Algunas pruebas estadísticas no paramétricas

Alberto Javier Mesa Guerrero
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de **Nariño**

Algunas pruebas estadísticas no paramétricas

Algunas pruebas estadísticas no paramétricas

Alberto Javier Mesa Guerrero
Segundo Javier Caicedo Zambrano

êditorial
Universidad de **Nariño**

Mesa Guerrero, Alberto Javier
Algunas pruebas estadísticas no paramétricas / Alberto Javier Mesa Guerrero, Segundo Javier Caicedo Zambrano. – 1ª. ed.--San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

96 páginas : ilustraciones, gráficas, tablas

Incluye referencias bibliográficas p. 92-93 y reseña de los autores p. 94
ISBN: 978-628-7771-23-9 Impreso
ISBN: 978-628-7771-24-6 Digital

1. Estadística 2. Pruebas de hipótesis no paramétricas 3. Prueba de Kolmogorov - Smirnov 4. Prueba de Shapiro - Wilk 5. Prueba de Mann - Withney 6. Prueba de MacNemar 7. Prueba de Kruskal - Wallis 8. Prueba de Spearman 9. Prueba de independencia. I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

519.5 M578a – SCDD-Ed. 22

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Algunas pruebas estadísticas no paramétricas

ISBN impreso: 978-628-7771-23-9
ISBN digital: 978-628-7771-24-6
Primera edición

Corrección de estilo: Germán Chaves Jurado
Diseño de cubiertas: Nathaly Johana Rivadeneira
Diagramación: Manuel Insandará - Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Marzo de 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

TABLA DE CONTENIDO

Introducción.. 7

Capítulo 1.

Prueba de Kolmogorov – Smirnov 9

Capítulo 2.

Prueba de Shapiro – Wilk 18

Capítulo 3.

Prueba de Mann – Withney o Prueba de Rangos con Signo.......................... 28

Capítulo 4.

Prueba de MacNemar 51

Capítulo 5.

Prueba de Kruskall – Wallis 62

Capítulo 6.

Prueba de Spearman... 69

Capítulo 7.

Prueba de Bondad de Ajuste a un Modelo Binomial 81

Capítulo 8.

Prueba de Independencia... 85

Bibliografía 92

Acerca de los autores.. 94

INTRODUCCIÓN

El objetivo general de la estadística es la inferencia estadística, que consiste en dos tipos de problemas, a saber: primero, la estimación de parámetros, la cual puede ser puntual o por intervalos. En la puntual, se toma una muestra representativa de la población y se encuentra un estadígrafo, cuyo valor se toma como la estimación del parámetro; en este caso, no es posible conocer el grado de confianza, el riesgo de la estimación, la precisión de la estimación ni el margen de error. Por su parte, en la estimación por intervalos, que consiste encontrar un intervalo que contenga el parámetro, se resuelven los inconvenientes de la estimación.

El segundo problema, es la prueba de hipótesis, donde se aplica un procedimiento estadístico para tomar la mejor decisión frente a dos alternativas: la hipótesis nula y la hipótesis de trabajo o del investigador, teniendo en cuenta que se pueden cometer dos tipos de errores: Error Tipo I y Error Tipo II.

El Error Tipo I, consiste en rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera; se denota por α y se denomina nivel de significancia, el cual debe ser muy pequeño; generalmente se utiliza entre el 1% y 5%. Cuando la hipótesis nula se rechaza al nivel de significancia del 5%, se puede concluir que existe una diferencia significativa entre el estadígrafo de prueba y el parámetro; y si se rechaza H_0 al nivel del 1%, la diferencia es altamente significativa. Por su parte, el Error tipo II, consiste en aceptar la hipótesis nula cuando es falsa, se denota por β, que también debe ser pequeño, por lo cual, $1-\beta$ será muy alto, y representa la potencia o el poder de la prueba.

En términos generales, se puede considerar que aunque la potencia de las pruebas estadísticas paramétricas es mayor que la que ofrecen las pruebas no paramétricas, ya que con ellas es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta realmente es falsa (error de tipo II: 1-β), es conveniente comentar que el adecuado tamaño de muestra es un requisito indispensable para aumentar la eficacia de una prueba: a medida que aumenta el tamaño de muestra, disminuye la posibilidad de cometer el error de tipo II (Gómez-Gómez, 2003).

Cuando se pretende probar una hipótesis respecto a uno o más parámetros de una población que se aproxima a una distribución normal, se utiliza la estadística paramétrica, como la t de Student, la normal, F de Fisher, Ji-Cuadrado. Cuando la población no se aproxima a una distribución normal, las varianzas no son homogéneas, las variables son nominales u ordinales, presenta datos atípicos o las muestras son muy pequeñas, se aplica pruebas estadísticas no paramétricas, las cuales son más flexibles en términos de supuestos, lo que las hace adecuadas para datos que no se ajustan a una distribución normal, o con distribuciones desconocidas (Gómez-Gómez et al., 2003).

Las pruebas paramétricas se basan en supuestos específicos sobre la distribución de los datos en la población objeto de estudio; supuestos que incluyen la normalidad de los datos, la igualdad de varianzas, muestras grandes, variables cuantitativas, entre otros. Algunos ejemplos comunes de pruebas de hipótesis paramétricas se pueden resolver aplicando la distribución moral, t de Student, Ji-Cuadrado, Fisher, la prueba de ANOVA, prueba de regresión lineal. Estas pruebas son adecuadas cuando los datos cumplen con los supuestos paramétricos, y se consideran más poderosas que las pruebas no paramétricas cuando los supuestos son válidos.

La elección entre pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas depende de varios factores. En primer lugar, es importante considerar si los supuestos paramétricos son razonables para los datos en estudio. Si los datos no cumplen con los supuestos paramétricos, entonces las pruebas no paramétricas pueden ser una buena alternativa. En segundo lugar, el tamaño de la muestra y el tipo de variable de interés también pueden influir en la elección de la prueba estadística (Gómez-Gómez et al., 2003).

Así pues, las pruebas de hipótesis paramétricas son apropiadas cuando los supuestos sobre la distribución de los datos son válidos, mientras que las pruebas no paramétricas, que son más flexibles, se pueden utilizar cuando los supuestos no se cumplen.

En el libro, se presenta ejemplos de las siguientes pruebas no paramétricas: Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk, Mann-Whitney, McNemar, Kruskal-Wallis, Spearman, Bondad de ajuste a un modelo binomial, y prueba de independencia. Los ejemplos se desarrollan aplicando un método manual y también con el apoyo de los paquetes estadísticos SPSS y Statgraphics., de los cuales la Institución dispone de licencia de funcionamiento

Los autores
Agosto de 2023.

Capítulo 1

PRUEBA DE KOLMOGOROV - SMIRNOV

El estudio de la prueba no paramétrica de Kolmogorov - Smirnov es relevante en el análisis estadístico cuando se desea evaluar si un conjunto de datos sigue una distribución específica. Es especialmente útil cuando no se conocen los supuestos sobre la distribución de los datos o cuando los datos no siguen una distribución normal (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021).

Esta prueba es ampliamente utilizada en diversas áreas de investigación como la física, la biología, la economía y las ciencias sociales, donde se busca determinar si los datos se ajustan a una distribución específica; especialmente es útil cuando no se pueden asumir supuestos sobre la distribución de los datos o cuando se busca comparar diferentes distribuciones (Guisande-González et. al., 2006).

La prueba no paramétrica de Kolmogorov-Smirnov proporciona una herramienta importante para evaluar si un conjunto de datos sigue una distribución teórica propuesta. Al comparar la función de distribución empírica con la función de distribución teórica, la prueba permite tomar decisiones estadísticas objetivas sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021).

La prueba de Kolmogorov-Smirnov se basa en comparar la función de distribución acumulada (FDA) empírica de los datos con la FDA teórica propuesta. La FDA empírica se obtiene a partir de los datos observados, mientras que la FDA teórica se deriva de la distribución propuesta. La prueba evalúa la discrepancia máxima entre las dos funciones y proporciona una medida de cómo se ajustan los datos a la distribución teórica.

El proceso de aplicación de la prueba, requiere lo siguiente:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que los datos siguen la distribución teórica propuesta.
2. Calcular la función de distribución empírica a partir de los datos observados y comparar con la función de distribución acumulada teórica.
3. Utilizar como estadística de prueba la diferencia máxima entre las dos funciones (D).

4. Comparar el valor de la estadística de prueba con un umbral crítico obtenido de tablas, y tomar la decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

Se trata de un método no paramétrico para probar si existe una diferencia significativa entre una distribución de frecuencias observada y una distribución de frecuencias teórica en muestras donde $n \geq 50$ y las variables son cuantitativas. También se aplica para determinar la normalidad de una serie de datos.

Hipótesis a contrastar:

H_0: los datos analizados siguen una distribución X.

H_1: Los datos analizados no siguen una distribución X.

Nivel de significancia: α.

Estadístico de prueba o de contraste:

$D = max|F_o(x_i) - F_e(x_i)|; i = 1,2, \cdots, n.$

Donde:

x_i: i-ésimo valor observado en la muestra (previamente los valores se ordenan de menor a mayor); $i = 1,2, \cdots, n$.

F_0: frecuencia observada acumulada.

$F_0(x_i)$: probabilidad acumulada de las observaciones; $i = 1,2, \cdots, n$.

F_e: frecuencia esperada acumulada.

$F_e(x_i)$: probabilidad esperada acumulada de la función teórica de probabilidad planteada en la hipótesis nula; $i = 1,2, \cdots, n$.

Los valores críticos D se encuentran en la Tabla 1-1, y se determinan del siguiente modo: en la primera columna se ubica el tamaño de n de la muestra, y en la primera fila el nivel de significancia α; en la intersección de las respectivas fila y columna se encuentra el valor crítico D.

Para tamaños de muestras mayores que 35 ($n > 35$), el valor crítico D se determina con las fórmulas de la última fila de la Tabla 1-1.

Tabla 1-1. Tabla para la prueba Kolmogorov–Smirnov

Tamaño de muestra $(\boldsymbol{n})$	**Nivel de significancia para** $\boldsymbol{D = max\|F_0 - F_e\|}$				
	0,20	**0,15**	**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,350	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
Más de 35	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Fuente: elaboración propia, adaptada de Frías-Bustamante (s.f.)

El siguiente paso, consiste en comparar el valor calculado D_{cal} con el valor crítico D_{α}.

Regla de decisión:

Si D_{cal} es menor que D_{α}, se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Si se acepta H_0, los datos analizados siguen una distribución X; si se rechaza H_0, los datos no siguen una distribución X.

Ejemplo 1:

Con una muestra de 178 municipios, se investigó el porcentaje de población activa dedicada a la venta de ordenadores, resultando la Tabla 1-2.

Tabla 1-2. Datos del ejemplo 1-1

porcentaje	n° de municipios
Menos de 5%	18
De 5 a 10%	14
De 10 a 15%	13
De 15 a 20%	16
De 20 a 25%	18
De 25 a 30%	17
De 30 a 35%	19
De 35 a 40%	24
De 40 a 45%	21
Mas de 45%	18
TOTAL	178

Fuente: datos del ejemplo

Contrastar, con un nivel de significancia del 5%, si el porcentaje de municipios para cada grupo establecido, se distribuye de manera uniforme.

Solución:

Dado que se trata de probar si los datos siguen una distribución uniforme, entonces, se aplica la prueba no paramétrica de Kolmogorov-Smirnov.

A continuación, se resuelve el problema mediante dos estrategias: en la primera, se aplica un método manual, para lo cual se utiliza las fórmulas y el proceso correspondiente de la prueba; y en la segunda, se utiliza el paquete estadístico SPSS.

a) Procedimiento manual

Hipótesis:

H_0: el porcentaje de municipios dedicado a la venta de ordenadores, se distribuye de manera uniforme, con un nivel de significancia del 5%.

H_1: el porcentaje de municipios dedicado a la venta de ordenadores, no se distribuye uniformemente, con un nivel de significancia del 5%.

Bajo la hipótesis nula, dado que en el problema existen 10 grupos, cada uno debería estar compuesto por el 10% de la población; así que, se puede establecer la siguiente tabla de frecuencias acumuladas observadas y esperadas (Tabla 1-3), donde:

f_0: frecuencia observada de cada municipio.

F_0: Frecuencia observada acumulada.

$F_0(x_i)$: probabilidad acumulada de las observaciones;

$i = 1,2,\cdots,10$.

P: probabilidad uniforme según la hipótesis nula.

F_e: frecuencia esperada acumulada.

$F_e(x_i)$: probabilidad esperada acumulada; $i = 1,2,\cdots,10$.

Tabla 1-1. Tabla de frecuencias acumuladas

Variable	*f-obs* f_o	*F-acum* F_o	*P-acum* $F_o(X_i)$	*f-esp* f_e	*F-acum* F_e	*P-acum* $F_e(X_i)$	$\lvert F_0(x_i) - F_e(x_i)\rvert$
Menos de 5%	18	18	0,1011	17,8	17,8	0,1	0,0011
De 5 a 10%	14	32	0,1798	17,8	35,6	0,2	0,0202
De 10 a 15%	13	45	0,2528	17,8	53,4	0,3	0,0472
De 15 a 20%	16	61	0,3427	17,8	71,2	0,4	0,0573
De 20 a 25%	18	79	0,4438	17,8	89	0,5	0,0562
De 25 a 30%	17	96	0,5393	17,8	106,8	0,6	**0,0607**
De 30 a 35%	19	115	0,6461	17,8	124,6	0,7	0,0539
De 35 a 40%	24	139	0,7809	17,8	142,4	0,8	0,0191
De 40 a 45%	21	160	0,8989	17,8	160,2	0,9	0,0011
Mas de 45%	18	178	1	17,8	178	1	
TOTAL	178			178			

Fuente: elaboración propia

El estadístico de prueba D, es el máximo valor de las diferencias observadas y teórica, así: $D_{cal} = max|F_o(x_i) - F_e(x_i)| = 0{,}0607$.

Dado que n es muy grande ($n \geq 50; n = 178\ municipios$), se utiliza la fórmula para determinar el valor crítico D_α para $\alpha = 5\%$, así: $D_\alpha = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$ (Tabla 1-1).

$$D_\alpha = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{178}} = 0{,}1019.$$

Regla de decisión:

Si $D_{cal} < D_\alpha$, se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Como $D_{cal} = 0{,}0607 < D_\alpha = 0{,}1019$, existe evidencia para aceptar H_o; esto es, el porcentaje de municipios dedicados a la venta de ordenadores tiene una distribución uniforme.

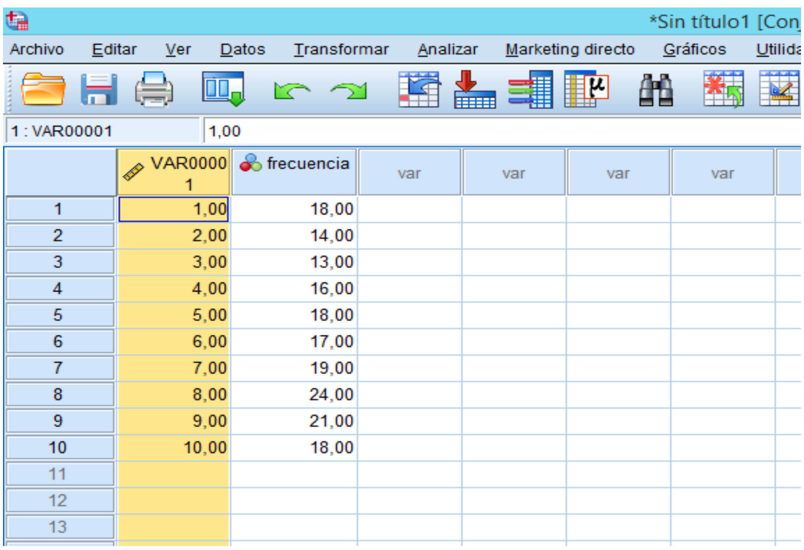
b) Procedimiento con el aplicativo SPSS

Hipótesis:

H_0: el porcentaje de municipios dedicado a la venta de ordenadores, se distribuye de manera uniforme, con un nivel de significancia del 5%.

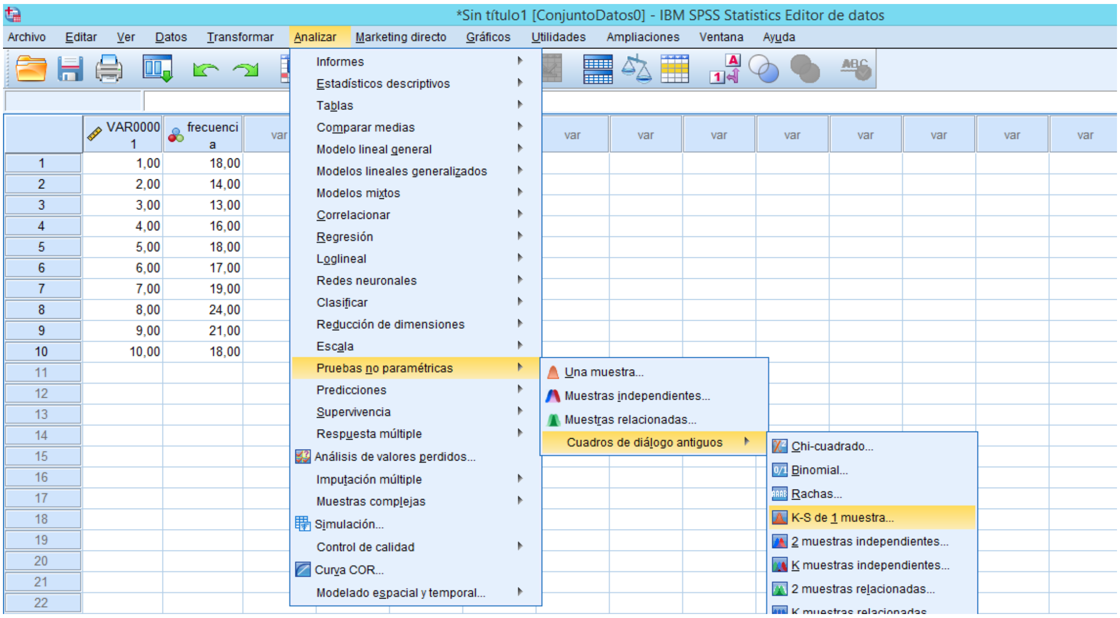
H_1: el porcentaje de municipios dedicado a la venta de ordenadores, no se distribuye uniformemente, con un nivel de significancia del 5%.

El procedimiento respectivo, se presenta en los recortes 1-1 al 1-4.



