$

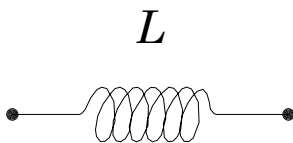


Fig. 9.3. Simbología de la autoinductancia.

Es importante conocer el símbolo de la autoinductancia, como se muestra en la Fig. 9.3.

Cuando se combina con una resistencia, que todo aparato eléctrico tiene, se convierte en un circuito RL y, de forma similar a lo que ocurría con la capacitancia, también se presentan dos casos:

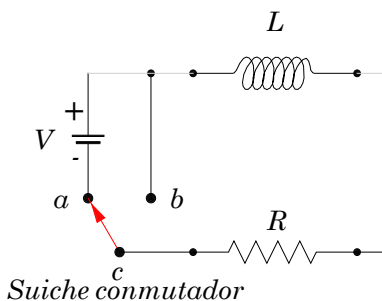


Fig. 9.4. Circuito LR en serie con la fuente de poder.

9.3 Circuito R. L. En cualquier circuito eléctrico siempre habrá una resistencia, así fuese la resistencia interna del aparato; más aún, si existiera una resistencia diferente a la del aparato, de todos modos, se presentan dos casos: cuando el suiche conmutador conecta **ac**, deja LR en serie con la fuente, y cuando conecta **bc**, aísla la fuente de los elementos LR después de que la corriente haya pasado por los elementos.

1) Cuando el circuito se conecta a la fuente, tal como se puede ver en la Fig. 9.4, el suiche está en la posición **ac**. En este circuito, la corriente de la fuente de poder pasa por los dos elementos L y R ; así:

$$V = V_L + V_R.$$

Ahora bien, tanto V_L como V_R se pueden expresar como:

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} \text{ y } V_R = IR.$$

Al remplazar, se tiene: $V = L \frac{dI}{dt} + IR$.

Esto también se puede expresar:

$$IR = V - L \frac{dI}{dt}.$$

Si se organiza la expresión matemática, queda:

$$dt(IR - v) = -LdI,$$

con lo cual se tiene:

$$\frac{dI}{I - \frac{V}{R}} = -\frac{R}{L} dt.$$

La solución se realiza mediante integración:

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \frac{V}{R}} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt.$$

Entonces, como solución se tiene:

$$\ln \frac{I - \frac{V}{R}}{-\frac{V}{R}} = -\frac{R}{L} t.$$

Al aplicar la función inversa, se tiene:

$$I - \frac{V}{R} = -\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Al final, queda:

$$I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \quad (9.5).$$

En este caso, se entiende que el elemento L es como si se hubiera cargado y alcanza el valor V/R , que se va a descargar en el elemento R ; por tanto, el circuito queda como se ve en la Fig. 9.5.

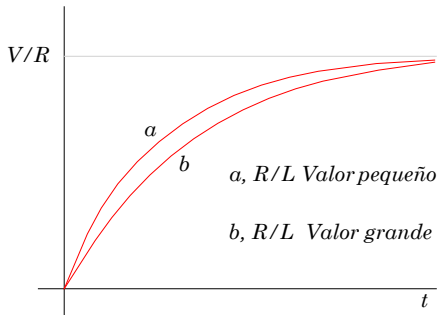


Fig. 9.5. Curvas de cierre del circuito.

El resultado de este circuito se puede comparar con lo que ocurre en la caída de un objeto en un medio viscoso: la velocidad depende de la viscosidad del medio; en este caso, el valor corresponde a: R/L ; de igual forma, se puede comparar con el circuito RC cuando está en serie con la fuente de poder, el capacitor se carga.

2) Cuando el suiche se coloca en la posición **bc**; en este caso, se aísla la fuente de poder y deja que la energía que alcanzó a almacenar la bobina se descargue en la resistencia, tal como se puede ver en la Fig. 9.6.

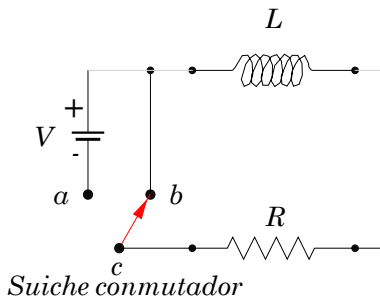


Fig. 9.6. Circuito LR.

El segundo término disminuye con el tiempo; al depender de los valores, el tiempo puede ser grande o pequeño; sin embargo, este término desaparece con el tiempo de forma asintótica, tal como se puede ver en la Fig. 9.5, para llegar al valor V/R .

En este caso, la energía de la bobina decae en la resistencia; esto es:

$$RI = -L \frac{dI}{dt}$$

Si se organiza la ecuación, para poder encontrar la solución, queda:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

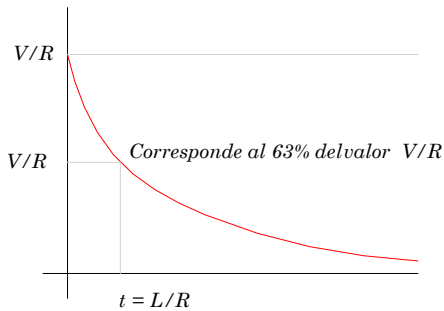


Fig. 9.7. Curva de descarga de la

cual se puede observar que es una descarga de la energía almacenada en la bobina, como se ve en la Fig. 9.7. Cuando L/R toma un valor igual a t es justamente cuando ha llegado al 63% del valor inicial V_0/R .

9.4 Energía del campo magnético

Como se ha visto, para que circule energía eléctrica a través de una resistencia o de un solenoide se necesita de una fuente de poder que genera la fuerza electromotriz necesaria para que se produzca la circulación de la corriente eléctrica a través de los elementos conectados en serie. La energía necesaria por unidad de tiempo es la potencia que se le suministra.

Según la Ley de Ohm, en el circuito 1 de autoinductancia, se tiene:

$$V = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Como la potencia es $P = VI$, entonces, si multiplicamos a la expresión de la Ley de Ohm por la corriente eléctrica, se tiene:

$$VI = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}.$$

En esta expresión, se tiene la potencia del circuito: RI^2 es la potencia encargada de mover electrones en la resistencia, lo que se expresa como Ley de Joule, energía que se disipa en forma de calor; por tanto, como se necesita la energía del campo magnético, se omite lo que se disipa en la resistencia y se deja únicamente lo relacionado con el campo magnético; esto es:

$$\int_V^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt.$$

Y como solución a la integral, se tiene:

$$\ln \left(I - \frac{V}{R} \right) = - \frac{R}{L} t.$$

Al aplicar la función inversa, queda:

$$I = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.6)$$

Una vez más, la corriente disminuye a medida que pasa el tiempo hasta llegar a cero, a partir de V/R , con lo

$$P = LI \frac{dI}{dt}.$$

Como la potencia es la energía por unidad de tiempo, entonces se puede expresar como:

$$\frac{dU}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Aquí se cancela el diferencial del tiempo y la expresión queda:

$$\begin{aligned} dU &= LI dI \\ \int_0^U dU &= L \int_0^I IdI \\ U &= \frac{1}{2} LI^2 \quad (9.7) \end{aligned}$$

Esta es la expresión de la energía para el campo magnético.

9.5 Densidad de energía del campo magnético.

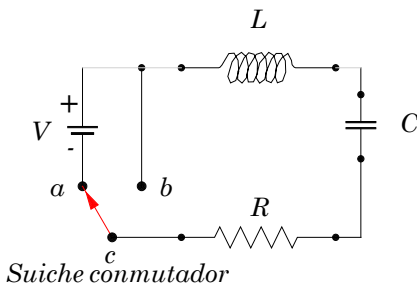


Fig. 9.8. Circuito RLC.

De igual forma como la energía se almacena en un capacitor como campo eléctrico, en una bobina también se puede pensar que se almacena energía magnética, en el caso de un solenoide donde la inductancia depende del número de vueltas, del área y de la longitud del solenoide. A partir de la ecuación (8.15): $B = \mu_0 IN$, al combinar con la ecuación (9.7), se tiene:

$$U = \frac{1}{2} L \frac{B^2}{\mu_0^2 N^2}.$$

Ahora bien, la inductancia en un solenoide es: $L = \mu_0 N^2 Al$, de modo que, al remplazar, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 Al \frac{B^2}{\mu_0^2 N^2}.$$

Si se cancelan términos, al final queda:

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} Al.$$

Ahora bien, la sección transversal del solenoide por la longitud da un volumen; por tanto, si se mide la energía respecto a este volumen, se tiene una densidad de energía por unidad de volumen; esto es:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (9.8).$$

9.6 Circuito R. L. C. (Oscilaciones eléctricas)

Este tipo de circuito es muy importante en la técnica eléctrica y electrónica; como se puede ver en la Fig. 9.8, en el circuito, el suiche permite establecer dos posiciones: cuando el suiche conecta *ac*, dispone a la fuente de poder para que su fuerza electromotriz haga circular energía eléctrica a través de los elementos L, C y R y, en la posición *bc*, deja que la energía acumulada en el capacitor y la bobina o solenoide descargue en la resistencia, de modo que se van a analizar estas dos opciones.

Circuito de oscilaciones libres. Este circuito se logra cuando tanto el capacitor como el inductor se han cargado de energía y se disipa en el elemento resistor; es decir, el suiche conmutador se conecta en la posición *bc*; por tanto, la expresión matemática queda:

$$V_R = V_L + V_C.$$

Como $V_R = IR$, $V_L = -L \frac{dI}{dt}$ y $V_C = -\frac{Q}{C}$, al remplazar, queda:

$$RI = -L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}.$$

Si se deriva la ecuación, se obtiene:

$$R \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}.$$

Con la organización de términos, se puede escribir:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

Por último:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (9.9).$$

Esta ecuación es igual a la ecuación del movimiento amortiguado (véase Tomo 2, ecuación (4.10.3)), donde los coeficientes se los puede expresar como:

$$2\mu = \frac{R}{L}, \text{ y } w^2 = \frac{1}{RL}.$$

Por tanto, al remplazar, se tiene:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\mu \frac{dI}{dt} + w^2 I = 0.$$

Como la solución a la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio amortiguado es $x = A_0 e^{-\mu t} \text{Sen} w_0 t$, por tanto, al seguir la analogía, la ecuación de solución a la ecuación diferencial es:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \text{Sen} w_r t \quad (9.10).$$

Ahora bien: $w_r = \sqrt{w_0^2 + \mu^2}$, donde $w_0 = \frac{1}{RL}$ y $\mu^2 = \frac{R^2}{4L^2}$; entonces, la frecuencia resultante es:

$$w_r = \sqrt{\frac{1}{RL} + \frac{R^2}{4L^2}}.$$

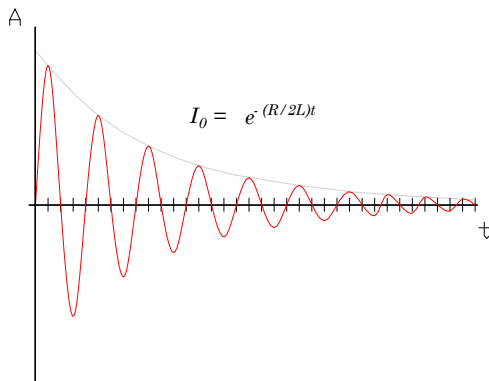


Fig. 9.9. Disminución de la amplitud del movimiento oscilatorio.

Si se reemplaza en (9.8), se tiene:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{1}{RL} + \frac{R^2}{4L^2}} t + \alpha \right) \quad (9.11).$$

Como se puede observar, la amplitud decae con el tiempo de forma exponencial, tal como se puede ver en la Fig. 9.9.

Es muy importante comprender que, en el circuito RLC, cuando se está descargando, la corriente eléctrica lo hace de forma

oscilante y no de forma lineal, razón por la cual se ha establecido la analogía con la ecuación diferencial del movimiento mecánico oscilatorio. De hecho, esta figura se puede ver en la pantalla de un osciloscopio al igual que con el movimiento oscilatorio amortiguado, donde hay tres posibles casos, al depender del valor que se tenga en R, L, y C.

9.7 Circuitos con corriente alterna.

Como se vio en el Capítulo 5, la corriente alterna depende del tiempo, por ser alternante de forma sinusoidal: $I = I_0 \text{Sen} \omega t$, donde I_0 es la corriente inicial y ω es la frecuencia de oscilación, sin olvidar que la frecuencia natural se expresa como: $f = 2\pi\omega$, que se expresa en hercios, mientras que ω se expresa en radianes por segundo. El potencial eléctrico también se expresa de forma sinusoidal; es decir: $V = V_0 \text{Sen} \omega t$.

Hoy en día, la frecuencia natural se ha unificado y la mayoría de los países del mundo la tienen estandarizada en 60 Hz; de esta forma, es tanto para quien la produce como para quien la consume; es decir, los aparatos también se diseñan para que funcionen con 60 Hz.

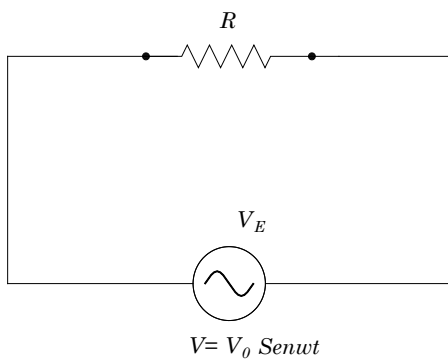


Fig. 9.10. Circuito con fuente de poder de corriente alterna y resistor.

circuitos de corriente directa, la resistencia es el elemento disipador de la energía en forma de calor y aquí se presenta la caída de potencial (Fig. 9.10).

Según la Ley de Ohm, se tiene:

$$V = IR.$$

Fuente de Poder - fuerza electromotriz. En este caso, la fuente de poder o fuerza electromotriz es de carácter oscilante; es decir, es una fuente que produce corriente alterna; por tanto, se le denomina generador o alternador y se la simboliza como se puede ver en la Fig. del circuito 9.10.

9.8 Circuito R. V_{\sim} .

Este circuito básico consta de una resistencia conectada en serie con una fuente de poder de corriente alterna; como en el caso de los

Como el potencial es una función sinusoidal, entonces: $V = V_0 \text{Sen } \omega t$; por ende, la Ley de Ohm queda:

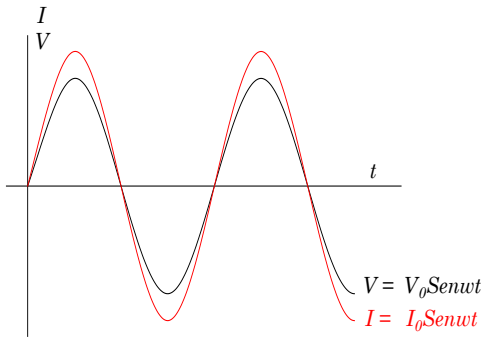


Fig. 9.11. Funciones armónicas de la corriente y del potencial eléctrico.

$$V_0 \text{Sen} \omega t = IR,$$

donde la corriente eléctrica es:

$$I = \frac{V_0}{R} \text{Sen} \omega t.$$

Esto puede quedar como:

$$I = I_0 \text{Sen} \omega t.$$

Así, la caída de potencial debido al resistor es:

$$V_R = IR \text{Sen} \omega t.$$

Tanto la corriente como el potencial dependen de la frecuencia que, en este caso, es la misma; por tanto, corriente y potencial andan en fase (Fig. 9.11).

9.9 Circuito L. $V \sim$. Reactancia inductiva.

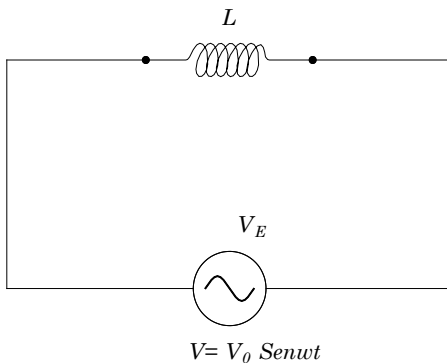


Fig. 9.12. Circuito con fuente de poder alterna e inductancia.

Este circuito tiene a la bobina en serie con la fuente de poder alterna; por tanto, hay una inductancia generada por la bobina o solenoide que, a su vez, tendrá una resistencia interna que, por ahora, no se tomará en cuenta (Fig. 9.12).

Como el potencial inductivo es: $V = L \frac{dI}{dt}$, entonces, al seguir la Ley de Ohm, se tiene:

$$V_{\sim} = L \frac{dI}{dt}.$$

Esta es la igualdad que se tiene porque no hay ningún otro elemento. Ahora bien, como $V = V_0 \text{Sen} \omega t$, entonces la Ley de Ohm queda:

$$V_0 \text{Sen} \omega t = L \frac{dI}{dt}.$$

A partir de aquí se puede obtener la corriente eléctrica:

$$dI = \frac{V_0}{L} \text{Sen} \omega t dt.$$

Al resolver la ecuación, se tiene:

$$\int_0^I dI = \int_0^t \frac{V_0}{L} \text{Sen} \omega t dt$$

$$I = -\frac{V_0}{\omega L} \text{Cos} \omega t$$

Como se puede ver, en este caso, la corriente no es igual al potencial eléctrico; como en el circuito $R \sim V$, se encuentra desfasada, puesto que el potencial está en términos del Seno mientras que la corriente está en términos del Coseno; es decir:

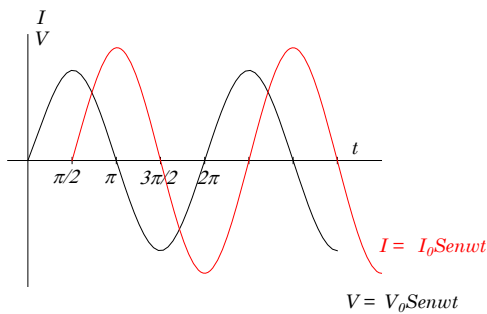


Fig. 9.13. Desfasaje entre la corriente y el potencial eléctrico.

$\text{Cos} \omega t = -\text{Sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$; entonces, la corriente se puede escribir como:

$$I = \frac{V_0}{\omega L} \text{Sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Como se puede apreciar en la corriente eléctrica, se ha desfasado en $\frac{\pi}{2}$ respecto al potencial eléctrico.

En la Fig. 9.13, se puede apreciar que las funciones armónicas se han desfasado en 90° y, en la Fig. 9.14, se encuentra a los vectores rotantes de potencial y corriente eléctrica desfasados 90° ; en esta Fig. se puede apreciar con más detalle cómo se disponen el potencial y la corriente eléctrica uno respecto al otro.

Ahora bien, si se considera la expresión $I = \frac{V_0}{\omega L} \text{Sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$, se tiene que el máximo valor de I se presenta cuando $\text{Sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \pm 1$; es decir $I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$.

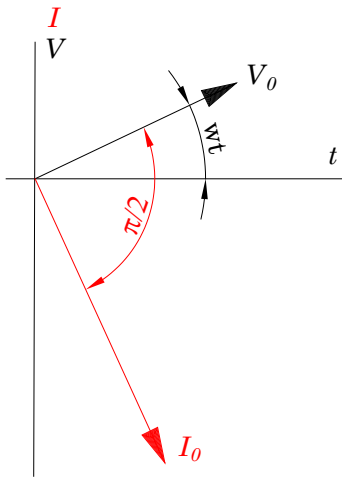


Fig. 9.14. Vector potencial y Corriente eléctrica desfasados en 90° .

A la expresión ωL se la conoce como **reactancia inductiva** y se la denota como x_L ; las unidades de medida son las mismas que para la resistencia; sin embargo, no se debe confundir que significa reactancia inductiva.

En el caso del circuito RV , se tiene un ángulo de desfasaje de 0° ; es decir, potencial y corriente eléctrica están oscilando al mismo tiempo; por tanto, se tiene un circuito puramente resistivo; mientras que, en un circuito LV , la corriente se encuentra desfasada en 90° respecto al potencial; entonces, el circuito es puramente inductivo. De modo que el potencial eléctrico se lo puede expresar así: $I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$; ahora bien,

como el potencial inicial es: $V_0 = I_0 \omega L$, al remplazar se tiene el potencial eléctrico:

$$V = I \omega L \text{Sen} \omega t$$

$$V = I x_L \text{Sen} \omega t.$$

Esta expresión se debe entender como la Ley de Ohm para un circuito inductivo.

Ejemplo

En un circuito de CA puramente inductivo, donde $L = 25\text{mH}$, conectado en serie con una fuente de poder de corriente alterna de 150 voltios, calcular: 1) reactancia inductiva; 2) corriente máxima en el circuito, si $f = 60\text{Hz}$.

Solución.

1) Como la reactancia inductiva es: $x_L = \omega L$, entonces: $L = 25\text{mH}$, y la frecuencia del potencial es: $\omega = 2\pi f$; por tanto:

$$x_L = 2\pi f L$$

$$x_L = 2 \times 3.1416 \times 60 \times 25 \times \frac{10^{-3}\text{H}}{\text{s}}$$

$$x_L = 9.43\text{ohmios}$$

2) Para calcular la corriente eléctrica, se tiene:

$$I = \frac{V}{x_L} = \frac{150\text{vol}}{9.43\Omega} = 15.93\text{Am}$$

9.10 Circuito C. $V\sim$. Reactancia capacitiva. De acuerdo con la Ley de Ohm, en este circuito solo se encuentran la capacitancia y la fuente de poder (Fig. 9.15); por tanto, se tiene:

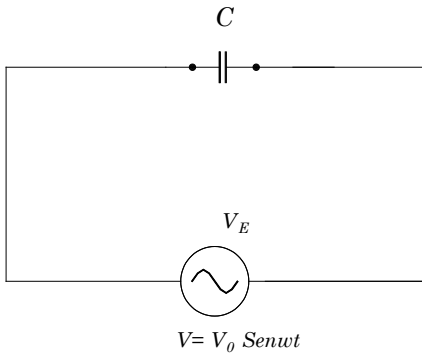


Fig. 9.15. Circuito con fuente de poder alterna y capacitancia.

$$V = V_C.$$

Ahora bien, como $V_C = \frac{Q}{C}$, entonces, al remplazar, se obtiene:

$$V_0 \text{Sen}wt = \frac{Q}{C}.$$

De modo que: $Q = CV_0 \text{Sen}wt$; al derivar esta expresión se encuentra la corriente; por tanto:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_0 \text{Sen}wt).$$

Al desarrollar la derivada, se tiene:

$$I = wCV_0 \text{Cos}wt.$$

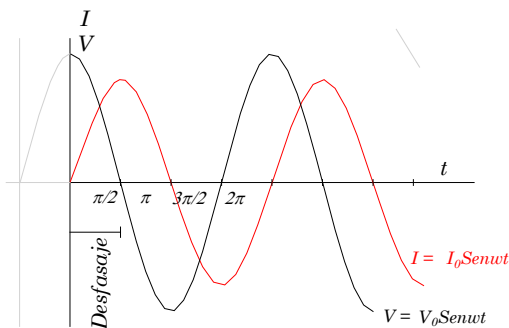


Fig. 9.16. Desfasaje entre la corriente y el potencial eléctrico en un circuito VC.

Por identidad trigonométrica, se tiene que el Coseno puede expresarse en términos del Seno; o sea: $\text{Cos}wt = \text{Sen}\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$; al remplazarlo, se tiene:

$$I = wCV_0 \text{Sen}\left(wt + \frac{\pi}{2}\right).$$

Como se puede ver, la corriente y el potencial eléctrico están desfasados 90° , y el potencial eléctrico es:

$$V = V_0 \text{Sen}wt.$$

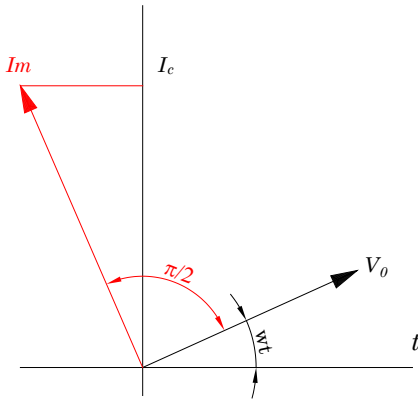


Fig. 9.17. Vectores rotantes de corriente y potencial eléctrico.

En la Fig. 9.16 se puede ver que las dos funciones se encuentran desfasadas 90° ; la amplitud entre una y otra es independiente.

En la Fig. 9.17, se tienen los vectores rotantes de la corriente y el potencial eléctrico desfasados en 90° ; para cualquier valor que tuviera el potencial eléctrico, siempre la corriente se desfasará en dicho valor.

El valor máximo de la corriente se presenta cuando $\text{Sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$; por tanto, la corriente eléctrica es:

$$I = \omega C V_0,$$

de donde $V_0 = \frac{I}{\omega C}$; de modo que a $\frac{1}{\omega C}$ se lo denomina **reactancia capacitancia** y se la denota como x_C ; así, lo anterior se puede escribir como:

$$V_0 = I x_C,$$

que viene a ser la Ley de Ohm; la reactancia capacitiva se mide como si fuera una resistencia; por tanto, el potencial se escribiría:

$$V = I x_C \text{Sen} \omega t.$$

Ejemplo

Se conecta un capacitor $C = 8\mu\text{f}$ en serie con los terminales de una fuente de poder de corriente alterna cuyo potencial de fuerza electromotriz es de 150vol con una frecuencia de 60Hz . Calcular: 1) reactancia capacitiva; 2) corriente máxima.

Solución.

1) Para calcular la reactancia capacitiva se utiliza la ecuación fundamental de la reactancia: $x_C = \frac{1}{\omega C}$; al remplazar, se tiene:

$$x_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6.28 \times 60 \times 8 \times 10^{-6}}$$

$$x_C = 331.57\Omega.$$

Este valor corresponde a la reactancia capacitiva.

2) Para calcular la corriente máxima, se procede así: $I = \frac{V_0}{x_C} = \frac{150\text{vol}}{331.57\Omega}$

$$I = 0.45\text{Am.}$$

9.11 Circuito R. L. C. $V\sim$. (Oscilaciones forzadas).

En el circuito de la Fig. 9.18, se ve que los elementos resistor, inductor y capacitor se encuentran conectados en serie con la fuente de poder de corriente alterna, para formar una malla; la forma de representarlo matemáticamente es:

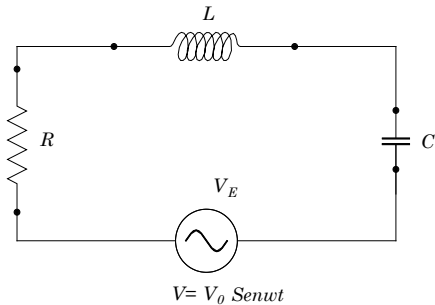


Fig. 9.18. Circuito RLCV~ conectado en serie con la Fuente de poder de corriente alterna.

$$V_0\text{Sen}\omega t = V_R + V_L + V_C.$$

Ahora bien: $V_R = IR$, $V_L = L \frac{dI}{dt}$ y $V_C = \frac{Q}{C}$; al remplazar estos valores, se tiene:

$$V_0\text{Sen}\omega_e t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Si se organiza la expresión y deriva respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{dI}{dt} R = \frac{d}{dt} (V_0\text{Sen}\omega_e t)$$

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = V_0\omega_e \text{Cos}\omega_e t.$$

Por último, se puede expresar como:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = \frac{V_0\omega_e}{L} \text{Cos}\omega_e t.$$

Al establecer una analogía con el movimiento forzado del movimiento mecánico, se tiene: $2\mu = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{RL}$ y, al final: $I = \frac{\omega_e V_0}{L}$, de tal forma que, al remplazar, se tiene:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\mu \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I_0 = I_0 \text{Cos}\omega_e t \quad (9.12).$$

En este punto está bien establecer la analogía de los términos con el movimiento amortiguado mecánico, como se puede ver en la Tabla 9.1.

Tabla 9.1. Analogía de conceptos mecánicos y electrodinámicos.

Oscilador mecánico	Símbolo	Oscilador eléctrico	Símbolo
Masa	m	Inductancia	L
Amortiguamiento	μ	Resistencia	R
Constante de elasticidad	K	Inv. capacitancia	$1/C$
Desplazamiento	x	Carga	Q
Velocidad	dx/dt	Corriente	dQ/dt
Fuerza mecánica	F_0	Fem. aplicada.	V_0

En esta Tabla, donde se establece la comparación, es importante precisar que: mientras en el movimiento mecánico el amortiguamiento, estudiado en *Física II. Curso de Física II para estudiantes de Ciencias e Ingeniería y Licenciados en Educación*, Capítulo 4, se logra por la fricción del cuerpo oscilante y el medio elástico, en el oscilador eléctrico le corresponde establecer este efecto a la resistencia; la constante de elasticidad del resorte se reemplaza por el inverso de la capacitancia y, algo muy importante, el desplazamiento se reemplaza por la carga y, de igual forma, la velocidad se reemplaza por la corriente eléctrica. De modo que:

$$2\mu = \frac{R}{L} \Rightarrow \mu = \frac{R}{2L}$$

$$w_0^2 = \frac{1}{RC} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{1}{RC}}$$

$$F_0 = \frac{w_e V_0}{L} = I_0$$

Ahora bien: en el *Curso de Física II*, Capítulo 4: se tiene el desarrollo matemático de la ecuación cuyo resultado es:

$$X = Ae^{-\mu t} \text{Cos}(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t + \alpha) + \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \text{Cos}(w_e t + \alpha + \theta).$$

El primer término, que corresponde a la solución homogénea y corresponde al movimiento subamortiguado, decrece con el tiempo por tener en la amplitud un factor exponencial; en la segunda parte, la amplitud depende de los valores que tome la frecuencia excitatriz

respecto a la frecuencia natural del sistema. Así que, la amplitud de esta parte es:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 - 4\mu^2 w_e^2}}.$$

Al depender de los valores que se tuviera en la amplitud, se puede obtener el punto exacto de la resonancia de la amplitud.

En el caso eléctrico, la amplitud quedará:

$$I_0 = \frac{V_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{RC} - w_e^2\right)^2 - 4(R/2L)^2 w_e^2}}.$$

Si se organizan los términos, se tiene:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(w_e L - \frac{1}{w_e C}\right)^2}}.$$

Impedancia.

A la expresión $\sqrt{R^2 + \left(w_e L - \frac{1}{w_e C}\right)^2}$ se la denomina **impedancia** y se denota como z ; entonces:

$$z = \sqrt{R^2 + \left(w_e L - \frac{1}{w_e C}\right)^2}.$$

La expresión del paréntesis $w_e L - \frac{1}{w_e C}$ se denomina **reactancia** y se la denota como x ; es decir:

$$x = w_e L - \frac{1}{w_e C},$$

conformada por la **reactancia inductiva** $x_L = w_e L$ y la **reactancia capacitiva** $x_C = \frac{1}{w_e C}$. De modo que la reactancia se puede expresar como: $x = x_L + x_C$ y la impedancia se puede simbolizar así:

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2}.$$

Nota. Tanto la reactancia como la impedancia se miden en ohmios.

Ahora bien, tanto la corriente como el voltaje son armónicos. Por ende, tanto la corriente como el voltaje están fuera de fase, de tal modo que el ángulo ϕ entre la corriente y el voltaje es:

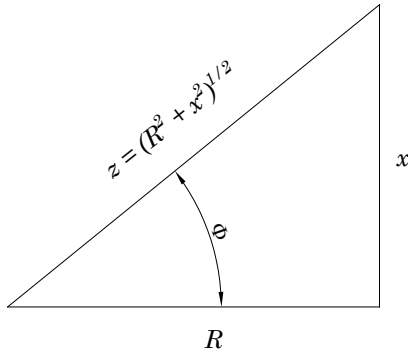


Fig. 9.19. Ángulo de desfasaje.

$$\tan\phi = \frac{x_L - x_C}{R}$$

Por supuesto que el ángulo puede ser positivo o negativo. En la Fig. 9.19 se puede ver como el ángulo depende de estos casos:

- 1) Cuando $x_L > x_C$, lo cual ocurre a frecuencias muy altas, el ángulo de fase es positivo; esto significa que la corriente I se retrasa respecto al voltaje aplicado.
- 2) Cuando $x_L < x_C$, el ángulo de fase es negativo, lo que significa que la corriente se adelanta respecto al voltaje aplicado.
- 3) Cuando $x_L = x_C$, el ángulo de fase es nulo; entonces, la impedancia de la corriente adquiere el máximo valor dado por $\frac{V_0}{R}$ y a la frecuencia, en el momento en que ocurriera este caso, se la denomina **resonancia**, como se verá después.

Ejemplo

Sea el circuito RLC conectado en serie con la fuente de poder alterna de tal forma que sus valores son: $R = 250\Omega$; $L = 0.6\text{Henrios}$; $C = 3.5\mu\text{F}$; $w = \frac{377\text{rad}}{\text{s}}$ y $V_0 = 150\text{vol}$. Calcular: 1) reactancia capacitiva, 2) reactancia inductiva, 3) reactancia del circuito, 4) impedancia, 5) corriente máxima del circuito, 6) ángulo de fase entre el voltaje y la corriente, 7) voltaje en cada elemento y 8) voltaje instantáneo.

Solución.

1) Reactancia capacitiva:

$$x_C = \frac{1}{wC}$$

$$x_C = \frac{1}{\left(\frac{377\text{rad}}{\text{s}}\right) \left(3.5 \times \frac{10^{-6}\text{f}}{\text{s}}\right)}$$

$$x_C = 757.86 \Omega$$

2) Reactancia inductiva:

$$x_L = \omega L$$

$$x_L = \left(\frac{377 \text{ rad}}{\text{s}} \right) (0.6 \text{ H})$$

$$x_L = 226.2 \Omega$$

3) Reactancia del circuito:

$$x = x_L - x_C$$

$$x = 226.2 \Omega - 758 \Omega$$

$$x = -532 \Omega$$

4) Impedancia del circuito:

$$z = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$z = \sqrt{250^2 + 532^2}$$

$$z = 587.81 \Omega$$

5) Corriente máxima:

$$I = \frac{V_0}{z}$$

$$I = \frac{150 \text{ vol}}{587.81 \Omega}$$

$$I = 0.26 \text{ Am}$$

6) Ángulo de desfase entre el voltaje y la corriente:

$$\phi = \text{Tan}^{-1} \frac{x}{R}$$

$$\phi = \text{Tan}^{-1} \frac{-532}{250}$$

$$\phi = -64^\circ 45' 48''$$

7) Voltaje en cada elemento.

—Voltaje en la resistencia:

$$V_R = I_M R$$

$$V_R = (0.26 \text{ Am})(250 \Omega)$$

$$V_R = 65 \text{ Vol}$$

—Voltaje de Impedancia:

$$V_L = I_M x_L$$

$$V_L = (0.26 \text{ Am})(226.2 \Omega)$$

$$V_L = 57.6 \text{ vol}$$

—Voltaje capacitivo:

$$V_C = I_M x_C$$

$$V_C = (0.26 \text{ Am})(757.86 \Omega)$$

$$V_C = 197.04 \text{ vol}$$

8) Voltaje instantáneo en cada elemento.

—Resistencia:

$$V_R = 65 \text{ Sen}377t$$

—Impedancia:

$$V_L = 57.6 \text{ Sen}377t$$

—Capacitancia:

$$V_C = 197.04 \text{ Sen}377t$$

Resonancia de la amplitud en un circuito R. L. C.

Así como ocurre en el movimiento oscilatorio forzado, para un determinado valor de la frecuencia excitatriz se presenta la máxima amplitud; en este caso, para un valor determinado de la frecuencia del generador se obtiene la máxima corriente así:

Como $I_M = \frac{V}{Z}$ y $Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$,

entonces:

$$I_M \frac{V_0 \text{ Sen} \omega t}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}}$$

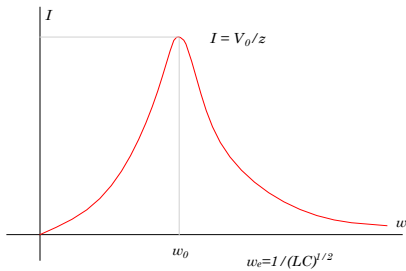


Fig. 9.20. Curva de resonancia de la intensidad en función de la frecuencia.

En esta ecuación, se puede observar que el máximo valor de la corriente se alcanza cuando $x_L = x_C$; es decir, cuando $w_0 L = \frac{1}{w_0 C}$; por tanto, $w_0^2 = \frac{1}{LC}$; o sea (véase Fig. 9.20):

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Como se puede apreciar, esta frecuencia tiene que ver con la frecuencia natural del sistema; entonces, la máxima corriente de un circuito RLC se obtiene cuando la frecuencia de la fuente de poder alterna es igual a la frecuencia natural del sistema o circuito, que depende únicamente de la L y la C ; además, en esta frecuencia, voltaje y corriente están en fase.

De acuerdo con la ecuación:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}},$$

como ya se sabe que la resonancia se presenta cuando $x_L = x_C$, por tanto $I = \frac{V_0}{R}$, que es la Ley de Ohm, la pregunta a plantear es: ¿qué ocurre si $R = 0$? Aparentemente I se torna infinita; eso lo predice la ecuación, pero en la práctica no ocurre nada de eso, debido a que el circuito siempre tiene una resistencia interna, por lo que siempre la corriente va a estar limitada.

Potencia media del circuito $R. L. C.$

Se define potencia como $P = IV$, que también se puede escribir como: $P = I_M^2 R$; de modo que, si reemplazamos la corriente máxima, se tiene:

$$P = \left(\frac{V_0}{z}\right)^2 R = \frac{V_0^2}{z^2} R.$$

Como z es la impedancia, entonces la potencia queda:

$$P = \frac{V_0^2 R}{R^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

Como $x_L = wL$; $x_C = \frac{1}{wC}$ y $w_0^2 = \frac{1}{LC}$, entonces: $(x_L - x_C)^2 = \left(wL + \frac{1}{wC}\right)^2$; ahora bien, a partir de la frecuencia natural del circuito, se puede despejar la capacitancia; esto es: $C = \frac{1}{Lw_0^2}$, por lo que, al reemplazarla, se tiene:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega \frac{1}{L\omega_0^2}} \right)^2 = \left(\omega L - \frac{L\omega_0^2}{\omega} \right)^2.$$

Si se factoriza la inductancia L y la frecuencia ω , queda:

$$\frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2.$$

Al aplicar este resultado a la ecuación de la amplitud de la corriente, se tiene:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega_e^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Como la potencia se ha dicho que es $P = I^2 R$, entonces:

$$P = \frac{V_0^2 R \omega}{R^2 \omega + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

Al final, se tiene:

$$p = \frac{R \omega}{R^2 \omega + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \text{Sen}^2 \omega t.$$

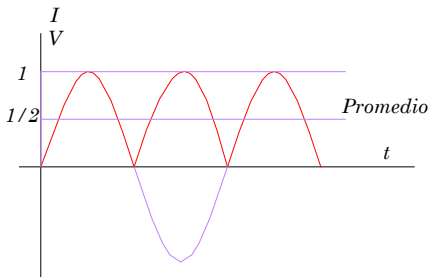


Fig. 9.21. Cuadrado de la función armónica.

Como la función Seno está entre $(0; \pm 1)$, al tomar el cuadrado se tiene una gráfica como la de la Fig. 9.21; la parte negativa de la función, al elevar al cuadrado, se torna positiva; por tanto, la función está únicamente en el lado positivo del plano. El promedio de esta función corresponde a la mitad de la unidad ($\frac{1}{2}$); por tanto, el valor de $\langle \text{Sen}^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, con lo que, al reemplazar este resultado, se tiene:

$$\langle P \rangle \geq \frac{R \omega^2 V^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

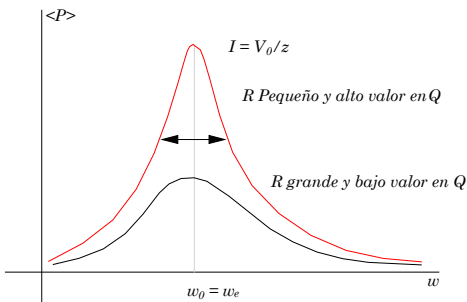
En esta ecuación final, se puede observar que cuando $\omega_e = \omega_0$, se obtiene la máxima potencia, así:

$$\langle P \rangle \geq \frac{V^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2}.$$

Por último, se tiene:

$$\langle P \rangle \geq \frac{V_0^2}{R}.$$

Esta ecuación resulta similar a cuando se aplica la Ley de Ohm; la agudeza de la gráfica se describe por un parámetro abstracto, que se conoce como factor de calidad y se representa por ϑ , que se obtiene mediante la relación de la frecuencia:



$$\vartheta = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho de curva de la Fig. 9.22 para valores de ω , donde da la mitad de la potencia máxima, cuyo valor aproximado es: $\Delta\omega \approx \frac{R}{L}$; en consecuencia, se tiene:

$$\vartheta = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Fig. 9.22. Curva de la potencia en función de la frecuencia

Ejemplo.

Considérese un circuito RLC en el que se tienen estos valores: $R = 150\Omega$; $L = 20mH$; $\omega = 5000rad/s$, y se encuentran conectados en serie con una fuente de poder de corriente alterna de $V_0 = 20vol$. Calcular la capacitancia para la que la corriente es máxima.

Solución.

1) La corriente máxima se presenta cuando se da la resonancia; es decir: $\omega = \omega_0$, de modo que: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000rad/s$; por tanto, la capacitancia es:

$$C = \frac{1}{(20 \times 10^{-3}H)(25 \times 10^6 rad/s)}$$

$$C = 2.0\mu F.$$

2) Corriente máxima

Como $x_L = x_C$ y $z = R$, por tanto:

$$I_M = \frac{V_0}{R}$$

$$I_M = \frac{20 \text{ vol}}{150 \Omega}$$

$$I_M = 0.133 \text{ Am}$$

9.12 Circuitos acoplados

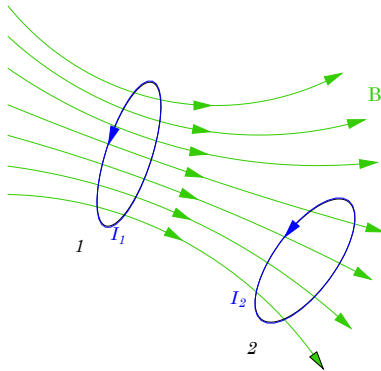


Fig. 9.23. Esquema de circuitos acoplados.

Al considerar un campo magnético generado por la corriente I_1 , tal como se puede ver en la Fig. 9.23, con cualquier cambio que se hiciera en este circuito, el circuito 2 se verá afectado por ser parte del campo magnético generado por la corriente 1, algo que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\varphi_1 = MI_2$$

$$\varphi_2 = MI_1$$

Esto es, si la corriente I_1 cambia el flujo φ_2 , cambia y viceversa, lo que induce en cada circuito una fuerza electromotriz, dadas como:

$$V_{M2} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$V_{M1} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Con base en este equilibrio energético surgen los transformadores.

Transformadores.

Estos son aparatos simples que cuentan con devanados, arrollamientos o bobinas, uno de entrada y otro de salida, que cumplen con lo que es un sistema de circuitos acoplados; la eficiencia de estos aparatos está en utilizar los mejores conductores de electricidad y de campo magnético; para los conductores, se suele utilizar alambre de cobre revestido de un dieléctrico como medio aislante, y de núcleo puede ser el hierro dulce o acero de silicio, cuando se necesita más exigencia. En la Fig. 9.24 se puede

ver el esquema de una armadura de transformador, que depende de la misión del aparato: si el trabajo es reducir la tensión de la salida, entonces el devanado de la entrada o arrollamiento primario será de

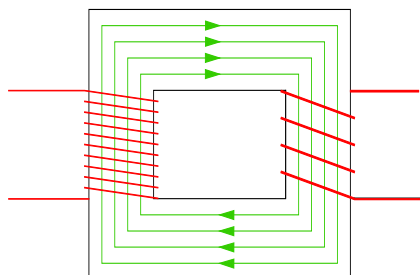


Fig. 9.24. Esquema de un transformador.

carácter fino y grueso el segundo devanado, y lo contrario si se trata de levantar el voltaje; entonces, el devanado de salida o secundario aumenta en vueltas y será más delgado.

El campo magnético viaja por el núcleo cerrado, que puede ser de los materiales ferromagnéticos ya mencionados. A partir de esto, se tiene:

$$V_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$V_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Al establecer una relación entre estas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Si se aplica la Ley de Ohm $V = IR$, entonces se tiene:

$$\frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Ahora bien, si el devanado es del mismo material, se tiene:

$$\frac{I_1 \rho \frac{l_1}{S_1}}{I_2 \rho \frac{l_2}{S_2}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Con la eliminación de los términos correspondientes, queda:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1 S_1 l_2}{n_2 S_2 l_1}$$

Por otra parte, la potencia de entrada debe ser igual a la de salida; por tanto:

$$P_1 = P_2$$

$$I_1 V_1 = I_2 V_2.$$

Por último, esto se puede expresar como la ecuación básica de los transformadores:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo.

Cierto artefacto eléctrico tiene como especificaciones: voltaje de entrada *240vol* y una potencia de *960 vatios*. ¿Qué se debe hacer para poderlo conectar en una red de *120 vol*?

Solución.

Para poder obtener *240vol* a partir de *120vol*, la relación de espiras será:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{240}{120} = 2$$

Esto significa que el número de vueltas del primario debe ser el doble del secundario; por tanto, la corriente que debe circular para que se tuviera una potencia de *960vatios* es: $P = IV$; o sea, $I = P/V$; de modo que:

$$I = \frac{960w}{120vol}$$

$$I = 8Am.$$

Como la corriente debe ser de *8Am* y la corriente de entrada es:

$$I = \frac{960w}{240vol}$$

$$I = 4Am,$$

con los datos obtenidos, y al aplicar la Ley de Ohm, la resistencia debe ser:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{120vol}{8Am}$$

$$R = 15\Omega$$

Ahora bien, a partir de $V_1 I_1 = V_2 I_2$ y $I_2 = \frac{V_2}{R}$, con la combinación de estas dos expresiones, se tiene:

$$R = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{V_1}{I_2}$$
$$R = 2^2 15\Omega$$
$$R = 60\Omega$$

Este es el valor de la resistencia que se necesita en el circuito.

Aplicaciones técnicas.

La aplicación de los transformadores es muy general, desde los elementos más pequeños hasta lo más grandes en la industria; entre las aplicaciones históricas se tienen:

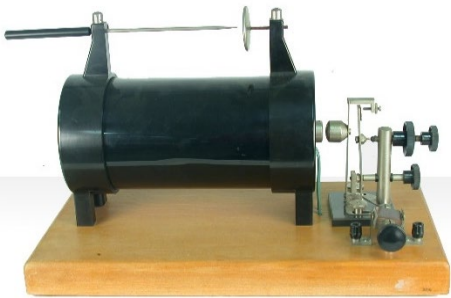


Fig. 9.25. Carreto de Ruhmkorff de alto voltaje. Fuente: Universidad de Valencia (s.f.).

Carreto de Ruhmkorff

El físico alemán Heinrich Daniel Ruhmkorff, en 1851, construyó este circuito acoplado, compuesto fundamentalmente por dos circuitos: uno primario y uno secundario; en el circuito primario, con apenas unas decenas de vueltas, recibe un voltaje de no más de *12 vol*, mientras que, en el circuito secundario, miles de vueltas de alambre muy delgado se enrollan sobre el circuito primario. El sistema mecánico de palancas que se observa en la Fig. 9.25 genera el sistema oscilatorio al utilizar el campo magnético del núcleo del carreto, cuando lo hay, pero en el mismo instante, al ser atraído, se abre el circuito; por tanto, se corta la corriente, lo que lleva a que se suelte



Fig. 9.26. Equipos de soldadura por arco de tipo analógico.

del núcleo, pero una vez llega a esta posición, de nuevo conecta y se activa el circuito, y así sucesivamente, lo que lleva a que en el devanado primario se genere una corriente pulsante de la corriente directa, con la que se lo alimenta; como se puede ver en la Fig. 9.25, en los terminales del circuito secundario o salida se induce un potencial muy alto, tanto que es capaz de hacer saltar chispas de hasta de 5 cm, con lo que se produce una onda de choque que lo torna muy sonoro. Esto se utiliza para llevar a que funcionaran los tubos de descarga que, en su momento, fueron los tubos de Crookes, y, en las manos de J. J. Thomson, permitió que se descubriera la primera partícula subatómica: el electrón.

Soldador de arco

Una aplicación a la industria metalmecánica ha sido el soldador de arco, con una gran gama de aparatos y de gran utilidad para poder unir el hierro y otros metales (Fig. 9.26). El principio sigue siendo igual: dos devanados, uno primario y uno secundario. En este caso, para poder fundir una varilla de hierro, se necesita una corriente alta y bajo voltaje. Al comienzo, los aparatos eran muy grandes; con el pasar del tiempo y, una vez se tuvo la corriente de distribución comercial, fue más fácil la fabricación, se redujo su tamaño y se pudieron tener equipos estandarizados para que trabajaran a *120 vol* y *45 Am*. El aparato debe transformar la corriente de entrada a



Fig. 9.27. Inversor para efectuar soldaduras de arco con electrodo revestido. Fuente: Amazon (s.f.).

una corriente de trabajo de unos *220Am* y, por supuesto, con un voltaje de *25 voltios* en corriente alterna; con estas especificaciones, puede fundir varillas de acero como medio aportante, de $1/8$ de espesor, sobre una base metálica: la que se va a trabajar.

Con el avance de la tecnología electrónica, han cambiado definitivamente los soldadores de arco por unidades mucho más pequeñas y livianas, con igual o mejor potencia; se ofrecen en el mercado a través de muchos medios mercantiles. La pregunta que surge es: ¿cómo lo hacen?

Tal como ocurre en las anteriores, la transformación de la energía le corresponde a un mediano transformador, cuya salida se amplifica por modernos transistores de salida, que trabajan a mayor frecuencia, lo que lleva a que la potencia aumentase; la falta de revestimiento del electrodo se remplazada por una atmósfera de gas inerte, como el argón.

Bobina de encendido



Fig. 9.28. Bobina de encendido.

El vehículo con motor de combustión interna surgió justamente cuando ya se tenían resueltos los temas básicos de la electricidad, de modo que, para poder generar una chispa en el interior del cilindro a alta presión, se necesitó de un pequeño transformador que llevara a que saltara una chispa en el preciso instante en que se tiene una mezcla perfecta para que explote. En la Fig. 9.28 se puede ver la típica bobina de encendido, a la que se le inyectaban 12 voltios y ella entregaba unos 300 voltios, lo suficiente como para llevar a que saltara una chispa entre dos electrodos de las bujías, separados 1.5 mm.



Fig. 9.29.
Transformadores de distribución de energía eléctrica.
Fuente: Fortyseven (s.f.).

Otro aparato indispensable en esta tecnología era el distribuidor, que se encargaba de repartir la corriente de alto voltaje a las bujías para que generaran la chispa en el interior del cilindro; en el distribuidor se encontraban los platinos suiche, encargados de cerrar el circuito de la corriente con el circuito primario de la bobina, de forma pulsante y variable, de acuerdo a la velocidad del motor. Los nuevos modelos electrónicos, a partir del 2010, han remplazado estos elementos poco a poco; aunque ha cambiado la parte mecánica, los principios físicos de la electricidad siguen siendo iguales.

Desde los transformadores de distribución eléctrica en las centrales eléctricas, en las calles de las ciudades, como lo que se ve en la

Fig. 9.29, cargadores de celulares, y muchos artefactos eléctricos, tienen o fungen como un transformador directo.

Debe quedar muy claro que la corriente para un transformador debe ser alterna; actualmente se maneja una frecuencia de 60Hz ; el núcleo del transformador se ha diseñado para conducir el campo magnético del devanado primario y se elabora en láminas de acero al silicio, aisladas entre ellas para reducir las corrientes de Foucault, que generan pérdidas del campo magnético por el calor que se disipa. Los devanados son otro medio de pérdida por resistividad del alambre con el que se hacen esos devanados; en el caso del cobre, pues es el valor de la resistividad que presenta este material: $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\Omega\text{m}$; también tiene que ver la longitud de los hilos de cobre.

9.13 Ondas electromagnéticas

Hasta ahora, lo que se conoce como ondas, son aquellas perturbaciones que necesitan de un medio elástico, por lo que reciben el nombre de ondas mecánicas; es decir, necesitan de un medio elástico para que puedan propagarse.

En general, las ondas mecánicas se clasifican en ondas de presión y de corte; ahora bien, entre las ondas de presión está el sonido, que puede viajar en el aire, en el agua, en metales y rocas, o sea que estas ondas pueden viajar en cualquier medio. Las ondas de corte o transversales solo pueden viajar en sólidos y, por su naturaleza, estas ondas no lo pueden hacer en fluidos, pues un fluido no se puede cortar.

James Clerk Maxwell (1831-1879), fue un físico británico que se dedicó a estudiar las leyes de la electricidad y el magnetismo; como conclusión de su teoría electromagnética, predijo que hay unas ondas que no necesitan de medios elásticos; es decir, pueden viajar en el vacío y viajan a velocidades fantásticas, igual a la velocidad de la luz, en su momento con aproximación a su verdadero valor. Su teoría conmocionó al mundo científico de entonces; sin embargo, en menos de 25 años, el joven científico Heinrich Hertz (1857-1894) demostró experimentalmente la existencia de estas ondas electromagnéticas; para obtenerlas, utilizó descargas eléctricas, generadas por un carrito de Ruhmkorff; como medio receptor, utilizó un pequeño anillo de oro abierto, con extremos esféricos; al generar las descargas en el carrito, se producían pequeñas descargas entre las esferas del anillo partido, que se encontraba al menos a unos

tres metros. Esta fue la primera transmisión inalámbrica mediante ondas electromagnéticas.

En adelante, se estableció una carrera tecnológica por conseguir transmisiones de mensajes de voz y, posteriormente, de la imagen; así surgieron la televisión y los medios de comunicación que se conocen hoy en día y se seguirán desarrollando en el futuro.

Como consecuencia de la teoría electromagnética surgió el espectro electromagnético, donde se unificaron, por su naturaleza, fenómenos relacionados a la luz, el calor, los recién descubiertos rayos X y demás.

Ley de Ampere-Maxwell

A partir de la Ley de Faraday-Henry: $\oint_l E dl = -\frac{d}{dt} \iint_S B dS$, se establece una relación entre el campo eléctrico y el campo magnético en la misma región del espacio; la íntima relación entre E y B sugiere que debería existir una relación análoga entre la derivada respecto al tiempo de un campo eléctrico y un campo magnético en el mismo lugar, de modo que existe una sospecha y consiste en mejorar la Ley de Ampère.

De modo que, para campos que dependen del tiempo, se tiene que: como: $I = \iint_S J dS$ y $I = \frac{dQ}{dt}$, al combinarlas, se llega a:

$$-\frac{dQ}{dt} = \iint_S J dS.$$

Por otra parte, a partir de la Ley de Gauss: $Q = \epsilon_0 \oint_S E dS$, al derivarla respecto al tiempo, se tiene:

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \oint_S E dS).$$

Si se combinan estas ecuaciones, queda:

$$-\iint_S J dS = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S E dS.$$

Esto, en general, se puede expresar así:

$$\iint_S J dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S E dS = 0.$$

Como $\oint_l Bdl = \mu_0 \iint_S JdS$, entonces se tiene:

$$\oint_S Bdl = \mu_0 \iint_S JdS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S EdS,$$

o simplemente:

$$\oint_S Bdl = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S EdS.$$

Ahora bien, en ausencia de la corriente, como ocurre en el vacío, quedará:

$$\oint_l Bdl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S EdS.$$

A esta expresión corresponde lo que se denomina Ley de Ampère-Maxwell.

Para resumir las leyes vistas hasta ahora, incluida la Ley de Ampère-Maxwell, se puede ver la Tabla 9.2.

Tabla 9.2. Resumen de las leyes.

LEY	FORMA INTEGRAL	FORMA DIFERENCIAL
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\oint_S EdS = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\oint_S BdS = 0$	$\nabla \cdot B = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\oint_l Edl = -\frac{d}{dt} \iint_S BdS$	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
Ley de Ampère-Maxwell	$\oint_l Bdl = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S EdS$	$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

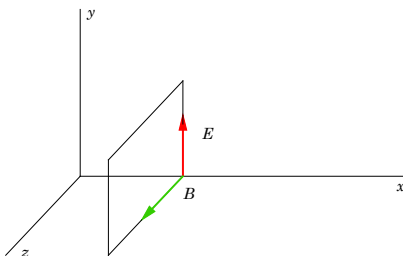


Fig. 9.30. Vectores de campo eléctrico y campo magnético.

Ecuación de onda. Para simplificar el tema, se pueden aceptar estas consideraciones, tal como se puede ver en la Fig. 9.30:

$$\begin{array}{lll} E_x = 0 & E_y = E & E_z = 0 \\ B_x = 0 & B_y = 0 & B_z = B \end{array}$$

Ahora bien, según la ley de Gauss:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

Según la Ley de Faraday:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

Ahora, de acuerdo con la Ley de Ampere-Maxwell:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Si se deriva respecto a x la ley de Faraday:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}$$

Y si se hace lo mismo con la Ley de Ampere-Maxwell:

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Al combinar estas dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Lo que se suele escribir como:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

Si se compara esta ecuación con la ecuación de onda $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, se tiene que es lo mismo; por tanto, así se tiene la ecuación de onda del electromagnetismo.

De manera más general, y partiendo de las mismas ecuaciones se tiene:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Ecuación de Faraday

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Ecuación de Gauss para E

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ecuación de Amper – Maxwell

$$\nabla \cdot B = 0$$

Ecuación de Gauss para B

Donde $B = \mu_0 H$ y $D = \varepsilon \cdot E$

Así que, la ley de Faraday se escribiría como:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \mu_0 H}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ahora bien: si se opera nuevamente por Nabla se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H$$

Como $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ entonces queda:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

Además, como $D = \varepsilon \cdot E$ entonces queda:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial (\varepsilon \cdot E)}{\partial t} \right)$$

Por otra parte la expresión $\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$ a su vez $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Por lo que se tiene:

$$\nabla \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial \varepsilon_0 E}{\partial t} \right)$$

Como se considera que ρ es constante entonces:

$$\frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} j - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Organizando términos queda:

$$\nabla^2 E - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}$$

Factorizando E

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}$$

Como en el vacío no hay densidad de carga ni densidad de corriente entonces:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Por tanto:

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0 \quad (9.21)$$

Ahora bien: el operador de D'Alambert es: $\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \emptyset$ entonces comparando con la ecuación (9.21) resulta que es el mismo operador, por tanto, $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ lo que significa que la velocidad de propagación de la onda electromagnética se la puede expresar como:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

De la (9.21) la ecuación de onda se puede expresar como:

$$\nabla^2 E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda para el campo eléctrico en el vacío igual a la expresión 9.19 y 9.20

$$\nabla^2 B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Respecto a la velocidad de propagación, al establecer la comparación con la ecuación de onda general, se tiene que la velocidad de la onda electromagnética es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

De modo que la velocidad está en términos de la permisividad eléctrica y magnética en el vacío. Y, de forma extraordinaria, se llegó a que esta velocidad es la misma velocidad de la luz. Por tanto:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 300.000 \text{ Km/s.}$$

Al seguir un proceso similar, se puede deducir la ecuación de onda para el campo magnético:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

donde la velocidad de propagación es la misma del campo eléctrico.

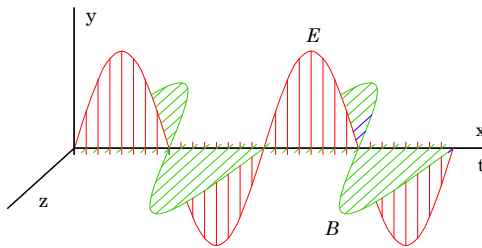


Fig. 9.31. Representación de una onda electromagnética.

En la Fig. 9.31, se tiene la representación de una onda electromagnética, en la que se puede ver el campo magnético de color verde y el campo eléctrico de color rojo; en una onda electromagnética, los dos campos siempre están presentes, debido a que los dos interactúan.

Vector de Poynting. Una de las características de las ondas mecánicas es el transporte de energía y momento (momentum); en esto se basan el sonido, las ondas en el agua y los sismos; la energía que se desarrolla en la fractura de capas tectónicas viaja hasta la superficie y producen el sismo, con efectos en muchas ocasiones letales.

Las ondas electromagnéticas también transportan energía; o sea, el calor que se siente cuando la luz del sol llega de forma directa o indirecta; las ondas electromagnéticas de la radio y la televisión tienen la capacidad de llevar a que vibran los electrones que forman parte de las antenas, etc.

De acuerdo con las ecuaciones (4.6) y (9.8), densidad de energía del campo eléctrico y magnético:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{y} \quad U_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

A partir de aquí se tiene la energía total, que será la suma de estas dos expresiones, así:

$$E = U_E + U_B$$
$$E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Como $B = \frac{E}{c}$, entonces la energía se podría expresar como:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{C^2}$$

A partir de la ecuación de onda, se tiene que la velocidad es: $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$; por tanto, $C^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Si se reemplaza, se tiene:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2\mu_0} E^2$$

De modo que el resultado será:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Por tanto, el resultado final será:

$$E = \varepsilon_0 E^2.$$

Por otra parte, la intensidad media de una onda es $I = \frac{P}{S}$ (potencia sobre área), que también se puede expresar como la cantidad de energía que pasa por unidad de área y de tiempo; es decir: $I = \frac{1}{S} \left(\frac{dw}{dt} \right)$, o simplemente: $I = vE$; para la onda electromagnética sería: $I = CE$ (donde C es la velocidad de la luz); por tanto, la intensidad para la onda electromagnética es:

$$I = C \varepsilon_0 E^2.$$

Si se tiene una onda electromagnética armónica de la forma $E = E_0 \text{Sen}(wt - x)$, el valor medio de la onda electromagnética de $E^2 = E_0^2 \text{Sen}^2(wt - x)$ es:

$$I = C \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}.$$

Ahora bien, como la onda electromagnética se forma por los dos campos eléctrico y magnético que oscilan de manera ortogonal, es decir el ángulo entre los dos campos es de $\frac{\pi}{2}$, y la dirección de la propagación del frente de onda también es ortogonal a los planos de vibración, entonces, el producto vectorial del campo magnético con el campo eléctrico da la dirección de propagación así que la magnitud del producto vectorial del campo eléctrico y magnético es:

$$|E \times B| = EB.$$

De acuerdo con $E = CB$, el producto se puede escribir como:

$$|E \times B| = \frac{1}{c} E^2.$$

De modo que la intensidad de la onda electromagnética $I = C \varepsilon_0 E^2$ se puede escribir como

$$I = C^2 \varepsilon_0 |E \times B|,$$

donde la expresión $C^2 \varepsilon_0 (E \times B)$ se conoce como **vector de Poynting**, cuya magnitud es la intensidad de la onda.

Por último, como la intensidad se define como la energía por unidad de área y de tiempo, como ya se dijo, entonces se puede expresar como:

$$\int_S C^2 \varepsilon_0 (E \times B) dS = \frac{dE}{dt},$$

con lo cual se define un flujo de energía de una onda electromagnética que viaja por el espacio a la velocidad de la luz.

Una manera más general de obtener la ecuación de onda es:

De las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Ecuación de Faraday

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Ecuación de Gauss para E

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Ecuación de Amper – Maxwell}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{Ecuación de Gauss para B}$$

Como $B = \mu_0 H$ y $D = \varepsilon \cdot E$

Entonces la ecuación de Faraday se puede expresar:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \mu_0 H}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ahora bien: si se opera nuevamente por Nabla se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H$$

Como $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ entonces la expresión se puede escribir:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

Además, como $D = \varepsilon \cdot E$ entonces queda:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial(\varepsilon_0 \cdot E)}{\partial t} \right)$$

Por otra parte, la expresión $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$ a su vez $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Por lo que se tiene:

$$\nabla \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(J + \frac{\partial \varepsilon_0 E}{\partial t} \right)$$

Como se considera que ρ es constante en el vacío entonces:

$$\frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Organizando términos queda:

$$\nabla^2 E - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}$$

Como en el vacío no hay densidad de carga ni densidad de corriente esto significa que:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Por tanto:

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = 0$$

Así que, lo que está en el paréntesis corresponde al operador de D'Alambert.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \emptyset$$

Por tanto, $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ con lo que la velocidad de propagación de la onda electromagnética es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Lo concluyente del trabajo de Maxwell es que la velocidad de la onda electromagnética es la misma velocidad de la luz.

De lo anterior se puede deducir que la ecuación de onda para el campo eléctrico es:

$$\nabla^2 E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Y de igual manera para el campo magnético

$$\nabla^2 B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético en el vacío.

Apéndice

1. Campos vectoriales.

En un sistema de referencia x, y, z existen infinitos puntos con coordenadas x, y, z entonces si a cualquier punto del sistema de referencia se le asocia un vector único con punto inicial k entonces, a este conjunto de vectores se le llama **campo vectorial** (fig. 9.32).

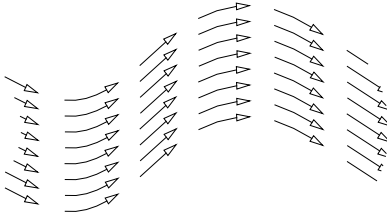


Fig. 9.32 campo vectorial del movimiento del aire

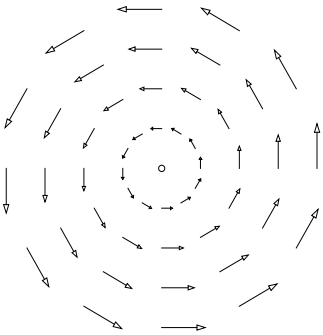


Fig. 9.33 Campo vectorial de la velocidad lineal de los puntos de una rueda

Por ejemplo, cuando se trata de analizar vientos, los satélites toman fotografías y los sistemas computarizados trazan un campo vectorial, y es aquí donde se recrea las direcciones y sentidos de los vectores que definen los flujos de viento. Otro campo vectorial puede ser la velocidad lineal o tangencial que se presenta en el borde de un disco (fig. 9.33), cada punto del disco tiene una velocidad tangencial diferente a cualquier otro punto, la magnitud crece con el radio, ahora bien, todos aquellos que se encuentran en una circunferencia pueden tener igual magnitud, pero dirección y sentido diferente,

Como el campo vectorial depende de un sistema de referencia entonces, podemos asociar al campo a un sistema de referencia con coordenadas rectangulares y el vector asociado al punto $k(x, y, z)$ se denota por $F(x, y, z)$ entonces, como el vector $F(x, y, z)$ depende de las coordenadas de k se puede escribir:

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

Aquí $M, N, y P$ son funciones escalares de tres variables.

Tabla A.1.1 de las coordenadas del vector

x	y			vector
1	1	-1i	1j	$f(x, y) = -1i + 1j$
-1	1	-1i	-1j	$f(x, y) = -1i - 1j$
-1	-1	1i	-1j	$f(x, y) = 1i - 1j$
1	-1	1i	1j	$f(x, y) = 1i + 1j$
1	3	-3i	1j	$f(x, y) = -1i - 3j$
-3	1	-1i	-3j	$f(x, y) = -1i - 3j$
-1	-3	3i	-1j	$f(x, y) = 3i - 1j$
3,	-1	1i	3j	$f(x, y) = 1i + 3j$

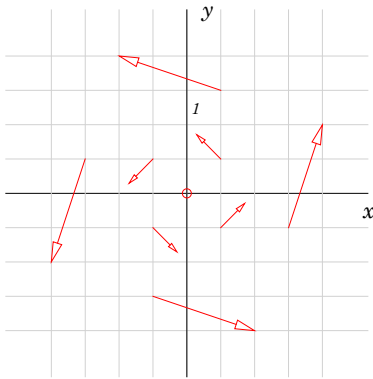


Fig. 9.34 Representación del campo vectorial $F(x, y) = -yi + xj$

Toda ecuación de esta forma determina un campo vectorial. Entonces, puede considerarse que un campo vectorial es una función vectorial. Por ejemplo, Realizar la descripción del campo vectorial dado por: $F(x, y) = -yi + xj$

En la tabla A.1.1 se muestra los vectores $F(x, y)$ asociados a varios puntos (x, y) señalados en la figura 9.34.

siguiendo la tabla se puede graficar el campo vectorial tal como se ve en la Fig. 9.34

otro campo vectorial muy común en nuestros estudios es el campo gravitacional, responde a:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde $r = (x, y, z)$ por tanto $r = x^2 + y^2 + z^2$ así que la expresión será:

$$F = G \frac{m_1 m_2 (x + y + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Lo que significa que el campo se lo puede expresar como:

$$F = G \frac{m_1 m_2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} i + G \frac{m_1 m_2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} j + G \frac{m_1 m_2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} k$$

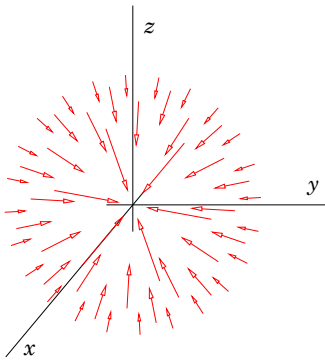


Fig. 9.35 Representación del campo gravitacional.

Cuya grafica de este campo es el que aparece en la fig. 9.35 a medida que el radio de acción disminuye la fuerza aumenta, es decir, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

2. Productos vectoriales.

2.1 Producto escalar o punto: También llamado producto interno y se define así:

Sean los vectores:

$$A = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$B = b_x i + b_y j + b_z k$$

i. Primera definición. Se define producto escalar entre A y B como:

$$A \cdot B = ab \cos \theta$$

Donde a y b son las magnitudes de los vectores A y B y, θ es el ángulo entre los dos vectores, así que el resultado de este producto es un escalar, un número por tanto carece de dirección y sentido, pero permite encontrar el ángulo entre los vectores entonces, al despejar el ángulo se tiene:

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{ab}$$

El asunto es ahora saber a qué es igual $A \cdot B$

ii. Segunda definición se define producto escalar de A y B como:

$$A \cdot B = (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k)$$

Para darle solución a esto se procede hacer la multiplicación miembro a miembro. Así:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= a_x b_x (i \cdot i) + a_x b_y (i \cdot j) + a_x b_z (i \cdot k) \\
 &+ a_y b_x (j \cdot i) + a_y b_y (j \cdot j) + a_y b_z (j \cdot k) \\
 &+ a_z b_x (k \cdot i) + a_z b_y (k \cdot j) + a_z b_z (k \cdot k)
 \end{aligned}$$

Ahora bien, por la primera definición, el ángulo entre los dos vectores es: entre i y j 90° entre j y k 90° y finalmente entre k e i también 90° ahora bien, como $\cos 90 = 0$ entonces

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

Por otra parte, como $\cos 0 = 1$ y el ángulo entre sí mismo es 0 entonces:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = \cos 0 = 1$$

Así que:

$$A \cdot B = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Lo que implica realizar una suma de productos de escalares.

Propiedades del producto escalar.

1. Conmutatividad. El producto interno o escalar es conmutativo, es decir:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2.2 Producto vectorial. También se le llama producto cruz y se define como.

Sean los vectores:

$$\begin{aligned}
 A &= a_x i + a_y j + a_z k \\
 B &= b_x i + b_y j + b_z k
 \end{aligned}$$

i. Primera definición. Se define, producto vectorial o cruz de los vectores A y B como:

$$\|A \times B\| = ab \sin \theta \quad (1.10)$$

A diferencia del producto escalar, el resultado de este producto es un **vector**, entonces al tener el producto entre doble barra, se está indicando la magnitud del vector, producto vectorial.

ii. Segunda definición. También se define el producto vectorial o producto cruz como:

$$A \times B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Por tanto, al dar solución al determinante se tiene:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

Por otra parte, se puede realizar el producto vectorial analizando el producto de los vectores unitarios así:

$$A \times B = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k)$$

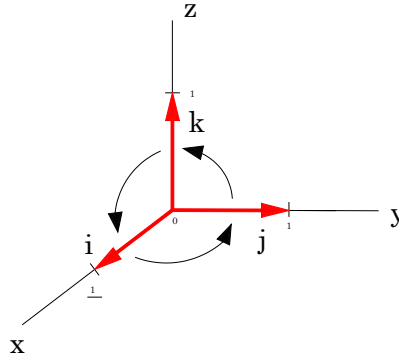


Fig. 9.36 Producto vectorial de los vectores unitarios i, j, k

Al desarrollar el producto de los paréntesis se tiene:

$$\begin{aligned} A \times B &= a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times k) + \\ & a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times k) + \\ & a_z b_x (k \times i) + a_z b_y (k \times j) + a_z b_z (k \times k) \end{aligned}$$

Ahora bien, como los vectores unitarios i, j, k son perpendiculares entre sí, entonces al aplicar la primera definición se tiene: $i \times j = 1 \text{Sen}\theta$ como θ es el ángulo entre los vectores que por ser perpendiculares vale 90° así que, $\text{Sen}90 = 1$ por tanto $i \times j = k = 1$ mientras que el producto $i \times i = 1 \text{Sen}\theta$ en este caso el ángulo vale 0 por tanto $i \times i = 0$

Ahora, si $i \times j = k$, en sentido contrario, se tiene otro resultado dado a la NO conmutatividad del producto esto es: $j \times i = -k$ el sentido positivo es cuando el producto se realiza en el orden tal como se muestra en la gráfica 9.36, por tanto, los productos vectoriales de los vectores unitarios son:

$$\begin{aligned} i \times j &= k \\ j \times k &= i \\ k \times i &= j, j \times i = -k \\ k \times j &= -i \\ i \times k &= -j \end{aligned}$$

Ahora bien, como: $i \times i = j \times j = k \times k = 0$ al remplazar estos resultados en el desarrollo se tiene:

$$\begin{aligned} A \times B &= a_x b_x (i \times i = 0) + a_x b_y (i \times j = k) + a_x b_z (i \times k = -j) + \\ & a_y b_x (j \times i = -k) + a_y b_y (j \times j = 0) + a_y b_z (j \times k = i) + \\ & a_z b_x (k \times i = j) + a_z b_y (k \times j = -i) + a_z b_z (k \times k = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= a_x b_x (0) + a_x b_y (k) + a_x b_z (-j) + \\ & a_y b_x (-k) + a_y b_y (0) + a_y b_z (i) + \\ & a_z b_x (j) + a_z b_y (-i) + a_z b_z (0) \end{aligned}$$

Organizando el resultado se tiene:

$$A \times B = a_x b_y k + a_x b_z (-j) + a_y b_x (-k) + a_y b_z i + a_z b_x j + a_z b_y (-i)$$

Finalmente, al organizar se tiene:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

Para comparar con el resultado del determinante es necesario factorizar el signo del segundo componente así:

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

Como se puede ver el resultado es igual al obtenido al desarrollar el determinante, por tanto, se deja en libertad aplicar, cualquiera de las formas para desarrollar el producto vectorial.

2. **Integral de línea.** Cuando se habla de integrales generalmente se cae en el concepto de integral de Riemann que es el área bajo la curva de una función como se ve en la figura 9.37

$$f(y) = \int_a^b f(x) dx$$

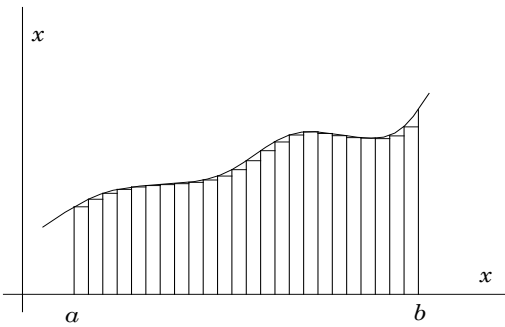


Fig. 9.37 Área bajo la curva

Los diferenciales de x son elementos infinitesimales que permite el cálculo de manera perfecta.

Bajo este contexto existen muchas formas de realizar integrales y una de las más sorprendente es la integral de línea que hace el cálculo sobre la misma línea de la función con lo que se puede encontrar el

recorrido a lo largo de la línea. esto es:

$$\int_l f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x$$

Ahora bien, la longitud de la curva se define como: $L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

Entonces,

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

$$\int_c f(x, y) dx = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

$$\int_c f(x, y) dy = \int_a^b f(g(t), h(t)) h'(t) dt$$

Ejemplo.

Evaluar $\int_c xy^2 ds$ donde c tiene una parametrización $x = Cost; y = Sent$ entre $0 \leq t \leq \pi/2$

Solución.

$\int_c xy^2 ds = \int_0^{\pi/2} Cost Sen^2 t \sqrt{Sen^2 t + Cos^2 t} dt$ lo que está dentro del paréntesis es 1 entonces,

$$\int_0^{\pi/2} Sen^2 t Cost dt = \frac{1}{3} Sen^3 \frac{\pi}{2} - Sen^3 0 = \frac{1}{3}$$

4 Operadores vectoriales.

4.1 Campo escalar. Es una región del espacio o el espacio mismo cuyos puntos están determinados por sus coordenadas x, y, z respecto a un sistema cartesiano ortogonal. Una función $\phi(x, y, z)$ definida en la región se le llama función de puntos o escalar, se afirma también que la función define un campo escalar, dado a que cada punto le hace corresponder un escalar.

4.2 Operador Nabla. Se representa este operador como ∇ y se le llama operador porque representa una operación que debe efectuarse sobre una función derivable en x, y, z

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Dependiendo de la función puede ser que haya dos o una variable derivable caso en el cual se le llama deriva direccional, así que en este caso si hay tres variables es como si hay tres derivables direccionales de manera parcial.

4.3 Gradiente de una función. Sea $U(x, y, z)$ una **función escalar** definida sobre una región del espacio y que admite ser derivable en sus tres componentes que a su vez, son las componentes de un vector. Es decir, cuando el operador nabla opera escalarmente sobre la función escalar U resulta un *vector* llamado gradiente de U

$$\nabla U = \frac{dU_x}{dx} i + \frac{dU_y}{dy} j + \frac{dU_z}{dz} k$$

Al símbolo ∇U se debe leer como, gradiente de U o simplemente *grad* U .

La dirección del vector gradiente de una función escalar es aquella según la cual esta función varía lo más rápido posible.

4.4 Divergencia de un campo vectorial. Sea $E(x, y, z)$ una **función vectorial** que admite ser derivable en sus tres componentes, Es decir, cuando el operador nabla opera escalarmente con la función vectorial E resulta un *escalar* llamado divergencia de E

$$\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Al símbolo $\nabla \cdot E$ se debe leer como, divergencia de E o simplemente *Div* E el punto entre el operador nabla y la función vectorial significa el producto escalar que se debe hacer.

Por ejemplo si E significa un campo de velocidades de un fluido, entonces la divergencia da información sobre el flujo o desplazamiento de la masa así: si $\nabla \cdot E < 0$ en un punto $k(x, y, z)$ entonces la masa fluye hacia el punto se dice que allí hay un sumidero. Si $\nabla \cdot E > 0$ entonces la masa fluye desde el punto k y se dice que hay una fuente y finalmente si $\nabla \cdot E = 0$ no hay pérdida ni ganancia de masa característica propia de los fluidos incompresible.

Laplaciano. Se llama Laplaciano de una función punto $\phi(x, y, z)$ a la divergencia de su gradiente. Se representa por ∇^2 o simplemente como Δ de manera que según su definición es: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$ o simplemente divergencia del gradiente de ϕ

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} k$$

4.5 Rotor o rotacional. Sea $F(x, y, z)$ una **función vectorial** que admite ser derivable en sus tres componentes, Es decir, cuando el operador nabla opera vectorialmente con la función vectorial F resulta un vector ortogonal que es llamado rotacional de F , simbólicamente se expresaría: $RotF = \nabla \times F$

$$RotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$RotF = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) k$$

4.6 Teorema de la divergencia. En matemáticas se demuestra al detalle estos teoremas, aquí únicamente los utilizaremos como una herramienta. El teorema muestra la siguiente igualdad.

$$\iiint_V divF dV = \oiint_S F_N dS$$

En donde el volumen que muestra la integral de volumen, está contenido en la superficie que indica la integral de superficie.

4.7 Teorema de Stokes. Igual que en el teorema de la divergencia, el teorema de Stokes se demuestra en calculo vectorial, aquí únicamente se lo utilizará como una herramienta que permite agilizar los resultados. El teorema finalmente demuestra la siguiente igualdad.

$$\oint_C F dl = \oiint_S RotF_N dS$$

En donde la superficie que muestra la integral de superficie está contenida en lo que envuelve la integral de línea cerrada.

Bibliografía

- [1] *Martín. A. Plonus. Electromagnetismo aplicado. Barcelona –Bogotá – Buenos Aires Reverte S.A. 1982*
- [2] *F. Marín Alonso. Campos Electricos y Magéticos. Madrid-Barcelona-Bilbao. Alambra 1974*
- [3] *Harris Benson. Física Universitaria Volumen 2. Mexico 2000 Compañia Editorial Continental*
- [4] *Serway, Raymond A., and John W Jewett. Física: Para Ciencias E Ingeniería Con Física Moderna / Raymond A. Serway Y John W. Jewett, Jr. 7a. ed.--. México D.F.: Cengage, 2009.*
- [5] *A.B. Alfonso y A.S. Florencio, Revista Brasileira de Ensino de Física 26, 247 (2004)*
- [6] *L. Viennot y S. Rozier, The Content of Science: A Contructivist Approach to its Teaching and Learning, editado por P. Fensham, R. Gunstone y R. White, R. (The Falmer Pres, London, 1994), p. 237-254.*
- [7] *S. Borowitz and L.A. Bornstein, A Contemporary View of Elementary Physics (McGraw-Hill Book Company, Tokyo, 1968).*
- [8] *W. Watson, Curso de Física (Editorial Labor S.A., Barcelona, 1950)*
- [9] *P.A. Tipler, Física (Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1995).*
- [10] *J.G. Roederer, Mecánica Elemental (Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 2002).*
- [11] *M. Alonso y E.J. Finn, Física, Vol. II: Campos y Ondas, Ed. Addison Wesley, Wilmington, Delaware (1987). ISBN: 9780201565188*
- [12] *S. Frish, A. Timoreva, Curso de Física General Tomo: I, II, y III Ed. Mir Moscú. (1977)*
- [13] *J. McKelvin y H. Grotch, Física para ciencias e Ingeniería, Tomos: I, II Ed. Harla Mexico. ISBN: 968-603402-1*

[14] A. Maiztegui. *Introducción a la Física, Tomo I, II Ed. Kapelusz Buenos aires.*

[15] J. Venegas S.J., *Texto de Física, Tomo I, II, Ed. Norma Cali Colombia.*

[16] H. Cromer, *Física para las ciencias de la vida y la salud, Ed. Reverte, S.A. Barcelona*

[17] J. Gonzales Ibeas, *Introducción a la Física y biofísica, Ed. Halambra Madrid. IABN: 84-205-0481-5*

[18] S. Zemansky y Y. Freedman. *Física Universitaria, Tomo I, II. Ed. Pearson Educación. México. ISBN: 970-26-0512-1*

[19] J.L. Diaz Diaz, J.M. Jimenez Moreno, M Lopez Rodriguez, *La física en problemas, las magnitudes físicas. Ed. Alambra I.S.B.N 84-205-0852-7*

Referencias

- Amazon. (s.f). *Soldador ARC, 200Amp 110V Soldador inversor IGBT con pantalla LCD, se adapta a equipo de varilla de soldadura de 0.165 in con accesorios herramientas*. <https://www.amazon.com/-/es/Soldador-inversor-soldadura-accesorios-herramientas/dp/B07DXP67QJ2Bach>. (2014). Efecto de las puntas y viento iónico. <https://trabajodefisica2bach.blogspot.com/2014/05/efecto-de-las-puntas.html>
- Boston Museum of Science. (2012). *Boston Museum of Science, Theater of Electricity*. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/File:Boston_Museum_of_Science,_Theater_of_Electricity.jpg
- Caristo 2~commonswiki. (2015). *Electróforo*. Wikipedia. [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Electr%C3%B3foro_\(1\).png](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Electr%C3%B3foro_(1).png)
- circuitspedia.com. (s.f). *6 band resistor color code calculator*. <https://circuitspedia.com/tag/6-band-resistor-color-code-calculator/>
- ETSIT- UPM. (2010). *Polímetro analógico y digital*. Wikipedia. <https://es.wikipedia.org/wiki/Mult%C3%ADmetro#/media/Archivo:Polimetros.JPG>
- Fortyseven. (s.f). *Transformadores*. Flickr. <http://www.flickr.com/photos/fortyseven/1453271097/>
- Heinrich, R. (2008). *Tower struck by lightning-Edit(Taxi)*. Wikipedia. [https://es.wikipedia.org/wiki/Pararrayos#/media/Archivo:CN_Tower_struck_by_lightning-Edit\(Taxi\).jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Pararrayos#/media/Archivo:CN_Tower_struck_by_lightning-Edit(Taxi).jpg)
- Ingenieros.es. (s.f). *Avances en superconductores*. <https://www.ingenieros.es/noticias/ver/avances-en-superconductores/6000>

- Stock. (s.f.). *Energía eléctrica*. Portafolio.
<https://www.portafolio.co/energia/el-nino-presiona-duro-el-valor-de-la-y-el-nivel-de-embalses-588949>
- Joyas4you. (2016). *¿Qué significa ese término en joyería? flujo..., galvanoplastia*. <https://www.joyas4you.com/blog/consejos-y-comentarios/que-significa-ese-termino-en-joyeria-flux-galvanoplastia>
- Kubeš, L. (2019). *Resistencias, transistores, condensadores y circuito integrado en PCB. Código de color estándar*.
<https://www.istockphoto.com/es/foto/resistencias-transistores-condensadores-y-circuito-integrado-en-pcb-c%C3%B3digo-de-color-gm1157004350-315547215>
- La ciencia de Ward (s.f.). *5 Troubleshooting Tips for Your Van de Graaff Generator*. <https://co.pinterest.com/pin/425168021073354068/>
- Mercado libre. (s.f). Toma Doble De Incrustar New Light.
https://articulo.mercadolibre.com.co/MCO-1266557825-toma-doble-de-incrustar-new-light-_JM
- Ok diario. (2021). *¿Qué son los rayos, relámpagos y truenos y en qué se diferencian?* <https://okdiario.com/curiosidades/diferencia-rayos-relampagos-truenos-2045029>
- Olmo, A. (2017). *Medida de la masa del electrón mediante espectrometría de masas*. [Trabajo de pregrado, Universidad de Jaén].
https://crea.ujaen.es/bitstream/10953.1/8743/1/TFG_Olmo_Guerrero_Antonio_Jose.pdf
- Pixabay. (2016). *Circuito, Placa de circuito y Resistor*.
<https://pixabay.com/es/photos/circuito-placa-de-circuito-resistor-1443256/>
- Sahu, M. (2014). *Corona Phenomenon In Transmission Lines*. Electrical Engineers Guide. <https://eeguides.blogspot.com/2016/03/corona-phenomenon-in-transmission-lines.html>
- Sheila Terry/Science Photo Library. (2004). *Otto von Guericke (1602-1686), físico alemán, operando el primer generador de*

electricidad estática. <https://www.alamy.es/otto-von-guericke-1602-1686-fisico-aleman-operando-el-primer-generador-de-electricidad-estatica-su-generador-consta-de-una-gran-bola-de-azufre-image335358089.html>

Schrader, E. (2011). *Condensadores*. Wikipedia.
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capacitors_\(7189597135\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capacitors_(7189597135).jpg)

Universidad de Valencia (s.f.). *Carrete de inducción de Ruhmkorff*.
<https://coleccion.es/s/mtic/item/16829#?c=&m=&s=&cv=&xywh=1007%2C715%2C991%2C384>

Acerca del autor

Luis Aphranio Portilla Salazar



Nació en Pupiales, el 25 de agosto de 1956. Hijo de Carlos Julio Portilla R. y Laurentina Salazar. Menor de ocho hermanos, inició sus estudios en la Escuela urbana de Varones de su ciudad natal; el bachillerato lo realizó en el Colegio de los Hermanos Maristas de Ipiales; se graduó como Licenciado en Matemáticas y Física, área mayor Física, en la Universidad de Nariño; como Ingeniero Industrial de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Pasto; se especializó en Empresas Constructoras, en el convenio de la Universidad de Nariño y Universidad del Valle; Especialista en Docencia Universitaria, con la Universidad de Nariño, y Doctor en Ciencias de la Educación, con Rudecolombia, de la que forma parte la Universidad de Nariño; asimismo, realizó estudios en el campo de Análisis de Estructuras, como también en Estadística.

êditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Notas de clase de Física II es el resultado de más de 35 años de experiencia docente a nivel universitario con las asignaturas de: física I, II, III, Biofísica, Termodinámica, Óptica y mecanismos. tanto a estudiantes de la carrera de física como a servicios que lo solicitan.

Así que este libro recoge toda esa experiencia, aún, desde cuando fui estudiante de pregrado y como no recordar a los profesores José Eval Bacca, Enrique Caicedo y sobre todo al padre Remigio Fiore que si bien no nos cruzamos en el plan de profesor y alumno si me ayudó muchísimo en mis primeros años de trabajo como profesor hora catedra en la Universidad de Nariño con sus apuntes libros y consejos.

La experiencia adquirida como docente más la formación académica adquirida durante todos estos años me ha permitido elaborar estas notas de clase siguiendo una línea de construcción del conocimiento, razón por la cual, el libro está conformado por cinco capítulos que son: Hidrostática, Hidrodinámica, Deformación, Movimiento oscilatorio, y Ondas. Los conceptos analizados y demostrados en el primer capítulo son la base para el siguiente y así sucesivamente, esto ayuda al estudiante y en general al lector tener una lectura fluida, además el lenguaje utilizado es muy sencillo y cotidiano así que no hay palabras ni términos exigentes que en muchas ocasiones entorpecen la comprensión de lo expuesto.

Por otra parte, los procesos de demostraciones y ejercicios matemático se han desarrollado casi en su totalidad, entendiendo que nuestros estudiantes y lectores en muchos casos llegan con deficiencia cognitiva en matemáticas.

Respecto al diseño del libro las figuras y esquemas fueron realizadas en Auto-Caad. Software de diseño en ingeniería y arquitectura, dado a mi formación también como ingeniero Industrial, me permitió realizar las figuras de acuerdo a la necesidad de la redacción de las notas de clase.

Fotografías y tablas de módulos fueron tomadas de páginas de internet que no tenía ninguna reserva como material audiovisual y de manuales de las empresas manufactureras de los materiales en mención.

Finalmente, las notas de clase fueron escritas en Word y la parte matemática con el editor de ecuaciones de Word 3.0, para comprobar los resultados se utilizó Math de Cientific Word Place.

La bibliografía para escribir estas notas de clase aparece al final del libro y son libros convencionales que se ha utilizado a lo largo de todos estos tiempos.

ISBN: 978-628-7771-10-9



9 786287 771109



ai
Universidad de Nariño

ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 00022 - ENERO 11 DE 2023

120 años
Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño