Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática

Mayra Susana Ordoñez
María Cristina Acosta
Hilbert Blanco-Álvarez

Editorial
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de **Nariño**

Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática

Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática

Mayra Susana Ordoñez
María Cristina Acosta
Hilbert Blanco-Álvarez

êditorial
Universidad de Nariño

Ordoñez, Mayra Susana
Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática / Mayra Susana Ordoñez, María Cristina Acosta, Hilbert Blanco-Álvarez.—1ª. ed. – San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2025

333 páginas : ilustraciones, gráficos, tablas

Incluye referencias bibliográficas p. 302-323 y reseña de los autores p. 331
ISBN: 978-628-7771-34-5

1. Etnomatemática 2. Matemáticas--Enseñanza 3. Etnomatemática—Investigaciones--Sistematización 4. Etnoeducación 5. Etnomatemática—Medios didácticos. I. Acosta, María Cristina II. Blanco-Álvarez, Hilbert

510.71 O656 – SCDD-Ed. 22

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática

ISBN: 978-628-7771-34-5
Primera edición

Corrección de estilo: Luz Elida Vera Hernández
Diseño y diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Abril de 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Contenido

Presentación

Este libro expone los resultados del proyecto de investigación "Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la Etnomatemática"[1], No. 2044 del Grupo de Investigación GESCAS del Departamento de Matemáticas y Estadística, y financiado por la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social de la Universidad de Nariño, Colombia.

Este libro busca proporcionar un panorama de los trabajos realizados por la comunidad de investigadores en torno al diseño de actividades matemáticas desarrolladas desde la Etnomatemática; con este propósito, se ha organizado el libro en capítulos que abordan los aspectos considerados en la formulación, desarrollo y resultados del proyecto. En el capítulo 1 se presentan los aspectos generales de la investigación, incluyendo la problemática, los objetivos, el marco teórico, los materiales y los métodos utilizados. Esta sección ofrece una perspectiva sobre los motivos que impulsaron la investigación, así como una lista de los artículos considerados objeto de estudio, los cuales fueron seleccionados en función de los objetivos planteados y del uso de la Etnomatemática tanto en la información general de los artículos como en el diseño de las actividades.

En el capítulo 2 se presenta el instrumento utilizado para la sistematización de los artículos. Este instrumento fue desarrollado a partir de la lectura y análisis minucioso de cada uno de los documentos, con el objetivo

[1] Parte de los resultados fueron publicados previamente en (Acosta et al., 2024)

de establecer los parámetros necesarios para sistematizar las actividades matemáticas. Su diseño permitió organizar las actividades para obtener la máxima cantidad de información sobre cómo y por qué el autor de cada artículo las diseñó; además, este instrumento nos ayudó a establecer las categorías de análisis, que incluyen: área, objeto matemático, grado escolar o población, contexto, materiales y país.

Finalmente, en el capítulo 3 se detalla el instrumento empleado para la clasificación de las actividades; este instrumento consta de 7 dimensiones y 27 indicadores que facilitan la ubicación de las actividades en uno de los 3 niveles de articulación. Se presentan ejemplos del uso de este instrumento: el primer ejemplo muestra una actividad sobre la chakana clasificada en el nivel motivador/exploratorio; el segundo ejemplo ilustra la clasificación de una actividad en el nivel político/valorativo; y, en el tercer ejemplo, se exhibe la clasificación de una actividad de conteo en una comunidad indígena en el nivel amplificador/articulador.

Capítulo 1.

Aspectos generales de la investigación

1.1. Introducción

Una actividad de gran importancia para el avance de la investigación en Educación Matemática es el diseño de intervenciones didácticas. Estas se han publicado en diversos artículos (Albanese y Perales, 2014; Ávila, 2014; Blanco-Álvarez, 2016, 2024; Chavarría Vásquez et al., 2017; Cortina y Rojas, 2016; Oliveira Júnior y Mendes dos Santos, 2016; Parra Sánchez y Orjuela Bernal, 2014), sin embargo, la sistematización de estos diseños de actividades etnomatemáticas no se ha realizado. Esta es una de las problemáticas o vacíos que esta investigación intentó llenar mediante sus resultados; otra problemática es la falta de clasificación de estos diseños de intervenciones didácticas, una clasificación que permita describir y valorar las interacciones en el aula con fines investigativos o de mejora didáctica (Godino et al., 2006, 2009).

Es importante subrayar que varios investigadores han señalado que la Etnomatemática carece de instrumentos para la clasificación de los diseños de actividades matemáticas que se realizan desde una perspectiva etnomatemática y su desarrollo en el aula (Oliveras y Godino, 2015), cuyo objetivo principal, desde su perspectiva educativa, es fomentar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, promoviendo un alto grado de pensamiento crítico, responsabilidad ciudadana, respeto a la diversidad y a las diferencias culturales (D'Ambrosio, 2000).

La comunidad etnomatemática muestra un creciente interés por la integración de la Etnomatemática en el aula de clase (Oliveras y Blanco-Álvarez, 2016), pero hay poca información sistematizada sobre las actividades desarrolladas desde la Etnomatemática, y la clasificación de estas actividades aún no se lleva a cabo. En este sentido, se encuentran trabajos como los de Aroca (2018, 2022), que han evaluado el impacto de desarrollar una clase de matemáticas desde un enfoque etnomatemático, mediante su propuesta de enseñanza paralela y comparativa; por otro lado, Blanco-Álvarez (2017) llevó a cabo la evaluación de dos clases diseñadas desde la Etnomatemática, siendo estos los únicos antecedentes existentes en la literatura.

En relación a lo anterior, se planteó la siguiente pregunta de investigación ¿Qué tipo de actividades matemáticas se han diseñado desde la Etnomatemática desde el año 2000 al 2019 y cómo se pueden clasificar? Los objetivos planteados son los siguientes: a) Sistematizar las actividades de matemáticas diseñadas desde una perspectiva etnomatemática publicadas en revistas científicas entre los años 2000 y 2019, y b) clasificar al menos dos de las actividades matemáticas encontradas.

El proyecto se fundamentó teóricamente en el programa Etnomatemática, que el profesor de matemáticas e investigador en Educación Matemática Ubiratan D'Ambrosio (2014) define como:

> Un programa de investigación sobre la generación, organización individual y social, y la transmisión y difusión del conocimiento. Esos objetivos contemplan las disciplinas tradicionales de las ciencias de

> cognición (generación del conocimiento), de la epistemología (organización del conocimiento) y de la historia, sociología, política y educación (transmisión y difusión del conocimiento). Pero diferentemente del enfoque tradicional, el Programa Etnomatemática estudia esas disciplinas de forma integrada, transdisciplinar y transcultural, bajo el marco conceptual de ciclo del conocimiento. (p. 100)

1.2. Materiales y métodos

Esta investigación se enmarcó en el paradigma cualitativo, y el diseño metodológico utilizado fue de tipo documental. Este enfoque se justifica por el uso de materiales publicados que no han sido analizados previamente o que aún pueden ser reconsiderados de acuerdo con los objetivos de búsqueda establecidos (Gil, 2008).

1.2.1. Tipos de materiales y método de búsqueda

La recolección del material empírico se centró en artículos de revistas científicas publicados entre los años 2000 y 2019. La búsqueda se realizó en dos grupos de bases de datos. El primer grupo estuvo compuesto por las bases de datos Scopus y Springer, mientras que el segundo grupo estuvo integrado por las bases de datos Redalyc, Scielo y Google Scholar.

Los términos de búsqueda usados contemplaron palabras como: enseñanza, etnomatemáticas, actividades matemáticas y secuencias didácticas. La búsqueda se realizó en idioma español, portugués e inglés.

1.2.2. Material recolectado

En total se encontraron 76 artículos que tenían relación con los términos de búsqueda en el título y/o en el resumen. Realizando un análisis más detallado, se seleccionaron 17 artículos que tenían relación con la Etnomatemática en su marco teórico; además, se consideró que las actividades estuvieran explícita y completamente descritas en el documento, reflejando el uso de la Etnomatemática. En la Tabla 1 se muestran los artículos seleccionados para su análisis.

Tabla 1. *Lista de artículos analizados*

N°	Revista	Título	Autores	Año
1	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Uso de las Ideas Matemáticas y Científicas de los Incas, en la Enseñanza - Aprendizaje de la Geometría	Enrique Huapaya Gómez y César E. Salas Valverde	(2008)
2	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Actividades Didácticas Apoyadas en Algunos Aspectos Históricos de la Cultura y Matemática Maya	Nancy Dayana Díaz Toro, Sandra Viviana Escobar Madroñero y Saulo Mosquera López	(2009)
3	*South African Journal of Education*	Incorporating the indigenous game of morabaraba in the learning of mathematics	Nkopodi Nkopodi y Mogege Mosimege	(2009)
4	*Revista Latinoamericana*	Counting and Arithmetic of the Inca	Ximena Catepillán y Waclaw Szymanski	(2012)

N°	Revista	Título	Autores	Año
	de Etnomatemática			
5	*ReiDoCrea: Revista electrónica de investigación y docencia creativa*	Introduciendo los trabajos artesanales en la Educación Infantil: la taracea granadina como recurso etnomatemático	Nuria Boada Rafecas, Alicia Fernández-Oliveras y María Oliveras Contreras	(2014)
6	*Bolema*	Diseños Prehispánicos, Movimientos y Transformaciones en el Círculo y Formación Inicial de Profesores	Armando Aroca	(2015)
7	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Reintroducing Māori ethnomathematical activities into the classroom: traditional Māori spatial orientation concepts	Tony Trinick, Tamsin Meaney y Uenuku Fairhall	(2015a)
8	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Etnomatemáticas de signos culturales y su incidencia en la formación de maestros	María Elena Gavarrete y Veronica Albanese	(2015)
9	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Ethnomathematical research and drama in education techniques: developing a dialogue in a	Charoula Stathopoulou, Panagiota Kotarinou y Peter Appelbaum	(2015)

N°	Revista	Título	Autores	Año
		geometry class of 10th grade students		
10	*Journal of Scientific Research & Reports*	Effects of Ethnomathematics-based Instructional Approach on Primary School Pupils' Achievement in Geometry	Patrick Obere Abiam, Okechukwu S. Abonyi, J. O. Ugama y Gabriel Okafor	(2016)
11	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Didáctica de los sistemas de numeración de las lenguas indígenas: el diseño de una propuesta para escuelas primarias unidocentes	José Luis Cortina y Gerardo Crisanto Rojas	(2016)
12	*ETD- Educação Temática Digital*	Ethnomatematics three pedagogical proposals for basic education	Francisco de Assis Bandeira	(2017)
13	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Cultura Arica: Un caso para el estudio y educación de la geometría presente en textiles prehispánicos	Carolina Condori-Viza, Mónica Navarrete-Álvarez, Iván Aguirre- Cipe y Andrea Chamorro-Pérez	(2017)
14	*Revista Multimedia de Investigação em Educação*	La cestería como herramienta didáctica para la comprensión de conceptos geométricos	Lucinda Serra	(2016)

N°	Revista	Título	Autores	Año
15	*Rematec*	Etnomatemática no Garimpo: contribuições para o ensino de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas	Freudson Dantas de Lima y Francisco de Assis Bandeira	(2018)
16	*Revista Latinoamericana de Etnomatemática*	Exploração e problematização de simetrias em artefatos socioculturais para o uso no ensino fundamental	Jeová Pereira Martins e Iran Abreu Mendes	(2018)
17	*Jornada Pedagógica: Tic y Pedagogía*	La chakana como material didáctico para la aplicación de propiedades algebraicas en la resolución de operaciones con polinomios.	Jonnathan Fernando Domínguez Alvarracin y Diana Lucia Sanmartín Zhiña	(2019)

Capítulo 2.

Diseño de actividades matemáticas bajo un enfoque etnomatemático: una revisión

2.1. Introducción

El diseño de actividades matemáticas es una línea de investigación de la Educación Matemática de interés para profesores e investigadores (Castillo et al., 2022; Chamoso y Cáceres, 2019; García, 2019); en este sentido, existen diversas investigaciones y publicaciones internacionales al respecto, como: “Learning, Design, and Technology. An International Compendium of Theory, Research, Practice, and Policy” (Spector et al., 2023), “Toward a theoretical framework for task design in mathematics education” (Radmehr, 2023), “Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls” (Leung y Baccaglini-Frank, 2017) y “Task Desing In Mathematics Education: an ICMI study 22” (Watson & Ohtani, 2015), por mencionar algunas. Las actividades matemáticas o tareas son de suma importancia, ya que constituyen la base de la vida en el aula, siendo esenciales como las "cosas para hacer"; en este sentido, Schoenfeld (1992) menciona que una de las funciones principales de los profesores de matemáticas es diseñar tareas de aprendizaje que fomenten entre los estudiantes formas matemáticas de pensamiento. En particular, la etnomatemática le propone al profesor “nuevos retos al presentarle la dificultad de intentar transitar desde las prácticas culturales a la práctica pedagógica, representada en el diseño de actividades para el aula” (Blanco-Álvarez et al., 2017b, p. 578). Actividades que pueden ser clasificadas según las prácticas matemáticas de Bishop (Bishop, 1999) como contar, medir, diseñar, jugar, localizar y explicar.

El diseño de actividades matemáticas basadas en la Etnomatemática ha sido también un tema de investigación internacional (Albanese y Perales, 2014; Aroca, 2022; Blanco-Álvarez, 2016, 2024; Blanco-Álvarez y Vásquez Hernández, 2016; Chavarría Vásquez et al., 2017), todos interesados en dar respuesta a preguntas como: "¿Cómo diseñamos una clase de matemáticas que tenga en cuenta un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas? y ¿Qué matemáticas aprenden los niños en clases de matemáticas cuando creamos un ambiente de aprendizaje desde dicho enfoque?" (Aroca, 2022); otros autores se interesan en definir "parámetros de significación alrededor de la Etnomatemática para el diseño de futuro material didáctico con enfoque identitario" (Jiménez-Angulo et al., 2023), por otro lado, Blanco-Álvarez (2024) propone un instrumento con 27 indicadores que permite diseñar actividades o clasificarlas en tres niveles según el grado de articulación de la Etnomatemática con la matemática escolar. Dicho instrumento es una guía para el docente sobre los elementos que puede usar en sus diseños. Así mismo, el profesor Ubiratan D'Ambrosio (2014) presenta algunas ideas de elementos que se pueden utilizar en el diseño de tareas:

> La Etnomatemática propone una pedagogía viva, dinámica, para dar respuesta a nuevos estímulos ambientales, sociales, culturales y a nuevas necesidades. No sólo responde a las necesidades, es decir, la utilidad, pero igualmente importante es la respuesta a estímulos, que tiene como consecuencia la imaginación y la creatividad. Es por eso

> que la pedagogía de la Etnomatemática está muy cerca de la vida cotidiana, de juegos y trabajo, de literatura, de noticieros, de revistas y diarios, de radio y televisión, de películas, etc. (p. 107)

En la actualidad, la comunidad etnomatemática carece de un estudio que analice las actividades etnomatemáticas diseñadas y publicadas, lo que motivó a plantear: ¿en qué área de las matemáticas se inscriben las actividades?, ¿qué objetos matemáticos son estudiados?, ¿para qué grado o población están diseñadas las actividades?, ¿hay interacción de la comunidad con la escuela y viceversa?, ¿qué materiales se utilizaron? y ¿en qué país se diseñaron?

Así, el objetivo de este capítulo es proporcionar una visión panorámica de las características de los diseños de actividades matemáticas construidas desde una perspectiva etnomatemática y publicadas en revistas científicas entre los años 2000 y 2019.

2.2. Instrumento para la sistematización

Para organizar la información que se encontró en los artículos, se usó el instrumento que se relaciona en la Tabla 2. Este está dividido en tres partes: en la primera se mencionan los datos generales del artículo; en la segunda parte se contempla el contexto ofrecido por el artículo para la aplicación o diseño de la actividad y, finalmente, la tercera parte presenta las actividades.

Tabla 2. *Formato para la organización de las actividades encontradas*

Ítem	Descripción
Parte 1: Información general del artículo	
Título del artículo	Nombre completo del artículo que se va a sistematizar
Objetivo de la investigación	Objetivo general o específicos que se tuvieron en cuenta o que se verán reflejados en el artículo; se transcribe de manera textual tal como se presenta en el artículo, o se hará un cambio en el verbo para que adopte la estructura de objetivo si fuera necesario
País	Lugar donde se realizó la investigación
Autores	Nombres del autor(es) del artículo
Tomado de	Cita del artículo correspondiente de donde se extrajo la información
Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades	
Se presentan los elementos del artículo que ayudan a contextualizar el diseño y la aplicación de las actividades	
Parte 3: Actividades diseñadas	
Actividad 1	Se consigna el título de la actividad, si se menciona en el artículo
Área	Dependiendo del contenido abordado por la actividad, esta se clasifica en álgebra, geometría, aritmética o en el área que mejor se relacione
Grado	Grado de escolaridad o la edad si el artículo lo especifica
Objeto matemático estudiado	Teniendo en cuenta las actividades presentadas en el artículo se determina la temática que se trabaja
Objetivo de la actividad	Se escribe el objetivo de la actividad si el artículo lo presenta
Materiales	Se presentan los materiales utilizados
Consignas de la actividad	Se coloca de manera textual la actividad tal como se presenta en el artículo

A continuación, se presenta las 42 actividades encontradas, cabe mencionar que toda la información para este fin fue tomada de forma textual del artículo que se referencia.

2.2.1 Actividades de álgebra

2.2.1.1. Ejemplo 1 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo.

Título del artículo: La chakana como material didáctico para la aplicación de propiedades algebraicas en la resolución de operaciones con polinomios.

Objetivo de la investigación: Valorar el uso del material didáctico concreto para la enseñanza de la suma, resta y multiplicación de polinomios en los alumnos de 9 año de EIB.

País: Ecuador.

Autores: Jonnathan Fernando Domínguez Alvarracin y Diana Lucia Sanmartín Zhiña.

Tomado de: Domínguez et al. (2019).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades.

Situaciones didácticas. Dentro de las nuevas estrategias didácticas, planteadas en el campo de la matemática, se destaca la creación de situaciones didácticas en las cuales, los alumnos puedan desarrollar sus conocimientos de manera activa, mediante la interacción del docente y el estudiante; sobre el tema

Macías Sánchez (2016) una situación didáctica es aquella que se desarrolla en el contexto escolar, produce interacción entre el profesor y estudiantes, en torno a un saber que el alumno debe adquirir a través de situaciones diseñadas y desarrolladas con la intención de que se produzca un aprendizaje.

De manera similar, Sadovsky (2015) dice que el conocimiento es producto de situaciones particulares y saberes que deben organizarse y estructurarse de manera planificada, es decir, no se puede acceder al saber matemático, si no se dispone de medios didácticos que propicien la relación entre el conocimiento nuevo y el conocimiento existente del estudiante; el medio didáctico debe poseer intensiones didácticas suficiente para llevar al alumno a la consecución de los aprendizajes que el docente espera que obtenga. Estas concepciones están ligadas de manera específica entorno a que las interacciones dentro del aula se deben diseñar y desarrollar, para que ocurra el aprendizaje, sin embargo, uno de los autores desarrolla el concepto a partir de la importancia del medio didáctico y la intencionalidad educativa que se debe poseer para generar una abstracción matemática específica sobre una temática; además, este medio didáctico facilita la relación entre el conocimiento nuevo y el conocimiento existente. Esta situación particular propicia el aprendizaje significativo propuesto por Ausubel, quien menciona que las nuevas ideas y conceptos pueden aprenderse de manera significativa siempre y cuando otras ideas y conceptos estén disponibles en la mente del individuo.

En relación con lo planteado anteriormente, se puede inferir que para la producción de situaciones didácticas, es necesaria la interacción entre los factores que intervienen en el proceso de construcción de conocimientos (docente-alumno-medio-didáctico); dentro de dicho proceso, el docente debe proponer situaciones planificadas y organizadas que impliquen la utilización del medio didáctico en función de una intencionalidad educativa, lo cual llevará al estudiante al alcance un aprendizaje significativo dentro de la temática abordada. Para esta investigación se propone utilizar como medio didáctico, el material concreto, que promoverá intenciones educativas que generen la construcción de conocimientos sobre la temática de la suma y resta de polinomios.

Material concreto

Una concepción social muy arraigada en el pensamiento de las personas es que la matemática es una ciencia abstracta que únicamente se construye a través de actividades mentales dentro del pensamiento, no obstante, esta idea está lejos de reflejar la realidad de las matemáticas. La enseñanza moderna fomenta la importancia de la integración de materiales o recursos que impliquen la participación activa del estudiante; además, sugiere que estos materiales ayudan a dinamizar y homogenizar la enseñanza dentro de grupos heterogéneos, pues, se realizan pausas en donde el docente, en conjunto con sus alumnos, van despejando interrogantes a través de opiniones, preguntas y, dentro de estos espacios, los alumnos pueden ir recapitulando los conocimientos y avanzar a un ritmo de aprendizaje distinto, acorde a sus particularidades.

El impacto de la utilización de materiales manipulativos ha generado gran expectativa en el ámbito pedagógico, de aquí que la implementación de nuevas estrategias y metodologías activas resultan fundamentales para la comprensión del significado real de las matemáticas. Para Godino (2003) "los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real" (p. 127); por lo tanto, es importante que dentro del proceso enseñanza aprendizaje, los objetos físicos funcionen como medios de aprendizaje, de manera que se puedan generar ideas concretas, partiendo de lo abstracto de la teoría.

Trabajar con material concreto es de gran ayuda en el campo educativo, debido a que sirve como canal facilitador del proceso de enseñanza-aprendizaje y contribuye al desarrollo de destrezas de los estudiantes, por lo tanto, este tipo de recursos didácticos deben planearse, elaborarse y concretarse tomando en cuenta las características y necesidades educativas de los estudiantes, con el fin de alcanzar su objetivo. De acuerdo con esto, la Ley Orgánica de Educación Intercultural (Ministerio de Educación de Ecuador, 2015), en su artículo 2, señala que la actividad educativa concibe al "educando como el centro del proceso educativo, con una flexibilidad y propiedad de contenidos, procesos y metodologías que se adapte a sus necesidades y realidades fundamentales" (p. 11). Aspectos que son muy importantes para lograr un aprendizaje significativo y una comprensión de contenidos, teniendo en cuenta que, el material concreto que se empleará en este proyecto será elaborado tomando como pilar fundamental las necesidades y exigencias educativas de los niños.

En definitiva, estas normativas respaldan la elaboración de esta investigación con el propósito de mejorar la didáctica en el área de matemática, implementando nuevos recursos metodológicos que hagan que el aprendizaje de los niños sea más atractivo e interesante.

Operaciones con polinomios. En algebra se define al monomio como una expresión algebraica que contiene un término compuesto del coeficiente, una parte literal o variable y el exponente de la variable. Por otro lado, un polinomio se define como la suma o resta de un numero finito de términos o monomios. En el caso de un monomio, este puede ser un número o una variable (x, y, z, etc.) o puede ser el producto de un número y una variable ($2x$). En el caso de un polinomio, al ser una suma o resta de un número finito de monomios, se puede ejemplificar con $2x^2 + 3y + 4$ o $2x^2 * 3y + z - 4$.

Dentro del contexto de la educación ecuatoriana, las operaciones con polinomios son parte de los contenidos del bloque 1 "algebra y funciones", dispuestos en el currículo de los niveles de educación obligatoria del Ecuador. Cuando se trata de operaciones con polinomios, según Santolaya (2013), se hace referencia al algebra elemental, que comprende aspectos como las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números reales, números complejos, constantes y variables.

Dentro de las operaciones con polinomios que serán reflejadas en esta investigación, se encuentra la reducción de términos semejantes, que más que ser una operación como tal, es un proceso que desarrolla la suma y la resta, pero también se tiene la multiplicación de polinomios. Para desarrollar estos ejercicios de suma y resta de polinomios, los estudiantes deben desarrollar procesos como la identificación de términos o monomios semejantes, la agrupación y reducción de estos términos para la resolución de los ejercicios.

La chakana

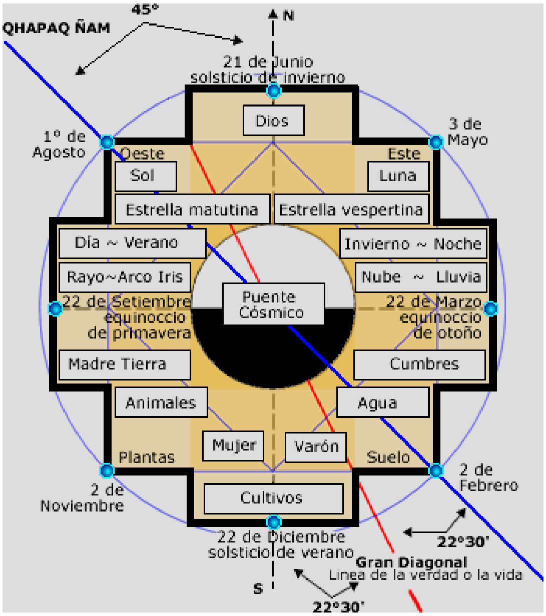
La chakana ha existido desde hace 4000 años según Carlos Milla, para los Incas era un símbolo importante, pues, por medio del mismo podían adivinar la rotación de la tierra, asimismo, miraban las estaciones del año que servía en las épocas de siembra, cosecha, lluvia, helada y sequía.

La chakana o cruz andina es conocida como un símbolo que predomina en las culturas de los Andes. Su forma es la de una cruz cuadrada y escalonada o geométrica con doce puntas, es un símbolo que representa sintéticamente el Universo, misma que encierra elementos contrapuestos que explican la cosmogonía del mundo andino. El origen de la palabra es en Kichwa que puede interpretarse como *chaka hanan* (puente hacia lo alto o considerada como una escalera hacia lo más elevado) (Timmer, 2003).

A partir de la Figura 1 se puede interpretar lo masculino, lo femenino, el cielo, la tierra, el sol, la luna, el norte, el sur, arriba, abajo, el tiempo, el espacio, el día y la noche. La chakana tiene la forma de una X, posee cuatro extremos que representan las cuatro direcciones, estaciones y la división del Tahuantinsuyo. Cada segmento entre cada una de las extremidades está formado por tres escalones, representando los tres mundos presentes en todas partes: el mundo de los dioses (el cóndor representa la divinidad), el mundo de los hombres (representado por el puma) y el mundo de los muertos (representado por la serpiente).

- La línea vertical expresa la oposición relacional de la correspondencia entre lo grande y lo pequeño.
- El *Hanak Pacha* (mundo de arriba, estrato superior).
- El espacio que está por debajo de la línea horizontal es el *Kay Pacha* (este mundo).
- El centro circular representa el círculo de la vida, la dualidad interna del Universo y el vacío, el no conocimiento, lo inimaginable, lo verdadero, lo sagrado.

Figura 1. *Chakana*



Fuente: Pueblos originarios (s.f.).

Todos los objetos en ella tienen razón de ser; ninguno está de más. La chakana, al ser un símbolo fundamental dentro de la cosmovisión andina, fue esencial para esta investigación debido a su utilidad para reunir los elementos necesarios (la forma y los frutos dependiendo de las estaciones) para vincularlos con las propiedades algebraicas en la resolución de operaciones con polinomios.

Marco metodológico

Un proceso de investigación permite la utilización de cualquier recurso válido para comprobar lo que se está investigando o para obtener conclusiones, por lo tanto, es responsabilidad del investigador darle el enfoque adecuado. Por esta razón, en la presente investigación se utiliza un enfoque cualitativo, donde el investigador usa la experiencia personal como un elemento importante. De su parte, Hernández Sampieri et al. (2014), explican que este enfoque "utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación" (p. 7).

También se considera pertinente un estudio que describa las cualidades de los fenómenos estudiados sin una medición numérica, ya que tras la ejecución de procesos investigativos se han recolectado datos que permiten un análisis interpretativo sobre el uso de material concreto para la enseñanza de la suma y resta de polinomios.

El alcance de la investigación es de tipo descriptivo, debido a que Hernández Sampieri et al. (2014) exponen que "con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (p. 92). El fenómeno estudiado dentro de esta investigación es el material concreto y su influencia dentro del proceso de aprendizaje, por ello, es importante describir las características que este proporciona a los estudiantes y cómo los apoya dentro de su proceso de aprendizaje, definiendo sus propiedades y características para analizarlo y tratar de definir sus particularidades e influencia.

Dentro del enfoque cualitativo se ha escogido el diseño de Investigación Acción como metodología, Hernández Sampieri et al. (2014) sugieren que la finalidad de la investigación-acción es comprender y resolver problemáticas específicas de una colectividad, vinculadas a un ambiente (grupo, programa, organización o comunidad). Por su parte, Kolb, Carr y Kemmis (como se citó en Latorre, 2004) definen este tipo de investigación como un proyecto de acción que presenta estrategias propuestas por el investigador, dependiendo de las necesidades ligadas a los problemas detectados, con la finalidad de resolver el problema detectado. Además, la unidad educativa participa activamente en el proceso investigativo, tanto en la identificación de problemas como en la planificación y toma de decisiones con respecto a las soluciones propuestas, y por supuesto en su ejecución.

La recogida de los datos se hizo a través de estrategias metodológicas y de investigación de campo, con los estudiantes de noveno grado de la Unidad Educativa Luis Cordero. Las técnicas utilizadas para la recolección de datos seleccionadas para este estudio fueron la observación participante y el grupo focal; y para ello, los instrumentos utilizados: diarios de campo, guía de observación y guía de moderador.

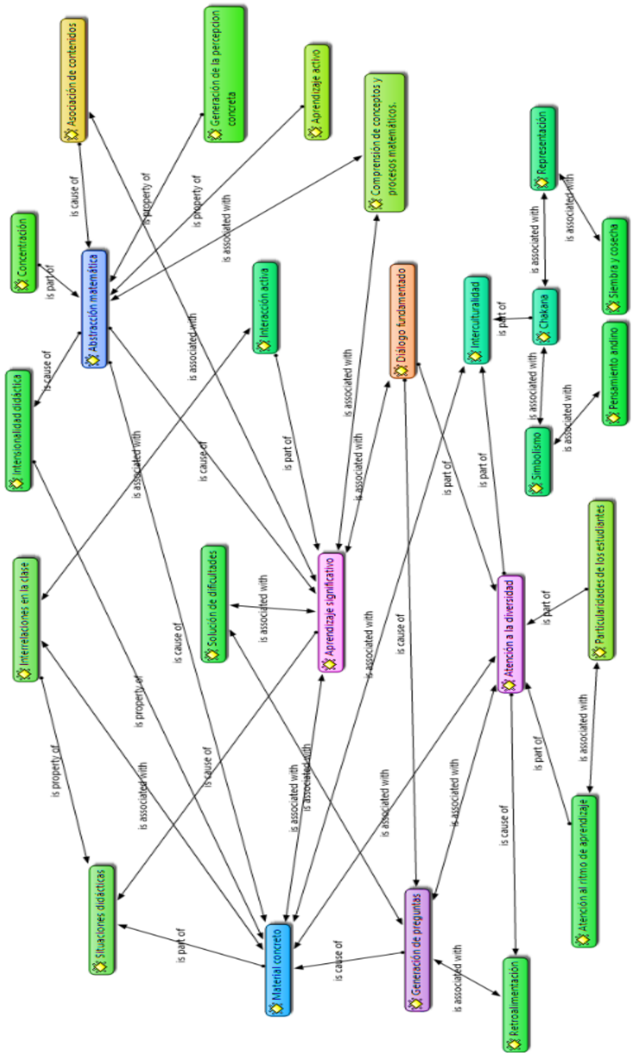
Análisis de datos

Mediante el uso del software ATLAS ti. se han analizado los datos obtenidos mediante los instrumentos de recolección de información, los cuales aportan datos que permiten el análisis de información, categorización y codificación, favoreciendo la búsqueda de datos significativos, los cuales se detallan a continuación.

A través de una red semántica se establecen las relaciones entre los códigos obtenidos de los instrumentos de investigación; estas relaciones han permitido representar los conceptos y sus interacciones de forma gráfica (ver Figura 2).

Las categorías principales dentro de este análisis están delimitadas por el material concreto, la abstracción matemática, el aprendizaje significativo, la atención a la diversidad y la interculturalidad. Dentro de cada una de estas categorías se encuentran códigos que tienen relación entre sí y aportan datos específicos que respaldan las ideas establecidas dentro de cada categoría; por lo tanto, estas interrelaciones determinan la estrecha relación que tiene el material concreto y cómo contribuye al aprendizaje de los alumnos y al desarrollo de competencias matemáticas.

Figura 2. *Red semántica*



Fuente: Domínguez et al. (2019, p. 10).

Al interpretar los datos provenientes de las categorías se puede mostrar que el material concreto es causa de situaciones didácticas de aprendizaje, produce abstracciones matemáticas, aporta al logro de aprendizaje significativo, asocia el conocimiento con elementos culturales y apoya a la diversidad. El material concreto contribuye a la metodología de situaciones didácticas de aprendizaje, en las cuales interviene como medio didáctico, generando situaciones de aprendizaje activas y contextualizadas. Al utilizar la chakana, se relacionan elementos del pensamiento andino, como la siembra, la cosecha y el simbolismo de la chakana, de manera que los estudiantes puedan aplicar este conocimiento en otras temáticas, como la suma y resta de polinomios. Al mismo tiempo, propicia la interacción entre el alumno, el docente y el material. Como resultado de su inclusión en el proceso de aprendizaje, los alumnos participan activamente en la construcción de sus conocimientos.

El material concreto está vinculado a la abstracción matemática, que establece relaciones entre contenidos preexistentes y la asociación de nuevos contenidos a través de percepciones visuales y táctiles en relación con conceptos y procesos matemáticos. Dentro de estos conceptos preexistentes, el simbolismo de la chakana y su representación por los pueblos andinos contribuyen a un aprendizaje centrado en los conocimientos culturales de los alumnos, permitiendo relacionarlo con contenidos matemáticos sobre polinomios; esto ayuda a la comprensión de propiedades matemáticas mediante un aprendizaje activo que implica la participación del estudiante, su concentración, motivación y estímulo para el aprendizaje.

En el análisis se evidencia que el material concreto respalda la diversidad dentro del aula, considerando las particularidades de los estudiantes y su entorno. Al incorporar elementos como un tablero en forma de chakana que representa el simbolismo de los pueblos andinos y fichas del tablero que representan productos agrícolas propios del contexto, se ilustra la siembra y la cosecha. Esto permite generar abstracciones a partir de ideas culturales que los alumnos poseen, en relación con sus conocimientos matemáticos previos, conjuntamente, apoya la retroalimentación constante de vacíos conceptuales, ritmos de aprendizaje distintos y la motivación hacia el desarrollo de actividades, así como la atención a capacidades diversas.

Estos procesos se encuentran implícitos a medida que el material didáctico fomenta espacios para preguntas que conducen al diálogo entre alumnos y docentes, con el objetivo de resolver dificultades mediante la retroalimentación de contenidos y la corrección de ideas erróneas. Esto se logra mediante la asociación de conceptos matemáticos por medio de la manipulación de objetos tangibles, como las unidades que representan a los coeficientes dentro de los polinomios, las cuales están delimitadas por una semilla particular que se relaciona con los signos matemáticos.

El material concreto contribuye al logro de un aprendizaje significativo, el cual, dentro del análisis, se logra mediante el fomento de diálogos fundamentados y constantes que retroalimentan las dificultades encontradas, ya sea respecto al contenido o a la asociación de los objetos manipulables con las ideas abstractas. Este proceso forma la construcción de nuevas ideas a partir de las previas, introduciendo nuevos conceptos y procesos matemáticos relacionados con la resolución de ejercicios con polinomios, facilitados a través del material manipulable.

Valoración de la propuesta

Tras la revisión del análisis de información, se puede inferir que la utilización de material concreto para enseñar operaciones de polinomios (suma y resta) favorece el desarrollo de competencias matemáticas y un aprendizaje significativo, así como también, contribuye a la inclusión de los alumnos en el tema, respaldando la diversidad de ritmos de aprendizaje y promoviendo la interculturalidad, lo que facilita un aprendizaje más equitativo y activo.

El material concreto produce abstracciones matemáticas, de manera que los alumnos logran desarrollar habilidades que les permiten enfrentar situaciones que implican el uso de conceptos y procedimientos sobre la resolución de las operaciones con polinomios, permitiendo la formación de ideas concretas, partiendo de lo abstracto de la teoría y logrando consolidar ideas complejas. En relación con la teoría, se evidencia que los materiales concretos contribuyen a la educación activa, donde el estudiante, mediante el uso de estos recursos, aprende nuevos temas y fortalece las ideas matemáticas existentes en su pensamiento.

Considerar el material concreto como medio didáctico genera situaciones de interacción entre el alumno, el profesor y el material, lo que permite que existan espacios de preguntas, reflexión y diálogo que ayudan a resolver dificultades durante el proceso de aprendizaje. Lo expuesto crea un ambiente participativo y motivador, donde los alumnos pueden plantear interrogantes e intentar resolverlas con la ayuda del docente, sus compañeros y el material, lo que permite percibir el aprendizaje matemático de forma diferente al mero procesamiento mental de pasos para realizar ejercicios. Más bien, se estimula y promueve un aprendizaje basado en situaciones de pensamiento en lugar de la memorización.

Este enfoque logra estudiantes competentes con habilidades necesarias para el desempeño dentro del tema de polinomios y se logra cuando la intencionalidad didáctica del material concreto tiene una finalidad específica en el aprendizaje, en lugar de ser concebida simplemente como una estrategia para captar la atención o motivación y, está enfocada en el desarrollo de objetivos específicos de aprendizaje, ayudando así a impulsar nuevas formas de aprendizaje diferentes al enfoque tradicional.

Parte 3: Actividades diseñadas

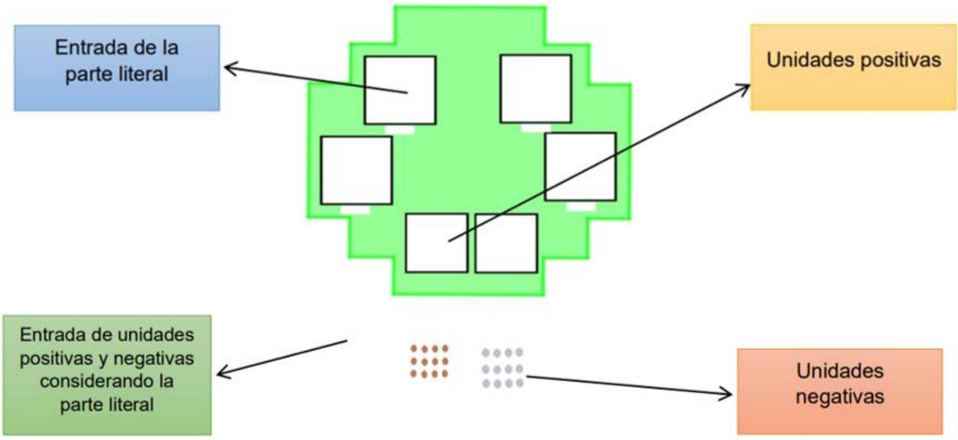
Actividad 1: Suma y resta de polinomios

- **Área:** Álgebra.
- **Grado:** 9° año de educación general básica.
- **Objeto matemático estudiado:** operaciones de polinomios.
- **Objetivo de la actividad:** Aplicar las propiedades algebraicas (adición y sustracción) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la sustracción de términos algebraicos.
- **Materiales:** la chakana.

Consignas de la actividad

En la Figura 3 se aprecia el tablero en forma de la chakana que se ha utilizado dentro de este proyecto, el cual contiene elementos esenciales y culturales como las casillas de entrada de la parte literal, los casilleros de remplazo de las unidades positivas y negativas y los casilleros que contienen unidades positivas y negativas (semillas).

Figura 3. *Tablero de suma y resta de polinomios*



Fuente: Domínguez et al. (2019).

Las operaciones como la suma y resta de polinomios, dentro de su proceso de resolución implica procesos como: la agrupación de términos acorde a su parte literal, aplicación de leyes de signos y reducción de términos semejantes. El tablero dentro de sus elementos integra unidades positivas representadas por el color rojo y unidades negativas por el color plomo;

aunque estos colores dependen de las semillas que se quiera utilizar y, a su vez, deben ser representativas para los colegiales.

La casilla de entrada de la parte literal es el espacio donde se nombra la parte literal correspondiente de la operación, mientras que el cuadro de entrada de las unidades positivas y negativas, previa consideración de la parte literal, es el lugar donde se remplazan las unidades teniendo en cuenta su signo.

Para ejemplificar el proceso su utilizará la suma de polinomios $(2x^2 - 3y^2 + 3xy + 2z) + (-3z + yx + 2y^2 - x^2)$, el primer paso a realizar dentro de esta operación es considerar el signo que define la operación del ejercicio, debido a que si el signo es positivo implica una suma y los signos del 2 polinomio se mantienen, no obstante, si el signo de la operación es negativo e implica una resta los signos del 2 polinomio cambian (ver Tabla 3).

Tabla 3. *Operaciones de polinomios*

Suma	**Resta**
$(2x^2 - 3y^2 + 3xy + 2z) +$ $(-3z - yx + 2y^2 - x^2)$	$(2x^2 - 3y^2 + 3xy + 2z) -$ $(-3z - yx + 2y^2 - x^2)$
El 2 polinomio se mantiene $(-3z - yx + 2y^2 - x^2)$	El 2 polinomio cambia $(+3z + yx - 2y^2 + x^2)$

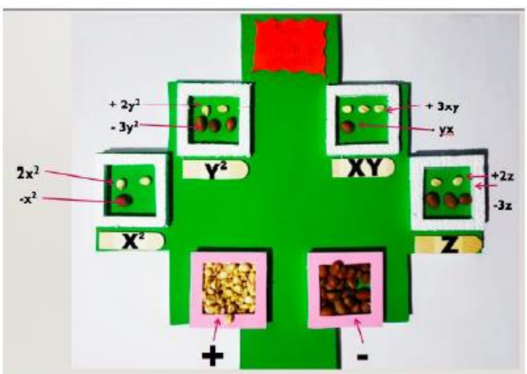
Fuente: Domínguez et al. (2019).

Luego de definir la operación a realizar, es necesario identificar la parte literal de todos los polinomios para posterior poder realizar la agrupación de los términos semejantes, considerando el ejemplo anterior.

En este caso $(2x^2 - 3y^2 + 3xy + 2z) + (-3z + yx + 2y^2 - x^2)$, la parte literal son las variables comunes de cada término del polinomio, las cuales se representan dentro del casillero de entrada, y las unidades positivas y negativas son las fichas de colores rojo positivo y azul negativo, que representan al monomio correspondiente (ver Figura 4).

Figura 4. *Identificación de parte literal y agrupación de términos semejantes*

X^2		Y^2		Xy		z	
$2x^2$	$-x^2$	$-3y^2$	$+2y^2$	+ 3xy	- yx	+2z	-3z
+ +	-	- - -	+ +	+ + +	-	+ +	- - -



Fuente: Domínguez et al. (2019).

Finalmente, se procede a la reducción de términos semejantes considerando que los signos iguales se suman y los signos diferentes se restan (ver Figura 5).

Luego de realizar este paso, se eliminan las unidades positivas con sus respectivas negativas y se obtenido la respuesta $(x^2 - y^2 + 2xy - z)$ (ver Figura 5).

Figura 5. *Reducción de términos semejantes*

$+2x^2$	$-x^2$	$-3y^2$	$+2y^2$	$+3xy$	$-yx$	$+2z$	$-3z$
$+x^2$		$-y^2$		$2xy$		$-z$	

Fuente: Domínguez et al. (2019).

2.2.2 Actividades de aritmética

2.2.2.1. Ejemplo 2 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo.

Título del artículo: Didáctica de los sistemas de numeración de las lenguas indígenas: el diseño de una propuesta para escuelas primarias unidocentes.

Objetivo de la investigación: desarrollar una didáctica para apoyar la adquisición y comprensión de un extenso cuerpo de estos saberes matemáticos ancestrales, contenidos en los sistemas de numeración que forman parte de las lenguas que hablan los pueblos originarios de México, especialmente, el desarrollo de una propuesta didáctica de la numeración *tu'un savi* (también llamado mixteco), el cual se presenta como caso paradigmático de la investigación realizada.

País: México.

Autores: José Luis Cortina y Gerardo Crisanto Rojas.

Tomado de: Cortina y Rojas (2016).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades.

Los pueblos originarios de México han librado una larga lucha de resistencia ante el acoso permanente que sufren sus territorios, lenguas, prácticas e identidades culturales. Como resultado de esta lucha, han logrado que el Estado mexicano promulgue leyes de protección y reconocimiento de sus derechos. En el caso específico de las lenguas originarias, la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos las reconoce como parte integrante del patrimonio cultural y lingüístico nacional. También, le atribuye al Estado la obligación de protegerlas y de promover su desarrollo y uso (artículo 2°, 2010). Al mismo tiempo, se reconoce a la escuela pública como el agente principal a través del cual el Estado debe cumplir con esta obligación (Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos, 2010).

Desafortunadamente, aún se está lejos de que los preceptos normativos plasmados en la Constitución y otras leyes tengan el impacto deseado en el quehacer cotidiano de los centros escolares que le brindan servicios educativos a las comunidades indígenas de México (Schmelkes, 2010). Ello se debe, en mucho, a que no se ha logrado tener una planta docente que cuente con los recursos necesarios para responder a lo que la legislación le impone al Estado en materia de educación intercultural bilingüe.

Como punto de aclaración, en el sistema educativo mexicano, se entiende por educación intercultural –oficialmente– a aquella que atiende a la diversidad cultural y lingüística, que promueve el respeto a las diferencias, y fortalece la identidad local, regional y nacional. Se entiende por educación bilingüe a aquella que favorece la adquisición, fortalecimiento, desarrollo y consolidación tanto de la lengua indígena como del español, y elimina la imposición de una lengua sobre otra (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1999).

El desarrollo de recursos pedagógicos para apoyar la tarea educativa en las escuelas indígenas, de manera que se promueva la interculturalidad y el bilingüismo aditivo (Lambert, 1975), ha estado durante varias décadas al centro del quehacer de los alumnos y académicos que forman parte de la Licenciatura en Educación Indígena en la Universidad Pedagógica Nacional de México. Los autores de este artículo hacen parte de un grupo que ha centrado su preocupación en los sistemas de numeración. Desde el año 2008, alumnos hablantes de no menos de 18 lenguas originarias han formado parte del equipo, cuya tarea central ha sido el desarrollo de recursos para apoyar la enseñanza de la numeración propia en las escuelas indígenas.

Nuestra preocupación por la numeración se deriva, primero, de reconocer a la lengua como un aspecto central de la cultura de un pueblo (Fishman, 1991; Jiang, 2000) y, segundo, de considerar al sistema de numeración como una parte integral de toda lengua (Campbell et al., 1986; Greenberg, 1990). Estos sistemas están morfológica y semánticamente interrelacionados con todos los otros aspectos de una lengua y reflejan múltiples aspectos de las prácticas culturales, actuales e históricas, de los pueblos que la hablan, particularmente, de aquellas en las que se cuantifica (Bishop, 1999).

Una característica distintiva de las lenguas mesoamericanas que se hablan en el territorio mexicano es que poseen sistemas de numeración complejos, lo que implica la presencia de bases aditivas y multiplicativas, además de la posibilidad de expresar cantidades relativamente grandes, en el rango de los cientos de miles e incluso más allá (Barriga Puente, 1998). Como se mencionó arriba, el presente artículo se centra en el diseño de una propuesta didáctica de la numeración de una de estas lenguas, el *tu'un savi*.

Esta lengua se habla en la Región Mixteca, la cual abarca tres Estados de la República Mexicana: Guerrero, Puebla y Oaxaca. A sus hablantes se les conoce como Mixtecos, aunque ellos prefieren la denominación de Ñuu Savi (pueblo de la lluvia y de la nube).

Aproximación al diseño didáctico en matemáticas

El modelo de diseño didáctico en matemáticas que se adopta en el proyecto, es el desarrollado por Paul Cobb y sus colegas (Cobb et al., 2008; Cobb y McClain, 2004). En términos teóricos, este modelo se fundamenta en la epistemología genética de Piaget, en el interaccionismo simbólico de Blumer, y en la teoría socio-histórica de la actividad (Bowers et al., 1999). En términos metodológicos, el modelo fue desarrollado en el marco de la investigación basada en el diseño, e implicó incorporar elementos del marco interpretativo del aprendizaje y la enseñanza matemática en el aula, desarrollado por Cobb y sus colegas (Cobb, 2000) a la Teoría de las Matemáticas Realistas (Gravemeijer, 1994).

Es importante destacar que el modelo de Cobb y sus colegas se diferencia de manera significativa de los modelos de diseño didáctico tradicionales, en los que se adoptan perspectivas positivistas. Entre estas diferencias está, en primer lugar, el no considerar al aprendizaje de las matemáticas en la escuela como el resultado de un proceso de transmisión o transposición de conocimientos, sino siempre de construcción social de éstos (Cobb et al., 2001). En el modelo de Cobb y sus colegas, no se asume la existencia de una relación causal entre eventos particulares de enseñanza y el aprendizaje. Es así que no se busca provocar formas particulares de aprendizaje matemático a través de la manipulación de variables didácticas; en lugar de ello, se considera que el aprendizaje matemático emerge de la participación de los estudiantes en actividades colectivas, las cuales son socialmente constituidas en la interacción y negociación de significados en los que participan todos los miembros de un aula. En estas interacciones y negociaciones, se reconoce que el maestro juega un papel preponderante.

Desde la perspectiva del modelo de Cobb y sus colegas, se busca desarrollar recursos que tengan como destinarios principales a los docentes. Es decir, que cumplan la función de apoyar a los maestros en la constitución en sus aulas de sistemas de actividades que fomenten el desarrollo de nociones matemáticas, en formas que pueden reconocerse como deseables (Cobb y Visnovska, 2008). Este es un punto, es importante destacar que el modelo de Cobb y sus colegas contrasta con los modelos de diseño didáctico tradicionales que procuran desarrollar recursos, de los que se espera que, siendo adecuadamente aplicados, impacten directa y favorablemente en el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Al centro del modelo de diseño didáctico de Cobb y sus colegas está la formulación de trayectorias o progresiones de aprendizajes esperados (Cobb et al., 2003). Se trata de desarrollos de naturaleza conceptual, en los que se especifican los objetivos claves en el aprendizaje de una idea o concepto matemático, la secuencia en la que se han de cumplir y los medios que pueden contribuir al logro de cada uno de ellos. Se espera que estos recursos apoyen a los docentes en evaluar, formativa y continuamente, el progreso de sus alumnos, así como en la toma de decisiones relativas a cómo ir interactuando con el grupo.

Un último punto a destacar del modelo de Cobb y sus colegas, es su orientación pragmática, la cual es consistente con la noción de bricolaje (Cobb et al., 2001; Gravemeijer, 1994). Al igual que en la Teoría de la Educación Matemática Realista, se considera que es válido recurrir a todo tipo de fuentes, tanto de naturaleza académica como didáctica, y retomar y adaptar flexiblemente desarrollos teóricos y metodológicos, siempre que ello contribuya a lograr los objetivos de aprendizaje de una propuesta didáctica.

Las fases en el diseño de una propuesta

Primera fase: el análisis del sistema de numeración

En consonancia con el modelo de Cobb y sus colegas, la primera fase del proceso seguido para diseñar una propuesta didáctica para enseñar un sistema de numeración oral, implica especificar la naturaleza conceptual de las ideas matemáticas a ser desarrolladas por los alumnos. Para ello, se ha encontrado muy útil el análisis de la morfología del sistema de numeración con fines didácticos.

La metodología que se utiliza en el análisis es una adaptación, libremente realizada por los investigadores, de la metodología originalmente desarrollada por el lingüista Joseph Greenberg (1990). Esta adaptación se hizo siguiendo la orientación pragmática del modelo de Cobb y sus colegas, y su espíritu bricolaje. Implica enfocar los análisis en identificar la lógica cuantitativa de los sistemas de numeración, así como aspectos que le podrían resultar difíciles de entender a un aprendiz.

En los análisis que realizamos, el primer paso consiste en escribir los números en la lengua hasta el 100, asociando cada uno con el numeral indo-arábigo que le corresponde. En la Tabla 4 se ejemplifica el caso del *tu'un savi* hasta el 40.

Tabla 4. *La numeración tu'un savi hasta el 40*

Tu'un Savi	Tu'un Savi
1. in	21. oko in
2. uu	1. oko uu
3. uni	2. oko uni
4. kumi	3. oko kumi
5. u'un	4. oko u'un
6. iñu	5. oko iñu
7. uja	6. oko uja
8. una	7. oko una
9. iín	8. oko iín
10. uxi	9. oko uxi
11. uxi in	10. oko uxi in
12. uxi uu	11. oko uxi uu
13. uxi uni	12. oko uxi uni
14. uxi kumi	13. oko uxi kumi
15. xe'o	14. oko xe'o
16. xe'o in	15. oko xe'o in
17. xe'o uu	16. oko xe'o uu
18. xe'o uni	17. oko xe'o uni

Tu'un Savi	Tu'un Savi
19. xe'o kumi	18. oko xe'o kumi
20. oko	19. uu xiko

Fuente: Cortina y Rojas (2016).

Como segundo paso, se utiliza el corpus generado para identificar cuáles números se componen de una única expresión (o lexema numérico) y cuáles de varias. En la Tabla 4 podemos ver que, en *tu'un savi*, los números hasta el 10 caen en el primer caso, son monolexémicos. También lo son el 15 (*xe'o*) y el 20 (*oko*). Todos los demás se construyen usando dos o más números monolexémicos. Por ejemplo, los números 11, 12, 13 y 14 se construyen combinando el número *uxi* (10) con, según el caso, in (1), *uu* (2), *uni* (3) y *kumi* (4). En el tercer paso se identifican las operaciones aritméticas presentes en las expresiones de los números en los que se usa más de un lexema numérico (ver Tabla 5). En el caso del *tu'un savi*, las únicas dos operaciones que se usan son la suma y la multiplicación.

Tabla 5. *Configuraciones aritméticas de los números tu'un savi hasta el 20*

Tu'un savi	**Configuración aritmética**	***Tu'un savi***	**Configuración aritmética**
1. in	Monolexémico	21. oko in	20+1
2. uu	Monolexémico	22. oko uu	20+2
3. uni	Monolexémico	23. oko uni	20+3
4. kumi	Monolexémico	24. oko kumi	20+4
5. u'un	Monolexémico	25. oko u'un	20+5
6. iñu	Monolexémico	26. oko iñu	20+6

Tu'un savi	Configuración aritmética	*Tu'un savi*	Configuración aritmética
7. uja	Monolexémico	27. oko uja	20+7
8. una	Monolexémico	28. oko una	20+8
9. iín	Monolexémico	29. oko iín	20+9
10. uxi	Monolexémico	30. oko uxi	20+10
11. uxi in	$10 + 1$	31. oko uxi in	20+10+1
12. uxi uu	10+2	32. oko uxi uu	20+10+2
13. uxi uni	10+3	33. oko uxi uni	20+10+3
14. uxi kumi	10+4	34. oko uxi kumi	20+10+4
15. xe'o	Monolexémico	35. oko xe'o	20+15
16. xe'o in	15+1	36. oko xe'o in	20+15+1
17. xe'o uu	15+2	37. oko xe'o uu	20+15+2
18. xe'o uni	15+3	38. oko xe'o uni	20+15+3
19. xe'o kumi	15+4	39. oko xe'o kumi	20+15+4
20. oko	Monolexémico	40. uu xiko	2×20

Fuente: Cortina y Rojas (2016).

El cuarto paso en el análisis consiste en identificar las bases aditivas y multiplicativas del sistema. En el caso del *tu'un savi*, se nota que tanto *uxi* (10) como *xe'o* (15) son bases aditivas, porque se les utiliza para construir los cuatro números que les siguen (ver Tabla 5). La primera base multiplicativa es *oko* (20), la cual, cuando es multiplicada, se modifica fonéticamente y se expresa como *xiko*. Vale la pena señalar aquí que, en el sistema se utilizan al menos otras dos bases para expresar números relativamente grandes, ambas correspondiendo a potencias de 20: *tuvi* (400 o 202) y *titni* (8000 o 203).

El quinto paso en el análisis consiste en identificar las irregularidades. Se trata de números que se expresan de una forma que no obedece a la lógica general del sistema. Por ejemplo, en español, las expresiones numéricas once, doce, trece, catorce y quince rompen con la lógica del sistema de varias maneras. Para empezar, en ellas, la operación de la suma no está marcada con el fonema "i", como sí lo está en las expresiones dieciséis, diecisiete y todas las que implican la suma de dos números hasta noventa y nueve. Además, en esas expresiones al número menor se le suma el mayor (ej., trece: $3 + 10$), cuando la regularidad en el sistema es a la inversa (ej. noventa y nueve: $90 + 9$). También vemos que, en esas expresiones varios de los números se expresan de manera anómala: uno es expresado como *on*, cuatro como *cator*, cinco como *quin*, y diez como *ce*. Contrastando con el español y muchas otras lenguas europeas, se ha encontrado que los sistemas de numeración de las lenguas originarias de México son muy regulares. En el caso del *tu'un savi* se nota que la única irregularidad que tiene, es la de expresar al 20 como *xiko*, en lugar de *oko*, cuando es multiplicado (*oko*: 20; *uu xiko*: 2×20; *uni xiko*: 3×20; *kumi xiko*: 4×20; *u'un xiko*: 5×20).

El sexto y último paso en el análisis de un sistema de numeración consiste en identificar otros aspectos que podrían ser relevantes en términos didácticos. Por ejemplo, hay sistemas en los que se puede reconocer que el nombre de algunos números está semánticamente vinculado con elementos importantes de la realidad cultural. Así, en las lenguas que se hablan en el estado mexicano de Chiapas, la expresión que se usa para 20 es igual o muy similar a la que se usa para referirse al cuerpo humano. En contraste, en el *tu'un savi* no se reconoce expresión numérica alguna de este tipo.

El análisis realizado al sistema de numeración del *tu'un savi* permite reconocer dos aspectos de gran relevancia en términos didácticos. El primero es que se usa a 20 y sus potencias como bases multiplicativas. El segundo es que se usan dos bases aditivas, adicionales a la base multiplicativa (*uxi*, 10; y *xe'o*, 15).

Estos aspectos son didácticamente importantes, ya que hacen que, por una parte, pueden llevar a que la numeración *tu'un savi* le parezca extraña y confusa a quien se ha acostumbrado a la lógica del sistema de numeración de una lengua dominante como el español, por lo que se vuelve necesario procurar que los aspectos mencionados sean reconocidos y entendidos por los estudiantes. Por otra parte, se hace necesario adecuar los desarrollos existentes en el campo de la didáctica de la numeración oral, ya que se han enfocado a sistemas de lenguas dominantes, incluyendo al inglés y al japonés (Baroody y Dowker, 2003), las cuales siguen una lógica cuantitativa distinta, generalmente decimal y sin que se haga uso de bases aditivas adicionales a la base multiplicativa.

Segunda fase: definición de los objetivos de aprendizaje centrales

En congruencia con el modelo de Cobb y sus colegas, la segunda fase en el proceso que se siguió para diseñar una propuesta didáctica, implica establecer los objetivos de aprendizaje centrales y su posible progresión. Para esto se recurre a la literatura existente.

El estudio de la adquisición y dominio de la numeración oral forma parte del campo de investigación del desarrollo temprano del pensamiento aritmético. En general, se reconoce que la numeración oral juega un papel central en el desarrollo del conteo (Sarama y Clements, 2009). Si la numeración implica el uso de un sistema con bases, este sistema se vuelve un referente central para la comprensión de nociones numéricas relativamente complejas (Nunes y Bryant, 1996).

Según Nunes (1996), la adquisición de la numeración oral implica dos fases. La primera consiste en memorizar las palabras numéricas en un orden fijo. La segunda, en superar la simple memorización de las etiquetas numéricas a través de comprender las formas en las que se generan. Esta autora aclara que, si bien la tarea de memorizar puede ser similar, la de entender cómo es que se generan las etiquetas numéricas no es igual para los niños hablantes de diferentes lenguas.

Con base en la literatura en el campo, es posible reconocer dos objetivos centrales de una didáctica de la numeración oral de una lengua. El primero de ellos implica apoyar la memorización de los nombres de los primeros números y, el segundo, la comprensión de la lógica semántico-matemática que rige al sistema de numeración, incluyendo sus irregularidades.

En relación con el primer objetivo, es importante señalar que la memorización de la parte inicial de la secuencia numérica implica mucho más que la capacidad de pronunciarla correctamente, en orden ascendente y a partir de número uno. Como lo señalan (Wright et al., 2006), cumplir con este objetivo de aprendizaje implica que los estudiantes puedan pronunciar la secuencia también en forma descendente, e incluso que puedan reconocer fácilmente el nombre del antecesor y del sucesor de cada número. Para el caso concreto de la propuesta didáctica del sistema de numeración *tu'un savi*, se especificó que cumplir con este primer objetivo de aprendizaje implicaría que los niños memorizaran y dominaran la secuencia del *in* (1) al *oko* (20).

Con base en el trabajo de Nunes (1996), el segundo objetivo de aprendizaje conlleva a que los alumnos entiendan algunas nociones numéricas relativamente complejas. Por una parte, para comprender la lógica semántico-matemática que rige a un sistema de numeración con bases, los estudiantes deben entender qué unidades con valores diferentes pueden combinarse por medio de la adición, lo que implica el concepto de composición aditiva del número. Por ejemplo, en el numeral *xe'o uu*, las expresiones *xe'o* (15) y *uu* (2) se combinan aditivamente para expresar la cardinalidad de 17 (ver Tabla 5).

Los estudiantes también deben entender que las unidades pueden tener valores diferentes, lo que implica el concepto de valor relativo (Nunes, 1996).

Por ejemplo, en *tu'un savi*, la expresión *uu* (2), al aparecer antes de un número mayor, como en la expresión *uu xiko* (40), representa el valor no de un sumando ($2 + 20$) sino de un multiplicador (2×20; ver Tabla 5).

Para el caso de la propuesta para la numeración *tu'un savi*, se especificó que cumplir con este segundo objetivo implicaría que los alumnos entendieran la función que realizan en el sistema el *uxi* (10) y el *xe'o* (15) como bases aditivas, y el *oko* (20) como base multiplicativa.

Un tercer objetivo de aprendizaje que definimos se deriva del campo de la educación bilingüe (Baker, 2006), donde se reconoce que los niños hablantes de dos lenguas tienen el potencial de aventajar a quienes son monolingües, al poder comparar diversos aspectos de dos sistemas –ya sean semánticos, morfológicos o fonéticos– y desarrollar una sensibilidad lingüística al hacerlo (Cummins, 1994). Siguiendo la orientación general del modelo de Paul Cobb y sus colegas para el diseño didáctico en matemáticas, esta perspectiva general de la educación bilingüe se retomará y adaptará para el caso de la numeración oral. Dominar el sistema de numeración de una lengua originaria debe incluir la comprensión de las similitudes y diferencias de éste con el sistema de la lengua dominante (el español), así como con el sistema de numeración indo-arábigo, cuyo uso en el mundo de hoy es prácticamente universal.

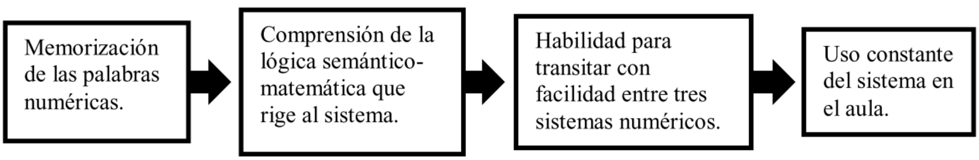
Es así que, se estableció que un tercer objetivo de aprendizaje implicaría que los estudiantes lograran desarrollar la habilidad de transitar con facilidad entre tres sistemas numéricos: el de la lengua original, el del español y el indo-arábigo. Para ello, tendrían que conocer y entender las diferencias estructurales básicas que existen entre los sistemas. Para el caso de la propuesta didáctica que está al centro de este artículo, la lengua original sería el *tu'un savi*, por supuesto.

En este punto es importante resaltar que el sistema de numeración indo-arábigo se gobierna por una lógica que es significativamente diferente tanto a del *tu'un savi* como a la del español y, de hecho, del sistema de numeración de cualquier lengua. Una de las diferencias está en el uso del cero. Mientras que la grafía "0" aparece con singular frecuencia en la serie de los números indo-arábigos, la expresión cero no se usa como lexema para formar el nombre de otros números, ni en español, ni en *tu'un savi*, ni –al parecer– en lengua alguna (Greenberg, 1990). En general, se puede afirmar que dominar el sistema de numeración indo-arábigo representa un reto importante para todos los niños, independiente de las características estructurales de la numeración de su lengua materna (Fuson et al., 1997).

El cuarto y último objetivo que especificamos no es propiamente de aprendizaje, pero sí se relaciona estrechamente con éste. También se deriva de la literatura sobre educación bilingüe, pero en específico de la que se enfoca en las minorías lingüísticas (Landry et al., 2007). En este cuerpo de literatura, se considera importante no solo que los niños aprendan sobre su lengua materna en la escuela, sino que también la utilicen de manera regular. Es así que, como parte de una didáctica de la numeración de las lenguas indígenas, se considera importante desarrollar recursos que apoyen a los maestros a promover el uso constante del sistema de numeración en sus aulas.

Para el caso concreto de la propuesta didáctica del sistema de numeración *tu'un savi*, se especificó que cumplir con este último implicaría diseñar actividades, de carácter lúdico y colectivo, que pudieran ser instrumentadas de manera regular en un aula. A la par, se consideró importante desarrollar recursos de naturaleza conceptual que le facilitaran a los maestros la identificación de objetivos curriculares, que pueden ser cubiertos a través del estudio y uso del sistema de numeración de una lengua originaria. En la Figura 6 se sintetiza la progresión de objetivos de aprendizaje que fue desarrollada.

Figura 6. *Progresión de objetivos para apoyar el aprendizaje del sistema de numeración de una lengua indígena*



Fuente: Cortina y Rojas (2016).

Tercera fase: tomar en cuenta el contexto institucional de las escuelas indígenas

La tercera fase en el proceso que se siguió para diseñar una propuesta didáctica es consistente con la consideración de Ávila (2014), quien señala la importancia de que, en el proceso de desarrollar recursos didácticos, sean tomadas en cuenta las condiciones contextuales en que se espera que sean utilizados. Según las estadísticas oficiales mexicanas, el promedio de maestros por escuela en el subsistema indígena fue de 3.6, en el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2015). Ello implica que la enorme mayoría de las escuelas sea de tipo multigrado; es decir, escuelas en las que alumnos que cursan varios grados escolares comparten un aula y tienen un mismo maestro.

En el caso específico de la región mixteca, donde se habla el *tu'un savi*, el promedio es de 2.9 maestros por escuela. En esta región abundan las instituciones escolares que operan incluso con un solo docente, quien además de hacerse cargo de la educación de veinte o más niños que se encuentran cursando hasta seis grados diferentes, tiene que cubrir las funciones burocráticas de un director de escuela (Weiss, 2000).

Para el desarrollo de una didáctica de los sistemas de numeración, la situación institucional de las escuelas indígenas representa un reto adicional. Se vuelve necesario desarrollar recursos que le permitan a un maestro constituir en su aula un sistema de actividades (Cobb y McClain, 2002) que implique la participación activa de estudiantes con edades, habilidades, y niveles de desarrollo intelectual significativamente diferentes.

Siguiendo el modelo de Cobb y sus colegas (Cobb et al., 2008; Cobb y McClain, 2004), inicialmente, se trató de afrontar este reto recurriendo a la literatura en el campo. Se descubrió que el contexto multigrado ha estado ausente de la investigación en didáctica de las matemáticas; sin embargo, se identificó algunos documentos publicados por la SEP con propuestas para trabajar en este tipo de aulas; uno de los cuales es específico al campo de las matemáticas (SEP, 2008). Estos documentos fueron elaborados, según se menciona en ellos mismos, a partir de identificar prácticas exitosas en escuelas multigrado.

La revisión de los documentos de la SEP, así como la experiencia de Gerardo Rojas, quien cuenta con 15 años de experiencia docente en aulas multigrado, sirvió de base para especificar un principio rector en el diseño de una propuesta didáctica para una escuela multigrado, así como varios puntos que se derivarían del mismo. Como principio rector, se considera que se debe de favorecer que, todos los niños en el aula se conciban como parte de una sola comunidad de aprendizaje, dedicada a un objetivo común, independiente del grado escolar que estén cursando.

Tomando como base este principio, y retomando diferentes sugerencias incluidas en los documentos de la SEP, se consideró los siguientes cuatro puntos para el diseño de una propuesta para ser usada en aulas multigrado:

1) Si bien es necesario agrupar a los niños de acuerdo a sus edades y niveles de desarrollo intelectual, el número de subgrupos debe de permanecer pequeño (no más de tres). Ello implicará una ventaja logística para el maestro, al reducir el número de subgrupos cuya actividad deberá coordinar. También ayudará a reducir la fragmentación de la clase y a promover el que los niños se reconozcan como miembros de una misma comunidad de aprendizaje.
2) Todos los subgrupos deben trabajar siempre el mismo tema, aunque en diferentes niveles de complejidad, independientemente de la edad

y grado que estén cursando los miembros de cada uno. Con ello se favorecerá que todos los niños se vean como participantes en una empresa común.

3) Se debe procurar que existan múltiples actividades en las que todos los estudiantes participen como un solo grupo.
4) Finalmente, se debe de procurar involucrar a los estudiantes más avanzados en tareas de enseñanza, tanto de sus pares como de los alumnos más jóvenes. El objetivo no solo es apoyar la labor del docente, sino también de fomentar la integración de todos los alumnos en una misma comunidad de aprendizaje.

Propuesta para la enseñanza de la numeración *tu'un savi*

La propuesta para la enseñanza de la numeración *tu'un savi* se encuentra contenida en el trabajo de titulación de Gerardo Rojas (2016). Su diseño tomó como referente a la escuela unidocente, considerando que así podría ser adaptada a cualquier aula de la región mixteca, aparte de los grados incluidos en ella.

Progresión de aprendizajes esperados

La propuesta se organiza en cuatro temas. Cada uno se centra en procurar uno de los cuatro objetivos de aprendizaje arriba descritos (ver Figura 6). Los temas son:

- **Tema I:** Memorización de la secuencia numérica *tu'un savi* hasta el *oko* (20).

- **Tema II:** Dominio de la lógica cuantitativa de la numeración *tu'un savi.*
- **Tema III:** Representación indo-arábiga y nombre en español de los números del *tu'un savi.*
- **Tema IV:** Uso constante de la numeración *tu'un savi.*

Es importante resaltar que, siguiendo el modelo de Cobb y sus colegas (Cobb et al., 2008; Cobb y McClain, 2004), se espera que la progresión de aprendizajes esperados sea el recurso principal que guíe el quehacer de un docente. De hecho, se espera que sirva de referente para que los maestros tomen decisiones sobre qué adaptaciones hacer a las actividades propuestas, así como cuándo procurar reforzar conocimientos, y cuándo avanzar hacia un nuevo tema. En relación a esto último, se espera que se avance hacia un nuevo tema solo cuando se ha cumplido con el objetivo principal de aprendizaje del tema anterior.

Por estar orientada hacia la escuela unidocente, la propuesta para la enseñanza de la numeración *tu'un savi* recomienda organizar a los alumnos en tres subgrupos, o ciclos: (I) primer y segundo grados, (II) tercer y cuarto grados, y (III) quinto y sexto grados. Los objetivos que se especifican para cada tema son, en algunos casos, los mismos para todos los alumnos. Por ejemplo, el objetivo de aprendizaje del Tema I es que los niños aprendan a pronunciar oralmente y con flexibilidad la secuencia numérica del *tu'un savi*, progresiva y regresivamente, del uno al veinte.

En otros casos, los objetivos varían para cada subgrupo. Así, para el Tema II, se especifican objetivos diferenciados, tomando en cuenta el nivel de desarrollo del pensamiento aritmético de los alumnos de diferentes edades:

- **Primer ciclo:** Que los niños dominen la lógica cuantitativa hasta *uu xiko* (40).
- **Segundo ciclo:** Que los niños dominen la lógica cuantitativa hasta *in tuvi* (400).
- **Tercer ciclo:** Que los niños dominen la lógica cuantitativa hasta *in titni* (8000).

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Va y viene.

- **Área:** Aritmética.
- **Grado:** multigrado (generalmente de 1 a 6 de primaria).
- **Objeto matemático estudiado:** los números naturales.
- **Objetivo de la actividad:** apoyar la memorización de la secuencia hasta el *u'un* (5).

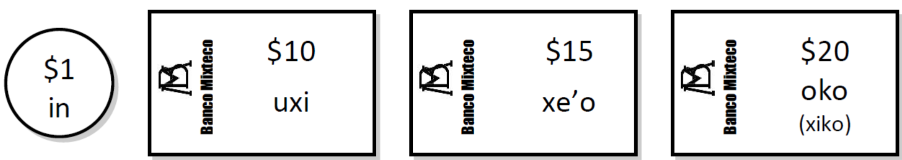
Consignas de la actividad

En una primera versión, el docente dice *in* (1) y un alumno debe responder *uu* (2), el docente dice entonces *uni* (3) y otro alumno responde *kumi* (4), finalmente, el docente dice *u'un* (5). En otra versión, el docente va señalando a diferentes niños para que vayan pronunciando cada número en la secuencia.

Actividad 2

- **Área:** Aritmética.
- **Objeto matemático estudiado:** operaciones con números naturales.
- **Grado:** multigrado (generalmente de 1 a 6 de primaria).
- **Objetivo de la actividad:** apoyar el reconocimiento y uso fácil de las bases aditivas y base multiplicativa de la numeración *tu'un savi*, para expresar cantidades.
- **Materiales:** Ver Figura 7.

Figura 7. *Dinerito ñuu savi*



Fuente: Cortina y Rojas (2016).

Consignas de la actividad

Se les pide a los niños que exploren diferentes formas en las que se puede reunir una cierta cantidad de dinero, sin excederse. Después se les pide a los niños que determinen y justifiquen cuál es la forma más práctica (o económica) de reunir la cantidad, procurando que reconozcan que ésta coincide con cómo se nombra al número en *tu'un savi*.

Actividad 3

- **Área:** Aritmética.

- **Grado:** multigrado (generalmente de 1 a 6 de primaria).
- **Objeto matemático estudiado:** los números naturales.
- **Objetivo de la actividad** buscar que los alumnos la vayan interiorizando, de manera que, eventualmente, puedan asociar con facilidad el nombre *tu'un savi* de un número y su representación indo arábiga sin tener que consultarla.
- **Materiales:** tableta numérica del *tu'un savi* (ver Tabla 6).

Tabla 6. *La tableta numérica del tu'un savi*

		In	**Uu**	**Uni**	**Kumi**	**U' un**	**Iñu**	**Uja**	**Una**	**Ín**	**Uxi**	**Uxi in**	**Uxi uu**	**Uxi uni**	**Uxi kumi**	**Xe' o**	**Xe' o in**	**Xe' o uu**	**Xe' o uni**	**Xe' o**
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Oko	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Uu xiko	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	52	51	52	53	54	55	56	57	58	59
Uni xiko	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
Kumi xiko	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
U'un xiko	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

Fuente: Cortina y Rojas (2016).

Consignas de la actividad

El nombre *tu'un savi* de un número indo arábigo se puede encontrar leyendo primero la expresión que se encuentra en la misma fila y después el que se encuentra en la misma columna: 75, *uni xiko xe'o*. De manera recíproca, la representación indo arábiga de un número del *tu'un savi* se puede conocer identificando la fila y la columna en la que se encuentran las expresiones que lo conforman.

2.2.2.2. Ejemplo 3 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo.

Título del artículo: Counting and Arithmetic of the Inca

Objetivo de la investigación: Give a brief introduction to the Inca civilization, we continue with the spoken numbers in Quechua, the Inca language used until now by some of the native people of the Andes, and end with theories concerning computations with the yupana. We illustrate the uses of the yupana with examples.

País: EE. UU.

Autores: Ximena Catepillán y Waclaw Szymanski.

Tomado de: Catepillán y Szymanski (2012).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

The Inca Civilization

The most influential pre-Columbian civilizations on the American continent were the Maya and the Inca. The Maya occupied the territory of what is today Southeastern Mexico, Belize, Guatemala, El Salvador and Honduras. The Inca territory covered what is today South Ecuador, Peru, parts of Bolivia and North and Central Chile. The civilization of the Maya, which has existed since about 1800 BC, was at its peak during the Classic Period between 250 and 800 AD. The Inca Empire existed only between ca. 1400 and 1533 AD. The Empire collapsed upon the arrival of the Spanish conquistadores led by Francisco Pizarro.

We do not have much information regarding the Inca from the Inca themselves because they did not develop a writing system. Most of the native information we have is preserved in the quipus which have not yet been completely deciphered. A quipu is a recording device consisting of colored cords containing information in the form of knots, see Figure 8. Fortunately, the Spanish chroniclers left a significant amount of records about the Inca. The Inca Empire truly was an Empire – it was ruled by one emperor or king. The word “Inca” means “king” in Quechua. Later, the word “Inca” was applied as the name of the entire Empire.

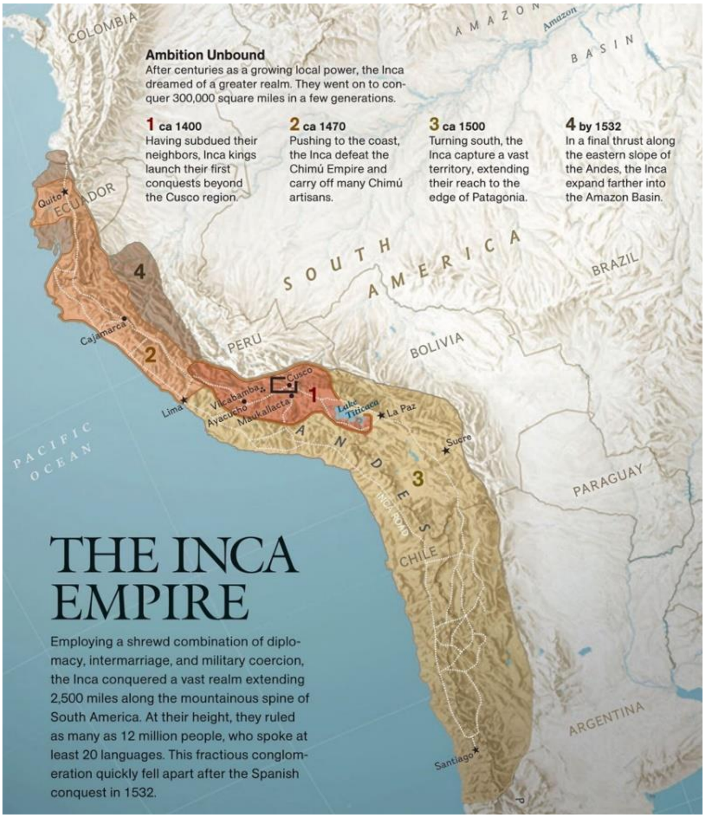
Below is the chronological Inca dynastic sequence:

- Manco Capac.
- Sinchi Roca.
- Lloque Yupanqui.
- Mayta Capac.
- Capac Yupanqui.
- Inca Roca.
- Yahuar Huacac.
- Viracocha Inca.

- Pachacuti Inca Yupanqui.
- Tupac Inca Yupanqui.
- Wayna Capac.
- Huascar and Atahualpa.

An excellent interactive map of the Inca Empire can be accessed in the National Geographic site in Figure 8.

Figure 8. *Interactive Map of the Inca Empire*



Source: Catepillán y Szymanski (2012, p. 51).

The capital of the Inca Empire was Cuzco, located at its geographic center in the high Andes at 11.600 feet altitude. To rule successfully over such vast territory of over 300.000 square miles, an efficient system of communication was necessary. This was one reason why an extensive road system of approximately 14.000 miles was developed. Also, a system of aqueducts was constructed. This proves that the Inca were advanced engineers. Engineering, in turn, requires computations – at least arithmetic.

The picture below – Figure 9 - was taken in 2008 during our trip to the Andes to learn about the Inca civilization, culture and mathematics.

Figure 9. *Inca girls at the plaza in Cuzco (Photo by Ximena Catepillán)*

Source: Catepillán y Szymanski (2012, p. 51).

Spoken Numbers in Quechua

To begin, we list the Quechua names of the basic numbers (Urton, 1997).

One	uj
Two	iskay
Three	kinsa
Four	tawa
Five	phishqa
Six	suqta
Seven	qanchis
Eight	pusaq
Nine	jisqon
Ten	chunka
One hundred	pachaq
One thousand	waranqa

To write numbers in which all digits except the last one is one or zero we use addition, as follows:

(a) When the last digit ends in a vowel we write the word *yuq* at the end, which indicates addition.

13 *chunka kinsayuq* 13 = 10 (*chunka*) + (*yuk*) 3 (*kinsa*)

114 *pachaq chunka tawayuq* 114 = 100 (*pachaq*) + (*yuk*) 10 (*chunka*) + (*yuk*) 4 (*tawa*)

1004 *waranqa tawayuq* 1004 = 1000 (*waranqa*) + (*yuk*) 4 (*tawa*)

1116 waranqa pachaq chunka suqtayuq

If a three or more-digit number ends with 10 (*chunka*), we write *chunkan* instead of *chunkayuk*.

1010 *waranqa chunkan*

1110 *waranqa pachaq chunkan*

(b) When the last digit ends in a consonant or semi-consonant, we write the word *niyuq*, which indicates addition.

18 *chunka pusaqniyuq* 18 = 10 (*chunka*) + (*niyuq*) 8 (*pusaq*)

(c) When the last digit in an addition is *pachaq*, we write *pachaqnin* instead of *pachaqniyuk*, for example,

1100 *waranqa pachaqnin*

To write multiples of powers of ten we simply write:

20 = 2 tens = *iskay chunka*

300 = 3 hundreds = *kinsa pachaq*

70000 = 7 tens of thousands = *qanchis chunka waranqa*

1 million = one thousand of thousands = *waranqa waranqa*

To write arbitrary numbers:

48 = 4 tens and eight = *tawa chunka pusaqniyuq* = (40) (*tawa chunka*) + (*niyuq*) 8 (*pusaq*)

3008 = 3 thousands and eight = *kinsa waranka pusaqniyuq* = (3000) (*kinsa waranka*) + (*niyuq*) 8 (*pusaq*)

4603 = 4 thousands 6 hundred and 3 = *tawa waranqa suqta pachaq kinsayuq* = 4000 (*tawa waranqa*) + (*yuq*) 600 (*suqta pachaq*) +(*yuq*) 3 (*kinsa*)

66000 = 66 thousands = *suqta chunka suqtayuk waranqa* = [60 (*suqta chunka*) +(*yuk*) 6 (*suqta*)] 1000 (*waranqa*)

Arithmetic – Yupana – Inca Abacus?

Yupana is a Quechua word for “herramienta para contar” (in 73panish), “tool for counting”. A picture of a Yupana can be seen in Figure 10. The artifact is a rectangular grid, usually on a piece of stone or wood, and a collection of corn kernels of different colors used to represent numbers on the grid. Corn was a fundamental staple for the Inca and it had many varieties of colors.

Figure 10. *Yupana*

Source: Catepillán y Szymanski (2012).

It is believed that Yupanas were used to make computations, the results of which were recorded on a quipu. The passage below from the book "Historia Natural Moral de las Indias" written by Father Jose de Acosta (de Acosta, 2002), describes the use of a yupana.

De Acosta, a Spanish priest who lived in Peru from 1571 to 1586, was one of the most accurate chroniclers of the sixteenth century.

> To see them use another type of quipu that employs grains of maize is a fascinating thing. For to make a very difficult calculation, to see how much each person must contribute, which an excellent accountant would have to do with pen and ink, these Indians, taking so many

> grains from that place and adding a certain number from this, and hesitating a hundred times, will take their grains and put one here, three there, and eight I don't know where; they will move one grain to another place, switch three from elsewhere, and their account comes out very accurately, without the slightest error; and they know much more clearly how to balance an account of what each one has to pay or give, than we could accomplish with pen and ink. (p. 344)

To reinforce the description of Acosta, we quote the following passage from Inca Garcilaso de la Vega (2004), who was the first Peruvian Inca/Spanish chronicler (1539 - 1616).

> De la Aritmética supieron mucho y por admirable manera, que por nudos dados en unos hilos de diversos colores daban cuenta de todo lo que en el reino del Inca había de tributos y contribuciones por cargo y descargo. Sumaban, restaban y multiplicaban por aquellos nudos, y, para saber lo que cabía a cada pueblo, hacían las particiones con granos de maíz y piedrezuelas, de manera que les salía cierta su cuenta. (p. 167)

> Of Arithmetic they knew a lot and in an admirable manner, since by using knots on different color threads they kept track of everything that in the kingdom of the Inca had to do with taxes and dues by adding and subtracting. They added, subtracted, and multiplied using knots to keep track of each town's dues, they did the

computations using kernels of corn and pebbles to obtain accurate results. (Translated by Ximena Catepillán).

Felipe Guamán Poma de Ayala was the author of Nueva Crónica y Buen Gobierno, (1936), in which we can find a legendary drawing, see Figure 11. The drawing depicts a Tawantin Suyu – an accountant in Quechua - who is holding a quipu and, in the lower left corner, the grid resembles a yupana with dots representing numerical information.

Figure 11. *Drawing by Guamán Poma de Ayala*

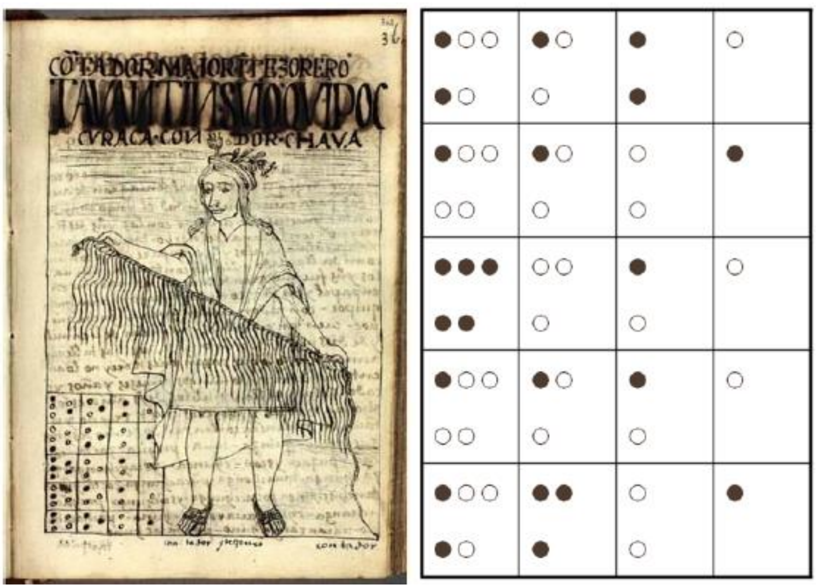
Fuente: Catepillán y Szymanski (2012).

The text on the picture translates as follows: Main Accountant and Treasurer, Tawantin Suyu khipuq kuraka, the authority in charge of the quipus of the Tawantinsuyu. For brevity, in what follows we will use the word “grid” for yupana and “dot” for a black dot representing a corn kernel. The empty circles represent places for dots. Let us have a look at the grid of Poma’s drawing. Henry Wassen (1931) gives the following interpretation of the following grid in Figure 12:

(a) Row values, from bottom to top, are successive powers of ten.

(b) Column values, from left to right, are the values 1, 5, 15, and 30.

Figure 12. *Yupana*



Source: Catepillán y Szymanski (2012).

The consecutive rows (from the bottom to the top) represent the following numbers:

Row 1: $2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 30 = 47$

Row 2: $(1 + 5 + 15) \times 10 = 210$

Row 3: $(5 + 15) \times 100 = 2000$

Row 4: $(1 + 5 + 30) \times 1000 = 36000$

Row 5: $(2 + 5 + 30) \times 10000 = 370000$

When we add all these numbers we get 408257.

A much more natural, purely decimal, explanation was proposed by George Gheverghese (1990).

Row values, from bottom to top are successive powers of ten. Column values, from left to right, have the value 1.

Therefore, Poma's drawing depicts now the number

$6 + 3 \times 10 + 6 \times 100 + 3 \times 1000 + 5 \times 10000 = 53636.$

Figure 13. *Gheverghese method*

Source: Catepillán y Szymanski (2012).

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Numbers in Quechua.

- **Área:** Aritmética.
- **Grado:** curso "Matemáticas en Culturas No-Europeas" para estudiantes de todas las áreas de concentración, excepto Matemáticas y Ciencia, ofrecido en la Universidad de Millersville en Pennsylvania.
- **Objeto matemático estudiado:** representación de números.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.

Consignas de la actividad

Write the following numbers in Quechua.

(a) 23.

(b) 124.

(c) 1704.

(d) 2222.

Actividad 2: numbers in Hindu-Arabic

- **Área:** aritmética.
- **Grado:** curso "Matemáticas en Culturas No-Europeas" para estudiantes de todas las áreas de concentración, excepto Matemáticas y Ciencia, ofrecido en la Universidad de Millersville en Pennsylvania.
- **Objeto matemático estudiado:** representación de números.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.

Consignas de la actividad

Write the following numbers in Hindu-Arabic.

(a) *kinsa pachaq chunka pusaqniyuq*.

(b) *tawa pachaq suqta chunka jisqoniyuq*.

(c) *kinsa chunka kinsayuk waranqa kinsa pachaq kinsa chunka kinsayuq*.

Actividad 3: Wassen's method

- **Área:** Aritmética.

- **Grado:** curso "Matemáticas en Culturas No-Europeas" para estudiantes de todas las áreas de concentración, excepto Matemáticas y Ciencia, ofrecido en la Universidad de Millersville en Pennsylvania.
- **Objeto matemático estudiado:** representación de números.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.

Consignas de la actividad

Write the beginning of Lloque Yupanqui's reign, 1260, using Wassen's method

Actividad 4: Gheverghese method.

- **Área:** Aritmética.
- **Grado:** curso "Matemáticas en Culturas No-Europeas" para estudiantes de todas las áreas de concentración, excepto Matemáticas y Ciencia, ofrecido en la Universidad de Millersville en Pennsylvania.
- **Objeto matemático estudiado:** representación de números.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.
- **Materiales:** Yupana.

Consignas de la actividad

Utilize a grid to write the year Pizarro conquered Cuzco, 1533, using the Gheverghese method.

We have $3 + 3 \times 10 + \ 5 \times 100 + 1 \times 1000 = 1533$ Figure 13 depicts one of the various answers.

2.2.3 Actividades de geometría

2.2.3.1. Ejemplo 4 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Uso de las ideas matemáticas y científicas de los Incas, en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría.

Objetivo de la investigación: Presentar una valoración de las ideas matemáticas que conocían los Incas, reflejado en sus diversas manifestaciones culturales como Arquitectura, Urbanismo, Cerámica, Orfebrería, Textilería, Agricultura, Técnicas de irrigación.

País: Perú.

Autores: Enrique Huapaya Gómez y César E. Salas Valverde.

Tomado de: Huapaya Gómez y Salas Valverde (2008).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Tabla 7. *Información cultural de los Incas*

Manifestaciones culturales	Conceptos geométricos	Aplicaciones
Arquitectura	▪ Paralelismo ▪ Perpendicularidad ▪ Reticulados	Usaron estas ideas para modelar sus palacios, templos, fortalezas, tambos y otros edificios (puertas, ventanas, hornacinas y paredes).

Manifestaciones culturales	**Conceptos geométricos**	**Aplicaciones**
Urbanismo	▪ Semejanzas ▪ Congruencias ▪ Proporcionalidad ▪ Escalas	Aplicaron estas nociones para diseñar el plano de sus ciudades y planificar su crecimiento ordenadamente.
Cerámica Orfebrería	▪ Cuerpos de revolución ▪ Sólidos geométricos y planos	En el modelado de sus ceramios (keros, huacos, aríbalos, vasos ceremoniales, platos, vasijas) usaron los cuerpos de revolución, conos truncados, cilindros.
Textilería	▪ Paralelismo-Perpendicularidad ▪ Simetrías ▪ Traslaciones ▪ Rotaciones ▪ Semejanza ▪ Proporcionalidad	Utilizaron estas nociones para el diseño de sus dibujos, estampados y grabados. De manera que el acabado sea estético, armónico y elegante.
Agricultura Técnicas de Irrigación	▪ Proporcionalidad ▪ Escalas ▪ Diseño de maquetas y modelos. Proyecciones	Los incas usaron figuras a escala tanto en 2D como en 3D para reproducir campos de cultivo, canales de irrigación, modelos a escala, etc.

Fuente: Gómez y Valverde (2008, pp. 6-7).

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** 1er año de educación secundaria.
- **Objeto matemático estudiado:** patrones, objetos o figuras geométricas.
- **Objetivo de la actividad:** reconocer qué patrones o formas geométricas usaban los incas en el diseño de sus mantos.
- **Materiales:** fotografías de la cultura Inca.

Consignas de la actividad

1. Los estudiantes deberán recolectar imágenes e información sobre las diversas manifestaciones culturales y tecnológicas incas, de modo que aprecien y reconozcan formas geométricas y/o conceptos matemáticos. De acuerdo a la siguiente matriz:

Manifestación cultural/tecnológica	**Inca concepto geométrico (matemático) asociado**

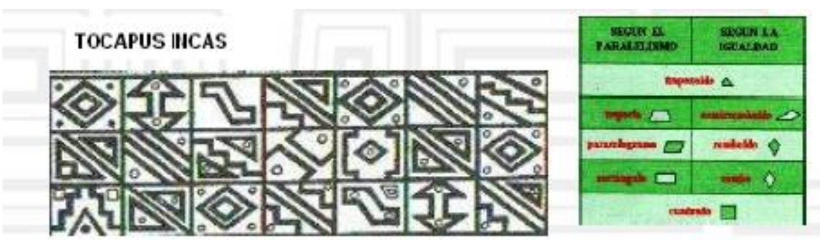
2. Se pedirá que los alumnos diseñen maquetas y otros modelos a escala de los ceramios, templos y palacios incas, bosquejen planos de las principales ciudadelas, así como grabados de sus mantos y tejidos (*tocapus*).

- Ello planteará interesantes desafíos a los estudiantes, como, por ejemplo: ampliación –reducción de figuras (noción intuitiva de proporcionalidad y semejanza), transformaciones del plano (simetrías, traslaciones y reflexiones).
- Resolverán ejercicios y problemas sobre: ampliación – reducción de figuras.
- Proporcionalidad y semejanza.
- Transformaciones del plano (simetrías, rotaciones, traslaciones y reflexiones). Usarán instrumentos como compás, transportador y escuadras.

3. Responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué objetos geométricos utilizaban en los dibujos de sus ceramios?
- ¿Qué conocimientos matemáticos (geométricos) emplearon en su arquitectura y urbanismo?
- ¿Qué patrones o formas geométricas usaban los incas en el diseño de sus mantos?


semirrecta $\overline{OA}$
A
lado $\overline{OA}$
semirrecta $\overline{OB}$
vértice O
lado $\overline{OB}$
B
PIEDRA DE LOS DOCE ÁNGULOS
CERÁMICA INCA
TEXTILERIA INCA
triángulo
3 lados
pentágono
5 lados
cuadrilátero
4 lados
hexágono
6 lados


TOCAPUS INCAS

2.2.3.2. Ejemplo 5 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo.

Título del artículo: Cultura Arica: Un caso para el estudio y educación de la geometría presente en textiles prehispánicos.

Objetivo de la investigación: revisar y analizar los elementos geométricos presentes en la composición y estructura de los diseños o iconografía de piezas textiles denominadas chuspas o bolsas rituales.

País: Chile.

Autores: Carolina Condori-Viza, Mónica Navarrete-Álvarez, Iván Aguirre- Cipe y Andrea Chamorro-Pérez.

Tomado de: Condori-Viza et al. (2017).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Análisis de muestras textiles

En esta investigación se contó con una muestra textil de 29 *chuspas*, las cuales están depositadas en el Museo Arqueológico de San Miguel de Azapa y provienen de los sitios arqueológicos PLM-3 y PML-4, ubicados en Playa Miller-Arica. A partir de este universo, se eligieron tres *chuspas* que, por presentar una gran complejidad iconográfica, resultan representativas del periodo y ejemplares en términos de su composición geométrica (ver Tabla 8). Desde el punto de vista antropológico y matemático, se realizaron dos análisis complementarios: uno iconográfico y otro geométrico. El primero, busca reconocer algunos diseños clasificados por Horta (2005) (ver Tabla 9). El segundo, realiza una especificación de los elementos geométricos que se pueden observar en la muestra (ver Tabla 8).

Tabla 8. *Piezas textiles para el análisis*

Textil	Observaciones
Pieza N° 1 Sitio PLM3. Tumba 7. Nº 94 	Esta pieza presenta en sus franjas laterales una misma serie de patrones con respecto a los iconos, a diferencia de la franja central que está compuesta de una serie de iconos diferente a las laterales. La configuración positivo y negativo se presenta tanto en las franjas laterales como en la central. La forma de la bolsa presenta una estructura trapezoidal. Longitudes: ancho 19,5cm y largo 17-19 cm
Pieza N° 2 Sitio PLM3. Tumba 55. Nº 732 	La franja central se presenta como eje simétrico. La estructura de la bolsa presenta solamente una clasificación iconográfica, en este caso, de composiciones geométricas. La forma de la bolsa presenta una estructura trapezoidal. Longitudes: ancho 23,7 cm y largo 18-20,6 cm.
Pieza N° 3 Sitio PLM3. Tumba 55. Nº 734 	Se percibe una iconografía distinta en ambas partes, frontal y trasera. Esta pieza es una de los ejemplares que presenta borlas. La forma de la bolsa presenta una estructura rectangular. Longitudes: ancho 21 cm y ancho 20,2 cm.

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

Resultados de análisis iconográfico y geométrico

Pieza Nº 1: Clasificación iconográfica: Figura geométrica independiente

Se verifica la existencia de dos ejes de simetría, uno horizontal y otro vertical (ver Figura 14). Los íconos centrales que componen la figura, el hexágono irregular superior, central (positivo y negativo) e inferior, presentan dos ejes de simetría respectivamente. Con respecto al hexágono irregular central compuesto por un positivo y negativo, al parecer se generaron por una homotecia.

Figura 14. *Izquierda, icono presente en el textil. Derecha, icono representado como dibujo*

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

Pieza Nº 2: Clasificación iconográfica: Figura de composiciones geométricas

Al enfocarse en la parte derecha de la Figura 15, se puede percibir que presenta dos ejes de simetría, uno horizontal y otro vertical. Se verifica una traslación con respecto a un vector en dirección SE, en el icono de triple "S" positivo, igualmente, con el negativo. Haciendo énfasis al textil completo, este presenta dos franjas anchas y una central, de las franjas anchas se puede verificar la existencia de una teselación irregular en cada una de estas. Considerando las figuras que componen la composición geométrica, se observa que se presentan en las esquinas, laterales e interiores, polígonos irregulares, ya sea de seis, siete y nueve lados. Ahora bien, en las figuras centrales se percibe la composición de un rombo, cuyos laterales están compuestos por cuatro romboides.

Figura 15. *Izquierda icono presente en el textil. Derecha icono representado como dibujo*

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

Pieza Nº 3: Clasificación iconográfica: Figura patrones geométricos

Para el caso de la parte derecha del icono de la Figura 16, se observa que las figuras aserradas en forma diagonal compuestas por cuadrados escalerados, presentan una simetría central con respecto al centro del rombo central. Ahora, considerando la figura total, puede ser seccionada en cuatro partes, que podrían asemejarse a los cuadrantes del plano cartesiano. Se verifica una traslación con respecto a un vector en dirección SO en el icono de "S" positivo, igualmente, con el negativo en sentido SE, el eje X corresponde a un eje de simetría horizontal que permite obtener los cuadrantes III y IV a partir de los cuadrantes I y II, sin considerar los colores.

Figura 16. *Izquierda icono presente en el textil. Derecha icono representado como dibujo*

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

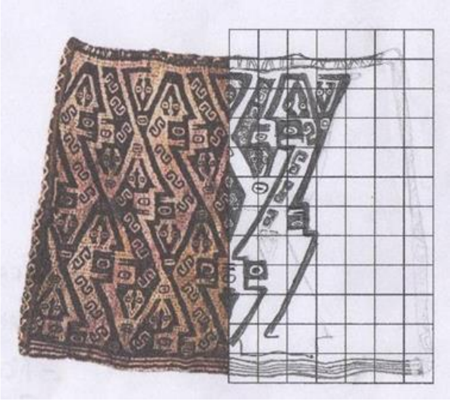
Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: La geometría en los textiles prehispánicos.

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** no especificado en el documento.

- **Objeto matemático estudiado:** transformaciones geométricas (simetrías, reflexiones y rotación).
- **Objetivo de la actividad:** Identificar la presencia matemática, en especial geométrica en los vestigios arqueológicos de nuestra región.
- **Materiales:** Fichas de trabajo (ver Figura 17) con fotografías de textiles de la cultura.

Figura 17. *Ejemplo de ficha de trabajo de textiles*



Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

Consignas de la actividad

1. Los estudiantes tienen que replicar un análisis en fichas de trabajo que muestre textiles similares correspondientes al periodo cultural que se está estudiando (ver Figura 18).

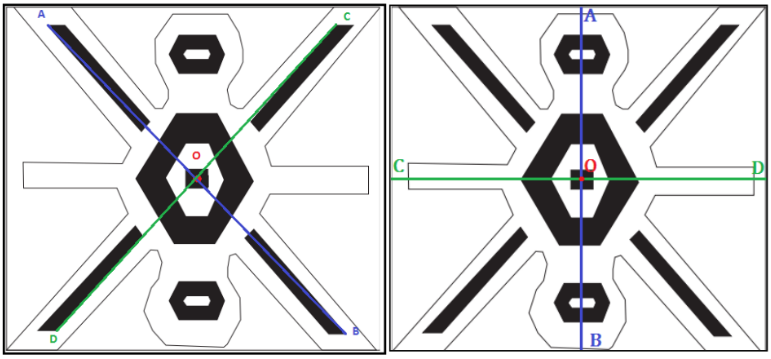
Figura 18. *Exposición del análisis antropológico y matemático*

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

2. Realizar las siguientes construcciones geométricas teniendo en cuenta los textiles.

Caso aplicación: Llámese O el punto de origen. Ubicar dentro del icono, el punto A, trazar un segmento $\overline{AO}$ cuya distancia es d, sobre la prolongación de $\overline{AO}$ trazamos una recta en la cual tiene que existir otro punto a la misma distancia d y, en este caso, se encuentra el punto B, que está a la misma distancia d de O. Por lo tanto, se puede decir que existe una simetría central cuyo origen es O, con respecto a los puntos A y B. Lo mismo para los puntos C y D respectivamente. Aditivo, también podemos observar simetría vertical y horizontal con respecto al origen O (ver Figura 19).

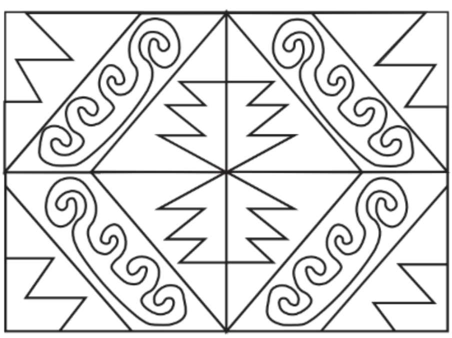
Figura 19. *Izquierda: Aplicación de simetría central. Derecha: aplicación simetría vertical y horizontal*



Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

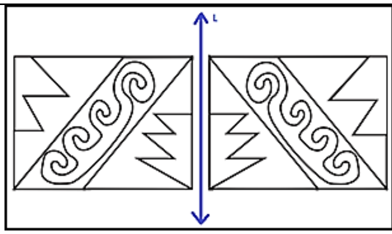
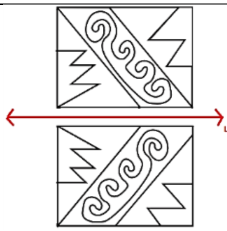
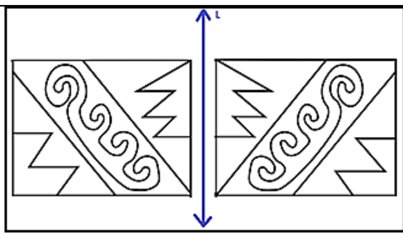
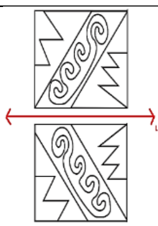
Caso aplicación: De la Figura 20, en la que se omite los colores, si se cuatrisecciona, se puede identificar diversas reflexiones que se realizan con respecto al eje de simetría horizontal y vertical, respectivamente. Esto se muestra en la Tabla 9, la cual identifica las reflexiones que se realizan con respecto a los ejes de simetría.

Figura 20. *Icono de figura de composiciones geométricas*



Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

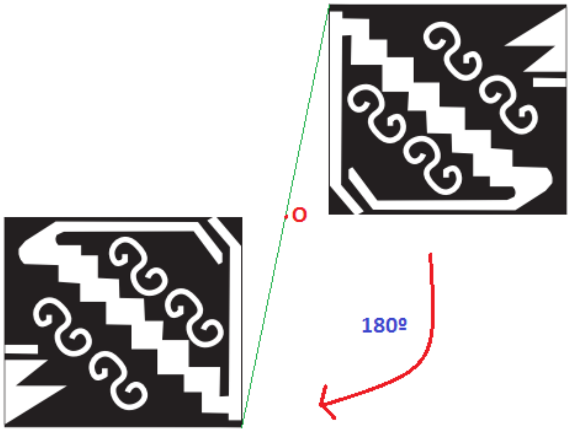
Tabla 9. *Representación de reflexiones con respecto a los ejes vertical y horizontal*

Icono	Descripción	Transformación isométrica	Eje de simetría
	Reflexión con respecto a la recta L en forma vertical.	Reflexión	Vertical
	Reflexión con respecto a la recta L en forma horizontal.	Reflexión	Horizontal
	Reflexión con respecto a la recta L en forma vertical.	Reflexión	Vertical
	Reflexión con respecto a la recta L en forma horizontal.		Horizontal

Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

Caso aplicación: Considerando el cuadrante I, si se realiza una rotación de 180º en sentido horario, se obtiene el cuadrante III; el mismo caso sucede con el cuadrante I sobre el III. (Ver Figura 21).

Figura 21. *Representación de una rotación de 180º*



Fuente: Condori-Viza et al. (2017).

2.2.3.3. Ejemplo 6 de sistematización.

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Diseños Prehispánicos, Movimientos y Transformaciones en el Círculo y Formación Inicial de Profesores.

Objetivo de la investigación: plantear una propuesta metodológica de adaptación de diseños prehispánicos en un ambiente escolar, indistintamente del contexto regional de los diseños, así como también la presentación de una nueva propuesta de trabajo en regiones circulares de los movimientos, la homotecia y los frisos, diferente a la presentada en los libros de textos escolares.

País: Colombia.

Autores: Armando Aroca.

Tomado de: Aroca (2015).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Las culturas Pastos o Quillacingas y la lógica de diseño en los Platos o Copas

Las culturas prehispánicas de los Pastos y los Quillacingas son reconocidas como las culturas de Nariño. Según Santacruz (2009), habitaron la franja andina de lo que, actualmente, es el departamento de Nariño, al sur de Colombia y la provincia del Carchi, al norte de Ecuador. Estas culturas se caracterizaron, entre otros aspectos, por su gran desarrollo pictográfico en las superficies cóncavas de los platos o copas ceremoniales o de uso doméstico que fueron hechos en arcilla. Las muestras que se analizaron fueron tomadas del Museo de Arqueología de la Universidad del Cauca y su Ceramoteca. Al mismo tiempo, se consideraron algunas imágenes del libro *El Arte de la Tierra – Nariño* del Fondo de Promoción de la Cultura (1992).

La lógica de diseño en dichos objetos se expresa en cuatro momentos: la delimitación de la superficie puede ser toda la superficie cóncava del recipiente o aquella que es delimitada por las franjas de separación. Las formas, son las figuras que se pintan: triángulo y círculos, figuras irregulares que podrían ser zoomorfas o antropomorfas, etc. Las configuraciones son los movimientos que se hacen con las formas, como giros, reflexión cóncava, entre otros. El diseño es el resultado de una configuración o la combinación de varias de ellas (ver Figura 22).

Figura 22. *Visualización de las dimensiones secuenciales de la lógica de diseño. Pastos y Quillacingas*

Fuente: Aroca (2015).

Las franjas de separación (FS), son los trazos que se pintan en el sentido del giro, 1) circulares, 2) en diagonal o 3) perpendicularmente a él, esto se hace con el propósito de delimitar la superficie cóncava y tener mayor control sobre ella para darles paso a las formas, a la configuración y al diseño. Los platos A, B y C de la Figura 23, muestran lo anterior.

Figura 23. *Los tres tipos de franjas de separación en la superficie cóncava de los platos*

A. FS circulares o en el sentido del giro   B. FS perpendicular al giro   C. FS en diagonal al giro

Fuente: Aroca (2015).

Tipología

Da la impresión que los diseños responden a una tipología. Ver Tabla 10.

Tabla 10. *Tipología de la configuración en los diseños*

<table>
<tr><th colspan="2">Tipología</th><th>Característica</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tipo I</td><td>Diseños que solo involucran figuras zoomorfas, antropomorfas o abstracciones de objetos reales o imaginarios</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tipo II</td><td>Diseños que involucran la intención de mostrar solo movimiento circular</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tipo III</td><td>Diseños que involucran rotaciones perpendiculares y traslación circular</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo IV</td><td>Tipo IV-1</td><td>Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación continua en la banda cóncava)</td></tr>
<tr><td>Tipo IV-2</td><td>Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación discontinua en la banda cóncava)</td></tr>
</table>

Tipología		Característica
Tipo V	Tipo V-1	Diseño con los opuestos directamente. Flecos
	Tipo V-2	Reflexión cóncava rotada
Tipo VI		Con formas que se contraen sucesivamente.
Tipo VII		Diseños que se combinan entre los Tipos

Fuente: Aroca (2015).

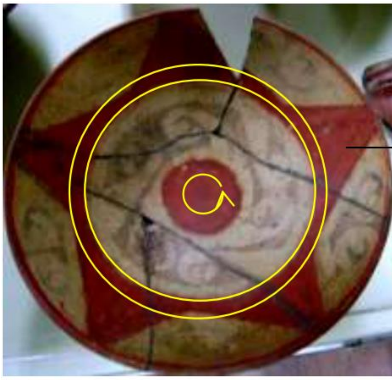
Esta tipología, descrita en la Tabla 10, se muestra a continuación. Figura 24 hasta la 31.

Figura 24. *Tipo I. Diseños que solo involucran figuras zoomorfas, antropomorfas o abstracciones de objetos reales o imaginarios*

Fuente: Arocan (2015).

Además de la inclusión de una franja de separación circular o en el sentido del giro; en la Figura 25 todas las formas pintadas son impares y, por ende, no hay una relación uno-uno con algún opuesto para establecer una reflexión cóncava.

Figura 25. *Tipo II. Diseños que involucran la intención de mostrar solo movimiento circular*

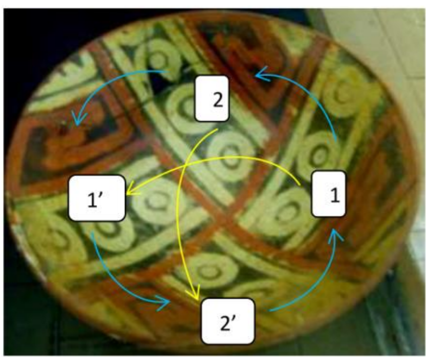


La franja de separación circular o en el sentido del movimiento, es un indicador de que la intención del pintor es mostrar movimiento circular pleno de las formas.

Fuente: Aroca (2015).

Al analizar la Figura 26, se encuentra una diferencia significativa entre la tipología III y IV, pues en el diseño de dicha figura era claro que el pintor hizo primero los sectores [1] y [2] o [1’] y [2’] o [1] y [2’] o [1’] y [2].

Figura 26. *Tipo III. Diseños que involucran rotaciones de 90° y traslación circular*



Fuente: Aroca (2015).

Si se parte de la primera dupla, entre otras posibles secuencias de desarrollo del diseño, y suponiendo que primero se hizo el sector [1], entonces, el artesano giró este sector para obtener a [2] y luego haría la reflexión cóncava, de cada uno de los dos sectores en los respectivos [1'] y [2']. Para el siguiente tipo, hay dos clases de movimientos, uno donde el patrón figural hace el movimiento con trazos contiguos o comunes; y el otro donde se hace de manera discontinua. El primer caso lo muestra la Figura 27a y el segundo la Figura 27b.

Figura 27. *Diseños que solo implican movimientos circulares*

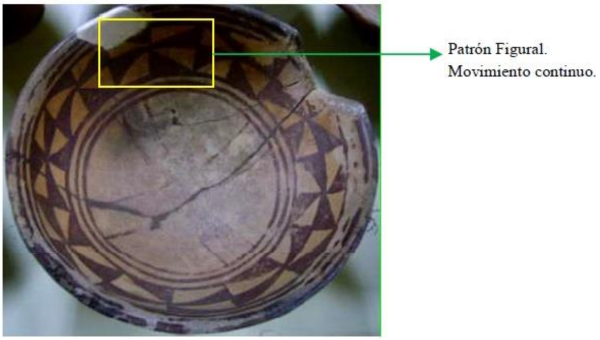


Figura 27a. Tipo IV-1. Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación continua

Fuente: Aroca (2015).

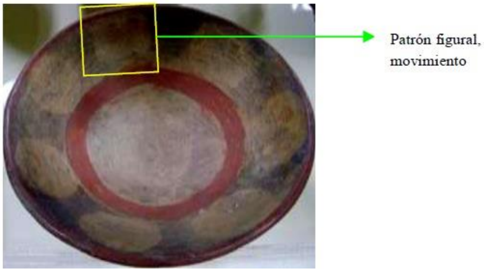


Figura 27b. Tipo IV-2. Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación discontinua en la banda cóncava).
Fuente: Aroca (2015).

El segundo caso es cuando el patrón figural no tiene trazos contiguos en común.

Para el Tipo V, los diseños se realizan con los opuestos. Reflexión cóncava directa o rotada. En este tipo de diseños se encuentran al parecer dos clases, una que toma la misma posición del lado opuesto. Como se muestra en la Figura 28.

Figura 28. *Tipo V-1. Diseño con los opuestos directamente*

Fuente: Aroca (2015).

Dicho diseño tiene opuestos directos, porque no se ve la intención de mostrar la sensación de movimiento circular, sino la de una reflexión cóncava. El otro caso, es donde el opuesto es diseñado, aparentemente, a partir de un movimiento circular.

Figura 29. *Tipo V-2. Reflexión cóncava rotada*

Fuente: Aroca (2015).

Este Tipo V–2, es una de las combinaciones más complejas, porque el pintor partió solo en dos la superficie cóncava de la copa y, por lo tanto, su intención no era mostrar movimiento. Como se puede notar, el color rojo se aplicó al final, incluso eclipsando algunas formas. En este caso, el rojo tomó el papel de forma-ornamental.

Figura 30. *Tipo VI. Con formas que se contraen sucesivamente*

Fuente: Aroca (2015).

La Figura 30, muestra un círculo vicioso en cuanto a la contracción sucesiva de una forma (zoomorfa); este tipo de figura se podría considerar como aquella que carece de regularidad, pues no es muy común encontrarlo, sin embargo, el aporte pedagógico que tiene es interesante y valdría la pena auscultarlo más.

Figura 31. *Tipo VII. Diseños que combinan los tipos*

Fuente: Aroca (2015).

En la parte central del plato a la izquierda de la Figura 31, hay una configuración cuyo movimiento no es circular, a diferencia del que se observa cerca del labio del recipiente. En el plato a la derecha de la misma figura, en el centro hay una forma zoomorfa y alrededor se encuentran otras formas con movimiento circular, lo que evidencia una combinación de los tipos descritos.

La diferencia entre los diseños artísticos y los complejos en configuración, y el paso a lo escolar

Contrario a lo que se puede pensar, los diseños más complejos en configuración no siempre son los de mayor valor artístico, pues las formas y configuración involucradas pueden llegar a ser pocas. Comparando el plato de las arañas y el que le sigue en descenso (ver Figura 32), el primero, tiene franjas de separación que se van duplicando, en una sucesión de 1-2-4 franjas y las franjas de 4 son cruzadas continuamente en la dirección del giro por dos franjas oblicuas más. Pero la única forma empleada es zoomorfa, una araña, la cual implica mucho trabajo y cuidado para su reproducción, la configuración está basada en giros, que son tres en total. Una araña que gira sobre su propio eje (el centro de vasija), luego se cuadriplica la araña y estas, a su vez, se duplican para conformar ocho arañas. Todas muestran la sensación de movimiento girando en sentido de las manecillas del reloj. En consecuencia, entre mayor sea la repetición de formas, más belleza se le confiere al diseño, pero no tanto complejidad a la configuración. Después de analizar los diseños ¿qué podríamos hacer con ellos?, ¿solo apreciar su valor artístico – geométrico y su valor cultural? La Figura 32 muestra una alternativa que consiste en trasladar estos diseños al plano y explorar el potencial que tendrían al crear un nuevo entorno de configuración.

Figura 32. *El paso de diseños prehispánicos cóncavos al plano*

Fuente: Aroca (2015).

Parte 3: Actividades diseñadas

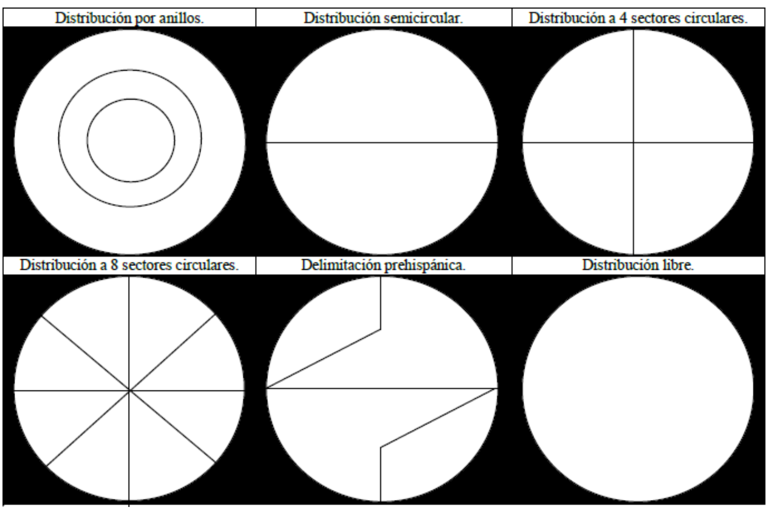
Actividad 1: Movimientos en el plano, homotecias y frisos.

- **Área:** Geometría.

- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.
- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** repasar de los movimientos en el plano, homotecias y los siete frisos.
- **Materiales:** colores, lápiz, papel, instrumentos geométricos, plato de poliestireno expandido.

Se decidió, trabajar varias configuraciones, teniendo presente que lo importante es delimitar internamente el círculo para generar la simetría en el diseño. Fue así como se plantearon las siguientes delimitaciones que muestra la Figura 33.

Figura 33. *Delimitaciones o franjas de separación establecidas en clases*



Fuente: Aroca (2015).

Consignas de la actividad

Determinar qué conceptos de la geometría escolar podrían tener cierta similitud con los conceptos que los pastos y quillacingas desarrollaron en sus diseños, teniendo en cuenta el tema de las similitudes que se plantea Bishop (1999).

Actividad 2: El poste.

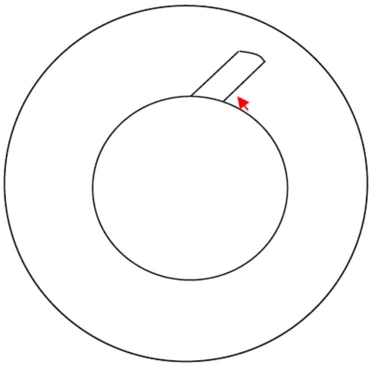
- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.
- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** definir qué procesos de transformación o movimientos se desarrollarían más y qué materiales y técnicas se emplearían en el salón de clases.

Consignas de la actividad

Hacer dos circunferencias concéntricas de radios distintos y que ocupen la mayor cantidad posible de la hoja (hojas tamaño oficio u A4).

1. Sobre la curva de la segunda circunferencia se debe hacer el poste, como se muestra en la Figura 34.

Figura 34. *Descripción de la actividad 1. El poste*



Fuente: Aroca (2015).

2. Trasladar el poste sobre la circunferencia interna bajo unas condiciones.

- Que los movimientos fuesen isométricos.

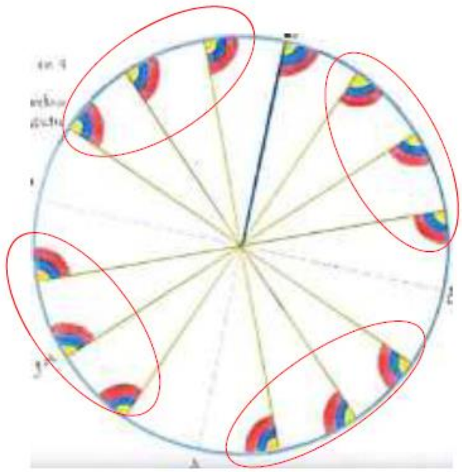
Actividad 3: El Banderín

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.
- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** que los estudiantes mediante métodos propios realicen distribuciones simétricas.

Consignas de la actividad

Se debe hacer un radio y una banderita al final, luego se debe reproducir 13 veces la misma acción y quedarán simétricamente distribuidas.

Figura 35. *Ejemplo de la actividad a desarrollar*



Fuente: Aroca (2015).

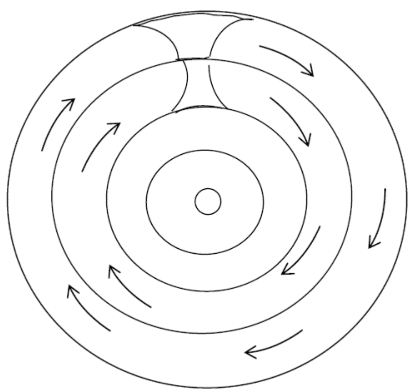
Actividad 4: La Tanga

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.
- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** hacer adaptaciones del friso de las traslaciones y la homotecia.

Consignas de la actividad

Se pidió que se hiciera la reproducción de una Tanga en el anillo externo y luego se repitió este proceso en los anillos interiores, con la condición de que la Tanga se invirtiera en cada anillo y se mantuviera el mismo número de reproducciones.

Figura 36. *La actividad de la Tanga. Adaptación del Frisos de las Traslaciones y Homotecias*



Fuente: Aroca (2015).

Actividad 5: Delimitación prehispánica, adaptación del diseño Tipo V-2

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** usar los conceptos de movimiento, homotecia o frisos.

Consignas de la actividad

Se debe hacer un diseño en el sector 1 y reproducirlo en 1’, lo mismo era para 2 en 2’. Pero se debe adaptar algún movimiento, homotecia o frisos en los sectores iniciales, 1 y 2.

Figura 37. *Delimitación prehispánica. Presentación y desarrollo en clases*

Fuente: Aroca (2015).

Actividad 6: La Pizza

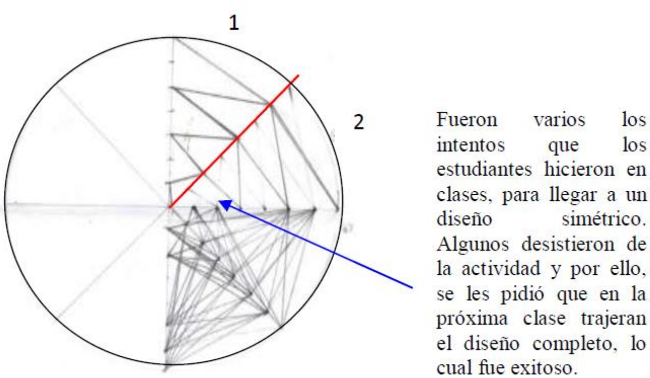
- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** ver qué sucedería cuando el eje de reflexión no fuera ni horizontal ni vertical, sino oblicuo y usar la homotecia.

Consignas de la actividad

Los estudiantes deben realizar los trazos que se muestran en el sector 1 y que los reflejarán en el sector 2, tomando como referencia el radio que había entre ellos, ver Figura 38.

Figura 38. *Un diseño en clases*



Fuente: Aroca (2015).

Actividad 7: La tarea en el plato de poliestireno expandido o de icopor

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

- **Objeto matemático estudiado:** movimientos y transformaciones en el círculo.
- **Objetivo de la actividad:** poner en práctica todas las actividades realizadas anteriormente para que queden claros los conceptos adquiridos.

Consignas de la actividad

En un plato de poliestireno que tiene un diámetro de 26 cm y una altura de 4 cm, se debe hacer el mejor diseño, poniendo en práctica todas las actividades anteriores.

Figura 39. *Algunos diseños en el plato de icopor*

Fuente: Aroca (2015).

2.2.3.4. Ejemplo 7 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Introduciendo los trabajos artesanales en la educación infantil: la taracea granadina como recurso etnomatemático.

Objetivo de la investigación: trabajar las matemáticas desde una perspectiva más cercana a la infancia y facilitar un aprendizaje basado en el constructivismo.

País: España.

Autores: Nuria Boada Rafecas, Alicia Fernández-Oliveras y María Luisa Oliveras Contreras.

Tomado de: Boada Rafecas et al. (2014).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Diseñando un microproyecto

El diseño de un microproyecto para el segundo ciclo de educación infantil requiere un proceso que consta de varias fases. La primera es seleccionar un objeto de estudio interesante y con potencial de conocimientos variados. El objeto de estudio elegido se encuentra dentro de un campo artesanal y es la taracea. En este sentido, se presenta el estudio de la taracea como un "arte popular" de la cultura Andaluza, como una técnica específica con un gran significado cultural.

Para la recolección de información y datos entorno a esta artesanía, las técnicas utilizadas fueron: la observación directa y una entrevista no estructurada a un artesano de la taracea, en la que se ha recopilado información acerca del proceso de producción del objeto, su historia y la evolución de esta técnica. Posteriormente, se ha realizado un análisis documental teórico para descubrir el mundo de la taracea, la relación con aquellos aspectos matemáticos, según el amplio concepto de la Etnomatemática, de donde se desprenden los conceptos que se exponen a continuación.

Concepto de taracea

La taracea constituye una parte fundamental y determinante del acervo patrimonial y cultural de esta región. Esta técnica empezó a realizarse en los pueblos árabes, pero con la llegada del Islam a Oriente, la taracea se llenó de simbolismo y belleza. Un arte introducido por los árabes en España que enseguida se asocia al monumento más emblemático de esta región: La Alhambra.

En la mayoría de los casos se realiza de forma manual e individual. La combinación de distintos tipos y tonos de madera y el conjunto de elementos combinados reflejan el estilo y respeto por la autenticidad de la obra. Debe respetarse siempre el diseño geométrico, pero la forma de colocar las piezas es particular del artesano, por lo que su originalidad siempre estará en el diseño. Aunque la creatividad y originalidad del artesano existe, está limitada; creemos que se ha convertido en hábito, al haberse estandarizado, ya que los aspectos matemáticos que se utilizan son básicamente los giros, la simetría y las traslaciones, para la construcción de estrellas y grecas.

Su técnica consiste en la incrustación. La variedad de colores y el tipo de material utilizado provoca un efecto de contraste entre unas piezas y otras que dan como resultado la taracea. Para su elaboración, el material empleado corresponde a distintos tipos de madera como: olivo, ébano, limoncillo o coral y, en algunas piezas, se incrusta algo de metal como bronce o plata. La parte en donde se encuentran las formas geométricas tan idénticas como las estrellas, es lograda encolando varillas de diversos materiales como hueso, madera y metal, de dentro hacia fuera. Estas varillas tienen forma de rombos, cuadrados o rectángulos en su sección transversal. Una vez terminado el bloque, unido por varias varillas y pegado con cola, se corta en rodajas como si fuera un 'salchichón'; cada 'rodaja' es denominada estrella.

Este arte se mantiene fiel a sus orígenes, los materiales y sus diseños son los mismos que se empleaban en los siglos *XIV* y *XV*, solo su acabado admite innovaciones. Antiguamente, todas las piezas se terminaban a mano con laca, pero en la actualidad, las piezas de uso como mesas, bandejas, etc., se finalizan con poliuretano.

Según el Diccionario de la Lengua Española (Real Academia Española [RAE], 2014), taracea es un vocablo de origen árabe que significa "embutido hecho con pedazos de madera en sus colores naturales, o de madera teñida, concha nácar y otras materias", sin embargo, la palabra más conocida para esta técnica es una de origen francés, "marquetería".

Concepto de artesanía

Para abordar el concepto de artesanía, nos centraremos en una definición de Fernández (2003), que engloba a otros tipos de artesanías (como las folklóricas, tradicionales, etnográficas, etc.) y que tiene en cuenta la realidad de la misma en la actualidad:

Es una actividad productiva y creativa de carácter manual y plástico, con inspiración tradicional; implica la confección y planificación en serie, dando lugar a objetos o piezas que cumplen una función práctica, decorativa o simbólica. Esta actividad se lleva a cabo en un taller, ya sea doméstico o profesional, de dimensiones reducidas, sin recurrir a procesos tercerizados. Se emplean tanto técnicas manuales como no manuales en la producción. La cantidad producida es limitada y se destina a un mercado reducido, que puede incluir ferias o ventas comerciales, pero siempre dirigido por el artesano. El concepto de artesanía lleva intrínseco un valor económico, social y cultural debido a la importancia de dónde está hecho, quién lo ha hecho y como lo ha hecho (ver Tabla 11).

Tabla 11. *Valores intrínsecos de la artesanía*

Económico	Actividad económica generadora de riqueza
Social	Desarrollo de la economía local
Cultural	Tradición productiva y artística

Fuente: Boada Rafecas et al. (2014, p. 237).

A lo largo del tiempo, este concepto ha adoptado diferentes definiciones. Su definición actual es bastante heterogénea y polémica en función de su perspectiva:

- Tecnológica. Su definición es de carácter fundamentalmente manual y con cierto sentido artístico.
- Antropológica. La tradición es la que otorga a estos productos una función dentro de la comunidad; desde esta perspectiva, se puede entender como artesanía cualquier actividad, ya sea remunerada o no,

que no haya sido afectada por los principios de especialización, división y mecanización del trabajo.

- Cultural. El concepto artesanía se funde con el concepto de "arte popular", entendido como aquel conjunto de actividades productoras, de carácter manual, realizado por un solo individuo o una unidad familiar, trasmitidas de padres a hijos y cuyos productos, generalmente, de carácter anónimo, están destinados a la cobertura de necesidades concretas.

Justificación

La recopilación de información sobre la taracea y su posterior análisis ha permitido adquirir un conocimiento más cercano del perfil matemático inherente a esta artesanía, así como comprender cómo el proceso de producir un objeto mediante la taracea puede ser efectivo en un aula de educación infantil a través de una adaptación escolar; por lo tanto, la decisión de trabajar la taracea en un aula de 5 años se ha tomado teniendo en cuenta las características cognitivas de los niños.

La introducción de actividades basadas en esta artesanía hace posible plantear cuestiones matemáticas de aquellas cosas que nos rodean en nuestro entorno físico más cercano; permite crear una relación entre la experiencia de los alumnos y el conocimiento matemático. No obstante, reúne una variedad de contenidos y posibilidades didácticas que se pueden relacionar entre sí. El aprendizaje que supone la simulación de ser un artesano, va desde la adquisición de conceptos geométricos, topológicos (plano-espacio), coordinación óculomanual y psicomotriz, hasta el desarrollo de la creatividad, por lo que no se aparta de los contenidos curriculares. Asimismo, existe una analogía entre los artesanos y los niños, ya que el pensamiento del artesano tiene cierta semejanza con el de los niños. La taracea está muy cercana al mundo del niño, atañe al arte y a la belleza, a la parte estética de la cultura.

Existen otros aspectos que demuestran la validez de trabajar esta artesanía en el segundo ciclo de educación infantil, más concretamente en 5 años. El pensamiento y la práctica de las matemáticas están en el uso cotidiano de todos, pero no siempre somos capaces de reconocerlas fuera del contexto escolar, de ahí la importancia de trabajarlas en contextos de la vida cotidiana, para acercarse de una forma más amena y creativa a la pluralidad de las matemáticas.

Como refleja Alsina (2011):

> Un enfoque globalizado de la Educación Matemática en las primeras edades y el uso de contextos de la vida cotidiana para aprender matemáticas -o cualquier otro tipo de contexto de aprendizaje- no contribuyen por ellos mismos al desarrollo de la competencia matemática, sino que ello depende de cómo los profesionales planteamos y gestionamos las actividades. (p. 218)

Por otro lado, otro aspecto a considerar es que la taracea cumple una secuencia didáctica constructivista, de acción-reflexión y representación. El niño desarrolla la acción mental a través de la observación, manipulación y experimentación del objeto, este conocimiento físico se conectará, posteriormente, con la reflexión, donde el niño toma las decisiones, pensando lo que quiere hacer. Y finalmente, representa el objeto, para explicar y simbolizar su pensamiento. A modo de síntesis, se trata de una secuencia donde el niño observa y hace, piensa y comunica.

De esta forma, se pretende crear un entorno de aprendizaje basado en una artesanía típica de esta región como es la taracea.

Programación

Este microproyecto está diseñado para niños del segundo ciclo de Educación Infantil, concretamente para la edad de 5-6 años. En este apartado se analiza el proceso de producción del objeto de estudio y se delimitan los pasos a seguir. Para ello, se hace necesario realizar de un modo más exhaustivo la secuencia de las tareas de esta actividad artesanal, es decir, un análisis de todo lo que conlleva el proceso físico de realizar un lapicero de taracea, con la idea de determinar las habilidades matemáticas aplicadas, sensoriales y motoras necesarias para simular la actividad del artesano.

Objetivos

Objetivos generales:

- Conocer, a través de las matemáticas, una tradición del arte popular de la cultura Andaluza como es la taracea.
- Comprender el proceso de elaboración de un producto artesanal.

Objetivos específicos:

- Reconocer las distintas formas geométricas.
- Realizar seriaciones.
- Desarrollar la psicomotricidad fina.
- Reconocer los movimientos en el plano: simetría y giros (con las estrellas) y traslaciones (con las grecas), así como las formas planas y tridimensionales.
- Desarrollar la creatividad.
- Reflexionar y argumentar el proceso que se está realizando.
- Ampliar el vocabulario en torno a la artesanía de la taracea.
- Experimentar la representación y expresión artística mediante el empleo de diversas técnicas.
- Conocer las propiedades topológicas.

Contenidos

- Reconocimiento de las formas geométricas: cuadrado, triángulo, rombo y rectángulo.
- Realización de seriaciones con los rotuladores de colores.
- Utilización de la lengua oral para argumentar el proceso que se está llevando a cabo en la elaboración del objeto.
- Ampliación del vocabulario en torno a la taracea. Glosario de términos que aparecen: grecas, estrellas, taracea, tipos de madera como el olivo, ébano, el limoncillo o la madera de coral.

- Identificación de las formas planas y tridimensionales en los elementos del entorno.
- Expresión plástica a través de la armonización de colores. Colores básicos: rojo, verde, blanco, junto con colores oscuros como el marrón o el negro.
- Reconocer las propiedades topológicas: dentro, fuera.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Asamblea y motivación

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** segundo ciclo de Educación Infantil.
- **Objeto matemático estudiado:** figuras geométricas.
- **Objetivo de la actividad:** familiarizarse con el entorno de la artesanía, no solo como un medio para aprender matemáticas, sino como un instrumento para acercarse a la labor del artesano y poner en marcha todas sus capacidades.

Consignas de la actividad

El maestro introduce el tema mediante un cuento, imágenes audiovisuales o mostrando algún objeto de taracea, luego se facilita un debate y se solicita a los alumnos que traigan información adicional; para ello, será necesario realizar una búsqueda en la biblioteca de la clase y en sus hogares. Una vez que se ha compartido la información en el aula, se organizará una visita a un taller de taracea para que los estudiantes puedan presenciar de primera mano todo el proceso de fabricación de un producto y hacer las preguntas planteadas previamente en clase, así como resolver las posibles dudas que surjan en el momento.

Actividad 2

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** segundo ciclo de Educación Infantil.
- **Objeto matemático estudiado:** simetría.
- **Objetivo de la actividad:** mostrar de una manera lúdica la simetría a los estudiantes y que ellos se familiaricen con esta.

Consignas de la actividad

Para trabajar la simetría se debe ubicar un espejo en dibujos como: una casita, un pino, una mariposa, un coche, un gato o un perro.

- Observa que algunos no cambian.
- Encuentra otros dibujos que no cambien.
- Encuentra otros dibujos que cambien.

Con pintura se pinta la parte de la "estrella" de la taracea; después se dobla el papel para que se calque en el otro lado y ver su efecto simétrico.

Actividad 3: Somos artesanos

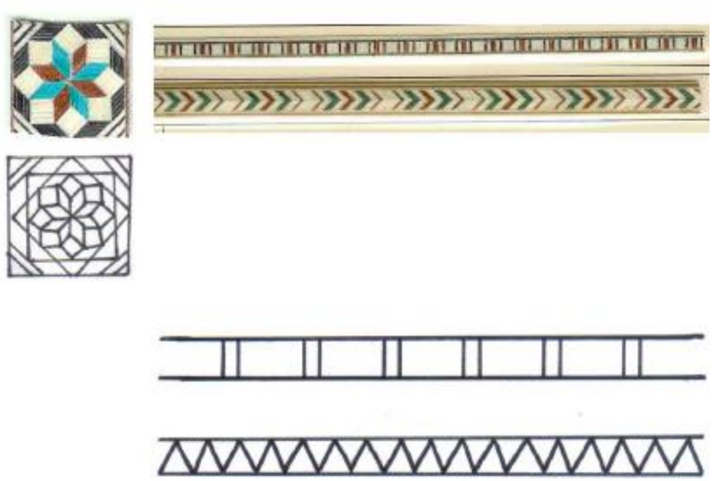
- **Área:** Geometría.
- **Grado:** segundo ciclo de Educación Infantil.
- **Objeto matemático estudiado:** simetría.

- **Objetivo de la actividad:** no especificado.
- **Materiales:** cartulina, tijeras, pegamento, papel para plastificar, rotuladores y una tapa de plástico grande (por ejemplo, de un tarro de crema de cacao), que servirá de base.

Consignas de la actividad

Se reparte una cartulina con forma de rectángulo. Para el diseño y decoración del lapicero se provén distintos modelos de grecas y estrellas (ver Figura 40) con dos tamaños, pequeño y grande. La tarea consiste en pensar el diseño, la organización de los elementos en el plano, darle color a las grecas y estrellas mediante seriaciones, delimitar el tamaño y recortarlas para adecuarlas al plano.

Figura 40. *Estrellas y grecas de taracea reales (parte superior) y modelos (inferior)*



Fuente: Boada Rafecas et al. (2014).

- Elaboración del núcleo central del objeto: recubrir la superficie exterior del objeto, pegando los elementos que se han recortado, realizando simetrías, seriaciones, etc., dejando total libertad en el diseño.

- Perfeccionamiento y terminación: pegar aquellos elementos que no estén bien pegados, plastificarlo y pasarlo del plano al espacio; es decir, juntar los laterales del rectángulo para formar un cilindro. Finalmente, para terminar el lapicero, se debe unir la tapa de plástico que actuará de base.

Actividad 4: Control

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** segundo ciclo de Educación Infantil.
- **Objeto matemático estudiado:** no especificado.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.

Consignas de la actividad

Con papel y lápices de colores realizar un dibujo que represente lo que más les ha gustado de todo el proyecto.

1. Elaboración de un collage con distintos materiales en el que se represente el proceso de construcción del lapicero o de lo visto en el taller.

2.2.3.5. Ejemplo 8 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: La cestería como herramienta didáctica para la comprensión de conceptos geométricos.

Objetivo de la investigación: analizar las dificultades de los alumnos de artes en adquirir conocimientos geométricos, así como, analizar los efectos de la implementación de estrategias creativas, en clase, dirigidas fundamentalmente a alumnos que evidencian dificultades en el ámbito de las matemáticas y, así, fomentar el envolvimiento activo, generando un proceso creativo que colabore en el desenvolvimiento de procesos de enseñanza y aprendizaje estimulantes.

País: Portugal.

Autores: Lucinda Serra.

Tomado de: Serra (2016).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Son numerosas las estrategias que actualmente se investigan en busca de un desarrollo integral de los estudiantes. Es importante desarrollar estrategias diferenciadas que fomenten la articulación entre el conocimiento matemático y las diferentes formas de representarlo, así como entre el saber académico y los conocimientos provenientes del ámbito cotidiano.

Se desarrolló un trabajo de investigación con alumnos del 11º del área de artes de un instituto del noroeste de Portugal. El origen de todo el trabajo estuvo en la constatación de que estos alumnos no habían adquirido los conocimientos básicos de geometría que ya habían sido impartidos en el curso anterior. Los alumnos evidenciaron serias dificultades y obstáculos en las aulas de geometría descriptiva, tanto en la comprensión de conceptos como en los procesos geométricos, así como en el desarrollo de un pensamiento argumentativo de carácter deductivo.

En una reunión intermedia, los profesores de matemáticas y geometría descriptiva reflexionaron sobre este problema, alertando a todos los docentes de la importancia de los conceptos que no habían sido interiorizados. Los profesores propusieron dos estrategias para colmatar las dificultades, por un lado, solicitar a la dirección del establecimiento un refuerzo en la carga horaria de los alumnos y, por otro, que el profesor de matemática trabajase con los alumnos los conocimientos de geometría del año anterior. Por parte de la dirección de la escuela se asignaron 45 minutos a lo largo de todo el curso, y el profesor de matemáticas organizó el abordaje de los conceptos ya impartidos utilizando estrategias innovadoras. Desarrolló procesos de enseñanza y aprendizaje enriquecedores y estimulantes, permitiendo la participación activa de los alumnos. En este contexto, se pretendió analizar las dificultades de los alumnos de artes para adquirir conocimientos geométricos, así como examinar los efectos de la implementación de estrategias creativas en clase, dirigidas principalmente a aquellos alumnos que muestran dificultades en el ámbito de las matemáticas. El objetivo era fomentar la participación activa y generar un proceso creativo en los alumnos, lo cual contribuiría al desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje estimulantes.

Las dificultades de los alumnos en la interiorización y adquisición de conocimientos geométricos, en muchos casos, provienen, de la capacidad de abstracción que es exigida, principalmente en la visualización espacial y su representación. De ahí que sea importante reflexionar sobre estrategias más adecuadas para abordar contenidos en el área de la geometría, ya que esta desempeña un papel formativo como herramienta de interpretación e intervención en la realidad.

Los recursos didácticos pueden ayudar a desbloquear esas dificultades, las cuales son frecuentes en este dominio; por otro lado, la diversidad de recursos puede contribuir a la construcción de una metodología que se torne más eficaz junto al alumno. Esta eficacia pasa por favorecer el envolvimiento activo del alumno (Aravena et al., 2007). Según Pais (2006) la valoración de procedimientos de enseñanza más significativos requiere la superación de las prácticas reproductivas, sustituyéndolas por dinámicas que ayuden a desarrollar la creatividad, ya que es necesario fomentar la creatividad para preparar a los alumnos para enfrentar los retos contemporáneos.

La dinámica de la clase de matemática puede ser influenciada por factores muy diferentes, Pires (1999) enumera algunos de ellos destacando: el contexto escolar y social, los alumnos, con sus concepciones y aptitudes relativas a la matemática, así como sus conocimientos y experiencias; el profesor, con sus conocimientos y competencias profesionales, las actividades que propone y los materiales que los alumnos utilizan para su abordaje. Diversas investigaciones (Alsina et al., 1988; Calvo, 1996; Fernández et al., 19991) coinciden en que la geometría sirve para interpretar y actuar sobre el espacio, y que la utilización de materiales favorece la interacción del medio con el alumno y dan lugar a un aprendizaje más significativo.

La visualización es una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y, en particular, en educación Matemática, es considerada importante, porque constituye una forma alternativa de acceder al conocimiento matemático; la comprensión de los conceptos matemáticos requiere múltiples representaciones y la representación visual puede transformar la comprensión de sí mismo; la visualización es parte de la actividad matemática. Es importante desarrollar en nuestros alumnos procesos fundamentales de las competencias geométricas, como visualizar, manipular, explorar y modelar (Borba y Villarreal, 2005).

Al verificar que muchos de los conceptos subyacentes al capítulo de geometría en el plano y el espacio, correspondiente al 10º año de Matemáticas B, no habían sido adquiridos ni interiorizados, se reformuló la planificación de los trabajos del 11º año, con el objetivo de revisar los conceptos geométricos ya impartidos. Esto es fundamental en el curso de artes, ya que dichos conceptos se utilizan regularmente en otras asignaturas. Toda esta reformulación fue posible gracias a la inclusión de un tiempo semanal de 45 minutos a lo largo de todo el año escolar, lo que permitió trabajar con los alumnos los conceptos de geometría del año anterior. Con el objetivo de abordar el alcance deseado, se llevó a cabo un estudio de carácter cualitativo e interpretativo, con el fin de analizar y comprender cómo la implementación de estrategias creativas puede fomentar la participación activa y generar un proceso creativo en los alumnos, promoviendo así procesos de enseñanza y aprendizaje estimulantes. A lo largo del desarrollo del trabajo con los participantes, hubo un esfuerzo por comprender las motivaciones, necesidades y comportamientos de los individuos involucrados en la investigación; para ello, se puso en práctica un estudio de caso. La clase involucrada fue la del 11º año del área de artes, formada por siete alumnos en la asignatura de Matemática B, con edades comprendidas entre los 15 y los 20 años. Los alumnos de esta clase evidenciaban grandes dificultades en la interpretación y aplicación de los conceptos impartidos en el 10º año. Dos de estos alumnos están por tercera vez en el 11º año. Por lo general, son alumnos con muchas dificultades en todas las asignaturas, incluida la matemática, pero la mayoría mostró interés y fueron desarrollando sus capacidades, considerando el punto de partida desde el cual comenzaron.

El trabajo se desenvolvió a lo largo de 7 clases con la duración de 90 minutos cada una. Durante todo el trabajo se grabaron en audio las clases y se procedió a la filmación de algunas de ellas. Los alumnos construyeron los respectivos informes acompañados de los trabajos desarrollados en las diferentes aulas.

1. Relato de la práctica profesional

Se inició el desenvolvimiento del trabajo, en clase, con la formación de dos grupos de trabajo Grupo A: Tiago, Rita, Bruna, Melissa; Grupo B: Daniela, Bianca, Tatiana (nombres ficticios). A cada uno de los grupos les fueron fornecidos dos cestos y un guion para el desenvolvimiento del trabajo.

Se deben conocer los artefactos de otra cultura, la cestería de otro país, República Democrática de Timor Este e iniciar el abordaje a los conceptos de geometría del 10º año que no estaban adquiridos. Al introducir en la clase artefactos ajenos a la realidad cultural de los alumnos, es posible que éstos se evidencien como entes motivadores y facilitadores de la interiorización de conceptos matemáticos, también se debe identificar algunos elementos, transformaciones geométricas, frisos o pavimentaciones, que pudiesen estar presentes en la construcción de los artefactos en análisis y, por otro lado, como los artefactos estudiados proceden de Timor Este, también se pretendía fomentar en los alumnos una estima por la diversidad cultural y desenvolver el gusto por el conocimiento de otras culturas.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Geometría en la cestería.

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** Once (15 a 20 años).
- **Objeto matemático estudiado:** figuras geométricas y traslación.
- **Objetivo de la actividad:** desarrollar en los alumnos procesos fundamentales de las competencias geométricas como visualizar, manipular, explorar y modelar.
- **Materiales:** cestas.

Consignas de la actividad

1ª Parte (en clase)

Fotografiar los cestos presentados poniendo atención a los detalles de su construcción y en su ornamentación. Dibujar los cestos; representar, en papel milimetrado, algunas de las partes de los cestos que se consideren más relevantes.

Con el apoyo de las representaciones elaboradas analiza e identifica las transformaciones geométricas u otras relaciones presentes en los cestos.

2ª Parte (trabajo fuera de clase)

Averiguar en internet sobre la cestería de Timor Este e identificar los cestos presentados, indicando, desde tu perspectiva, si son de uso corriente o si se trata de un suvenir. Elaborar un informe de todo el trabajo desarrollado.

3ª Parte (en clase)

Presentación y discusión de los trabajos realizados

Al solicitar a los alumnos que dibujaran de forma libre los artefactos, se pretendió la adaptación a sus gustos, teniendo en cuenta que se trataba de una clase de artes. Por otro lado, al registrar en papel milimetrado, el objetivo fue desarrollar la capacidad de observación y análisis de la realidad, además de facilitar la interpretación de los conceptos matemáticos subyacentes en la construcción de los artefactos.

En las Figuras 41 y 42 se observan los artefactos distribuidos a cada grupo. Se solicitó que, puntualmente, usasen sus móviles para fotografiar los objetos. A continuación, se les explicó que procedían de Timor Este y se solicitó su participación, en el sentido de que hablasen sobre lo que conocían de un país tan lejano. Refirieron que tenían alguna idea, pero no muy clara de su posición geográfica, así como de la relación histórica con Portugal. Se aprovechó este momento para referenciar la relación histórica de Timor Este con Portugal y solicitar a los dos grupos que, en casa, hicieran una pesquisa sobre Timor Este, su historia y cestería.

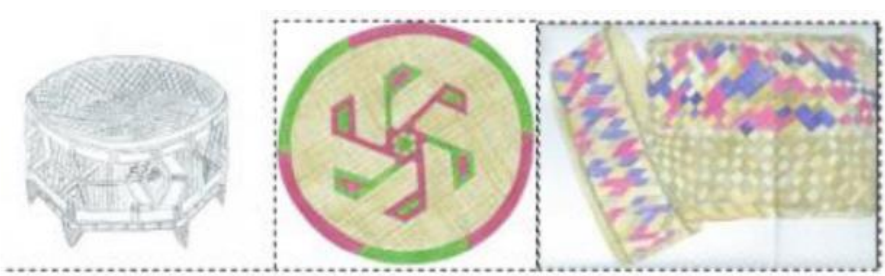
Figura 41. *Cestas suministradas al grupo A*

Fuente: Serra (2016, p. 4).

Figura 42. *Cestas suministradas al grupo B*

Fuente: Serra (2016).

Figura 43. *Algunos de los dibujos realizados por los alumnos*

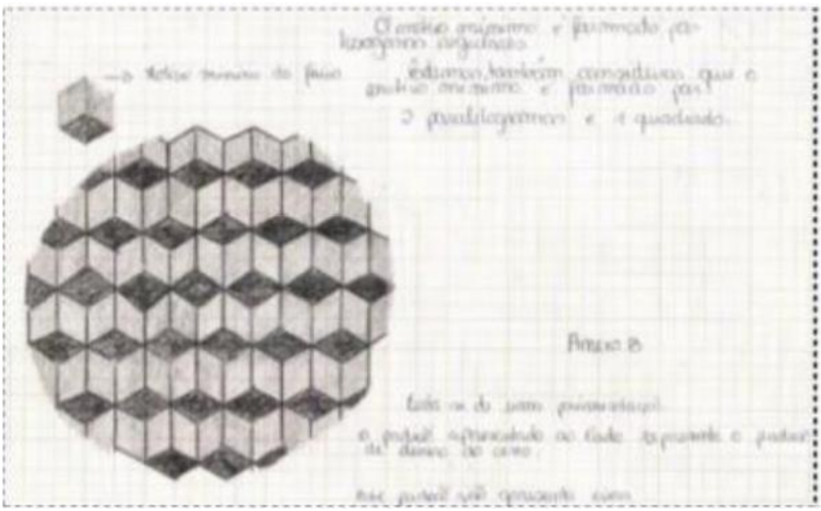


Fuente: Serra (2016).

Figura 44. *Parte superior de uno de los cestos*

Fuente: Serra (2016).

Figura 45. *Representación en papel milimetrado*

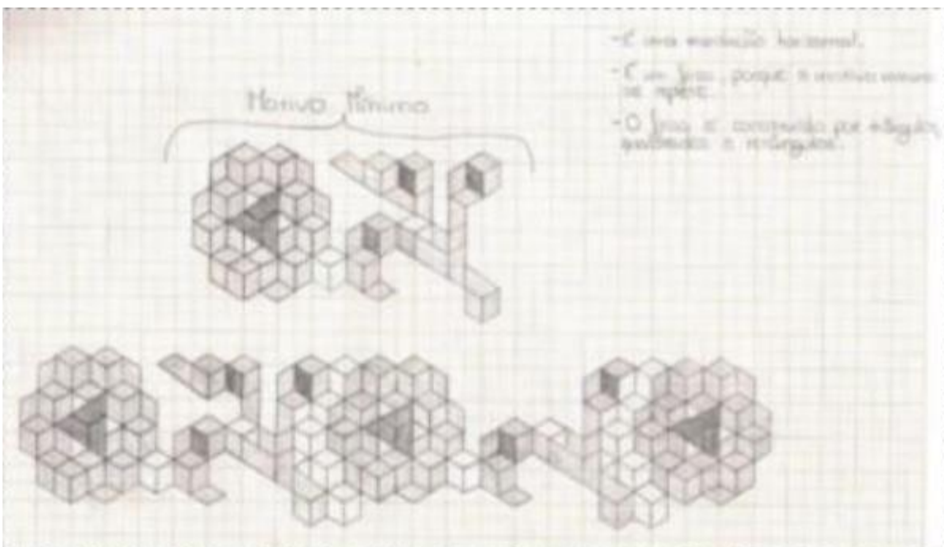


Fuente: Serra (2016).

Figura 46. *Detalle lateral de uno de los cestos*

Fuente: Serra (2016).

Figura 47. *Representación en papel milimetrado*



Fuente: Serra (2016).

2.2.3.6. Ejemplo 9 de sistematización.

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Ethnomathematical research and drama in education techniques: developing a dialogue in a geometry class of 10th grade students.

Objetivo de la investigación: examines how ethnomathematical ideas processed within the experiential environment established by the Drama-in-Education techniques challenged student's conceptions of the nature of mathematics, the ways in which students engaged with mathematics learning using mind and body, and the dialogue' that was developed between the Discourse situated in a particular practice and the classroom Discourse of mathematics teaching.

País: Grecia.

Autores: Charoula Stathopoulou, Panagiota Kotarinou y Peter Appelbaum.

Tomado de: Stathopoulou et al. (2015).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

The project with 'xysta'

Returning to the longitudinal project conducted in three phases that this article addresses, we can observe connections to Ethnomathematics. The first phase was an ethnographical study on the geometrical patterns ('*xysta*') on house facades in the Pyrgi Village of Chios Island. This was a pure anthropological, ethnomathematical study combined with an historical anthropological approach. The second phase was a construction of the WebQuest based in this tradition. The WebQuest extended the historical anthropological study through a socio-psychological approach to '*xysta*'. In the third phase, a mostly pedagogical experiment that enabled us to encounter the relationships between Ethnomathematics and mathematics education, we introduced this designing tradition through the WebQuest and Drama-in-Education techniques into a mathematics classroom in upper secondary school in Athens, aiming to explore the mathematical and educational potential of this research/teaching/curricular design approach. Here we are presenting briefly the first two steps, highlighting how Ethnomathematics, both as research field and as a posture, can contribute to a fruitful and meaningful framework for mathematics teaching/learning, and how this research/teaching/curricular design approach can, among other things, destabilize the stereotypical conception and perception of mathematics as a culture-free cognitive realm.

'*Xysta*' in Pyrgi of Chios Island

A common characteristic of all three strands of Ethnomathematics mentioned above is the attention to the ways that culture, (mathematical) cognition and context are inter-related. Our first phase of work could be understood as closest to the third type of approach (the socio-psychological approach); the fieldwork component of this research mostly concerned the observation of two craftsmen who used a traditional practice, '*xysta*', a kind of graffiti on house façades at the Pyrgi of Chios. According Bishop's categorization (1988a, 1988b), the work of the craftsmen is an example of a designing activity.

Through the ethnographic study conducted in Pyrgi, we explored the connection of this designing tradition of '*xysta*' to the community's culture and history (Stathopoulou, 2007) and the informal mathematical cognition (hidden mathematics) present in these traditional constructions (Stathopoulou, 2006).The first author lived in this village for three months, making numerous observations of the patterns, speaking with people of the village—of all the age, but mostly the older members of the community, conducting formal interviews and unstructured, open-ended conversations. Locally-written texts were also studied, offering local perspectives on the village's history and on the connections of this history with the tradition of '*xysta*' and its historical development. Observation of the craftsmen determined a specific algorithmic series of steps carried out as follows: Initially, craftsmen plaster the façade of the house; the plaster is applied to the façade, in two layers; after the application of the plaster, the craftsmen divide the wet surface into zones, designing within these zones the patterns they consider appropriate for the particular structure.

Xysta craftsmen use particular tools: a lath (straight edge); a compass with two identical points; and a fork for scratching some areas of the figures so that one shape becomes dark (the scratched one), and the other white.

Figure 48. *Tools: a lath, a compass, a divider*

Source: Stathopoulou et al. (2015, p. 117).

Through observations and through interviews with inhabitants, the strong connection of '*xysta*' to their identity emerged:

R: *Why did you like to have 'xysta' at your house?*

- Because I'm Pyrgouis (=habitant of Pyrgi). Jesus Christ was born in the manger and the manger is what he remembers.

- These are our tradition.

- '*Xysta' is a means of promotion for Pyrgi, the place is famous because of 'xysta'*. Studying these patterns, either on already existing house façades or in what the observed craftsmen created, several mathematical ideas and techniques appeared: Geometrical constructions (with compass and straight edge); several kinds of symmetry; patterns; the use of the golden section; etc. Furthermore, observations of the craftsmen during the process of construction revealed what might be called 'unintentional use of '*theorems in* *action*'. For example, they 'constructed' parallel lines, rectangles, rhombi, squares; they determined the center of a rectangle; they divided circles into 6 equal parts, etc., in mathematically accurate ways. In responding to questions such as, 'How do you knowthat?' they were unable to articulate explanations in terms of formal (school) mathematics; nevertheless, they were confident in their results, and they would say that they were certain because they had trained through their apprenticeship with another expert craftsman.

WebQuest: the art of '*xysta*', patterns and symmetry

The WebQuest that was created and then used in the classroom was developed originally as an example in the framework of a seminar on the use of new technologies for mathematics teaching. Dodge (1997) defines a WebQuest as 'an inquiry oriented activity in which some or all of the information that learners interact with comes from resources on the Internet'. Although there are a number of online learning activities that depend on Internet resources, Dodge distinguishes a WebQuest from other web-based experiences in this way: A WebQuest is built around an engaging and doable task that elicits higher-order thinking of some kind. It's about doing something with information, beyond collecting information. The thinking can be creative or critical, and might involve problem-solving, judgment, analysis, or synthesis (Burchum et al., 2007; Starr, 2005).

A WebQuest is designed to introduce the student to the subject of the activity, inform him/ her about the role he/she is going to undertake, and to define and guide his/ her work. In the designing of a WebQuest the teacher predetermines and then describes to the students the aim and the expected results, proposes the resources where students will look for the material, and poses the questions that students should answer.

So, the second phase of our project was the construction of our own WebQuest, 'The Art of Zysta: Symmetry and Pattern,' based on the above-mentioned research about '*xysta*' (Stathopoulou & Kotarinou, 2008). The WebQuest was designed for mathematics teaching, but in that moment, it was merely 'an exercise on paper'. Our WebQuest used a common structure, including the following components/steps:

- **Introduction**: consisting of several questions about the 'painted village' in Chios island and the traditional art of '*xysta*', with the aim of introducing students to the subject in an attractive way.
- **Task:** presenting the roles of the students and defining the task they were going to undertake. Four roles were considered for their task: folklorists, architects, craftsmen and mathematicians.
- **Procedure:** describing how the students would perform the task, including the particular tools for the exploring and organization of the information.
- **Evaluation:** presenting criteria for the work, in the form of rubrics related to the aims described, and in terms of the eventual evaluation of student's work.

- **Conclusion:** summarizing what the students managed to do or learn in accomplishing the various tasks.
- **Teacher's page*:*** guidance to teachers, helping them in the scenario's successful implementation.

Integrating the 10th grade curriculum through Drama: the traditional practice of '*Xysta*'

An introduction

The final phase of the research was designed to answer the second writer's problems, and to respond to the questions she had about improving her mathematics teaching in an upper secondary school, specifically about enriching it with suitable resources. As mentioned in our introduction, mathematics teaching, and especially the teaching of geometry, seems to be very difficult for many teachers, partly because of the nature of (Euclidean) Geometry as developed in a typical school curriculum, and partly because of the common ways that people have approached teaching it. This typical approach might be described as a productive way that does not easily allow for students to construct their own knowledge. Additionally, in Greece, another factor contributing to student's low interest in geometry is the fact that it is a subject that is not included in the final school examination.

In response to this situation, the author-mathematics-teacher had tried several alternative ways of teaching. She had experimented with, for example, introducing mathematical notions using literature, theater and Drama-in-

Education, concluding that Drama- Education techniques provide situations with the most potential for sophisticated levels of contribution by her students.

In the research we are reporting on in this article, the combination of a WebQuest, the ethnomathematical research conducted earlier, and the Drama-in-Education techniques were exploited to create a meaningful framework for teaching geometrical notions within a space where formal and informal knowledge co-develop as a dialogue. The research was twofold, with both teaching and research questions.

The main objectives for students were:

- To understand mathematic's notions such as symmetry and pattern, by investigating mathematical ideas that are incorporated in '*Xysta*'.
- To communicate mathematics through drama and informal mathematics practices.
- To realize that mathematics is a human activity connected to all cultures and human activities.

Our research questions were:

- Does the use of informal mathematics in a mathematics classroom help for understanding mathematical notions in a formal way?
- How does the discourse of an informal practice introduced into a mathematics classroom interact with the emerging mathematics classroom discourse?

- Is it possible through the use of ethnomathematical ideas and of DiE (given the experiential dimension of this work) to renegotiate the dichotomy of formal-informal knowledge?
- How might the students' experience affect their perception of the nature of mathematics?

Methodology of this phase

We modeled our research on the teaching experiment[2] for the design of the activities, in combination with ethnographic techniques for the observation and collection of data. The second author participated in all phases of the research either as a participant or as an observing participant. She kept ethnographical notes, and the ethnographic material was supplemented by interviews with the students and video of selected parts of the entire procedure.

In our research we maintained a high standard of ethics. As is considered appropriate in the Greek context, we asked permission from student's parents to videotape their children, and to interview them; and we reassured students that their anonymity would be maintained at all times throughout the entire research process.

[2] The teaching experiment is a method to study the interrelated relationship between learning and teaching and is presented as an alternative suggestion to educational research, which is critically positioned towards positivist tradition. As a method it is developed through the need to study the very development process of learning and not merely the result (eg. The student's performance).

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** décimo.
- **Objeto matemático estudiado:** simetrías.
- **Objetivo de la actividad:** studied the pictures of house surfaces and of craftsmen's constructions, and searched for mathematical notions, as well as the type of their construction.
- **Materiales:** Address: http://didaktikop.blogspot.com, where they found the WebQuest described above. Here they found the guidelines for the tasks, the procedure, the resources, and the evaluation.

Consignas de la actividad

To answer to the following questions, based on the pictures that were provided to them as an authentic material derived from the research on the spot by the first author:

- The patterns that appeared in this Figure 49 constitute a combination of geometrical shapes. Which shapes do you see?
- In every zone, in this figure, define:
  - The motif.
  - The sorts of symmetry.
  - The axes of symmetry, if symmetry axes exist.
  - The centers of symmetry, if they exist.

- Could you make the patterns of the three first zones using only compass and rule as traditional craftsmen do?
- Could you make the motif you see in this Figure 50 as well, using only compass and straight edge?

Figure 49. *A design with symmetry and*

Source: Stathopoulou et al. (2015)

Figura 50. *A circular design from a*

Source: Stathopoulou et al. (2015)

Actividad 2: Discovering ‘*Xysta*’ and their mathematics

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** décimo.
- **Objeto matemático estudiado:** simetrías.
- **Objetivo de la actividad:** reviewed previously learned notions of symmetry, investigating mathematical ideas that are incorporated in ‘*xysta*’.

Consignas de la actividad

Students created a 'TV show' named 'Discovering '*Xysta*' and their mathematics.' A student was selected to be the host of the show, some others the reporters, and still other students undertook the role of folklorists, architects, craftsmen and mathematicians, as members of the show's panel. The task of the reporters was to take interviews from teachers and students of the school regarding '*Xysta*', which they used during the TV show. The rest of the students were to be the audience who listened and asked questions of the 'specialists'.

In order to support their role on the panel, students collected information and prepared their material through the WebQuest, working in the ICT lab. They were randomly divided into their groups, with every group having a different role: the role of Historians/folklorists, of Architects, and of Craftsmen. Each group was required to carry out the relevant tasks in the WebQuest, and to prepare a PowerPoint Presentation supporting their role in the TV show. The students in the role of Historians/folklorists gathered information regarding the village's history and the history of '*Xysta*'. The 'Architects' group gathered information regarding Pyrgi architecture, and explored the architecture of these houses as related to the tradition of '*Xysta*'. The 'Craftsmen' group explored the processes and techniques that traditional craftsmen use to construct '*Xyst*a', researched the tools they used, and analysed the informal mathematical knowledge that is hidden in '*Xysta*' constructions.

All students did the mathematical tasks in the aforementioned WebQuest, and through these they reviewed previously learned notions of symmetry, investigating mathematical ideas that are incorporated in '*xysta*'. Two students from the class were chosen to represent the class in the panel of the TV show as mathematicians.

A discussion was held about geometrical tools and their comparison with craftsmen's tools, about Ethnomathematics, and particularly about the (Bishop, 1988a, 1988b) idea of a 'designing activity'. Students noted and discussed the curious fact that craftsmen used the tools that are accepted for strict mathematical constructions, yet the constructions were made approximately because of tool's nature and the context.

2.2.3.7.Ejemplo 10 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Reintroducing Māori ethnomathematical activities into the classroom: traditional Māori spatial orientation concepts.

Objetivo de la investigación: examinar los términos de orientación espacial maoríes y los marcos espaciales de las referencias que se derivan de estos.

País: Nueva Zelanda.

Autores: Tony Trinick, Tamsin Meaney y Uenuku Fairhall.

Tomado de: Trinick et al. (2015a).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Reintroducing Māori spatial language and frameworks

Without the aid of magnetic compasses, Māori traditionally used a variety of spatial frameworks abstracted from geomorphic or landmark-based systems to orientate themselves to the general direction of—east, west, north and south—and intermediary directions (Trinick, 1999) These references were derived from a mixture of physical phenomena, including the actions of the sun and wind, and geographical landforms. The elders suggest that the close similarity of the Māori systems to those of Tahiti and the Marquesas suggests that these systems may have been imported from Eastern Polynesia (Trinick, 1999).

1. East–west axis: using the sun (*Tama-nui-te-rā*) as a spatial framework

The sun is a natural compass because it rises every day in the east (or close to it) and sets in the west, with its exact position being related to the time of year. Māori had terms forthe ecliptic (*Mārua roa*), the path the sun moved during the course of a year. *Tama-nuite- rā* (sun) is of considerable cultural importance to Māori and features in a number of traditional stories, *karakia* (prayers) and *waiata* (songs) (Trinick, 1999). According to the elders (Trinick, 1999), a number of directional terms are derived from the sun's pathway across the sky from east to west and include:

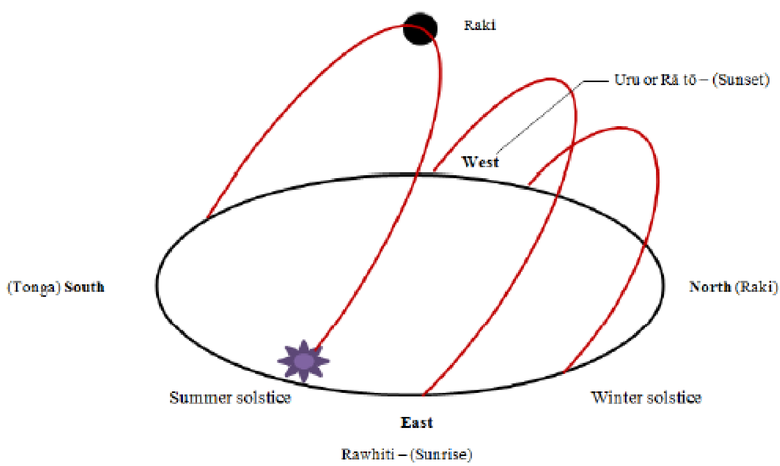
Rāwhiti (East)—where the sun rises. The east had religious significance for Māori for centuries, a custom probably derived from East Polynesia. For example, many ancient burials are orientated to the east, with the heads facing the rising sun (Duff, 1977).

Raki (North): *rā–sun, kī*–full (the sun at its highest point is close to north).

Uru (West)—relates to *Tama-nui-te rā*, when setting [sun] enters the night (*ka uru atu ki te pō*).

Te rā tō (setting sun) refers to the west in a number of tribal areas (such as Te Arawa, where Te Koutu is situated). Diagrammatically, the spatial reference points could look like those in Figure 51.

Figura 51. *Tama-nui-te rā as a spatial framework*



Source: Trinick et al. (2015a, p. 421).

Various forms of "*raki*" meaning north are found throughout Eastern Polynesia, supporting the view that the directions originated in East Polynesia but underwent some change in orientation to fit the conditions in Aotearoa/New Zealand (Trinick, 1999). For example, in Samoa, the equivalent of *raki*, north, is *Ja'i*, west wind. Interestingly, in Tahiti, *raki is rai*, which refers to the sky.

2. South–north axis: using geographical form of Te Ika-ā-Māui (North Island) as spatial framework

The geography of Aotearoa/New Zealand encompasses two main islands (the North and South Islands), and a number of smaller islands (see Figure 52). Throughout Polynesia, one of the many great feats of Māui, a legendary hero, was to pull up a great fish from the depths of the ocean. In Aotearoa/New Zealand, as described by the elders, this fish became *Te Ika-ā-Māui* (the fish of Māui—the North Island) (see Figure 52). *Te Upoko-ote-Ika* (the head of the fish) is in the south at Wellington, and *Te Hiku-o-te-Ika* (tail of the fish) refers to Northland (also referred to as *Murihiku*) (Auckland Museum, 2001).

Therefore, the head of the fish is *runga*–up and the tail of the fish is *raro–down*. This can be confusing for those steeped in Western spatial conventions because ―up‖ and ―down‖ as spatial references are reversed. For example, in Māori traditions, *Te Upoko o te Ika* (Wellington), the capital city located at the bottom of the North Island, is considered "*up*", and *Te Hiku o te Ika* (Northland) at the top of the North Island is "down" (see Figure 52).

The South Island is known as *Te Waka-a-Māui* (the canoe of Māui). Stewart Island, which lies at the very bottom of Aotearoa/New Zealand, is known as *Te Punga-a-Māui* (Maui's anchor), because it was the anchor holding Maui's *waka* (canoe) still as he pulled in the giant fish. Therefore, Māori in the South Island had a different idea of what was up (north) and down (south). In this case it is in alignment with that of Western culture.

The seaward side of the fish, irrespective of which coastline you lived on, was referred to as "*waho–outside*" by some tribes. This importance of making a distinction between the seaward or inland position is evident throughout island Polynesia and provides the main axis of orientation for a *marae* (traditional meeting house). As well, this distinction was heard in many *karakia* (prayer) and *waiata* (song) in Aotearoa/New Zealand, demonstrating the persistence of a widespread ancestral Polynesian distinction between the directions of *tai* (seaward) and *uta* (landward) (Amoamo y Tupene, 1984).

Māori knowledge about *Te Ika-ā-Māui* was acquired before the advent of European maps. The North Island and South Island were represented as mental images and thus orientated to the shape of the fish and the canoe respectively. Knowledge derived from direct experience is often different from knowledge derived from maps. For example, maps show the spatial relationships between all the places represented on the map, but when an area is learnt over time from direct experience, knowledge is created gradually and may require the development of a cognitive map [such as a fish] to organise this information (Kitchin y Blades, 2002).

Although, traditionally, visualisations of the relationship between the North and South Islands were not orientated to cardinal points, now *Te Ika-ā-Māui* is presented in maps as having a north-up orientation, showing how it has been incorporated into Western map orientation understandings. The image in Figure 52 of the North island (*Te Ika-ā-Māui*) has an image of a stingray overlaid to show the concept of up (head of the fish) and down (tail of the fish).

Figure 52. *Te Ika-ā-Māui (North Island) as a spatial framework*

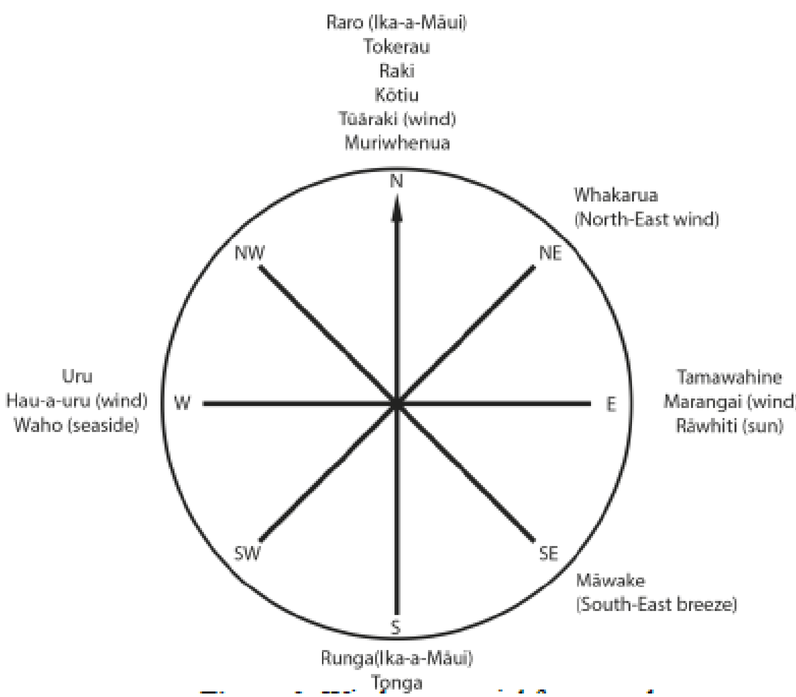
Source: Trinick et al. (2015a).

3. The wind as a spatial framework

Many directional terms are derived from winds, particularly the prevailing winds (Trinick, 1999). In Aotearoa/New Zealand, the prevailing winds are from the west but in certain months easterlies may predominate (New Zealand MetService, 2014). Over time, the terms for the winds have become directional terms, orientated to a consistent direction in particular locations. One of the most commonly used terms for west, heard throughout much of Aotearoa/New Zealand, *is Te Hau-ā-uru* (west wind) and *marangai* (variously, east wind, north-east wind). Nevertheless, the functional use of wind names to orientate was generally localised knowledge (Trinick, 1999). There was a shared understanding of wind terms amongst the *hapū* (subtribe) or *iwi* (tribe), enabling them to be ideal local direction markers. Outside their local area, the same term could refer to a different direction. For example, while Māori is much the same language throughout the country, the elders indicated that the term *marangai* orientates to east wind, east, northeast, north and north wind, depending on the direction of the prevailing winds in a certain locality and thus *hapū* and *iwi* (Trinick, 1999).

Wind names were culturally significant to Māori (see Figure 53). Not only were they direction indicators, but they also indicated fishing and planting times. When a particular wind blew, it was an indicator of good fishing conditions for a particular species of fish. Knowledge of the land and sea breezes was important when fishing some distance from the shore (Trinick, 1999). For example, on the east coast, a south-east breeze (*māwake*) blew fishermen offshore for several miles to desired fishing grounds and, in the evening, another sea breeze brought them back in (Trinick, 1999). *Māwake* is also derived from spatial frameworks, a wind term that occurs in the karakia used by *Māui* (Anderson, 1969) to assist him in catching his fish (*Te Ika-ā-Māui*—see Figure 52). Figure 53 shows various wind names known to the elders. This is only a small sample of wind names known and used throughout Aotearoa/New Zealand. Table 12 connects directional terms and spatial frameworks.

Figure 53. *Wind as a spatial framework*



Source: Trinick et al. (2015a).

Table 12. *Summary of directional terms derived from spatial frameworks*

Direction/Ahunga	Spatial Framework
East	Tamawahine (Ika-a-Māui), marangai (wind), rāwhiti (sun)
North	Raro (Ika-a-Māui), tokerau (wind), raki, kōtiu/tiu (wind), tūāraki (wind), muriwhenua (Ika-a-Māui)
North-east	Whakarua (wind), raranga-te-muri (wind), marangai-mā-raro
North-west	uru mā raki (wind), mā-uru, tapatapa-atiu
West	Uru, hau-ā-uru (wind), waho (seaward side), rā-to (sun)
South-east	Māwake (south-east breeze), Paeroa (wind)
South-west	Tonga-mā-uru (wind), tuauru-mā-tonga
South	Runga (Ika-a-Māui), tonga

Source: Trinick et al. (2015a).

Data from the interviews with elders highlighted that there were other spatial frameworks used by Māori to orientate, such as the position of stars and environmental signs like moss growing on the southern side of trees (Trinick, 1999). Linguistically, unlike the English language, Māori uses terms derived from intrinsic spatial relationships (i.e., local nouns *muri*–back, *runga*–up, **waho**–outside, *raro*–down) as absolute directional terms (see Table 12). The difference as to whether it refers to the intrinsic (back, front, up down, etc.) or absolute meaning (cardinal points) is determined by the syntactic structure of the utterance. The **te** particle is used to differentiate between local nouns (intrinsic) and directional nouns (absolute). For example, *kei muri* (location) refers to the rear, behind, at the back of, and *te muri* refers to north. Thus, according to the elders *te muri* variously means the north direction and a wind that blows from the north (Trinick, 1999).

In the next sections, we outline some activities that were trialled by Uenuku (one of the authors of this paper) with learners in Years 7–10 at Te Koutu that were based on the Māori spatial frameworks discussed previously. In the present Aotearoa/New Zealand curricula (Ministry of Education, 1991) and Te Tāhuhu o te Mātauranga (1996) at Level 4 (Years 8–9), spatial orientation knowledge is related to abearings coordinate system, that is, a vertical reference line to north (based on magnetic compass). No mention is made of using traditional Māori spatial frameworks in either version.

The activities were developed by the authors in response to diagnostic interviews that indicated that many students at Te Koutu were unable to orientate themselves outside using traditional spatial orientation practices discussed by the elders in 1999 (see also Trinick et al., 2015b). The development and trialling of these activities is in the initial stages and has provided us with reflection points for considering revisions so that a more extensive evaluation process can be implemented. We anticipate being able to expand these activities to all year levels and to consider other spatial frameworks such as the passage of stars across the sky.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Kei te anga atu ki hea? Which direction am I facing?

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** no especificado.
- **Objeto matemático estudiado:** orientación espacial.
- **Objetivo de la actividad:** to introduce students to this range of possibilities for helping them to orientate themselves based on the information provided in 1999 by the elders.

Consignas de la actividad

The students went outside with the teacher to a place where they could see the horizon in all directions. They were asked to draw on the ground where they thought the directions were (i.e., *rāwhiti*–east, *raki*–north, etc.) and intermediary points if they knew them. They were asked what clues they could use to orientate themselves. Then, they came back inside and constructed a circle with themselves at the centre, supplying the names of the various directions dotted around the horizon and the clues they used for orientation.

Actividad 2: *Nga anga whaitua*—he rangahau Spatial constructs—an investigation

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** no especificado.
- **Objeto matemático estudiado:** orientación espacial.

- **Objetivo de la actividad:** to introduce the students to the idea that, Māori geomorphic or landmark-based systems of bearings were often very localised such as the winds, or fairly generic such as the rising and setting of the sun, *Tama-nui-te-rā*.

Consignas de la actividad

In this activity students were required to make contact with the elders of their own *iwi* and *hapū* in order to find out from them the origins of the spatial orientation terms, used in their traditional tribal areas. The findings were presented to the class, followed by a discussion of the similarities and differences. This discussion supported an understanding of the differences between different kinds of spatial frameworks.

Actividad 3: Kei hea koe e noho ana? Where do you live?

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** no especificado.
- **Objeto matemático estudiado:** orientación espacial.
- **Objetivo de la actividad:** to show that a map is a representation of the spatial knowledge of the environment held by a community.

Consignas de la actividad

Students were asked to create a map of their area from memory, adding significant cultural sites, place names, places of significance and a scale. They were asked not to add roads, railways, and so on, but to add other references that provided a sense of direction, that is, winds that they might have collected in the previous activity. When the map creation was completed, students compared the differences and similarities between their maps with a topographical or a satellite map of the region.

2.2.3.8. Ejemplo 11 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Effects of Ethnomathematics-based Instructional Approach on Primary School Pupils' Achievement in Geometry.

Objetivo de la investigación: the effects of Ethnomathematics-based instructional approach on pupils' achievement in geometry.

País: Nigeria.

Autores: Patrick Obere Abiam, Okechukwu S. Abonyi, J. O. Ugama y Gabriel Okafor.

Tomado de: Abiam et al. (2016).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Research Method

The study adopted quasi-experimental design. This was because the study used intact classes in order not to disrupt the classroom arrangement in the schools. Specifically, a pretest, post-test, non-equivalent control group design was used. Intact classes were randomly assigned to the experimental and control groups. Both the experimental and control groups were given the same pre-test on geometry before the commencement of the experiment. The treatment group was taught geometric concepts (properties of solid shapes, plane shapes, angles, parallel and perpendicular lines and lines of symmetry) using an Ethnomathematics-based instructional approach whereas the control group was taught the same topics using the conventional method. The two groups were given a post-test after the experiment.

The study was carried out in Boki Local Government Area of Cross River State, Nigeria. The area covers a land area of 3,500 kilometre square (Tăo-Ásu, 1977).

A sample of 402 primary 6 pupils with 202 pupils for the experimental group, and 200 pupils for the control group was used. Simple random sampling method was adopted to select ten schools from 32 schools identified to have large pupil enrolments. The treatment group had five schools with seven intact classes while the control group had five schools with nine intact classes. The treatment group was exposed to Ethnomathematics-based instructional approach whereas the control group was exposed to the conventional method of teaching.

The instrument for data collection was the Achievement Test in Geometry (ATG), constructed by the researchers. It was used to measur e pupils' achievement in geometry. It contained 25 multiple choice items with four options. These items were selected from the 9- year Universal Basic Education Mathematics Curriculum content (1 – 3 and 4 – 6) for primary 6 (Nigeria Educational Research Development Council, 2007), which included properties of solid shapes, plane shapes, angles, parallel and perpendicular lines and lines of symmetry.

The researchers prepared a test blue-print to guide the development of the test items. The preparation of the test blue-print was based on the school scheme of work for primary 6 and used in constructing the instrument (ATG). The test blue-print contained units in geometric concepts taught in the course of the study and cognitive learning objectives (Knowledge, Comprehension and Application) of the test items. The internal consistency reliability coefficient of the instrument was 0.78 using the Kuder-Richardson 20 estimate.

Experimental Procedure

The researchers organised a training programme for the regular class teachers who were used as research assistants for the study. Two sets of instructional packages (lesson plans) for teaching the units of geometric concepts were prepared by the researchers. The instructional package for the treatment group focused on using an Ethnomathematics-based instructional approach; while the other for the control group focused on the conventional method in teaching geometry. Both the treatment and control groups were administered ATG as pre-test before the commencement of teaching by the regular teachers and the post-test at the end of four weeks of teaching. The teachers were closely supervised to ensure that they used the instructional packages as provided by the researchers.

Method of Data Analysis

The research question was answered using mean and standard deviation while the null hypothesis was tested using analysis of covariance (ANCOVA) at 0.05 level of significance.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Properties of 3- Dimensional Shapes

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** sexto de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** conceptos geométricos.
- **Objetivo de la actividad:**
    - Identify some common 3-dimensional shapes, namely, cuboids, cubes, cylinder, cone, and sphere.
    - Identify the faces, surfaces, vertices/corners, and edges of solid shapes.
    - Draw their shapes using cultural artefacts.
- **Materiales:** Cultural artifacts as may be mentioned by pupils in class.

Consignas de la actividad

Teacher´s Activities

He divides the pupils into groups. Asks each group to appoint a leader.

Pupil's Activities

Pupils cooperate with the teacher to form groups and appoint leaders.

Step 1 Content Development.

Mode: Group work.

(a) Identification of Common 3-dimendional Shapes.

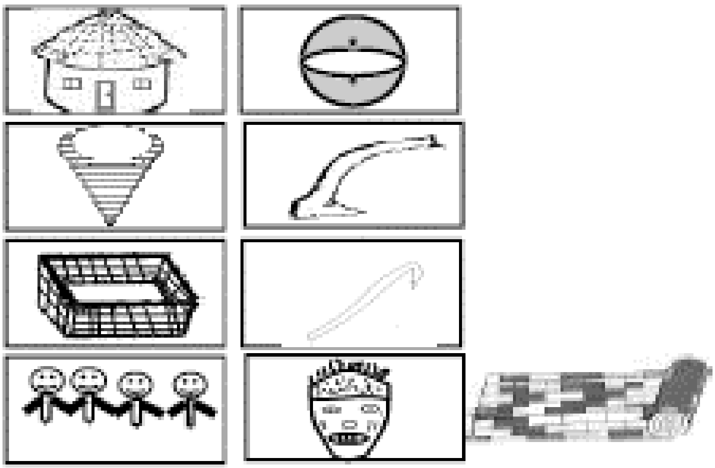
Teacher´s Activities

The teacher introduces the lesson by explaining the things seen around, like liquids, gases and solids. All these things occupy space and have shape. A thing which occupies space and which can keep it shape without help is called a solid. Gases and liquids occupy space but must be kept in a container if their shape is to remain the same. So, they are not solids.

- Asks pupils to give examples of solids form their environment.
- Through appropriate questioning, the teacher explores pupils' knowledge of solid shapes using various cultural artefacts like clay bed/sleeping bed (*kiipimpong*), long drum (*kyiru*), native drum (*ekam*), local basket (*kakye*). Round house, gong (*kemgbung*), top of a basic of garri, calabash plates (*Aban*) (chart1).
- Provides opportunity for pupils to discuss the names of these cultural materials (artifacts).
- Explains that these things that occupy space have their sizes, lengths and shapes (identify each cultural artefact with its related 3-dimensional shape).
- Asks each group to show the outside, inside, width, length and height of solid shapes.

- Explains that every solid shape has three dimensions, namely, length (1), width (w) and height (h).

Figure 54. *Cultural artefacts*



Source: Abiam et al. (2016, p. 10).

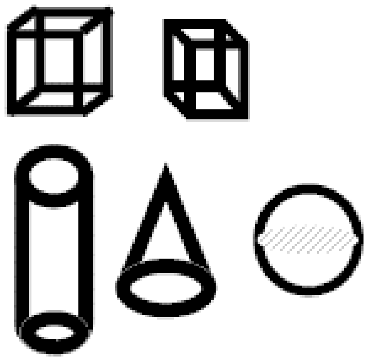
Pupil's Activities

- Pupils listen attentively to teacher's explanations.
- They give examples of solids from their environment.
- Pupils mention cultural artefacts that are identifiable with 3-dimensional shapes.
- They discuss the names of these cultural artefacts.
- They observe the sizes, length and shape of solids.
- Pupils identify the outside, inside width, length, and height of solid shapes.
- Identification of Parts of the Outside of Solid Shapes.

Teacher's Activities

- Explains that the outside of any solid shape is called the surface. Edges divide the whole surface into faces.
- The teacher shows the pupils the surfaces, faces, vertices and edges on the various objects as indicated in charts 1 and 2.

Figure 55. *Diagrams of cuboids, cube cylinder, cone, sphere*



Source: Abiam et al. (2016).

- Asks pupils to discuss in their groups the various parts of solid shapes.

Pupil's Activities

Pupils observe and identify the surfaces, faces, vertices and edges of solid shapes.

Step III Discussions.

Mode whole Class.

Teacher's Activities

Teacher leads the class discussions by asking pupils to:

- Differentiate between solids and gases/liquids.
- Give examples of three-dimensional objects from their home.
- Mention cultural artefacts that have shapes like cuboids, cube, cone, cylinder and sphere.
- Identify the surfaces, faces, vertices, edges, height, width and length of solid shapes.
- Teacher corrects misconceptions that may arise as regard these shapes using cultural artefacts.

Pupil's Activities

Pupils participate actively by explaining the ideas learnt.

Step IV: Summary.

Mode: Whole class.

Teacher's Activities

- Teacher summarizes the lesson.
- Gives summary notes.
- Gases, liquids and solids that we see occupy space and have shape.
- Solids can keep their shapes without help; but gases and liquids cannot, except they are kept in a container.

- Solid shapes have sizes, lengths and shapes.
- A solid shape is called 3-dimensional because it has 3 dimensions – length (l), width (w) and height (h).
- They have surfaces, faces, vertices and edges.

Pupil’s Activities

Pupils write Summary notes in their exercise books.

Step V: Evaluation (oral).

Mode: whole class.

Teacher’s Activities

Mention:

1. The dimensions of solid shape.
2. ¿Why is a solid different from gases/liquids?
3. The outside parts of a solid shape.

Pupil’s Activities

Provide responses to questions asked by the teacher.

Assignment

Draw the different cultural artefacts.

Actividad 2: Properties of 3 – dimensional Shapes

- **Área:** Geometría.

- **Grado:** sexto de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** conceptos geométricos.
- **Objetivo de la actividad:**
    - Draw some common cultural artefacts and other solid shapes.
    - List the properties of 3- dimensional shape (solid shapes).

Consignas de la actividad

Teacher's Activities

Using some cultural artefacts, asks pupils to point out the surfaces, faces, vertices, edges, width, length and height.

Pupil's Activities

They supply answers to the teacher's questions.

Step II: Content Development.

Mode: Group Work.

(a) Drawing of cultural artefacts and other solid shapes

Teacher's Activities

Asks pupils to draw cultural artefacts in their exercise books

Pupil's Activities

Pupils draw some cultural artefacts in their exercise books.

(a) Identification of properties of solid shapes.

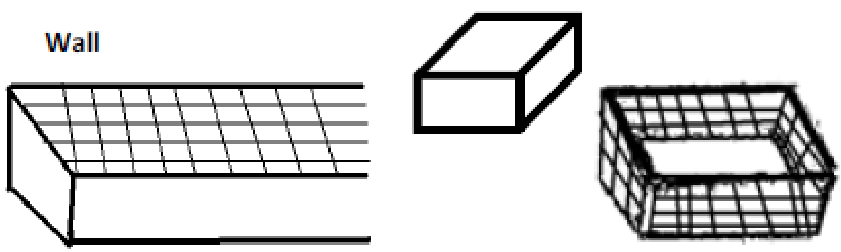
Teacher's Activities

- Teacher notes down the relevant concepts pupils have acquired culturally in relation these cultural objects (solid shapes).
- He connects to the pupil's initial ideas of these cultural artefacts with the new concept to be introduces in the lesson.
- Teacher gradually introduces the properties of each solid shape based on the initial pupils expressed as surfaces, faces, vertices and edges.

The Cuboids

Through questioning, pupils discuss the shape of a sleeping bed (*kiipimpong*) made of clay and the traditional container (*leche*), made of cane rope.

Figure 56. *Illustrative Boxes*

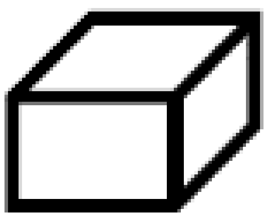


Source: Abiam et al. (2016).

Each pupil participates in identifying and counting the number of the faces (6) edges (12) and vertices (8) and each flat face is a rectangle. The chalk box or matcha box is used to illustrate the properties. To explore their knowledge of a cuboid, each group is asked to write down six objects that have the shape of a cuboid in their home environment. Examples include, chalk box, maths set, match box, carton, etc. This brings out the cultural applications of cuboids.

The cube: teacher illustrates the shape of a cube employing a traditional musical drum (*kakam*). Pupils are asked to draw these cultural artefacts which have all sides equal. Together with the pupils, the properties of a cube are identified and counted thus: 6 equal faces, 12 edges, 8 vertices and each flat surface (face) is a square. The teacher then explores pupil's knowledge of common objects that have the shape of a cube in their home. Examples are magi, sugar and die.

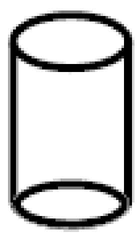
Figure 57. *The cube*



Source: Abiam et al. (2016).

The cylinder: The teacher uses appropriate questions to explore pupils' knowledge of objects (cultural artifacts) that have the shape pf a cylinder. Pupils discuss the shape of native drum (*ekam*), long drum (*kyiru*), made of wood and a local basket (*kakye*). Pupils are asked to draw these cultural artefacts which are cylindrical in shape. Pupils participate to determine the properties of a cylinder (closed) 3 surfaces (two circular surface and one curved surface); 2 curved edges and no vertices. Pupils should discuss the uses of these cultural artifacts in their home setting. The teacher further asks group to list the local application of cylinder in their home environment. Examples include. The body of a round house, native drum, basket making with cane rope etc.

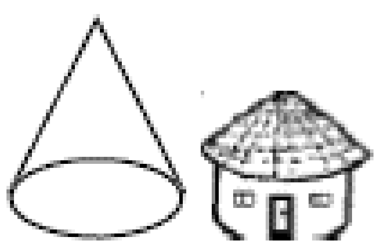
Figure 58. *The Cylinder*



Source: Abiam et al. (2016).

The cone: the teacher explores the knowledge of pupils of traditional objects (cultural artefacts) with the shape of a cone. Pupils list such objects like roof of a round house, the gong (*kemgbung*), top of a basic garri, etc.

Figure 59. *The Cone*

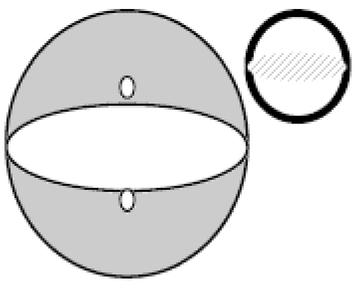


Source: Abiam et al. (2016).

Pupils are asked to explain the cultural applications of this shape (conical) in making yam heap/mound, building the roof of a round house, top of the basin of garri. Teacher explains the properties of a cone: 2 faces (the circular and the curved surfaces), 1 edge and one vertex.

The Sphere: The teacher explores pupils' initial ideas of a shape that is spherical. They are asked to explain the shape of cultural artefacts like a pair of traditional eating plates (*aban*) (*calabash*) made from gourd.

Figure 60. *The Sphere*



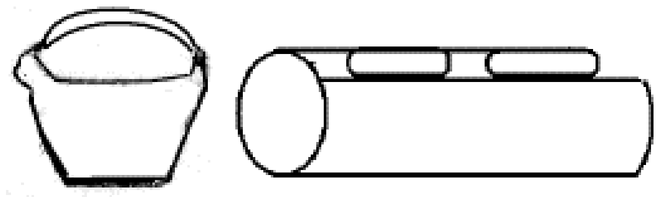
Source: Abiam et al. (2016).

He determines the properties of a sphere: 1 face (round surface), no edge, and no vertex. Pupils are asked to explain the cultural applications of this shape (spherical) in making "Aban" (traditional plates). Examples in the home are: an orange, ball, body of a water pot.

Pupil's Activities

Pupils participate actively with the teacher to develop the content and to mention cultural artifacts related to each solid shape.

Figure 61. *Illustrative Images*



Source: Abiam et al. (2016).

Step III Discussions.

Mode: group work.

Teacher's Activities

- Gives the groups two minutes to discuss properties of solid shapes with regards to cultural artifacts.
- Asks each group leader to present the ideas, listing the properties of each shape.
- Teacher reconciles any misconceptions pupils may express and links same to the lesson.

Pupil's Activities

- Pupils discuss the properties of solid shapes using cultural artefacts.
- Group leaders present the properties of solid shapes.
- Take note of any correction given by the teacher.
- They mention the difference between a cuboid and a cube

Step IV: Summary.

Mode: Whole class.

Teacher's Activities

- The teacher summarizes the lesson and writes summary notes on the chalk board for pupils to write in their exercise books.
- Goes round the class to supervise pupils' work.

Pupil's Activities

Pupils listen and then write down summary notes.
Step V: Evaluation.
Mode: Individual Work.

Teacher's Activities

Ask pupils the following questions:

- List the properties of a cuboid, cone, cube, sphere, and cylinder.
- Write down the names of solids shaped like (a) an orange (b) a brick (c) top of basic of garri (d) a die (e) a ball.
- ¿What is the difference between a cuboid and a cube?

Pupil's Activities

Pupils provide answers to questions.
Assignment.

Indicate the number of (a) faces (b) edges (c) vertices of a cuboid, cube, sphere, cylinder and cone.

Actividad 3: Angles

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** sexto de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** conceptos geométricos.
- **Objetivo de la actividad:**
    - Explain what an angle means.
    - Classify angles.
- **Materiales:** Traditional hoe, hook, made of stick and rope.

Consignas de la actividad

Teacher's Activities

Asks each pupil to draw intersecting lines and note the space between two lines.

Pupil's Activities

Pupils act according to teacher's instructions.
Step II: Content Development.
Mode: Group Work.

Teacher's Activities

Through appropriate questioning, the teacher explores pupils' initial ideas of an angle of cultural artefacts such as traditional hoe ("*kygwap*") and hook (*oyop*).

Figure 62. *Illustrative Images of cultural artifacts*

Source: Abiam et al. (2016).

- Asks pupils to draw a traditional hoe (without the iron head) and a hook used for plucking fruits. They should note the space between the sticks.
- Explains that the amount of space differs as the size of the cultural tool increases or decreases. Pupils are told that space could explain the concept of an angle.

2.2.3.9. Ejemplo 12 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Exploração e problematização de simetrias em artefatos socioculturais para o uso no ensino fundamental.

Objetivo de la investigación: problematizar o ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental por meio de atividades de ensino que explorem relações entre as noções deste conteúdo a estrutura gráfica dos ornamentos de artefatos socioculturais visualizados em suas imagens

País: Brasil.

Autores: Jeová Pereira Martins y Iran Abreu Mendes.

Tomado de: Martins y Mendes (2018).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Procedimentos metodológicos

Para cumprir o objetivo proposto, realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo que contou com as seguintes etapas:

I – Busca e seleção das imagens dos artefatos: para produzir as imagens que compõem o estudo, fizemos uma visita em alguns bairros de Belém, capital do estado do Pará[3] para fotografar, com uma câmera de celular, azulejos históricos, réplicas de cerâmica marajoara, cestaria, arquitetura histórica e gradis de ferro. Imagens de cerâmica islâmica e cestaria africana foram obtidas por meio de uma busca na internet. Foi feita uma seleção de imagens que se justifica por se mostraram fecundas como um meio de proporcionar ao estudante um exercício de visualização, na estrutura gráfica dos artefatos, de elementos que favoreçam a identificação, caracterização,

[3] Especificamente no centro histórico de Belém e na feira do Ver-o-Peso.

estabelecimento de propriedades e semelhanças geométricas, bem como dinâmicas referentes aos casos de Simetria a serem ensinados aos estudantes da Educação Básica.

II – Levantamento bibliográfico: Fizemos o levantamento, seleção e estudo da bibliografia que se refere à literatura especializada da área e às bases epistemológicas da pesquisa para sustentar nossos argumentos. A seleção teve como critério textos que tratassem de temas relacionados ao objeto de estudo e o tipo de pesquisa em questão dentre os quais destaco: simetria, praticas socioculturais, artefatos socioculturais, cultura e ensino de matemática por meio de práticas socioculturais.

III – Organização e análise de dados: Os dados da pesquisa consistem nas imagens dos artefatos e nos dados teóricos, obtidos nas etapas I e II, respectivamente. A sua organização e análise consistiu: (i) no tratamento das imagens para mostrar a relação dos ornamentos dos artefatos com as simetrias de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante; (ii) nas inferências feitas e descritas com base nos pressupostos teóricos adotados. Assim, evidenciamos a relação mencionada, quando mostramos cada caso de Simetria, e como eles podem ser visualizados nos ornamentos dos artefatos socioculturais por meio de suas imagens, pois, a composição dos ornamentos é feita por movimentos que remetem às simetrias.

IV – Elaboração de atividades: Com base na análise dos dados que evidenciou a relação entre a simetria e os artefatos socioculturais foi elaborada uma atividade que consiste em um texto para situar o contexto sociocultural e uma sequência de problematizações relacionadas a algumas imagens de artefatos cuja estrutura gráfica remete aos casos de simetria. A atividade fundamenta-se nas Unidades Básicas de Problematização (UBP) Propostas por (Miguel y Mendes, 2010).

Sobre uma relação da simetria com artefatos socioculturais

Em matemática, a Simetria é um dos assuntos da geometria e definem-se em termos de isometrias que são transformações geométricas no plano que ocorrem por meio de um movimento rígido que é toda maneira de mover todos os pontos do plano de modo que a distância relativa entre pontos e a sua posição relativa permaneçam as mesmas. Assim, por uma isometria, a figura geométrica é deslocada mantendo-se sua forma e tamanho o que caracteriza a Simetria entre a figura inicial e a que foi originada pelo movimento (Farmer, 1999).

As isometrias[4] são classificadas como translação, rotação, reflexão ou uma composição entre essas isometrias que aqui chamaremos de reflexão deslizante[5]. Cada tipo de isometria origina um tipo de Simetria. Assim, analisar a Simetria de uma figura nos remete a investigar se há isometrias que a deixam invariantes.

---

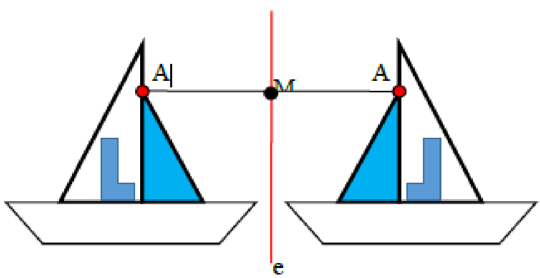
[4] As isometrias de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante foram definidas matematicamente com base em Farmer (1999) e em Brasil (1998).

[5] Termo utilizado em materiais didáticos disponíveis em portais da internet dentre eles: https://www.pucsp.br/tecmem/Artista/simetria

Reflexão

Quando uma figura é refletida em um eixo imaginário o conjunto formado pela figura original e por seu reflexo caracteriza a reflexão, ou seja, a figura e sua imagem são simétricas por reflexão. A observação atenta de cada detalhe da Figura 63 permite concluir que ela é formada por duas partes onde uma é o reflexo da outra pelo eixo de Simetria (e). Se forem tomados dois pontos correspondentes da figura, como A e A', estarão a uma mesma distância do eixo vertical, ou seja, M é o ponto médio do segmento AA' que, por sua vez, é perpendicular ao eixo de simetria.

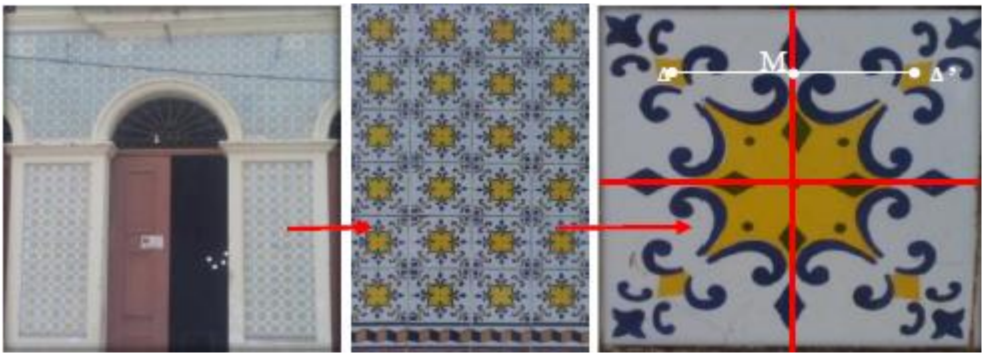
Figura 63. *Simetria de reflexão*



Fonte: Abiam et al. (2016).

A relação entre esse caso de simetria e artefatos socioculturais pode ser evidenciada pela análise dos ornamentos de azulejos históricos de Belém do Pará que fazem parte da cultura luso-brasileira. A Figura 64 retrata a fachada de um prédio localizado no centro histórico de Belém, recoberta por azulejos decorativos que formam um enorme mosaico e decora toda a parte externa do prédio. É possível observar por meio da ampliação da imagem o movimento dos azulejos para compor a decoração e o ornamento que decora cada azulejo.

Figura 64. *Simetria de reflexão em azulejo histórico de Belém*



Fonte: Abiam et al. (2016).

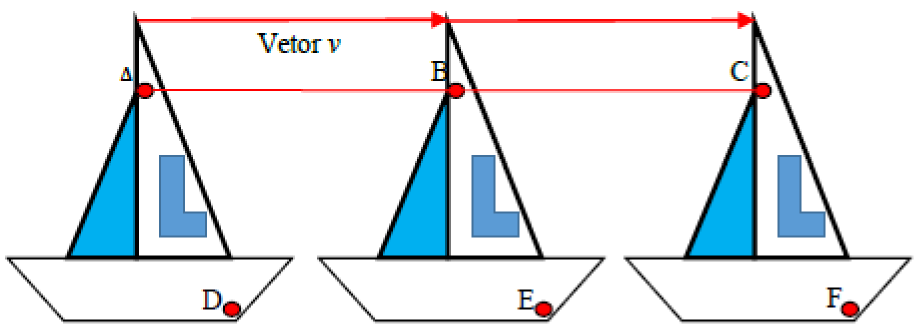
Foram colocados dois eixos (horizontal e vertical) sobre a figura para tornar visível os eixos imaginários que servem de base para o movimento do padrão principal que compõe o ornamento do azulejo. Se for tomada como referência a reta vertical, é possível observar que um lado do padrão é o reflexo do outro por meio da reta, que é o eixo de simetria. Os pontos correspondentes A e A', estão a uma mesma distância do eixo, assim, os segmentos AM e $A'M$ têm o mesmo comprimento. A figura possui, ainda, como eixos de simetria a reta horizontal e as diagonais do azulejo, a partir dos quais é possível fazer as observações e concluir que o azulejo pode ser conectado com a reflexão. Isso fica evidenciado ao serem comparadas, visualmente, as Figuras 63 e 64.

Translação

Na Simetria de translação, todos os pontos de uma determinada figura se deslocam na mesma direção, no mesmo sentido e à mesma distância. Esse deslocamento está associado a um vetor. Assim, a figura é deslocada no plano como se fosse arrastada gerando novas figuras simétricas à primeira por translação.

Na Figura 65, a direção do deslocamento é horizontal, orientada pelo vetor v. Tomados quaisquer pontos correspondentes nas figuras, a distância entre dois deles será a mesma. Assim, tomados A, B e C, $d(A, B) = d(B, C)$, relação que é válida, também para os pontos D, E e F.

Figura 65. *Simetria de translação*

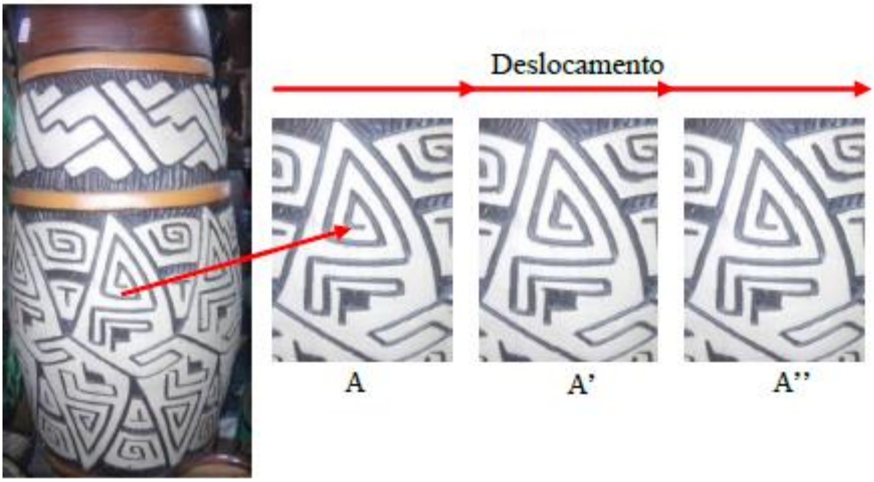


Fonte: Abiam et al. (2016).

As réplicas de cerâmica marajoara produzidas em lugares como Ponta de Pedras, Icoarací e Soure, que são cidades paraenses, e comercializadas na feira do Ver-o-Peso, em Belém do Pará, possuem ornamentos que têm correspondência com os movimentos que originam as simetrias ensinadas nos anos finais do Ensino Fundamental. Isso pode ser observado na Figura 66 que retrata uma peça de cerâmica confeccionada por artesão de Icoarací.

A peça tem formato cilíndrico e é recoberta por ornamentos que estão dispostos em faixas horizontais que circundam a peça. Uma dessas faixas é destacada bem como um padrão que nela se repete. Esse padrão se desloca horizontalmente em volta da peça para compor seu ornamento. O deslocamento se dá sob um vetor e, aparentemente, a uma mesma distância, mantendo a forma e as dimensões do padrão.

Figura 66. *Simetria de translação em réplica de cerâmica marajoara*



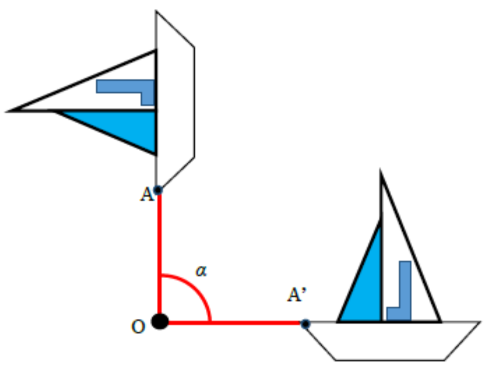
Fonte: Abiam et al. (2016).

Da observação feita é possível concluir que o padrão A, se desloca horizontalmente para a direita e dá origem à A', que, se desloca originando A''. Assim o movimento descrito por A se conecta à simetria de translação definida na Figura 66.

Rotação

A Simetria de rotação consiste em se obter figuras simétricas por meio do giro dessa figura em torno de um ponto central, sob um ângulo determinado. A cada giro sob o mesmo ângulo, serão obtidas novas figuras, simétricas à figura original. Isso pode ser constatado ao se observar a Figura 67, nela o ângulo de giro α mede 90º e o sentido adotado é o anti-horário, no entanto, o ângulo pode ser outro e o sentido, o horário. A distância de quaisquer pontos correspondentes da figura ao centro de rotação O será a mesma. Tomados os pontos A e A' e o centro O, teremos: $d(A, O) = d(A', O)$.

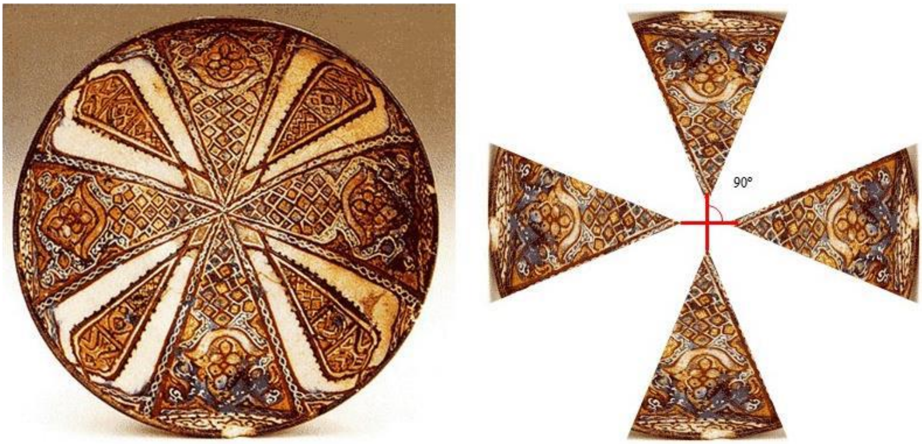
Figura 67. *Simetria de rotação*



Fonte: Abiam et al. (2016).

A Simetria de rotação, definida anteriormente, pode ser percebida nos ornamentos de artefatos de várias práticas socioculturais. A Figura 68 retrata um exemplar da cerâmica islâmica produzida no Iran nos séculos 13 e 14 (d.C.).

Figura 68. *Simetria de rotação em cerâmica islâmica*



Fonte: Abiam et al. (2016)

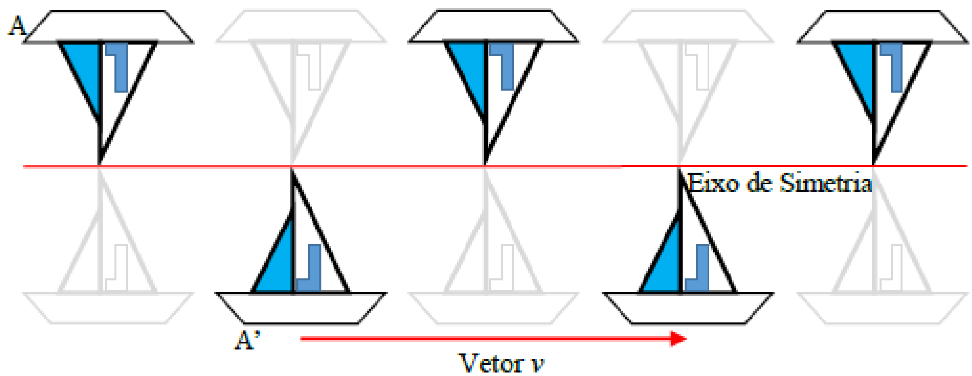
Ao se observar a imagem da peça, é possível identificar dois padrões com formato triangular que se destacam no ornamento. Os padrões em destaque servem de matrizes para que se conecte a Simetria à referida figura uma vez que, girada sob um ângulo múltiplo de 90º, tais padrões serão sobrepostos e a figura obtida por rotação coincidirá com a figura original caracterizando a Simetria de rotação.

Vale ressaltar que a cerâmica é um artefato que se encontra em várias culturas pelo mundo inteiro, sendo uma das manifestações culturais mais antigas da humanidade. Por isso, conectar esse artefato ao ensino de Simetria no Ensino Fundamental é uma forma de alertar os estudantes para o valor histórico e sociocultural que as cerâmicas têm para a humanidade e de fazê-los compreender que é preciso cuidar desse patrimônio para que ele permaneça "vivo" nas culturas.

Reflexão deslizante

Toda transformação que resulta da composição de uma reflexão na reta com uma translação (ou vice-versa) e cuja direção de translação é paralela à reta, é uma reflexão deslizante.

Figura 69. *Simetria de reflexão deslizante*



Fonte: Abiam et al. (2016).

A partir da observação da Figura 69 é possível concluir que o padrão A é refletido na reta horizontal (eixo de simetria) e, em seguida, é transladado sob o vetor v (também horizontal) originando a figura A'. Esse movimento se repete formando uma faixa que pode se prolongar infinitamente. A mesma faixa seria originada se o padrão A fosse transladado e, em seguida, refletido.

O artefato retratado na Figura 70, é um cesto confeccionado em fita por mulheres moçambicanas falantes da lingua tonga. As fitas, em duas cores (clara e escura) se entrelaçam dando forma ao cesto e a seus ornamentos.

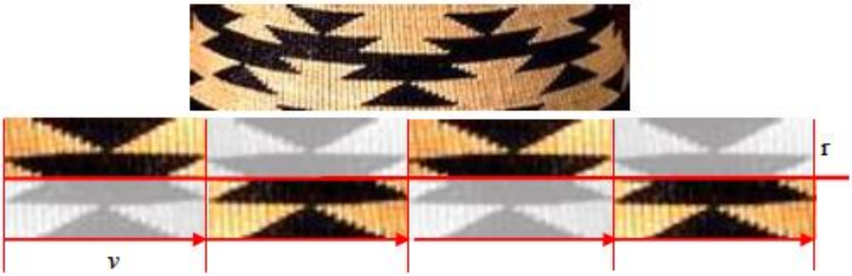
Como se pode observar, a superfície do cesto possui um padrão principal que se desloca por ela formando seu ornamento (Gerdes, 2012).

Figura 70. *Cesto Tonga*

Fonte: https://peabody.harvard.edu/north-america

O padrão principal se desloca pela superfície do cesto em faixas horizontais. Destacamos o movimento desse padrão na Figura 71 para evidenciar sua relação com a Simetria de reflexão deslizante. A reta r é a base para o movimento de reflexão e o vetor v para o movimento de translação. O padrão é refletido na reta r e deslocado na direção de v.

Figura 71. *Simetria de reflexão deslizante em cesto Tonga*



Fonte: Abiam et al. (2016).

É possível concluir por meio da imagem que os deslocamentos do padrão em destaque, têm correspondência com o movimento de composição entre Simetrias, que chamamos de reflexão deslizante, pois, sofre reflexão e depois translação percorrendo toda a superfície curva do cesto até dar uma volta completa.

O estudo que fizemos até aqui, mostra que as Simetrias e os artefatos socioculturais possuem uma relação que pode ser percebida com certa facilidade por observadores, desde que sejam orientados e conduzidos para isso. Assim, ao visualizar um número considerável de imagens de artefatos, os estudantes poderão compreender que há duas estruturas implícitas nesses artefatos, uma variante e outra invariante. O que varia são as culturas, os artefatos, o formato, o material e, o que não varia, é a estrutura que está "por traz" dos ornamentos, o padrão de elaboração, de construção deles, que é a Simetria, ou melhor, o pensamento simétrico.

Para concluir nosso pensamento sobre as Simetrias e sua relação com os artefatos socioculturais, queremos reforçar a nossa proposta para o ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental. Ela consiste, basicamente, em tomar os artefatos e/ou suas imagens como base para o ensino-aprendizagem desse assunto e pode ser operacionalizada, pelo professor por meio da apresentação de alguns artefatos (imagens) aos alunos que remetam aos casos de Simetria, e, posteriormente, pela discussão em sala de aula proporcionada por atividades de problematização propostas a seguir.

Ensino de simetria por meio de problematização

Como resultado principal deste trabalho propomos uma atividade de problematização que poderá ser utilizada como uma estratégia didática para o ensino de simetria no Ensino Fundamental. Essas atividades de sala de aula podem ser elaboradas de forma a conduzir o estudante a descobrir as simetrias, ou seja, as definições matemáticas dos casos de simetria devem ser ensinadas após a realização de atividades como a que propomos. Assim, o professor de matemática poderá em suas aulas promover discussões por meio de problematizações, que levem o estudante a praticar uma ação, podendo gerar novos questionamentos e estes discutidos com os demais participantes da atividade. Todo esse processo poderá levar o estudante a ter contato com o objeto de estudo e a apreender as definições a ele relacionados (Miguel y Mendes, 2010). Tal atividades deverão ter como objetivo o ensino do conceito de Simetria, e como base metodológica as Unidades Básicas de Problematização - UBP.

> Uma UBP nada mais é do que um *flash discursivo memoralistico* que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade (ou desejo) que teria se manifestado a um ou mais integrantes de uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (Miguel & Mendes, 2010, p. 386).

A atividade que elaboramos descreve não só uma prática, mais um conjunto de práticas, que se situam em um mesmo local: a feira do Ver-o-Peso em Belém do Pará. Elaboramos um pequeno texto que descreve suscintamente o lugar bem como o comércio de peças de cerâmica e cestarias. A partir de imagens desses e de outros artefatos socioculturais, elaboramos alguns questionamentos objetivando que os estudantes pesquisem e discutam os resultados obtidos podendo, assim, apreender os conhecimentos relacionados às simetrias.

Sugerimos ao professor que a atividade seja trabalhada em grupos e que, após a sua "resolução" os grupos possam apresentar os resultados para serem discutidos. O professor deve adaptar a atividade para o contexto de sua turma, bem como, elaborar outras atividades que tenham como tema os casos de Simetria em outros contextos.

Atividade de problematização

A feira do Ver-o-Peso, importante entreposto comercial de Belém do Pará, é um dos pontos turísticos mais visitados da cidade. Construções antigas e a diversidade de produtos comercializados e de serviços oferecidos são atrativos desse lugar que recebe diariamente, visitantes do Brasil e do exterior.

Fazendo um tour pelo Ver-o-Peso, você irá encontrar: peixe frito com açaí, maniçoba, tacacá, bebidas diversas, artesanato, atrações culturais como grupos de carimbó, ervas medicinais, dentre outros. Um dos cartões postais da feira é o mercado de peixe (Figura 72) que é "a cara do Ver-o-Peso", mas, além dele, o mercado de carnes se destaca por sua construção e arquitetura muito particular.

Figura 72. *Feira do Ver-o-Peso*

Fonte: http://viagemeturismo.abril.com.br/atracao/mercado-ver-o-peso/

Continuando o seu passeio você pode visitar as barracas de artesanato que têm vários tipos de peças, dentre eles as cerâmicas e cestarias (Figura 73). As cestarias são, geralmente, confeccionadas com fibras vegetais extraídas de arvores da Amazônia, como o Buriti, por exemplo. São chapéus, bolsas, porta prato, abanos (leques), balaios, cestos e peneiras.

Figura 73. *Cerâmica e artesanato do Ver-o-Peso*

Fonte: http://viagem.estadao.com.br/blogs/viagem/

As cerâmicas, feitas em barro e decoradas a mão pelos artesãos, vêm de vários lugares do estado como Ponta de Pedras, Soure, Icoarací, dentre outros, e são comercializadas no Ver-o-Peso. Possuem utilidades diversas e, assim como as cestarias, são muito usadas como objetos de decoração. São encontradas por várias regiões do mundo e sua origem teria ocorrido a pelo menos, 7 mil anos. Seus ornamentos possuem uma riqueza de detalhes que impressiona pela beleza e precisão (Marconi y Presotto, 2011).

O texto que você leu menciona e apresenta imagens de cestarias, cerâmicas e construções antigas que são exemplos de artefatos socioculturais.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** no especificado.
- **Objeto matemático estudiado:** simetrías.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.
- **Materiales:** Fotografías de elementos de la cultura.

Consignas de la actividad

Observe as fotografias da Tabela 13 e repita os procedimentos abaixo para cada uma delas.

- Observe a figura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda, de baixo para cima e de cima para baixo. Há elementos se repetindo nela? Em caso afirmativo, quais os elementos que se repetem?

- Fazendo marcações na figura, identifique um ponto central que a divida ao meio e trace uma reta vertical passando por esse ponto. Agora direcione seu olhar partindo da reta para a direita e para a esquerda. O que você conclui dessa observação?

- A Reta divide a figura em duas partes iguais? Faça medições para comprovar tal fato.

- Meça a figura e trace um segmento de reta horizontal em sua base que represente o comprimento da figura retratada. Divida esse segmento ao meio e marque um ponto indicando a metade. Esse ponto coincide com a reta vertical que você traçou?

- Chamamos de correspondentes os elementos que estão se repetindo do lado esquerdo e direito da reta vertical. Identifique com letras ou números (iguais) os elementos correspondentes formando pares. Quantos pares de elementos você identificou?

- Tome um desses pares de elementos correspondentes. Meça a distância de um deles até a reta vertical e depois do outro e compara essas distâncias. Elas são iguais ou aproximadas? Repita esse procedimento para os outros pares de elementos complementares.

- Pegue um espelho e coloque-o sobre a reta vertical de forma que este fique perpendicular à foto e com a parte espelhada para a sua esquerda. Vamos chamar de A o lado da figura que está à esquerda do espelho e de B o lado que está à direita. Observe a figura refletida no espelho. Qual a relação do lado A com o reflexo no espelho? E do lado B? Repita o procedimento virando a parte espelhada para o outro lado.

Tabela 13. *UBP sobre reflexão*

Figura	Orientações
 Mercado de ferro **Fonte:** https://eudyrj.wordpress.com/2012/06/26/belem-paris-namerica-a-arquitetura-de-ferro/	# Na observação desta figura, deve ser considerada somente a fachada do mercado de ferro.
 Artesanato do Ver-o-Peso. Fonte: Abiam et al. (2016).	# Para uma análise mais completa desta figura, devem ser traçados os eixos vertical e horizontal.

 Grade de ferro de Belém. Fonte: Abiam et al. (2016).	# Para uma análise mais completa desta figura, devem ser traçados os eixos vertical e horizontal.
 Azulejo decorado. Fonte: Abiam et al. (2016).	# Para uma análise mais completa desta figura, devem ser traçados os eixos vertical, horizontal e as diagonais.

Fonte: Abiam et al. (2016).

Agora, lê com atenção as seguintes perguntas. Para obter respostas investigue sobre o assunto na internet ou na sua cidade. Quando concluir, discuta os resultados com os demais estudantes de sua turma.

- Na sua opinião é possível identificar uma característica que seja comum à as imagens estudadas? Descreva essa característica.
- Dê um nome para a característica que você encontrou e que é comum para todas as imagens estudadas.
- Além dos artefatos retratados nas imagens é possível que existam outros, em sua cidade, com essa mesma característica? Faça uma pesquisa e dê exemplos.
- Faça uma pesquisa por elementos que são comercializados em outras feiras pelo mundo e que tenham a característica que você identificou nos elementos do Ver-o-Peso.
- A cultura dos povos da África é diversificada é similar à cultura do Brasil, um exemplo disso são as cestarias. Pesquise por imagens de cestarias africanas e brasileiras. Essas imagens possuem a característica que você nomeou?

2.2.3.10. Ejemplo 13 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Etnomatemática no Garimpo: contribuições para o ensino de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas.

Objetivo de la investigación: apresentar as contribuições pedagógicas de uma pesquisa de Mestrado que foi desenvolvida em dois garimpos localizados na zona rural do município de Parelhas, no Estado do Rio Grande do Norte - RN, para o ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

País: Brasil.

Autores: Freudson Dantas de Lima y Francisco de Assis Bandeira.

Tomado de: Dantas De Lima y Bandeira (2018).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

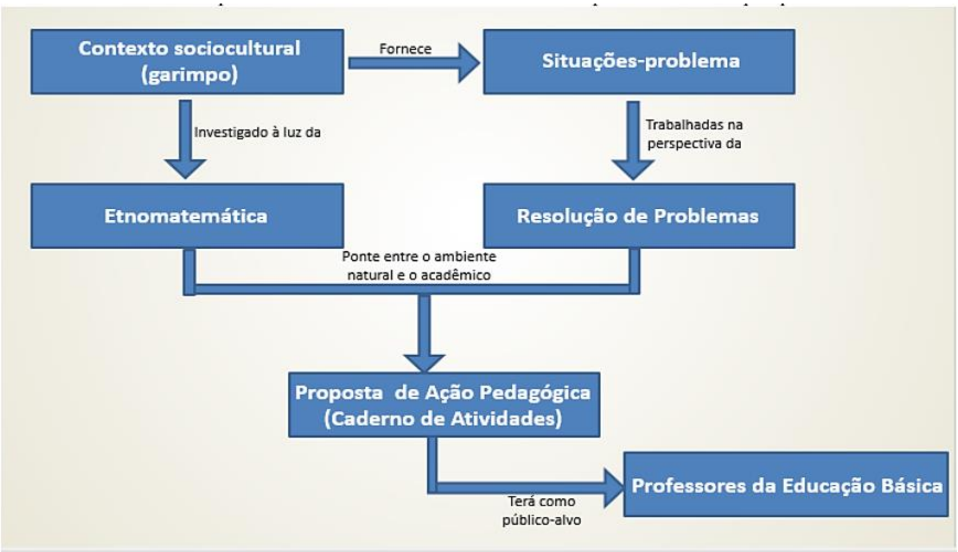
Procedimentos metodológicos

A pesquisa de campo realizada no presente trabalho foi desenvolvida em dois garimpos localizados no sítio Cumbe, na zona rural do município de Parelhas-RN, distantes dezoito quilômetros do centro da referida cidade. Os sujeitos analisados, foram os garimpeiros que ali desenvolvem as atividades de extração e comercialização de minerais.

Os procedimentos metodológicos empreendidos durante as investigações realizadas nos garimpos pesquisados foram pautados nas concepções da pesquisa qualitativa, empregando alguns elementos da etnografia para coleta e análise dos dados que foram utilizados como subsídios para elaboração das situações-problema que compõem a proposta de ação pedagógica, um Caderno de Atividades, destinado ao ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Elaboramos um esquema explicativo para ilustrar toda estrutura metodológica percorrida até chegarmos ao produto final da pesquisa, a construção da proposta de ação pedagógica (Ver a Figura 74).

Figura 74. *Ilustração da estrutura metodológica, explicitando os passos percorridos do contexto sociocultural ao produto final da pesquisa*



Fonte: Dantas De Lima y Bandeira (2018, p. 41).

Logo nas primeiras visitas realizadas aos garimpos, foi possível identificar conhecimentos matemáticos nos saberes e fazeres dos garimpeiros, quando estes separam o material que irá extrair o minério, nas estimativas de profundidade que eles se encontravam dentro da mina, nos cálculos aproximados de volume durante o transporte, na construção de valetas para o escoamento da água durante o período das chuvas, nas técnicas de escavação e durante a comercialização dos minerais. Conhecimentos matemáticos estes que diferem dos abordados nos livros didáticos, e que, são modos, estilos e técnicas de lidar com o ambiente natural, muitas vezes passados de pai para filho.

Descreveremos a seguir, o conhecimento etnomatemático de um garimpeiro ao lidar com uma situação que necessitava trabalhar com as unidades e medidas.

O saber-fazer do garimpeiro para realizar medições

Em uma de nossas visitas de rotina, logo ao chegarmos no garimpo, nos deparamos com um caminhão-caçamba estacionado esperando para ser realizado um carregamento de minério (ver a Figura 75).

Figura 75. *Caminhão-caçamba esperando para ser carregado*

Fonte: Dantas De Lima y Bandeira (2018).

Atento em identificar possíveis conhecimentos matemáticos que estivessem envolvidos nessa atividade, me dirigi até o garimpeiro Almiran

Fernandes e perguntei se eles tinham no garimpo algum tipo de objeto para medição, uma trena ou uma fita métrica, para que eu pudesse medir as dimensões da caçamba desse caminhão.

O garimpeiro me respondeu: *"trena, fita métrica? Não utilizamos nada disso quando precisamos fazer alguma medição".*

Eu então o questionei: nesse caso, como faço para registrar as medidas dessa caçamba? O senhor Almiran, respondeu: *"com uma corda".*

Eu: como isso é possível?

O garimpeiro descreve*: "basta você medir quatros palmos e meio em uma corda e cortá- la; pronto, você terá um pedaço de corda com um metro e poderá fazer sua mediação".*

Nesse momento, o garimpeiro pega um pedaço de corda e diz: *"vamos, eu vou lhe ensinar"* (Ver a Figura 76).

Figura 76. *Garimpeiro explicando como se faz para medir um metro utilizando uma corda*

Fonte: Dantas De Lima y Bandeira (2018).

O senhor Almiran me passou o pedaço de corda e comecei a contar os palmos, conforme havia descrito. Logo no início fui interrompido, *"não é assim que se faz, você está contando um palmo como sendo do polegar até o dedo maior de sua mão; desse jeito não dá certo, você precisa contar um palmo do seu dedo polegar até o dedo mindinho"*. Segui mais essa instrução do senhor Almiran e fiz a medição de um metro de corda, de acordo com os conhecimentos empíricos repassados por esse garimpeiro. Posteriormente, nos dirigimos até a caçamba do caminhão para realizar as medições, primeiro o comprimento, em seguida a largura e, por fim, a altura.

Então, vejamos como procedemos: esticamos a corda de um metro de comprimento por quatro vezes, ao longo do comprimento da caçamba, quando percebi que não teríamos mais espaço suficiente para repetir essa operação. Nesse momento, o senhor Almiran dobra a corda ao meio e a coloca no restante do espaço que ainda faltava medir, onde a mesma se encaixou perfeitamente. Logo, o garimpeiro afirmou: *"pronto, esse lado que acabamos de medir tem quatro metros e meio"*.

Passamos então para a parte traseira da caçamba, para realizar a medição da largura da mesma. Esticamos a corda de um metro de comprimento por duas vezes e eu já percebi que não haveria mais espaço suficiente para repetir essa operação. Atento à realização do procedimento anterior, dobrei a corda ao meio e a posicionei na parte que ainda faltava medir, quando percebi que ainda sobrava um pequeno pedaço. Nesse instante, o senhor Almiran vai logo afirmando:

> Nesse caso, como não foi possível colocar exatamente nem a corda inteira, nem a metade dela, a gente sabe, por experiência, a medida desse pedaço que sobra, ou seja, como sobrou um pedaço bem pequeno da corda que já tinha sido dividida ao meio; então podemos dizer que ele tem 10 centímetros, aí só é fazer 50 centímetros menos 10, que dá 40 centímetros, que é o valor da parte que falta medir. Logo, a lateral dessa caçamba tem 2 metros e 40 centímetros.

Registrei essa segunda informação e pedi novamente ajuda para medir a altura da caçamba. Vejamos esse procedimento: estiquei a corda uma vez e já percebi que não poderia repetir esse processo, já que a altura da caçamba tinha menos de dois metros, então segui o segundo passo de dividir a corda ao meio para verificar se a tal altura poderia ser medida acrescentando meio metro à medição anterior. Nesse momento, utilizando a metade da corda, vi que sobrava um pedaço ainda maior que aquele observado na medição da largura descrita anteriormente.

Novamente, pedi ajuda ao garimpeiro, que de pronto me falou:

> Nesse caso, como sobrou um pedaço ainda maior da corda que foi dividida ao meio, podemos dizer que ele tem em torno de 20 centímetros, ou seja, o que foi utilizado foi 30 centímetros. Para você ter uma ideia melhor do que estou falando, basta dividir a corda novamente ao meio, tendo assim um pedaço de 25 centímetros, então pode anotar aí no seu caderno que a altura dessa caçamba mede um metro e 30 centímetros.

Impressionado com esses conhecimentos matemáticos utilizados pelo garimpeiro, que cursou apenas as séries inicias do Ensino Fundamental, registrei as três informações que obtivemos na realização da medição das dimensões da caçamba, a saber: comprimento = 4,5 m; largura = 2,4m e altura = 1,3m. Em seguida, calculei o volume da caçamba, levando em consideração os dados coletados por meio dos conhecimentos empíricos do garimpeiro Almiran Fernandes.

Considerando que a caçamba do caminhão tem o formato de um prisma retangular, teremos o esquema a seguir para o cálculo do seu volume (Ver a Figura 77):

Figura 77. *Cálculo do volume da caçamba*

Vc = Cc x Lc x Ac

Vc = 4,5m x 2,4m x 1,3m

Vc = 14,04m^3

INFORMAÇÕES

Vc – Volume da caçamba

Cc – Medida do comprimento da caçamba em metros

Lc – Medida da largura da caçamba em metros

Ac – Medida da altura da caçamba em metros.

Fonte: Dantas De Lima y Bandeira (2018).

Nesse momento, o motorista do caminhão-caçamba, que tinha saído para tomar um café, se aproxima e pergunta: "o que você está fazendo? ". Respondi: "estou medindo as dimensões dessa caçamba para encontrar o volume dela". O motorista continua*: "mas não precisa medir, tem uma* *plaquinha aqui que tem essa informação, venha que eu vou lhe mostrar"* (veja a Figura 78).

Figura 78. *Placa afixada no caminhão-caçamba*

Fonte: Dantas De Lima y Bandeira (2018).

Ao visualizar a placa que estava localizada abaixo da caçamba do caminhão, fiquei surpreso ao perceber que o volume da caçamba, calculado com base nos dados coletados usando a corda, houvera se aproximado significativamente do valor disponibilizado nas identificações afixadas no caminhão, sendo no primeiro caso, 14,04 m^3 e no segundo 14, que corresponde a 14 mil litros de capacidade, ou seja, um recipiente com 14 m^3 de volume.

Essa é uma situação-problema que poderá envolver vários conteúdos de matemática básica, tais como, questões de geometria espacial, porcentagem, razão, proporção, regra de três e dízimas periódica. A situação-problema que acabamos de relatar também está inserida em nossa proposta de ação pedagógica, a qual iremos apresentá-la a seguir.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Situación problema

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** tercero de enseñanza media.
- **Objeto matemático estudiado:** unidades de medida.
- **Objetivo de la actividad:** no especificado.

Consignas de la actividad

No garimpo, a unidade de medida metro é representada pelo conhecimento do garimpeiro como sendo a medida de quatro palmos e meio[6]. O transporte dos minérios é realizado em caminhões-caçamba, conforme podemos identificar na Figura 75 do presente artigo. Utilizando apenas os seus conhecimentos socioculturais, um garimpeiro conseguiu encontrar as dimensões da caçamba deste caminhão, obtendo as seguintes informações: comprimento = 4,5 m, largura = 2,5 m e altura = 1,5 m.

De posse destas informações, encontre e demostre uma possível maneira que o garimpeiro poderá ter utilizado para medir as dimensões de comprimento, largura e altura da caçamba do caminhão, utilizando apenas o conhecimento de que a unidade de medida metro, pode ser representada como a medida de quatro palmos e meio, em seguida encontre o volume desta caçamba de acordo com os dados descritos.

[6] O garimpeiro procede essa medição considerando a medida de um palmo como sendo o espaço entre o dedo polegar e o mínimo com a palma da mão aberta.

2.2.3.11. Ejemplo 14 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Actividades didácticas apoyadas en algunos aspectos históricos de la cultura y matemática Maya.

Objetivo de la investigación: explorar una vía para encontrar caminos hacia el conocimiento geométrico del séptimo grado mediante el estudio de algunos aspectos relevantes de una de las culturas más importantes de Mesoamérica, como los mayas, donde se evidencia el uso de simetrías, traslaciones y giros en sus manifestaciones artísticas, logrando resultados estéticos sorprendentes.

País: Colombia.

Autores: Nancy Dayana Díaz Toro, Sandra Viviana Escobar Madroñero y Saulo Mosquera López.

Tomado de: Díaz Toro et al. (2009).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

La cultura Maya

Los orígenes de la civilización maya son objeto de discrepancias académicas en virtud de las contradictorias interpretaciones de los hallazgos arqueológicos.

El inicio de la cultura maya, denominada preclásico o formativo (1600 a. C. al 300 d. C.), se remonta al primer asentamiento en las montañas del oeste de Guatemala, alrededor del año 2500 a. C. Los primeros grupos mayas que se establecieron en la península de Yucatán lo hicieron aproximadamente en el año 1600 a. C., y en Tabasco para el año 900 a. C. Sus actividades económicas principales incluían la recolección de frutos, la caza y la pesca, así como una agricultura de subsistencia. Durante el preclásico medio, mejoraron sus técnicas agrícolas, lo que les permitió alcanzar una mayor autosuficiencia. En el preclásico superior, los mayas entraron en contacto con la civilización olmeca, lo que resultó en la adopción del calendario, la cuenta larga y el desarrollo incipiente de la escritura. Durante este período, destacaron ciudades como Maní, Dzibilchaltún, Komchén, Izamal, Tikal, Copán, Chichén Itzá, Kabah, Loltún, entre otras.

El apogeo de la civilización maya tuvo lugar durante el llamado Periodo Clásico (300 al 900 d. C.). En este período, la cultura maya experimentó su máximo desarrollo en los ámbitos tecnológico, social, económico, político, religioso y artístico, lo que se conoce como la "Época de Oro" de los mayas.

En el esplendor de la cultura maya se destaca:

La arquitectura: se caracteriza por un sentido exquisito de la proporción y el diseño, así como por su refinamiento estructural y la sutileza de los detalles. Los mayas emplearon la escultura de manera más extensa en la decoración arquitectónica que cualquier otra civilización precolombina.

El arte: es el más refinado y elegante de todos los desarrollados por las civilizaciones precolombinas, es digno y majestuoso, exuberante y sensual, y presenta una ornamentación espléndida. Las estelas (bloques o pilares de piedra) con relieves figurativos e inscripciones son los ejemplos más característicos de las esculturas conmemorativas realizadas en piedra.

Los mayas dominaron todas las formas artísticas precolombinas conocidas, menos el trabajo en metal. Aunque no se conservan telas tejidas por ellos, su calidad y decoración pueden apreciarse a través de las representaciones en pinturas, figurillas y esculturas bellamente proporcionadas y de armonía estética sobre estelas, dinteles y en los frisos que decoran paredes y templos. Estas esculturas en piedra representan los sacrificios humanos, ceremonias sangrientas y otros ritos de purificación, mientras que otras exponen a ricos gobernantes con espléndidos peinados, dioses, figuras geométricas, aves y animales.

Los dioses mayas: la religión jugaba un papel muy importante en la vida diaria y en todas las actividades, ya fuera de mucha o poca importancia, estaban regidas por deidades. La serpiente emplumada se convirtió en la mayor deidad en la península de Yucatán después de la llegada de los toltecas en el siglo X de nuestra era. Estos extranjeros guerreros provenientes del centro de México adoraban a este dios con el nombre de Quetzalcóatl. Los mayas le cambiaron el nombre a Kukulcán y dedicaron un templo al nuevo dios en Chichén Itzá.

Matemática maya: Los mayas tuvieron el desarrollo más sustentable en el aspecto matemático-astronómico de las culturas de América. En relación al sistema numérico, esta cultura descubrió dos ideas fundamentales en matemáticas: el valor posicional y el cero. Solo otra gran cultura antigua, como la hindú, logró descubrir estos conceptos aproximadamente trescientos años después que los mayas. Estos dos elementos, el valor posicional y el cero, pueden parecer simples y básicos hoy en día, de hecho, lo son y en ello radica precisamente la genialidad maya.

En los siglos III o IV a. C. los sacerdotes mayas concibieron un sencillo sistema de numeración basado en la posición de los valores, que implica la concepción y uso de la cantidad matemática cero, aún hoy en día este sistema permanece en pie como una de las obras más brillantes del intelecto del hombre. Este tipo de numeración maya tenía dos variantes: los numerales geométricos o normales y los numerales en forma humana, que por lo general, se presentaban como una cara antropomorfa, aunque existen casos especiales donde se presenta todo el cuerpo.

La primera notación, la geométrica, está constituida por puntos, rayas y el símbolo de la concha.

Figura 79. *Principales símbolos mayas*

Fuente: Díaz Toro et al. (2009, p. 10).

Esta es la que comúnmente se conoce y difunde como la notación maya. Su utilización es simple: la concha representa el cero, los puntos representan unidades y las rayas cinco unidades; se pueden formar agrupaciones de puntos con un número máximo de cuatro y las rayas tienen como máximo el de tres por cada agrupación, todo esto utilizando un principio de adición. Se manejan de este modo representaciones del cero al diecinueve, pues cada posición en el sistema, es de veintenas, de ahí que los primeros veinte numerales sean:

Figura 80. *Los veinte números mayas*

Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Geometría maya: cuando se habla de geometría, generalmente se piensa en el desarrollo de la misma al estilo formal de la Geometría Euclidiana, pero rara vez pensamos en la geometría que nos heredaron nuestros ancestros, en especial, los mayas. En el esplendor de la cultura Maya, se levantaron grandes centros ceremoniales en el sureste de la república mexicana, casi en toda Guatemala, Honduras y el Salvador. En cuanto a la geometría:

> "[…] lo mismo que con las otras ciencias desarrolladas por los Mayas, el conocimiento maya, fue integrado y desarrollado para el beneficio

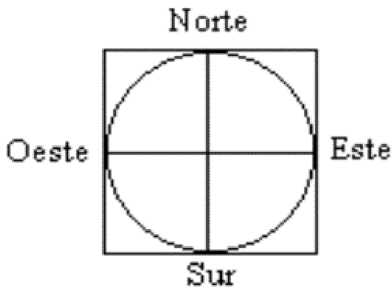
> de la colectividad, cuando se estudia el trazo de las ciudades, éstas tienen una relación impresionante con la Astronomía. […] La gran mayoría de los templos mayas, son tetraedros truncados, prismas de base rectangular, en algunos casos cilindros circulares, como se encuentra en el centro arqueológico del Ceibal.” (Díaz Toro et al., 2009, p. 11)

El calendario maya: para los mayas, el concepto de tiempo cíclico fue asumido con gran naturalidad, lo que los llevó a explotar al máximo un método de sistematización observacional para desarrollar el sistema calendárico más preciso que la humanidad hubiera inventado hasta la fecha. El tiempo lo era todo para los mayas. Si eran capaces de medir el tiempo con exactitud también serían capaces de predecir en qué momento iban a producirse las guerras, las victorias, los desastres y todas las acciones y sucesos que ya habían acontecido con anterioridad. El tiempo era cíclico por lo que con un calendario perfecto podrían predecir el futuro, convirtiéndose así, en los señores del tiempo. De ahí que, el calendario de gran complejidad, asombrosa exactitud y perfección, fuese uno de los elementos que definían y daban carácter a la civilización maya.

La astronomía maya: Los mayas, como muchos otros pueblos, a lo largo de la historia se dedicaron a la observación del cielo nocturno. Es difícil precisar las fechas exactas en las que los mayas comenzaron a actuar como verdaderos astrónomos; sin embargo, es claro que la observación rigurosa del movimiento de los planetas era común entre ellos antes de la era cristiana. Según el *Pop Wuj*, el libro sagrado de los mayas, mejor conocido como el

Popol Vuh, en tiempos primigenios, sus sabios dividieron el cielo en cuatro grandes regiones conocidas como los cuatro confines del Universo; esta división del cielo puede representarse como un simple cuadrado, dividido en cuatro por una línea horizontal y una vertical, con un círculo inscrito en él. (Díaz Toro et al., 2009, p. 12)

Figura 81. *Mapa del cielo 1*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Cada sector estaba asociado a un punto cardinal. Es interesante observar cómo, incluso en la actualidad, muchas danzas ceremoniales mayas comienzan trazando un círculo y dividiéndolo en cuatro sectores. Este fue el modelo más básico de división del cielo que plantearon en los primeros tiempos de la astronomía.

La civilización maya en actividades didácticas

El desarrollo matemático y geométrico de los mayas proporciona una fuente inagotable de conocimiento cultural, que articulado con actividades didácticas ofrece la posibilidad de trabajar la geometría del grado séptimo, contribuyendo a la recuperación de dicho conocimiento matemático.

Para obtener los propósitos establecidos, en las actividades específicas, se precisó tanto el contenido o aspecto temático a tratar como las acciones mediante las cuales se efectuó dicho tratamiento, en particular, la forma como se usaron los elementos históricos seleccionados. Cada actividad incluye un aspecto temático específico, un propósito, la descripción (la actividad propiamente), sugerencias didácticas para su desarrollo, así como para su evaluación. Es importante mencionar que los contenidos (traslación, rotación, simetría, semejanzas) se desarrollaron en unidades que incluyen: una aproximación, una formalización, un refuerzo y una evaluación de la temática específica, además de trabajar en cada una de ellas con logros e indicadores de logro para que el docente observe las debilidades, aciertos y fortalezas de los estudiantes. Las debilidades para superarlas y corregirlas, las fortalezas para optimizarlas.

Traslaciones

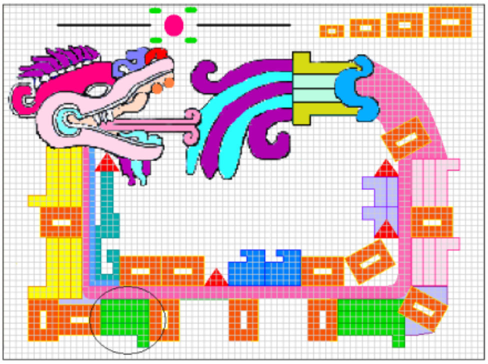
Con el fin de facilitar un aprendizaje más creativo y afectivo de las traslaciones, se han escogido dos aspectos fundamentales de la cultura maya: los dioses y la astronomía. El interés por los dioses de la cultura maya, particularmente, de Quetzalcóatl (Kukulcán), radica en su simbolismo como elemento sintetizador de las ideas de esta civilización, además de presentar en su estructura gran variedad de figuras geométricas que permiten enriquecer el estudio de las traslaciones. Es importante mencionar que la imagen de Quetzalcóatl con la que se trabaja es la que se encuentra en la ciudad de Xochicalco. La Figura 82 muestra lo descrito.

Figura 82. *Quetzalcóatl, serpiente emplumada presente en la pirámide de Xochicalco*

Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

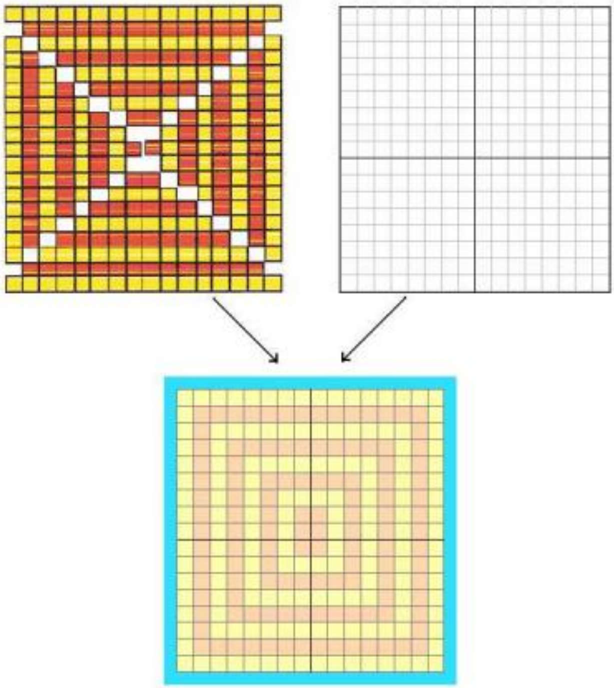
Sin embargo, es importante señalar que, para lograr un mayor beneficio didáctico en las actividades, se han realizado algunas modificaciones en su presentación, como se puede observar a continuación:

Figura 83. *Quetzalcóatl modificado para utilizarse en una actividad de traslación*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Figura 84. *Geoplano maya, combinación de un geoplano convencional con el cielo maya*



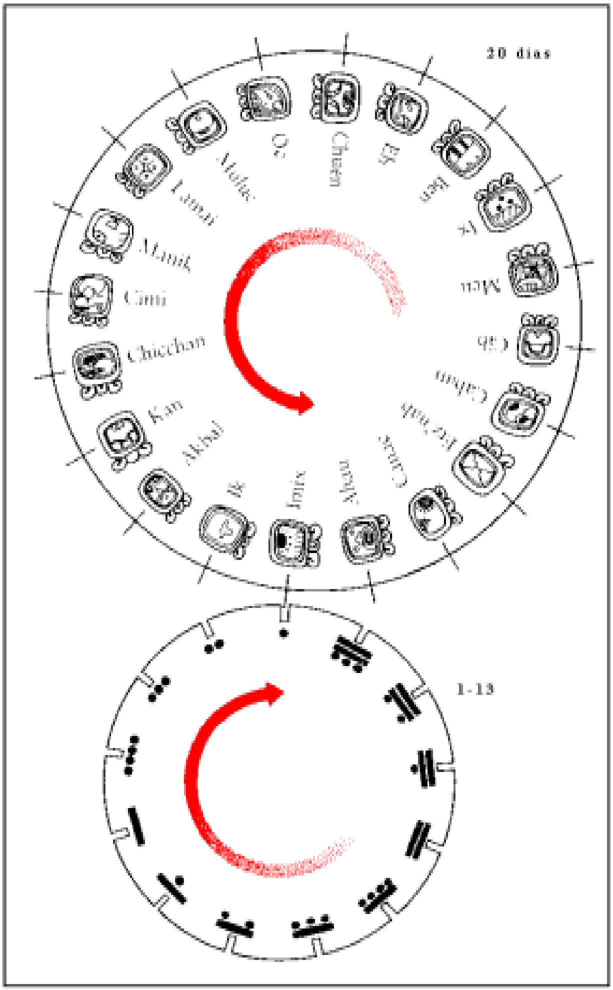
Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Por otro lado, se utiliza el conocimiento astronómico que desarrolló la cultura maya a través de la observación del cielo (cielo maya, lo cual le permitió a esta cultura desarrollar técnicas y artes en otras disciplinas del conocimiento), con el geoplano (tablero con una malla de clavos), indicado en la Figura 84, ya que al combinar el cielo maya con este instrumento, se obtiene un recurso didáctico beneficioso para estimular y despertar la creatividad, buscando integrar la pedagogía con el desarrollo de estrategias y habilidades cognitivas que, además de permitirle al estudiante formular sus propios interrogantes y crear sus propias conjeturas acerca de las traslaciones, favorece la optimización de los procesos de aprendizaje significativo.

Rotaciones

Dentro de la amplia gama de aspectos que caracterizaron y promovieron el desarrollo de la cultura maya, se destaca un elemento que incorpora el concepto de rotación y que permitió la creación de uno de los mayores instrumentos que sirvieron a los mayas para medir con gran precisión el tiempo: el calendario maya. Este calendario surgió de la necesidad de establecer con exactitud todas las etapas de trabajo, desde la preparación del terreno de cultivo (*milpa*) hasta la recolección del maíz, al mismo tiempo que permitía determinar la posición de los días en el año trópico (el inicio de los calendarios agrícolas). Estas son las razones que posibilitaron la creación del calendario mágico (*Tzolkin*) y el calendario astronómico (*Haab*), que componen el gran calendario maya. Para el desarrollo del tema de rotaciones, se ha escogido el calendario mágico *Tzolkin,* por la facilidad en su manejo y por la gran cantidad de figuras que constituyen sus días, aclarando que en ningún momento se niega la posibilidad de trabajar con el calendario astronómico *Haab* y obtener resultados de igual provecho.

Figura 85. *Calendario Tzolkin*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

El calendario *Tzolkin* como lo muestra la Figura 85, es un calendario formado por 260 días, repartidos en 13 periodos de 20 días cada uno y fue concebido originalmente como un calendario agrícola.

Parte 3: Actividades diseñadas

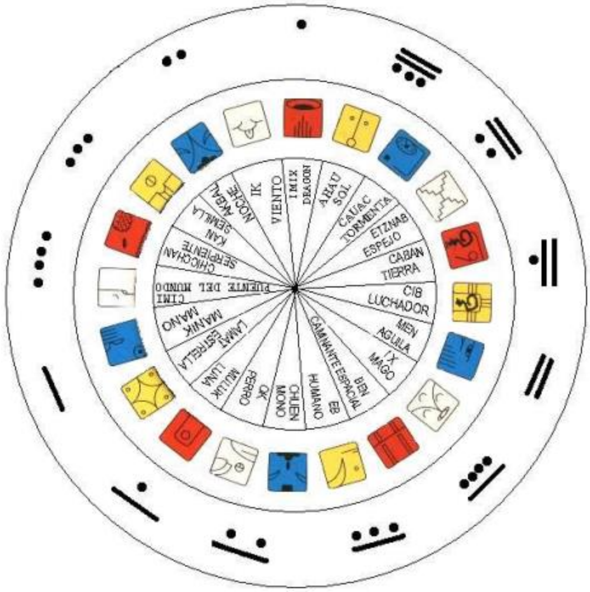
Actividad 1: Aproximación al concepto de rotación

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** séptimo de educación básica.
- **Objeto matemático estudiado:** rotación.
- **Objetivo de la actividad:** acercar al estudiante al concepto de rotación a través del movimiento de las dos ruedas que constituyen el calendario *Tzolkin*.
- **Materiales:** fotografías de elementos de la cultura.

Consignas de la actividad

En la actividad de aproximación se hace una pequeña reseña de la historia del calendario maya y se trabaja con una modificación del calendario *Tzolkin* (ver Figura 86), con el fin de acercar al estudiante al concepto de rotación a través del movimiento de las dos ruedas que lo constituyen.

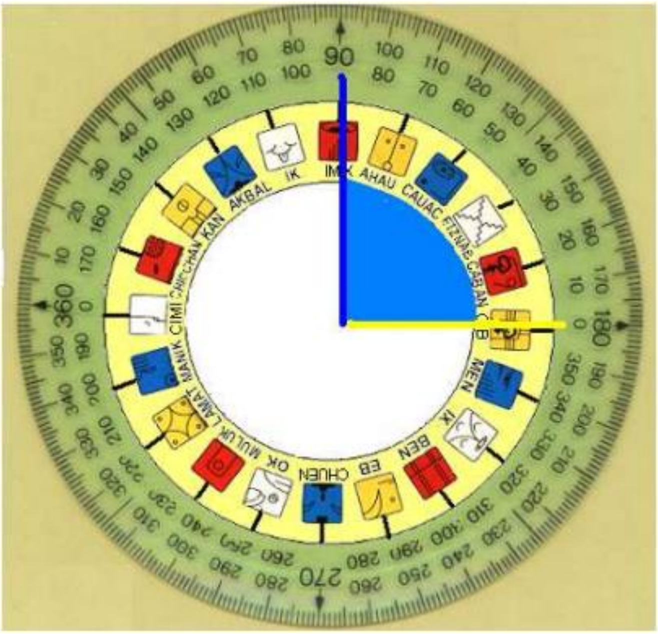
Figura 86. *Calendario Tzolkin modificado, empleado en las actividades de aproximación al concepto de rotación*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Para el resto de actividades y, en particular, en el refuerzo de ángulos, se trabaja con el calendario mágico *Tzolkin* pero modificado, como lo muestra la Figura 87, es decir, la rueda exterior que abarca los 13 períodos fue reemplazada por un transportador convencional, con el objetivo de obtener un mayor beneficio didáctico.

Figura 87. *Calendario Tzolkin modificado (adición de un transportador convencional, en lugar de la rueda numérica)*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Actividad 2: Simetrías en la vida diaria

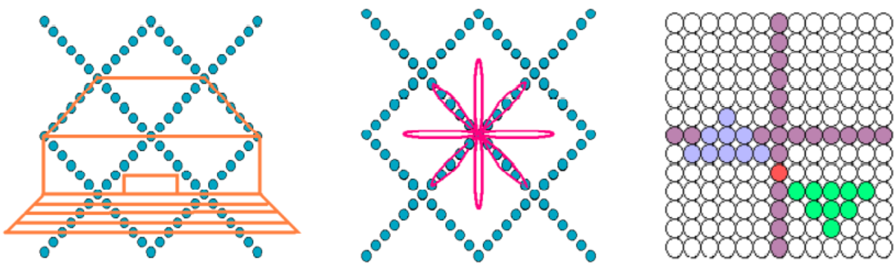
- **Área:** Geometría.
- **Grado:** séptimo de educación básica.
- **Objeto matemático estudiado:** simetría.
- **Objetivo de la actividad:** afianzar y avanzar en la enseñanza de las simetrías a través de la cerámica, los templos y el Canamayté Cuadrivértice, tres aspectos de la civilización maya que la caracterizan y muestran lo grandioso de su cultura.

- **Materiales:** fotografías de elementos de la cultura.

Consignas de la actividad

El canamayté cuadrivértice es el modelo geométrico anterior a toda cultura arqueológica o histórica y ofreció sus bases matemáticas a todas las culturas precolombinas, corresponde al cuadrado central del conjunto de cuadrados en el dorso de la víbora de cascabel: *Crótalos Durissus Tzabcán Yucateco,* pues la disposición de este cuadro permite repasar tanto la simetría axial como la simetría central de una manera lúdica (ver Figura 88), de tal manera que, el estudiante razone y aplique las reglas necesarias para encontrar el simétrico de cualquier figura.

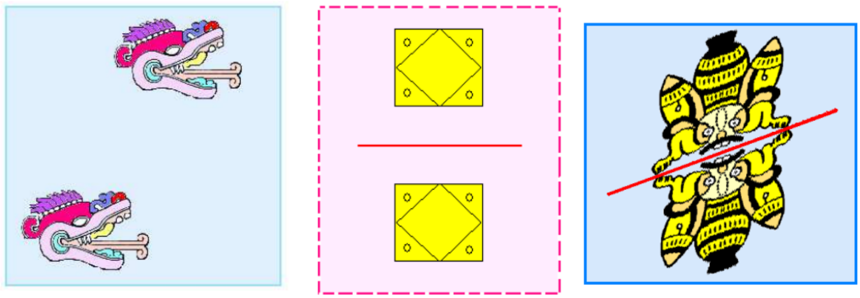
Figura 88. *El canamayté cuadrivértice, en actividades de simetría*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Adicionalmente, para el desarrollo de este tema, se utiliza el plegado y corte de papel usando imágenes relacionadas con la cultura maya, con el fin de detectar las principales características que se relacionen con el concepto de simetría central y axial, como se ve en la Figura 89.

Figura 89. *Plegado y corte de papel utilizando imágenes de la cultura maya en actividades de simetría*



Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

Actividad 3: Concéntrate en el tamaño

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** séptimo de educación básica.
- **Objeto matemático estudiado:** homotecia.
- **Objetivo de la actividad:** identificar de manera intuitiva algunas de las principales características que se conservan al aplicar una homotecia a cualquier figura geométrica.
- **Materiales:** fotografías de elementos de la cultura.

Consignas de la actividad

Este juego consta de 16 cartas, cada par de las cuales representa una imagen de diferente tamaño relacionada con algunos aspectos de la cultura maya.

Figura 90. *Concéntrate en el tamaño, gráfica del recurso didáctico empleado en el concepto de homotecia*

Fuente: Díaz Toro et al. (2009).

2.2.4 Actividades multi área

2.2.4.1. Ejemplo 15 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Etnomatemáticas de signos culturales y su incidencia en la formación de maestros.

Objetivo de la investigación: mostrar el impacto que esta experiencia de indagación generó en la formación de los maestros, tanto en términos de reflexión sobre algunos conceptos matemáticos, orientadas desde las etnomatemáticas de los grupos culturales y las matemáticas escolares, así como también en términos del desarrollo de actividades contextualizadas para el aula de primaria, donde se implicaron las etnomatemáticas.

País: Argentina y Costa Rica.

Autores: Gavarrete María Elena y Albanese Verónica.

Tomado de: Gavarrete y Albanese (2015).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

El desarrollo de la formación docente a partir de etnomatemáticas propias

La experiencia de formación de maestros en etnomatemáticas fue solicitada a las autoras de forma individual e independiente por personas que trabajan en contacto con la formación docente en distintos contextos. En ambos casos, estas experiencias formaron parte del posgrado de cada una de las autoras, quienes llevaron a cabo sus tesis doctorales en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

En Argentina, la investigadora fue invitada por una profesora del Instituto Terciario Mantovani de la ciudad de Roque Sáenz Peña, en la región del Chaco, para llevar a cabo una experiencia en el desarrollo de un curso dentro de su asignatura del cuarto año de la formación de maestros de primaria. Dado que las directrices legislativas de la reforma educativa actualmente en vigor promueven aprendizajes significativos que integren el conocimiento universal con los saberes culturales locales, se consideró el potencial de la perspectiva etnomatemática en consonancia con estas indicaciones (Albanese et al., 2014). A la hora de planificar el curso, debido a la gran cantidad de participantes (más de 70) y a la brevedad de los tiempos a disposición (una semana), se dirigió la elección del "signo cultural" hacia las danzas folclóricas argentinas, generalmente, muy practicadas en esta región rural del país.

Se relató brevemente el desarrollo de las tres sesiones que conformaron el curso. En la primera sesión, se llevó a cabo una puesta en común sobre las nociones previas que tenían los participantes sobre las etnomatemáticas. Posteriormente, se introdujeron los conceptos de signos culturales, microproyectos y algunos rudimentos de etnografía mediante ejemplos. Como tarea no presencial en grupo, se invitó a los participantes a elegir una danza folclórica y a buscar información sobre la misma, planteando así una pequeña investigación etnográfica. En la segunda sesión, se abordó el reconocimiento de diversas etnomatemáticas utilizadas por grupos culturales específicos, para luego analizar la información recopilada por cada grupo sobre una danza y reconocer en ella formas de aplicar y comprender las etnomatemáticas. Como trabajo no presencial se pidió a los participantes que desarrollaran, siempre en grupo, una actividad para trabajar con niños de primaria a partir de las etnomatemáticas que habían identificado en la danza. Finalmente, en la tercera y última sesión se realizó una puesta en común de estas actividades. La entrega final del curso consistió en un informe que recogía el trabajo realizado durante el curso, respetando la estructura propuesta de microproyecto (Albanese y Perales, 2015).

En Costa Rica la investigadora fue invitada como consultora y después como formadora de los maestros indígenas en formación. Dicha invitación se dio por parte de una Comisión Interinstitucional llamada *Siwä-Pakö*, que estaba integrada por tres universidades públicas y el Ministerio de Educación de Costa Rica.

Esta comisión desarrolló el *Plan de Estudios de Bachillerato en I y II Ciclos de Educación General Básica con énfasis en lengua y cultura cabécar*, en el cual se diseñaron diversos cursos de formación adaptados a la realidad de la cultura cabécar, los cuales se orientaron a otorgar formación profesional universitaria a maestros cabécares ya en ejercicio, que carecían de un título universitario y que ejercían la docencia en centros indígenas de distintas comunidades del Territorio Indígena Cabécar.

La invitación dio lugar al proponer un curso llamado curso *Etnomatemáticas para maestros que trabajan en entornos indígenas*, el cual constituyó una propuesta formativa especial que promovió la interculturalidad y las peculiaridades de los entornos rurales e indígenas.

Para la planificación de este curso, se llevaron a cabo varias reuniones de seminarios y debates en las cuales participaron los miembros de la Comisión Interinstitucional Siwä-Pakö, la investigadora-facilitadora del curso y algunos miembros del Grupo de Investigación en Etnomatemática, Formación de Profesores y Didáctica de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía, con referencia HUM502, coordinado por la Doctora María Luisa Oliveras Contreras.

En esos seminarios se debatieron las expectativas y la pertinencia de abordar una formación relacionada con las etnomatemáticas, incluso, se diseñó una intervención didáctica y de evaluación. Esto incluyó la elaboración del material para cada una de las sesiones de trabajo, tanto presenciales como no presenciales, así como las herramientas de evaluación del modelo formativo, ya que la composición del diseño pedagógico fue mixta.

Los maestros en formación tuvieron, de manera intercalada, sesiones presenciales y no presenciales. En el curso participaron 16 maestros cabécares y la estrategia metodológica estableció pautas para el proceso formativo semipresencial, en el cual se elaboraron fichas de trabajo para las sesiones de discusión y de trabajo presencial, pero también se diseñaron fichas de acompañamiento a distancia, promoviendo que, cada maestro cabécar en formación, tuviera un rol activo, dinámico y crítico en las distintas actividades de aprendizaje propuestas para indagar acerca del signo cultural.

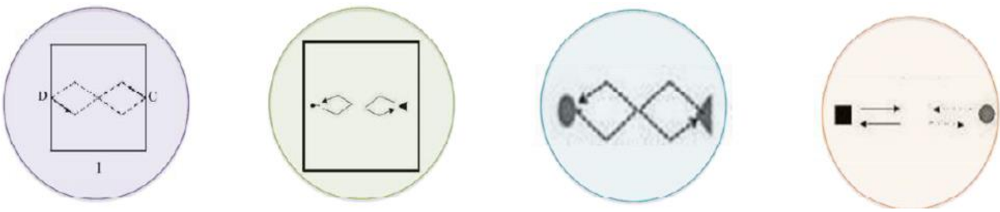
Tres sesiones del curso fueron específicamente asignadas para desarrollar contenidos involucrados con el programa de Etnomatemáticas. En la primera sesión se desarrolló una introducción teórica a los conocimientos relacionados con etnomatemáticas (D’Ambrosio, 1985, 1993, 2007, 2019). La segunda sesión consideró las pautas para desarrollar una enculturación matemática (Bishop, 1988b, 1995, 1999, 1988c). Finalmente, la tercera sesión consideró la explicación, ejemplificación y planificación de los microproyectos curriculares basados en etnomatemáticas (Oliveras Contreras, 2006; Oliveras, 1996, 2005).

El trabajo final del curso consistió en el desarrollo e implementación del microproyecto curricular, basado en el estudio de las etnomatemáticas cabécares alrededor de un signo (o rasgo) de la cultura que, puede guardar de forma implícita, conocimientos que serán puestos en evidencia mediante la ejecución del mismo. Aunque los maestros en formación que participaron en el curso eligieron diversos signos culturales, en este documento solo se ha considerado la práctica del idioma como signo cultural relevante.

Algunos hallazgos de las etnomatemáticas reflejadas en el signo cultural

De la experiencia en Argentina, se presentan algunos hallazgos obtenidos con los participantes al analizar, de manera conjunta con la investigadora, diversos esquemas de las coreografías de la danza de la chacarera, una de las danzas folclóricas argentinas más difundidas y conocidas (Sardella, 2004). La chacarera es un baile de pareja suelta, es decir la dama y el caballero no se tocan; los bailarines empiezan enfrentado y realizan un cierto número de figuras determinadas por la música. Cada figura es un conjunto de 4 u 8 pasos, al final de los cuales los bailarines vuelven a encontrarse en la posición inicial enfrentada (o a lo sumo intercambiado de lugar).

Figura 91. *Representación de la figura de avance-retroceso de la danza de la chacarera*



Fuente: Gavarrete y Albanese (2015, p. 307).

La primera figura, de 4 pasos, se denomina avance retroceso. Como se puede observar en la Figura 91, se recogen distintas formas de representar el avance-retroceso, esta se dibuja a veces con un cuadrado en posición de diamante[7] y, a veces con un rombo, más o menos aplastado. Los bailarines, según lo referido por los participantes, solían indicar esto siempre como un rombo a dibujar en el piso con los pasos, independientemente de si su real señalación en el piso fuera un rombo o un cuadrado. Intrigada por este tema, la investigadora lanzó a los participantes varias preguntas como: ¿Cuáles son las semejanzas de estas figuras geométricas (el cuadrado y el rombo) y las diferencias? ¿Por qué los bailarines usan ambas indistintamente y las llaman rombo?

Los participantes empezaron a revisar la información que habían recopilado, a consultar entre sí, e incluso contaron con la experiencia de un

[7] Es decir, con las diagonales (en lugar de los lados como en la posición más tradicional del punto de vista escolar) en las direcciones horizontal y vertical.

par de participantes que eran profesoras de baile en academias de folclore. Juntos, realizaron y verificaron diversas conjeturas. En primer lugar, observaron que ambas figuras geométricas eran cuadriláteras y equiláteras, y lo relacionaron con el hecho de que, en esa danza, todos los pasos son iguales.

Respecto a las diferencias, se destaca lo curioso del acontecimiento que se verificó. Hasta aquí la motivación y el interés habían mantenido alto el nivel de participación en el debate, pero luego, tímidas intervenciones revelaron que muchos no recordaban las definiciones geométricas y tenían dificultades en identificar las diferencias. Una de las participantes que solía enseñar este baile llamó la atención sobre las diferentes longitudes de las diagonales del rombo. Este detalle corresponde a que, en el baile, si bien hay pasos laterales, la dirección dominante que el/la bailarín/a marca, corresponde a la dirección de la pareja.

De hecho, el mismo nombre de la figura "avance-retroceso", lo subraya. Esta concepción de la diferencia entre cuadrado y rombo, basada en las diagonales, difiere de la concepción escolar habitual, que tiende a enfatizar la diferencia en los ángulos del rombo, en contraste con el cuadrado, que tiene todos sus ángulos iguales y rectos (Albanese y Perales, 2014).

También se destacó el comentario de otro participante, quien llegó a la conjetura que la razón por la cual los bailarines llaman "rombo" a la figura geométrica que representa el avance-retroceso (a pesar de que muchas veces sea un cuadrado), podría depender de la posición estándar, en forma de "diamante", en que se dibuja esta figura geométrica en matemáticas. Esto permite a los bailarines intuir que su propia ubicación al inicio de la danza es en dos vértices opuestos.

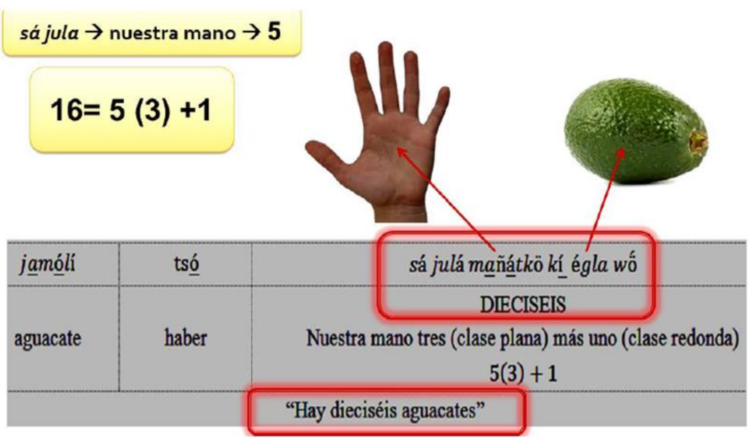
En Costa Rica, el conocimiento matemático implícito en el uso del idioma cabécar implica la participación de una lógica clasificatoria y la utilización de metáforas numéricas, como se explicará a continuación.

El proceso de contar, comienza por establecer comparaciones entre colecciones de objetos y determinar sus propiedades cardinales. Esta secuencia se debe entender en su significado lógico y no temporal. Comparar y clasificar son procesos lógicos previos al acto de contar, pero no significa que la comparación sea temporalmente anterior al cómputo o el conteo. En la investigación de Gavarrete (2012), se muestra la existencia de clasificadores, a partir de la comparación de la forma y el origen de los sustantivos. Esta organización lingüística nominal permite que se pueda contar con adjetivos y sustantivos, siendo estos últimos los que forman parte de los sistemas numéricos. Es decir que, la cualidad numérica se establece con ciertos afijos, que son los que funcionan como clasificadores, y esa peculiaridad es una marca gramatical para distinguir la naturaleza de los objetos que se cuentan; es una cualidad complementaria a la cantidad, que es la categoría comúnmente expresada por los numerales.

La lógica referencial clasificatoria que impera en la mayoría de los grupos indígenas costarricenses, conlleva una diversidad de palabras utilizadas para realizar los conteos según sea la forma de los objetos: plana, alargada, redonda, humana, entre otras; así como en la clasificación nominal de los cuantificadores indefinidos, pues no hay una sola manera de decir *algunos*, *varios* o *muchos* y también en los pronombres interrogativos, pues existen distintas maneras de preguntar *¿Cuántos?*, según la forma que tenga el objeto de referencia.

Los indígenas cabécares poseen un sistema de numeración oral de base quinaria, en la cual se utilizan metáforas numéricas (Gerdes, 2008), y como producto se genera un sistema de combinación de los clasificadores numerales, que suponen una gran complejidad, al tratar de ser desarrollados a través de una estructura aritmética (Gavarrete, 2012). En este grupo étnico, se utiliza la metáfora numérica *sá-julá,* que alude a los dedos de una mano, para referir al numeral cinco en la lengua cabécar, como se observa en la figura que se muestra a continuación.

Figura 92. *Ejemplo de utilización de clasificadores numerales y metáforas numéricas en el sistema de numeración oral en lengua cabécar*



Fuente: Gavarrete y Albanese (2015).

En la Figura 92 se muestra un ejemplo de la utilización de metáforas numéricas y de clasificadores numerales en la lengua cabécar. En este caso, se quiere expresar el número dieciséis para una cantidad de aguacates (clase redonda). Esta cantidad se descompone como tres veces cinco (base quinaria) más una unidad; se hace notar que, el número cinco está representado por la metáfora numérica (la mano) y que corresponde a la clase plana, mientras que la unidad está representada por la clase redonda, respondiendo a la forma del objeto que se pretende contar (aguacates-redondos).

En la tesis doctoral de Gavarrete (2012) se muestra en detalle una descripción de los hallazgos vinculados al sistema de numeración oral cabécar y a la lógica clasificatoria implicada en los procesos de cuantificación y conteo.

Durante el desarrollo del curso, los maestros manifestaron la vigencia de los clasificadores numerales como herramientas de organización de la realidad y la práctica del conocimiento de los patrones de la naturaleza (por ejemplo, las fases de la luna) y de secuencias de acciones, durante la planificación de las siembras o durante la construcción de ranchos tradicionales y promovieron actividades escolares donde se aplicarán estas nociones.

Así, adquirieron conciencia sobre la importancia de contextualizar las actividades que se proponen a los niños en su entorno, refiriéndose a prácticas que sean significativas para su cultura.

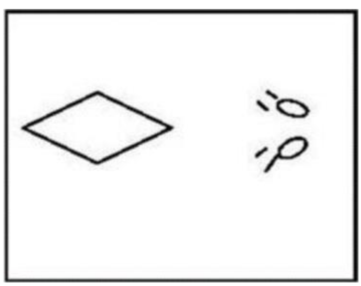
Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: El baile de las figuras geométricas

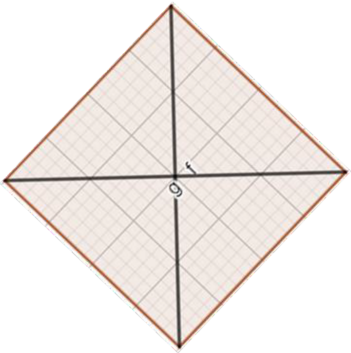
- **Área:** Geometría.
- **Grado:** Primero de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** figuras geométricas.
- **Objetivo de la actividad:** guiar las observaciones de los niños hacia los elementos geométricos de las figuras del cuadrado y del rombo, con la intención de que los niños construyan solos, a partir de la observación, la definición de ambas figuras geométricas y fomentando su capacidad crítica para determinar las diferencias.

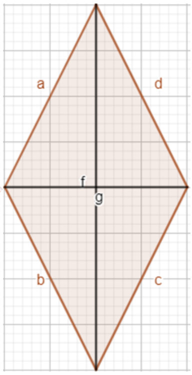
Consignas de la actividad

1. Observar a los expertos danzando la chacarera.
2. Prestar atención a las figuras que toman como guía para bailar, el perímetro un cuadrado imaginario y el rombo como referencia para el zarandeo.



3. Debatir sobre las figuras del cuadrado y el rombo.





4. Comparar las dos figuras, escribir las similitudes y diferencias encontradas en:

    - Medida de sus lados.
    - Amplitud de sus ángulos.
    - Corte de las diagonales.
    - Medida de las diagonales.
    - Paralelismo de lados.

5. Responder: ¿Por qué el rombo no es un cuadrado?
6. Escuchar la exposición dialogada del docente y completar el cuadro.

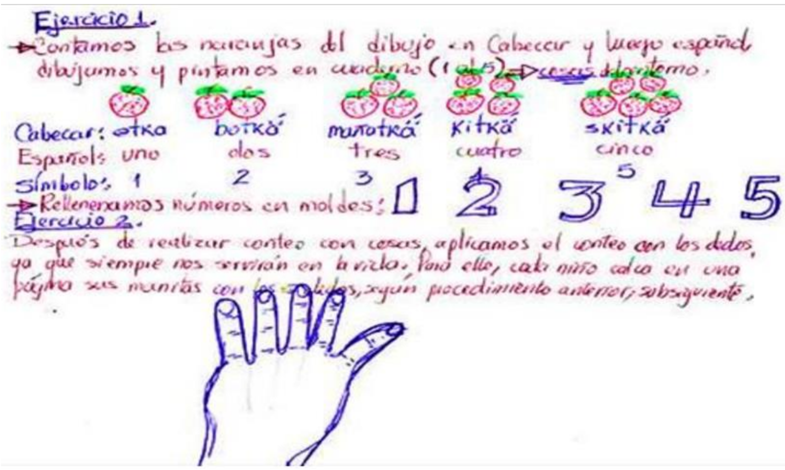
Rombo	Cuadrado
Diferencias	
Similitudes	

Actividad 2: Conteo en cabécar

- **Área:** Aritmética.
- **Grado:** Primero de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** conteo.
- **Objetivo de la actividad:** Enseñar algunos de los principios básicos de conteo para los números del 0 al 9 para primer grado de primaria que se utiliza en la mayor parte del territorio costarricense.

Consignas de la actividad

Figura 93. *Ejemplo de una actividad escolar implementando el estudio de las etnomatemáticas implicadas en el idioma cabécar*



Fuente: Gavarrete y Albanese (2015).

2.2.4.2. Ejemplo 16 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Incorporating the indigenous game of morabaraba in the learning of mathematics.

Objetivo de la investigación: to show that some cultural aspects related to indigenous games can be incorporated in the teaching and learning of mathematics.

País: Sudáfrica.

Autores: Nkopodi Nkopodi y Mogege Mosimege.

Tomado de: Nkopodi y Mosimege (2009).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Research design

Qualitative research was used in this study. This was considered appropriate since the researchers wished to obtain an in-depth understanding of how and what learners thought about the game of morabaraba as they played the game (De Vos y Fouché, 1998; Trochim, 2001). In this regard, participant observation and teaching experiments were used. Learners were video recorded while playing the game. Their discussions were transcribed verbatim.

The research sites consisted of schools in Limpopo and the North-West Province, respectively. These schools were chosen because the learners and educators in the two provinces were familiar with the game as played in the provinces and were willing to participate freely in the study. In addition, the researchers had grown up in the two provinces and so were also familiar with the games in the context of the provinces.

Teaching experiment

The 'teaching experiment' is a generic term for a variety of pedagogical research forms in which the strictly statistical analysis of quantitative data is of less concern than the daily subjective analysis of qualitative data (Kantowski, 1979). Its aim is to "catch" processes in their development and to determine how instruction can optimally influence these processes. This Soviet research methodology grew out of a need to permit researchers to observe qualitative effects of various forms of instruction.

Lessons were presented to the learners by the researchers and not by the educators after their training on the use of ethnomathematical materials. This was decided after the realisation that most of the time, when the schools' educators had taken part in earlier workshops on ethnomathematical activities were visited, the educators still felt very uncomfortable in presenting ethnomathematical lessons, especially in the presence of the researchers. Using the 'teaching experiment' therefore allowed the researchers to introduce the game into the daily classroom activities at intervals for the duration of the study. Perhaps this study also fitted the 'teaching experiment' model owing to its longitudinal nature (another characteristic of the 'teaching experiment'), i.e. working with each of the schools over a period of about two years.

Preparation of using indigenous games in the classroom

Specific activities necessary before indigenous games can be used in the mathematics classroom will be discussed.

Identification of indigenous games according to the potential of their use in the curriculum

There are a variety of indigenous games in South Africa. If educators want to use these games in the classroom, they would have to select a particular game or number of games depending on the subject area of focus and the relevance of such games in terms of the curriculum focus. The following questions should be asked in selecting games:

- Is it possible to obtain or make the material?
- Is it possible to use the games inside the classroom?
- Can the games be played by both male and female learners?
- Do the games reveal a variety of embedded mathematical concepts (even at a superficial level of analysis)?

The last criterion would apply specifically when the games are to be used in the teaching and learning of mathematics.

Analysis of games

A mathematical analysis (applying mathematical concepts, principles and processes) of any game reveals the extent to which mathematical concepts are embedded in the game. The following mathematical concepts are found in the analysis of morabaraba:

- Identification of various quadrilaterals (squares) and the similarities and differences between them.
- Ratio and proportion between the lines and the squares making the complete morabaraba board.
- Symmetry: Symmetry is observed in at least three different instances, namely, (1) the various sides of the board; (2) within each side of the board; (3) the placement of tokens and repetitive movements of the tokens on the board.
- Logical deductions in the execution of the various steps of the game.
- Counting of the tokens.
- Addition and subtraction of the tokens until a game is won on the basis of the remaining number of tokens.

Análisis de juegos

Un análisis matemático (aplicando conceptos, principios y procesos matemáticos) de cualquier juego revela hasta qué punto los conceptos matemáticos están integrados en el juego. Los siguientes conceptos matemáticos se encuentran en el análisis de morabaraba:

- Identificación de varios cuadriláteros (cuadrados) y las similitudes y diferencias entre ellos.
- Razón y proporción entre las líneas y los cuadrados para completar el morabaraba Junta.

- Simetría: se observa en al menos tres instancias diferentes, a saber, a) los varios lados del tablero; b) dentro de cada lado del tablero; c) la colocación de fichas y movimientos repetitivos de las fichas en el tablero.
- Deducciones lógicas en la ejecución de los distintos pasos del juego.
- Recuento de token.
- Suma y resta de fichas hasta que se gane un juego sobre la base del número restante de fichas.

Illustration of the game of morabaraba

Notations will be used for ease of identifying players, moves taken and positions of tokens.

Notation used for players and moves

R: Researcher.

ML: Male learner.

FL: Female learner.

ML1: When there is more than one male learner they are specified by using ML1 for male learner 1, ML2 for male learner 2. The same applies for the female learners, i.e. FL1, FL2, etc.

P: Placements of tokens are represented by P, where P1 represents the placement of the first token, P2 placement of the second token, etc.

M: Movements of tokens are represented by M, where M1 represents the movement of the first token, M2 movement of the second token, etc.

The discussion took place at School A in Limpopo province where all learners speak Sepedi (North Sotho) as home language. The school uses English as medium of instruction.

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: morabaraba

- **Área:** Geometría y Aritmética.
- **Grado:** décimo.
- **Objeto matemático estudiado:** Cuadriláteros (cuadrados), las similitudes y diferencias entre ellos, razón y proporción entre las líneas y los cuadrados, simetría, deducciones lógicas, suma y resta de fichas.
- **Objetivo de la actividad:** to correct, introduce and highlight some of the mathematical concepts (such as geometric shapes, ratio and proportion, symmetry, logical reasoning and counting) that are part of the game being used. Learners should be encouraged to use the language of mathematics while playing the game so that the understanding of concepts can be noted.
- **Materiales:**

  Notation on the morabaraba board

  The morabaraba board is made up of three squares, with lines joining the corners of the squares and the middle of each square. These lines, including the lines forming the squares, indicate where the tokens can be moved after placement. Each square has 8 junctions at which tokens may be placed, numbered as follows:

Square 1 — Outer square: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8.

Three-in-a-row combinations of this square: A1A2A3; A3A4A5; A5A6A7; A7A8A1.

Square 2 — Middle square: B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8.

Three-in-a-row combinations of this square: B1B2B3; B3B4B5; B5B6B7; B7B8B1.

Square 3 — Inner square: C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C3.

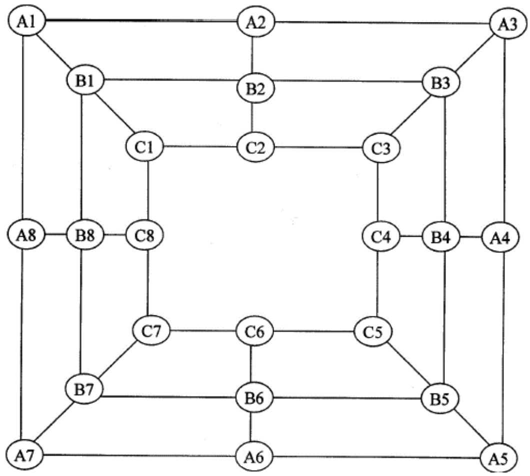
Three-in-a-row combinations on this square: C1C2C3; C3C4C5; C5C6C7; C7C8C1.

Combinations may also be made that involve the three squares as follows:

Square cutting combinations: A1B1C1; A2B2C2; A3B3C3; A4B4C4; A5B5C5; A6B6C6; A7B7C7; A8B8C8.

The above possible combinations can be seen in Figure 94.

Figure 94. *Configuration of the tokens on a morabaraba board*



Source: Nkopodi y Mosimege (2009, p. 387).

Consignas de la actividad

Se pide a los estudiantes que jueguen en parejas y luego describan su juego mediante la notación indicada.

A medida que los estudiantes van jugando, los educadores pueden aprovechar para corregir, presentar y resaltar algunos de los conceptos matemáticos (como formas geométricas, razón y proporción, simetría, razonamiento lógico y conteo), que son parte del juego que se está utilizando.

2.2.4.3. Ejemplo 17 de sistematización

Parte 1: Información general del artículo

Título del artículo: Ethnomatematics three pedagogical proposals for basic education.

Objetivo de la investigación:

- Investigar conocimientos matemáticos de oleros del pueblo Currais Novos, Rio Grande do Norte, para subsidiar la elaboración de una propuesta pedagógica para dialogar con los conocimientos matemáticos formales de la escuela de dicho pueblo.
- Presentar un relato de una experiencia educacional emprendida con alumnos del sexto año de la enseñanza básica, provenientes de un pueblo de trabajadores de industrias de olería bermeja del municipio de Russas, Ceará.
- Proponer una reflexión curricular en educación matemática, asociando la matemática formal a los conocimientos de un pueblo de horticultores de la ciudad de Natal, Rio Grande do Norte.

País: Brasil.

Autores: Francisco de Assis Bandeira.

Tomado de: Bandeira (2017).

Parte 2: Contextualización para el diseño de las actividades

Ethnomathematics in a pottery in Seridó/RN

The ethnomathematics related to pottery in the region of Seridó, in the state of Rio Grande do Norte, was defended in masters' work by Gilberto Cunha de Araújo Júnior in (2013), under my orientation, that investigated the mathematical knowledge of the potters[8] of Currais Novos. He was mostly interested in the use of this knowledge in the production and commercialization of colonial pottery tiles. The Cerâmica Peruana (Peruvian Ceramic) investigation field of Araújo Júnior (2013), is found in a district of Currais Novos called Jardim do Seridó, with an estimated population of 500 families which have been manufacturing and commercializing red ceramic tiles for their main income for many years. Their production is sold in Rio Grande do Norte and other northeastern states.

During the investigation period, 35 potters were working in Currais Novos, all of them male. Most of them did not complete secondary school studies, while others completed the elementary school, and a few of them only studied until the 5th grade. Many of them work in the pottery industry due to scarce work opportunities in the region, or simply because their families wished it.

To achieve the research objectives, Araújo Júnior (2013) used as a reference Dambrosian concepts of ethnomathematics. As well, he employed qualitative research in his ethnographic approach (André, 2013). Indeed, besides investigating the mathematical knowledge of the potters in Currais Novos and the production and sale of tiles, under the light of ethnomathematics, he selected information to allow for further elaboration of

[8] In the electronic Houaiss *Dictionary of the Portuguese Language* (2009), potter is the individual who manufactures or sells pottery objects; ceramist; he who works in a pottery atelier “plant”. This refers to the place where pieces of pottery are manufactured; the technique of manufacturing clay objects; the potter’s art.

a pedagogical proposal that developed dialogue with the formal mathematical knowledge of the town school.

In the visits this researcher made to Cerâmica Peruana, besides the analysis of photographs, interviews, a logbook, field annotations, observations, amid other documents, we identified the forms of mathematical knowledge in the manufacturing and sale of tiles, frequently differing from formal mathematics. In so doing we utilized and looked at the following activities: the method of counting tiles when loading trucks for transportation; in the moment of the purchase of the raw-materials needed to manufacture the tiles; when selling tiles; in the tile format, in the roof tile oven, in the tile storage sheds; in the calculation of the water volume that potters applied to mix with the clay; in the measurement at the time of purchase of the clay needed to make the tiles; in the firewood needed to feed the furnaces. For space limitation, however, only two of these activities will be described in detail here: the mathematical knowledge used in tile commercialization; and mathematical knowledge in the clay purchase and extraction.

Mathematical knowledge in the tile commercialization

Colonial red ceramic tiles as manufactured by Cerâmica Peruana, per Seu Luan Carlos (07/01/2012), is commercialized as follows: “First-rate tile costs one hundred and ninety [reais], second-rate tile, one hundred sixty [reais], and third-rate tile, thirty reais”. By this explanation, one can interpret that the values of the first, second and third-rate tiles refers to groups of a thousand tiles each. The first and second-rate tiles are commercialized in

Sergipe and Bahia states or, as Seu Luan explains (02/06/2011), the weekly production of Peruana Pottery goes “80% to Bahia state and 20% to Sergipe”.

The customers are responsible for conveying on their trucks the tiles that they buy in Sergipe and Bahia, but the pottery workshop or factory is responsible for arranging them on the truck for shipment, a task that is performed by the potters themselves. The number of tiles depends on the seize of the truck. The truck represented in Figure 95 holds 18.000 tiles. The first layer or the carriage bucket of the truck holds around 10.000 tiles, and the second layer, 8.000.

Figure 95 shows five Cerâmica Peruana potters arranging tiles on a truck. While two potters are carrying tiles, other two receive and arrange the tiles in line, and the fifth counts them. The file counter is Seu Jailson Medeiros, and this is the only task he performs at the factory.

Figure 95. *Potters arranging tiles on truck*

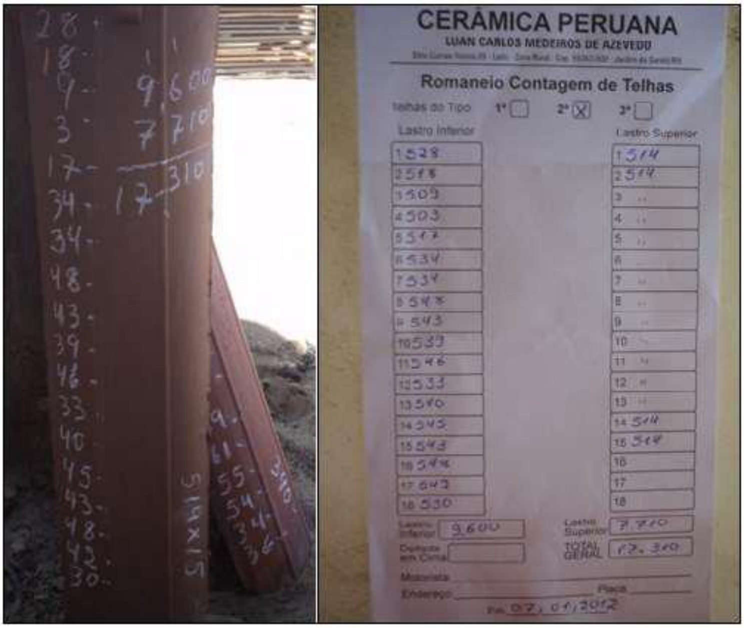
Source: Araújo Júnior (2013).

What called our attention was the manner Seu Jailson counted the tiles. While the potters arranged the tiles in lines on the truck, Seu Jailson counted and registered each line on a tile register as if it were a notebook, as is shown in Figure 96. The counting of the first line occurs in rows. These rows vary in quantity, while the second row is always invariable. As Seu Jailson counts each tile row of the first tile layer, he registers this information in his notebook – that is, a tile, as it was before-mentioned, and each tile line or group varied from 503 to 548 tiles.

Interestingly, Seu Jailson registered only the tens and units on his register tile, while the hundreds are mentally registered. With the experience that he has in counting the tiles on each truck, he knows how many rows of tiles each one can transport. The truck showed in Figure 95 can carry 500 tiles, and then he uses only the number 500 and multiplies it by 18 rows, totalizing 9.000 tiles. The other procedure, that is, the sum of tens and units, he realizes one by one with the aid of his electronic calculator.

As the second layer of tiles is always constant and, in the case of the truck showed in Figure 95, holds 15 rows of tiles, each one with 514 tiles, Seu Jailson realized then the multiplication with the aid of an electronic calculator, that is, 514 x 15, totalizing 7.710 tiles, as shows the register tile in Figure 96.

Figure 96. *Register of the count of tiles on the truck*



Source: Araújo Júnior (2013).

Seu Jailson then transferred the data registered on the tile to the romaneio[9], as one can observe in Figure 96. The list contains the tiles in rows, in layers, and type of tile – if first, second or third-class, and the total of tiles loaded on the truck.

These counting procedures used by Seu Jailson to calculate the tiles reveal a form of decomposing of the quantity of the number of tiles, in

[9] Romaneio, in Houaiss Electronic *Dictionary of the Portuguese Language* (2009), means a list specifying weigh quality and amount of merchandises shipped or sold. By extension and informal usage, it means also a complete and detailed list.

hundreds, tens and units, different than what is taught in school, that is, first: units; second: tens; third: hundreds, always following this sequence. According to Seu Jailson (10/02/2012), the procedure he applied during the counting of the tiles, "is simpler and more rapid to make the calculations".

In the work done with youth and adults as part of the Landless Rural Workers movement (MST) in Veranópolis, in the state of Rio Grande do Sul, Knijnik (Knijnik, 2006) elaborated a cultural method that the laborers used to make sums.

> To the sum strategy in the wake of the decomposition of orally computed values, first the most graduated ranks. This happened with a Capacitation Workshop trainee realized in Viamão, when, before a situation that requested him to count 148 + 238, he explained that, "at first, we separate everything [$100 + 40 + 8$, and $200 + 30 + 9$] and then sums what values more [$100 + 200, 40 + 30, 8 + 9$]. (…) That is [what values more] what counts". This strategy was often found among all the adults that defined themselves as "good in head's calculations". Contrary to the addition algorithm taught in school, in the oral procedures laborers considered, above all, the values of each parcel that were on stake and how different would result to treat hundreds, tens and units, that is, he gave preference to values that contributed more markedly to the result. (p. 10)

As can be perceived, to use mental calculations in addition operations that the socio-cultural members of the landless Rural Workers needed to organize the numbers in ranks, that is, tens and units, and then, gave preference to the set of the operation by minor degree ranks. The applied procedures used by Seu Jailson to count the Cerâmica Peruana's tiles did not differ from the method of these peasants, behind-mentioned. Because the socio-economic groups are diversified as well as their knowledge, it is worth mentioning that the Seu Jailson's method in counting tiles is not the only method known.

Mathematical knowledge in the clay purchase and extraction

The clay needed by the potters used is found in reservoirs and rivers. They accomplish all the extraction of the clay near the dam. To this purpose, they carry out the clay cubage[10] that will be commercialized by the dam's proprietor. In other words, to know the clay amount that the potteries' proprietors intend to buy in a dam, first they analyze the clay's condition and then delimit the necessary amount in square format, in so doing they estimate the clay's depth adequate to tile manufacture. After this is done, they negotiate with the dam's proprietor.

[10] Cubage is a procedure typically algorithmic used by rural workers of Rio Grande do Norte and other northeastern states of Brazil in the surveying practice. As Del Pian, apud Gomes (1997, p. 206) says, "this procedure is routinely used since the colonial days, as part of the farming work". The term cubage is also used in the process of calculation of the volume of wood "toras" (logs) (Grando, 1998). In the Cerâmica Peruana workers' context, cubage means the volume calculation of a certain red tile amount of clay.

Below is one description of these moments, in the words of Seu Luan Carlos (23/04/2016), owner of the Cerâmica Peruana, about this procedure:

> How do you proceed in the purchase of clay?
>
> - The business is as follows, the motorist of the bucket truck sees if the mud [clay] is good or bad, then he delimits a square area, OK? [drawing the form of a square in the notebook]. Then he multiplies the square sides in depth, and finally he knows how much clay he needs. Thereafter, all he needs to do is load the truck and carry the clay in the big dumptruck. Each loading has its own price. A loaded bucket costs eighty, seventy, price varies because the filler is ours; he only pays for the clay, not the filler.
>
> How do you know how much you will pay for the clay you take from the dam?
>
> - Well, as you know the clay amount you want, so you divide it by the bucket load, then you multiply it by the bucket load price and you will know how much more or less you will pay for the mud.

The clay cubage procedure was proved in loco in one of the researcher's visit, in 2012, to Ouro Branco, in the state of Rio Grande do Norte, when he stayed by the Manoel de Brito reservoir, where the potters often extract the clay need. Let us see now the procedure of volume measurement and clay purchase was realized in the reservoir by Cerâmica Peruana workers.

At the reservoir, it is the driver of the bucket truck who assesses at first if the clay is good or bad, because he is the person in charge of transport it to the workshop. After assessing the clay with his naked eye, he counsels potters on the delimitation of the area on which they will work to get the clay, generally in the form of a square at the dam's edge. To delimit and calculate the volume of the clay and the extraction area, potters use the following tools: a 25 meters long measuring tape, an electronic calculator and four wood stakes.

At first, potters place one stake at the dam's edge and, with the aid of the measuring tape, they measure 25 meters, then they place another stake. To delimit the third stake, potters do not use any precision tool to assess if the delimited side forms a 90o angle with the constructed side; they only estimate the perpendicularity with the naked eye. To place the fourth stake, they follow the same procedure with the latter one, however, adjusting it with the other sides of the square format, if necessary. This way, they create a design in the form a square on the ground.

If the square's side measures 25cm, the calculation of this area realized by the potters, with the aid of an electronic calculator, was 625 m^2. To value the clay volume of the reservoir, which is good to manufacture tiles, potters estimate a certain depth, on the dependence of the dam, reservoir or river's depth. In the referred reservoir, the depth of good clay, in accordance with the potters, was estimated as about two meters in depth. After all the procedures were done, the potters multiplied the region area delimited by the estimated depth, with the aid of an electronic calculator like follows: 625 m^2 of the area multiplied by two meters' depth, resulting in 1.250 m^2.

In this context, 1.250 m^2 was the calculated volume concerning the estimation of good-quality clay that could be extracted from the delimited area. To calculate the value in real currency to be paid for the clay, the potters divided the volume by the capacity of the bucket truck, resulting in the number of buckets to be carried from the reservoir to the Cerâmica Peruana.

It is worth mentioning here that the capacity calculation of the Cerâmica Peruana's bucket truck, which has the format of a regular prism, was calculated by the interior volume of the bucket. Then, let us denominate V_1= bucket's capacity; a = bucket's length; b = bucket's length, and c = bucket's height. The following measures were verified in the bucket by Araújo Júnior (2013), in which $a = 4\,m$, $b = 2\,m$, and $c = 2\,m$, obtaining, this way, the bucket's capacity, in volume, in the following way:

$$V_1 = a\,x\,b\,x\,c \rightarrow V_1 = 4m\,x\,2m\,x\,2m \rightarrow V_1 = 16m^3$$

Therefore, $16m^3$ is the volume of clay that the bucket truck of the Cerâmica Peruana can bear in each trip. To calculate the value to be paid to the owner's reservoir, the potter makes a calculation dividing the estimated value of clay to be extracted by the volume that represents the capacity of clay that the bucket can carry in the following way: C = total number of buckets; V = volume of clay to be extracted; V_1 = capacity, in volume, of clay that the bucket conveyed in a trip:

$$C = \frac{V}{V_1} \rightarrow C = \frac{1.250m^2}{16m^2} \rightarrow C = 78{,}125 \text{ buckets}$$

This total is rounded for 78 buckets, because the potters say that what is taken in consideration is the bucket full of clay. With this, the value to be paid to the reservoir's owner is calculated this way: 78 buckets multiplied by R$ 80,00 that is the price of a bucket full of clay, totaling R$ 6.240,00.

The interpretation of the collected clay extraction and cubage data by the sociocultural group, the Cerâmica Peruana workers, brings, as Knijnik said (Knijnik, 2006), "a reflection about the importance given by the group to the apprenticeship of measuring the land motivated by a real and undisputable need of solving daily life questions of the workers' [potters'] productive sphere".

In the perspective of using the mathematical knowledge of the potters to help pupils in Currais Novos, Araújo Júnior elaborated, as pedagogical proposal, activities related to the cubage of clay, as shown below. It is worth saying that Gerdes (1991) and his pupils investigated how Mozambican people raised the foundations of their houses. After interviews and conversations with villagers, they arrived at the conclusion that they used strings and bamboo rods to raise the perpendicular foundation of their houses.

Therein, the diagonals are composed of strings with the same length, and the sides are formed by bamboo rods and adjusted as to represent a triangle. By the way, this method does not different greatly of the potters' procedures to trace the representation of a square adjusting its sides at the naked eye. Paraphrasing Rosa and Orey (2010), potters found a hidden mathematics in their own culture when they discovered and explored the ethnomathematical knowledge present in the proper reality.

Araújo Júnior (2013) said that, by the commentaries he heard among the potters in informal conversations, and by the instruction degree they have, they had not had the chance to study formal Spatial Geometry in school, so this knowledge was acquired in daily work and contexts. After the description of these two activities of the worker of the Cerâmica Peruana, Araújo Júnior (2013) directed these activities to an educational proposal to be developed in potters' community schools in the Seridó region, especially in Currais Novos.

The ethnomathematics of the pottery workers in russas, in the state of ceará, and the school context: sketching pedagogical advices based on an educational experience

The ethnomathematics of the pottery workers in Russas, in the state of Ceará, and the school context: sketching pedagogical advices based on an educational experience is a dissertation work defended by Paulo Gonçalo Farias Gonçalves, in 2013, under my orientation that tried to develop an intervention with the learners in the school coming from the village that connected the ethnomathematical knowledge common in the workers' practices to the school mathematics content.

The village of workers of the tile industries, forms the research field of Gonçalves (2013) and from the town of Russas, near Fortaleza, in the state of Ceará, and has a population of about 75.000 inhabitants. As one of the main economic activities of the town, the red tile industries, or simply cerâmicas, as they are popularly known, have made this municipality an important manufacturer of tiles and bricks for the entire northeasternregion of Brazil.

Gonçalves developed his research at the Seu Benoni workshop about 7 km from Russas.

The research subjects of this author were 6th graders at the school in 2012. These students were chosen because their class was made up mostly of students/workers of the ceramics. The class was formed by adolescents from 12 to 17 years of age; nine of these students, though in a legally inadequate age, also worked in the regions' cerâmicas after.

Pedagogical process

Making use of the field research as a pedagogical action, the students mediated by the teacher/researcher succeeded in characterizing and identifying four ethnomathematics practices related to the labor in the ceramic workshops, that is: counting of and the manufacturing of bricks and tiles and stacking these bricks and tiles on trucks. These ethnomathematical practices were systematized by the students under the direction of the researcher/teacher verifying similarities and peculiarities concerning traditional school knowledge included in the 6th grade curriculum of the school that served as foundation for the activities related to the ethnomathematics knowledge of the workers and to formal school content: multiplication, introduction to proportionality and division.

The development and application process of educative intervention held by Gonçalves (2013) was based on the following steps: 1) research preparation; 2) field research and data analysis; 3) activity planning; and 4) activity application. In the sequence below the aspects inherent to each of these steps will be put in discussion. The educational intervention started with a first step named research preparation. It helped students to meet the environment where they would work and prepare them to handle the data collection tools necessary to the field research. In this circumstance, if necessary, the teacher should try to know better the socio-cultural context to be investigated during the classes.

The following intervention step was essential to the development of the field research and data analysis. This second step was structured as interconnected moments. In fact, the first moment focused all the functioning process of the potteries and the production stages of tiles and bricks. This stage marked the moments in which ethnomathematics knowledge played an auxiliary role in the manufacturing of tiles and bricks. The second moment focused the observation and analysis of the following production stages: counting of the production of tiles and bricks and their loading on trucks. This moment culminated with the systematization of the ethnomathematical knowledge during these stages.

The third stage, includes an Activity Plan, and highlighted the teacher's actions. It appeared as a transition and relation phase between the ethnomathematical knowledge applied by the workers and the contents of school mathematics presenting similarities with that knowledge. This moment culminated with the elaboration of four activities, interconnected two by two, according with the ethnomathematical knowledge of the potteries' workers and the school mathematics, prioritizing the school contents concerning multiplication, introduction to proportionality and division algorithm, as shown in the Table 14 below.

Table 14. *Synthesis of knowledge and contents of the school activities*

Activity	Relating knowledge	Relating school contents
Activity 1	Ethnomathematics	Multiplication and introduction to proportionality.
Activity 2	School Mathematics	Multiplication and introduction to proportionality.
Activity 3	Ethnomathematics	Division algorithm
Activity 4	School Mathematics	Division algorithm

Source: Gonçalves (2013).

Ethnomathematical pedagogy: actions and reflections in fundamental school mathematics with a specific socio-cultural group

Ethnomathematical pedagogy: actions and reflections in school mathematics with a specific socio-cultural group was the title of my doctoral dissertation, finished in 2009, which developed a pedagogical proposal of curricular reorientation in mathematics education for an elementary school. It was elaborated with the mathematical knowledge existing in the horticulturist village of Gramorezinho, Natal, in the state of Rio Grande do Norte, and in line with formal mathematics. This academic work is now a book (Bandeira, 2016).

Gramorezinho is a village situated on the coast north of Natal. Most people live mainly on the informal work of growing and selling vegetables (lettuces, coriander, spring onion, red peppers etc.) in supermarkets and free markets around the greater Natal metropolitan region. The vegetables growing in the village are distributed among small family estates. These family estates are vegetable gardens irrigated with water coming from a common water reservoir, fertilized with manure bought from nearby aviaries. The areas rarely contain more than 90 plots. A plot, in the language of the village, means a rectangular piece of land, measuring around two meters large by 20 meters long which is used to grow vegetables, especially coriander, lettuce and spring onions. A set of furrows is named or called a vegetable garden.

Most horticulturists in the village attended less than five years of school. The youngest ones, some of them horticulturists' children, gave up studying before finishing elementary school. The horticulturists' children, in preschool age, attended the only school in the village for the first and second grades. In the second semester 2007, I acted as teacher/researcher in the 5th grade of the school with the aim of dialoguing with the students about a proposal of curricular reorientation in mathematical education, elaborated with the mathematical knowledge developed in that village, in line with the formal mathematical knowledge of the school Bandeira (2009).

The work developed in the above-mentioned school had two interconnected and opposite aspects: bring to class-room the traditional practices present in the village and, at the same time, lead students to visit the village gardens to experience the vegetable garden context. Thereby, the pedagogical process was worked in blocks of contents proposed by the National Curriculum Parameters: Numbers and operations, Space and Form, Greatness and measures, and Information treatment in line with the mathematical knowledge of the horticulturists' village.

They were categorized as: Counting procedures, Length and area measurement, Volume measurement, Time measurement, Proportionality and commercialization. Due to space constraints, I will pay attention to Space and Form, Length and area measurement, Greatness and Measures and Volume measurement.

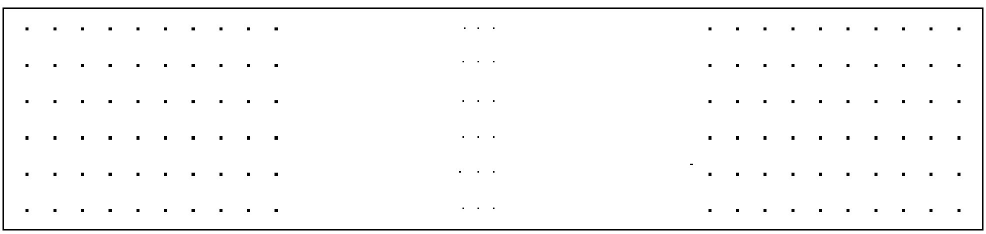
Space and form and length and areas measurement

The learning dimension of Space and Form gains relevance along with the role of geometry in the mathematics curriculum, especially in the first and second grade of primary school. Considering that geometry can lets those pupils understand the world in which they live, learning how to describe it, represent it and situate themselves in it. In addition, working with geometric notions encourages the learner to observe, to perceive similarities and differences, to identify regularities; it also permits the establishment of connections between mathematics and other areas of knowledge, inserting the exploration of objects taken from the physical world for the context of the classroom.

Considering that the geometric conceptions are mental representations that do not take part of real world, the great challenge of learning formal geometry is: how to transition from the concrete representation a mental representation? To achieve this target, the Curriculum National Parameters of primary school insist that students should be given activities that include the exploration, representation, interpretation and description of these spaces (Secretaria de Educação Fundamental, 1998).

The geometric forms existing in the vegetable gardens, especially the furrows and plots constructed to growing vegetables, offer them some concrete examples available as objectives in the learning of geometry. These representations form the real context for children growing up in the context of the village of Gramorezinho. As Figure 97 shows below, the furrows have defined geometric forms, in fact, rectangular forms, that enable the teachers to work with this and other geometric concepts with the aid of geometric conceptions used by the village's horticulturists.

Figure 97. *A representation of the furrows developed in Gramorezinho village (Natal-RN) by the horticulturists. Dots represent seedlings of lettuce, separated by each other for approximately a horticulturist's span*

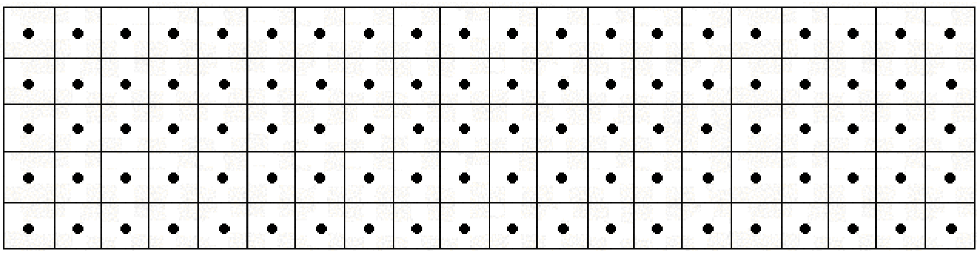


Source: Bandeira (2009).

To be more exact, the geometric conceptions of the horticulturists appeared in the moment they elaborated the plots and when they planted the vegetables calculating the spacing of the seedlings need. This spacing, in the case of the planting of lettuces, means a hand span separating the seedlings.

The procedure amounts to a square of all the plots with small squares. As the plant are not placed in the corners, but in the center of the squares, as Figure 98 shows, each little plant has an area of a span by a span in which to grow. Thus, the area occupied by the seedling is preserved with the aid of linear measures, and is simpler to calculate.

Figure 98. *Representation of a plots from the horticulturists' village of Gramorezinho (Natal RN). The dots represent the lettuce seedlings and are separated from each other by a farmer's span*



Source: Bandeira (2009).

Parte 3: Actividades diseñadas

Actividad 1: Cerâmica peruana

- **Área:** Álgebra.
- **Grado:** quinto.
- **Objeto matemático estudiado:** operaciones básicas, sistemas de numeración.
- **Objetivo de la actividad:**
  - Recognize the decimal numeration system.

- Use the four fundamental operations of academic Mathematics in the counting of tiles.

Consignas de la actividad

The colonial red pottery tiles manufactured in the Cerâmica Peruana are stocked to commercialization, after being selected. In general, the tiles are sold to Rio Grande do Norte state's neighbors. The owners of the Cerâmica Peruana sell the tiles in lots, each one containing 1.000 tiles. The price of each lot depends on the tile's quality, as is shown on Table 15.

Table 15. *Prices and quality of the tiles of Cerâmica Peruana*

Quality of the tiles of the Cerâmica Peruana	**Price paid in *real* currency for a thousand tiles**
First-rate	R $190,00
Second-rate	R $160,00
Third-rate	R $30,00

Source: Araújo Júnior (2013).

On January 2012, the owners of the Cerâmica Peruana closed a sale of 17.000 second-quality tiles with a customer from Bahia State. To compensate disparage and breaking of tiles during the long trip to Bahia, 310 tiles were added at the sale. Based on the text and the figure above, answer:

- How much, in real currency, did the owner of the Cerâmica Peruana receive by the sale closed with the customer from Bahia State?

- If the customer hand bought the double number of second-quality tiles, how much would he pay in real currency?
- Suppose that in the sale closed with the Bahia customer the total of tiles was 17.000, being 10.000 first-rate and 7.000 second-rate. How much would he pay in real currency?
- A second customer made the following purchase: 5.000 first-rate tiles, 7.000 second-rate and 5.000 third-rate. How much in real currency did this customer pay to the owner of the Cerâmica Peruana?
- Analyze Table 14 and answer: it is more profitable to sell 2.000 first-rate tiles or 1.100 first-rate and 1.000 second-rate tiles? Justify your answer.
- A customer purchased 5.000 second-rate tiles and another custome purchased 6.000 second-rate tiles. Which of them expended more money in the purchase, in real currency?

Actividad 2: Mathematics in clay purchase and extraction

- **Área:** Aritmética.
- **Grado:** noveno.
- **Objeto matemático estudiado:** regla de tres simple.
- **Objetivo de la actividad:**
    - To practice the potters' geometric knowledge to perform the reading and representation of reality and act over it.
    - To build notions of magnitudes and measures to capture reality and the solution with routine problems.

- To work the idea of area in plane figures and volumes in polyhedron.
- To introduce the calculation assessment of the clay cost, adding multiplication and division of whole and decimal numbers with socio-cultural knowledge.

Consignas de la actividad

Potters use to buy and extract clay behind dams sometimes far or distant from Cerâmica Peruana. The clay extraction follows this procedure: the potter and bucket truck driver assesses if the clay is high enough in quality to meet the manufacturing standards necessary for the tiles. The potters then outline a square in the soil. After this, he calculates the area of this square. To calculate the volume of clay to be extracted, he estimates depth and profundity using the naked eye taking as base the delimited square in the soil. Then he multiplies the area of this square by the estimated depth. In Ouro Branco, in the state of Rio Grande do Norte, the workers of the Cerâmica Peruana outlined a square with sides six meters long and estimated the clay depth as two meters. Thereafter, he multiplied the squared delimited area in the soil by the depth estimated, and figured it to be about 72 m^2. To know the amount in real currency to be paid for the extracted clay, he took as unit measure a 16 m^2 bucket. As each clay-loaded bucket cost R$ 80,00, the potter divides the total estimated volume of clay to be extracted, measuring 72 m^2 per 16 m^3. Then he reaches the volume of 4,50 clay buckets. As the number of buckets was not exact, the potters dispense with the decimal digits. In this sense, they consider only four clay buckets. Thus, the value to be paid to the dam's owner will be R$ 320,00.

Based on the present text, answer:

- How much would four complete clay buckets cost in relation to the conditions presented above?
- Suppose that a potter outlines a square measuring eight meters a side. Which is the area of the region to be worked on?
- Considering the last question and the depth estimated by the potter in the text, which is the volume of clay estimated, in cubic meters?
- How many bucket truck loads will be necessary to transport all clay estimated in the last question?
- How many reais will the Cerâmica Peruana's owner pay to the dam's proprietor, considering the number of buckets in the last question?
- The Cerâmica Peruana's owner paid R$ 800,00 for a certain amount of clay extracted. How many buckets were necessary for the transport to reach the value paid? (Consider the text above).
- Considering the last question and the text above: which is the total volume of clay to be extracted in cubic meters?

Actividad 3: Bricks in Mr. Benoni's workshop

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** sexto.
- **Objeto matemático estudiado:** volúmenes en poliedros.

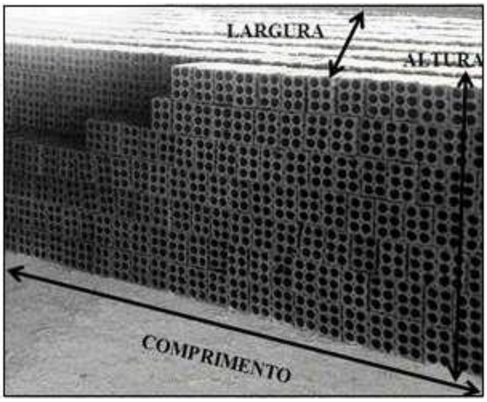
- **Objetivo de la actividad:** ethnomathematical usage by the potters is based on the multiplication of the number of bricks counted in the three dimensions: length, width and height.
- **Materiales:** fotografías de elementos de la cultura.

Consignas de la actividad

1. Besides the tiles, the tile or ceramic industries in Russas, in the state of Ceará, also manufactured bricks. Normally, bricks are joined in equal lines, put side by side to make the counting of the production easier. After a pre-determined number of layers, new layers are placed over the first ones. Thereafter, at the end of production, a geometric figure, not unlike a rectangular cobble, as shown in the Figure 99.

In Mr. Benoni's workshop an average day produces of bricks gathered in the following form: 64 bricks in each line, named length in the mathematical formal language; 11 lines placed side by side over each of the latter lines that can be named, or in the mathematical formal language = height. Based on the information presented, how many bricks have been manufactured that day?

Figure 99. *Problem Generator*



Source: Gonçalves (2013).

2. João gathered some paper boxes of the same size from his store. Each stack of boxes looked like the drawing of the following Figure 100. Three questions for you:

- How many boxes are there in a stack?
- If there were nine stacks with the same number of boxes, how many boxes would be stocked at João's store?
- If John owned 48 boxes, how could he stack these boxes to form a stack resembling a cobble? Do not forget, please, of enumerating the number of boxes existing in length, in width and in height of this new stack.

Figure 100. *Paper box stacking*

Source: Gonçalves (2013).

Actividad 4: The vegetable garden

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** quinto.
- **Objeto matemático estudiado:** área en figuras plana.
- **Objetivo de la actividad:** these local contexts to lead them to perceive the many ways of calculating geometric figures.
- **Materiales:** fotografías de la cultura.

Consignas de la actividad

1. To construct the plot, the horticulturists used to lay pottery tiles around each plot. In each corner they place wooden approximately, sticks 50 centimeters long, as one sees in Figure 101.

Figure 101. *A furrow from horticulturists' Gramorezinho village made of pottery tiles and four wood sticks*

Source: Bandeira (2009).

The contours of the furrow are called bordas (borders), what in mathematics are called "sides". The wood sticks placed in the corners of the plot are called tornos (lathes); in mathematics, vertexes. The encounter of the border with the lathe is called, in mathematics, a right angle. Any figure resembling a plot, mathematics calls a rectangle. Why do we use this denomination? Should it be because it has tornos or vertexes? How many? Has it borders or sides? How many? Has it a right angle? How many? Are its sides parallel?

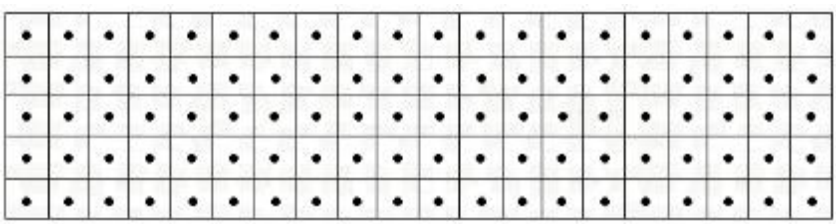
2. Vegetables need space inside the plots to grow, what in mathematics is called "area". To estimate the area necessary to the growing of each vegetable, horticulturists obey a span's distance to separate a vegetable from each other, as can be seen in Figure 102.

Figure 102. *5th graders of the local school in Gramorezinho are seen measuring, in spans, the spacing among the vegetables*

Source: Bandeira (2009).

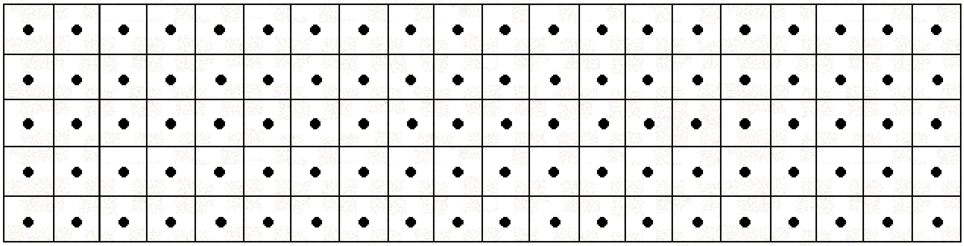
Such a procedure amounts to square each furrow with small squares. As thevegetable garden is cultivated in the heart of each square, each plant has an area of a span by a span to grow, as can be seen in Figure 103, before-mentioned in Figure 102.

Figure 103. *Representation of a plots from the horticulturists' village of Gramorezinho (Natal-RN). The dots represent the lettuce seedlings and are separated from each other by a farmer's span*



Source: Bandeira (2009).

Figure 104. *Representation of a plot from Gramorezinho. The dots represent lettuce seedlings and are separated from each other by a farmer's span*



Source**:** Bandeira (2009).

To be more exact, the geometric conceptions of the horticulturists appeared the moment they elaborated the plots and when they planted the vegetables calculating the spacing the seedlings needed. This spacing, in the case of the lettuce, means a span separating the seedlings. The procedure equals to square all the furrows with small squares. As the plant is placed not in the corners, but in center of the square, as Figure 104 shows, each little plant has a span-by-a-span area to develop. Thus, the area occupied by the seedling is preserved with the aid of linear measures.

After reading and discussing the text above, pupils were asked to answer the following questions:

- How many squares are there in the plot representation below?
- How many single lettuces can be planted at the representation above?
- Does the number of vegetables amount to that of squares?
- Which is the area in square numbers of the rectangle above?

- In mathematics, if each small square had one-centimeter side, the space or area of each small square would have a square centimeter (1 cm^2). Then, which would be the furrow area above?

3. The amount of manure necessary for the vegetable gardens depends on the size of each plot. In a plot that is two meters wide and 20 meters long, a horticulturist will use three 18-liter cans of fertilizer. The manure meter in Gramorezinho corresponds to 18 liters. But it is known that the liter is the capacity unit, while the cubic meter (m^3) is the volume unit. Besides that, it is known that a cubic meter (m^3) contains 1000 liters.

After reading and discussing the text above, the pupils were asked to answer the following questions:

- Which is the standardized capacity unit used today?
- Which is the standardized volume unit used today?
- How much is the capacity of the tin can used by horticulturists to measure the manure?
- How many liters does a cubic meter contain?
- How many liters of water do you drink in a day?
- How many liters of water do you use in your bath?
- How many liters of water does the water tank of your house contain?
- A cubic meter amounts to 1000 liters. For Gramorezinho's horticulturists, a cubic meter of manure corresponds to 50 tin cans of 18 liters, that is, 50 x 18 liters = 900 liters. How many liters are lacking to a cubic meter in the language of the formal mathematics?

2.3. Resultados

Categorías de análisis

En la Tabla 16 se describen las categorías que se tuvieron en cuenta para analizar las actividades.

Tabla 16. *Categorías de análisis*

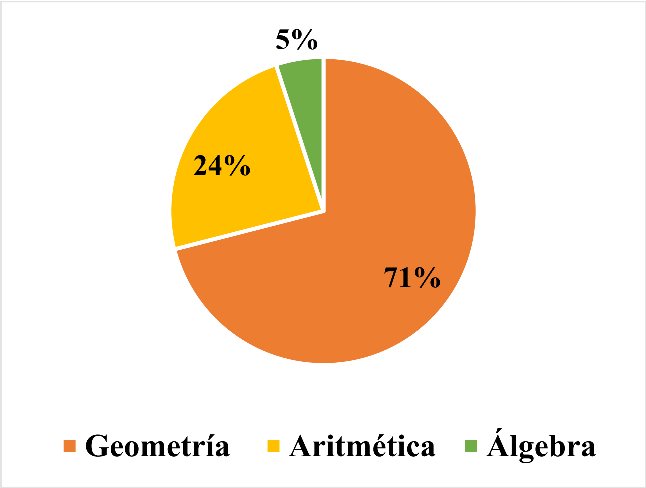
Categorías	Descripción
Área	Se refiere al área matemática a la que pertenece la actividad (geometría, álgebra, cálculo, aritmética, estadística, entre otras)
Objeto matemático	Se refiere al objeto matemático estudiado en la actividad a partir de sus representaciones (números naturales, figuras geométricas, derivadas, entre otras) o, bien podría llamarse, el tema matemático escolar estudiado
Grado escolar o población	Se refiere al grado escolar o la población para la cual está diseñada la actividad
Contexto	Se refiere a la relación de la actividad con elementos del contexto, así como a la participación de personas diferentes al profesor y a los estudiantes
Materiales	Se refiere a los materiales manipulativos físicos o tecnológicos
País	Se refiere al país en donde se diseñó la actividad

A continuación, se presentan los hallazgos del estudio de cada una de las categorías de análisis presentadas anteriormente.

Análisis de la categoría área de las matemáticas

Como se observa en la Figura 105, el mayor porcentaje de las actividades que se encontraron se enmarcan en el área de geometría, con un 71 % que corresponden a 30 de las 42 actividades analizadas. Dicho énfasis en la geometría se realiza en relación con algunos conceptos, como las isometrías en el plano, la simetría, los ejes de simetría, los movimientos rígidos en el plano, la translación y la rotación. Estos conceptos se presentan a los estudiantes utilizando materiales tangibles y relacionados con su cultura.

Figura 105. *Cantidad de actividades por área*



Análisis de la categoría objeto matemático

En relación con esta categoría, se encontró que los objetos matemáticos más utilizados en los diseños de actividades son los movimientos y las transformaciones de figuras geométricas, seguidos de las representaciones de los números naturales y sus operaciones, como se observa en la Tabla 17.

Tabla 17. *Cantidad de actividades por objeto matemático*

Objeto matemático	Cantidad
Movimientos y trasformaciones de figuras geométricas	16
Representación de números naturales y sus operaciones	9
Figuras geométricas	8
Orientación espacial	3
Unidades de medida	2
Área de figuras planas	1
Operaciones con polinomios	1
Regla de tres simple	1
Volumen de poliedros	1
Total	42

Análisis de la categoría grado escolar o población

Se puede observar en la Tabla 18 que se realizaron más actividades con estudiantes de la educación secundaria (estudiantes entre los 11 y 18 años), seguido de los estudiantes universitarios.

Tabla 18. *Cantidad de actividades por grado o población*

Grado o población	Cantidad
Educación secundaria	14
Estudiantes universitarios	11
Educación primaria	8
No especificado	5
Educación infantil	4
Total	42

Análisis de la categoría contexto

En la Tabla 19 se presentan los distintos contextos que se observaron al analizar las actividades. Con relación a cada uno de ellos se puede decir que: A-1 Actividad matemática contextualizada con elementos de la cultura aparece en 30 de las 42 actividades. Este se refiere al uso de elementos o fotografías característicos de la cultura, como artesanías, mochilas, cerámica, tejidos, etc. El siguiente contexto con mayor presencia es A-2: Actividad matemática relacionada con una lengua indígena, donde las actividades corresponden al uso de lenguas indígenas para estudiar algún objeto matemático, por ejemplo, para nombrar los números del 1 al 10 en su lengua local. El tercer contexto es A-3: Actividad matemática en el contexto de las mismas matemáticas, con tres actividades, y finalmente, el contexto A-4: Actividad matemática con contacto con la comunidad, también con tres actividades.

Llama la atención que tan pocas actividades tomen contacto con la comunidad, al respecto, Blanco-Álvarez (2024) menciona la importancia de la interacción de la escuela con la comunidad, ya sea en el diseño de la clase, proyectos educativos, currículo o la participación de la comunidad en la gestión de la clase o de proyectos educativos.

Tabla 19. *Cantidad de actividades por el contexto*

Código	Contexto	Cantidad
A-1	Actividad matemática contextualizada con elementos de la cultura	30
A-2	Actividad matemática relacionada con una lengua indígena	6
A-3	Actividad matemática en el contexto de las mismas matemáticas	3
A-4	Actividad matemática con contacto con la comunidad	3
	Total	42

Análisis de la categoría materiales

Los materiales que se encontraron en las actividades son:

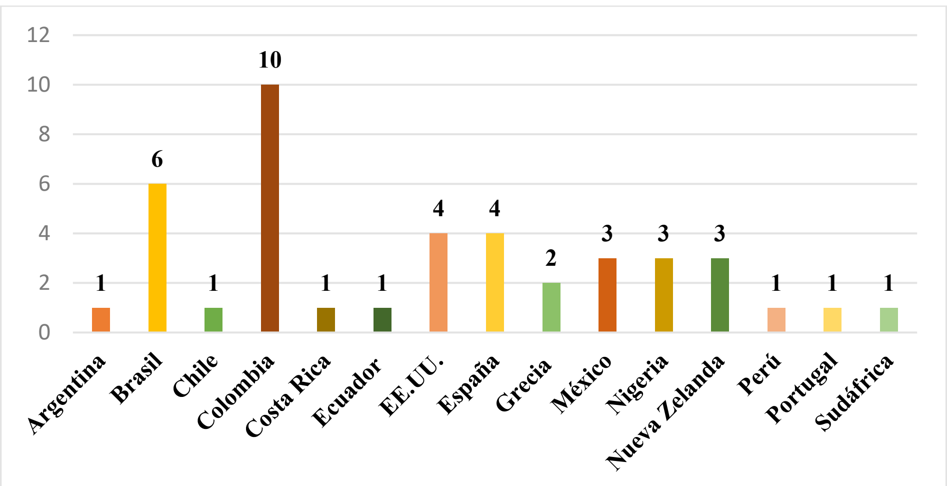
- Artefactos de la cultura como azada tradicional.
- Gancho de palo y cuerda.
- Cestas.
- Chakana.
- Yupana.
- Material didáctico como dinerito *tu'un savi*.
- Fichas de trabajo con fotografías de textiles de la cultura.
- Fotografías de elementos de la cultura.
- La tableta numérica del *tu'un savi*.
- Notación del tablero de morabaraba.
- Otro tipo de recursos como útiles escolares, plato de poliestireno, entre otros.

El uso de material didáctico contextualizado, textos escolares diseñados desde una perspectiva etnomatemática o herramientas diseñadas por la comunidad para resolver problemas matemáticos, por ejemplo, el quipu, la yupana, son elementos que Blanco-Álvarez (2024) señala como importantes en el diseño de una actividad basada en la Etnomatemática.

Análisis de la categoría país

Con relación a la categoría país, se identificó que, en donde se encuentra una mayor cantidad de actividades es Colombia y Brasil, como se puede ver en la Figura 106. Además, de esta figura se interpreta que el diseño de actividades etnomatemáticas es un tema de interés alrededor del mundo.

Figura 106. *Cantidad de actividades por país*



2.4. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la sistematización de las 17 publicaciones que exponen actividades matemáticas diseñadas, según los autores de cada artículo, basadas en la Etnomatemática. Para llevar a cabo la sistematización, se diseñó un instrumento dividido en tres partes que nos permitió organizar las actividades matemáticas. Este instrumento es un resultado de esta investigación para la comunidad de educadores matemáticos, que se espera sea utilizado y ampliado.

En relación con las actividades encontradas, se concluye que, en su mayoría, están relacionadas con la geometría y diseñadas para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. El marco teórico utilizado en todas estas actividades se refiere a la Etnomatemática del profesor Ubiratan D'Ambrosio. Es importante señalar que se encuentran diversas actividades que sus autores señalaban como actividades etnomatemáticas, sin embargo, correspondían a actividades matemáticas escolares convencionales.

Este trabajo de sistematización señala una línea de investigación abierta sobre el diseño de actividades matemáticas fundamentadas en la Etnomatemática, que permitan la articulación entre el pensamiento matemático extraescolar y las matemáticas escolares, buscando una mayor pertinencia o relación con el contexto y las comunidades.

Capítulo 3.

Clasificación de actividades

3.1. Introducción

La Etnomatemática ofrece una gran riqueza de elementos matemáticos para el diseño de actividades, integrando las prácticas y conocimientos matemáticos arraigados en diversas culturas, en contraposición a una visión monocultural y eurocéntrica. Estas actividades no solo incluyen los métodos y técnicas utilizados por diferentes grupos culturales para resolver problemas matemáticos, sino también cómo estos conceptos matemáticos están integrados en la vida cotidiana, las tradiciones y las formas de conocimiento de una comunidad.

Además, la Etnomatemática reconoce la importancia de considerar el contexto sociocultural en el diseño de las actividades matemáticas; por lo tanto, la Etnomatemática examina cómo las prácticas matemáticas se desarrollan y se transmiten dentro de comunidades específicas, teniendo en cuenta factores como el lenguaje, las creencias, las normas sociales y las condiciones históricas. Esta perspectiva ampliada no solo enriquece nuestra comprensión de las matemáticas como una empresa culturalmente arraigada, sino que también promueve un enfoque más inclusivo y respetuoso hacia las diversas formas de conocimiento matemático en todo el mundo.

No obstante, como lo mencionan autores como Oliveras y Godino (2015), la Etnomatemática no cuenta con herramientas para el diseño ni la clasificación de actividades; por esta razón Blanco-Álvarez et al. (2024;

2017a) propone 7 dimensiones con 27 indicadores, que pueden ser utilizados tanto para el diseño como para la clasificación de actividades etnomatemáticas.

Dicha herramienta sirve para la clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la Etnomatemática, clasificándolas en tres niveles: 1) motivador/exploratorio, 2) político/valoración y, 3) amplificador/articulador.

Ya varios estudios han utilizado dicha herramienta (Blanco-Álvarez et al., 2017c; Garzón Méndez y Bermúdez Herrera, 2019; Jiménez-Angulo et al., 2023; Mosquera, 2018).

3.2. Niveles de articulación de la Etnomatemática con la matemática escolar

En el aula, son diversos los intereses con los que el profesor de matemáticas articula la Etnomatemática con la matemática escolar (Vilela, 2006). Se presentan tres niveles dinámicos de dicha articulación, que van desde el motivador/exploratorio al amplificador/articulador. Estos niveles se describen a continuación:

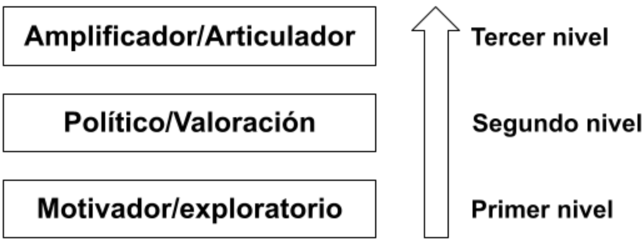
Nivel motivador/exploratorio: se caracteriza por permitir el trabajo en el aula con la Etnomatemática, pero se utiliza como motivador, pretexto, elemento del contexto o curiosidad para que el estudiante se interese o se sienta más cercano al concepto de las matemáticas escolares que se van a estudiar. La Etnomatemática no es concebida como objeto de estudio matemático.

Nivel político/valoración: este nivel le imprime un valor adicional a los conocimientos matemáticos extraescolares en el aula, valorándolos, legitimándolos, reconociendo la diversidad de pensamientos matemáticos y sus diferentes formas de representación.

Nivel amplificador/articulador: este nivel se caracteriza por presentar los conocimientos etnomatemáticos como objeto de estudio, al lado de los conocimientos matemáticos escolares. Se busca hacer paralelos entre métodos matemáticos escolares y extraescolares para la resolución de problemas.

Estos niveles son dinámicos, en tanto, se espera que las actividades matemáticas puedan iniciar la articulación de la Etnomatemática en el nivel 1 y avanzar hacia el nivel 3, como se ilustra en la Figura 107.

Figura 107. *Niveles de articulación de la Etnomatemática con la matemática escolar*



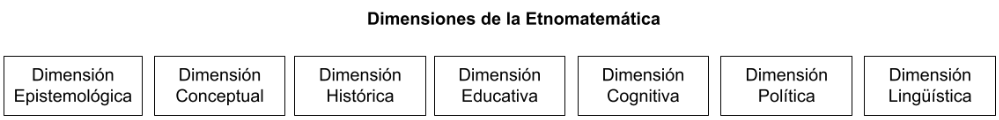
Fuente: Blanco-Álvarez (2024, p. 2).

Para reconocer el nivel al que pertenece una actividad matemática orientada desde la Etnomatemática, se ha diseñado un instrumento que permite realizar su clasificación, el cual se presenta a continuación.

3.3. El instrumento

El instrumento utilizado cuenta con 27 indicadores organizados en siete dimensiones, seis de ellas propuestas por D'Ambrosio (2019) y una por Blanco-Álvarez (2024), la dimensión lingüística, como se muestra en la Figura 108. Este instrumento es una versión ampliada y mejorada de la primera versión realizada por Blanco-Álvarez (Blanco-Álvarez, 2017; Blanco-Álvarez et al., 2017c).

Figura 108. *Dimensiones de la Etnomatemática*



Fuente: Blanco-Álvarez (2024).

Las dimensiones se fundamentan en D'Ambrosio (2019) y los componentes e indicadores se fundamentan en diversas características de un currículo de matemáticas basado en la cultura, enunciadas por autores como: Bishop (1999); Blanco-Álvarez (2011); D'Ambrosio (2000, 2014, 2019); Domite (2006); Gerdes (1996); Oliveras (1996); Oliveras y Gavarrete (2012), y elementos del conocimiento didáctico-matemático del profesor, necesarios para llevar a la práctica dicho currículo, que son listadas en Blanco-Álvarez et al. (2017b). En la Tabla 20 se presentan las dimensiones, los componentes y los indicadores propuestos por el autor.

Tabla 20. *Dimensiones, componentes e indicadores*

Dimensión	Componente	Indicador
Dimensión Epistemológica	Naturaleza o postura filosófica	1. Se hace alusión a las matemáticas como un producto sociocultural.
Dimensión Conceptual	Situaciones problema	2. Se hacen explícitos los objetos matemáticos extraescolares o etnomatemáticos en las situaciones problema. 3. Se resuelven situaciones problema usando diferentes procedimientos, algoritmos escolares y extraescolares.
	Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	4. Se presentan procedimientos, definiciones, representaciones de objetos matemáticos extraescolares.
	Argumentos	5. Se valoran y respetan argumentos basados en lógicas distintas a la occidental.
	Relaciones	6. Se establecen comparaciones, relaciones entre los procedimientos, definiciones, representaciones de objetos matemáticos escolares y extraescolares.
Dimensión Histórica	Historias	7. Se tiene en cuenta la historia de las matemáticas, de las etnociencias, etnohistorias.
Dimensión Educativa	Adaptación del currículo	8. Se adecúan los contenidos a los fines del currículo nacional, la educación intercultural bilingüe o etnoeducación.

Dimensión	Componente	Indicador
		9. Se adecúan los contenidos a los currículos propios locales o proyectos educativos institucionales comunitarios.
	Conexiones intra e interdisciplinares	10. Se hacen conexiones de las matemáticas con la física, la antropología, la historia, la sociología, etc.
	Interacción con la comunidad	11. Se tiene en cuenta a la comunidad en el diseño de la clase, proyectos educativos, currículo, etc.
	Interacción docente-estudiante-comunidad	12. Se favorece la participación de la comunidad en la gestión de la clase o de proyectos
	Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadores)	13. Se usa material didáctico contextualizado, textos escolares diseñados desde una perspectiva etnomatemática o herramientas diseñadas por la comunidad para resolver problemas matemáticos, por ejemplo, el quipu, la yupana.
	Metodologías	14. Se trabaja desde el enfoque de resolución de problemas. 15. Se proponen métodos que tengan en cuenta el saber cultural, por ejemplo, los microproyectos (Oliveras,1996), que tengan relación con signos culturales de la comunidad o las prácticas sociales.
	Emociones	16. Se favorece la motivación de los estudiantes, para que se interesen y participen.

Dimensión	Componente	Indicador
		17. Se mejora su autoestima al estudiar contenidos etnomatemáticos relacionados con su comunidad, con su cultura.
Dimensión Cognitiva	Conocimientos previos	18. Se tienen en cuenta los saberes matemáticos previos de los estudiantes, relacionados con su cultura. 19. Se tienen en cuenta las formas de razonamiento y argumentación características de su cultura para legitimar su conocimiento en el aula.
	Creatividad	20. Se tienen en cuenta formas diversas o nuevas de plantear soluciones a las situaciones problema.
	Aprendizaje: (conceptos, procedimientos, argumentos y relaciones entre los mismos)	21. Se contempla en la evaluación los conocimientos y modos de razonar matemáticos escolares y extraescolares culturales.
Dimensión Política	Reconocimiento a la Diversidad cultural	22. Se promueve la reflexión sobre las etnomatemáticas de diversas culturas. 23. Se explicita el reconocimiento y la valoración del pensamiento matemático extraescolar.
	Justicia social	24. Se contempla la promoción de la equidad, la inclusión social o la democracia.

Dimensión	Componente	Indicador
	Ética	25. Se promueven reflexiones sobre la relación entre individuos, comunidad y naturaleza, mediados por el saber matemático.
Dimensión Lingüística	Lenguajes	26. Se contempla el uso de diferentes lenguas, vista como riqueza cultural. 27. Se contemplan diversos modos de escritura y oralidad.

Fuente: Blanco-Álvarez (2024).

Estos indicadores están pensados para clasificar las actividades según sea el nivel de articulación de la Etnomatemática con las matemáticas escolares. Sin embargo, también pueden utilizarse a la hora de diseñar actividades, secuencias de enseñanza, textos escolares, etc., puesto que se convierten en una guía para el docente sobre qué elementos puede usar en sus diseños, teniendo en cuenta que no es necesario que se cumplan todos de una vez.

Estos podrán ir apareciendo, poco a poco, a medida que se avanza en las actividades. Es crucial que el lector entienda que estos indicadores no buscan ser instrucciones estrictas para los docentes ni recetas predefinidas para el diseño; no siguen un camino lineal y tampoco pretenden ser los únicos, es decir, no forman una lista cerrada. De hecho, se alienta a los docentes a proponer nuevos indicadores basados en su experiencia educativa, investigación y contexto personal. Por otro lado, este instrumento puede servir de guía en los procesos de observación y reflexión del estudio de clase o *lesson study* (Hart et al., 2011), cuando de actividades etnomatemáticas se trate.

2.3.1 Proceso de clasificación

La forma de utilizar el instrumento consiste en buscar la presencia de los indicadores en la actividad, secuencia de enseñanza, texto escolar, etc., con el objetivo de exhibir evidencias y argumentar cómo se cumplen. Para asignar una clasificación, no es necesario que se cumplan todos los indicadores, basta con que se identifique uno para que forme parte de dicho nivel. Si cumple más de un indicador de diferentes niveles se clasificará en el nivel más alto en el que cumpla un indicador. Por ejemplo: si una actividad cumple los indicadores 9 y 11. El indicador 9 es del nivel Motivador/exploratorio y el indicador 11 es del nivel Político/valoración. La actividad se clasificará en el nivel Político/valoración. De igual forma, si una actividad cumple los indicadores 16, 1 y 4, la actividad se clasificará en el nivel Amplificador/articulador.

En la Tabla 21 se presentan los indicadores organizados por cada nivel.

Tabla 21. *Niveles y sus indicadores*

Nivel	**Indicadores**
Amplificador/articulador	2, 3, 4, 5, 6, 18, 19, 20, 21
Político/valoración	1, 7, 11, 12, 22, 23, 24, 25, 26, 27
Motivador/exploratorio	8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17

Fuente: Blanco-Álvarez (2024).

3.4. Ejemplos de clasificación de actividades

3.4.1. Primer ejemplo de clasificación

Título del artículo: La chakana como material didáctico para la aplicación de propiedades algebraicas en la resolución de operaciones con polinomios.

Actividad 1: Suma y resta de polinomios

- **Área:** Álgebra.
- **Grado:** 9° año de educación general básica.
- **Objeto matemático estudiado:** operaciones de polinomios.
- **Objetivo de la actividad:** Aplicar las propiedades algebraicas (adición y sustracción) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la sustracción de términos algebraicos.
- **Materiales:** la chakana.

La información completa de esta actividad se encuentra en la sección 2.2.11.

En adelante se ejemplifica la forma de usar los indicadores presentados en la Tabla 20. El proceso consiste en verificar la existencia de evidencias de que se cumple un o varios indicadores en la actividad analizada, luego según los indicadores que se cumplan se ubica en uno de los niveles de la Tabla 21.

Análisis de la actividad

Indicador 8. Se adecúan los contenidos a los fines del currículo nacional, la educación intercultural bilingüe o etnoeducación.

El contenido de la actividad hace parte del currículo de educación intercultural bilingüe del Ecuador y como lo expresa el Ministerio de Educación de dicho país (2018):

> Se hace también un análisis de los aportes de la matemática desde una visión cultural como la expansión de los números indoarábigos, el uso de bases matemáticas de las culturas originarias, instrumentos de cálculo de las diferentes culturas hasta llegar al desarrollo del álgebra, la geometría y su aplicación a la realidad a través del análisis estadístico descriptivo. (p. 25)

Se tuvo en cuenta la política educativa del Ecuador, puesto que la actividad fue diseñada para ese país.

Indicador 13. Se usa material didáctico contextualizado, textos escolares diseñados desde una perspectiva etnomatemática o herramientas diseñadas por la comunidad para resolver problemas matemáticos, por ejemplo, el quipu, la yupana.

En la actividad se utiliza material concreto, en particular se hace uso de la chakana, instrumento matemático desarrollado por las comunidades. “La Chakana Andina es un material concreto, innovador y curioso, icono de la cultura ancestral que debe ser incorporado a la enseñanza-aprendizaje de todas las áreas y básicamente a la matemática" (Escandón Caguana y Rivera Chaca, 2020, p. 25).

Al analizar esta actividad, solo se encontró evidencia del cumplimiento de los indicadores 8 y 13, por lo que la actividad se ubica en el nivel motivador/exploratorio, como se muestra en la Tabla 22.

Tabla 22. *Niveles cumplidos en la actividad*

Nivel	**Indicadores**
Amplificador/articulador	2, 3, 4, 5, 6, 18, 19, 20, 21
Político/valoración	1, 7, 11, 12, 22, 23, 24, 25, 26, 27
Motivador/exploratorio	**8**, 9, 10, **13**, 14, 15, 16, 17

3.4.2. Segundo ejemplo de clasificación

Título del artículo: Ethnomathematical research and drama in education techniques: developing a dialogue in a geometry class of 10th grade students.

Actividad 2: Discovering 'Xysta' and their mathematics

- **Área:** Geometría.
- **Grado:** décimo.
- **Objeto matemático estudiado:** simetrías.
- **Objetivo de la actividad:** reviewed previously learned notions of symmetry, investigating mathematical ideas that are incorporated in '*xysta*'.

La información completa de esta actividad se encuentra en la sección 2.2.3.6.

Análisis de la actividad

Indicador 8. Se adecúan los contenidos a los fines del currículo nacional, la educación intercultural bilingüe o etnoeducación.

> ...documentos de síntesis que hacen hincapié en cuestiones de conexiones matemáticas tanto en el contexto de la necesaria alfabetización matemática del futuro ciudadano en el mundo moderno como en la consideración de las matemáticas como creación cultural de la historia de la humanidad. El objetivo central es demostrar a los alumnos la necesidad de enseñar matemáticas y su papel crucial en la búsqueda de estructuras matemáticas en la naturaleza y en las actividades humanas. (Ινστιτούτο, 2007)

Indicador 10. Se hacen conexiones de las matemáticas con la física, la antropología, la historia, la sociología, etc.

La actividad establece una conexión entre las matemáticas, la arquitectura, la artesanía y el folclore de la región a través de la investigación y el debate llevado a cabo entre los estudiantes de esa zona.

Indicador 22. Se promueve la reflexión sobre las etnomatemáticas de diversas culturas.

La actividad permitió estudiar formas de pensamiento geométrico de los artesanos que crearon los diferentes diseños presentes en las fachadas de las casas. Los estudiantes debatieron sobre dichas construcciones vistas desde la matemática escolar y desde la historia y la cultura de los artesanos.

De acuerdo a este análisis, la actividad cumple con los indicadores 8, 10 y 22. Aunque cumple con indicadores del nivel Motivador/Exploratorio, también cumple con un indicador del nivel Político/Valoración, entonces se ubica en el nivel más alto, que en este caso es Político/Valoración, como se muestra en la Tabla 23.

Tabla 23. *Niveles cumplidos en la actividad*

Nivel	Indicadores
Amplificador/articulador	2, 3, 4, 5, 6, 18, 19, 20, 21
Político/valoración	1, 7, 11, 12, **22**, 23, 24, 25, 26, 27
Motivador/exploratorio	**8**, 9, **10**, 13, 14, 15, 16, 17

3.4.3. Tercer ejemplo de clasificación

Título del artículo: Etnomatemáticas de signos culturales y su incidencia en la formación de maestros.

Actividad 2: Conteo en cabécar

- **Área:** Aritmética.

- **Grado:** Primero de primaria.
- **Objeto matemático estudiado:** conteo.
- **Objetivo de la actividad:** Enseñar algunos de los principios básicos de conteo para los números del 0 al 9 para primer grado de primaria que se utiliza en la mayor parte del territorio costarricense.

La información completa de esta actividad se encuentra en la sección 2.2.4.1.

Análisis de la actividad

Indicador 4. Se presentan procedimientos, definiciones, representaciones de objetos matemáticos extraescolares

La actividad plantea una situación problema de conteo y se presenta el procedimiento de solución de un estudiante en lengua cabécar y en español, en base quinaria. Este grupo étnico, utiliza la metáfora numérica *sá-julá* que alude a los dedos de una mano, para referir al numeral cinco en la lengua cabécar.

Indicador 8. Se adecúan los contenidos a los fines del currículo nacional, la educación intercultural bilingüe o etnoeducación

Como esta actividad fue diseñada para el sistema educativo costarricense, se analiza su adecuación con las políticas educativas de Costa Rica. Se encuentra entonces que la actividad planteada está en concordancia con el Convenio 169 de la OIT sobre Pueblos Indígenas y Tribales: este convenio internacional vela por los derechos de los pueblos indígenas. Impone al Estado costarricense el deber de respeto a las culturas, formas de vida, organizaciones e instituciones de los pueblos indígenas. En materia educativa, indica que los miembros de pueblos indígenas deben adquirir una educación en igualdad con el resto de la comunidad nacional, para participar plenamente de ella. También indica que la educación debe abarcar su historia, sus conocimientos, su sistema de valores, entre otros. Indica que deberá favorecer la enseñanza de la lengua indígena (OIT, 2014).

Indicador 26. Se contempla el uso de diferentes lenguas, vistas como riqueza cultural

La actividad contempla el uso del español y la lengua materna cabécar. El pueblo cabécar tiene palabras, en su lengua, para designar los números de acuerdo a su forma, tamaño, peso, etc., para lo cual se crea clasificadores que combinan con los números en la lengua local.

De acuerdo a este análisis, la actividad cumple con los indicadores 4, 8 y 26 y se ubica en el nivel Amplificador/Articulador, como se muestra en la Tabla 24.

Tabla 24. *Niveles cumplidos en la actividad*

Nivel	**Indicadores**
Amplificador/articulador	2, 3, **4**, 5, 6, 18, 19, 20, 21
Político/valoración	1, 7, 11, 12, 22, 23, 24, 25, **26**, 27
Motivador/exploratorio	**8**, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17

De acuerdo a este análisis, la actividad se ubica en el nivel amplificador/articulador.

3.5. Conclusiones

Se ha presentado la clasificación de tres actividades diseñadas desde la Etnomatemática como ejemplo del uso de los indicadores y su respectiva clasificación en cada uno de los niveles planteados. Dicha clasificación puede utilizarse para seleccionar las actividades a trabajar en el aula de acuerdo al objetivo que se persiga y el nivel de articulación de la Etnomatemática con las matemáticas que se esté buscando.

Por otro lado, los indicadores propuestos, además de ser útiles para la clasificación de actividades, se pueden utilizar para orientar el diseño de tareas con mayor objetividad. Actividades que pueden ir integrando los indicadores poco a poco, pasando del nivel Motivador/exploratorio al nivel Amplificador/articulador.

Como un ejercicio académico y para hacer uso de los indicadores y los niveles de articulación de la etnomatemática con la matemática escolar, se invita a los lectores a realizar la clasificación de las distintas actividades presentadas en el capítulo 2.

Finalmente, un aporte valioso de este proyecto de investigación es el instrumento presentado para la clasificación y diseño de actividades basadas en la Etnomatemática, lo que permite abrir una nueva línea de investigación. Línea donde se diseñen nuevas tareas para el aula, donde se adecuen currículos escolares desde la Etnomatemática, donde se integren los indicadores y los diferentes niveles en textos escolares, entre otros temas más.

Referencias

Abiam, P. O., Abonyi, O. S., Ugama, J. O., & Okafor, G. (2016). Effects of Ethnomathematics-based Instructional Approach on Primary School Pupils' Achievement in Geometry. *Journal of Scientific Research and Reports*, *9*(2), 1–15. https://doi.org/10.9734/jsrr/2016/19079

Acosta, C., Ordoñez, M., & Blanco-Álvarez, H. (2024). Diseño de actividades matemáticas bajo un enfoque etnomatemático: una revisión. *Eco Matemático*, *15*(1), 1–21. https://doi.org/https://doi.org/10.22463/17948231.3679

Acosta, J. de. (2002). *Natural and moral history of the Indies*. Duke University Press.

Albanese, V., & Perales, F. J. (2014). Microproyectos etnomatemáticos sobre danzas folclóricas: Aprender matemática desde el contexto con maestros en formación. *Revista de Currículum y Formación Del Profesorado*, *18*(3), 457–472. http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL14.pdf

Albanese, V., & Perales, F. J. (2015). Enculturation with Ethnomathematical Microprojects: From Culture to Mathematics. *Journal of Mathematics & Culture*, *9*(1), 1–11. https://www.researchgate.net/publication/333480358_Enculturation_with_Ethnomathematical_Microprojects_From_Culture_to_Mathematics

Albanese, V., Santillán, A., & Oliveras, M. L. (2014). Etnomatemática y formación docente: el contexto argentino. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(1), 198–220. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274030901010

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. Horsori.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.

Amoamo, T., & Tupene, T. (1984). The complementarity of history and art in tūtāmure meeting-house, ōmarumutu marae, ōpōtiki. *Journal of the Polynesian Society*, *93*(1), 5–38. https://www.jstor.org/stable/20705842

Anderson, J. C. (1969). *Myths and legends of the Polynesians*. C. E. TUTTLE.

André, M. E. D. A. de. (2013). *Etnografia da prática escolar*. Papirus Editora.

Araújo Júnior, G. C. de. (2013). *A etnomatemática em uma cerâmica da região do Seridó/RN*. [Trabajo de maestía, Universidade Federal do Rio Grande do Norte].

Aravena, M., Caamaño, C., & Cabezas, C. (2007). Doblado de papel en el primer nivel de razonamiento del Modelo Didáctico de Van-Hiele y su proyección hacia la formalización del pensamiento geométrico. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *2*(1), 76–88.

Aroca, A. (2015). Diseños Prehispánicos, Movimientos y Transformaciones en el Círculo y Formación Inicial de Profesores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(52), 528–548. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a06

Aroca, A. (2018). Enseñanza paralela y comparativa. La postura didáctica del programa etnomatemática. In S. Valbuena, L. Vargas, & J. Berrío (Eds.), *Encuentro de Investigación en Educación Matemática* (pp. 475–481). Universidad del Atlántico. http://funes.uniandes.edu.co/14295/1/Aroca2018Enseñanza.pdf

Aroca, A. (2022). Un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas. *Tecné Episteme y Didaxis*, *52*, 211–248. http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n52/0121-3814-ted-52-211.pdf

Auckland Museum. (2001). *Education kit- Te Ao Turoa*. https://www.aucklandmuseum.com/collection/object/am_library-manuscriptsandarchives-5441

Ávila, A. (2014). La etnomatemática en la educación indígena: así se concibe, así se pone en práctica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(1), 19–49. https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/104/312

Baker, C. (2006). *Foundations of Bilingual Education and Bilingualism* (4ta ed.). Multilingual Matters.

Bandeira, F. de A. (2009). *Pedagogia Etnomatemática: ações e reflexões em matemática do ensino fundamental com um grupo sociocultural específico* [Tesis de doctorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte]. https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/14194/1/FranciscoAB_TESE.pdf

Bandeira, F. de A. (2016). *Pedagogia Etnomatemática: reflexões e ações pedagógicas em Matemática do ensino fundamental*. EDUFRN- Ciências Humanas. https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/21443

Bandeira, F. de A. (2017). Ethnomatematics three pedagogical proposals for basic education. *ETD- Educação Temática Digital*, *19*(3), 622–652. https://doi.org/10.20396/etd.v19i3.8648366

Baroody, A. J., & Dowker, A. (Eds.). (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: constructing adaptive expertise*. Lawrence Erlbaum Associates.

Barriga Puente, F. (1998). *Los sistemas de numeración indoamericanos: un enfoque areotipológico*. J. L. Servicios Gráficos.

Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2657-8

Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 179–191. https://doi.org/10.1007/BF00751231/METRICS

Bishop, A. J. (1995). Educando a los "culturizadores matemáticos." *Revista UNO*, *6*(2), 7–12.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós Ibérica.

Bishop, A. J. (1988c). Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *6*(2), 121–125. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5078

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 59–66.

Blanco-Álvarez, H. (2016). Diseño de actividades para la enseñanza de la magnitud longitud y capacidad en la educación primaria y básica desde la Etnomatemática. In G. Marmolejo, H. Blanco-Álvarez, & E. Fernandez (Eds.), *Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria* (pp. 9–26). Fundación Save the Children Colombia.

Blanco-Álvarez, H. (2017). *Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/9380/

Blanco-Álvarez, H. (2024). Clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática. In I.-A. Londoño-Agudelo & H. Blanco-Álvarez (Eds.), *Reflexiones sobre Educación Matemática desde la Etnomatemática* (pp. 61–72). Editorial Universidad de los Llanos.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M. L. (2017a). Elementos de la formación de maestros desde la Etnomatemática que promueven la insubordinación creativa. In C. E. Lopes & D. Jaramillo (Eds.), *Escenas de la insubordinación creativa en las investigaciones en educación matemática en contextos de habla española* (pp. 79–90). Lulu Press.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M. L. (2017b). Formación de profesores de matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *31*(58), 564–589.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M. L. (2017c). Medidas de capacidad volumétrica no convencionales: aportes a la educación primaria. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *Número ext*, 2071–2078.

Blanco-Álvarez, H., & Vásquez Hernández, A. P. (2016). Evaluación de textos escolares de matemáticas diseñados con una perspectiva etnomatemática [Ponencia]. *Primer Encuentro Latinoamericano de Etnomatemática- ELEm 1*, Sololá, Guatemala. https://www.etnomatematica.org/elem/index.php/elem1/elem1/paper/view/31

Boada Rafecas, N., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras Contreras, M. L. (2014). Introduciendo los trabajos artesanales en la Educación Infantil: la taracea granadina como recurso etnomatemático. *ReiDoCrea: Revista Electrónica de Investigación y Docencia Creativa*, *3*(28), 232–244.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. Springer. https://doi.org/10.1007/B105001

Bowers, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The Evolution of Mathematical Practices: A Case Study. *Cognition and Instruction*, *17*, 25–64.

Burchum, J. L. R., Russell, C. K., Likes, W., Adymy, C., Britt, T., Driscoll, C., Graff, J. C., Jacob, S. R., & Cowan, P. A. (2007). Confronting Challenges in Online Teaching : The WebQuest Solution. *MERLOT Journal of Online Learning and Teaching*, *3*(1), 40–57.

Calvo, X. (1996). El Polydrón, un material que engancha. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matematicas*, *7*, 19–30.

Campbell, L., Kaufman, T., & Smith-Stark, T. C. (1986). Meso-America as a linguistic area. *Language*, *62*(3), 530–570. https://doi.org/10.1353/LAN.1986.0105

Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2022). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, *34*(2), 39–71. https://doi.org/10.24844/EM3402.02

Catepillán, X., & Szymanski, W. (2012). Counting and Arithmetic of the Inca. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *5*(2), 47–65. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274023595003

Chamoso, J. M., & Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *14*(18), 59–69. http://funes.uniandes.edu.co/21596/1/Chamoso2019Creacion.pdf

Chavarría Vásquez, J. M., Albanese, V., García Borbón, M., Gavarrete Villaverde, M. E., & Martínez Rodríguez, M. (2017). Ubicación espacial y localización desde la perspectiva sociocultural: validación de una propuesta formativa para la enculturación docente a partir de Etnomatemáticas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(2), 26–38. https://www.redalyc.org/journal/2740/274053675001/html/

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 307–334). Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Bowers, J., Stephan, M., & Gravemeijer, K. P. E. (Eds.). (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context*. National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., & McClain, K. (2002). Supporting Students' Learning of Significant Mathematical Ideas. In G. Wells & G. Claxton (Eds.), *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education*. Blackwell.

Cobb, P., & McClain, K. (2004). Proposed design principles for the teaching and learning of elementary statistics instruction. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 375–396). Kluwer.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*, 113–164. https://www.jstor.org/stable/1466831

Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics education. *Education et Didactique*, *2*(1), 105–124. https://doi.org/10.4000/EDUCATIONDIDACTIQUE.276

Condori-Viza, C., Navarrete-Álvarez, M., Aguirre- Cipe, I., & Pérez-Chamorro, A. (2017). Cultura Arica: Un caso para el estudio y educación de la geometría presente en textiles prehispánicos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(2), 7–25.

Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos. (2010). *Ley General de Derechos Lingüísticos de los Pueblos Indígenas*. https://www.refworld.org.es/pdfid/57f76d9023.pdf

Cortina, J. L., & Rojas, G. C. (2016). Didáctica de los sistemas de numeración de las lenguas indígenas: el diseño de una propuesta para escuelas primarias unidocentes. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *9*(2), 103–126. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274046804007

Cummins, J. (1994). Primary language instruction and the education of language minority students. In C. F. Leyba (Ed.), *Schooling and language minority students* (pp. 3–46). Evaluation, Dissemination, and Assessment Center.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44–48.

D'Ambrosio, U. (1993). *Etnomatematica: arte ou tecnica de explicar e conhecer* (2nd ed.). Ática.

D'Ambrosio, U. (2000). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. In A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos* (pp. 439–444). Universidad de La Laguna.

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. In J. Giménez, F. J. Díez Palomar, & M. Civil (Eds.), *Educación matemática y exclusión* (pp. 83–102). Graó.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 100–107.

D'Ambrosio, U. (2019). Etnomatemáticas Entre las tradiciones y la modernidad. *Números: Revista Didáctica de Las Matematicas*, *102*, 191–192. http://www.sinewton.org/numeros

Dantas De Lima, F., & Bandeira, F. de A. (2018). Etnomatemática no Garimpo: contribuições para o ensino de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas. *Rematec*, *13*(29), 35–49. http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/145/127

De Vos, A. S., & Fouché, C. B. (1998). General introduction to research design. In A. S. De Vos (Ed.), *Research at Grass Roots* (pp. 76–94). Van Schaik Publishers.

Díaz Toro, N. D., Escobar Madroñero, S. V., & Mosquera López, S. (2009). Actividades didácticas apoyadas en algunos aspectos históricos de la cultura y matemática Maya. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *2*(1), 4–26. http://www.etnomatematica.org/v2-n1-febrero2009/diaz.pdf

Dodge, B. (1997). Some thoughts about WebQuests. *Http://Webquest.Sdsu.Edu/About_Webquests.Html*, 1. http://webquest.sdsu.edu/about_webquests.html.

Domínguez Alvarracin, J. F., & Sanmartín Zhiña, D. L. (2019). La chakana como material didáctico para la aplicación de propiedades algebraicas en la resolución de operaciones con polinomios [Ponencia]. *Jornada Pedagógica: Educación y Currículo*, *4*, Cuenca, Ecuador.

Domite, M. do C. (2006). Da compreensão sobre formação de professores e professoras numa perspectiva etnomatemática. In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. José de Oliveira (Eds.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (2a ed., pp. 419–431). EDUNISC.

Duff, R. (1977). *The Moa-hunter period of Maori culture*. Government Printer.

Escandón Caguana, S. E., & Rivera Chaca, W. M. (2020). *Propuesta didáctica sobre el uso de la Chakana Andina para el desarrollo de destrezas del bloque de Geometría y Medida en el séptimo de EGB* [Trabajo de pregrado, Universidad Nacional de Educación]. http://repositorio.unae.edu.ec/handle/56000/1817

Farmer, D. W. (1999). *Grupos e Simetria – Um Guia para Descobrir a Matemática*. Gradiva.

Fernández, J. (2003). *Artesanía, folklore y arte popular*. Condorhuasi.

Fernández, M., Padilla, F., Santos, A., & Velázquez, F. (19991). *Circunferencia y círculo*. Síntesis.

Fishman, J. A. (1991). *Reversing language shift: Theoretical and empirical foundations of assistance to threatened languages*. Multilingual matters.

Fondo de Promoción de la Cultura. (1992). *Arte de la Tierra – Nariño. Colección Tesoros Precolombinos*. Banco Popular.

Fuson, K. C., Smith, S. T., & Lo Cicero, A. M. (1997). Supporting Latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal* *for Research in Mathematics Education*, *28*(6), 738–766. https://doi.org/10.2307/749640

García, F. J. (2019). Introducción a "Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos." *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *15*, 1–4.

Garcilaso de la Vega. (2004). *Comentarios Reales de los Incas*. A.F.A. Editores Importadores S.A.

Garzón Méndez, M. ., & Bermúdez Herrera, V. (2019). *Valoración de la idoneidad Etnomatemática de actividades para la enseñanza de las matemáticas*. [Trabajo de grado, Universidad del Valle].

Gavarrete, M. E. (2012). *Modelo de Aplicación de Etnomatemáticas en la Formación de Profesores para Contextos Indígenas en Costa Rica* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/tesis_gavarrete.pdf

Gavarrete, M. E., & Albanese, V. (2015). Etnomatemáticas de signos culturales y su incidencia en la formación de maestros. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 299–315.

Gerdes, P. (1991). *Cultura e o despertar do pensamento geométrico*. Instituto Superior Pedagógico. https://app.bczm.ufrn.br/home/#/item-details

Gerdes, P. (1996). Ethnomathematics and mathematics education. In A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 909–943). Kluwer.

Gerdes, P. (2008). *A Numeração em Moçambique. Contribuição para uma reflexão sobre cultura, língua e educação matemática*. Centro de Pesquisa para Matemática, Cultura e Educação.

Gerdes, P. (2012). *Etnomatemática cultura, matemática, educação: Coletânea de Textos 1979-1991*. Instituto Superior de Tecnologias e Gestão.

Gheverghese, G. (1990). *The crest of the Peacock*. Penguin Books.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6a Ed.). Editora Atlas S.A.

Godino, J. D. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Bencom, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 1–25. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/369/367

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(1), 59–76. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663

Gomes, A. L. A. (1997). *A dinâmica do pensamento geométrico: aprendendo a enxergar meias verdades e a construir novos significados. Tese de Doutorado em Educação* [Tesis de doctorado, Universidade Federal do Rio Grande Do Norte]. https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/14470/1/DinâmicaPensamentoGeométrico_Gomes_1998.pdf

Gómez, E. H., & Valverde, C. E. S. (2008). Uso de las ideas matemáticas y científicas de los Incas, en la enseñanza-aprendizaje de la geometría. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *1*(1), 4–11.

Gonçalves, P. G. F. (2013). *A etnomatemática dos trabalhadores das cerâmicas de Russas-Ce e o contexto escolar: delineando recomendações pedagógicas a partir de uma experiência educacional* [Tesis de maestía, Universidade Federal do Rio Grande do Norte]. https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16108/1/PauloGFG_DISSERT.pdf

Grando, N. I. (1998). *A matemática na agricultura e na Escola*. [Tesis de maestía, Universidad Federal de Pernambuco].

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht CD-ß Press.

Greenberg, J. H. (1990). Generalizations about numeral systems. In K. Denning & S. Kemmer (Eds.), *On language: selected writings of Joseph H. Greenberg* (pp. 271–309). Stanford University Press. http://www.sup.org/books/title/?id=2567

Guaman Poma de Ayala, F. (1936). *Nueva Coronica y Buen Gobierno*. Institut d'Ethnologie, Universite de Paris.

Hart, L. C., Alston, A., & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson study Research and Practice in Mathematics Education: Learning together*. Springer.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. del P. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed.). McGRAW-HILL.

Horta, H. (2005). *Arte textil prehispánico: diseños de los tejidos de la cultura Arica, norte de Chile (1000-1470d.C.)*. Universidad Bolivariana.

Houaiss, A. (2009). *Diccionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Objetiva.

Huapaya Gómez, E., & Salas Valverde, C. E. (2008). Uso de las ideas matemáticas y científicas de los Incas en la enseñanza - aprendizaje de la geometría. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *1*(1), 4–11. http://www.etnomatematica.org/v1-n1-febrero2008/huapaya.pdf

Jiang, W. (2000). The relationship between culture and language. *ELT Journal*, *54*(4), 328–334. https://doi.org/10.1093/ELT/54.4.328

Jiménez-Angulo, J. R., Polo-Reinolds, R., & Blanco-Álvarez, H. (2023). Clasificación de actividades geométricas presentes en el texto Pensando y Razonando en Comunidad ciclo 1 y 2. Un enfoque desde la Etnomatemática. *Revista Perspectivas*, *8*(1), 51–63.

Kantowski, M. G. (1979). The Teaching Experiment and Soviet Studies of Problem Solving [Ponencia]. *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*, Athens, Georgia.

Kitchin, R., & Blades, M. (Eds.). (2002). *The Cognition of Geographic Space*. I.B.Tauris. https://doi.org/10.5040/9780755620951

Knijnik, G. (2006). *Educação matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra*. EDUNISC.

Lambert, W. E. (1975). Culture and language as factors in learning and education. In A. Wolfgang (Ed.), *Education of immigrant student* (pp. 55–83). OISE Press.

Landry, R., Allard, R., & Deveau, K. (2007). Bilingual schooling of the Canadian Francophone minority: a cultural autonomy model. *International Journal of the Sociology of Language*, *185*, 133–162.

Latorre, A. (2004). La investigación acción. In R. Bisquerra Alzina (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 370–394). La Muralla.

Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2017). *Digital technologies in designing mathematics education tasks: potential and pitfalls*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0

Macías Sánchez, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos* [Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid]. https://eprints.ucm.es/id/eprint/40389/1/T38101.pdf

Marconi, M., & Presotto, Z. M. (2011). *Antropologia - Uma Introdução* (7th ed.). Atlas.

Martins, J. P., & Mendes, I. A. (2018). Exploração e problematização de simetrias em artefatos socioculturais para o uso no ensino fundamental. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(2), 8–30.

Miguel, A., & Mendes, I. A. (2010). Mobilizing histories in mathematics teacher education: Memories, social practices, and discursive games. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *42*, 381–392. https://doi.org/10.1007/S11858-010-0255-8/METRICS

Ministerio de Educación. (2015). *Ley Orgánica de Educación Intercultural*. https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Ley_Organica_de_Educacion_Intercultural_LOEI_codificado.pdf

Ministerio de Educación del Ecuador. (2018). *Diseño Curricular de Educación General Básica Intercultural Bilingüe*. https://www.educacionbilingue.gob.ec/wp-content/uploads/2021/01/CURRICULO-EIB-288-PAGINAS.pdf

Ministry of Education. (1991). *Mathematics in the New Zealand Curriculum*. Learning Media.

Mosquera, D. (2018). *Valoración de la idoneidad didáctica de actividades diseñadas desde la etnomatemática para las comunidades indígenas*. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira].

New Zealand MetService. (2014). *New Zealand Climate*. https://about.metservice.com/our-company/learning-centre/new-zealand-climate/

Nigeria Educational Research Development Council. (2007). *9-year universal basic education curriculum – Mathematics (1 – 3 and 4 – 6)*. NERDC.

Nkopodi, N., & Mosimege, M. (2009). Incorporating the indigenous game of morabaraba in the learning of mathematics. *South African Journal of Education*, *29*(3), 377–392. https://doi.org/10.15700/saje.v29n3a273

Nunes, T. (1996). What is the difference between one, un, and yi? In H. Mansfield, N. A. Pateman, & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children: International perspectives on curriculum* (pp. 177–185). Kluwer.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.

Oliveira Júnior, B. de, & Mendes dos Santos, E. (2016). Etnomatemática: O ensino de medida de comprimento no 6º ano do ensino fundamental na Escola Indígena Kanamari Maraã-AM, Brasil. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *9*(2), 53–66.

Oliveras Contreras, M. L. (2006). Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. In J. Goñi Zabala (Ed.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp. 117–149). Graó.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas : formación de profesores e innovación curricular*. Comares.

Oliveras, M. L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matematicas*, *38*, 70–81.

Oliveras, M. L., & Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las Etnomatemáticas en el Aula de Matemáticas: posibilidades y limitaciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 455–480. https://doi.org/10.1590/1980-4415V30N55A08

Oliveras, M. L., & Gavarrete, M. E. (2012). Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *15*(3), 339–372.

Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 432–449. https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/219/301

Organización Internacional del Trabajo. (2014). Convenio Núm. 169 de la OIT sobre Pueblos Indígenas y Tribales. In *Oficina Internacional del Trabajo* (Vol. 53, Issue 9). http://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/---americas/---ro-lima/documents/publication/wcms_345065.pdf

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e aprender matemática*. Autêntica.

Parra Sánchez, A. I., & Orjuela Bernal, J. I. (2014). Consideraciones sobre educación matemática y educación indígena en Colombia. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 181–201.

Pires, M. (1999). O professor e o currículo. *Educação e Matemática*, *55*, 3–6. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/836

Radmehr, F. (2023). Toward a theoretical framework for task design in mathematics education. *Journal on Mathematics Education*, *14*(2), 189–204.

Rojas López, G. C. (2016). *Propuesta didáctica, para la enseñanza de la numeración tu'un savi, para escuelas multigrado, indígenas, variante Ñuu Kuiñi, de Cuquila, Tlaxiaco, Oaxaca, región Mixteca*. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional].

Rosa, M., & Clark Orey, D. (2010). Educação Matemática: algumas considerações e desafios na perspectiva etnomatemática. *Revista de Educação Popular*, *8*(1), 55–63. https://doi.org/10.14393/REP-2009-20069

Sadovsky, P. (2015). *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Universidad de La Republica. https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Santacruz, H. (2009). *Cómo se poblaron los territorios pasto*. https://www.monografias.com/trabajos-pdf2/como-poblaron-territorios-pasto/como-poblaron-territorios-pasto.pdf

Santolaya, R. A. M. (2013). *Propuesta Didáctica para Enseñar Polinomios a 3º ESO Utilizando Eduslide* [Trabajo de maestría, Universidad Internacional de la Rioja]. https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1490/2013_01_24_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Sardella, O. (2004). La Geometría en las Danzas Folklóricas Argentinas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*, 801–806.

Schmelkes, S. (2010). Indígenas rurales, migrantes, urbanos: una educación equivocada, otra educación posible. In Á. Marchesi & M. Poggi (Eds.), *Presente y futuro de la educación iberoamericana* (pp. 203–222). Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, Fundación Carolina.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). MacMillan Publishing Company.

Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Ministro da Educação e do Desporto. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Secretaría de Educación Pública. (1999). *Lineamientos Generales para la Educación Intercultural Biligüe para las niñas y los Niños Indígenas*. Brasil. https://es.slideshare.net/armandocauich/lineamientos-generales-para-la-educacion-intercultural-bilingue

Secretaría de Educación Pública. (2008). *Guía Didáctica Multigrado. Matemáticas*. Brasil.

Secretaría de Educación Pública. (2015). *Sistema Interactivo de Consulta de Estadística Educativa*. https://planeacion.sep.gob.mx/principalescifras/

Serra, L. (2016). La cestería como herramienta didáctica para la comprensión de conceptos geométricos. *SENSOS-E*, *3*(2), 1–8. http://sensos-e.ese.ipp.pt/?p=11954%0ALA

Spector, J. M., Lockee, B. B., & Childress, M. D. (Eds.). (2023). *Learning, Design, and Technology An International Compendium of Theory, Research, Practice, and Policy*. Springer International Publishing.

Starr, L. (2005). *Meet Bernie Dodge: The Frank Lloyd Wright Of Learning Environments*. Education World. https://www.educationworld.com/a_issues/chat/chat015.shtml

Stathopoulou, C. (2006). Exploring Informal Mathematics of Craftsmen in the Designing Tradition of "XYSTA" at Pyrgi of Chios. *For the Learning of Mathematics*, *26*(3), 9–14. https://flm-journal.org/Articles/196F0F99E5287578BB0B435B624141.pdf

Stathopoulou, C. (2007). Traditional patterns in Pyrgi of Chios: Mathematics and community. *Nexus Network Journal*, *9*(1), 103–118. https://doi.org/10.1007/s00004-006-0032-8

Stathopoulou, C., & Kotarinou, P. (2008). Using Ethnomathematical ideas for designing an interdisciplinary project through a WebQuest [Ponencia]. *ICME-11*, Monterrey, Mexico.

Stathopoulou, C., Kotarinou, P., & Appelbaum, P. (2015). Ethnomathematical research and drama in education techniques: developing a dialogue in a geometry class of 10th grade students. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 105–135.

Tăo-Ásu, R. (1977). *An introduction to the study of the Bokyi language*. Bokyi-Books.

Te Tāhuhu o te Mātauranga. (1996). *Pāngarau i roto i Te Marautanga o Aotearoa*. Te Pou Taki Korero.

Timmer, H. (2003). La Chakana. In *De Kosmos fluistert zijn Namen*. https://quintaconciencia.org/sites/www.quintaconciencia.org/files/media/2003_la_chakana_htimmer.pdf

Trinick, T. (1999). *Te reo tatai: the relationships between Maori culture and Maori mathematical language* [Tesis de maestría, University of Auckland]. http://researcharchive.vuw.ac.nz/handle/10063/6550

Trinick, T., Meaney, T., & Fairhall, U. (2015a). Reintroducing Māori ethnomathematical activities into the classroom: traditional Māori spatial orientation concepts. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 415–431.

Trinick, T., Meaney, T., & Fairhall, U. (2015b). Finding the way: Cultural revival through mathematics education [Conferencia]. *Eighth International Mathematics Education and Society*, Portland, Oregon, United States.

Trochim, W. M. (2001). *The research methods knowledge base* (2nd ed.). Atomic Dog Pub.

Urton, G. (1997). *The social life of numbers: a Quechua ontology of numbers and philosophy of arithmetic*. University of Texas Press.

Vilela, D. S. (2006). Reflexão filosófica acerca dos significados matemáticos nos contextos da escola e da rua. *III SIPEM- Seminário Internacional de Pesquisas Em Educação Matemática*, Águas de Lindóia, Brasil.

Wassen, H. (1931). The Ancient Peruvian Abacus. *Comparative Ethnographical Studies*, *9*(19), 189–205.

Watson, A., & Ohtani, M. (Eds.). (2015). *Task Desing In Mathematics Education: an ICMI study 22*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.5951/at.14.7.0596

Weiss, E. (2000). La situación de la enseñanza multigrado en México. *Perfiles Educativos*, *22*(90), 57–76. https://www.redalyc.org/pdf/132/13209004.pdf

Wright, R. J., Stanger, G., Stafford, A. K., & Martland, J. (2006). *Teaching Number in the Classroom with 4-8 Year-Olds*. ERA Research Outputs.

Ινστιτούτο, Π. (2007). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Ευρωπαϊκή Ενωση.

Lista de figuras

Lista de tablas

Acerca de los autores

Mayra Susana Ordoñez

Estudió Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Nariño, Colombia. Sus intereses investigativos se centran en la Etnomatemática, sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la Etnomatemática y la Etnoeducación.

María Cristina Acosta

Estudió Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Nariño, Colombia. Sus intereses investigativos se centran en la Etnomatemática, la Etnoeducación, sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la Etnomatemática.

Hilbert Blanco-Álvarez

Estudió Licenciatura en Matemática y Física y un Magister en Educación Matemática en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Colombia, un Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona, España, y realizó su Doctorado en Ciencias de la Educación en la Universidad de Granada, España. Actualmente es profesor tiempo completo de la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia) donde se desempeña como profesor del área de Educación Matemática y Director-Fundador de la Red Internacional de Etnomatemática- RedINET. Sus intereses investigativos se centran en la Etnomatemática, la Formación de maestros de matemáticas, la Evaluación de actividades diseñadas desde la Etnomatemática, la Etnoeducación y el Estudio de clase o Lesson Study.

êditorial
Universidad de Nariño

Año de publicación: 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Este libro expone los resultados del proyecto de investigación *Sistematización y clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática,* No. 2044 del Grupo de Investigación GESCAS del Departamento de Matemáticas y Estadística, y financiado por la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social de la Universidad de Nariño, Colombia.

Este libro procura aportar un panorama sobre los trabajos que ha realizado la comunidad de investigadores entorno al diseño de actividades matemáticas desarrolladas desde la etnomatemática. Así, el capítulo 1 presenta los aspectos generales de la investigación tales como la problemática, los objetivos, el marco teórico y los materiales y métodos.

En el capítulo 2 se presenta el instrumento para la sistematización de los artículos, de manera que nos permitiera organizar las actividades para obtener la mayor cantidad de información, sobre cómo y por qué el autor de dicho artículo diseñó cada una de estas.

Finalmente, en el capítulo 3 se indica el instrumento utilizado para la clasificación de las actividades. Dicho instrumento tiene 7 dimensiones y 27 indicadores que permiten ubicar las actividades en uno de los tres niveles de articulación y se muestran ejemplos del uso de éste.

ISBN: 978-628-7771-34-5

9 786287 771345

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

120 Años
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de Nariño