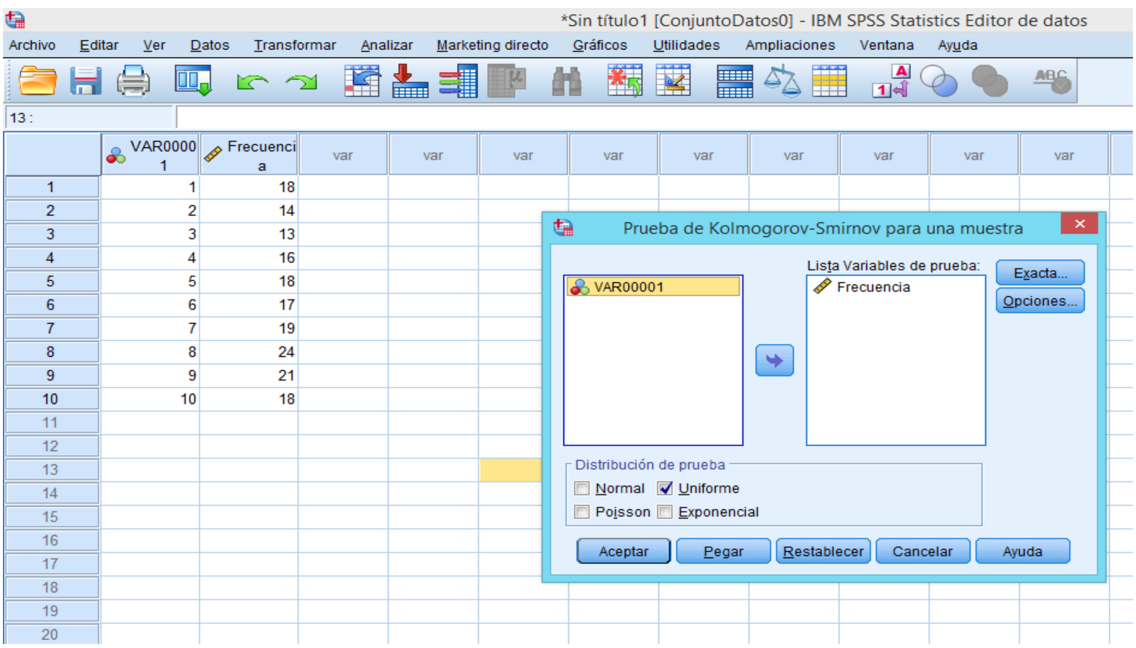
Recorte 1-1. Paso 1/4.
Fuente: elaboración propia

- *Opción: analizar, pruebas no paramétricas, cuadros de diálogo antiguos, KS de una muestra.*



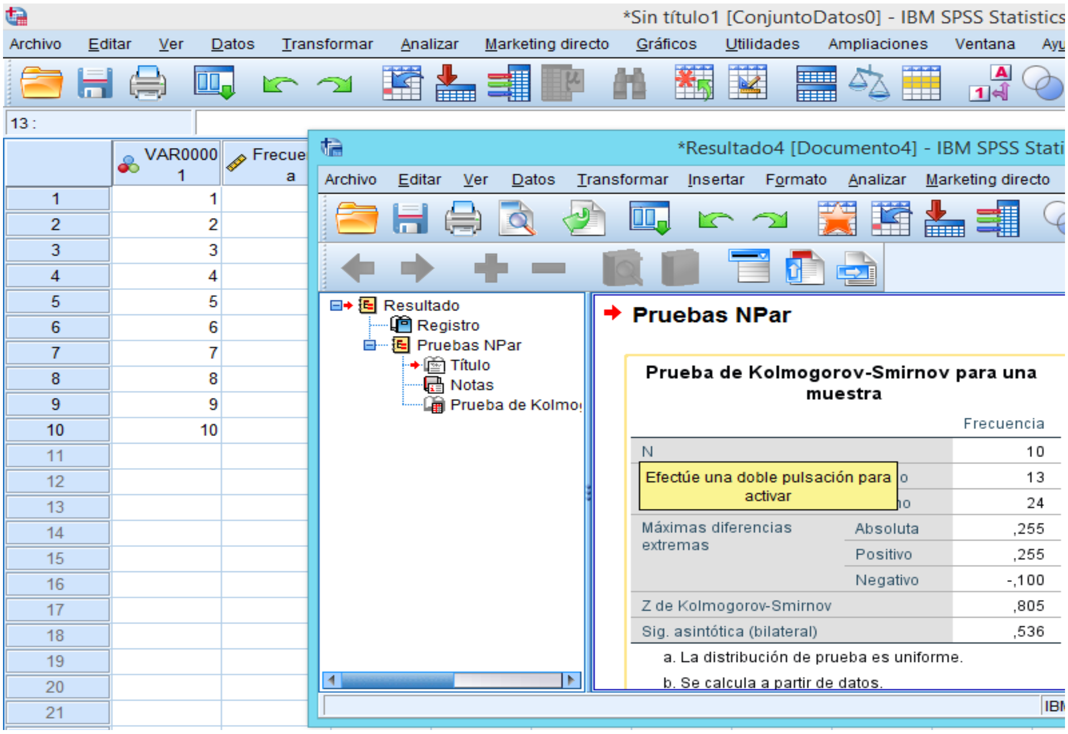
Recorte 1-2. Paso 2/4
Fuente: elaboración propia

- *Seleccionar la variable:*



Recorte 1-3. Paso 3/4
Fuente: elaboración propia

- *Resultado:*



Recorte 1-4. Paso 4/4
Fuente: elaboración propia

Como se puede observar, $p - value\ = 0{,}536\ > \alpha\ = 0{,}05$ entonce se acepta la hipótesis nula; por lo tanto, la frecuencia observada de los municipios dedicados a la venta de ordenadores, se distribuye de manera uniforme.

Capítulo 2

PRUEBA DE SHAPIRO-WILK

El estudio de la prueba no paramétrica de Shapiro-Wilk es de gran importancia en el análisis estadístico cuando se desea evaluar si un conjunto de datos sigue una distribución normal; es especialmente útil cuando se trabaja con datos que no cumplen con los supuestos de normalidad requeridos por las pruebas paramétricas (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021).

La prueba se basa en la comparación de los valores observados con los valores esperados, bajo la hipótesis de normalidad. Esta prueba calcula un estadístico de prueba que mide la diferencia entre los valores observados y los valores esperados, bajo la distribución normal. La estadística de prueba se utiliza para determinar si los datos se desvían significativamente de la normalidad (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021).

Esta prueba es ampliamente utilizada en diversas áreas de investigación, tales como la biología, la psicología, la economía y las ciencias sociales, donde se busca determinar si los datos se ajustan a una distribución normal; es especialmente útil si los datos no cumplen los supuestos de normalidad requeridos por las pruebas paramétricas de análisis de varianza (ANOVA) o la prueba t de Student. La prueba *Shapiro-Wilk* proporciona una herramienta estadística efectiva para evaluar si un conjunto de datos sigue una distribución normal (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021). Al comparar los valores observados con los valores esperados bajo la hipótesis de normalidad, esta prueba permite tomar decisiones estadísticas sólidas sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos.

El proceso para la aplicación de la prueba, implica los siguientes pasos:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que los datos siguen una distribución normal.
2. Ordenar los valores observados, de menor a mayor, y calcular los coeficientes de regresión que relacionan los rangos observados con los rangos esperados, bajo la distribución normal.
3. Calcular el estadístico de prueba, basado en los coeficientes de regresión y comparar con un umbral crítico obtenido de tablas, y tomar la decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

La prueba de normalidad de *Shapiro-Wilk* es aplicable cuando se analizan muestras compuestas por menos de 50 elementos (muestras pequeñas) (Flores-Tapia & Flores-Ceballos, 2021).

Hipótesis:

H_0: los datos analizados siguen una distribución Normal.

H_1: los datos analizados no siguen una distribución Normal.

Estadística de prueba de Shapiro–Wilk:

$$W = \frac{[\sum a_i[X_j - X_i]]^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{b^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2}; \quad (1)$$

donde:

$i = 1,2, \dots, n$

$j = n, n-1, \dots, 2,1$

a_i: coeficientes del test de Shapiro-Wilk, encontrados en tablas, según el tamaño de la muestra (Tabla 2-1)

X_i: datos ordenados en forma ascendente.

X_j: datos ordenados en forma descendente.

$b = \frac{\sum a_i(X_j - X_i)}{n}$.

El estadístico W obtenido con la fórmula (1), corresponde al W calculado: W_{cal}.

Tabla 2-1. Coeficientes a_{in} para el contraste de hipótesis con Shapiro-Wilk

i / **n**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
2	0,7071										
3	0,7071	0,0000									
4	0,6872	0,1677									
5	0,6646	0,2413	0,0000								
6	0,6431	0,2806	0,0875								
7	0,6233	0,3031	0,1401	0,0000							
8	0,6052	0,3164	0,1743	0,0561							
9	0,5888	0,3244	0,1976	0,0947	0,0000						
10	0,5739	0,3291	0,2141	0,1224	0,0399						
11	0,5601	0,3315	0,2260	0,1429	0,0695	0,0000					
12	0,5475	0,3325	0,2347	0,1586	0,0922	0,0303					
13	0,5359	0,3325	0,2412	0,1707	0,1099	0,0539	0,0000				
14	0,5251	0,3318	0,2495	0,1802	0,1240	0,0727	0,0240				

	Kolmogorov-Smirnov			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Tradicional	0,265	8	0,104	0,781	8	0,018
Investigador	0,336	8	0,008	0,696	8	0,002

Fuente: elaboración propia, adaptación de Serano-Pérez (s.f.)

Regla de decisión:

Si $W_{cal} < W_{\alpha}$, se rechaza H_0, en caso contrario, se acepta H_0.

El W crítico (W_{α}) se lo encuentra en la Tabla 2-2, teniendo en cuenta el tamaño de la muestra y el nivel de significancia, donde se tabulan valores de w_o, tales que $P(W > W_o) = \alpha$.

Tabla 2-2. Distribución estadístico Shapiro-Wilk

n	**α**			
	0,01	**0,02**	**0,05**	**0,10**
3	0,753	0,756	0,767	0,789
4	0,687	0,707	0,748	0,792
5	0,686	0,715	0,762	0,806
6	0,713	0,743	0,788	0,826
7	0,73	0,76	0,803	0,838
8	0,749	0,778	0,818	0,851
9	0,764	0,791	0,829	0,859
10	0,781	0,806	0,842	0,869

Fuente: elaboración propia, adaptación de Editorial *Team (2022).*

Ejemplo:

Una surtidora automática fue utilizada para llenar envases con 16 ml de un medicamento; mediante un muestreo aleatorio, se seleccionan 8 frascos y se mide el volumen de envasado, encontrando los siguientes resultados:

16,0; 15,9; 15,97; 16,04; 16,05; 15,98; 15,96; 16,02.

Se quiere saber si, la variable *volumen servido* se distribuye normalmente.

Solución:

Dado que la prueba Shapiro-Wilk se puede utilizar para determinar si un conjunto de datos sigue una distribución normal, entonces, para este problema, se aplica dicha prueba.

a) Procedimiento manual para la prueba de normalidad Shapiro-Wilk

Hipótesis:

H_0: la variable aleatoria *volumen servido* proviene de una distribución normal.

H_1: la variable aleatoria *volumen servido* no proviene de una distribución normal.

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05 = 5\%$.

Se calcula el estadígrafo de prueba: b (Tabla 2-3).

Para el efecto, se realizan los siguientes pasos:

Columna 1: enumerar los valores de la variable estudiada (i: $1, 2, 3, \dots, n$).

Columna 2: ordenar los datos en forma ascendente X_i.

Columna 3: ordenar los datos en forma descendente X_j.

Columna 4: determinar los coeficientes a_i en la tabla de Shapiro-Wilk.

Columna 5: realizar el producto de los coeficientes por las diferencias $(x_i - x_j)$.

Columna 6: determinar los cuadrados de las diferencias entre X_i y el promedio.

Tabla 2-3. Tabla de datos para el estadístico de prueba Shapiro-Wilk

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{X_j}$	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{a_i(X_i - X_j)}$	$\boldsymbol{(X_i - \overline{X})^2}$
1	15,9	16,05	0,6052	0,090780	0,0081
2	15,96	16,04	0,3164	0,025312	0,0009
3	15,97	16,02	0,1743	0,008715	0,0004
4	15,98	16,00	0,0561	0,001122	0,0001
5	16,00	15,98	0	0	0,0001
6	16,02	15,97	0	0	0,0009
7	16,04	15,96	0	0	0,0025
8	16,05	15,9	0	0	0,0036
TOTAL	127,92			0,125929	0,0166
Promedio	**15,99**			**b**	

Fuente: Elaboración propia

$$W_{Cal} = \frac{[\sum a_i [X_j - X_i]]^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{b^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}. \quad (2)$$

$$b = \frac{\sum a_i (X_j - X_i)}{n} = 0{,}125929.$$

$i = 1{,}2, \dots{,}8.$

$j = 8,7, \dots ,2,1.$

Para obtener el valor del estadístico de prueba W_{cal} de la ecuación (2), se divide el cuadrado del total de la columna 5 entre el total de la columna 6, así:

$$W_{Cal} = \frac{b^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{0{,}125929^2}{0{,}0166} = \frac{0{,}015858}{0{,}0166} = 0{,}955.$$

En la Tabla 2-2 se obtiene el valor de W crítico $(0{,}05; 8)$: $W_\alpha = 0{,}818$.

Regla de Decisión:

Se rechaza la H_0 para valores pequeños de W_{cal}.

Si $W_{cal} < W_\alpha$ se rechaza H_0, caso contrario, se acepta H_0.

Como $W_{cal} = 0{,}955 > W_\alpha = 0{,}818$, existe evidencia para aceptar H_0; esto es, la variable aleatoria *volumen servido* proviene de una distribución normal.

***Utilizando p-value*:**

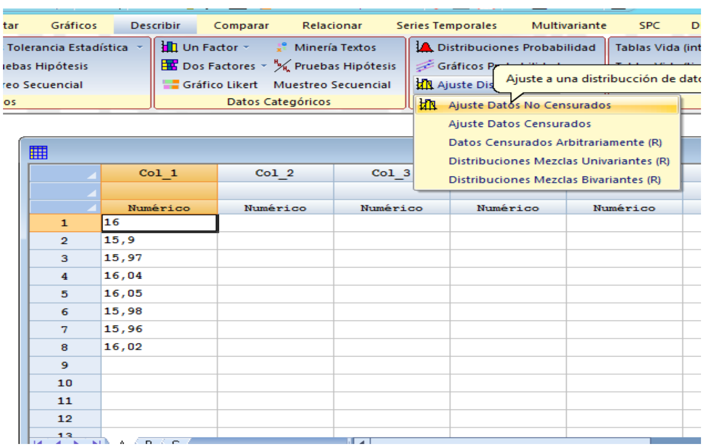
Como $p - value = 0{,}767 > \alpha = 0{,}05$, existe evidencia para aceptar H_0; esto es, la variable aleatoria *volumen servido* proviene de una distribución normal.

Por lo tanto, se puede concluir que, con un 5% de significancia, la variable *volumen servido* tiene distribución normal.

b) Procedimiento con Statgraphics

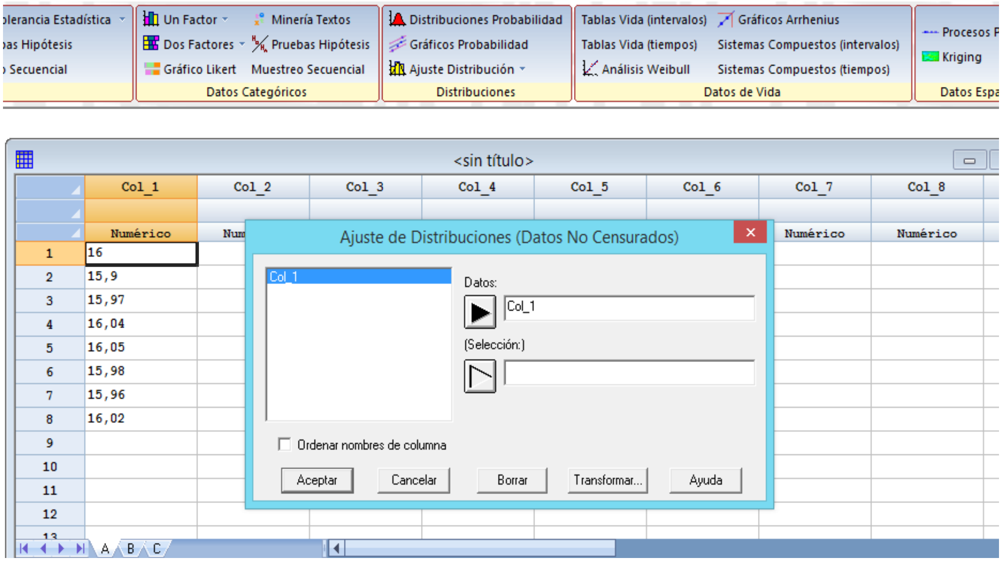
El procedimiento se presenta en los recortes 2-1 al 2-5.

- *Seleccionar datos y luego ajuste a una distribución de datos*:



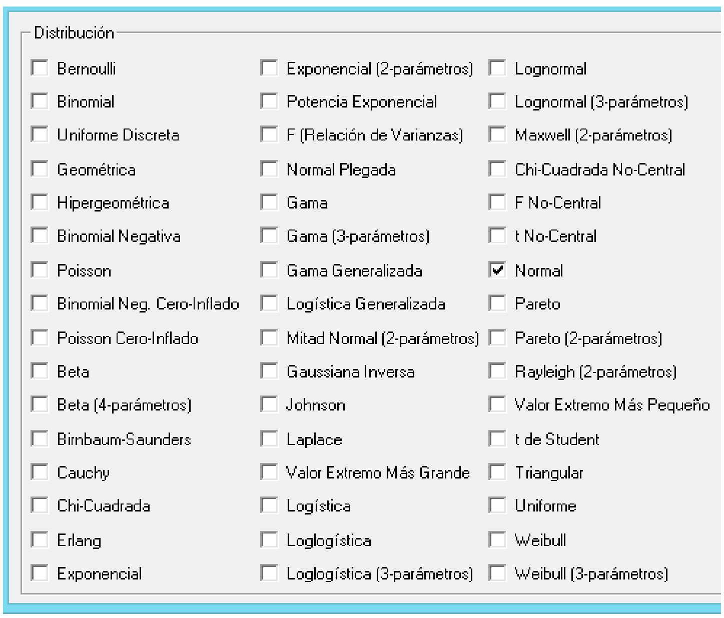
Recorte 2-1. Paso 1/5
Fuente: elaboración propia

- *Introducir los datos:*



Recorte 2-2. Paso 2/5
Fuente: elaboración propia

- *Escoger tipo de distribución:*



Recorte 2-3. Paso 3/5
Fuente: elaboración propia

- *Escoger la información solicitada*:

Recorte 2-4. Paso 4/5
Fuente: elaboración propia

- *Analizar el resultado*:

Prueba	***Estadístico***	***Valor-P***
Estadístico W de Shapiro-Wilk	0,955604	0,767346

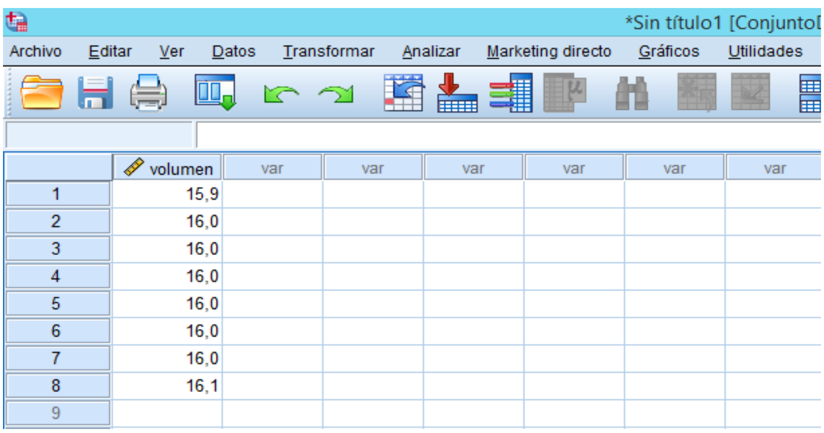
Recorte 2-5. Paso 5/5
Fuente: elaboración propia

Como se observa en el Recorte 2-5, el *p-value* $= 0{,}767$ es mayor que $\alpha = 0{,}05$, por lo cual, se acepta H_0; esto es, los datos provienen de una distribución normal.

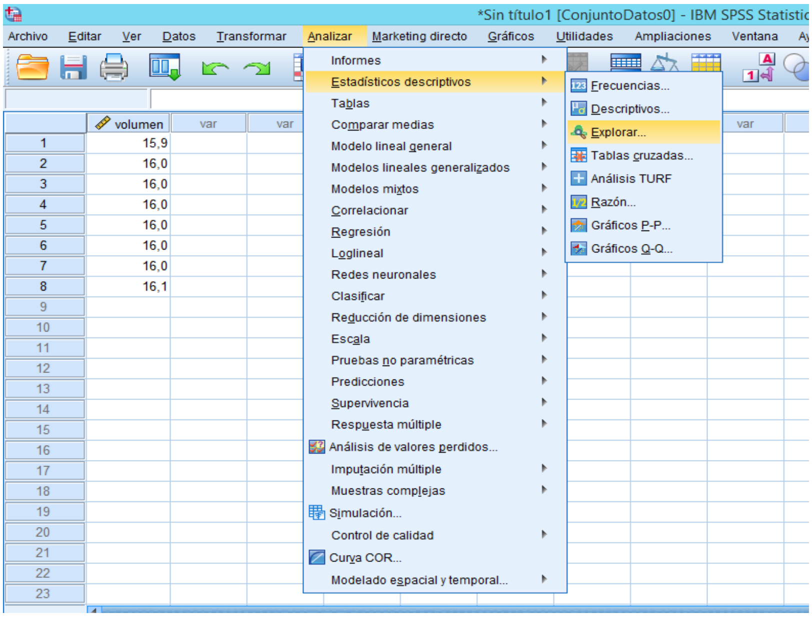
c) Procedimiento con el aplicativo SPSS

Utilizando el programa estadístico SPSS se llega a la misma conclusión.

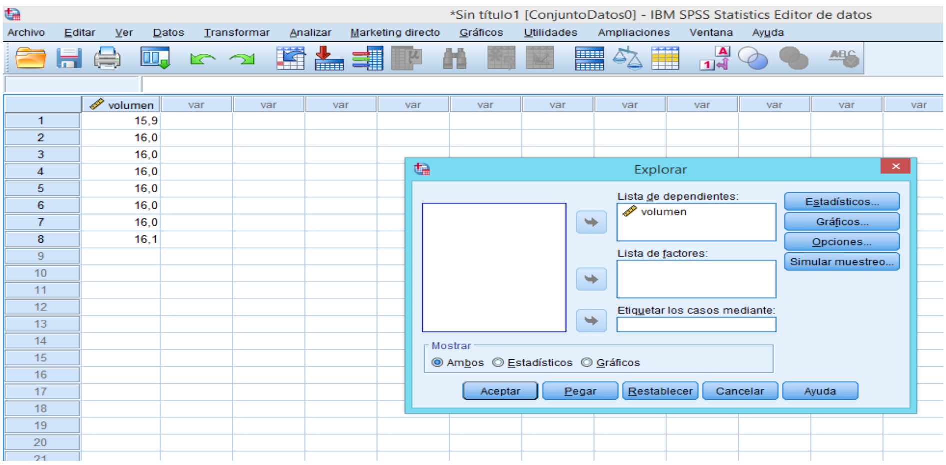
El procedimiento con SPSS, se ilustra en los recortes 2-6 al 2-9.



Recorte 2-6. Paso 1/4
Fuente: elaboración propia



Recorte 2-7. Paso 2/4
Fuente: elaboración propia



Recorte 2-8. Paso 3/4
Fuente: elaboración propia

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
volumen	0,144	8	0,200*	0,956	8	0,767
*. límite inferior de la significación verdadera.						

Recorte 2-9. Paso 4/4
Fuente: elaboración propia

Como se observa en el Recorte 5, el $p\text{-}value = 0{,}767$ es mayor que $\alpha = 0{,}05$, por lo cual, se acepta la hipótesis nula H_0; esto es, los datos sí provienen de una distribución normal.

Capítulo 3

PRUEBA DE MANN-WHITNEY O PRUEBA DE RANGOS CON SIGNO

El estudio de la prueba no paramétrica de Mann-Whitney es de gran utilidad en el análisis estadístico cuando se desea comparar dos grupos independientes y los datos no cumplen con los supuestos de normalidad o de homogeneidad de varianzas (Quispe-Andía et. al, 2019). También se conoce como la prueba U de Mann-Whitney o la prueba de rangos con signo. La U de Mann-Whitney es la más popular de las pruebas para el estudio de dos muestras independientes. Es equivalente a la prueba de suma de rangos de Wilcoxon y a la prueba de dos grupos de Kruskal-Wallis (Gómez-Gómez, 2003).

Esta prueba proporciona una forma robusta y efectiva para comparar dos grupos independientes cuando los datos no cumplen con los supuestos paramétricos. Al analizar los rangos de las observaciones, en lugar de los valores individuales, esta prueba permite obtener conclusiones estadísticas sólidas sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos.

La prueba de Mann-Whitney es ampliamente utilizada en diversas disciplinas como la psicología, la medicina, la sociología y las ciencias sociales en general. Es útil cuando los datos son de naturaleza ordinal o cuando no se cumplen los supuestos de las pruebas paramétricas.

El proceso de aplicación de la prueba, requiere lo siguiente:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que las distribuciones de ambos grupos son iguales.
2. Combinar los datos de ambos grupos y asignarles rangos en función de su orden.
3. Calcular la suma de los rangos para cada grupo y utilizar una estadística de prueba basada en estas sumas de rangos.
4. Comparar el valor de la estadística de prueba con un umbral crítico obtenido de tablas, y tomar una decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

La prueba calcula el estadístico U cuya distribución para muestras con más de 20 observaciones, se aproxima a la distribución normal.

El proceso para la aplicación de la prueba, implica los siguientes pasos:

1. Combinar las dos muestras en un arreglo ordenado, identificando los valores muestrales, de acuerdo con el grupo muestral al que pertenecen.
2. Determinar el tamaño de las muestras: n_1 y n_2. Si son menores que 20, se consideran muestras pequeñas, y si son mayores o iguales que 20, se consideran muestras grandes.

Para el caso de muestras grandes ($n \geq 20$) se debe calcular el valor Z, puesto que, con estas condiciones, los datos tienen distribución normal.

3. Ordenar los valores de menor a mayor, asignando el rango 1 al de menor valor. Para el caso de valores iguales (ligas o empates) se asigna a cada uno el promedio de sus rangos.
4. Calcular los valores U_1 y U_2, elegir el menor y comparar con los valores críticos de U Mann-Whitney de la tabla de probabilidades asociada, con valores pequeños.
5. Designar mediante U a la estadística que se calcula para realizar esta prueba, la cual se basa en el número de veces que un puntaje de un grupo antecede a un puntaje de otro grupo, si hay dos grupos.
6. Decidir si se acepta o rechaza la hipótesis H_0.

Otra manera de calcular los valores U_1 y U_2 es con la suma de rangos de cualquiera de las dos muestras aleatorias, mediante las fórmulas de las expresiones (1) y (2) (Quispe-Andía et. al, 2019):

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1 \quad (1).$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2 \quad (2).$$

La aproximación a la normal Z, cuando se tienen muestras lo suficientemente grandes, viene dada por la expresión (3) (Quispe-Andía et. al, 2019):

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \quad (3).$$

donde μ_U y σ_U corresponden a la media y la desviación estándar de U, siempre que la hipótesis nula sea verdadera. Los valores de μ_U y σ_U vienen dadas por las fórmulas (4) y (5):

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} \quad (4);$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \quad (5).$$

Si $p - value < \alpha$, se rechaza H_0, caso contrario, se acepta H_0.

Ejemplo 1 (Muestras pequeñas).

Un experimentador utiliza dos métodos para enseñar a leer a un grupo de 10 niños de 6 años, quienes ingresan por primera vez a la escuela. El experimentador quiere demostrar que el procedimiento ideado por él es más efectivo que el tradicional; para el efecto, mide el desempeño en la lectura en función de la fluidez, comprensión, análisis y síntesis, cuyos datos se presentan en Tabla 3-1:

Tabla 3-1. Datos del ejemplo 3.2

Método aplicado	Calificaciones				
Tradicional	80	85	25	70	90
Propuesto por el investigador	95	100	93	110	45

Fuente: elaboración propia

El plan experimental preliminar consiste en elegir al azar una muestra de 10 niños ($n = 10$) y el método a utilizar; se aplicó un método a 5 estudiantes escogidos al azar y el otro método a los restantes.

Solución:

Hipótesis:

$\boldsymbol{H_0}$**:** las calificaciones de ejecución de lectura, según el método de enseñanza del experimentador, no son significativamente diferentes a las observadas en el método tradicional.

$\boldsymbol{H_1}$: las calificaciones de ejecución de lectura, según el método de enseñanza del experimentador, son significativamente diferentes a las observadas en el método tradicional.

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05$.

Prueba de normalidad con SPSS

Se debe realizar la prueba de normalidad con el fin de determinar si se aplica o no la prueba Mann-Withney, la cual requiere que los datos no provengan de una distribución normal.

Tabla 3-2. Pruebas de normalidad del ejemplo 3.2

Variables	***Kolmogorov-Smirnov***			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Tradicional	0,300	5	0,161	0,797	5	0,077
Investigador	0,369	5	0,025	0,791	5	0,068

Fuente: elaboración propia, recorte de pruebas de normalidad del ejemplo 3.2

En la Tabla 3-2, se evidencia que los datos provienen de una distribución normal porque el *p-value* que corresponde a los valores 0,077 para el método tradicional y 0,068 para el método del investigador, según la prueba de Shapiro Wilk, son mayores que $\alpha = 0{,}05$. En este caso, para saber si existe diferencia significativa entre los 2 métodos de enseñanza, se debe aplicar la prueba paramétrica t de student.

- **Procedimiento con Statgraphics**

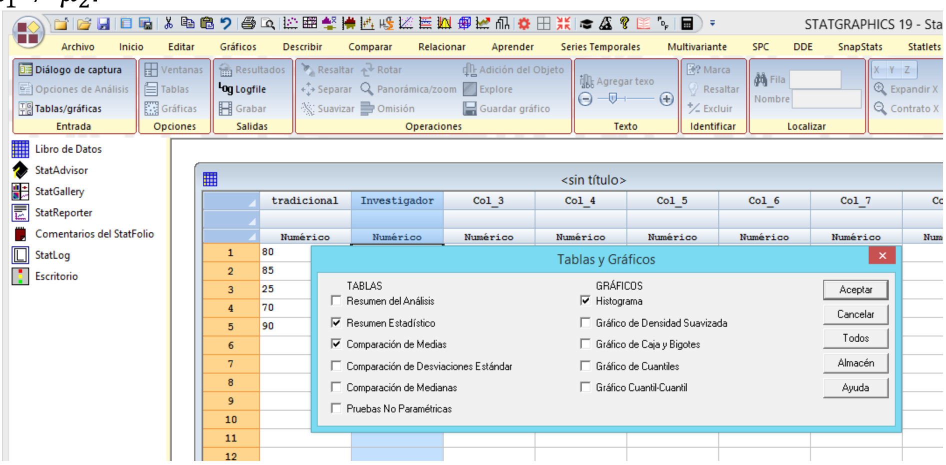
El procedimiento se ilustra en los recortes 3-1 al 3-3.

Hipótesis:

Se trata de verificar si la calificación media del método tradicional (μ_1) es igual a la calificación media del investigador (μ_2).

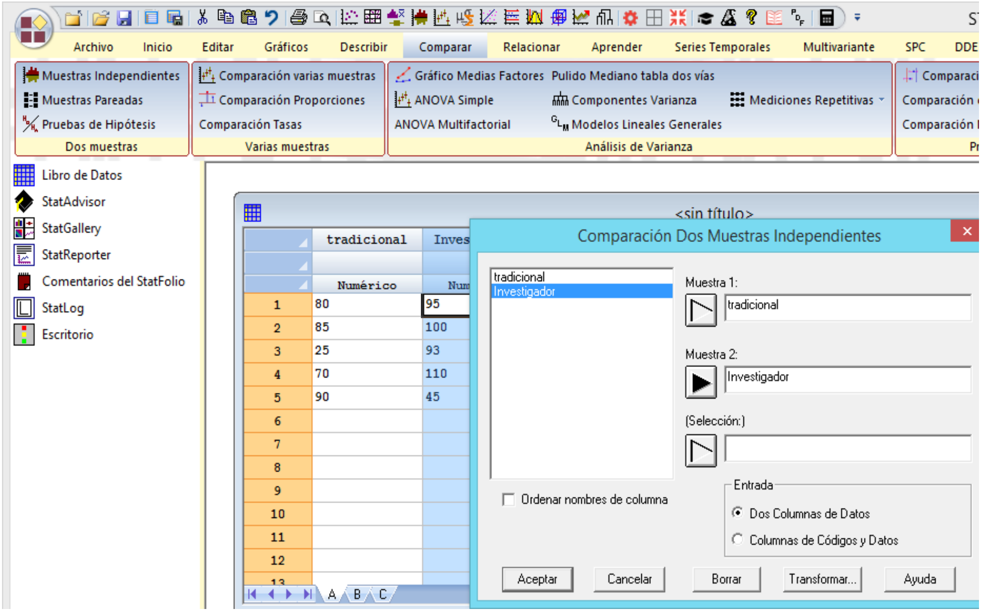
$H_0: \mu_1 = \mu_2$.

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.



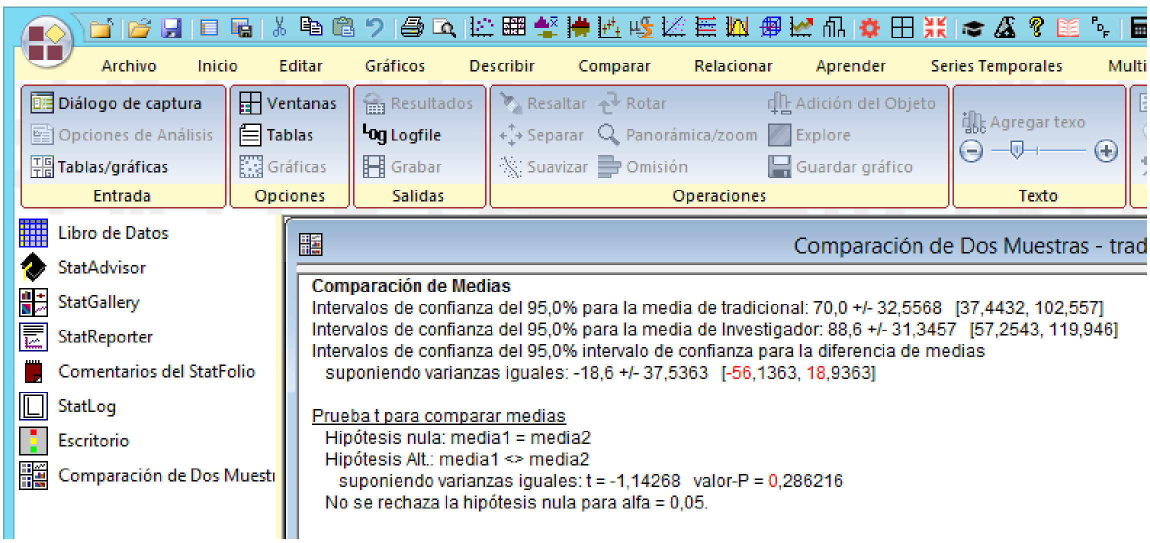
Recorte 3-1. Paso 1

Fuente: elaboración propia



Recorte 3-2. Paso 2

Fuente: elaboración propia



Recorte 3-3. Paso 3

Fuente: elaboración propia

Dado que, $p - value = 0{,}2862 > \alpha = 0{,}05$, no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula; con lo cual, se concluye que no existe diferencia entre los dos métodos de enseñanza.

Se enfatiza que, como los datos provienen de una distribución normal, no se debe aplicar la prueba Mann-Withney.

Ejemplo 2 (Muestras pequeñas).

Un experimentador utiliza dos métodos para enseñar a leer a un grupo de 16 niños de 6 años, quienes ingresan por primera vez a la escuela. El experimentador quiere demostrar que el procedimiento ideado por él es más efectivo que el tradicional; para el efecto, mide el desempeño en la lectura en función de la fluidez, comprensión, análisis y síntesis, cuyos datos se presentan en Tabla 3-3, aplicando el método tradicional a 8 niños y el otro método a los 8 restantes.

Tabla 3-3. Ejemplo de datos que no cumplen normalidad

Método tradicional	**Método del investigador**	**Género**
50	80	1
90	45	2
43	36	2
30	41	2
35	33	1
40	39	1
37	42	2
25	32	2

Fuente: elaboración propia

Solución:

En la Tabla 3-4, se puede observar que los *p-value* 0,018 y 0,002 son menores que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula; por lo cual, los datos no provienen de distribución normal; en consecuencia, se puede aplicar la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney.

Tabla 3-4. Pruebas de normalidad datos Tabla 3-3

	Kolmogorov-Smirnov			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Tradicional	0,265	8	0,104	0,781	8	0,018
Investigador	0,336	8	0,008	0,696	8	0,002

Fuente: elaboración propia, recorte de pruebas de normalidad datos Tabla 3-3

a) Procedimiento manual

Para la aplicación de la prueba estadística de Mann-Whitney, los datos de la Tabla *3-5* se deben ordenar en rangos, de menor a mayor.

Tabla 3-5. Rangos de lectura de Tabla 3-3

Método Tradicional	**Método del investigador**	**Rango Grupo 1**	**Rango Grupo 2**	**Género**
25	32	1	3	1
30	41	2	10	2
35	33	5	4	2
37	42	7	11	2
40	39	9	8	1
43	36	12	6	1
50	80	14	15	2
90	45	16	13	2
		66	70	

Fuente: elaboración propia

Cálculo de U: se utiliza las fórmulas de las expresiones (1) *y* (2), como sigue:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1 = 8 \times 8 + \frac{8(8+1)}{2} - 66 = 34.$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2 = 8 \times 8 + \frac{8(8+1)}{2} - 70 = 30.$$

De los dos valores calculados (U_1 y U_2) se toma el menor y se compara con los valores críticos de U.

En este ejemplo, $U_{cal} = U_2 = 30$.

En los casos en los cuales el valor de U calculado (U_{cal}) no se encuentre en las tablas correspondientes, se debe transformar con la fórmula (6):

$U = n_1 n_2 - U' \quad (6).$

donde U' corresponde al mayor valor.

El valor crítico de U (U_α) se encuentra en la Tabla 3-6; en este caso: $U_\alpha = 49$.

Tabla 3-6. Valores críticos para prueba Mann Whitney para dos colas, $\alpha = 0{,}05$.

		n_1													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_2	4			10											
	5		6	11	17										
	6		7	12	18	26									
	7		7	13	20	27	36								
	8	3	8	14	21	29	38	49							
	9	3	8	15	22	31	40	51	63						
	10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
	11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
	12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
	13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
	14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
	15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
	16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
	17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
	18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
	19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
	20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					
	21	6	14	25	37	50	64	79	95						
	22	7	15	26	38	51	66	82							
	23	6	15	27	39	53	68								
	24	6	16	28	40	55									
	25	6	16	28	42										
	26	7	17	29											
	27	7	17												
	28	7													

Fuente: adaptación de Milton (1964)

Decisión:

Como $U_{cal} = 30 < U_{\alpha} = 49$, se acepta la hipótesis H_0.

Esto significa que, a un nivel de significancia del 5%, no existe diferencia significativa entre las calificaciones de lectura mediante los dos métodos de enseñanza.

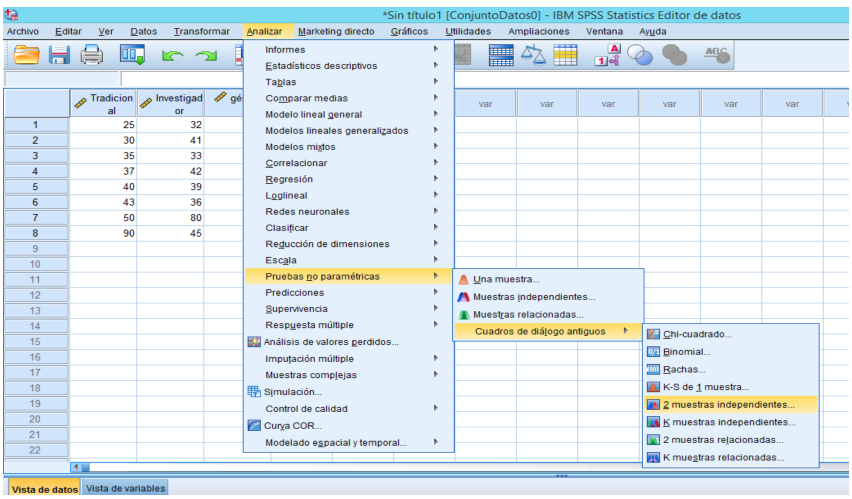
b) Procedimiento con SPSS

El procedimiento se presenta en los recortes 3-4 al 3-7.

Datos:

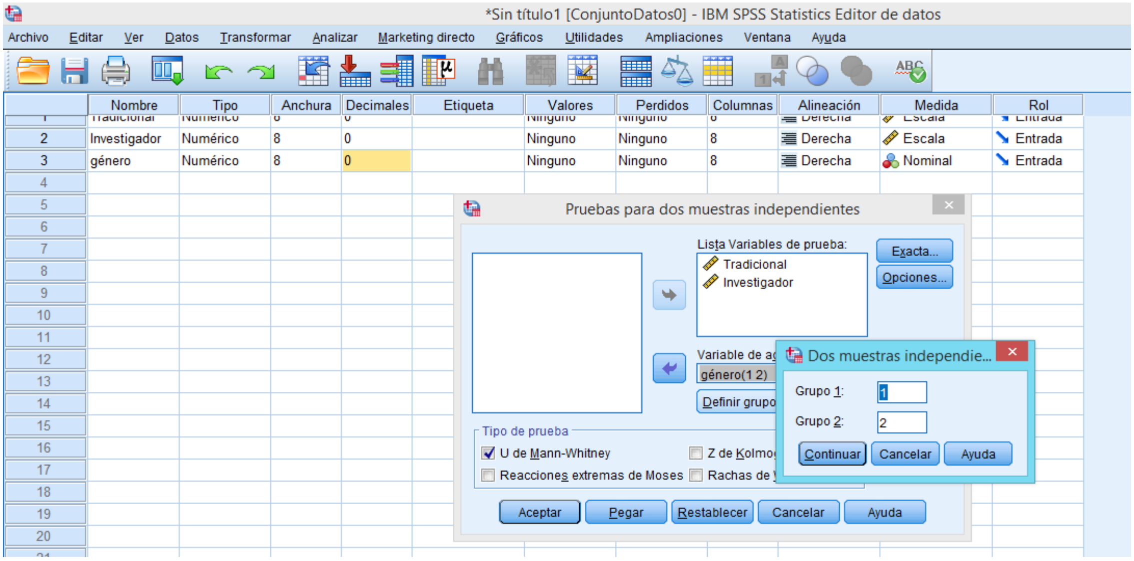
Recorte 3-4. Paso 4
Fuente: elaboración propia

Pruebas no paramétricas, gráfico de diálogo antiguo, prueba de independencia:



Recorte 3-5. Paso 5
Fuente: elaboración propia

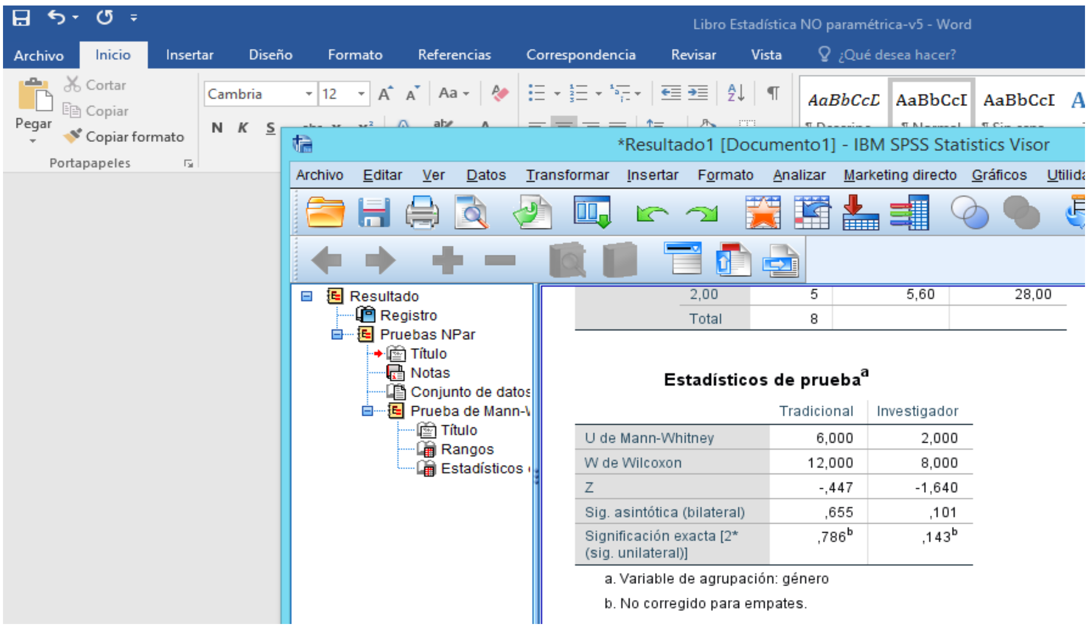
Seleccionar las variables:



Recorte 3-6. Paso 6

Fuente: elaboración propia

Resultado:



Recorte 3-7. Paso 7

Fuente: elaboración propia

Decisión:

Como se puede observar en el recorte 3-7, los valores $p - value$ son 0.786 y 0,143 son mayores que $\alpha = 0{,}05$, entonces se acepta H_0; lo cual significa que, no existe una diferencia significativa entre las calificaciones de lectura mediante los dos métodos de enseñanza.

Ejemplo 3 (Muestras grandes que cumplen normalidad).

El experimentador del ejemplo 2, entusiasmado por las observaciones preliminares, decide aumentar el tamaño de las muestras. En este estudio, tiene 10 niños con el método tradicional y 25 con el procedimiento ideado por él. Los datos del nuevo estudio se muestran en la Tabla *3-7*.

Tabla 3-7. Nuevos datos con muestras de tamaño distinto

$\mathbf{n_1 = 10}$ **Calificaciones con el método tradicional**	$\mathbf{n_2 = 25}$ **Calificaciones con el método del investigador**		
60	55	100	90
80	70	110	90
25	90	95	100
30	110	60	80
40	45	70	100
60	80	80	
90	60	40	
100	75	65	
60	80	50	
55	95	75	

Fuente: elaboración propia

Solución:

Hipótesis:

H_0: las calificaciones aportadas por el método reciente, ideado por el investigador, no son significativamente diferentes.

H_1: las calificaciones aportadas por el método reciente, ideado por el investigador, son significativamente diferentes.

Nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$.

La Tabla 3-7, contiene la población de niños de 6 años de edad a quienes se les aplicó dos métodos de enseñanza: un método tradicional y otro ideado por el investigador.

Se procede a determinar la normalidad de los datos.

Resultado con SPSS:

Tabla 3-8. Pruebas de normalidad para datos Tabla 3-7

	Kolmogorov-Smirnov[a]			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Investigador	0,110	24	0,200*	0,972	24	0,716

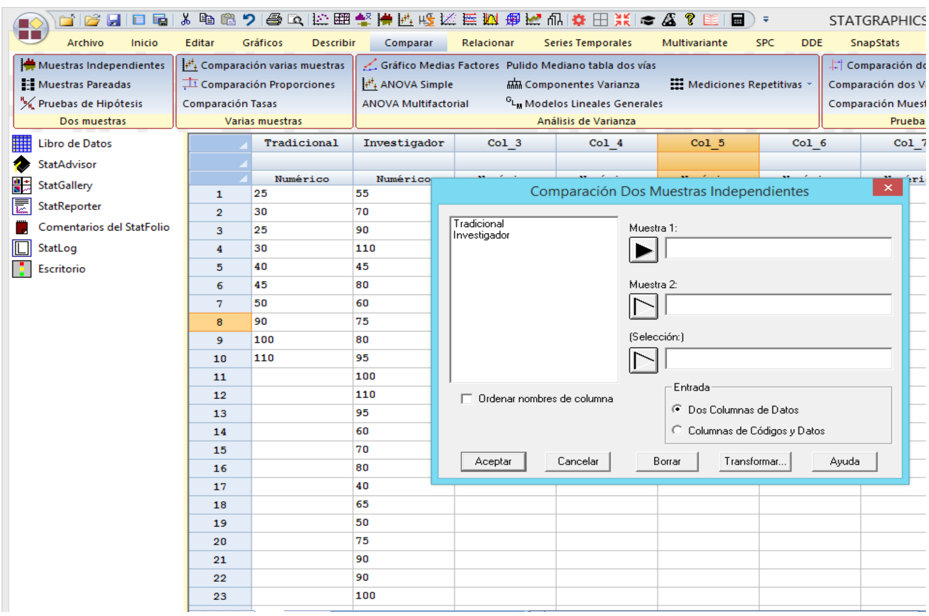
Fuente: elaboración propia, recorte de pruebas de normalidad datos Tabla 3-7

En la Tabla 3-8 se observa que *p-value*=0,716 $> \alpha = 0{,}05$, por lo cual, los datos provienen de una distribución normal; en consecuencia, para comprobar las hipótesis H_0 se debe aplicar una prueba paramétrica.

Para el efecto, se utiliza Statgraphics: Comparar dos muestras independientes.

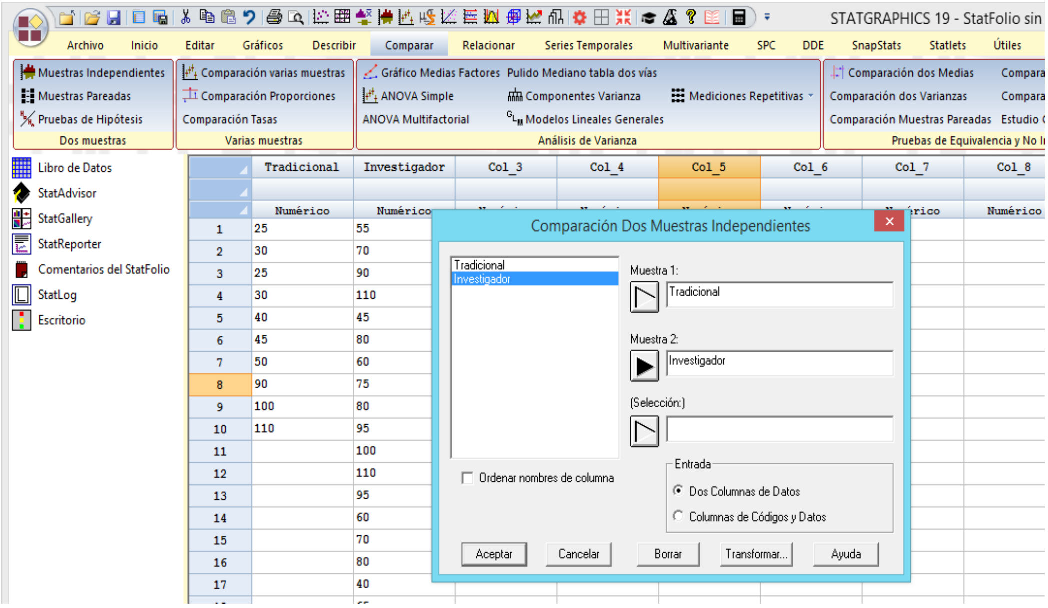
El proceso se puede observar en los recortes 3-8 al 3-10.

Datos:



Recorte 3-8. Paso 1/3

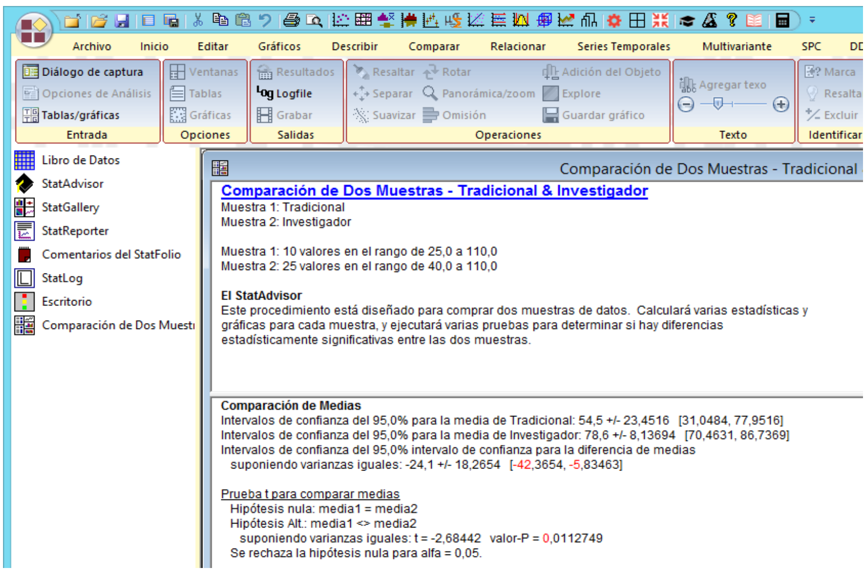
Fuente: elaboración propia



Recorte 3-9. Paso 2/3

Fuente: elaboración propia

Resultado:



Recorte 3-10. Paso 3/3

Fuente: elaboración propia

Como se puede observar en el Recorte 3-10, en lo referente a Prueba t para comparar medias, $p - valor = 0{,}011 < \alpha = 0{,}05$, por lo tanto, se rechaza H_0; en consecuencia, se puede concluir que las calificaciones aportadas por el método reciente, ideado por el investigador, son significativamente diferentes.

Ejemplo 4 (ejemplo para muestras grandes que no cumplen normalidad).

En el ejemplo 3, se cambian los datos de modo que no se cumpla la condición de normalidad, resultando la Tabla *3-9*.

Tabla 3-9. Datos del ejemplo 4

Calificaciones con método tradicional	***Calificaciones con método del investigador***		
$n_1 = 10$	$n_2 = 25$		
25	55	100	90
30	70	110	90
25	90	95	100
30	110	60	80
40	45	70	100
45	80	80	
50	60	40	
90	75	65	
100	80	50	
110	95	75	

Fuente: elaboración propia

Solución:

a) Procedimiento manual

Hipótesis:

H_0: las calificaciones aportadas por el método reciente, ideado por el experimentador, no son significativamente diferentes.

H_1: las calificaciones aportadas por el método reciente, ideado por el experimentador, son significativamente diferentes.

Nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$.

Prueba de normalidad

En Tabla *3-10* se observa que, el $p - value$ para la primera muestra de 10 alumnos es 0,024, menor que $\alpha = 0{,}05$: por lo cual, ***no*** se cumple la condición de normalidad; en consecuencia, para resolver el problema se aplica la *prueba estadística no paramétrica Mann-Whitney.*

Tabla 3-10. Pruebas de normalidad para datos Tabla 3-9

Variable	***Kolmogorov-Smirnov***[a]			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Tradicional	0,255	10	0,065	0,818	10	0,024

Fuente recorte: elaboración propia

Continuamos con el proceso manual de la prueba Mann-Withney, para lo cual se utiliza las Tablas 3-11 y 3-12.

Tabla 3-11. Datos, rangos y empates con datos ordenados de las dos muestras de Tabla 3-9.

Orden	Calificación	Rango	Orden	Calificación	Rango	Orden	Calificación	Rango
1	25	1,0	15	65	15,0	28	95	28.5
2	30	2,0	16	70	16,5	29	95	28,5
3	40	3,5	17	70	16,5	30	100	31,5
4	40	3,5	18	75	18.5	31	100	31,5
5	45	5,0	19	75	18,5	32	100	31,5
6	50	6,0	20	80	21,5	33	100	31,5
7	55	7,5	21	80	21,5	34	110	34,5
8	55	7,5	22	80	21,5	35	110	34,5
9	60	11,5	23	80	21,5			
10	60	11,5	24	90	25,5			
11	60	11,5	25	90	25,5			
12	60	11,5	26	90	25,5			
13	60	11,5	27	90	25,5			
14	60	11,5						

Fuente: elaboración propia

Tabla 3-12. Datos y Rangos de cada muestra de Tabla 3-9

Muestra 1			Muestra 2				
Calificación	**Rango**	**Calificación**	**Rango**	**Calificación**	**Rango**	**Calificación**	**Rango**
25	1.5	55	11	100	30,5	90	24,5
30	3,5	70	15,5	110	34	90	24,5
25	1,5	90	24,5	95	27,5	100	30,5
30	3,5	110	34	60	12,5	80	20,5
40	5,5	45	7,5	70	15,5	100	30,5
45	7,5	80	20,5	80	20,5		
50	9,5	60	12,5	40	5,5		
90	24,5	75	17,5	65	14		
100	30,5	80	20,5	50	9,5		
110	34	95	27,5	75	17,5		
Total	**120**		191		187		**130,5**

Fuente: elaboración propia

Suma $R_1 = 120$.

Suma $R_2 = 508{,}5$.

Cálculo de U_1 y U_2:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1 = 10 \times 25 + \frac{10(10+1)}{2} - 120 = 185.$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2 = 10 \times 25 + \frac{25(25+1)}{2} - 508{,}5 = 66{,}5.$$

Teniendo en cuenta que la muestra es mayor que 25, se aplica la distribución normal para el proceso de contraste de hipótesis.

Estandarizar U:

$$Z = \frac{U - \overline{U}}{\sigma_U}$$

Z = valor estadístico de la curva normal.

U = cualquier valor de U calculado (ya sea U_1 o U_2).

$\overline{U}$ = valor promedio de U.

σ_U = desviación estándar de U.

Calcular el valor promedio de U:

$$\overline{U} = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{10 \times 25}{2} = 125.$$

La desviación estándar de U se determina de la siguiente forma:

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right)\left(\frac{N^3 - N}{12} - L_i\right)}$$

Dónde:

$\sigma_U = desviación\ estándar\ de\ U.$

n_1 y n_2: tamaño de la muestra de los grupos 1 y 2.

N: tamaño total de la muestra (suma de n_1 y n_2)

L_i: sumatoria de las ligas o empates.

Cálculo de L_i:

$$L_i = \frac{\sum L_i^3 - L_i}{12} =$$

$$= \frac{(2^3-2)+(2^3-2)(6^3-6)(2^3-2)(2^3-2)(4^3-4)(4^3-4)(2^3-2)(4^3-4)(2^3-2)}{12}$$

$L_i = 35{,}5.$

Una vez obtenida la sumatoria de L_i, se determina la desviación estándar de U (σ_U):

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right)\left(\frac{N^3-N}{12} - L_i\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{10 \times 25}{35(35-1)}\right) \times \left(\frac{35^3-35}{12} - 35{,}5\right)} = \sqrt{0{,}21 \times 3534{,}5} = 27{,}24.$$

Una vez calculados los parámetros necesarios (media y desviación estándar) se obtiene el valor Z, aplicando la siguiente fórmula:

$$Z_{cal} = \frac{U - \overline{U}}{\sigma_U} = \frac{185 - 125}{27{,}24} = 2{,}20.$$

$Z_{crítico=}Z_\alpha = 1{,}64.$

Regla de decisión

Si $Z_{cal} > Z_\alpha$, se rechaza H_0, caso contrario se acepta H_0.

Como $Z_{cal} = 2{,}20 > Z_\alpha = 1{,}64$ se rechaza H_0, por lo cual, las calificaciones aportadas por el método ideado por el investigador, son significativamente diferentes.

Con p-value:

Para obtener la probabilidad $P(z < 2{,}20)$ se debe consultar la tabla normal (Tabla 3-13), de la cual se obtiene:

$P(z < 2{,}20) = 0{,}9861$ y $P(z > 2{,}20) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139 = p - value$, valor que corresponde a la probabilidad del valor de U con respecto al promedio.

Dado que, $p - value = 0{,}0139 < \alpha = 0{,}05$, se rechaza H_0, por lo cual, las calificaciones aportadas por el método ideado por el investigador, son significativamente diferentes. (ver Tabla 3-13 y Figura 1).

Tabla 3-13. Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9723	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	**0,9861**	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985

Fuente: elaboración propia, adaptada de Arribas-Gil (s.f.)

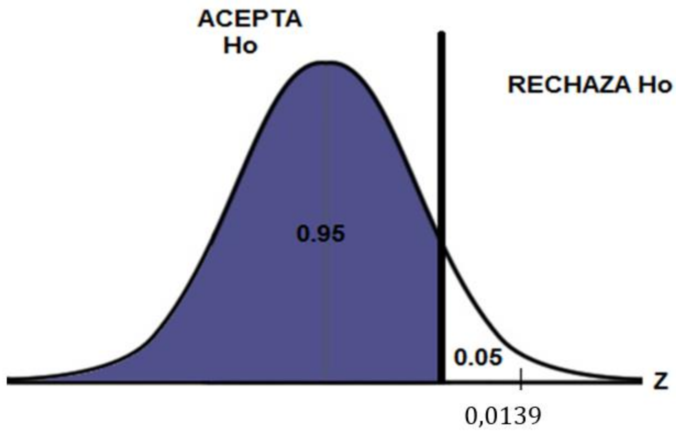


Figura 1. Región de aceptación y rechazo
Fuente: elaboración propia

b) Procedimiento con SPSS

Se analiza la normalidad utilizando SPSS (Tabla 3-14):

Tabla 3-14. Pruebas de normalidad

Pruebas de normalidad						
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Tradicional	,255	10	,065	,818	10	,024

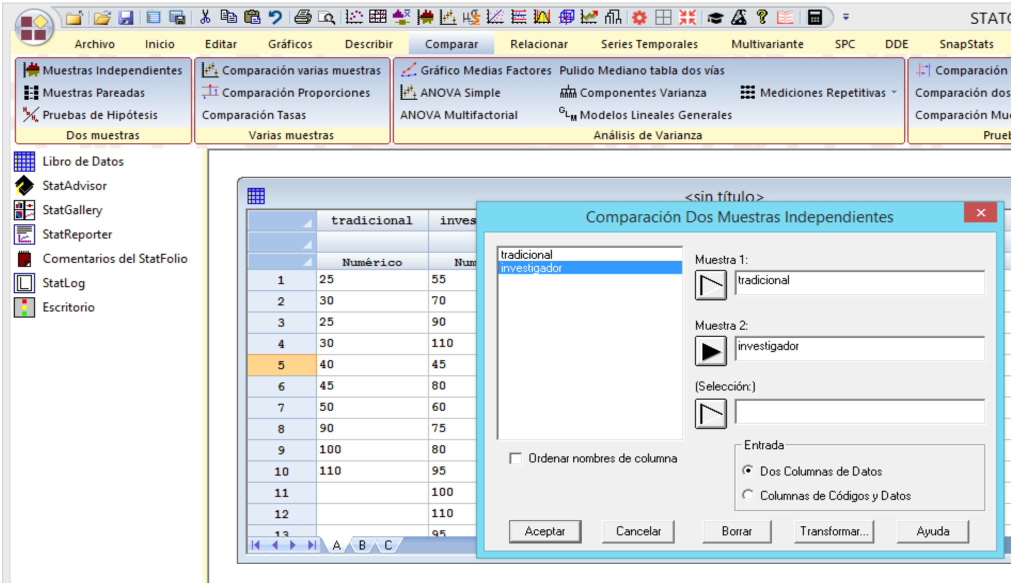
Fuente: elaboración propia, recorte pruebas de normalidad

Como *p-valor*= 0,024 es menor que el nivel de significancia 0,05 los datos del método tradicional no tienen normalidad.

Para aplicar la prueba de Mann-Withney es suficiente que los datos de un grupo no provengan de una distribución normal.

La prueba de hipótesis se realiza utilizando Statgraphics, como se indica en los recortes 3-11 al 3-13.

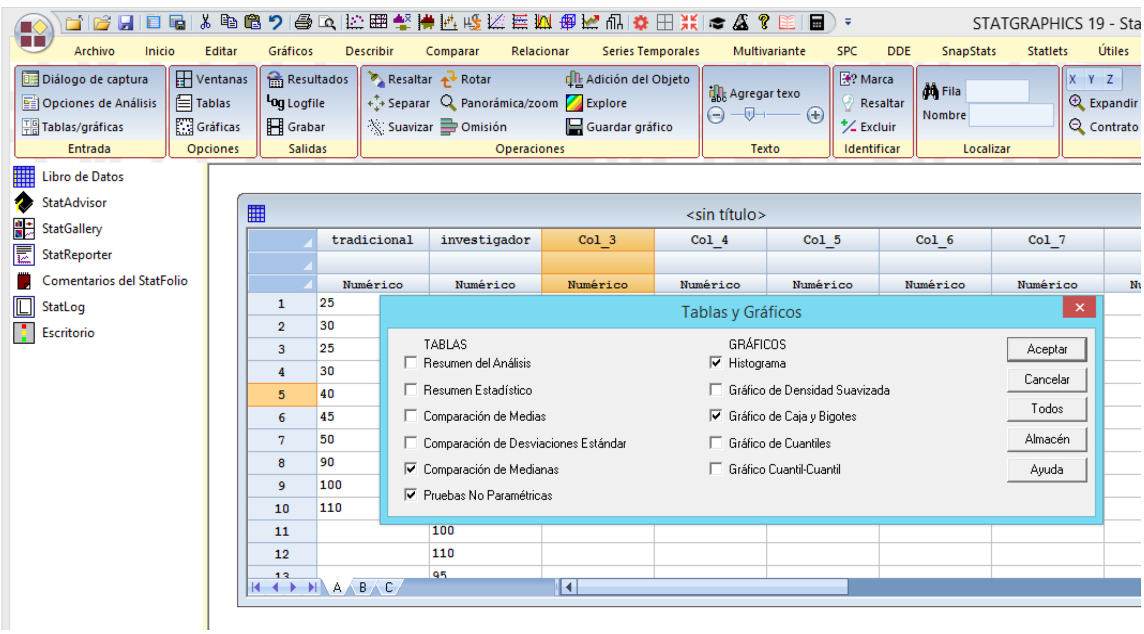
Datos:



Recorte 3-11. Paso 1/3

Fuente: elaboración propia

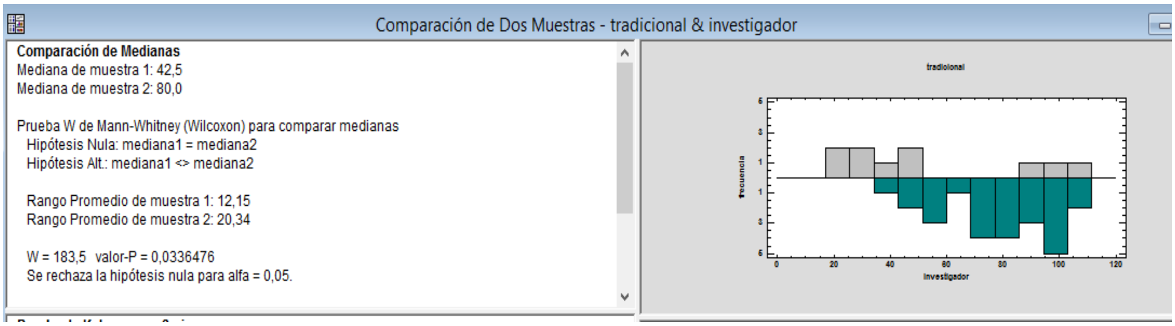
Información solicitada:



Recorte 3-12. Paso 2/3

Fuente: elaboración propia

Resultados:



Recorte 3-13. Paso 3/3
Fuente: elaboración propia

Como se puede observar en el recorte 3-13, $p - value\ =\ 0{,}03 < \alpha = 0{,}05$ por lo cual se rechaza la hipótesis H_0; por lo tanto, existe diferencia significativa entre el método tradicional y el método del investigador.

Capítulo 4

PRUEBA DE McNEMAR

El estudio de la prueba no paramétrica de McNemar es de gran relevancia en el análisis estadístico cuando se desea evaluar si hay diferencias significativas en la frecuencia de ocurrencia de un evento entre dos momentos o condiciones relacionadas. Esta prueba es especialmente útil cuando se trata con datos pareados o datos en los que, de alguna manera, cada observación está vinculada a otra (Guisande-González et. al, 2006).

La prueba se utiliza en diversas áreas de investigación como la medicina, la psicología, la educación y las ciencias sociales, donde se analizan datos pareados o datos de antes y después de una intervención. Es especialmente útil para evaluar si una intervención o tratamiento tiene un efecto significativo en la frecuencia de un evento, en comparación con una condición de referencia (Samiuc, *s.f.)*.

Proporciona una herramienta estadística sólida para evaluar si hay diferencias significativas en la frecuencia de un evento entre dos condiciones o momentos. Al analizar las frecuencias observadas y esperadas en una tabla de contingencia, esta prueba permite tomar decisiones estadísticas basadas en datos pareados sin requerir de supuestos específicos sobre la distribución de los datos (Samiuc, s.f.).

Se basa en la comparación de las frecuencias de ocurrencia del evento de interés en las dos condiciones o momentos. Se analiza la proporción de casos en los que el evento ocurre en ambas condiciones y en cuántos casos ocurre solo en una de las condiciones. La prueba permite determinar si hay una asociación significativa entre el evento y la condición o momento, es decir, si hay un cambio significativo en la frecuencia del evento.

El proceso de aplicación de la prueba, requiere lo siguiente:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que no hay diferencias significativas en la frecuencia del evento entre las condiciones o momentos.
2. Construir una tabla de contingencia que muestre las frecuencias observadas de los cuatro posibles resultados: evento presente, en ambas condiciones; evento presente, solo en la primera condición; evento presente, solo en la segunda condición; y evento ausente, en ambas condiciones.
3. Calcular la estadística de prueba, que se basa en la diferencia entre las proporciones de concordancia y discordancia.

4. Comparar el valor del estadístico de prueba con un umbral crítico obtenido de tablas para tomar una decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

En Tabla 4-1, se presenta el formato de una tabla de McNemar.

Tabla 4-1. Tabla McNemar-modelo 1

		Clasificación $\boldsymbol{Y_i}$	
		(+) $Y_i = 0$	(−) $Y_i = 1$
Clasificación $\boldsymbol{X_i}$	(+) $X_i = 0$	A (0,0)	B (0,1)
	(−) $X_i = 1$	C (1,0)	D (1,1)

Fuente: elaboración propia

Se usan los símbolos + y – para representar respuestas diferentes (Tabla 4-2).

Tabla 4-2. Tabla McNemar-Modelo 2

		Clasificación $\boldsymbol{Y_i}$	
		(+)	(−)
Clasificación $\boldsymbol{X_i}$	(+)	A	B
	(−)	C	D

Fuente: elaboración propia

Los casos que muestran cambios entre la primera y la segunda respuesta, aparecen en las casillas B y C.

Un individuo es clasificado en la celda B, si cambia de $+$ a $-$; es clasificado en la celda C, si cambia de $-$ a $+$. Si no es observado ningún cambio, va a la celda A (respuestas de + antes y después) o a la celda D (respuestas de – antes y después) (ver Tabla 4-2).

En esta prueba, para la significación de cambios solamente interesa conocer las celdas que presentan cambios, que son B y C; y puesto que $B + C$ es el número de personas que cambiaron, se espera, de acuerdo a la hipótesis planteada H_0, que $(B + C)/2$ casos cambien en una dirección y $(B + C)/2$ casos, cambien en otra dirección.

Por lo tanto, el número de casos que cambian, es $n = B + C$.

ESTADÍSTICO DE LA PRUEBA

1. Si $n < 20$, para el estadístico de contraste, es necesario utilizar la corrección de continuidad o de Yates.
2. Si $n > 20$, la estadística de contraste, es:

$$T_1 = \frac{(B-C)^2}{B+C} \approx \chi^2_{(1)}$$

CORRECCIÓN DE CONTINUIDAD O DE YATES

Al aplicar la distribución Ji-cuadrado, que es una distribución continua, para representar un fenómeno discreto, como el número de casos en cada uno de los supuestos de una tabla de 2×2, existe un ligero fallo en la aproximación a la realidad. En números grandes, esta desviación es muy escasa, y puede descartarse, pero cuando las cantidades esperadas en alguna de las celdas son números pequeños (en general se toma como límite el que tengan menos de cinco elementos), la desviación puede ser más importante. La frecuencia esperada en una categoría o en cualquier celda deberá ser mayor que 5; cuando sea menor que 5, se aplica la corrección de Yates.

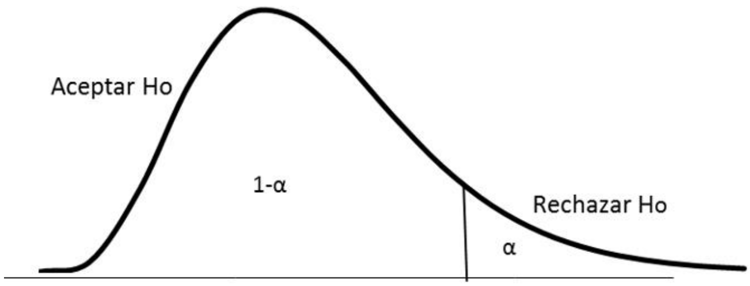


Figura 2. Distribución Ji-cuadrado
Fuente: elaboración propia

Los grados de libertad en una tabla de contingencia, se obtiene multiplicando el número de columnas menos 1, por el número de filas menos 1; por lo cual, en una tabla de 2×2, el número de grados de libertad es 1.

El estadístico de prueba con corrección de Yates, se determina por la fórmula (1):

$$T_1 = \frac{(|B - C| - 1)^2}{B + C} \approx \chi^2_{(1)} \qquad (1)$$

HIPÓTESIS

En términos generales, las hipótesis para una prueba McNemar que implique tratamientos, son las siguientes:

H_0: el tratamiento no induce cambios significativos en las respuestas; es decir, los cambios observados en la muestra se deben al azar.

H_1: el tratamiento induce cambios significativos en las respuestas; es decir, los cambios observados en la muestra no se deben al azar.

Regla de decisión:

Si ${\chi^2}_{cal} < {\chi^2}_{\alpha}$, se acepta la hipótesis nula; caso contrario, se rechaza (Figura 2).

Ejemplo 1.

En un debate televisivo a nivel nacional entre 2 candidatos presidenciales, se toma una muestra de 100 personas y se les pregunta sobre sus candidatos antes del debate: 60 resultaron convencidos por el candidato demócrata y 40 por el candidato republicano. Después del debate, las mismas 100 personas son interrogadas nuevamente acerca de sus preferencias por los candidatos: del grupo de personas que favorecieron al demócrata, exactamente la mitad de ellos cambian su manera de pensar y también cambian un tercio de los republicanos (Tabla 4-3).

Solución:

Se trata de determinar si hay una asociación significativa en la manera de pensar de los votantes, antes y después del evento; es decir, si hay un cambio significativo en la manera de pensar de las personas debido al debate.

Tabla 4-3. Datos del ejemplo 1

Antes	**Después**		
	Demócratas	**Republicanos**	**Total**
Demócratas	40	20	60
Republicanos	10	30	40
TOTAL	**50**	**50**	**100**

Fuente: elaboración propia

Hipótesis

H_0: los votantes no han cambiado su manera de pensar debido al debate.

H_1: los votantes han cambiado su manera de pensar debido al debate.

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05$.

Estadístico de prueba: Ji-cuadrado calculado: χ^2_{cal}.

$$\chi^2_{cal} = \frac{(B-C)^2}{B+C} = \frac{(20-10)^2}{20+10} = \frac{100}{30} = 3{,}33.$$

Valor crítico de Ji- cuadrado: χ^2_α.

En la Tabla 4-4 se determina x^2_α con 0,05 de significancia y 1 grado de libertad:

Ji $-$ cuadrado crítico: $x^2_\alpha = 3{,}841$.

Tabla 4-4. Distribución ji-cuadrado

Grados de libertad	Probabilidad de la Cola Izquierda						
	0,70	**0,75**	**0,8**	**0,85**	**0,9**	**0,95**	**0,98**
1	1,074	1,323	1,642	2,072	2,706	3,841	5,412
2	2,408	2,773	3,219	3,794	4,605	5,991	7,824
3	3,665	4,108	4,642	5,317	6,251	7,815	9,837
4	4,878	5,385	5,989	6,745	7,779	9,488	11,668
5	6,064	6,626	7,289	8,115	9,236	11,070	13,388
6	7,231	7,841	8,558	9,446	10,645	12,592	15,033
7	8,383	9,037	9,803	10,748	12,017	14,067	16,622
8	9,524	10,219	11,030	12,027	13,362	15,507	18,168
9	10,656	11,389	12,242	13,288	14,684	16,919	19,679
10	11,781	12,549	13,442	14,534	15,987	18,307	21,161

Fuente: elaboración propia

Regla de decisión:

Si Ji-cuadrado calculado (χ^2_{cal}) es menor que Ji-cuadrado crítico (χ^2_α), se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 3{,}33 < \chi^2_\alpha = 3{,}841$, se acepta H_0; esto es, los votantes no han cambiado su manera de pensar debido al debate.

Decisión con *p-value*

$p - value = P(\chi^2_{cal} > 3{,}33) = 0{,}0680$

Como $p - value = 0{,}0680 > \alpha = 0{,}05$, se Acepta H_0; esto es, los votantes no han cambiado su manera de pensar debido al debate.

Ejemplo 2.

Las opiniones de empleados frente al sindicato, antes y después de una reunión con el líder sindical, se recogieron en la Tabla 4-5. Por su parte, la Tabla 4-6 presenta el modelo general de tabla de contingencia y la Tabla 4-7 presenta la tabla de contingencia del presente ejemplo.

Tabla 4-5. Datos del ejemplo 2

	ACTITUD FRENTE AL SINDICATO		
	Antes	**Después**	**Clasificación**
1	−	−	**C**
2	+	−	**A**
3	+	+	**B**
4	+	−	**A**
5	+	+	**B**
6	+	+	**B**
7	+	+	**B**
8	−	−	**C**
9	+	−	**A**
10	+	+	**B**
11	−	+	**D**
12	+	+	**B**
13	+	−	**A**
14	+	+	**B**
15	+	−	**A**
16	−	−	**C**
17	+	−	**A**
18	+	−	**A**
19	+	+	**B**
20	+	−	**A**
21	+	+	**B**
22	−	−	**C**

Fuente: elaboración propia

Tabla 4-6. Modelo de tabla contingencia

Actitud	**Después**		
		−	+
Antes	+	**A**	**B**
	−	**C**	**D**

Fuente: elaboración propia

Tabla 4-7. Tabla de contingencia del ejemplo 2

Actitud		**Después** $-$	**Después** $+$	**Total**
Antes	$+$	8	9	17
	$-$	4	1	5
Total		12	10	22

Fuente: elaboración propia

Solución

a) Procedimiento manual

Hipótesis:

H_0: los empleados ***no*** han cambiado su actitud frente al sindicato después de la reunión con el líder Sindical.

H_1: los empleados sí han cambiado su actitud frente al sindicato después de la reunión con el líder Sindical.

Estadístico de prueba: *Ji-cuadrado calculado* (χ^2_{Cal})

$$\chi^2_{Cal} = \frac{(|A - D| - 1)^2}{A + D} \quad (1).$$

Al reemplazar en (1), se tiene:

$$\chi^2_{Cal} = \frac{(|8 - 1| - 1)^2}{8 + 1} = \frac{36}{9} = 4.$$

Ji − cuadrado calculado: $\chi^2_{cal} = 4$.

Ji-cuadrado crítico (χ^2_α)***:***

En la Tabla 4-4 se determina χ^2_α con 0,05 de significancia y 1 grado de libertad:

Ji − cuadrado crítico: $\chi^2_\alpha = 3{,}841$.

Regla de decisión:

Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha}$, se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como $\chi^2_{cal} = 4 > \chi^2_{\alpha} = 3{,}841$, se rechaza H_0; esto es, se puede concluir que sí se ha presentado un cambio significativo en la actitud de todos los empleados de la empresa hacia el sindicato después de la reunión con el líder Sindical.

Decisión con p-value

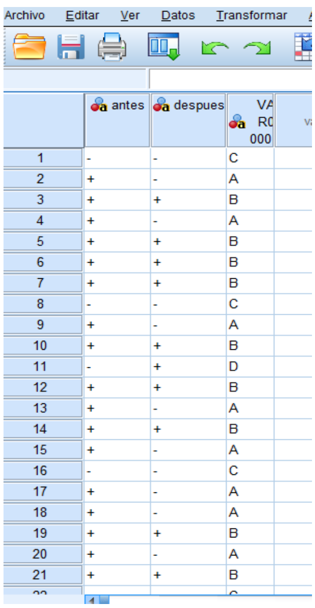
$p - value = P(\chi^2_{cal} > 4) = 0{,}045$

Como $p - value = 0{,}045 < \alpha = 0{,}05$, se rechaza H_0; esto es, se puede concluir que sí se ha presentado un cambio significativo en la actitud de todos los empleados de la empresa hacia el sindicato después de la reunión con el líder.

b) Procedimiento con SPSS

El procedimiento se presenta mediante los recortes 4-1 al 4-3.

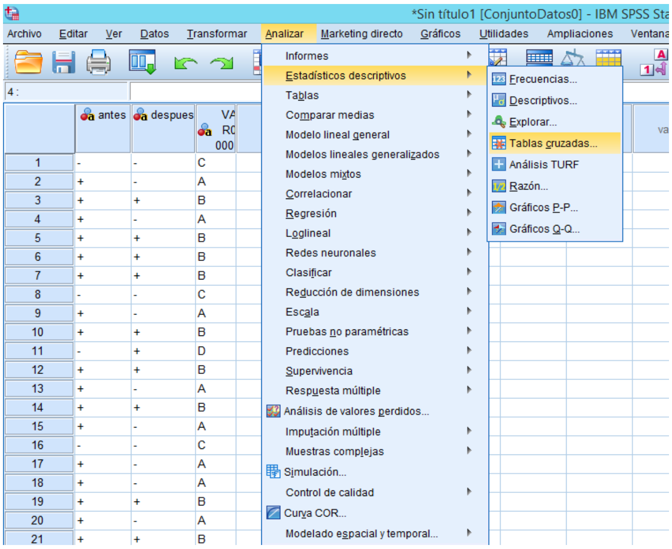
Datos:



	antes	despues	VA RO 000
1	-	-	C
2	+	-	A
3	+	+	B
4	+	-	A
5	+	+	B
6	+	+	B
7	+	+	B
8	-	-	C
9	+	-	A
10	+	+	B
11	-	+	D
12	+	+	B
13	+	-	A
14	+	+	B
15	+	-	A
16	-	-	C
17	+	-	A
18	+	-	A
19	+	+	B
20	+	-	A
21	+	+	B

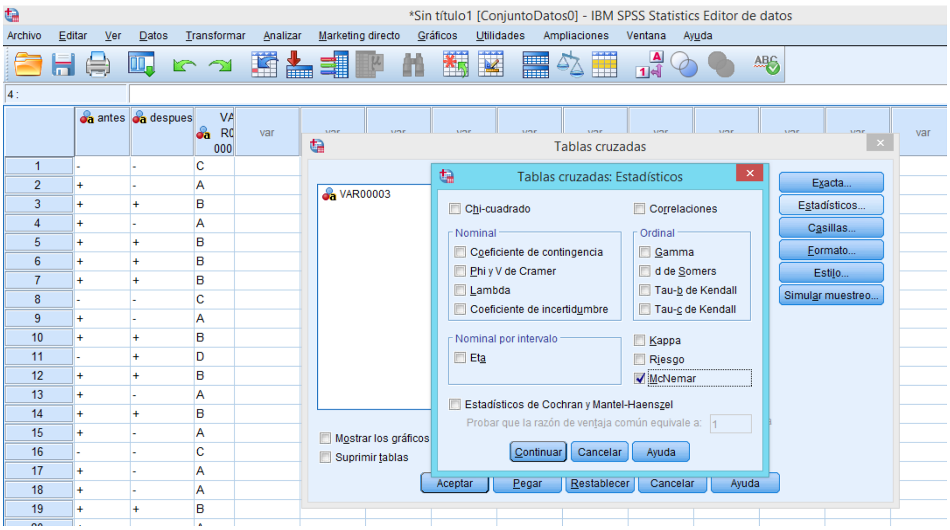
Recorte 4-1. Paso 1/3
Fuente: elaboración propia

Una vez ingresados los datos, se debe tomar las opciones: *analizar*, *estadística descriptiva* y *tablas cruzadas*.



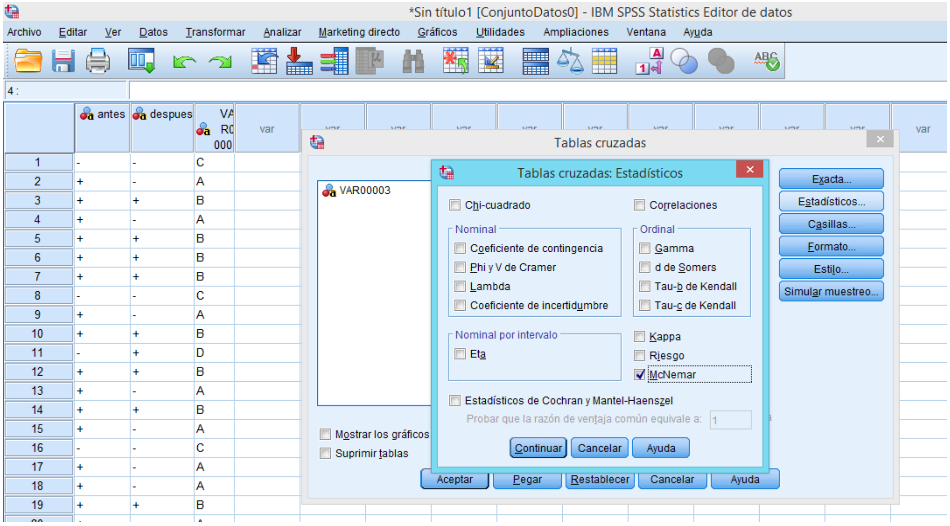
Recorte 4-2. Paso 2/3

Fuente: elaboración propia



Recorte 4-3. Paso 3/3

Fuente: elaboración propia



Recorte 4-3. Paso 3/3
Fuente: elaboración propia

Tabla 4-8. Prueba de Ji-cuadrado

Pruebas de Ji-cuadrado		
	Valor	Significación exacta (bilateral)
Prueba de McNemar		0,039
N de casos válidos	22	

Fuente: elaboración propia, recorte prueba Ji-cuadrado

En la Tabla 4-8, se observa que, $p - value = 0{,}039 < \alpha = 0{,}05$, por lo cual, se rechaza Ho; en consecuencia, se concluye que, después de la reunión con el Líder Sindical, se ha presentado un cambio significativo en la actitud de los empleados de la empresa hacia el sindicato.

Capítulo 5

PRUEBA DE KRUSKALL-WALLIS

El estudio de la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis es de mucha importancia cuando se desea comparar tres o más grupos independientes y los datos no cumplen los supuestos de normalidad o los de homogeneidad de varianzas; es especialmente útil cuando se trabaja con variables continuas y se busca determinar si hay diferencias significativas en las medianas de los grupos. Es una extensión de la prueba U de Mann-Whitney para 3 o más grupos (Quispe-Andía et. al, 2019).

La prueba se basa en la comparación de los rangos de las observaciones entre los grupos. Al igual que la prueba de Mann-Whitney, esta prueba asigna rangos a las observaciones y se enfoca en la clasificación de los datos en orden ascendente. Sin embargo, en el caso de Kruskal-Wallis, se calcula una estadística de prueba H que tiene en cuenta las diferencias entre los rangos de los grupos y la cantidad de datos en cada uno (Quispe-Andía et. al, 2019).

Al analizar los rangos de las observaciones y considerar el tamaño de muestra de cada grupo, esta prueba permite tomar decisiones estadísticas sólidas sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos.

El proceso para la aplicación de la prueba, consiste en lo siguiente:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que las medianas de todos los grupos son iguales.
2. Combinar los datos de los grupos y asignarles rangos en función de su orden.
3. Calcular la suma de los rangos al cuadrado para cada grupo y ajustar según el tamaño de muestra de cada grupo.
4. Calcular una estadística de prueba que toma en cuenta las sumas de los rangos y el tamaño de la muestra.
5. Comparar el valor de la estadística de prueba con un umbral crítico que se obtiene de tablas y tomar la decisión de aceptar o rechazar de la hipótesis nula.

La prueba de Kruskal-Wallis es ampliamente utilizada en diversas áreas de investigación como la biología, la psicología, la economía y las ciencias sociales, donde se desea comparar los efectos de una variable en múltiples grupos independientes. Es útil cuando los datos no cumplen con los supuestos de las pruebas paramétricas, como el análisis de varianza (ANOVA) (Quispe-Andía et. al, 2019).

La prueba de Kruskal-Wallis se considera la alternativa no paramétrica al ANOVA unidireccional, y una extensión de la prueba U de Mann-Whitney para permitir la comparación de más de dos grupos independientes.

Al ser no paramétrica, la prueba no asume que los datos provienen de una distribución particular. La prueba de Kruskal-Wallis determina si hay una diferencia significativa entre los grupos; sin embargo, no indica qué grupos son diferentes.

Ejemplo 1:

Comprobar si existe relación entre los puntajes de la percepción de cuatro grupos de empleados, clasificados como directivos, gerentes, auxiliares y obreros de una compañía. Utilizar un nivel de significancia del 5%. Los datos se presentan en la Tabla 5-1 y en la Figura 3.

Tabla 5-1. Puntajes de la percepción de cuatro grupos de empleados

Percepción	Directivo	Gerente	Auxiliar	Obrero
1	78	61	44	20
2	78	52	24	19
3	71	59	45	23
4	72	60	47	23

Fuente: elaboración propia

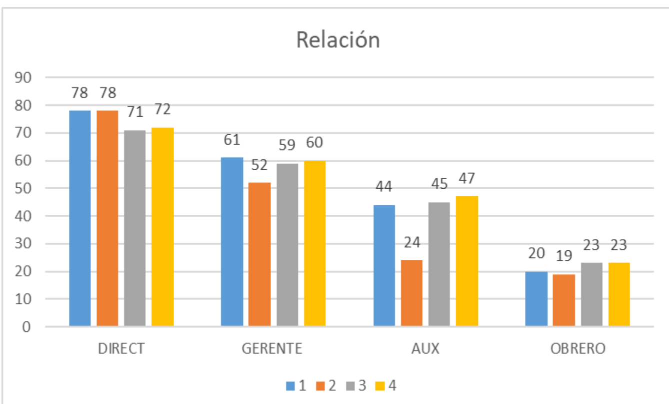


Figura 3. Puntajes de la percepción de cuatro grupos de empleados
Fuente: elaboración propia

Solución:

Hipótesis

H_0: no existe relación de la percepción entre los 4 grupos.

H_1: sí existe relación de la percepción entre los 4 grupos.

Nivel de significancia: 0,05=5%.

a) Procedimiento manual

Primer paso: Ordenar los datos (Tabla 5-2).

Tabla 5-2. Datos ordenados con jerarquía

Datos ordenados	Jerarquía	Jerarquía de ligas
19	1	
20	2	
23	3	**3,5**
23	4	**3,5**
24	5	
44	6	
45	7	
47	8	
52	9	
61	12	
59	10	
60	11	
61	12	
71	13	
72	14	
78	15	**15,5**
78	16	**15,5**

Fuente: elaboración propia

Segundo paso: establecer rangos (Tabla 5-3).

Tabla 5-3. Tabla de rangos

	Directivo	**Gerente**	**Auxiliar**	**Obrero**	
	15,5	9	5	1	
	15,5	12	6	2	
	13	10	7	3,5	
	14	11	8	3,5	
Suma de rangos	58	42	26	10	
Cuadrados de rangos	3364	1764	676	100	
Cociente	841	441	169	25	$\boldsymbol{\sum \frac{R^2}{n} = 1476.}$

Fuente: elaboración propia

Tercer paso: calcular el estadígrafo de prueba H

Para el efecto, se utiliza la fórmula (1):

$$H_{cal} = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R^2}{n} - 3(N+1) \quad (1).$$

$$H_{cal} = \frac{12}{16(17)} \times 1476 - 3(17) = 14{,}07.$$

Total de ligas (datos repetidos):

Para el cálculo de ligas se utiliza la fórmula: $T = t^3 - t$, donde t corresponde a la cantidad de jerarquías de ligas.

En el ejemplo, se repiten las jerarquías 3,5 y 15,5 (Tabla 5-2), entonces $t = 2$.

Al reemplazar $t = 2$, se obtiene:

$$T = t^3 - t = (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 12.$$

Factor de corrección por ligas (FCL):

Se utiliza la expresión (2):

$$FCL = 1 - \frac{\sum T}{N^3 - N} \qquad (2)$$

Donde T corresponde al total de ligas y N al total de datos.

Al reemplazar en la expresión (2), se obtiene:

$$FCL = 1 - \frac{\sum T}{N^3 - N} = 1 - \frac{12}{16^3 - 16} = 0{,}9975.$$

Estadígrafo de prueba H_{cal} corregido:

Dado que se presentan ligas en la jerarquía de datos, se corrige H_{cal} multiplicándolo por el factor de corrección de ligas:

$H_{cal} = 14{,}11 \times 0{,}9975 = 14{,}07.$

Determinación de Ji-Cuadrado crítico:

La tabla de contingencia tiene cuatro filas y cuatro columnas, por lo tanto, los grados de libertad son $(4-1) \times (4-1) = 9\ gl$.

Ji-cuadrado crítico: $\chi^2_\alpha(\alpha = 0{,}05; 9\ gl) = 16{,}92$

Regla de decisión:

Si $H_{cal} < \chi^2_\alpha$, se acepta H_0, en caso contrario se rechaza H_0.

Decisión:

Como $H_{cal} = 14{,}07 < \chi^2_\alpha = 16{,}92$, se acepta la hipótesis nula; es decir, no existe relación significativa en la percepción de los 4 grupos de empleados (Figura 4).

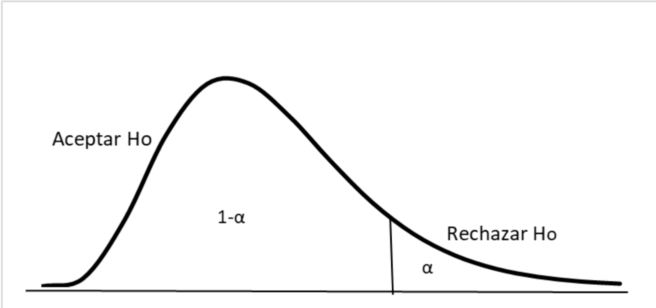
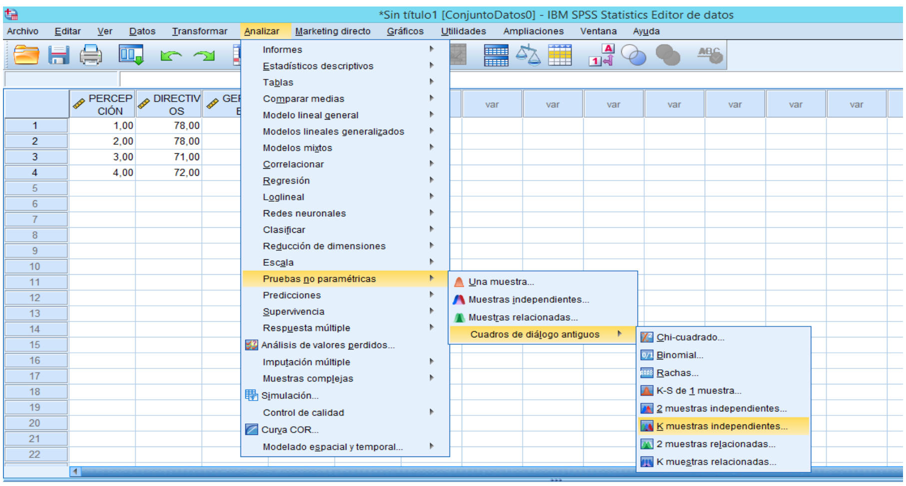


Figura 4. Región de aceptación y rechazo del ejemplo
Fuente: elaboración propia

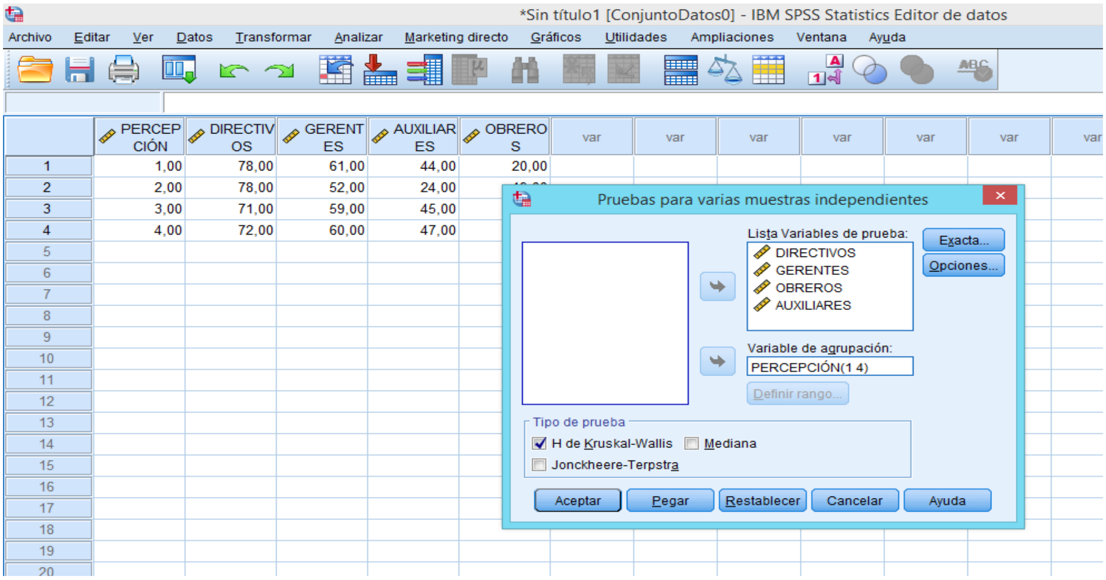
b) Procedimiento con Statgraphics

El procedimiento se presenta en los recortes 5-1 y 5-2.

Analizar, pruebas no paramétricas, cuadros de diálogo antiguos, muestra independiente.



Recorte 5-1. Paso 1/2
Fuente: elaboración propia



Recorte 5-2. Paso 2/2
Fuente: elaboración propia

Tabla 5-4. Estadístico de prueba Kruskall-Wallis

	Directivos	Gerentes	Obreros	Auxiliares
Chi-cuadrado	3,000	3,000	3,000	3,000
gl	3	3	3	3
Sig. asintótica	0,392	0,392	0,392	0,392
a. Prueba de Kruskal Wallis				
b. Variable de agrupación: PERCEPCIÓN				

Fuente: elaboración propia, recorte estadístico de prueba Kruskall-Wallis

En la Tabla 5-4. Estadístico de prueba Kruskall-Wallis, se observa que, *p-value* $= 0{,}392$ es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ en cada grupo, por lo cual, se puede concluir que no existe diferencia significativa en la percepción de los 4 grupos.

Capítulo 6

PRUEBA DE SPEARMAN

El estudio de la prueba no paramétrica de Spearman se utiliza para evaluar la asociación o correlación entre dos variables y si los datos no cumplen con los supuestos de normalidad o linealidad (Quispe-Andía et. al, 2019). Esta prueba es particularmente útil cuando se trabaja con variables ordinales o cuando la relación entre las variables no es necesariamente lineal.

La prueba se basa en el cálculo del coeficiente de correlación de rangos de Spearman, que mide la relación monotónica entre las variables. En lugar de analizar los valores exactos de las variables, esta prueba se enfoca en clasificar las observaciones en orden ascendente y asignar rangos a cada una. Luego, se calcula el coeficiente de correlación de rangos, que se basa en la diferencia entre los rangos de las observaciones en ambas variables (Quispe-Andía et. al, 2019).

Es ampliamente utilizada en diversas áreas de investigación como la psicología, la sociología, la educación y las ciencias sociales, donde se busca evaluar la relación entre variables ordinales o no lineales. Es especialmente útil cuando los datos no cumplen con los supuestos de las pruebas paramétricas, como el coeficiente de correlación de Pearson.

Al analizar los rangos de las observaciones y calcular el coeficiente de correlación de rangos, esta prueba permite obtener conclusiones estadísticas sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos o la linealidad de la relación.

La aplicación de la prueba, implica lo siguiente:

1- Establecer una hipótesis nula que asuma que no hay asociación entre las variables.
2- Asignar rangos a las observaciones en ambas variables en función de su orden.
3- Calcular el coeficiente de correlación de rangos de Spearman, que se basa en la diferencia entre los rangos de las observaciones en ambas variables y su cuadrado.
4- Comparar el valor del coeficiente de correlación de rangos con un umbral crítico que se obtiene de tablas y tomar la decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

Coeficiente de correlación por rangos de Spearman (r_s)

Es una herramienta que permite medir la correlación o asociación de dos variables cuando las mediciones se realizan en una escala ordinal, aprovechando la clasificación por rangos, es decir que busca la correlación de dos variables.

Interpretación del coeficiente de correlación de Spearman

Se rige por las mismas reglas de interpretación del coeficiente de correlación de Pearson.

La medición de r_s se registra entre -1 y $+1$; si el resultado es cero, no existe relación entre las variables; si es 1 o -1, la relación es perfecta, positiva o negativa; si r_s es negativo, indica que se trata de una relación inversa, y si es positivo, se trata de una relación directa.

Escala de interpretación:

En la Tabla 6-1 se presenta el tipo de relación de las variables en estudio, dependiendo del rango al que pertenezca el coeficiente r_s.

Tabla 6-1. Escala de interpretación

Rango	Tipo de relación
$0 - 0{,}2$	Insignificante
$0{,}2 - 0{,}4$	Baja
0,4 – 0,6	Moderada
$0{,}6 - 0{,}8$	Alta
$0{,}8 - 1{,}0$	Muy alta
$r_s = 1$	Perfecta

Fuente: elaboración propia

Hipótesis:

Las hipótesis nula y alternativa, se pueden plantear, respectivamente, de tres formas, tal como se indica enseguida:

H_0:

- No hay correlación entre las variables.
- No hay asociación entre las variables.
- $\rho = 0$.

H_1:

- Hay correlación entre las variables.
- Hay asociación entre las variables.
- $\rho \neq 0$.

Estadígrafo de prueba: Coeficiente de correlación de Spearman(r_s)

$$r_s = 1 - \frac{6\sum di^2}{n(n^2-1)} \quad (1)$$

donde:

n: tamaño de las muestras

d_i: diferencia de rangos

Ejemplo 1:

Un investigador suponía que el desempeño de los alumnos de la carrera de Biología en materias afines y sinérgicas, podría ser semejante. Para comprobar lo anterior, aplicó dos exámenes a un grupo de 10 estudiantes, uno de Anatomía y otro de Embriología. El investigador quería saber si los estudiantes con puntuaciones bajas en una materia, obtenían puntuaciones bajas en la otra; y si quienes obtenían puntuaciones altas en la materia, también lograban puntuaciones altas en la otra asignatura.

En la Tabla 6-2 se presentan los resultados que consisten en los aciertos obtenidos en una y otra materia, expresados en números enteros.

Tabla 6-2. Datos del ejemplo propuesto

Estudiantes	Aciertos en Anatomía	Aciertos en Embriología
1	80	42
2	88	98
3	50	80
4	90	45
5	41	35
6	30	40
7	35	33
8	40	39
9	37	41
10	25	32

Fuente: elaboración propia

Solución:

a) Procedimiento manual

En la Tabla 6-3, se presenta los resultados de la prueba de normalidad.

Tabla 6-3. Prueba de normalidad del ejemplo

Variables	***Kolmogorov-Smirnov[a]***			***Shapiro-Wilk***		
	Estadístico	*gl*	*Sig*	*Estadístico*	*gl*	*Sig*
Anatomía	0,266	10	0,044	0,829	10	0,033
Embriología	0,363	10	0,001	0,708	10	0,001

Fuente: elaboración propia, recorte prueba de normalidad de datos del ejemplo

En la Tabla 35, se observa que los *p-value* son 0,033 y 0,001, los cuales son menores que 0,05, lo que indica que los datos no provienen de una distribución normal; en consecuencia, para el contraste de hipótesis se puede utilizar la prueba de correlación de Spearman.

Hipótesis:

H_0: $\rho = 0$ (no existe relación entre las dos variables).

H_1: $\rho \neq 0$ (sí existe relación entre las dos variables).

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05 = 5\%$.

La decisión se puede tomar de tres maneras:

1) Comparando el estadígrafo calculado ($r_{s_{cal}}$) con el r_s crítico (r_{s_α}).
2) Con la distribución t de Student, comparando t calculado con el t crítico.
3) Con *p-value*, comparando su valor con el nivel de significancia α.

1) Mediante estadígrafo de prueba (r_s).

Para calcular r_s se utiliza la ecuación (1) y los datos de la Tabla 36, así:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum di^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(34)}{10(10^2 -)} = 1 - \frac{204}{990} = 1 - 0206 = 0{,}794.$$

Por lo tanto, el estadígrafo de prueba calculado es: $r_{s_{cal}} = 0{,}794$.

Tabla 6-4. Tabla de datos con rangos y diferencias de rangos

Anatomía	Embriología	Rango A	Rango E	d	d^2
80	42	8	7	1	1
88	98	9	10	-1	1
50	80	7	9	-2	4
90	45	10	8	2	4
41	35	6	3	3	9
30	40	2	5	-3	9
35	33	3	2	1	1

40	39	5	4	1	1
37	41	4	6	-2	4
25	32	1	1	0	0
Total					**34**

Fuente: elaboración propia

Valor crítico del coeficiente de Spearman (r_{s_α}):

Para el efecto, se utiliza la Tabla 6-5.

Valor crítico de r_s: $r_{s_\alpha}(\alpha = 0{,}05;\ n = 10) = 0{,}648$.

Regla de decisión:

Si $r_{s_{cal}} < r_{s_\alpha}$ se acepta H_0; caso contrario, se rechaza H_0.

Decisión:

Como $r_{s_{cal}} = 0{,}794 > r_{s_\alpha} = 0{,}648$, se rechaza H_0; por lo tanto, sí existe relación significativa entre las dos variables.

Tabla 6-5. Valores críticos del coeficiente de correlación de Spearman para una prueba de dos colas

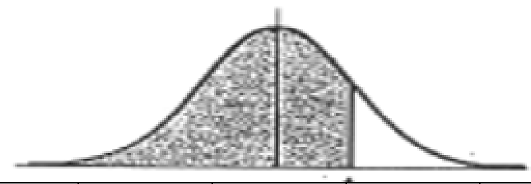
Número de casos	Valor crítico para α		
	$p = 0,1$	$p = 0,05$	p=0,01
7	0,714	0,786	0,929
8	0,643	0,738	0,881
9	0,600	0,683	0,833
10	0,564	0,648	0,794
12	0,506	0,591	0,777
14	0,456	0,544	0,715
16	0,425	0,506	0,665
18	0,399	0,475	0,625
20	0,377	0,450	0,591
22	0,359	0,428	0,562
24	0,343	0,409	0,537
26	0,329	0,392	0,515
28	0,317	0,377	0,496
30	0,306	0,364	0,478

Fuente: elaboración propia, tabla adaptada de Camacho-Sandoval (2008).

2) Mediante t de Student

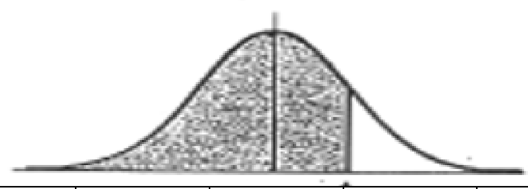
Tabla 6-6. Tabla t de Student

Valores percentiles (t_p) para la distribución t de Student con ν grados de libertad ($\acute{A}rea\ en\ sombra\ = p$)



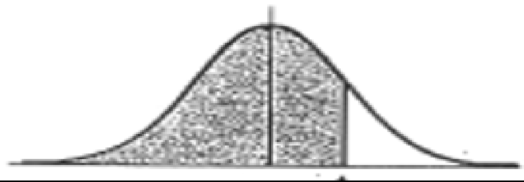
ν	0,995	0,990	0,975	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
1	63,66	31,82	12,71	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,41	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129

Valores percentiles (t_p) para la distribución t de Student con ν grados de libertad ($\acute{A}rea\ en\ sombra\ = p$)



ν	0,995	0,990	0,975	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
12	3,05	2,68	2,18	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,35	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,85	2,53	2,09	1,33	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,49	2,06	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127

Valores percentiles (t_p) para la distribución t de Student con ν grados de libertad ($\acute{A}rea\ en\ sombra\ = p$)



ν	0,995	0,990	0,975	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
26	2,78	2,48	2,06	1,31	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,05	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126

Fuente: elaboración propia, adaptado de
https://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aarribas/eng/docs/tablas.pdf

Valor de t crítico (t_α)

Para determinara el valor de t crítico se utiliza la Tabla 6-6.

$t_\alpha(\alpha = 0{,}05;\ v = n - 2 = 10 - 2 = 8) = 2{,}31.$

Valor de t calculado (t_{cal})

$$\mathrm{t}_{cal} = r_{s\,cal} \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = 0{,}794 \times \sqrt{\frac{10-2}{1-0{,}794^2}} = 3{,}694.$$

Regla de decisión:

Si $\mathrm{t}_{cal} < \mathrm{t}_\alpha$ se acepta H_0; caso contraro, se rechaza H_0.

Decisión:

Como $\mathrm{t}_{cal} = 3{,}694 > \mathrm{t}_\alpha = 2{,}31$ se rechaza H_0, por lo tanto, existe relación significativa entre entre las dos variables de puntajes de Anatomía y Embriología; esto es, el coeficiente de correlación de Spearman $r_s > 0$ (Figura 5).

3) Mediante *p-value*

Otr forma de tomar la desición es comparar *p-value* con el nivel de significancia α.

Como *p-value* $= 0{,}0061 < \alpha = 0{,}05$, se rechaza H_0; por lo tanto, se puede concluir que sí existe relación significativa entre las variables en estudio.

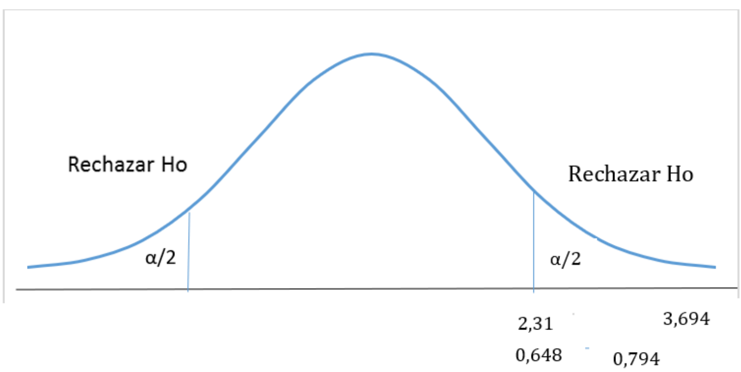


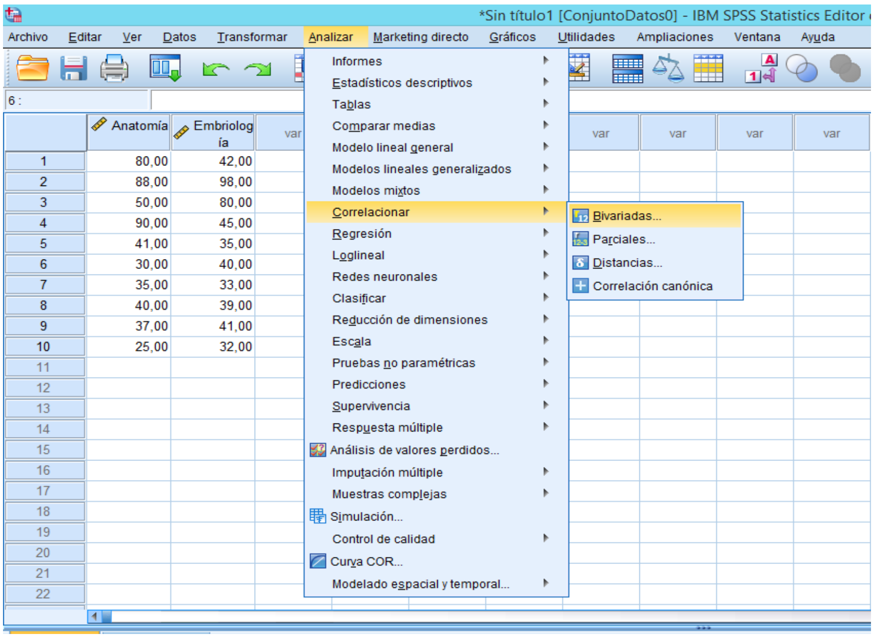
Figura 5. Regiones de aceptación y rechazo de $r_{s\,cal}$ y t_{cal}

Fuente: elaboración propia

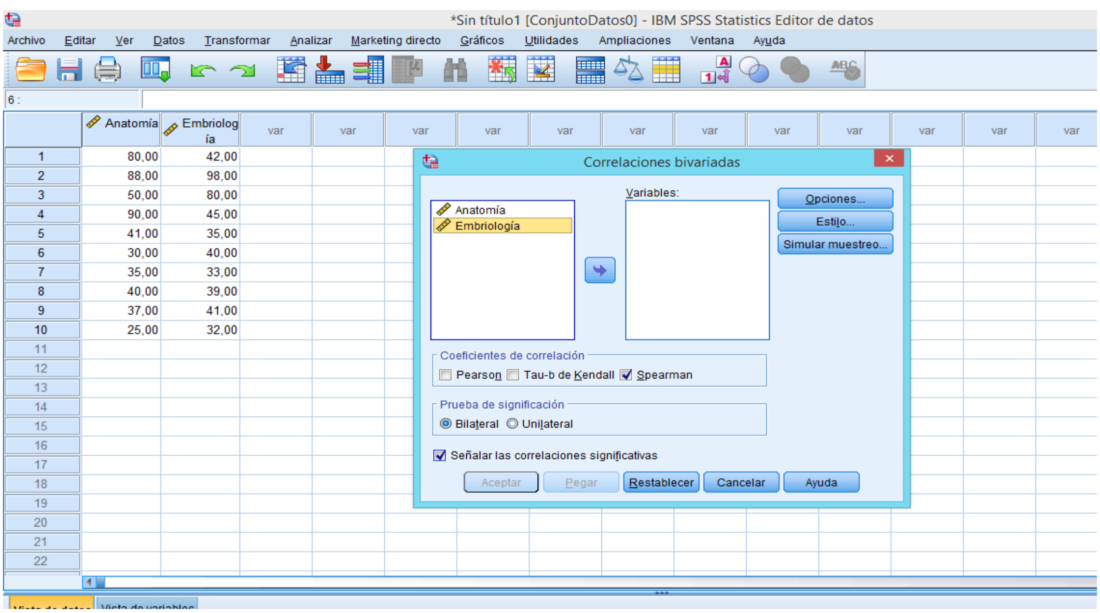
b) **Procedimiento con SPSS**

El procedimiento se presenta mediante los recortes 6-1 al 6-3.

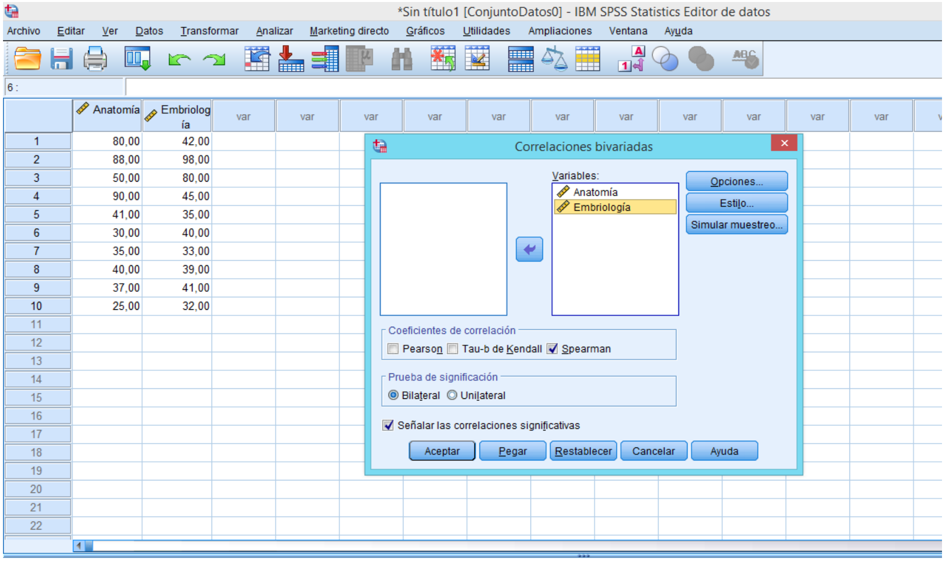
Analizar, correlacionas, bivariadas:



Recorte 6-1. Paso 1/3
Fuente: elaboración propia



Recorte 6-2. Paso 2/3
Fuente: elaboración propia



Recorte 6-3. Paso 3/3
Fuente: elaboración propia

Tabla 6-7. Correlaciones

Correlaciones				
			Anatomía	Embriología
Rho de Spearman	Anatomía	Coeficiente de correlación	1,000	0,794**
		Sig (bilateral)		0,006
		N	10	10
	Embriología	Coeficiente de correlación	0,794**	1,000
		Sig. (bilateral)	0,006	
		N	10	10

Fuente: elaboración propia, recorte de correlaciones

Decisión:

En la Tabla 6-7 se observa que, *p-value* $= 0{,}006 < \alpha = 0{,}05$, por lo tanto, se rechaza H_0; en consecuencia, se puede concluir que sí existe una relación significativa entre los puntajes de la evaluación de las asignaturas de Anatomía y Embriología; además, que es alto el coeficiente de correlación de Spearman: $r_s = 0{,}794$.

Capítulo 7

PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE A UN MODELO BINOMIAL

El estudio de la prueba no paramétrica de bondad de ajuste a un modelo binomial, es de gran importancia en el análisis estadístico cuando se desea evaluar si los datos observados siguen una distribución binomial específica. Esta prueba es especialmente útil cuando se trabaja con variables categóricas o de conteo y se busca determinar si la distribución binomial es un buen ajuste para los datos (Quispe-Andía et. al, 2019).

La prueba se basa en la comparación de las frecuencias observadas en cada categoría con las frecuencias esperadas bajo la distribución binomial. La frecuencia esperada se calcula utilizando la función de densidad de probabilidad de la distribución binomial con los parámetros estimados. La prueba evalúa si hay diferencias significativas entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas (Romero, 2016). En tal sentido, útil cuando se trabaja con variables categóricas o de conteo y se desea verificar si una distribución binomial es un buen modelo para describir los datos.

La prueba proporciona una herramienta estadística para evaluar si los datos observados siguen una distribución binomial especificada (Romero, 2016). Al comparar las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas bajo la distribución binomial, esta prueba permite tomar decisiones estadísticas objetivas sobre la bondad de ajuste del modelo sin requerir supuestos específicos sobre la distribución de los datos.

El proceso de aplicación de la prueba, requiere lo siguiente:

1. Establecer una hipótesis nula que asuma que los datos siguen una distribución binomial especificada.
2. Determinar las frecuencias observadas en cada categoría y estimar los parámetros de la distribución binomial utilizando los datos, cuando sea necesario.
3. Calcular las frecuencias esperadas utilizando la distribución binomial y comparar con las frecuencias observadas.
4. Utilizar una estadística de prueba, como el estadístico Ji-cuadrado, para medir la discrepancia entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas.

5. Comparar el valor de la estadística de prueba con un umbral crítico obtenido de tablas y tomar la decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

En la prueba de bondad de ajuste, se desea determinar si las frecuencias observadas en un caso particular se ajustan a un modelo binomial, con un nivel de significancia del 5%; para el efecto se utiliza la distribución Ji-cuadrado.

La prueba de bondad de ajuste también se puede aplicar para comprobar si los datos se ajustan a otro modelo, tales como los modelos Hipergeométrico, Poisson, Normal, etc.

El modelo general de las hipótesis nula y alternativa, son los que siguen:

Hipótesis:

H_0: los datos observados se ajustan a un modelo binomial.

H_1: los datos observados no se ajustan a un modelo binomial.

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05 = 5\%$.

Procedimiento manual:

Tomar datos de una distribución de frecuencias observadas (f_0).

Calcular las probabilidades binomiales de la variable observada $P(X = x) = f(x)$.

Determinar los valores esperados multiplicando el tamaño de la muestra por cada probabilidad $(f_e) = nf(x)$.

Calcular el valor de Ji-cuadrado, aplicando la fórmula (1):

$$\chi^2 = \frac{\sum(fo - fe)^2}{fe} \quad (1).$$

Comparar el valor calculado con el valor crítico y tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Si el valor calculado es menor que el valor crítico, se acepta la hipótesis nula; en caso contrario, se rechaza H_0.

Utilizando p-value:

Calcular $p - value$ y comparar con α; si *p-value* es menor que α, se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario, se acepta H_0.

Ejemplo:

Se efectúan 200 observaciones del número de artículos defectuosos que produce una máquina, obteniendo los datos de la Tabla 7-1.

Tabla 7-1. Datos del ejemplo

Defectuosos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Frecuencias observadas (f_o)	23	75	72	25	5	200

Fuente: elaboración propia

Comprobar si los datos observados se ajustan a una distribución binomial con $p = 0,4$ a un nivel de significancia del 5%.

Solución:

Hipótesis:

H_0: los datos observados se ajustan a un modelo binomial con $p = 0,4$.

H_1: los datos observados no se ajustan a un modelo binomial con $p = 0,4$.

A partir de la Tabla 7-1, se elabora la Tabla 7-2, donde $f(x)$ es la probabilidad binomial con $n = 4$, y $p = 0,4$.

Tabla 7-2. Cálculos con los datos en Microsoft Excel

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{f_0}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f_e}$	$(\boldsymbol{f_0 - f_e})$	$(\boldsymbol{f_0 - f_e})^2$	$\dfrac{(\boldsymbol{f_0 - f_e})^2}{\boldsymbol{f_e}}$
0	23	0,1296	25,92	-2,92	8,5264	0,329
1	75	0,3456	69,12	5,88	34,5744	0,500
2	72	0,3456	69,12	2,88	8,2944	0,120
3	25	0,1536	30,72	-5,72	32,7184	1,065
4	5	0,0256	5,12	-0,12	0,0144	0,003
	200	1	200			**2,017**

Fuente: elaboración propia

Ji-cuadrado calculado (χ^2_{cal})

Se aplica la fórmula (1), así:

$$\chi^2_{cal} = \frac{\sum(fo - fe)^2}{fe} = 2{,}017.$$

Ji-cuadrado crítico (χ^2_{α}):

Valor de Ji-cuadrado crítico (χ^2_{α}) con 5% de significancia y 4 grados de libertad: $\chi^2_{\alpha}(\alpha = 0{,}05; gl = 4) = 9{,}487$.

Decisión:

Dado que, $\chi^2_{cal} = 2{,}017 < \chi^2_{\alpha} = 9{,}487$, la decisión es aceptar la hipótesis nula; es decir, los datos observados sí se ajustan a un modelo binomial con $p = 0{,}4$.

Utilizando p-value:

$p - value = P(\chi^2 > 2{,}017) = 0{,}7326$.

Dado que, $p - value = 0{,}7326 > \alpha = 0{,}05$, se acepta H_0; en consecuencia, los datos observados sí se ajustan a un modelo binomial con $p = 0{,}4$.

Capítulo 8

PRUEBA DE INDEPENDENCIA

El análisis de la prueba no paramétrica de independencia es fundamental cuando se busca evaluar la relación entre dos variables cualitativas. Esta prueba se convierte en una herramienta importante al explorar la posible dependencia o independencia entre estas variables sin depender de la distribución específica de los datos. Es particularmente útil en situaciones donde la naturaleza de las variables impide asumir una distribución paramétrica (Gómez-Gómez, 2003).

La base de esta prueba radica en comparar las frecuencias observadas en las distintas combinaciones de categorías con las frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia. En lugar de centrarse en la forma de la distribución, la prueba no paramétrica de independencia evalúa si hay una asociación significativa entre las dos variables categóricas.

Este método encuentra aplicación en diversas disciplinas, como la sociología, la medicina, la educación y la investigación de mercado, donde se busca entender la relación entre variables cualitativas sin hacer supuestos específicos sobre la distribución de los datos. Permite explorar la independencia o dependencia entre las variables y proporciona una perspectiva valiosa en la interpretación de patrones observados.

El procedimiento de aplicación de la prueba implica los siguientes pasos:

1. Formular una hipótesis nula que asuma independencia entre las dos variables categóricas.
2. Obtener las frecuencias observadas para cada combinación de categorías.
3. Calcular las frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia entre las variables.
4. Utilizar una estadística de prueba, como el estadístico de Ji-cuadrado, para evaluar la discrepancia entre las frecuencias observadas y esperadas.
5. Comparar el valor de la estadística de prueba con un umbral crítico, generalmente basado en la distribución Ji-cuadrado, para tomar una decisión sobre la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

En esta prueba de independencia, el objetivo es determinar si hay una asociación significativa entre las dos variables cualitativas, con un nivel de significancia del 5%. Se utiliza la distribución Ji-cuadrado como referencia para tomar decisiones estadísticas objetivas sobre la independencia o dependencia entre las variables en estudio.

Ejemplo:

Comprobar con un nivel de significancia del 5 %, si la participación de los empleados en las decisiones de la empresa, son independientes del estrato social.

Mediante una encuesta a 230 empleados, se encontró los resultados que se presentan en la Tabla 8-1.

Tabla 8-1. Frecuencias observadas

Participación	Estrato bajo	Estrato medio	Estrato alto	Total
Nunca	20	32	40	92
Ocasional	15	28	44	87
Regular	10	18	23	51
Total	45	78	107	230

Fuente: elaboración propia

a) Procedimiento manual

Las tablas: 8-1, 8-2 y 8-3, contienen las frecuencias observada, las esperadas y el estadístico de prueba del ejercicio planteado.

Hipótesis:

H_0: la participación de los empleados en las decisiones de la empresa es independiente del estrato.

H_1: la participación de los empleados en las decisiones de la empresa depende del estrato.

Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05 = 5\%$.

Tabla 8-2. Frecuencias esperadas

Participación	Estrato bajo	Estrato medio	Estrato alto	Total
Nunca	18	31,2	42,8	92
Ocasional	17,02	29,50	40,47	87
Regular	9,98	17,30	23,73	51
Total	45	78	107	230

Fuente: elaboración propia

Tabla 8-3. Cálculo del estadígrafo de prueba

Participación	Estrato bajo	Estrato medio	Estrato alto	Total
Nunca	0,2222	0,0205	0,1832	0,4259
Ocasional	0,2401	0,0767	0,3072	0,6240
Regular	0,0000	0,0287	0,0222	0,0510
Total	0,46	0,13	0,51	1,10

Fuente: elaboración propia

Cálculo de Ji-cuadrado calculado (χ^2_{cal})

$$\chi^2_{cal} = \frac{\sum(fo - fe)^2}{fe} = 1{,}10.$$

Determinación de Ji-cuadrado crítico (χ^2_{α})

Valor de χ^2_{α} con 5% de significancia y 4 grados de libertad: $\chi^2_{\alpha}(\alpha = 0{,}05; gl = 4) = 9{,}487$.

Decisión:

Dado que, $\chi^2_{cal} = 1.10 < \chi^2_{\alpha} = 9{,}487$, la decisión es aceptar la hipótesis nula; es decir, la participación de los empleados en las decisiones de la empresa es independiente del estrato social.

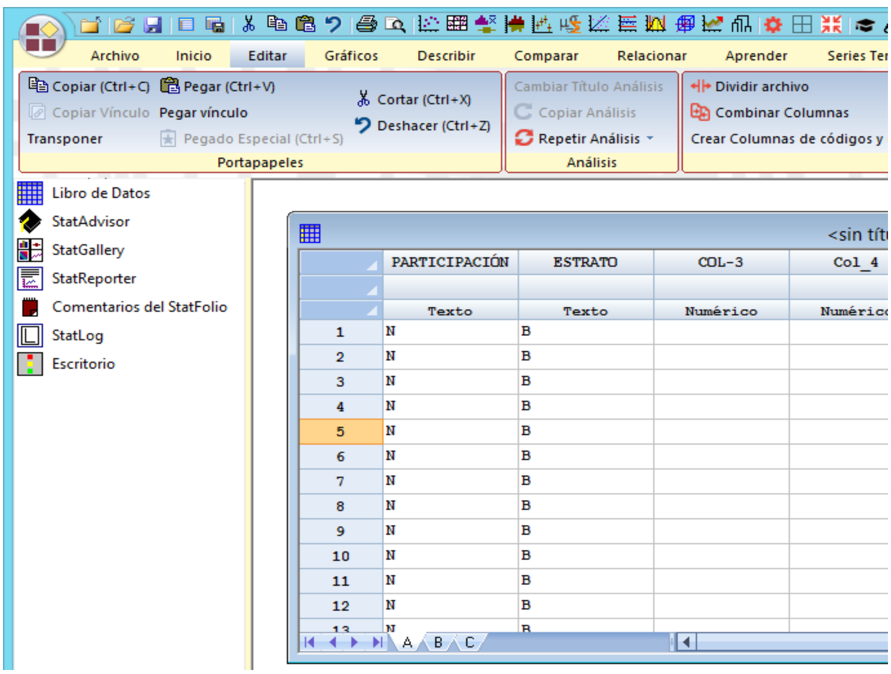
Utilizando p-value:

$p - value = P(\chi^2 > 1{,}10, y\ 4\ gl) = 0{,}8943.$

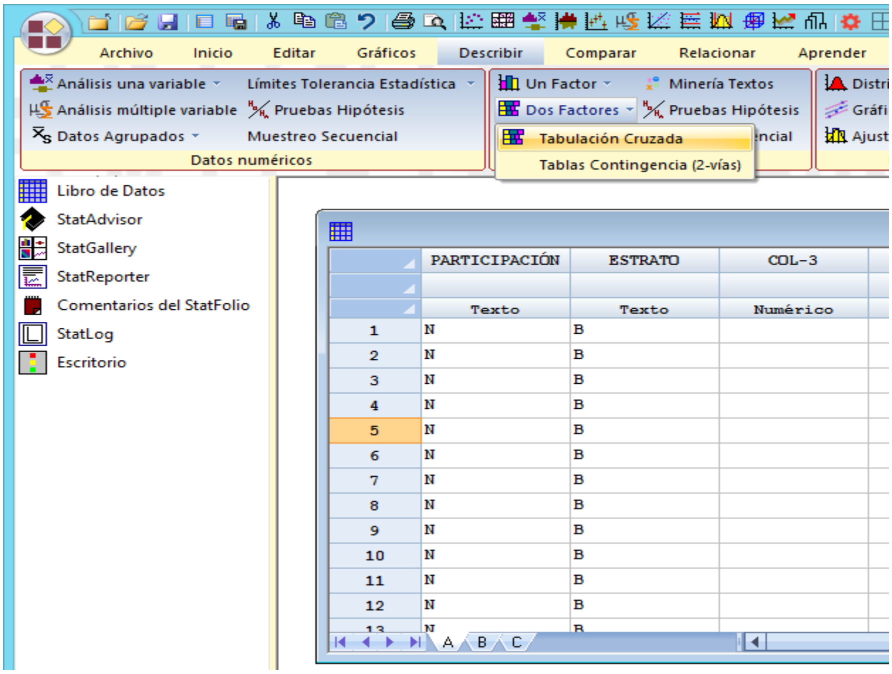
Dado que, $p - value = 0{,}8943 > \alpha = 0{,}05$, se acepta H_0; por lo cual, la participación de los empleados en las decisiones de la empresa es independiente del estrato social.

b) Procedimiento con Statgraphics

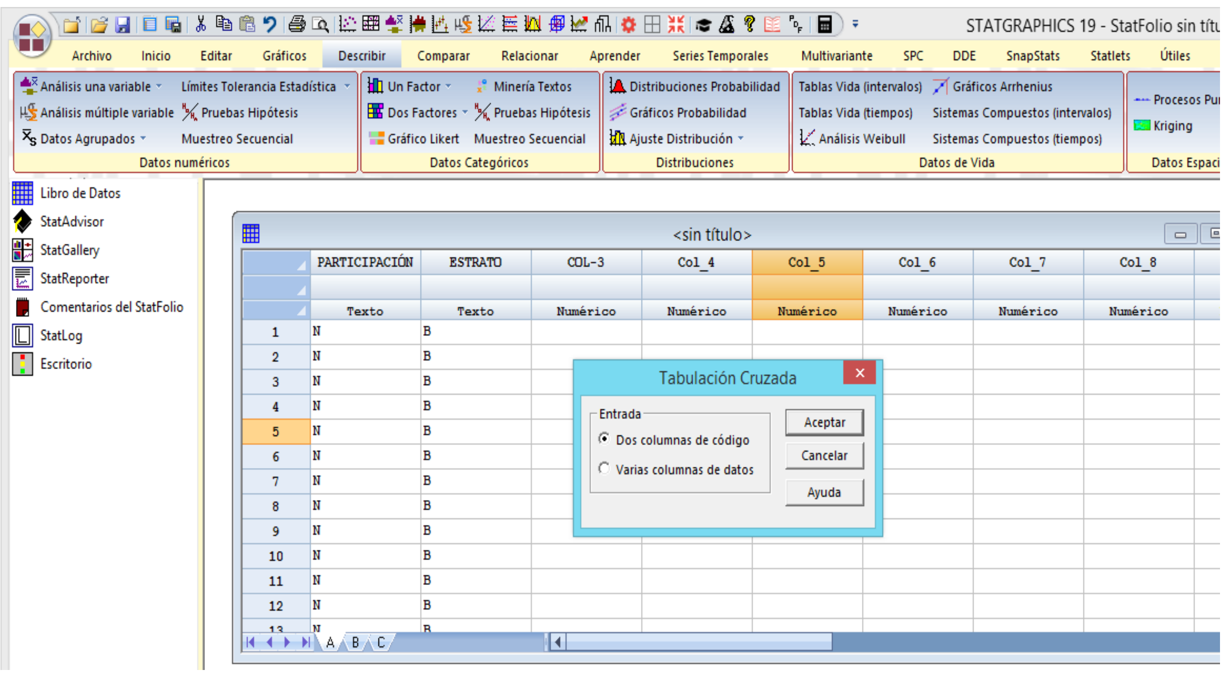
El procedimiento se presenta en los recortes del 8-1 al 8-6.



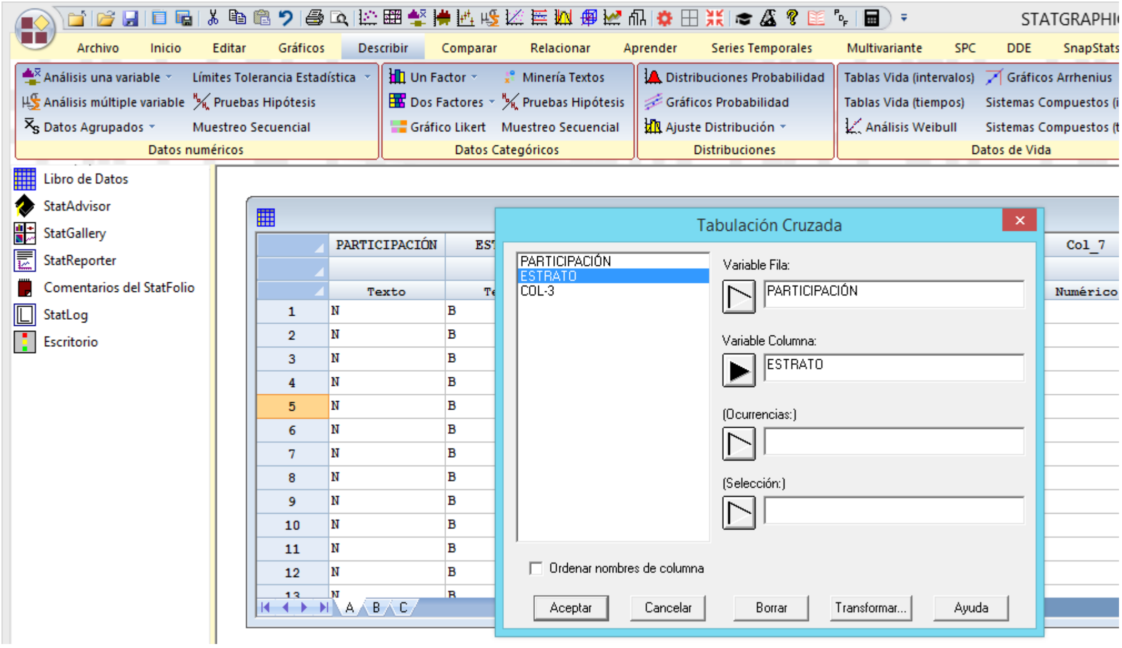
Recorte 8-1. Paso 1/6
Fuente: elaboración propia



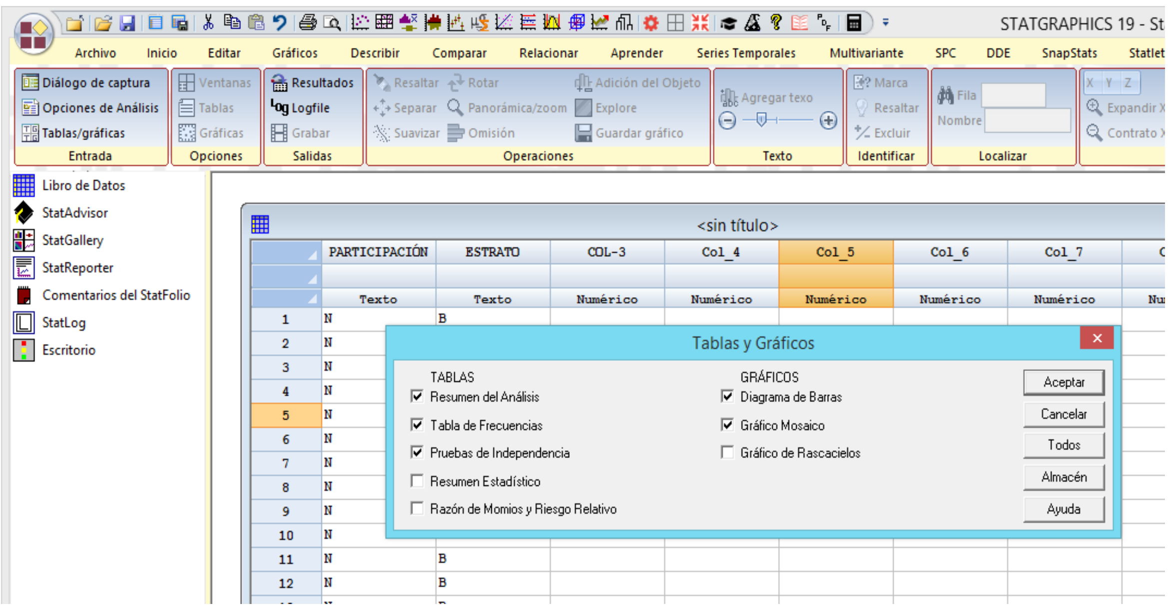
Recorte 8-2. Paso 2/6
Fuente: elaboración propia



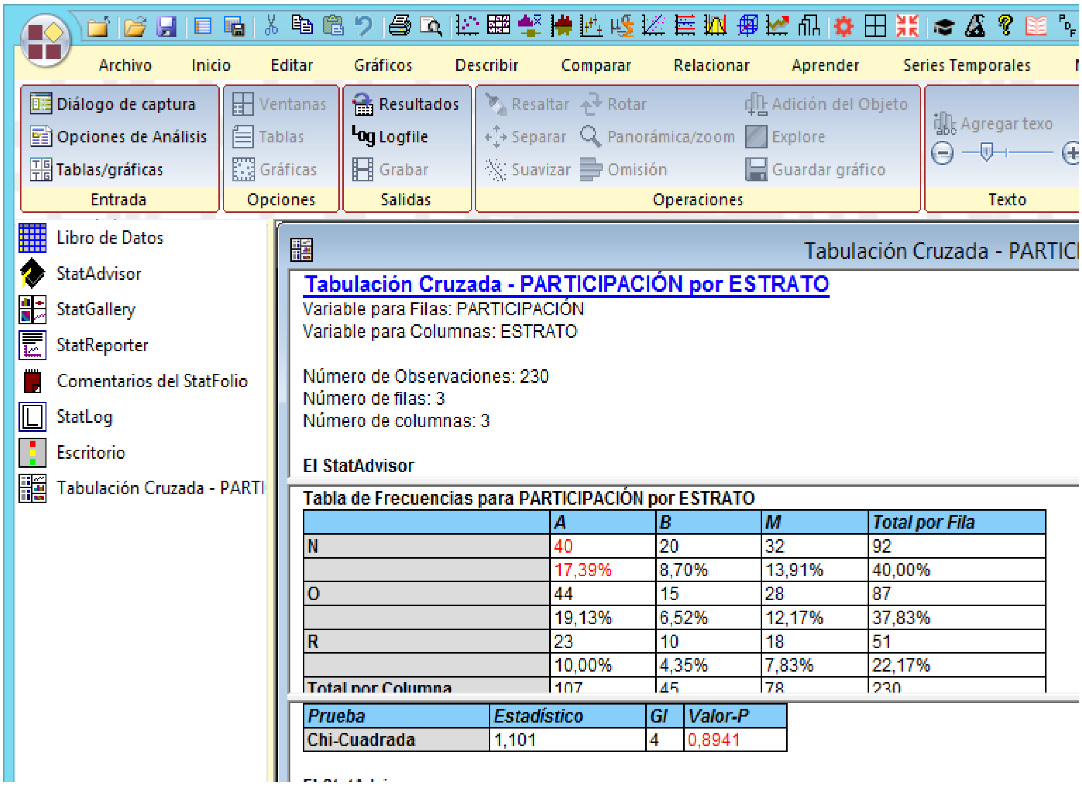
Recorte 8-3. Paso 3/6
Fuente: elaboración propia



Recorte 8-4. Paso 4/6
Fuente: elaboración propia



Recorte 8-5. Paso 5/6
Fuente: elaboración propia



Recorte 8-6. Paso 6/6
Fuente: elaboración propia

Como se puede observar, $\chi^2_{cal} = 1{,}101 < \chi^2_{\alpha}(\alpha = 0{,}05; gl = 4) = 9{,}487$, la decisión es aceptar la hipótesis nula; es decir, la participación de los empleados en las decisiones de la empresa es independiente del estrato social.

Utilizando p-value:

$p - value = 0{,}8941 > \alpha = 0{,}05$ la decisión es aceptar la hipótesis nula; por lo cual, la participación de los empleados en las decisiones de la empresa es independiente del estrato social.

.

BIBLIOGRAFÍA

Arribas-Gil. A. (s.f.). *Tabla de la distribución normal.* https://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aarribas/eng/docs/tablas.pdf

Camacho-Sandova. J. (2008). *Asociación entre variables: correlación no paramétrica.* AMC, vol 50 (3). https://www.scielo.sa.cr/pdf/amc/v50n3/3783.pdf

Canavos, G. (1998). *Probabilidad y Estadística*. Bogotá, McGraw Hill.

Chao, L. (1978). *Estadística para las Ciencias Administrativas*. México. Edit McGraw-Hill.

Chou, Y. L. (1975). *Análisis Estadístico*. México. Editorial Interamericana S.A.

Editorial *Team. (2022). Test de Shapiro-Wilk – Excel y Google Sheets. https://www.automateexcel.com/es/stats/test-de-shapiro-wilk/*

Flóres-Tapia, C. E. & Flóres-Cevallos, K. L. (2021). *Pruebas para comprobar la normalidad de datos en procesos productivos: andersondarling, Ryan-Joiner, Shapiro-Wilk y Kolmogórov-Smirnov*. En: Societas. Revista de Ciencias Sociales y Humanísticas; vol. 23, núm. 2, 2021. URL: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/341/3412237018/index.html

Frías-Bustamante, M. *(s.f.). Tablas estadísticas. http://www4.ujaen.es/~mpfrias/TablasInferencia.pdf*

Gómez-Gómez, M; Danglot-Banck, C. & Vega-Franco, L. (2003). *Sinopsis de pruebas estadísticas no paramétricas. Cuándo usarlas*. Revista Mexicana de Pediatría. V. 70. Num. 2. https://www.medigraphic.com/pdfs/pediat/sp-2003/sp032i.pdf

Guisande-González, C., Barreiro-Felpeto, A., Maneiro-Estraviz, Ills Rivero-Alarcón, I., Vergara-Castaño, A. R. & Vaamonde-Liste, A. (2006). *Tratamiento de datos*. Ediciones Díaz de Santos. España. https://books.google.com.ec/books?id=AhNx24025ZoC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false.

Hanke, J. & Arthur, G. R. (1997). *Estadística para negocios*. Madrid. Edit McGraw-Hill/Interamericana de España/IRWIN.

Levin, R. & Rubin, D. S. (1994). *Estadística para Administradores*. México. Prentice Hall Hispanoamericana.

Mills, R. L. (1997). *Estadística para Administración y Economía*. Bogotá. Edit McGraw-Hill latino americana S.A.

Milton,R.C.(1964): *An extendent table of critical value for the Mann-Whitney two-sample statistic Journal of American Statistical Society, 59,925-934* (1964). *https://www.uv.es/ceaces/tex1t/7%20no%20para/tablamw.htm*

Quispe-Andía, A.; Calla-Vasquez, K. M; Yangali-Vicente, J. S; Rodriguez-López, J. L. & Pumacayo-Palomino, I. I, (2019). *Estadística no paramétrica aplicada a la investigación científica con software SPSS, Minitab y Excel*. Colombia, Editorial EIDEC. Primera edición.

Romero, M. (2016). *Pruebas de bondad de ajuste a una distribución norma*l. En: Revista Enfermería Del Trabajo, 6(3), 105–114. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5633043

Samiuc *(s.f.). Prueba de McNemar.* Disponible en: https://www.samiuc.es/estadisticas-variables-binarias/valoracion-inicial-pruebas-diagnosticas/prueba-de-mcnemar/

Serano-*Pérez, J.J. (s.f.). Coeficientes para el contraste de hipótesis con Shapiro-Wilk. https://www.ugr.es/~jjserra/Tablas.pdf*

Walpole, M. Y. (2007). Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Octava edición Ed. México. Pearson.

ACERCA DE LOS AUTORES

Alberto Javier Mesa Guerrero.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Estadístico en Salud, Universidad de Antioquia. Profesor en categoría Titular de la Universidad de Nariño.

Correo electrónico: soundmesa@yahoo.com.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Profesor en categoría Titular de la Universidad de Nariño.

Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Año de publicación: 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El objetivo general de la estadística es la inferencia estadística, que consiste en dos tipos de problemas, a saber: primero, la estimación de parámetros, donde se trata de encontrar un intervalo muy pequeño que contenga el parámetro, confiando que la probabilidad de que este suceso ocurra sea muy alta. Con el propósito de que la estimación tenga un alto grado de precisión, el margen de error debe ser muy pequeño. Para lograr estos objetivos es necesario escoger una muestra de tamaño adecuado y un grado de confiabilidad muy alto, sin descartar que existirá un riesgo mínimo que contradice la afirmación.

El segundo problema, es la prueba de hipótesis, donde se aplica un procedimiento estadístico para tomar la mejor decisión frente a dos alternativas: la hipótesis nula y la hipótesis de trabajo o del investigador.

Cuando se pretende probar una hipótesis respecto a uno o más parámetros de una población que tiende a una distribución normal, las pruebas usadas son las de la estadística paramétrica; si los procedimientos estadísticos no requieren plantear inferencias acerca de los parámetros de la población (su media y dispersión) se le conoce como no paramétricos, o de distribución libre (ya que no se hacen suposiciones acerca de la distribución de la población de donde procede la muestra.

Las pruebas paramétricas se basan en supuestos específicos sobre la distribución de los datos en la población subyacente; supuestos que incluyen la normalidad de los datos y la igualdad de varianzas. Algunos ejemplos comunes de pruebas de hipótesis paramétricas son la prueba t de Student, la prueba de ANOVA y la prueba de regresión lineal. Estas pruebas son adecuadas cuando los datos cumplen con los supuestos paramétricos y se consideran más poderosas que las pruebas no paramétricas, cuando los supuestos son válidos.

Por su parte, las pruebas de hipótesis no paramétricas son métodos estadísticos que no dependen de supuestos específicos sobre la distribución de los datos subyacentes. Estas pruebas se basan en estadísticas de orden o en técnicas de muestreo. Estas pruebas son más flexibles en términos de supuestos, lo que las hace adecuadas para datos que no se ajustan a una distribución normal, o con distribuciones desconocidas.

En el presente libro se estudian las siguientes pruebas no paramétricas: Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk, Mann-Whitney, McNemar, Kruskal-Wallis, Spearman, Bondad de ajuste a un modelo binomial y prueba de independencia.

ISBN: 978-628-7771-24-6

9 786287 771246

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 • ENERO 11 DE 2023

120 Años
Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño