ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Vol.2

Óscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

VOLUMEN 2

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

VOLUMEN 2

Oscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

êditorial
Universidad de **Nariño**

Soto Ágreda, Oscar Fernando
Elementos de álgebra lineal / Oscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier Caicedo Zambrano--
San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

V. 2 : ilustraciones, gráficas

Incluye referencias bibliográficas p. 90-92 y reseña de los autores p. 93
ISBN: 978-628-7771-35-2

1. Álgebra lineal 2. Ecuaciones lineales 3. Vectores 4. Polinomio de una matriz I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

512.5 S718e – SCDD-Ed. 22

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL
Volumen 2

© Oscar Fernando Soto Ágreda
oscarfdosoto@gmail.com
fsoto@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo Zambrano
jacaza1@gmail.com
jacaza1@udenar.edu.co.

ISBN: 978-628-7771-35-2

Corrección de estilo: Germán Chaves Jurado
Diseño y diagramación: David Sebastian Benavides

Fecha de publicación: Abril 2025

San Juan de Pasto -Nariño -Colombia

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El libro de texto *Elementos de Álgebra Lineal, Volumen 2*, presenta el complemento del contenido del curso Álgebra Lineal que se ofrece en la Universidad de Nariño. Está dedicado al desarrollo de conceptos fundamentales del álgebra lineal como el cambio de base, ecuaciones lineales, valores y vectores propios, diagonalización de matrices y el polinomio característico de una matriz; temas que tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas. Si bien, el desarrollo de las temáticas tiene una fuerte fundamentación matemática, apropiada para estudiantes de matemáticas y física, también se puede utilizar para las clases de álgebra lineal de las áreas de ingeniería y ciencias económicas y administrativas.

En el campo de la informática, estos conceptos son fundamentales para el diseño y la implementación de algoritmos eficientes. Por ejemplo, la diagonalización de matrices y los valores y vectores propios, son esenciales en el procesamiento de imágenes y la visión por computadora. Además, las ecuaciones lineales son la base de muchos algoritmos de optimización y aprendizaje automático.

En el ámbito académico, estos conceptos son esenciales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática avanzada y la física. Existen softwares académicos diseñados específicamente para facilitar el aprendizaje de estos temas.

En el sector financiero, las ecuaciones lineales y la diagonalización de matrices se utilizan en la modelización de mercados y la valoración de activos. Los valores y vectores propios, por otro lado, son fundamentales en la teoría de la cartera y la gestión de riesgos.

En ingeniería y ciencias naturales, estos conceptos son esenciales para la modelización y simulación de sistemas físicos. Por ejemplo, los valores y vectores propios, se utilizan en la mecánica cuántica para describir el estado de un sistema, mientras que las ecuaciones lineales son fundamentales en la resolución de problemas de ingeniería estructural y eléctrica.

El libro contiene cinco (5) capítulos, en los cuales, se presenta un desarrollo riguroso de las temáticas, soportado en teoremas, demostraciones y ejemplos.

Los Autores
Universidad de Nariño
Junio de 2024.

CAPÍTULO 1.
CAMBIO DE BASE

Por lo que precede hasta el momento, nos hemos dado cuenta que, dado un espacio vectorial de dimensión finita, definida sobre un cuerpo $(K,+,\cdot)$ finito, permite elegir bases. Dado que la matriz asociada a una transformación lineal depende de las bases que se tome, la matriz cambia cuando se cambian las bases. Nos proponemos, por tanto, buscar la relación entre una matriz asociada a una transformación (que es una matriz de coordenadas) con la nueva matriz conseguida al cambiar las bases.

Este mismo problema, soluciona igualmente, otros no menos importantes, a saber:

1) Encontrar el nuevo vector coordenado, respecto de una nueva base.
2) Cómo se interpreta una transformación lineal al cambiar las bases de un dominio y de un codominio.

En verdad, hasta el momento ya se tiene solucionado el problema; sin embargo, intentamos formalizar este concepto.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre un cuerpo K; supongamos que $\dim(V) = n$, entonces, existe una base

$B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de V.

Supongamos que elegimos una nueva base de V,digamos,

$B' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

De este modo, y en virtud del Teorema Fundamental de las Trasformaciones Lineales, la función $f: V \to V$, tal que $f(A_i) = B_i$, $i \in J_n$ es una transfromacion lineal.

TEOREMA

La transformación lineal definida anteriormente es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, $\{O_v\} \subset Kerf(f)$, por propiedad de las transformaciones lineales.

Sea $A \in Ker(f)$, como $A \in V$, entonces $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$.

Luego, $f(A) = a_1B_1 + a_2B_2 + \cdots + a_nB_n = O_v$; pero B' es base de V, así, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ es linealmente independiente; de modo que,

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Luego, $A = O_v$.; esto es, $Ker(f) \subset \{O_v\}$.

Por tanto, $Ker(f) = \{O_v\}$, y así, $f: V \to V$ es un isomorfismo.

■

Esto decide de inmediato que, la matriz asociada a f (la que hemos construido ahora) es inversible.

Ahora, supongamos que, $\propto: V \rightarrow V$ es cualquier transformacion lineal. Fijemos B como base del dominio V, y B' como base del codominio V.

Siendo,

$$\propto (A_1) = a_{11}B_1 + a_{21}B_2 + a_{31}B_3 + \cdots + a_{n1}B_n$$

$$\propto (A_2) = a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{32}B_3 + \cdots + a_{n2}B_n$$

$$\propto (A_3) = a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3 + \cdots + a_{n3}B_n$$

$$\vdots$$

$$\propto (A_n) = a_{1n}B_1 + a_{2n}B_2 + a_{3n}B_3 + \cdots + a_{nn}B_n$$

Esto significa que, elegido el espacio $Hom_k(V,V)$, dado que $\propto: V \rightarrow V$, entonces,

$$F(\propto) = M_{B,B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

que es una matriz cuadrada $n \times n$.

Esto significa que, $\propto: V \rightarrow V$ puede interpretarse como la siguiente transformación:

$$\propto: V \rightarrow V, \text{tal que} \propto (A) = M_{B,B'} \cdot \bar{A},$$

donde $\bar{A}$, es el vector coordenado de A, respecto de la base B.

Por tanto, $M_{B,B'} \cdot \bar{A}$ es el vector coordenado de $\propto (A)$, respecto de la base B'.

Ahora, con cierta claridad, se ve que, si ($\propto \equiv I$), $\propto$ es la transformación lineal de V en V, el vector $\bar{A}$ es el vector coordenado de A en V, mientras que $M_{B,B'} \cdot \bar{A}$ es el vector coordenado de $I(A) = A$ en B'. Esto significa que $M_{.B,B'}$ es la *matriz de transición* de la base B a B'.

EJEMPLO

Sean $B = \{1, 1+x, x+x^2)$ y $B' = \{1+x, 1-x^2, 1-x+x^2\}$, bases de referencia de $P_2[x]$. Determinar la matriz de transición de B en B'.

SOLUCIÓN

Para ello, nos valemos de la función identidad $I: P_2[x] \to P_2[x]$, tal que $I(p) = p$, para todo $p \in P_2[x]$. Ahora, calculamos la matriz asociada a I, respecto de las bases B y B'.

$i(1) = 1 = a(1+x) + b(1-x^2) + c(1-x-x^2)$; así que, $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$.

$I(1+x) = 1+x = a(1+x) + b(1-x^2) + c(1-x-x^2)$; así que, $a = 1, b = 0, c = 0$.

$I(x+x^2) = x+x^2 = a(1+x) + b(1-x^2) + c(1-x-x^2)$; así que, $a = 1, b = -1, c = 0$.

Por tanto, la matriz de transición de la base B en B', es,

$$F(I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{B,B'}.$$

Por ejemplo, tomemos el vector $2-3x+4x^2$ de $P_2[x]$, cuyo vector coordenado de la base B es $(9,-7{,}4)$ y el vector coordenado de $2-3x+4x^2$ respecto de B', se calcula como el producto de $M_{B,B'}$ por $\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$; es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7+4 \\ 3-4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Así, se obtiene,

$2-3x+4x^2 = 0(1+x)+(-1)(1-x^2)+3(1-x+x^2) = -1+x^2+3-3x+3x^2 = 2-3x+4x^2$.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, y sean B y B' bases de V, entonces la matriz de *transición* de B en B' es inversible.

DEMOSTRACIÓN

Sea $I: V \to V$ la trasformación idéntica; así, la matriz de transición de B en B' corresponde a $F(I) = M_{B,B'}$.

Ahora bien, se sabe que, $F: Hom_k(V,V) \to K^{n\times n}$ es un isomofrismo de espacios vectoriales, y por ello, dado que I es isomorfismo de V en V (es decir, inversible) ocurre que, $M_{B,B'}$ es inversible.

El lector debe recordar que, $F(f)=0$, si y solo si, f es la trasnofrmacion cero. Esto es, el $Ker(f)$ está formado por la transformación cero.

Pero, ¿qué representa la matriz $\left(M_{B,B'}\right)^{-1}$?

Como I es inversible, existe $I^{-1}: V \to V$, donde las bases de referencia del dominio y el codominio, ahora son B' y B; así que, $F(I^{-1}) = \left(M_{B,B'}\right)^{-1} = M_{B',B}$ dado que I^{-1} también es isomorfismo de espacios vectoriales.

En otras palabras, $\left(M_{B,B'}\right)^{-1}$ es la matriz de transición de B'en B.

EJEMPLO

Vimos que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{B,B'}$ es la matriz de transición de B en B', donde,

$B = \{1,1+x,+x+x^2)\ y\ \ B' = \{1+x, 1-x^2, 1-x+x^2\}$ son bases de $P_2[x]$.

Calculemos la matriz de transición de B'en B.

Como I es transformación identidad, $I^{-1} = I$; así, basémonos en $I: V_{B'} \to V_B$, de donde,

$$I(1+x) = 1+x = a(1) + b(1+x) + c(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I(1-x^2) = 1-x^2 = a(1) + b(1+x) + c(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I(1-x+x^2)=1-x+x^2=a(1)+b(1+x)+c(x+x^2)=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Esto significa que,

$$M_{B',B}=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&1&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Y se ve claramente, como se había evidenciado, que,

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&1\\\frac{1}{3}&0&-1\\\frac{1}{3}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&3\\1&1&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Así que, en general, $M_{B,B'}\cdot M_{B',B}=I_n$.

En otras palabras, $\left(M_{B,B'}\right)^{-1}=M_{B',B}$ y $\left(M_{B',B}\right)^{-1}=M_{B,B'}$.

Ahora, supongamos que trabajamos nuevamente en el espacio vectorial $Hom_k(V,V)$, donde V y W son espacios vectoriales, tales que,

$\dim(\mathrm{V})=\mathrm{n}\ \ y\ \ \dim(W)=m$.

Así que, podemos fijar las bases $\mathrm{B}=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ y $B'=\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$ de $V\ y\ W$ respectivamente, como base de referencia; y supongamos que, $M_{B,B'}$ es la matriz asociada a una transformación asociada a una transformación lineal $f\in Hom_k(V,V)$, respecto de las bases B y B'.

Es decir, $\mathrm{F(f)}=M_{B,B'}$.

Deseamos averiguar, cómo cambia la matriz $M_{B,B'}$ asociada a f, al cambiar las bases de referencia de V y W.

Supongamos que las nuevas bases de referencia para $V\, y\, W$ son, respectivamente, A y A'; de manera que, existen matrices de transición $M_{B,A} \in K^{n\times n}$ y $M_{B',A'} \in K^{m\times m}$, mientras que $M_{B,B'} \in K^{m\times n}$; y deseamos calcular $M_{A,A'}$.

Pero, debe notarse que, $M_{A,A'}$es matriz asociada a f como lo es $M_{B,B'}$; esto implica, que se trata de matrices semejantes.

En efecto, llamemos $p: V \rightarrow V$ la transformación idéntica que corresponde a la matriz $M_{B,A}$ de transición entre las bases $B\, y\, A$; y $q: W \rightarrow W$ la transformacion que corresponde a la matriz de transición $M_{B',A'}$ entre las bases B' y A' de W.

De esta manera, dado que $p\, y\, q$ son isomorfismos, la transformación lineal $q \circ f \circ p$ es semejante a f; es decir, $f = q^{-1} \circ \bar{f} \circ p$. Pero esta nueva f, así diseñada, es tal que, $\bar{f}: V \rightarrow W$, donde las bases de referencia son A y A', para V y W, respectivamente.

Esto se evidencia en la Figura 1.

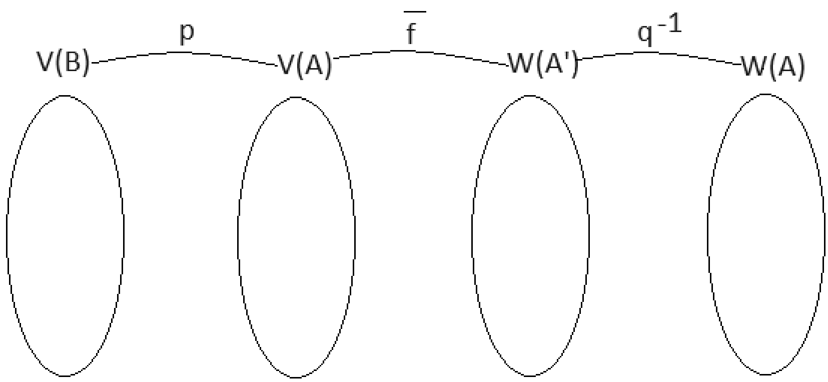

Figura 1. Semejanza de transformaciones lineales
Fuente: elaboración propia

De la relación $f_{B,B'} = q^{-1} \circ \bar{f}_{A,A'} \circ p$, se sigue que, $\bar{f}_{A,A'} = q \circ f_{B,B'} \circ p^{-1}$, lo que en matrices, significa que,

$$M_{A,A'} = M_{B',A'} \cdot M_{B,B'} \cdot M_{A,B}$$

donde, se ve que,

$F(f) = M_{A,A'}$ respecto de las bases A y A' de V y W, respectivamente.

$F(f) = M_{B,B'}$ respecto de las bases de B y B' de V y W, respectivamente.

$M_{B',A'}$ es matriz de transición de las bases de B' en A' de W.

$M_{A,B}$ es matriz de transición de las bases A en Bde W.

EJEMPLO

$f: P_2[x] \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(a + bx + cx^2) = (a - b, b + c)$.

Inicialmente, tomemos como bases de referencia, las siguientes:

$\mathrm{B} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ para $P_2[x]$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Calculemos $F(f) = M_{B,B'}$, así:

$f(1) = (1,0) = a(1,1) + b(-1,0) = 0(1,1) + (-1)(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$f(1 + x) = (0,1) = a(1,1) + b(-1,0) = 1(1,1) + 1(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$f(1 - x + x^2) = (0,2) = a(1,1) + b(-1,0) = 2(1,1) + 2(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, supongamos que cambiamos las bases por las siguientes:

$A = \{1 - x, x + x^2, x^2\}$ y $A' = \{(2,1)(1,2)\}$ de $P_2[x]$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Deseamos calcular la matriz asociada a f respecto de las bases A y A'. $M_{A,A'}$.

Para ello, calculemos las matrices de transición $M_{B,B'}$ y $M_{A,B}$.

Vemos que,

$$1 - x = a(1) + b(1 + x) + c(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x + x^2 = a(1) + b(1 + x) + c(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = a(1) + b(1 + x) + c(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto indica que,

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$(1,1) = a(2,1) + b(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(-1,0) = a(2,1) + b(1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$M_{B',A'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la fórmula, $M_{A,A'} = M_{B',A'} \cdot M_{B,B'} \cdot M_{A,B}$ se tiene,

$$M_{A,A'} = M_{B',A'} \cdot M_{B,B'} \cdot M_{A,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos lo siguiente,

$f: P_2[x] \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(a + bx + cx^2) = (a - b, b + c)$.

Tomando las siguientes bases: $\mathrm{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ y $B' = \{(1,1)(-1,0)\}$, resulta que,

$$F(f) = M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y tomando las bases: $A = \{1 - x, x + x^2, x^2\}$ y $A' = \{(2,1)(1,2)\}$, se tiene que,

$$F(f) = M_{A,A'} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Utilizando las dos expresiones encontradas, calculemos la imagen del vector p, a través de f, así:

$$p = 2 - 5x + 7x^2,$$

$$f(p) = f(2 - 5x + 7x^2) = (7,2).$$

Para utilizar $M_{B,B'}$ vemos que,

$$2 - 5x + 7x^2 = a(1) + b(1 + x) + c(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} = f(x).$$

Así que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2(1,1) + (-5)(-1,0) = (7,2),$$

tal como se sabía.

Para utilizar $M_{A,A'}$ vemos que,

$$2 - 5x + 7x^2 = a(1 - x) + b(x + x^2) + c(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Así que,

$$f(2-5x+7x^2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=4(2,1)+(-1)(1,2)=(8,4)+(-1,-2)=(7,2),$$

tal como se conocía con anterioridad.

EJERCICIOS

1) Demuestre por inducción completa que, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Demuestre que, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Demuestre que, si A y B son matrices diagonales en $K^{n\times n}$, entonces AB es diagonal de $K^{n\times n}$ y $AB=BA$.

4) Demuestre que si $A\in K^{n\times n}$ es simétrica, entonces $B^t\cdot A\cdot B$ es simétrica para toda matriz $B\in K^{n\times n}$.

5) Obtener las inversas de las siguientes matrices, si existen:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Calcula las matrices de transición $M_{B,B'}$ y $M_{B',B}$ de los respectivos espacios vectoriales y bases de referencia dadas. En cada caso, verificar que, $M_{B,B'} \cdot M_{B',B} = I$.

   a) $\mathbb{R}^2, si\ B = \{(1,0),(1,1)\}\ y\ \ B' = \{(3,2),(2,3)\}$.

   b) $\mathbb{R}^3, si\ B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\ \ y\ B' =$ $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

   c) $P_2[x]\ \ si\ B = \{1,1+x,1+x+x^2\}$ y $B' = \{1+x,1-x,x-x^2\}$.

   d) $\mathbb{R}^4, si\ B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y

   $B' = \{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$.

8) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f:(a,b,c) = (a, a+b, a+b+c, a-b+c)$.

   Si tomamos las bases de referencia:

   $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' =$ $\{(0,0,0,1)\ (0,0,1,1)\ (0,1,1,1)\ (1,1,1,1)\}$,

   a) Calcular $M_{B,B'}$ a partir de $M_{B,B'}$.

   b) Calcular $M_{A,A'}$ si se sabe que,

   $A = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ y

   $A' = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$.

CAPÍTULO 2.
ECUACIONES LINEALES

CONCEPTO

Sea $f: V \to W$ una transofrmacion lineal de espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo K. Supongamos que elegimos arbitrariamente un vector $B \in W$. El problema que consiste en encontrar alguno o todos los vectores $A \in V$, para los cuales $f(A) = B$, se llama problema lineal[1].

El mismo problema formulado así, nos indica que, si $B \notin Im(f)$, el problema no posee solución; mientras que, si $B \in Im(f)$, el problema tiene al menos una solución.

Bajo el supuesto que $B \in Im(f)$, pensemos que el problema $f(X) = B$, encuentre en A_o una solución que llamamos *solución particular*.

[1] Aun cuando el Álgebra Lineal se formó como una disciplina especial de la matemática a mediados del siglo IX, sin embargo, sin exagerar, se puede decir que es tan antigua como la propia matemática, ya que sus ideas y métodos nacen de un problema analizado desde la antigüedad, como es el problema de la resolución de la ecuación lineal de primer grado. Es interesante observar cómo las ideas claras y los métodos del Álgebra Lineal han ido penetrando en diferentes ramas de la ciencia, por ejemplo, el análisis matemático y el análisis funcional, la física y la mecánica teórica, la programación lineal y la programación de operaciones. Por ello, no es de extrañar que, el Álgebra Lineal se haya convertido en algo indispensable en la formación de especialistas de las más diversas ramas de la ciencia: matemáticos, ingenieros, economistas, etc. Tampoco es extraño que en los últimos años hayan aparecido numerosos libros dedicados a la exposición de las ideas y de los métodos del Álgebra Lineal (Máltsev, 1976).

Suponiendo que A es otra solución, encontramos que $f(A_o) = B$ y $f(A) = B$, es decir, $f(A) = f(A_o)$, o mejor, que $f(A - A_o) = O_w$. Así, lo único que debe ocurrir es que $(A - A_o) \in Ker(f)$.

Ahora, supongamos que, $(A - A_o) \in Ker(f)$.

Como hemos dicho que A_o es solución particular del problema lineal, se ve claramente que,

$$f(A_o + A - A_o) = f(A) = f(A_o) + f(A - A_o) = f(A_o) + O_w = f(A_o) = B.$$

Es decir, $f(A) = B$.

Por tanto, si $(A - A_o) \in Ker(f)$ y A_o es solución particular del problema $f(X) = B$, entonces A también es solución.

De este modo, hemos comprobado que, si A_o es solución particular del problema y si X está en $Ker(f)$, el elemento de $V, A_o + X$ también es solución del problema, siendo de esta forma, necesaria y suficiente.

Así que, el conjunto de todas las soluciones del problema lineal $f(A) = B$, es de la forma $\{A_o\} + Ker(f)$.

Por otra parte, la función $\sigma: Ker(f) \to Ker(f) + \{A_o\}$, tal que $\sigma(A) = A + A_o$ es una bisección; esto indica que, se trata de conjuntos con la misma cantidad de elementos; por tanto, la cantidad de soluciones del problema lineal, se puede describir mediante la dimensión del *Kernel* de la transformación implicada en el problema.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que, $Ker(f) + \{A_o\}$ no es subespacio de V, a menos que el problema lineal sea $f(A) = O_w$,para el cual, la solución particular inmediata es O_v; y así, el conjunto solución es $Ker(f)$.

Dado el problema lineal $f(A) = B$, el problema $f(A) = O_w$ se llama problema homogéneo asociado, el cual, como hemos dicho, tiene como conjunto solución al $Ker(f)$.

Así, por lo expuesto anteriormente, la solución general de $f(A) = B$ es cualquier solución particular, más la solución del problema homogéneo asociado.

Pensemos ahora que, $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$.

Así que, $f: V \to W$ puede interpretarse a través de una matriz $M_{m\times n} \in K^{m\times n}$ y si $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ y $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces, el problema lineal $f(X) = B$ se transforma en $M \cdot X = B$, y el problema lineal homogéneo asociado, es $MX = 0$; obteniendo, por igualdad de matrices, un sistema de ecuaciones lineales.

El problema $M \cdot X = B$, se convierte en el siguiente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

para cuya resolución se define la *matriz aumentada del sistema,* como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIOUS O DE KRONECKER

El sistema de ecuaciones simultaneas $MX = B$ tiene solución, si y solo si, el rango de M es igual al rango de la matriz aumentada (M, B).

Siempre que exista una solución, todas las soluciones se puede expresar en términos de v vectores, donde,

$$v = Dim(V) - \dim\big(Im(f)\big).$$

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que el problema $f(X) = B$ tiene solución, si y solo si, $B \in Im(f)$. Pero también sabemos que, $Im(f)$ es equivalente con el espacio columna de M; así, B depende linealmente de los vectores columna de M, lo que significa que, la dimensión del espacio columna de M es igual a la dimensión del espacio columna de (M, B); y, como se vio antes, esta dimensión es el rango de M. Así que, el sistema tiene solución, si y solo si, los rangos son iguales.

Ahora, sea la matriz inversible $Q \in K^{m\times m}$, tal que, $Q^{-1}M = M'$, donde M' es una Matriz Canónica de Hermite (el lector debe recordar que esto se puede hacer siempre). Así que, $M \sim M'$.

De este modo, cualquier solución del sistema $MX = B$, también es solución del sistema $M'X = Q^{-1}MX = Q^{-1}B = B'$.

Recíprocamente, cualquier solución de $M'X = B'$, también es solución de $MX = QM'X = QB' = B$.

Así que, los dos sistemas $MX = B$ y $M'X = B'$, son equivalentes.

Dado que, M' es canónica de Hermite, el sistema $M'X = B'$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (1)(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_m \end{pmatrix}.$$

Debido a que, $Ran(M) = Ran(M') = p$, existen $n - p$ valores arbitrarios que pueden asignarse a las variables $x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_n$, con lo cual, se finaliza la demostración del teorema.

■

OBSERVACIÓN

El lector debe notar que, la matriz Q multiplica a la izquierda a M, esto indica que, en la resolución del problema, sólo se aceptan transformaciones elementales por filas.

La matriz M debe llevarse a la forma Canónica de Hermite, siempre y cuando esto sea posible, aplicando únicamente transformaciones elementales por filas. Este algoritmo se conoce con el nombre de *Método de Gauss-Jordan*[2].

---

[2] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) es reconocido como el matemático más destacado del siglo XIX y uno de los tres más influyentes de la historia, junto con Arquímedes y Newton. Nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un trabajador de carácter firme, desconfiaba de la educación formal e intentó evitar que su hijo accediera a una escuela de calidad. Sin embargo, su madre, aunque carecía de formación académica, lo apoyó incondicionalmente en sus estudios y se enorgulleció de sus logros hasta su fallecimiento a los 97 años. Desde temprana edad, Gauss mostró habilidades prodigiosas. A los tres años corrigió un error en los cálculos de su padre. Una de las anécdotas más célebres de su infancia ocurrió cuando tenía 10 años y estudiaba en una escuela de Brunswick. Su maestro les pidió sumar los números del 1 al 100, y en pocos instantes, Gauss entregó la respuesta correcta: 5,050. Había identificado un patrón en la secuencia, agrupando los números en 50 pares que sumaban 101 $(1+100, 2+99, etc.)$, lo que facilitó el cálculo. Más tarde, Gauss bromeaba diciendo que sumaba más rápido de lo que hablaba.

A los 15 años, el Duque de Brunswick lo tomó bajo su protección y financió su educación en el Brunswick College en 1795 y, posteriormente, en la Universidad de Göttingen. Inicialmente indeciso entre las matemáticas y la filosofía, se inclinó por la primera, tras realizar dos descubrimientos significativos. Primero, formuló el método de mínimos cuadrados, una década antes de que Legendre lo publicara. Segundo, poco antes de cumplir 19 años, resolvió un problema que había intrigado a los matemáticos durante más de dos mil años: demostró cómo construir con regla y compás polígonos regulares con un número de lados no divisible por 2, 3 o 5. De manera más general, estableció que un polígono regular con n lados, es construible si y solo si, n es de la forma $n = 2^k p_2 p_3 \cdots p_m$, donde $k \geq 0$ y las p_i son números primos de Fermat distintos. Los números primos de Fermat son aquellos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537. El 30 de marzo de 1796, tras este descubrimiento, Gauss comenzó un diario donde registró 146 hallazgos en 19 páginas, considerado uno de los documentos más relevantes en la historia de las matemáticas. Posteriormente, estudió en la Universidad de Helmstädt y, en

EJEMPLO

Consideremos el existen siguiente sistema de ecuaciones:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 11.$$

1798, con solo 20 años, presentó su disertación doctoral, en la que ofreció la primera demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra, estableciendo que cualquier polinomio de grado n tiene exactamente n raíces contando multiplicidades. Matemáticos como Euler, Newton y Lagrange habían intentado probarlo sin éxito. Además de sus aportes en matemáticas, realizó contribuciones en física. En 1801, desarrolló un método innovador para calcular la órbita del asteroide Ceres con datos limitados. En 1833, junto a Wilhelm Weber, diseñó el telégrafo electromagnético. Aunque sus avances en astronomía y electricidad fueron notables, su producción matemática fue aún más impactante. En 1811, descubrió un resultado clave que inspiró a Cauchy a desarrollar la teoría de funciones complejas. Su nombre también se asocia con el método de eliminación de Gauss-Jordan en álgebra lineal y la cuadratura gaussiana en análisis numérico. En 1807, fue nombrado catedrático de matemáticas en Göttingen, donde enseñó hasta su fallecimiento en 1855. Incluso después de su muerte, muchos descubrimientos atribuidos a otros ya habían sido anticipados por Gauss en sus notas inéditas. Su meticulosidad lo llevó a perfeccionar cada trabajo antes de publicarlo, siguiendo su lema "pauca sed matura" (pocas, pero maduras). Su legado es tan profundo que, en reconocimiento, se le otorgó una medalla con la inscripción: "George V, Rey de Hannover, al príncipe de los matemáticos" (Grossman y Flórez, 2012).

SOLUCIÓN

La matriz aumentada correspondiente, es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que, el sistema semejante al original es,

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_2 - 3x_4 = 2$$

$$x_3 + 2x_4 = -3.$$

Este sistema se soluciona fácilmente asignando un valor cualquiera a x_4 y calculando respectivamente, los otros valores.

Otra manera de escribir el sistema anterior, es la siguiente,

$$x_1 = 1 - x_4$$

$$x_2 = 2 + 3x_4$$

$$x_3 = -3 - 2x_4$$

$$x_4 = x_4.$$

Una solución particular se consigue poniendo $x_4 = 0$.

De este modo, un vector solución particular del sistema es $(1,2,-3,0)$ y como las soluciones del sistema dependen de x_4, se concluye que ellas tienen la forma $(1,2,-3,0) + x_4(-1,3,-2,1)$.

En forma vectorial, la solución es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,2,-3,0) + x_4(-1,3,-2,1).$$

Puede verse, como se comprueba en teoría, que el vector $(-1,3,-2,1)$ es solución del problema homogeneo asociada al problema original, y por tanto, base del $Kernel$ de la transformación asociada a la matriz M. El $Kernel$ de tal transformación, es de la forma $\{a(-1,3,-2,1)/a \in \mathbb{R}\}$.

Se ve, pues, que la solución del sistema, es una solución particular, más el *Kernel*.

TEOREMA

La ecuación $AX = B$ no tiene solución, si y solo si, existe una matriz C de un solo renglón, tal que $CA = 0$ y $CB = 1$.

DEMOSTRACIÓN

($\Longleftarrow$)

Supongamos que existe una matriz renglón C, tal que $CA = 0$ y $CB = 1$.

Supongamos que $AX = B$ tiene solución.

Así que, como $CA = 0$ (matriz cero), entonces $(CA)X = 0X = 0$ (número cero).

Pero $(CA)X = C(AX) = CB = 1$; así que, $1 = 0$; lo que resulta en una contradicción. De modo que, no se puede suponer que el sistema $AX = B$ tenga solución, porque esto conduce a la contradicción.

($\Longrightarrow$)

Ahora, supongamos que, la ecuación $AX = B$ no posee solución, es decir, el vector columna B no es generado por el espacio columna de A(matriz); así que, en términos de rangos, se tiene que, si $Ran(A) = n$, entonces $Ran([A, B]) = n + 1$, donde $[A, B]$ es la matriz aumentada.

Sea Q matriz inversible, tal que $Q^{-1}[A, B]$ está en la forma Canónica de Hermite (esto siempre es posible) y como el rango de $[A, B]$ es nH, los elementos $n + 1$ renglón son todos ceros, excepto el último (última columna) que es 1.

De este modo, si Ces el $(n+1)$-ésimo del renglón de Q^{-1}, entonces,

$$C \cdot [A,B] = [0,0,0,\dots,0,1].$$

o sea que, $CA = 0$ y $CB = 1$.

■

EJEMPLO

Demostrar que, el conjunto $\{(1,1,1,0),(2,1,0,1)\}$ genera al subespacio de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

SOLUCIÓN

Buscamos un sistema semejante:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, un sistema semejante a la inicial, es,

$$x_1 - x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

El cual, se puede escribir como sigue:

$$x_1 = x_3 + 2x_4$$

$$x_2 = x_3 + x_4$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_4 = x_4.$$

Así que, una solución particular es $(0,0,0,0)$.

Cualquier otra solución, es de la forma,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(1,1,1,0) + x_4(2,1,0,1).$$

Y como se trata de un sistema homogéneo, ocurre que, los vectores $\{(1,1,1,0),(2,1,0,1)\}$ generan al espacio pedido.

EJERCICIOS

1. Determinar todas las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, siguientes:

   a) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11$

      $3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0$

      $2x_1 + x_2 + x_4 = 7$

b) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 10$

$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -5$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5$

2. Determinar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneas:

$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3$$
$$x_1 - 5x_3 = 3$$

NOTA

Si $Ran(A) \neq Ran[A, B]$, entonces el sistema no tiene solución, tal como se evidencia en el teorema anterior.

3. Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$7x_1 + 3x_2 + 21x_3 - 13x_4 + x_5 = -14$$
$$10x_1 + 3x_2 + 30x_3 - 16x_4 + x_5 = -23$$
$$7x_1 + 2x_2 + 21x_3 - 11x_4 + x_5 = -16$$
$$9x_1 + 3x_2 + 27x_3 - 15x_4 + x_5 = -20$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $ax + by + cz = a + b + c$

   $bx + cy + az = a + b + c$

   b) $cx + by + az = a + b + c$

   $bx + ay + cz = a + b + c$

CAPÍTULO 3.
VALORES Y VECTORES PROPIOS

Existen problemas físicos, químicos y matemáticos[3], en los cuales, conocido un endomorfismo $T: V \rightarrow V$, se requiere calcular todos los escalares λ, para los cuales, $T(A) = \lambda A$.

DEFINICIÓN

Sea M una matriz cuadrada; si existe un escalar λ que satisfaga la ecuación $\det(\lambda I - 1) = 0$, λ se llama *valor característico* de M, y a la ecuación formada, se llama *ecuación característica* de A.

Aunque no cambiaremos la notación nominal, es bueno advertir que las expresiones *valor propio*, *valor característico* y *autovalor,*

[3] El problema de la determinación algebraica de valores propios surgió en el Siglo XVIII a partir del estudio de sistemas mecánicos discretos. Su aparición, sin embargo, no resulta sorprendente ya que el estudio de formas cuadráticas existía desde la segunda mitad del Siglo XVII; Leibniz había mostrado un gran interés en el estudio de sistemas de ecuaciones y sistemas de formas cuadráticas y estos temas son los que eventualmente darían lugar a una teoría de matrices. Desde mediados del Siglo XVIII, el surgimiento de esta teoría era ya claro, especialmente en los trabajos de D'Alembert y Lagrange dedicados a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias vinculadas al conocido problema de la cuerda vibrante. Sin embargo, los métodos matemáticos relacionados con estos problemas permanecieron subordinados al aspecto mecánico de ´estos durante algún tiempo. Fue hacia la segunda mitad del Siglo XVIII, que tanto Lagrange como Laplace se vieron obligados –siempre motivados por la teoría física profundizar en el estudio matemático de los valores propios (Martínez, 2006:54).

son sinónimos; como lo son, *vector propio*, *vector característico* y *autovector,* término que definiremos más adelante.

Antes de proseguir y para evitar suspicacias, vamos a recordar el teorema que sigue.

TEOREMA

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $AX = 0$ solo tiene la solución trivial.

c) A es semejante por renglones con I_n.

d) El sistema $AX = B$ es consistente.

e) $\det(A) \neq 0$.

f) Los vectores renglón de A son linealmente independientes.

g) Los vectores columna de A son linealmente independientes.

En efecto, si A es inversible, entonces debe ser la matriz asociada a algún isomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y como f es semejante a una Función Canónica de Hermite, que por ser f isomorfismo, tal función canónica es la idéntica, ocurre que, $A \sim I$.

Pero esto quiere decir que, el sistema $AX = 0$, es semejante al sistema $IX = 0$, que, como se ve con claridad, sólo tiene la solución trivial.

Dado que, para este caso, $\det(A) \neq 0$, y estamos hablando de equivalencias, la siguiente afirmación, que tiene el carácter de teorema, queda inmediatamente demostrada con el anterior.

TEOREMA

Sea A una matriz cuadrada, el sistema $AX = 0$ no tiene soluciones triviales, si y solo si, $\det(A) = 0$.

OBSERVACIÓN

En ocasiones es útil, y esto ocurre con toda legalidad, trabajar con vectores propios y valores propios sobre el campo de los complejos (vectores sobre espacios vectoriales complejos).

EJEMPLO

Calcular los valores característicos de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Por definición, se debe solucionar la ecuación:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

O sea,

$$det\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix}\lambda - 2 & -1\\ -1 & \lambda - 2\end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1$$
$$= 0.$$

Así que,

$$(\lambda - 2)^2 = 1.$$

Por tanto, $\lambda - 2 = \pm 1$, o sea que, $\lambda = 2 \pm 1$.

Por tanto, hemos conseguido dos valores característicos: $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$.

■

EJEMPLO

Calcular los valores característicos de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Nuevamente, por definición debemos solucionar la ecuación:

$$det\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\right)=det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^3-4(\lambda-2)=$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-4]=(\lambda-2)(\lambda-2+2)(\lambda-2-2)=0.$$

De donde, $\lambda=2,\ \lambda=0,\ \lambda=4$, son soluciones de la ecuación.

Así, los valores característicos, son: $\lambda=2$ y $\lambda=4$ (y $\lambda=0$, si nos dignamos aceptando como tal).

Además, nos damos cuenta que, $(I\lambda-A)$ es una matriz cuadrada; así, podemos formar el sistema $(I\lambda-A)X=0$

(vector 0, particularmente).

Pero hemos obligado a que, $\det(I\lambda-A)=0$ y así, el sistema $(\lambda I-A)X=0$ tiene soluciones no triviales.

Es decir, Si A es una matriz cuadrada y λ es un escalar, entonces $det(\lambda I-A)=0$, si y solo si, el sistema $(\lambda I-A)X=0$ (vector cero) tiene soluciones no triviales.

Vemos cómo el sistema $(\lambda I-A)X=0$, puede transformarse, como sigue:

$$\lambda IX - AX = 0.$$

O mejor,

$$X\lambda - AX = 0.$$

Esto es,

$$AX = \lambda X.$$

Y así, es válido el teorema que sigue.

TEOREMA

Si A es una matriz cuadrada, las siguientes afirmaciones son equivalentes (A de orden $n \times n$):

a) λ es un valor característico de A.

b) El sistema de ecuaciones $(\lambda I - A)X = 0$ tiene soluciones no triviales.

c) Existe un vector $X \in \mathbb{R}^n$, diferente de cero, tal que $AX = \lambda X$.

Si λ es valor caracteristico de A, el espacio solución del sistema $(\lambda I - A)X = 0$ se denomina *espacio característico de* A, correspondiente a λ, ya que, como se ve, es el Kernel de la transformación, cuya matriz asociada es $\lambda I - A$; por eso, es espacio vectorial. Por su parte, los vectores no nulos que la satisfacen, se llaman *vectores característicos de* A, correspondientes a λ.

EJEMPLO

Anteriormente tomamos la matriz,

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$$

sobre la cual se encontró los valores característicos $\lambda=2,\ \lambda=0,$ $\lambda=4$, dado que,

$$det\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\right)=det\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&-3\\0&-1&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}=(\lambda-2)^3-(\lambda-2)-3(\lambda-2)&=(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-4]\\&=(\lambda-2)(\lambda-2+2)(\lambda-2-2)\\&=(\lambda-2)\lambda(\lambda-4)0.\end{aligned}$$

Luego, $\lambda=2,\ \lambda=0,\ \lambda=4.$

Si $\lambda=2$, la matriz $\lambda I-A$, es la siguiente:

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&-3\\0&-1&\lambda-2\end{pmatrix}.$$

Se convierte en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-3\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Y, por tanto, el sistema $(\lambda I - A)X = 0$, es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que,

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 - 3x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo, $x_2 = 0$ y $x_1 + 3x_3 = 0$; el cual es un sistema diofántico, cuya solución es,

$$x_1 = -3t$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = t.$$

O también, como vimos antes,

$$x_1 = -3x_3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = x_3.$$

Por tanto, el conjunto solución tiene vectores de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_3(-3,0,1)$$

Que, como se vio anteriormente, es la base del Kernel, cuya transformación lineal tiene como matriz asociada a $(\lambda I - A)$.

Y como se dijo, los vectores que satisfacen la ecuación $AX = 2X$, son de la forma $X = t(-3,0,1)$.

Así, por ejemplo, tal como mencionamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

De este modo, el espacio característico de A correspondiente a

$\lambda = 2$, es $< (-3,0,1) >$.

Si $\lambda = 4$, la matriz $\lambda I - A$, es la siguiente:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Se convierte en,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Y el sistema $(\lambda I - A)X = 0$ correspondiente, es:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la solución del sistema, es (0,0,0); o sea que, el vector característico de A, correspondiente a 4, es (0,0,0); y el espacio característico de A, correspondiente a $\lambda = 4$, es el espacio trivial $< (0,0,0) >$.

Si $\lambda = 0$, la matriz $\lambda I - A$ queda como,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Y el sistema $(\lambda I - A)X = 0$ es,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y como,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema se convierte en,

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

O sea que,

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 = -2x_3$$

$$x_3 = x_3$$

Así que, los vectores solución, son de la forma,

$$(x_1, x_2, x_3) = x_3(1, -2, 1).$$

Es decir, que el espacio característico de A, correspondiente a

$\lambda = 0$, es $< (1, -2, 1) >$.

Y los vectores de este espacio, satisfacen la ecuación $AX = 0X$.

En efecto,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que si X es un vector caracteristico de A, correspondiente a λ, se satisface la ecuación $AX = \lambda X$, o sea que, la multiplicación por A mapea a un *vector propio* X en un *múltiplo* del mismo, dependiendo esta imagen del valor propio λ.

De modo que,

a) Si $\lambda > 1$, la multiplicación por A dilata a un vector propio X.

b) Si $0 < \lambda < 1$, la multiplicación por A contrae a un vector propio X.

c) Si $\lambda = 1$, la multiplicación por A deja intacto a todo vector propio X.

d) Si $\lambda = 0$, la multiplicación por A deforma en un punto a todo vector propio X.

e) Si $\lambda < 1$, la multiplicación por A invierte la dirección del vector propio X, dilatándolo si $|\lambda| > 1$ o contrayéndolo si $|\lambda| < 1$.

Indudablemente, lo que hemos hecho en las matrices, puede copiarse fielmente en las transformaciones de un espacio vectorial sobre sí mismo (endomorfismo); y todo debido a que, una matriz cuadrada siempre está asociada a un endomorfismo, o sea, a una transformación lineal respecto de determinada(s) base(s) de referencia.

Así, podemos realizar, sin complicación, la definición que sigue.

DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $f: V \to V$ un endomorfismo; entonces, el escalar $\lambda \in K$ es un *valor propio* de f, si y solo si, existe un vector no nulo $X \in V$, tal que $f(X) = \lambda X$.

X se llama *vector propio* de f, correspondiente al valor propio λ.

Para hacer la transferencia a matrices del problema, es preferible tomar como base de referencia, la base canónica.

EJEMPLO

Calcular los valores propios y vectores propios de la transformación lineal que sigue:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que, } f(x, y) = (2x, 2x - 2y).$$

Aquí, se ve lo siguiente,

$$F(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

Luego,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Igualando a cero, se consigue que, los valores propios, son

$\lambda = 2$ y $\lambda = -2$.

Si $\lambda = 2$, el sistema $(\lambda I - A)X = 0$, se transforma en,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que, $x - 2y = 0$, por tanto,

$$x = 2y$$

$$y = y.$$

Como una solución particular es $(0,0)$, las otras son de la forma $(x, y) = y(2,1)$.

De este modo, (2,1) es vector característico de A, correspondiente (asociado) a $\lambda = 2$. Así que, $< (2,1) >$ es el espacio característico de f, correspondiente a $\lambda = 2$.

Si $\lambda = -2$, el sistema $(\lambda I - A)X = 0$, se transforma en,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sea,

$$x = 0$$

$$y = y.$$

Y como (0,0) es solución particular, ocurre que, todas las demás son de la forma $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{y}(0,1)$.

De modo que, $< (0,1) >$ es el espacio característico de f, correspondiente a $\lambda = -2$.

Obviamente, se ve que, $f(0, t) = (0, -2t) = -2(0, t)$, tal como se establece en la definición.

El efecto causado por la transformación sobre los vectores propios que arman una base de del espacio dominio se percebe en la Figura 2.

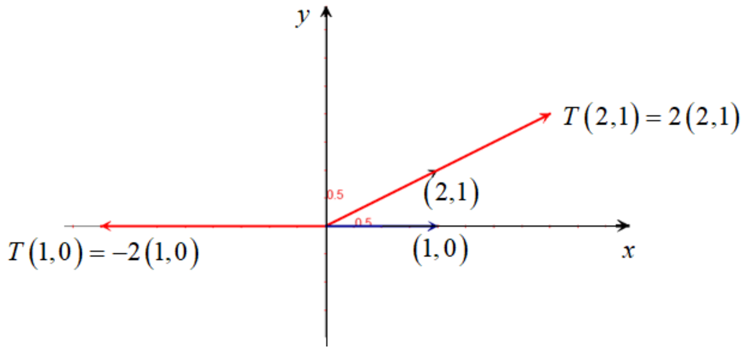

Figura 2. Efecto de una transformación lineal sobre vectores propios
Fuente: elaboración propia

Veamos algunos ejemplos que tienen suficiente importancia.

EJEMPLO 1.

Sea V sobre $\mathbb{R}$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $D: V \to V$ el operador diferencial.

Dado que, $D(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ocurre que, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio; y para cada λ, $e^{\lambda x}$ es vector propio de D, correspondiente a λ.

EJEMPLO 2

Sea $I: V \to V$ la transformación identidad de un espacio vectorial, sobre un cuerpo K.

Como $I(X) = X = 1X$, es obvio que, $\lambda = 1$ es valor propio de I, y todo $X \neq 0$ es vector propio de I, correspondiente a $\lambda = 1$.

En este caso, V es el espacio caracteristico de I, correspondiente a $\lambda = 1$.

EJEMPLO 3

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^2\ definido\ sobre\ \mathbb{R})$ la transformación lineal ROTACIÓN.

Como se sabe, la matriz asociada a la transformación rotación, es,

$$A = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sen\theta \\ Sen\theta & Cos\theta \end{pmatrix}.$$

Deseamos calcular los valores propios y vectores propios de la transformación.

Para calcular los valores propios, calculamos:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sen\theta \\ Sen\theta & Cos\theta \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - Cos\theta & Sen\theta \\ -Sen\theta & \lambda - Cos\theta \end{pmatrix} = (\lambda - Cos\theta)^2 + Sen^2\theta \\ &= \lambda^2 - 2\lambda Cos\theta + Cos^2\theta + Sen^2\theta \\ &= \lambda^2 - 2\lambda Cos\theta + 1. \end{aligned}$$

Igualando a cero, resulta,

$$\lambda^2 - 2\lambda Cos\theta + 1 = 0.$$

De donde,

$$\lambda = \frac{2Cos\theta \pm \sqrt{4Cos^2\theta - 4}}{2} = Cos\theta \pm \sqrt{Cos^2\theta - 1}.$$

Como exigimos que $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces debe ocurrir que, $Cos^2\theta = 1$, es decir, $Cos^2\theta = \pm 1$; y así, $\theta = \pi, \theta = 0$; o mejor, $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De este modo, $\lambda = \pm 1$, dependiendo del valor de θ.

Si $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y A se transforma en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\theta = \pi$, $\lambda = -1$ y A se transforma en $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 1$, el sistema $(\lambda I - A)X = 0$ se transforma en $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el sistema tiene como solución a todo vector $X \in \mathbb{R}^2$.

Así que, el espacio característico de f (rotación) si $\lambda = 1$, es todo $\mathbb{R}^2$; lo mismo ocurre cuando $\lambda = -1$.

EJEMPLO 4

Si $A \in K^{nxn}$ es una matriz diagonal, cualquier vector canónico $E_i\ de\ K^n$ (de la base canónica) es vector propio de A, y el elemento d_{ii} es el valor propio respectivo.

De modo que,

$$A \cdot E_i = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_{ii} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_{ii} E_i.$$

Así que, todos los elementos de la diagonal, son valores propios; y los vectores propios, los vectores canónicos, respectivamente.

EJEMPLO 5

Encuentre los valores característicos y bases para los espacios característicos del siguiente operador lineal:

$f: P_2[x] \to P_2[x]$, tal que $f(a + bx + cx^2) = (2a - b) + (-a + 3b)x + (b + c)x^2$.

SOLUCIÓN

Tomemos la base canónica para $P_2[x]$ el conjunto: $B = \{1, x, x^2\}$.

Dado que,

$$f(1) = 2 - x = 2(1) + (-1)x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = -1 + 3x = (-1)(1) + 3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) = x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada al operador lineal, es,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inicialmente, calculemos los valores característicos:

$$det(\lambda I - A) = det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) - (\lambda - 1)$$
$$= (\lambda - 1)\big((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 1\big).$$

Igualando a cero, se consigue que $\lambda = 1$ (que es un valor propio); y los otros valores propios son $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Si $\lambda = 1$, se obtiene el sistema,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde conseguimos el siguiente sistema:

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = \alpha_3$$

Luego, todo vector solución tiene la forma $(a, b, c) = c(0,0,1)$, que corresponde a los vectores de la forma cx^2.

Efectivamente, $f(cx^2) = 1 \cdot cx^2$.

EJERCICIOS

1. Determinar la ecuación característica de las matrices que siguen, calcular los valores característicos y vectores característicos; y determinar bases para los espacios característicos correspondientes.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, con las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3. Sea $f: P_2[x] \to P_2[x]$, definida como $f(a + bx + cx^2) = (a - b) + (a + b + c)x^2 + (-a + b - c)x^2$

   Determinar los valores característicos de f y las bases para los espacios característicos de f.

4. Sea $f: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ tal que,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2b & a - c \\ c - 2a & d + a \end{pmatrix}.$$

   Determinar los valores característicos de f y las bases para los respectivos espacios característicos de f.

5. Si A es una matriz cuadrada, entonces $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ se llama *polinomio característico* de A. Demostrar que, el

término independiente del polinomio característico es $(-1)^n \det(A)$ (sugerencia: el término constante es el valor del polinomio característico, cuando $\lambda = 0$).

6. Demostrar que, $\lambda = 0$ es valor caracteristico de A, si y solo si, A no es inversible.

7. Demostrar que el polinomio característico de una matriz cuadrada de orden 2, es $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$, donde tr corresponde a la traza de A.

8. Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y, z) = (x + y, x - y, y - z)$; determinar los valores y vectores característicos; además, determinar el espacio característico.

9. Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, y + 3z)$, hacer lo mismo que en el ejercicio 8.

TEOREMA

Los vectores propios asociados a valores propios distintos, son linealmente independientes (valores propios no nulos).

DEMOSTRACIÓN

Sea $f: V \to V$ una transformacion lineal y sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ vectores propios asociados respectivamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, para los cuales, se cumple que, si $i \neq j$, entonces $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Debemos probar que, el conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es linealmente independiente en V.

Para el efecto, aplicamos la inducción matemática.

Si $n = 1$, el conjunto $\{X_1\}$ es linealmente independiente, ya que $X_1 \neq O_v$.

Ahora, supongamos que, el conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ es linealmente independiente, y mostremos que, $\{X, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}\}$ es también linealmente independiente.

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i X_i = 0,$$

es equivalente a decir que, $a_i = 0, \ \forall_i \in J_p$.

Ahora, consideremos que,

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i X_i = 0. \qquad (1)$$

Multiplicando (1) por λ_{p+1}, se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i \lambda_{p+1} X_i = 0. \qquad (A)$$

Y aplicando f a (1), dado que cada X_i es respectivamente vector propio asociado a cada λ_i, resulta,

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{p+1} a_i \lambda_i \, X_i = 0. \qquad (B)$$

Restando las expresiones de (A) y (B), se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i(\lambda_{p+1} - \lambda_i) X_i = 0 = \sum_{i=1}^{p} a_i(\lambda_{p+1} - \lambda_i) X_i,$$

Esto, dado que, cuando $i = p + 1, \lambda_i = \lambda_{p+1}$.

Pero $\lambda_{p+1} \neq \lambda_i, \forall_i \in J_p$ entonces,

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(\lambda_{p+1} - \lambda_i) X_i = 0,$$

siempre que $a_i = 0, \forall_i \in J_p$, dado que $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ es linealmente independiente.

Así que, (1) se reduce a $a_{p+1} X_{p+1} = 0$.

Como $X_{p+1} \neq O_v$, entonces $a_{p+1} = 0$.

De este modo, $a_i = 0, \forall_i \in J_p$; por tanto, $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ es linealmente independiente; o mejor, por inducción, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es linealmente independiente en V.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, y sea $\lambda \in K$.

λ es valor propio de f, si y solo si, $\lambda I - f$ es singular (no inversible).

I denota la trasnformacion identidad.

DEMOSTRACIÓN

$(\Longrightarrow)$

Supongamos que λ es valor propio de f.

Entonces, existe $X \in V$, tal que $X \neq O_v$, de modo que, $f(X) = \lambda X$. O sea que, $f(X) = \lambda I(X)$, y, por tanto, $f(X) - \lambda I(X) = O_v$,; o sea que, $(\lambda I - f)X = O_v$;y como $X \neq O_v$, ocurre que, $X \in Ker(\lambda I - f)$.

Esto indica, sencillamente, que, $Ker(\lambda I - f) \neq \{O_v\}$ y por eso, la transformación lineal $(\lambda I - f): V \to V$, es no inyectiva, y, en consecuencia, no inversible.

$(\Longleftarrow)$

Recíprocamente, si $(\lambda I - f): V \to V$, es no inversible, entonces $Ker(\lambda I - f) \neq \{O_v\}$; esto es, existe un vector $X \in V, X \in \{O_v\}$, tal que, $(\lambda I - f)X = O_v$; y así, $\lambda I(X) = f(X)$; o sea que, $f(X) = \lambda X$, lo que señala que λ es un valor propio de f.

Este teorema señala, por qué es que se iguala a cero el polinomio característico de una matriz.

El lector debe recordar que, el *polinomio característico de una matriz cuadrada* A es el polinomio $p(\lambda)$m tal que, $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

TEOREMA

Si $f: V \to V$ es una transformación lineal y si existe una base

$B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ formada por los vectores propios de f, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces, la matriz de f respecto de esta base es la siguiente matriz diagonal:

$$F(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN

Por las condiciones del teorema, resulta,

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1 = \lambda_1 V_1 + 0V_2 + \dots + 0V_n$$

$$f(V_2) = \lambda_2 V_2 = 0V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + 0V_n$$

$$f(V_n) = \lambda_n V_n = 0V_1 + 0V_2 + \dots + \lambda_n V_n.$$

Por tanto,

$$F(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Si se cumplen las condiciones del teorema, se dice que la transformación lineal f es *diagonalizable*.

De este modo, si $\dim(V)=n$ y $f: V\to V$ es un endomorfismo, que admite n valores propios distintos, f es diagonalizable.

Como se sobreentiende, hasta este punto, es indispensable presentar una ligera teoría sobre *diagonalización*, pero antes, veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Determinar los vectores y valores propios de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Dado que,

$$det\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 3 & \lambda-2\end{vmatrix},$$

igualando a cero el polinomio característico, resulta que $(\lambda-1)(\lambda-2)=0$; de lo cual, se sigue que los valores propios son $\lambda=1$ y $\lambda=2$.

Si $\lambda = 1$, se consigue el sistema $(I\lambda - A)X = 0$, tal que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde, obtiene el sistema,

$$3x_1 = x_2.$$

Así que,

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = 3x_1.$$

Por tanto, los vectores propios pertenecen al espacio $< (1,3) >$, cuando son asociadas al valor propio λ.

Si $\lambda = 2$, el sistema $(I\lambda - A)X = 0$, es como sigue,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$x_1 = 0, x_2 = x_2.$$

Por tanto, los vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda = 2$, pertenecen al espacio $< (0,1) >$.

De este modo, el conjunto $\{(1,3), (0,1)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^2$.

Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, se ve que, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, y que, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (queda diagonalizada).

Recordemos que, $f \sim g$ si existen isomorfismos p y q, tales que

$g = q \circ f \circ p$, siendo f y g elementos de $Hom_k(V, W)$.

Si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, tomando B y B' como bases de referencia de V y W, respectivamente, se ve que $F(f) = M_{B,B'}$.

Si cambiamos las bases por A y A', respectivamente, para V y W, conseguimos la matriz asociada a f, $F'(f) = M_{A,A'}$.

Dado que, $M_{A,A'} \sim M_{B,B'}$ conseguimos las matrices inversible $M_{B',A'}$ y $M_{A,B}$ tal que,

$$M_{A,A'} = M_{B',A'} \cdot M_{B,B'} \cdot M_{A,B}.$$

Así que, en el caso particular de un endomorfismo $f: V \to V$, y tomando una base de B de V, se consigue $F(f) = M_{B,B}$; al cambiar de base B por A de V, es obvio que,

$$M_{A,A} = M_{B',A'} \cdot M_{B,B'} \cdot M_{A,B},$$

donde, $\left(M_{A,B}\right)^{-1} = M_{B,A}$.

Así, sabiendo que, $M_{A,A} \sim M_{B,B}$,se sigue que,

$$M_{A,A} = \left(M_{A,B}\right)^{-1} \cdot M_{B,B} \cdot M_{A,B}.$$

Por tanto, se puede afirmar que, si A y B son matrices cuadradas y si $A \sim B$, existe una matriz P inversible, tal que $B = P^{-1}AP$.

TEOREMA

Dos matrices cuadradas semejantes tienen el mismo polinomio característicos y, por consiguiente, los mismos valores propios.

De este modo, el polinomio característico de una transformación lineal es único; así, que, no importa qué base de referencia se tenga, el polinomio característico es único.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que, $A \in K^{n\times n}, B \in K^{n\times n}$, tales que $A \sim B$.

Debemos probar que,

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B).$$

Como $A \sim B$, existe una matriz $P \in K^{n\times n}$ no singular, tal que $B = P^{-1}AP$.

De modo que,

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda(P^{-1}IP) - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$$

$$\det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(P^{-1})\det(P)\det(\lambda I - A) =$$

$$\det(P^{-1}P)\det(\lambda I - A) = \det(I)\,det(\lambda I - A) = 1 \times det(\lambda I - A) = det(\lambda I - A).$$

Así que,

$$det(\lambda I - B) = det(\lambda I - A).$$

Se debe recordar que, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

De este modo, el polinomio característico de una transformación lineal, es único.

■

El reciproco del teorema no es cierto, esto es, dos matrices pueden tener los mismos valores propios y no ser semejantes.

CAPÍTULO 4.
DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

DEFINICIÓN

Una matriz[4] $A \in K^{n\times n}$ es diagnonizable, si y solo si, es semejante a una matriz diagonal.

Esto significa que, A es diagonalizable, si y solo si, existe $P \in K^{n\times n}$ no singular, tal que, $D = P^{-1}AP$, donde D es una matriz diagonal.

TEOREMA

Sea $A \in K^{n\times n}$; si A es diagonalizable, entonces su forma diagonal es $D = (\lambda_i, \delta_{ij})$, donde λ_i es vector propio de A, $i \in J_n$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $A \sim D$, donde D es una matriz diagonal (esto se puede suponer porque A es diagonalizable).

[4] Las contribuciones hechas por Augustín Louis Cauchy sobre la teoría de matrices, abarca un periodo de más de 15 años y destacan entre sus textos, la Memoria sobre las funciones que solo pueden obtener dos valores iguales y de signos contrarios por medio de transposiciones, que es una memoria sobre la teoría de determinantes publicada en 1815, en la cual, se establecen los fundamentos conceptuales de dicha teoría y, sobre la cual, se ha dicho que fue completa y avanzada, que poco fue lo que la teoría de determinantes tuvo que evolucionar durante el resto del Siglo XIX. También habría que señalar que, en las Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría, publicadas en 1826, el problema de la determinación de valores propios y la ecuación característica asociada, juegan un papel central (Martínez, 2006:61).

Supongamos que,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por teorema anterior,

$$det(\lambda I - A) = det(\lambda I - D) = det \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Luego, los valores propios de A, son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y el polinomio característico de A es $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$.

■

TEOREMA

Sea $A \in K^{n\times n}$.

A es diagonalizable, si y solo si, A admite n vectores liberalmente independientes, que son vectores propios de A (o de la transformación correspondiente a A).

DEMOSTRACIÓN

$(\Longrightarrow)$

Supongamos que A es diagonalizable.

Entonces, existe una matriz inversible $P \in K^{n\times n}$, tal que, $D = P^{-1}AP$, donde $D = (\lambda_i, \delta_{ij})$ y cada λ_i, como se vio antes, es valor propio de A; $i \in J_n$.

Suponiendo que, $P = (p_{ij})$, del hecho que, $D = P^{-1}AP$, se sigue que, $PD = AP$; donde PD se consigue así:

$$PD = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} = AP.$$

De este modo, sean,

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}; \ldots, P_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se observa que, $AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \cdots, AP_n = \lambda_n P_n$.

Así que, $P_1, P_2, \cdots, P_n$ son vectores propios correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de A; por teorema mostrado anteriormente, el conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ es linealmente independiente.

($\Longleftarrow$)

Ahora supongamos que, A tienen n vectores característicos, linealmente independientes, $P_1, P_2, \dots, P_n$, correspondientes a los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A.

Supongamos que,

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ .. \\ p_{n1} \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ .. \\ p_{n2} \end{pmatrix}; \dots, P_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ .. \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea, por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

que por estar formadas por n vectores linealmente independientes, es inversible.

Pero, $AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \cdots, AP_n = \lambda_n P_n$.

Por tanto,

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD.$$

De modo que, $AP = PD$; de donde, $D = P^{-1}AP$ (P es inversible) y como D es diagonalizable, queda probado el teorema.

■

Como nos podemos dar cuenta, el mismo teorema nos ofrece el algoritmo para diagonalizar una matriz, para lo cual, se debe proceder, como sigue:

1) Calcular los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y los respectivos valores propios $P_1, P_2, \dots, P_n$

2) Formar la matriz $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, siendo cada $P_i\,, i \in J_m$ vectores columna de P.

3) Calcular P^{-1} y hallar $P^{-1}AP$; este producto es igual a:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4) Si A no admite n vectores propios linealmente independientes, el teorema asegura que A no es diagonalizable.

EJEMPLO

Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

1) Calculamos los vectores propios de A, como sigue:

$$det(\lambda I - A) = det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

2) Al igualar a cero, se ve que los valores propios son $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$.

   Esto significa que $A \sim D$, siendo,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Continuando con el algoritmo, debemos calcular los vectores propios.

   Si $\lambda = 1$, el sistema $(\lambda I - A)X = 0$, se convierte en,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y como,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Se obtiene el sistema,

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0.$$

O sea que,

$$x_1 = 2x_3$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_2 = x_2.$$

Luego, el espacio característico de A, correspondiente a $\lambda = 1$, es $< (2,1,1) >$.

Si $\lambda = 2$, conseguimos el sistema $(\lambda I - A)X = 0$, así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y como,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema se convierte en,

$$x_1 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = x_2.$$

Y así, el espacio característico de A, correspondiente a $\lambda = 2$, es $< (0,0,1) >$.

Si $\lambda = 3$, conseguimos el sistema $(I - A)X = 0$, así,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y dado que,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema se convierte en,

$$x_1 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 = x_3.$$

Por tanto, el espacio característico de A, correspondiente a $\lambda = 2$, es $< (0,1,1) >$.

De este modo, formamos la siguiente matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un teorema anterior, verifica que, $\{(2,1,1),(0,0,1)(0,1,1)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.

Se ve claramente que,

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y así,

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO

Diagonalizar la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Vemos que,

$$det(\lambda I - A) = det\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Así que, los valores propios son $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$; y los correspondientes vectores propios son $(-1{,}1)$ y $(0{,}1)$; por tanto, la matriz P, es:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De donde,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y se ve, como esperábamos, que,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se debe anotar que, los valores propios de una matriz, no son necesariamente distintos para que sea diagonalizable, pero sí es suficiente que lo sean para que tal matriz sea diagonalizable.

CAPÍTULO 5.
POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE UNA MATRIZ

Un polinomio P de $K[x]$ ($K(x)$ anillo de polinomios[5] sobre un cuerpo K) es tal que,

[5] La exploración de polinomios característicos ha sido una piedra angular en el avance del álgebra lineal, ofreciendo conocimientos profundos sobre el comportamiento de las matrices y sus valores propios. Mientras nos encontramos al borde de nuevas eras matemáticas, el papel de los polinomios característicos promete expandirse y evolucionar. La interacción entre estos polinomios y vectores propios se ha establecido desde hace mucho tiempo como un aspecto fundamental para comprender las transformaciones matriciales, pero el futuro tiene potencial para aplicaciones y desarrollos teóricos aún mayores.
Desde la perspectiva de las matemáticas computacionales, la eficiencia de los algoritmos que calculan valores propios es primordial. A medida que avanza la tecnología, crece la demanda de cálculos más rápidos y precisos, lo que lleva a un refinamiento continuo de los métodos numéricos.
1. Avances algorítmicos: la búsqueda de la optimización ha llevado a algoritmos que pueden manejar matrices más grandes con mayor velocidad, lo que reduce los costos computacionales. Por ejemplo, el algoritmo QR, que se basa en la descomposición de una matriz en un producto de una matriz ortogonal y triangular superior, ha experimentado mejoras que lo hacen más robusto contra la inestabilidad numérica.
2. Conocimientos teóricos: en el frente teórico, los polinomios característicos sirven como puente hacia una comprensión más profunda. El Teorema Fundamental del Álgebra nos asegura que todo polinomio de grado n distinto de cero, de una sola variable y con coeficientes complejos tiene, contado con multiplicidad, exactamente n raíces complejas. Este teorema sustenta la existencia de valores propios para matrices y, como tal, cualquier nuevo conocimiento sobre las raíces polinómicas podría tener profundas implicaciones para los polinomios característicos.
3. Aplicaciones interdisciplinarias: más allá de las matemáticas puras, la aplicación de polinomios característicos en campos como la física, la ingeniería e incluso la economía continúa creciendo. En mecánica cuántica, por ejemplo, el polinomio característico de la matriz hamiltoniana es crucial para encontrar los niveles de energía de un sistema. Un ejemplo de esto es el uso de polinomios característicos para resolver la ecuación de Schrödinger para sistemas simples, lo que lleva a niveles de energía cuantificados.
4. Impacto educativo: el enfoque pedagógico para enseñar polinomios característicos también está evolucionando. Se están desarrollando herramientas y visualizaciones interactivas para ayudar en la comprensión conceptual de cómo estos polinomios mapean la compleja estructura de vectores propios y valores propios. Esto no sólo mejora el aprendizaje, sino que también inspira a nuevas generaciones de matemáticos a explorar este campo (FasterCapital. 2024).

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{, donde } a_i \in K\text{, y, generalmente } a_n \neq 0.$$

De este modo, si $A \in K^{n\times n}$, podemos definir,

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, A^i\text{, con } a_i \in K \text{ y definiendo } A^0 = I_n.$$

En este caso, $P(A)$ es una matriz llamada *especialización de* x por A.

Por ejemplo, al tomar $R[x]$ y, particularmente, $p(x) = 2x^2 + x + 1$, y tomando $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, se tendría que,

$$P(A) = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Dado que, el espacio de las matrices cuadradas forma un espacio vectorial sobre el cuerpo de definición, es fácilmente visible que, el álgebra de polinomios se traslada perfectamente al de las matrices especializadas de x por A.

Por ejemplo, anotemos algunos de estas similitudes:

$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ $\qquad$ $(p+q)(A) = p(A) + q(A)$

$(pq)(x) = p(x)q(x)$ $\qquad$ $(pq)(A) = p(A)q(A)$

Observe que, si $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, entonces, por definición,

$$p(A) = (A - a_1 I)(A - a_2 I) \cdots (A - a_n I).$$

Este último resultado, es de gran utilidad y lo emplearemos más adelante.

TEOREMA

Si $A \in K^{n \times n}$, existe un polinomio $P \in k[x]$, tal que $P(A) = 0$ (matriz cero).

DEMOSTRACIÓN

Sea $A \neq 0$ (aquí no habría nada que probar).

La dimensión del espacio $V = K^{n \times n}$, es n^2 y de este modo, el conjunto de matrices $\{I, A, A^2, \cdots, A^m\}$ con $m > n^2$, no es linealmente independiente; así, que, existen escalares $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$, no todos nulos, tales que,

$$a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 I = 0 \text{ (matriz cero)}$$

que corresponde a la especialización de x por A del del polinomio en $K[x]$:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = p(x).$$

■

TEOREMA DE HAMILTON[6] CAYLEY

[6] Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) nació en Dublín, es considerado el matemático irlandés más destacado de la historia. Tras la temprana muerte de sus padres, fue criado por su tío, un lingüista, quien se encargó de su educación. Desde los cinco años, Hamilton ya podía leer en inglés, hebreo, latín y griego. A los 13 años, dominaba numerosos idiomas adicionales, incluidos el sánscrito, chino, persa, árabe, malayo, hindi y bengalí, entre otros. Además de su talento lingüístico, Hamilton tenía una gran pasión por la poesía y mantenía amistad con los reconocidos poetas ingleses Samuel Taylor Coleridge y William Wordsworth. Sin embargo, su calidad como poeta no era destacada, por lo que su inclinación hacia otros campos, especialmente las matemáticas, fue afortunada. Aunque mostró interés por esta disciplina desde niño, su fascinación aumentó significativamente a los 15 años tras un encuentro con Zerah Colburn, un prodigio del cálculo. Poco después, comenzó a estudiar textos matemáticos avanzados y, a los 18 años, descubrió un error en la *Mécanique céleste* de Simon Laplace, lo que lo llevó a escribir un artículo sobresaliente sobre el tema. En 1824, ingresó al Trinity College de Dublín, donde tuvo una trayectoria académica excepcional. Con solo 21 años, aún siendo estudiante de licenciatura, impresionó tanto a sus profesores que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y profesor de Astronomía en la universidad. Poco después, publicó un trabajo fundamental en óptica en el que, basándose únicamente en cálculos matemáticos, predijo la refracción cónica en ciertos cristales, una teoría que posteriormente fue confirmada experimentalmente. Este logro contribuyó a que en 1835 fuera nombrado caballero. Hamilton incursionó en el álgebra con un artículo publicado en 1833, donde introdujo un método algebraico para operar con pares de números reales, estableciendo las bases de la suma, resta, multiplicación y división de números complejos. Sin embargo, no logró extender este concepto a conjuntos de tres o más números. Durante una década, trabajó en este problema hasta que, en 1843, tuvo una revelación mientras caminaba por el Puente de Brougham en Dublín. La clave fue abandonar la propiedad conmutativa de la multiplicación, lo que llevó al descubrimiento de los cuaterniones, precursores de los vectores modernos. En la actualidad, una placa en el puente conmemora este momento. A lo largo de su vida, Hamilton dedicó gran parte de su tiempo al desarrollo del álgebra de cuaterniones, convencido de su relevancia para la física matemática. En 1853, publicó su obra más importante sobre el tema, *Treatise on Quaternions*, y más adelante comenzó a trabajar en *Elements of Quaternions*, que quedó inconclusa a su muerte en 1865, pero fue publicada póstumamente por su hijo en 1866. El legado de Hamilton se extiende a múltiples áreas de las matemáticas y la física. En física matemática, su nombre está asociado con la función hamiltoniana, que a menudo representa la energía total de un sistema, y con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en dinámica. En álgebra, el teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su propia ecuación característica. En sus últimos años recibió un reconocimiento significativo al ser elegido como el primer miembro extranjero de la recién formada American National Academy of Sciences (Grossman y Flórez, 2012).

Si $A \in K^{n\times n}$ y si $p(\lambda)$ es su polinomio característico, entonces A es raíz de su polinomio característico; esto es, $p(A) = 0$ (matriz cero).

DEMOSTRACIÓN

Sea $A \in K^{n\times n}$, así que, su polinomio característico es,

$$det(\lambda I - A) = det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son valores característicos de A (de acuerdo a teorema anterior).

Así que,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

De modo que,

$$p(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_n I).$$

SI X_i es vector propio asociado a λ_i, es obvio que,

$$(A - \lambda_i I)X_i = 0.$$

De modo que,

$$P(A)X_i = 0\ \text{, para todo } i \in J_n.$$

Sea entonces, P inversible, formada por los vectores propios (columnas) asociadas a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; así, que, $P(A)\cdot P = (P(A)\cdot X_1, P(A)\cdot X_2, \dots, P(A)\cdot X_n) = 0$ (matriz cero); y como P es inversivle (no nula), se sigue que, $P(A) = 0$.

■

El lector puede intuir la importancia de este teorema en la solución de ecuaciones matriciales[7].

EJEMPLO

Calcular la inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[7] Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglés, fue el responsable de desarrollar en 1857 el álgebra de matrices, estableciendo las reglas que rigen la suma y multiplicación de estas estructuras. Nació en Richmond, Surrey, cerca de Londres, y cursó sus estudios en el Trinity College de Cambridge, donde se graduó en 1842. Ese mismo año obtuvo el primer lugar en la exigente prueba para el Premio Smith. A pesar de que estudió y ejerció la abogacía durante varios años, nunca permitió que esta profesión interfiriera con su pasión por las matemáticas. Durante su etapa como estudiante de leyes, visitó Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones, lo que influyó en su trayectoria matemática. En 1863, cuando se estableció la cátedra Sadlerian en Cambridge, Cayley fue seleccionado para ocupar el puesto, decisión que lo llevó a abandonar una prometedora carrera en derecho para dedicarse de lleno a la investigación matemática. Cayley es considerado uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, solo superado por Euler y Cauchy en términos de producción científica. Comenzó a publicar artículos mientras aún era estudiante en Cambridge y, durante su etapa como abogado, escribió entre 200 y 300 trabajos. A lo largo de su vida, continuó con una producción incesante, acumulando un total de 966 artículos recopilados en *Collected Mathematical Papers*, una colección de 13 volúmenes, con un promedio de 600 páginas cada uno. Su impacto en las matemáticas fue vasto y abarcó numerosas áreas. Además de desarrollar la teoría de matrices, realizó contribuciones fundamentales en geometría analítica, teoría de determinantes, geometría en n dimensiones, teoría de curvas y superficies, estudio de formas binarias, teoría de funciones elípticas y desarrollo de la teoría de invariantes. Su formación como abogado influyó en su estilo matemático, caracterizado por la precisión, claridad y rigor lógico. Poseía una memoria excepcional, recordando con facilidad todo lo que había leído o aprendido, y era conocido por su carácter tranquilo, amable y metódico, lo que le valió el apodo de “el matemático de los matemáticos” (Grossman y Flórez, 2012).

SOLUCIÓN

El polinomio característico, es,

$$det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)-2=\lambda^2-4\lambda+1.$$

Así que,

$$P(A)=A^2-4A+I=0\ \text{(matriz cero)}.$$

Luego,

$$I=-A^2+4A.$$

Es decir,

$$A^{-1}=-A^2A^{-1}+4AA^{-1}=-A+4I=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

EJEMPLO

Determinar la inversa de la siguiente:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Calculamos,

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -3 \\ -1 & \lambda - 3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 1 = p(\lambda).$$

Dado que,

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 1,$$

entonces,

$$P(A) = A^3 - 7A^2 - 7A + I = 0.$$

De donde,

$$I = A^3 - 7A^2 - 7A,$$

O sea que,

$$A^{-1} = -A^2 + 7A + 7I = \begin{pmatrix} -7 & -24 & -24 \\ -8 & -28 & -27 \\ -8 & -27 & -28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 21 & 21 \\ 7 & 21 & 28 \\ 7 & 28 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1) Determinar los valores y vectores propios de las siguientes trasformaciones lineales:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y) = (3x + y, 2x - 3y)$.

   b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y, z) = (x + y, x - y + z, 2x - z)$.

2) Demostrar que, si λ es valor propio de una matriz inversible A, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1} $\left(\text{sugerencia } |A^{-1}| = \frac{|I|}{|A|}\right)$.

3) Demostrar que, si A es diagonalizable, entonces la traza de A es la suma de sus valores propios y $|A|$ es el producto de sus valores propios.

4) Demostrar que, $\det(\lambda I - A) = \det\,(\lambda I - A^t)$.

5) Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

6) Calcular $P(A)$, siendo $P(x) = x^3 - x + 1$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7) Demostrar que, si A es Hermitiana y $p \in \mathbb{R}[x]$, entonces $p(A)$ es Hermitiana.

8) Sean A y B matrices en $K^{n\times n}$, donde B es no singular (inversible). Demostrar que, $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$; y que, si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces, $p(B^{-1}AB) = B^{-1}p(A)B$.

9) Demostrar que, si λ es valor propio de $A \in K^{n\times n}$, entonces $\alpha + \lambda$ es el valor propio de $(\alpha I + A)$, para todo $\alpha \in K$.

10) Diagonalizar, siempre y cuando sea posible, las matrices que siguen; además, determinar P y $P^{-1}AP$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

11) Sea $A \in K^{n\times n}$ y P matriz inversibles en $K^{n\times n}$.

Demostrar que, $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$.

12) Sabiendo que, $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP, n \in \mathbb{N}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular A^9.

Sugerencia

Calcular P que diagonalice a A, *si* $A \sim D$, donde los elementos diagonales de D son valores propios de A.

De este modo, si $D = P^{-1}AP$, entonces,

$$D^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP.$$

Esto es,

$$A^n = P^{-1}D^nP,$$

donde, si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{entonces } D^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^n \end{pmatrix}.$$

Este resultado verifica que, si λ es valor propio de A, entonces λ^n es valor propio de A^n.

13) Aplicando el Teorema de Hamilton-Cayley, determinar la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, F. (1991). *Teoría y problemas de matrices*. McGraw-Hill.

Barbolla, R., y Sanz, P. (1998). *Álgebra lineal y Teoría de Matrices*. Prentice Hall.

Caicedo, Z. S. J., y Portilla, O. H. J. (2020). *Fundamentos de Matemáticas Generales*. Editorial Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

FásterCapital. (2024). Polinomio característico Descifrando polinomios característicos el modelo de los vectores propios. https://fastercapital.com/es/contenido/Polinomio-caracteristico--Descifrando-polinomios-caracteristicos--el-modelo-de-los-vectores-propios.html#El-futuro-de-los-polinomios-caracter-sticos-en-matem-ticas

Frank, A. (1980). *Fundamentos de Matemáticas Superiores*. McGraw-Hill.

Gossman, S. & Flórez, J. (2012). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill. 7ª. Ed. México. https://aulasvirtuales.udistrital.edu.co/pluginfile.php/774403/mod_resource/content/1/%C3%81lgebra-Lineal-7ma-Edici%C3%B3n-Stanley-I-Grossman.pdf

Grossman, S. I. (1988). *Aplicaciones del Álgebra lineal*. Díaz de Santos, Madrid.

Grossman, S. I. (1995). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill.

Grossman, S. I. (1988). *Álgebra Lineal*. 2ª edición. Diaz De Santos, Madrid.

Gutiérrez, A. y García, F. (1990). *Álgebra lineal*. Tomo 2. Pirámide, Madrid.

Herstein, I. N. y Winter (1989). *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Díaz de Santos, Madrid.

Ikrámov, J. (1990). *Problemas de Álgebra Lineal*. Mir. Moscú.

Máltsev, A. (1976). *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Mir. 2da ed. Moscú.

Martínez, C. (2006). Sobre el surgimiento del concepto de Valor Propio: una historia selecta sobre los orígenes de la Teoría Espectral. En: *Miscelánea Matemática* 43 (2006) pp. 53–73. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.91770895f820d7e9.4361724d746e657a5f612e706466.pdf

Pinzón, Á. (1973). *Conjuntos y Estructuras, Edición revisada. Teoría, 350 problemas resueltos, 433 ejercicios propuestos.* Harla, México.

Portilla, O., H. J. y Caicedo Z., S. J. (2019). *Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales.* Colombia: Editorial Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

Rojo, J. (2001). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill.

Rojo, J. y Martín, I. (1994). *Ejercicios y problemas de álgebra*. McGraw-Hill.

Wexler, Ch. (1977). *Geometría Analítica: Un enfoque vectorial*. Montaner y Simón, S A. Barcelona.

ACERCA DE LOS AUTORES

Óscar Fernando Soto-Ágreda.

Docente de Tiempo Completo, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño.
Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño.
Magister en Modelos de Enseñanza Problémica, Universidad INCCA de Colombia.
Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana.

Correo electrónico:
oscarfdosoto@gmail.com;
fsoto@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Profesor de Tiempo Completo, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño.
Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño.
Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño.
Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana.
Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño.
Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga.
Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima.

Correo electrónico:
jacaza1@gmail.com;
jacaza1@udenar.edu.co.

êditorial
Universidad de **Nariño**

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL
VOLUMEN 2

Año de publicación : 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El libro de texto Elementos de Álgebra Lineal, Segunda Parte, presenta el complemento del contenido del curso Álgebra Lineal que se ofrece en la Universidad de Nariño. Está dedicado al desarrollo de conceptos fundamentales del álgebra lineal como el cambio de base, ecuaciones lineales, valores y vectores propios, diagonalización de matrices y el polinomio característico de una matriz, temas que tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas. Si bien, el desarrollo de las temáticas tiene una fuerte fundamentación matemática, apropiada para estudiantes de matemáticas y física, también se puede utilizar para las clases de álgebra lineal de las áreas de ingeniería y ciencias económicas y administrativas.

En el campo de la informática, estos conceptos son fundamentales para el diseño y la implementación de algoritmos eficientes. Por ejemplo, la diagonalización de matrices y los valores y vectores propios son esenciales en el procesamiento de imágenes y la visión por computadora. Además, las ecuaciones lineales son la base de muchos algoritmos de optimización y aprendizaje automático.

En el ámbito académico, estos conceptos son esenciales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática avanzada y la física. Existen softwares académicos diseñados específicamente para facilitar el aprendizaje de estos temas.

En el sector financiero, las ecuaciones lineales y la diagonalización de matrices se utilizan en la modelización de mercados y la valoración de activos. Los valores y vectores propios, por otro lado, son fundamentales en la teoría de la cartera y la gestión de riesgos.

En ingeniería y ciencias naturales, estos conceptos son esenciales para la modelización y simulación de sistemas físicos. Por ejemplo, los valores y vectores propios se utilizan en la mecánica cuántica para describir el estado de un sistema, mientras que las ecuaciones lineales son fundamentales en la resolución de problemas de ingeniería estructural y eléctrica.

El libro contiene cinco (5) capítulos, uno para cada tema, en los cuales, se presenta un desarrollo riguroso de las temáticas, soportado en teoremas, demostraciones y ejemplos.

9 786287 771352

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

120 Años
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de Nariño