

# ELEMENTOS DE GEOMETRÍAS

Algoritmos Comparativos

Óscar Fernando Soto Ágreda  
Segundo Javier Caicedo Zambrano



**Editorial**  
Universidad de Nariño

# èditorial

Universidad de **Nariño**

**ELEMENTOS  
DE  
GEOMETRÍAS**  
**Algoritmos Comparativos**

# **ELEMENTOS DE GEOMETRÍAS**

## **Algoritmos Comparativos**

Óscar Fernando Soto Ágreda  
Segundo Javier Caicedo Zambrano

**èditorial**  
Universidad de **Nariño**

Soto Ágreda, Oscar Fernando

Elementos de geometrías : algoritmos comparativos / Oscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier Caicedo Zambrano-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

181 páginas : ilustraciones, gráficas, tablas

Incluye referencias bibliográficas p. 172-174

ISBN: 978-628-7771-54-3

1. Geometría hiperbólica | 2. Geometría Euclidiana | 3. Problema de Apolonio | 4. Analogías—Ejercicios | 5. Cónicas | 6. La parábola | 7. La circunferencia | 8. Elipse | 9. Algoritmos | 10. Geometrías—Ejercicios | 11. Disco de Poincaré | I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

516 S718el – SCDD-Ed. 22



Universidad de Nariño  
FUNDADA EN 1924



Asociación de Alta Calidad  
REGISTRADA EN EL SENEC - CONVENIO 11 DE 2022

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

## **ELEMENTOS DE GEOMETRÍAS**

### **Algoritmos Comparativos**

© Editorial Universidad de Nariño

©Óscar Fernando Soto Ágreda  
Segundo Javier Caicedo Zambrano

**ISBN: 978-628-7771-54-3**

**Corrección de estilo:** Germán Chaves Jurado

**Diseño de cubiertas y diagramación:** Angie Gabriela Ordoñez

**Fecha de publicación:** 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus Autores o de la Editorial Universidad de Nariño

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	9
PREÁMBULO .....	11
CAPÍTULO 1	
EL DISCO DE POINCARÉ Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA .....	22
1.1. MODELO DEL DISCO DE POINCARÉ .....	32
1.1.1. Posición relativa de rectas hiperbólicas .....	32
1.1.2. Algunos resultados de Geometría Hiperbólica .....	33
1.2. ALGUNAS CONSTRUCCIONES CONOCIDAS .....	34
1.2.1. Construcciones básicas .....	35
1.2.1.1. Simétrico axial de un punto o inverso .....	35
1.2.1.2. Construcción de una semirrecta .....	36
1.2.1.3. Cálculo del punto medio entre dos puntos .....	37
1.2.1.4. Construcción de un segmento .....	38
1.2.1.5. Construcción de una recta .....	39
1.2.1.6. Construcción de una recta perpendicular a otra .....	40
1.2.1.7. Construcción de la mediatriz a un segmento .....	41
1.2.1.8. Circunferencia por centro y punto .....	42
1.2.2. Algunos movimientos en el Disco de Poincaré .....	44
1.2.2.1. Reflexión sobre una recta .....	44
1.2.2.2. Reflexión en un punto o Simetría Central .....	46
1.2.2.3. Traslación de un punto según un vector determinado por otros dos puntos .....	48
1.2.2.4. Rotación de un punto con centro de rotación y ángulo determinado por tres puntos .....	50
1.2.3. Macros especiales para la Geometría Hiperbólica .....	52
1.2.3.1. Macro de un cuadrado dados dos vértices consecutivos del mismo .....	52
1.2.3.2. Macro de un triángulo equilátero dado su lado .....	58
1.3. ANALOGÍAS .....	68
Ejemplo 1: verificar si los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo .....	68
Ejemplo 2: perpendicular a un segmento dado por uno de los extremos .....	69
Ejemplo 3: diagonales de un cuadrado .....	71
Ejemplo 4: segmento de los puntos medios de los lados de un triángulo .....	73
Ejemplo 5: ángulos opuestos de un triángulo isósceles .....	74
Ejemplo 6: punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo .....	75
Ejemplo 7: medianas a los lados iguales de un triángulo isósceles .....	75
Ejemplo 8: teorema de los puntos medios de un cuadrilátero .....	76

Ejemplo 9: todo diámetro perpendicular a una h-cuerda, la biseca .....	77
Ejemplo 10: tangente a una h- circunferencia por un punto de ella .....	78
Ejemplo 11: línea de los centros de dos h-circunferencias secantes .....	79
Ejemplo 12: h-recta tangente a una h-parábola .....	80
Ejemplo 13: h-tangente a una h-elipse por uno de sus puntos .....	81
Ejemplo 14: tangente a una h-hipérbola por uno de sus puntos .....	83
Ejemplo 15: alineación de centros de circunferencias .....	84
Ejemplo 16: lugar geométrico definido por el punto medio de una cuerda .....	85
Ejemplo 17: repetición de un segmento en una dirección dada .....	85
Ejemplo 18: construcción de un triángulo isósceles .....	87

## CAPÍTULO 2

LAS CÓNICAS Y EL PROBLEMA DE APOLONIO .....	93
2.1. MACROS DE LAS CÓNICAS .....	94
2.1.1. La parábola .....	94
2.1.2. La elipse .....	96
2.1.3. La hipérbola .....	98
2.2. CASOS PARTICULARES DEL PROBLEMA DE APOLONIO .....	101
2.2.1. Primer caso: circunferencia pasando por tres puntos .....	101
2.2.2. Segundo caso: circunferencia tangente a tres rectas dadas .....	102
2.2.3. Tercer caso: circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos dados .....	104
2.2.4. Cuarto caso: circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto .....	105
2.2.5. Quinto caso – parte 1: circunferencia tangente a otra pasando por dos puntos en su interior .....	107
2.2.6. Quinto caso – parte 2: circunferencia tangente a otra pasando por dos puntos en su exterior .....	109
2.2.7. Sexto caso: circunferencia tangente a dos circunferencias pasando por un punto de su exterior común .....	111
2.2.8. Séptimo caso: circunferencia tangente a dos rectas dadas y a una circunferencia en el interior del ángulo que ellas determinan .....	112
2.2.9. Octavo caso: circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto .....	114
2.2.10. Noveno caso: circunferencia tangente a una recta y a dos circunferencias disjuntas en el mismo semiplano de la recta. ....	116
2.2.11. Décimo caso: circunferencia tangente a tres circunferencias .....	117

## CAPÍTULO 3

EL DÉCIMO CASO DEL PROBLEMA DE APOLONIO .....	120
3.1. LA INVERSIÓN .....	121
3.2. CÍRCULOS ORTOGONALES .....	122
3.3. INVERSIONES DE RECTAS Y CÍRCULOS .....	124
3.4. DOS PROBLEMAS DE FÁCIL SOLUCIÓN .....	127
3.5. EL PROBLEMA DE APOLONIO .....	129

## CAPÍTULO 4

CÓNICAS EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA .....	136
4.1. LA CIRCUNFERENCIA .....	139
4.2. LA ELIPSE .....	141
4.3. LA HIPÉRBOLA .....	144
4.4. LÍNEAS RECTAS .....	149
4.5. LA PARÁBOLA .....	155

## EJERCICIOS

Ejercicios Capítulo 1 .....	164
Ejercicios Capítulo 2 .....	164
Ejercicios Capítulo 3 .....	166
Ejercicios Capítulo 4 .....	167
Caso circunferencia .....	167
Caso elipse .....	168
Caso hipérbola .....	169
Caso de la recta .....	170
Caso parábola .....	171

BIBLIOGRAFÍA .....	172
--------------------	-----

TABLA DE FIGURAS .....	175
------------------------	-----

## INTRODUCCIÓN

El libro *Elementos de Geometrías: algoritmos comparativos*, subraya el hecho de que, Euclides en el Libro I de sus Elementos y en los demás libros, presenta proposiciones algorítmicas. Y no puede ser de otra manera, ya que, el objeto de abstracción de la geometría, es la forma y, en consecuencia, dinamiza el uso de rectas, circunferencias y el cálculo de puntos de intersección entre estos objetos; por comparación, existen algoritmos comunes con otros modelos de geometría. En este libro, se presenta un estudio por analogía con la Geometría Hiperbólica, con ejemplos que, en su mayoría, se satisfacen en los modelos parabólicos y euclidianos.

El texto hace uso de las cónicas, tanto en la Geometría Euclídea como en la Hiperbólica, para resolver todos los casos del Problema de Apolonio y destaca la manera en que cada algoritmo se convierte en un procedimiento universal de solución. También se presenta un algoritmo de solución a la construcción de una circunferencia tangente a otras tres, utilizando la transformación de inversión. Este problema es uno de los casos de los Problemas de Apolonio que, junto con la inversión, está íntimamente ligado a la Geometría Hiperbólica.

Finaliza el libro con el estudio de las cónicas en la métrica del taxista del plano discreto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , sosteniendo que, las definiciones de dichas curvas tienen carácter universal, y resulta evidente asegurar que las cosas no son como parecen.

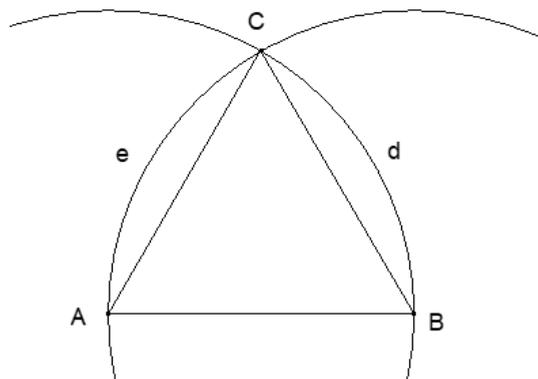
El libro, destaca por su relevancia en la presentación de proposiciones algorítmicas en la Geometría Euclidiana e Hiperbólica. Al subrayar la aplicación de algoritmos comunes en distintos modelos de geometría, este texto proporciona un estudio que amplía la comprensión de la forma y dinamiza el uso de rectas, circunferencias y el cálculo de puntos de intersección. Además, la resolución de casos del Problema de Apolonio mediante el uso de cónicas, tanto en la Geometría Euclidiana como en la Hiperbólica, resalta la universalidad de cada algoritmo como un procedimiento de solución y a estas curvas como herramientas efectivas y eficaces en el hallazgo de las respuestas. Este enfoque detallado y comparativo entre distintos modelos de geometría, realza la importancia del libro como una fuente integral de herramientas y conocimientos para los lectores interesados en profundizar en este campo.

El libro, se hace más importante, si el lector acude a cada algoritmo para construir su acervo de herramientas y se arriesga a presentar las razones lógicas de cada paso en tales procedimientos. En este contexto, el libro ofrece un valor significativo al animar a los lectores a analizar y presentar las razones lógicas de cada paso en los procedimientos algorítmicos, con lo cual, se fomenta una comprensión más profunda y una apropiación personal del conocimiento geométrico. Esta etapa argumentativa no solo fundamenta las razones detrás de cada algoritmo, sino que también enfatiza la importancia de la publicación de esta obra. Así, el libro no solo se destaca por su contenido teórico, sino también por su capacidad para comprometer y desafiar activamente a sus lectores, convirtiéndolo en una herramienta valiosa para el desarrollo de habilidades en geometría y algoritmia.

## PREÁMBULO

Sin duda, *Los Elementos*, como texto unificador del conocimiento aritmético y geométrico existente en la época griega de Euclides, es un ejemplo de uso de herramientas con carácter algorítmico en la descripción de sus procedimientos y consecución de resultados. Un alto porcentaje de sus teoremas tienen carácter constructivo y hacen uso de las herramientas descritas en los primeros cuatro postulados, la regla, el compás y el transportador.

El primer teorema explicita la construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento dado. Sin forzar la argumentación aristotélica, que defiende los pasos lógicos de que, la construcción es efectiva y precisa, la solución de este problema deriva en los siguientes pasos, siempre que se dé un segmento básico inicial  $AB$ :



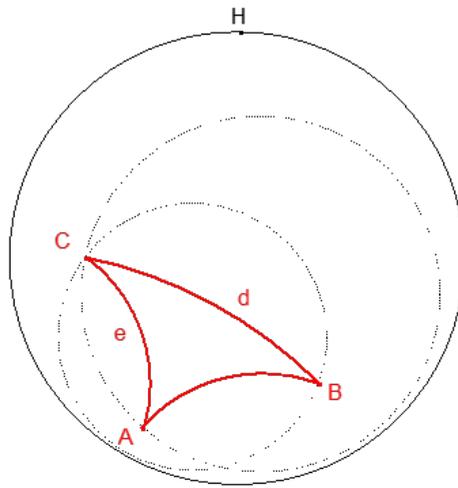
*Figura 1.* Construcción de un triángulo equilátero desde un segmento dado  
Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la circunferencia  $d$  de centro en el punto  $A$  y radio  $AB$ .
- 2) Trazar la circunferencia  $e$  de centro en el punto  $B$  y radio  $BA$ .
- 3) Ubicar el punto de intersección  $C$  entre las circunferencias  $e$  y  $d$ .
- 4) Trazar los segmentos  $AC$  y  $BC$  con lo que queda determinado el triángulo equilátero  $ABC$  (*Figura 1*).

El resto, es aplicar las reglas lógicas de una demostración sustentadas en las definiciones de los objetos, en este caso, de la circunferencia, y utilizar de manera adecuada las herramientas geométricas, cuyo uso tiene licenciamiento desde la concepción de los postulados.

Los teoremas constructivos y de carácter algorítmico continúan. El teorema 2, estudia la repetición de un segmento en cualquier dirección desde un punto dado; el teorema 3, elucubra sobre destacar un segmento de menor longitud en otro de mayor longitud; el teorema 9, se refiere a la bisección de un ángulo; y en el 10, se enseña cómo calcular el punto medio de un segmento Y así, va describiendo problemas como el de la construcción de una perpendicular por un punto de un segmento, o por un punto extremo o por un punto que no yace en él. La lista se hace larga y se completa con problemas que requieren de mayor argucia como el de la construcción de números irracionales a través de la Espiral Pitagórica de Teodoro de Cirene, tal que, las longitudes sucesivas de las hipotenusas toman como valor, el de las raíces cuadradas de los números naturales  $\sqrt{n}$  o del cálculo de la raíz cuadrada de cualquier número real positivo, mediante la búsqueda de la media proporcional.

El sentido universal de las definiciones permite que los procedimientos se satisfagan, cuando esto es posible, dentro de otros espacios métricos. El caso del trazado de un triángulo equilátero, por ejemplo, consigue su validez dentro del modelo de la Geometría Hiperbólica que se estudia en este libro, en el contexto del Disco de Poincaré.



*Figura 2.* Construcción de un triángulo equilátero en la Geometría Hiperbólica  
Fuente: elaboración propia

La *Figura 2*, corresponde a la construcción de un triángulo equilátero a partir del segmento  $AB$ , al interior del Disco de Poincaré. Las herramientas que se utilizan para ello son las correspondientes del modelo Hiperbólico como h- segmento y h- círculo, referidos al horizonte  $H$ . Y de allí, con las herramientas propias de la medida, puede verificarse que, en efecto, se trata de un triángulo equilátero. (En el Menú Hiperbólico Cabrí, que se mencionará más adelante, el llamado a las herramientas propias del modelo Hiperbólico se les antepone el prefijo h-).

En todas las construcciones que reúne este texto, se ha utilizado Cabrí II Plus, como software de la Geometría Dinámica, del cual, la Universidad de Nariño posee licencia perpetua, junto a su Menú Hiperbólico que permite la construcción y verificación de resultados dentro de un Disco de Poincaré.

Desde cada una de las construcciones, queda fácil la confección de macro construcciones que, de manera automática y efectiva, con ahorro de tiempo, producen los efectos requeridos con la posibilidad de dedicar esfuerzo y tiempo a hacer más, a pensar otras situaciones y resolver nuevos

problemas. Es el caso de la construcción de un triángulo equilátero, mostrado antes, que contiene una macro en la que los objetos iniciales son los puntos  $A$  y  $B$  y el horizonte  $H$ , y como objetos finales se tienen los arcos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ . Desde un ángulo funcional, esta macro es una función cuyo dominio está conformado por pares de puntos al interior de un horizonte  $H$  y cuyo recorrido es el conjunto infinito de todos los  $h$ - triángulos equiláteros. En el primer capítulo de este libro, se presenta una macro para la construcción inmediata de triángulos equiláteros, más elaborada que la que aquí se ha presentado, para que el lector argumente de su eficacia y su simplicidad y, al tiempo, en cada uno de los problemas que de manera algorítmica se estudian, busque alternativas adicionales de solución.

El paso de la Geometría Elemental a la Hiperbólica, no es intuitivo, y por ello, este texto fundamentado en un ambiente algorítmico, que indica paso a paso la consecución de resultados, y que lo hace de modo comparativo, anima a sus lectores a repetir las construcciones para probar lo que es o no satisfactorio en cada uno de los modelos.

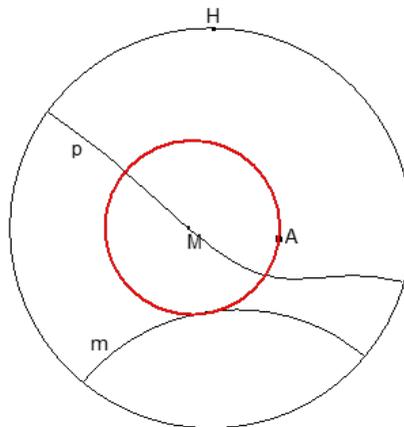
Pensamos que este texto de carácter algorítmico permite hacer un estudio comparativo de los objetos y de los resultados que se cumplen o no en los dos modelos geométricos de interés, el modelo euclidiano y el hiperbólico y, encontrar en los dos, hechos que asombran y que se hacen importantes de subrayar.

Se deja al lector completar con la argumentación lógica que da vida razonable a la solución de cada problema, de cada construcción, de cada verificación de un resultado.

Para determinar la universalidad de la eficacia de los algoritmos, se ha escogido como tema de estudio el Problema de Apolonio, con el imaginario de que, los algoritmos descritos en la solución de cada caso del problema en el Modelo Sintético, sean eficaces también en el otro modelo. De hecho, se pueden estudiar otros problemas, como el de la construcción de un triángulo isósceles conocido su perímetro y la altura al lado desigual,

que se propone en el Ejemplo 18 de analogías y en el que no se encontró solución utilizando la  $h$ -hipérbola, una solo con la  $h$ -circunferencia, infinitas soluciones con  $h$ -elipses y una sola con la  $h$ -recta. Los mecanismos de uso terminan asombrando por su recursividad y riqueza al interior de los resultados que, además, son visiblemente atractivos.

Existen procedimientos generales debido a las definiciones de los objetos que, en el sentido hiperbólico, son independientes del Postulado de las Paralelas. Por ejemplo, si se desea trazar la circunferencia tangente a una recta  $m$  que pase por un punto  $A$  arbitrario, al interior del Disco de Poincaré, es sencillo admitir que la solución del problema acarrea de manera tácita la definición de parábola y, en consecuencia, el algoritmo de solución para el procedimiento que resuelve el problema es el siguiente:

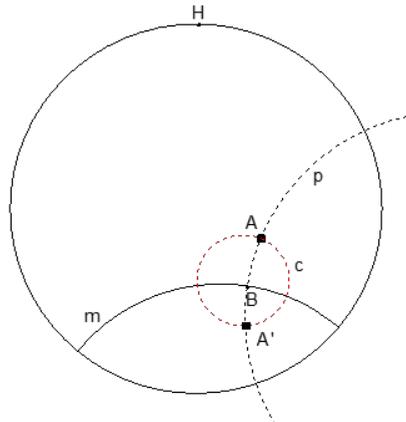


*Figura 3.* Circunferencia tangente a un  $h$ -recta pasando por un punto al interior del horizonte

Fuente: elaboración propia

- 1) Construir la parábola  $p$  que tiene como directriz a la recta  $m$  y foco al punto  $A$ , dado.
- 2) Ubicar en  $p$  y de modo arbitrario un punto  $M$ .
- 3) Trazar la  $h$ -circunferencia de centro en  $M$  que tiene como radio al segmento  $MA$ . Esta circunferencia es una de las infinitas circunferencias que pasando por  $A$ , son tangentes a la recta  $m$  (*Figura 3*).

En el fondo, puede adoptarse a la parábola como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasando por un punto fijo  $A$ , son tangentes a una recta fija  $m$ .



*Figura 4.* Simetría axial de un punto respecto de una h-recta

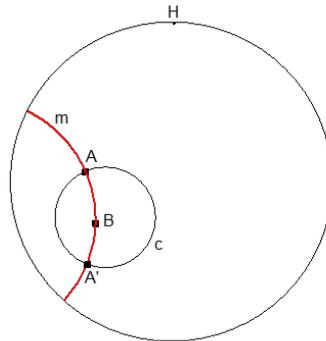
Fuente: elaboración propia

Utilizar las herramientas del Menú Hiperbólico implica escoger atajos en la construcción de diversos objetos cuyos algoritmos se explican en el primer capítulo del libro, tal y como si no existieran las herramientas dispuestas en dicho Menú. Por ejemplo: es posible construir unas macros sencillas para el cálculo del simétrico de un punto respecto de una h-recta en el disco; y también, calcular la imagen de un punto respecto de la simetría central referida a un punto (*Figura 4*).

Dados la h-recta  $m$  como línea de reflexión del punto  $A$ , se traza por este punto la perpendicular  $p$  para encontrar el punto de intersección  $B$  entre  $m$  y  $p$ . Con centro en  $B$  y radio  $BA$  se traza la h-circunferencia  $c$  y se ubica el punto  $A'$  que es el otro punto de intersección entre la perpendicular  $p$  y la h-circunferencia  $c$ . El punto  $A'$  es el simétrico de  $A$  respecto de la recta  $m$ . La macro a configurar tiene como objetos iniciales la recta  $m$ , el punto  $A$  y el horizonte  $H$ , y como objeto final el punto  $A'$ .

Para encontrar el simétrico del punto  $A$  respecto del punto  $B$  tomado como centro de la simetría, se traza la h-circunferencia  $c$  de centro en  $B$  y pasando por  $A$ ; enseguida, se traza la h-recta determinada por los

puntos  $A$  y  $B$  que determina el punto de intersección  $A'$  con la circunferencia  $c$ .  $A'$  es el punto buscado. La macro a configurar en este caso, tiene como objetos iniciales los puntos  $A$  y  $B$ , siendo  $B$  el centro de la simetría, y al horizonte  $H$ , y como objeto final al punto  $A'$ . Este algoritmo está expuesto en la *Figura 5*.



*Figura 5.* Simetría central de un punto respecto de otro

Fuente: elaboración propia

El lector tiene la oportunidad de comparar estos algoritmos elementales en relación con los que se describen en el primer capítulo del libro y reconocer la rica variedad de alternativas que se tiene con el Menú Hiperbólico de Cabri.

El libro acude a examinar el concepto de las cónicas, no solo en el orden de la Geometría Hiperbólica, sino también, en el mundo discreto del plano entero  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , donde acude el asombro evidente de hipérbolas, elipses, circunferencias, rectas y parábolas diversas, diferentes a las que un estudiante ha instalado en su imaginario. En especial, vale la pena anotar que, en especial, el concepto de parábola depende de la definición de línea recta y, en consecuencia, una recta tiene sentido de definición en este mundo discreto a través del concepto de mediatriz entre dos puntos o entre los extremos de un segmento. Es el acto de feliz coincidencia para evidenciar parábolas en la métrica del taxista de este mundo discreto, tema que se estudia en el último capítulo de esta obra.

Este libro es un compendio de practicidades algorítmicas que contiene la geometría en la constitución de sus objetos. Abarca elementos de tres mundos métricos, a saber: el espacio bidimensional real no acotado, el espacio métrico acotado de la Geometría Hiperbólica modelizada en el Disco de Poincaré y el espacio métrico discreto de la métrica del taxista en el plano entero. En general, en estos tres mundos se estudian los mismos objetos, las cónicas, para evidenciar que las cosas no son como lo parecen, a pesar de que guarden similitudes.

Se hace énfasis en el estudio comparativo de las cónicas, cuyas definiciones permanecen inalteradas independientemente del mundo que las subyace y se aplican en la solución del Problema de Apolonio, problema de alta riqueza inveterada que muestra la forma en que el algoritmo de solución cabe a la perfección en el plano corriente como en el Disco de Poincaré.

A pesar de que el libro tiene un carácter divulgativo exploratorio, lo rodea la tarea tácita de implementar los algoritmos descritos en aplicativos computacionales como GeoGebra, Cabrí II Plus y Derive. Los dos primeros pertenecen al enfoque denominado Geometría Dinámica y el tercero a un CAS, software de asistencia computacional que permite elaborar archivos de escogencia como lo requiere el estudio de matrices de puntos que satisfagan las condiciones de las definiciones de las cónicas. Con estas condiciones se hace útil e indispensable que el lector asuma la tarea de ejecutar los algoritmos para tener los archivos correspondientes de los objetos geométricos que origina un conjunto de macro construcciones que se necesita en la composición de nuevos objetos o en la verificación de teoremas.

Con las herramientas conformadas se puede verificar la satisfacción, en cualquiera de los espacios métricos, de los teoremas que pertenecen al núcleo de la geometría absoluta, y dejan de satisfacerse en el caso hiperbólico, aquellos resultados que pertenecen a la Geometría Hiperbólica, cuando se compromete el Postulado de las Paralelas.

El filósofo colombiano Fernando Zalamea asegura que, la riqueza de la matemática radica en el aspecto variado de sus contenidos y, de hecho, al establecer como línea de acción las analogías que se presentan como ejemplo en los mundos euclídeo e hiperbólico, propone las trazas de entender y comprender aún más el verdadero significado del método que tiene la geometría y la matemática (Zalamea, 2019). Solo con esto, ya se consigue la apertura mental que necesita un buen estudiante de matemáticas. En este sentido, el libro es una disculpa que abre la compuerta de la imaginación.

Los objetos que se estudian son los corrientes, pero asombra que su configuración en variados casos, se aleje de la percepción mental que se ha hecho de ellos; esta es la razón que hace necesario la modificación de las definiciones de algunos objetos, a fin de que su nombre y su sentido, quepan en el espacio métrico específico, tal es el caso, por proponer un ejemplo, del cambio más universal y amplio de los conceptos afines a los polígonos regulares.

El primer capítulo, es una modificación con sentido aplicativo al estudio de la satisfacción de teoremas de la Geometría Elemental, realizado por Elena Rozas Bellido, en el trabajo denominado: Geometría Hiperbólica: Desarrollo de Herramientas en Grasshopper, el cual está disponible en el siguiente enlace: [https://oa.upm.es/63932/1/TFG\\_Jun\\_20\\_Rozas\\_Bellido\\_Elena.pdf](https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf).

Los algoritmos se han implementado en el software Cabrí II Plus y presentan alternativas diferentes y modos distintos de uso de Macro- construcciones contenidas en el Menú Hiperbólico desarrollado para Cabrí. En este menú, por presentar un caso, un cuadrado se ejecuta desde su punto central y uno de sus vértices, la macro desarrollada acá, parte de dos vértices consecutivos y esto permite la efectividad del estudio comparativo de resultados como el Teorema de Varignon o el de Pitágoras. Igual, los autores, han desarrollado en este punto, una macro de construcción de un triángulo equilátero a partir de dos de sus vértices y no de su centro de gravedad y un centro, lo que brinda un lugar para comparar

teoremas como el de Napoleón. Con estas herramientas se hace un estudio por analogía de un buen conjunto de resultados que se satisfacen en el modelo elemental de la geometría. Brilla por su significado el Ejemplo 18 que, muestra a las cónicas como herramientas de alta capacidad a la hora de resolver el problema de la construcción de un triángulo isósceles, dados su perímetro y la altura al lado desigual.

El Menú Hiperbólico Cabrí no contiene las planillas propias de los movimientos rígidos, como la simetría axial, la simetría central, la traslación y la rotación que, en el Disco de Poincaré, permiten apreciar la riqueza del mundo de las transformaciones geométricas. Un mismo objeto, a través de la aplicación de una congruencia, en el Disco de Poincaré, se ve diferente, muy diferente, y esto, a todas luces, asombra.

El segundo capítulo del libro, está dedicado a realizar una analogía del modelo de la Geometría Analítica con la Hiperbólica, en la solución de los casos del Problema de Apolonio. Aquí, se presenta un algoritmo que debe compartirse en los dos espacios métricos que se comparan. En términos generales, la búsqueda de las circunferencias tangentes a tres objetos, respetan los algoritmos que no pierden su efectividad en los dos espacios métricos. Sin embargo, el lector ve que es preciso abordar los elementos adecuados, en el mundo hiperbólico y se utilizan, en consecuencia, las rectas, las mediatrices, las bisectrices, las circunferencias, los segmentos, que son de ese mundo hiperbólico, y para identificar estos objetos, tienen la anteposición del prefijo h-. Algunos casos del problema solo se presentan en el modelo analítico, dejando como tarea al lector la puesta en marcha de su creatividad en la construcción de la solución en el mundo hiperbólico.

El tercer capítulo, está dedicado al estudio especial del último caso del Problema de Apolonio, consistente en la búsqueda de una circunferencia tangente a otras tres, cuando esto es posible, con la utilización del concepto de inversión. El inverso de un punto respecto de una circunferencia, es una transformación íntimamente ligada a los espacios métricos hiperbólicos. La solución proveniente desde este ángulo, es más efectiva que la que se presenta en el segundo capítulo.

El cuarto capítulo, es un estudio de cómo las cónicas cambian su apariencia si el espacio métrico es diverso. En este caso, las definiciones se mantienen ubicuamente en el espacio métrico discreto de los enteros. Este mundo, es un mundo tipo rejilla, compuesto por coordenadas de puntos en el plano, que son números enteros. La gracia de este capítulo, es que sorteja la dificultad académica de definir el concepto de recta en este espacio, dado que el concepto de recta es esencial en la definición de parábola. La manera de definir recta, con el empleo del concepto de distancia inherente a los espacios métricos que aquí se emplea, es idéntico al concepto de mediatriz. Este hecho, salva y permite la constitución de parábolas.

Las construcciones expuestas, se han elaborado en Cabrí II Plus y, eventualmente, se ha utilizado el Menú Hiperbólico que se tiene para este fin. La Universidad de Nariño, dispone de una licencia perpetua, obsequiada por su creador Jean Marie Laborde. Sin embargo, el lector acucioso, puede utilizar GeoGebra u otro aplicativo similar. Para el estudio de las cónicas en la métrica del taxista, se ha empleado el CAS Derive, por lo amigable e intuitivo de su uso. Es un hecho que, las ayudas computacionales que soportan el montaje y modelación de las situaciones expuestas en el libro, dinamizan el adagio popular: “haga lo que piensa y piense lo que haga”. Desde este punto de vista, la utilización de recursos se hace claro desde el punto de vista académico, en la medida en que se aprenda geometría. Nada reemplaza el conocimiento geométrico que se aplica en estos paquetes computacionales.

El libro se ha inspirado en el desarrollo de cursos electivos de geometría que el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño promueve cada semestre, y tiene como intención, comprender a fondo el método y el significado de la matemática, en un compendio didáctico satisfactorio que ofrece esparcimiento y alegría, y al tiempo, produce asombro, aspectos que deben arropar los procesos de aprendizaje. Como autores, aseguramos que la temática expuesta es oportuna y anima a cada lector a repetir cada una de las temáticas expuestas, y que se aventure a desarrollar y explorar de acuerdo con sus propias expectativas.



## **CAPÍTULO 1. EL DISCO DE POINCARÉ Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA**

*“He creado un mundo nuevo y diferente de la nada.”*  
János Bolyai (1802-1860)

En este capítulo se examinan y estudian algunas herramientas ubicadas en el Menú Hiperbólico diseñado para Cabrí II Plus, dentro del modelo del Disco de Poincaré, que permite entender de manera simple, aunque no intuitiva, los alcances de la Geometría Hiperbólica y señalar algunas diferencias con la Geometría Elemental. Se explican hechos que recorren este nuevo espacio métrico en el que los objetos alcanzan nuevas formas y dimensiones. Como se indicó antes, este capítulo toma como referencia el trabajo realizado por Rozas-Bellido (2020), disponible en el siguiente enlace: [https://oa.upm.es/63932/1/TFG\\_Jun\\_20\\_Rozas\\_Bellido\\_Elena.pdf](https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf)

El documento persigue ser accesible y sin complejidad en comparación con otros trabajos similares; se propone, atraer y atrapar la curiosidad de los estudiantes e interesados, presentando por analogía, ejemplos de comparación con la geometría euclídea, sintética o elemental.

El descubrimiento de la Geometría Hiperbólica desde hace más de ciento cincuenta años, puso a flote una revolución en el ambiente académico, comparable a la copernicana, con un impacto filosófico importante, como la teoría darwiniana de la evolución de las especies. A pesar del escaso conocimiento y dejadez de esta rama de la geometría, muchas de las teorías y desarrollos científicos del siglo XX se han podido llevar a cabo gracias a este cambio en el pensamiento producido por tal revolución. La Geometría Hiperbólica abrió las puertas a investigaciones connotadas, entre las que se distingue, la geometría del espacio-tiempo en la Teoría de la Relatividad de Einstein.

Desde Euclides, precursor del Modelo Sintético de la matemática, que aúna su quehacer a través de enunciados que tan solo son definiciones, axiomas y teoremas escritos dentro de una taxonomía propia, que requiere el empleo de símbolos, la humanidad heredó la forma sutil de emplear la lógica aristotélica para seguir impeliendo y desarrollando el conocimiento matemático. Euclides legó al mundo un monstruo, que crece anualmente con una capacidad asombrosa, y con ello, todos los matemáticos son peripatéticos.

*Los Elementos* de Euclides son el tratado sistemático de matemáticas y geometría más antiguo y de mayor influencia en el pensamiento científico. *Los Elementos* abarcan las nociones de geometría y de aritmética que, en el momento, cubrirían un curso de Matemáticas Elementales en las carreras de matemáticas, licenciatura e ingeniería.

Contrario a lo que se conoce de *Los Elementos*, por el número de ediciones que ha tenido y la cantidad de críticas de orden filosófico y epistemológico y el carácter divulgativo en los procesos de enseñanza en todas las escuelas del mundo, poco y casi nada se conoce de su autor, quien vivió alrededor del año 300 antes de nuestra era, en los tiempos del faraón Ptolomeo I, quien posiblemente lo designó como director de la gran biblioteca de Alejandría, donde además, Euclides fue profesor en una escuela llamada El Museo. En Alejandría, vio la luz su magnífico texto, que tenía como propósito esencial, convencer a sus coetáneos que todo lo allí

consignado era cierto, dentro de su método axiomático. Una cosa importante, es que *Los Elementos* carecen de una estructura de texto escolar; es decir, no tienen el carácter de incursionar en el ámbito educativo.

Los resultados relacionados en *Los Elementos*, no son creaciones auténticas de Euclides, pero sí su forma axiomática y la organización ascendente y acumulativa de las proposiciones que se van ligando de manera lógica como una red soportada desde sus axiomas, postulados y definiciones iniciales. En *Los Elementos* se presenta el conocimiento desarrollado hasta ese entonces en la antigua Grecia. El compendio original se perdió, pero dada a su importancia, alcanzó a ser copiado en varias ocasiones, e incluso, existen copias que contienen el anexo de modificaciones, comentarios y nuevas proposiciones.

Los Elementos se dividen en trece capítulos llamados libros, como se indica a continuación:

- El *Libro I*, contiene definiciones y principios básicos, las propiedades de los triángulos, de las perpendiculares y las paralelas, y la equivalencia extensiva (área) de polígonos.
- El *Libro II*, estudia el álgebra geométrica, ocupándose en particular de la ecuación de segundo grado.
- El *Libro III*, es un estudio de la teoría de la circunferencia.
- El *Libro IV*, se centra en la construcción de algunos polígonos regulares inscritos a otros objetos.
- El *Libro V*, hace un estudio de las magnitudes y sus razones, adentrándose en el territorio de la inconmensurabilidad.
- El *Libro VI*, está dedicado a la teoría de las proporcionalidades y la semejanza de figuras.
- Los *libros VII, VIII y IX*, están referidos a la teoría de números.
- El *Libro X*, se dedica a la clasificación de irracionales algebraicos cuadráticos.
- Los *libros XI y XII*, hacen un estudio básico de la geometría del espacio.
- El *Libro XIII*, es la constitución explícita de los cinco poliedros regulares.

Sin duda, Euclides fue un maestro, un profesor con talento inigualable, con una obra matemática sin parangón. En vida, su Quinto Postulado, debió ser el punto de quiebre de las críticas y de los argumentos. Ante ello, en el libro I se ve el esfuerzo académico que hace de ir creciendo en proposiciones sin utilizar este Postulado de las Paralelas. Solo en la proposición 27 lo utiliza por primera vez, al demostrar que “Si dos rectas cortadas por una transversal, forman ángulos alternos iguales, entonces las dos rectas son paralelas entre sí”.

El uso, un poco tardío del Postulado de las Paralelas en su obra, ha hecho que se califique a Euclides como el primer geómetra no euclidiano; pues, justo las geometrías denominadas no euclidianas, surgen de las formas de negar el Quinto Postulado. Con la proposición 27, Euclides hace uso por primera vez del postulado en mención e inicia el estudio de la teoría de las paralelas, estableciendo más adelante, el importante hecho de que, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

Todo emerge desde las definiciones, los axiomas y los postulados. Los postulados solo son cinco y están cargados de un sentido instrumental. Euclides pide con humildad:

*Postulado I.* Poder trazar una línea recta de un punto a otro punto.

*Postulado II.* Y que cada línea recta se pueda prolongar indefinidamente por derecho, por cualquiera de sus extremos.

*Postulado III.* Y que se pueda trazar una circunferencia con centro en todo punto y con cualquier distancia como radio.

*Postulado IV.* Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

*Postulado V.* Y que, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Como se ha dicho, los cuatro primeros postulados tienen un sentido instrumental tangible que deriva en la existencia de reglas, compases y transportadores del mundo físico. El Quinto Postulado es el más polémico entre todos, al punto que, con cambios, obviándolo o negándolo, origina las llamadas geometrías no euclidianas. Un hecho no menos importante, es que varios geómetras han intentado demostrar la veracidad del Quinto Postulado a partir de las 23 definiciones iniciales, las 8 nociones comunes o axiomas y los cuatro primeros postulados. Estos intentos, impulsaron el desarrollo de las geometrías esférica, hiperbólica y elíptica que se hicieron realidad entre los siglos XVIII y XIX, y también la denominada Geometría Absoluta, que se fundamenta en tan solo los teoremas que emergen desde los cuatro postulados iniciales.

A los pocos siglos de la divulgación de *Los Elementos* y con la aparición de grandes críticos de la obra, como Proclo, el Quinto Postulado creó controversia entre los estudiosos de las matemáticas. Se intentó demostrar el Quinto Postulado a partir de los anteriores y de alguna proposición que se dedujera de ellos. Sin embargo, todo intento resultó infructuoso y los postulados sustitutos, más evidentes que el original, han resultado ser lógicamente equivalentes con él. El Quinto Postulado es equivalente con enunciados como los que se disponen a continuación (Rozas-Bellido, 2020):

- 1) Dos rectas paralelas son equidistantes (Posidonius, siglo I a. C.)
- 2) Si una recta interseca una de dos paralelas, entonces también interseca a la segunda (Proclus, 410-485 d. C.). Esta proposición es equivalente al axioma de Playfair: por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
- 3) Dado un triángulo, se puede construir un triángulo semejante con cualquier lado (Wallis, 1616-1703).
- 4) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a la suma de dos rectos (Legendre, 1752-1833).
- 5) Tres puntos no alineados están en un círculo (Bolyai Farkas, 1775- 1856).

A principios del siglo XIX empiezan a coger fuerza las teorías sobre la existencia de otras geometrías alternativas a la euclidiana. Estas teorías están basadas en los resultados obtenidos tras la negación del Quinto Postulado.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue el primero en desarrollar una Geometría No Euclidiana; sin embargo, Gauss tenía un importante prestigio y no se atrevió a publicar sus descubrimientos por temor a parecer ridículo ante la comunidad académica.

El ruso Nikolái Lobachevsky (1793-1856) y el húngaro János Bolyai (1802-1860) formularon por separado, el primer sistema de Geometría No Euclidiana (Martínez, 2007) y, por ello, son considerados los fundadores de la Geometría Hiperbólica. Por un lado, Lobachevsky argumentó la consistencia de esta nueva geometría basándose en las fórmulas trigonométricas que había redescubierto tras negar el Quinto Postulado, al suponer que, por un punto  $P$  exterior a la recta  $r$  pasan dos rectas paralelas. Las nuevas fórmulas incluyen algunas ya determinadas por los discípulos de Gauss, así como la relación entre el defecto de un triángulo y su área o el cálculo del volumen de un tetraedro. Por el otro, el trabajo de Bolyai se centró en la Geometría Absoluta, que consiste en aquellas proposiciones que son independientes del Quinto Postulado.

La existencia de una Geometría No Euclidiana se demostró a finales del siglo XIX, cuando el italiano Eugenio Beltrami (1835 - 1900) logró traducir cada término de la geometría de Lobachevski a un término de Geometría Euclidiana, probando la consistencia de la Geometría Hiperbólica con respecto a la Geometría Euclidiana. En el documento "Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea", publicado en 1868, Beltrami propuso que esta geometría podría realizarse en una superficie de curvatura negativa constante, como una pseudoesfera.

Las geometrías no euclidianas se obtienen considerando los cuatro primeros postulados y sustituyendo el quinto por su negación. Hay dos maneras de negar el Postulado de las Paralelas. Cada una de esas negaciones produce una nueva geometría.

La primera forma, es asumir que no existe ninguna recta paralela a  $r$  que pasa por  $P$ . Esto es lo que ocurre en la esfera, cuando se consideran como rectas los círculos máximos. En ella, se trabaja con una curvatura constante positiva. El reconocimiento de la Geometría Esférica, como Geometría No Euclidiana, se debe a Riemann (1826-1866).

La segunda forma de negar el Postulado de las Paralelas, es aducir que existen numerosas paralelas a  $r$  que pasan por el punto  $P$ . Esto origina la Geometría Hiperbólica, descubierta por Lobachevsky y Bolyai. En ella, la curvatura es constante y negativa, la cual es utilizada en el desarrollo de este trabajo, y es lo que maneja el aplicativo del Menú hiperbólico Cabri II Plus.

Los modelos típicos de la Geometría Hiperbólica son:

- > Modelo del Semiplano de Poincaré
- > Modelo del Disco de Poincaré
- > Modelo del Hiperboloide
- > Modelo Proyectivo de Beltrami-Klein

Todas las construcciones contenidas en este libro se han establecido con Cabri II Plus (Cabri. Le Cahier de BRouillon Interactif o Cuaderno de Geometría Interactif), software de Geometría Dinámica desarrollado por Jean-Marie Laborde y Franck Bellemain de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble en Francia. Para el uso del modelo de Geometría Hiperbólica se ha empleado el *Menú Hiperbólico* elaborado para Cabri, que es un conjunto de Macro- construcciones para experimentar con el modelo en cuestión. Cabri es, en esencia, un aplicativo computacional intuitivo y amigable que permite demostrar y verificar teoremas y conjeturas de Geometría Euclidiana, Analítica, Descriptiva, Hiperbólica y de Transformaciones (Soto, 2000).

El *Menú hiperbólico* (Figura 6) contiene macro construcciones robustas y poderosas que permiten ejecutar procedimientos de alta efectividad.

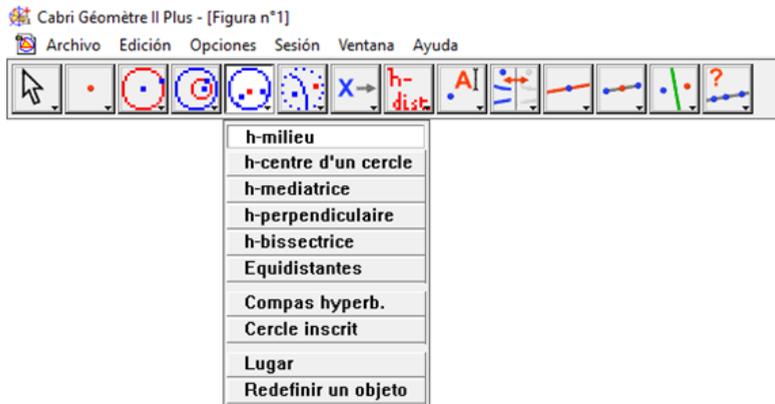


Figura 6. Algunas herramientas del Menú Hiperbólico Cabri  
Fuente: captura de pantalla

Por proponer un ejemplo, el Compás hiperbólico contenido en el Menú, se adecúa para el montaje que diseña Euclides en su proposición 22, consistente en repetir un triángulo desde cualquier punto del disco horizonte  $H$ , en el terreno de lo hiperbólico. “Dados tres segmentos tales que la suma de dos cualquiera de ellos sea mayor que el tercero, construir un triángulo con los lados respectivamente iguales a los tres segmentos.”

La solución de este problema constructivo tiene un carácter algorítmico que se describe en los siguientes pasos.

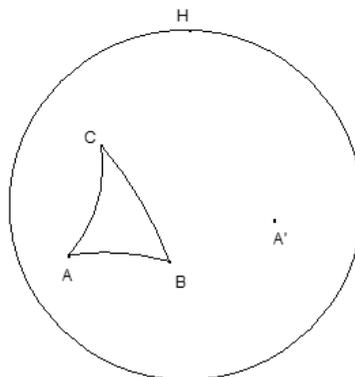


Figura 7. Fase inicial de la repetición de un triángulo  
Fuente: elaboración propia

Dados el triángulo  $ABC$  y un punto  $A'$  al interior del horizonte  $H$  (Figura 7):

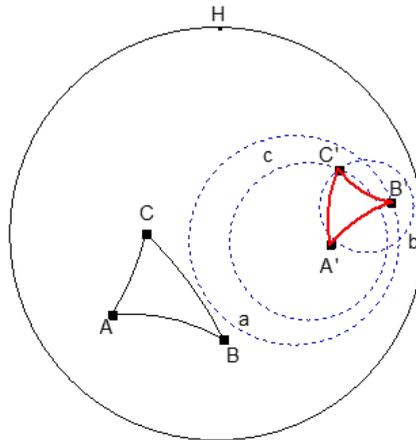


Figura 8. Repetición de un triángulo desde un punto arbitrario

Fuente: elaboración propia

- 1) Con el compás hiperbólico, se construye la circunferencia  $a$  con centro en el punto  $A'$  y radio  $AB$ .
- 2) En la circunferencia  $a$  se ubica, con libre albedrío, un punto  $B'$ .
- 3) Se traza la circunferencia  $b$  de radio  $BC$  con centro en el punto  $B'$ , valiéndose del compás hiperbólico.
- 4) Se traza la circunferencia  $c$  de radio  $AC$  con centro en el punto  $A'$ , valiéndose del compás hiperbólico.
- 5) Se obtiene el triángulo  $A'B'C'$  que es copia fiel del triángulo  $ABC$  (Figura 8).

Para tener evidencia de que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son los mismos, se puede tomar referencia del cálculo de sus áreas, la amplitud de sus ángulos y la longitud de sus lados.

También es factible repetir de manera inmediata y automática un triángulo confeccionando una macro construcción cuyos objetos iniciales sean los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del triángulo a repetir, el punto de partida  $A'$  y el horizonte  $H$ , y como objetos finales, los puntos  $B'$ ,  $C'$  y los arcos que definen el triángulo  $A'B'C'$ .

De hecho, solo con la Macro de Compás Hiperbólico es posible elaborar montajes de teoremas y resultados como el de la repetición de un ángulo, la repetición de un segmento en una dirección dada, y así de seguido, en dependencia del resultado a estudiar. Igual ocurre con otras Macros como las del sistema de medidas hiperbólicas de longitudes, áreas y amplitudes. Este Menú ofrece, con garantía, una oportunidad de exploración única, para la comprensión de una temática que ha sido oportuna, incluso, para explicar hechos de la fenomenología del universo.

Con las Macro-construcciones del Menú, varias de las tareas expuestas en este primer capítulo, son más simples de hacer, tales como, la reflexión axial o la simetría central, que cada lector interesado puede ejecutar por aparte. Este tipo de tareas, se convierten en una forma efectiva de aprender geometría y, con ello, por aplicación heurística, explorar otros caminos.

En este primer capítulo, que está referido al estudio y uso del Menú Hiperbólico para el aplicativo Cabrí, que se fundamenta de manera exclusiva en el Disco de Poincaré, solo se presenta lo referente a tal disco y el uso de las Macro-construcciones contenidas en su núcleo. De otra parte, también se hace una conversión de los procedimientos del documento *Geometría Hiperbólica: Desarrollo de Herramientas en Grasshopper*, elaborado por Elena Rozas Bellido (Rozas-Bellido, 2020). Tales construcciones obedecen a algoritmos que conducen, por pasos, a la implementación de herramientas adicionales a las que no aparecen en el menú; en especial, la elaboración de cuadrados a partir de dos vértices consecutivos del mismo, o de un triángulo equilátero a partir de un segmento.

Aparte de estas nuevas herramientas que se pueden establecer como *macro-construcciones* de uso inmediato, se construyen las macros de los movimientos rígidos en el disco, para permitir la constatación de que, efectivamente, son congruencias en el sentido hiperbólico. Este ejercicio comparativo se hace especial, puesto que otorga la relevancia propia de la consistencia de los modelos y el aprendizaje del modelo y su significado.

## 1.1. MODELO DEL DISCO DE POINCARÉ

En 1887 el matemático francés Henri Poincaré (1854 - 1912) describió un modelo del plano hiperbólico en el plano euclídeo. Dicho modelo, es conocido como el modelo del Disco de Poincaré y es parecido al Modelo del Semiplano, creado por el mismo autor.

Los puntos en el modelo del Disco de Poincaré son los puntos del interior de un círculo, con frontera en una circunferencia que se denota por  $H$ , denominada horizonte  $H$ . Las geodésicas (rectas hiperbólicas de este modelo) son los diámetros y los arcos de circunferencias ortogonales al borde. En este modelo, los ángulos también se calculan como en la Geometría Euclidiana (Rozas-Bellido, 2020).

Aunque los puntos del plano hiperbólico considerado en abstracto son indistinguibles, en el modelo del Disco de Poincaré el centro  $O$  del disco es un punto distinguido, que tiene la propiedad de que las rectas hiperbólicas que pasan por él se representan por los diámetros del disco.

Esta propiedad es útil a la hora de construir herramientas con los aplicativos computacionales, ya que permite construir las herramientas en el centro y luego, mediante movimientos hiperbólicos, moverlas a cualquier otro punto.

### 1.1.1. Posición relativa de rectas hiperbólicas

Dos rectas en el plano hiperbólico tienen tres posibles posiciones relativas. son secantes (se cortan en un punto), son paralelas (convergen asintóticamente a un mismo punto del infinito) o son ultraparalelas (son disjuntas incluso en sus prolongaciones a la recta en el infinito).

Mostramos a continuación las tres posibles posiciones relativas en el modelo del Semiplano de Poincaré y en el modelo del Disco de Poincaré (*Figura 9*).

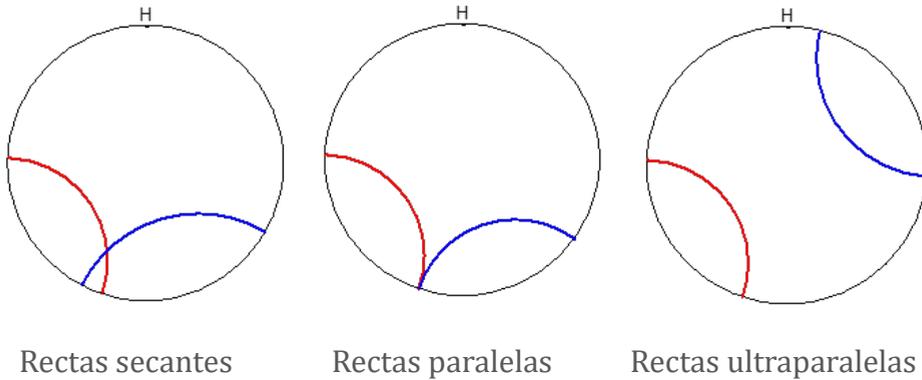


Figura 9. Posición relativa de rectas  
Fuente: elaboración propia

### 1.1.2. Algunos resultados de Geometría Hiperbólica

En algunas de las construcciones con Cabrí y su *Menú hiperbólico*, por ejemplo, el cálculo del área de un triángulo hiperbólico a partir de sus vértices, se pueden comprobar los resultados clásicos de Geometría Hiperbólica que se enuncian a continuación y que se destacan por la potencia de sorprender al estudiante:

**Teorema 1.** La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

**Teorema 2.** El área de un triángulo es igual a su defecto, es decir, la diferencia entre  $\pi$  y la suma de sus ángulos medidos en el sistema radián.

**Teorema 3.** La longitud de un círculo hiperbólico de radio  $r$  es  $2\pi \times \sinh(r)$ .

**Teorema 4.** El área hiperbólica de un círculo de radio  $r$  es  $\pi \times \sinh(r)$ .

Como es sabido, en Geometría Euclidiana una circunferencia de radio  $r$  tiene longitud  $2\pi r$ ; sin embargo, en Geometría Hiperbólica la longitud de una circunferencia de radio  $r$  es  $2\pi \times \sinh(r)$  y en Geometría esférica es  $2\pi \times \sin(r)$ .

Como  $\text{sen}(r) < r < \text{senh}(r)$ , la longitud de la circunferencia esférica es menor que la de la circunferencia euclidiana, y ésta, menor que la de la circunferencia hiperbólica. Lo mismo pasa con el área de círculos con el mismo radio.

Estos resultados se deben a que la Geometría Esférica tiene curvatura positiva en cada uno de sus puntos, la euclidiana tiene curvatura cero y la hiperbólica, curvatura negativa.

Como se ha explicado, este capítulo de carácter algorítmico, permite la construcción de herramientas que no aparecen en el Menú Hiperbólico de Cabrí y que pueden requerirse para establecer estudios comparativos, esencialmente en el modelo euclidiano.

## 1.2. ALGUNAS CONSTRUCCIONES CONOCIDAS

En esta sección, se indican los pasos para construir cada uno de los objetos hiperbólicos análogos a la geometría Sintética. Muchos de tales objetos, aparecen disponibles para su uso en el Menú Hiperbólico Cabrí; sin embargo, esta sección pretende evidenciar la íntima relación que tiene la Geometría Hiperbólica con el concepto de inversión, que se estudia en otros contextos. En el Menú, por ejemplo, no aparece como herramienta una semirrecta, de la que aquí se indica y que se debe disponer como Macro Personal.

En sentido práctico, es útil guardar la construcción de cada uno de los objetos para volver a obtener desde allí, la *macro-construcción* respectiva. Se debe entender al conjunto de pasos a efectuar para la construcción, como un algoritmo geométrico de importancia.

### 1.2.1. Construcciones básicas

#### 1.2.1.1. Simétrico axial de un punto o inverso

El simétrico axial de un punto  $P$  respecto un círculo  $H$ , se corresponde con el Punto Inverso respecto de un círculo y aparece como herramienta en el núcleo del Menú Hiperbólico elaborado en Cabrí II Plus como Sym. Axiale.

Dados el punto  $P$  y la circunferencia  $H$  de centro en  $O$ , los pasos para su construcción son los siguientes:

- 1) Determinar el punto medio  $M$  entre los puntos  $P$  y  $O$ .
- 2) Trazar la circunferencia de centro en  $M$  y radio  $MP$  y ubicar los puntos de intersección de las dos circunferencias  $D$  y  $E$ .
- 3) El punto medio entre los puntos  $D$  y  $E$ , que se ha denominado  $P'$  es el simétrico axial del punto  $P$  respecto de la circunferencia  $H$  (Figura 10).

En adelante, se denomina a la macro diseñada para el cálculo del simétrico axial de un punto respecto de una circunferencia, como  $h$  - simétrico axial o el punto reflexivo de otro.

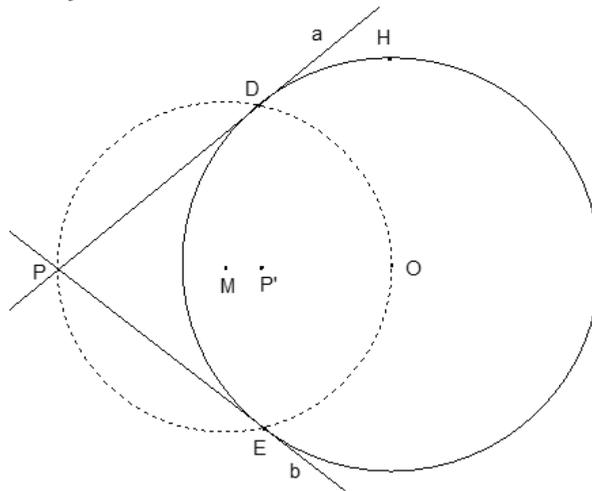


Figura 10. Tangente a una recta

Fuente: elaboración propia

En lo sucesivo, los puntos  $D$  y  $E$  (y que posiblemente tendrán otros nombres), que son de tangencia y, por tanto comunes a las rectas  $a$  y  $b$ , son de frecuente utilización y se llamarán solo como *puntos tangentes* desde el punto respectivo a la circunferencia que se nombre. De hecho, con esta construcción, también quedan construidas las rectas tangentes  $a$  y  $b$  que deberán disponerse como *macro-construcciones*, que facilitan el uso del tiempo y efectividad para nuevas construcciones.

### 1.2.1.2. Construcción de una semirrecta

Dada la circunferencia  $H$  de centro en  $O$  y radio  $R$ , y los puntos  $A$  y  $B$  interiores al círculo así definido, pero distintos del centro, se procede con las siguientes indicaciones:

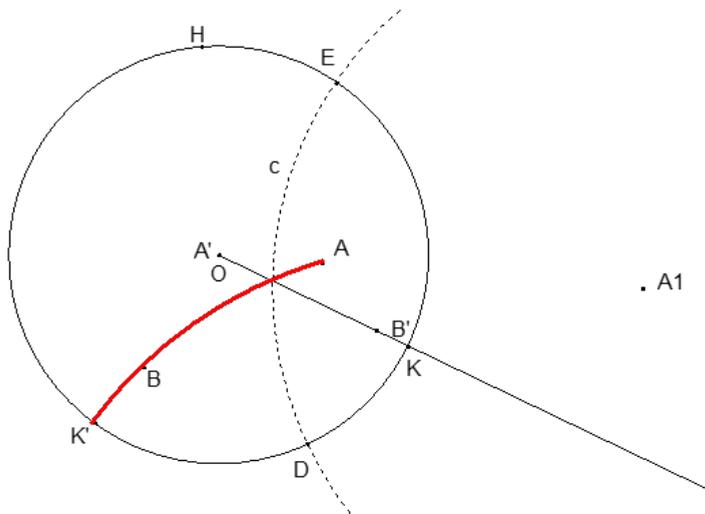


Figura 11. Semirrecta en el Disco de Poincaré  
Fuente: elaboración propia

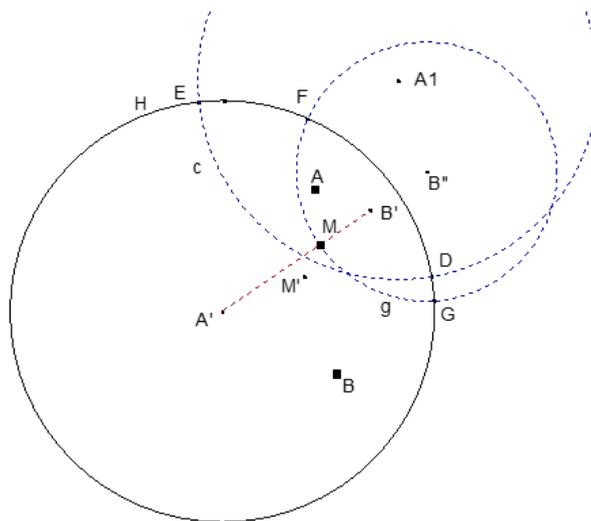
- 1) Se obtiene  $A1$  como simétrico axial de  $A$  respecto de la circunferencia  $H$ .
- 2) Se determinan los puntos de tangencia  $D$  y  $E$  de las rectas tangentes a  $H$  lanzadas desde  $A1$ .
- 3) Se construye la circunferencia  $c$  de centro en  $A1$  y radio  $A1D$ .

- 4) Se determinan los simétricos axiales  $A'$  y  $B'$  respecto de la circunferencia  $c$ .
- 5) Se ubica el punto  $K$  que es el punto de intersección de la semirrecta determinada por los puntos  $A'$  y  $B'$  con la circunferencia  $H$ .
- 6) Se obtiene el punto  $K'$  como el punto reflejado de  $K$  respecto de la circunferencia  $c$ .
- 7) El arco que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $K'$ , es la semirrecta buscada (*Figura 11*).

Vale repetir, que se debe disponer la construcción como una *macro-construcción*, en la que los objetos iniciales sean el horizonte  $H$  y los puntos  $A$  y  $B$ . En consecuencia, el objeto final es el arco  $ABK'$ .

### 1.2.1.3. Cálculo del punto medio entre dos puntos

Dada la circunferencia horizonte  $H$  y los puntos interiores  $A$  y  $B$ , el cálculo de su punto medio  $M'$ , del segmento determinado por ellos, se determina de acuerdo con los siguientes pasos:



*Figura 12.* Punto medio entre dos puntos

Fuente: elaboración propia

- 1) Obtener el punto  $A1$  como h- reflexión de  $A$  en  $H$  utilizando la herramienta h. Sym Axiale.
- 2) Obtener  $D$  y  $E$  como puntos de tangencia de las rectas tangentes a  $H$ , lanzadas desde  $A1$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro  $A1$  y radio  $A1D$ .
- 4) Obtener los puntos  $A'$  y  $B'$  como reflejados (h- Sym Axiale) de los puntos  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia  $c$ .
- 5) Obtener el punto  $B''$  como reflejado de  $B'$  sobre la circunferencia  $H$
- 6) Determinar los puntos de tangencia  $F$  y  $G$  de las rectas tangentes a  $H$  desde el punto  $B''$ .
- 7) Trazar la circunferencia  $g$  de centro  $B''$  que pase por  $F$ .
- 8) Obtener el punto  $M$  como intersección entre la circunferencia  $g$  y el segmento  $A'B'$  (Figura 12).

El punto  $M'$  reflejado de  $M$  en la circunferencia  $c$ , es el punto medio buscado.

#### 1.2.1.4. Construcción de un segmento

Dada la circunferencia  $H$  de centro en  $O$  y radio  $R$  y los puntos  $A$  y  $B$  interiores a la circunferencia, distintos del centro, se procede de acuerdo con las indicaciones que siguen.

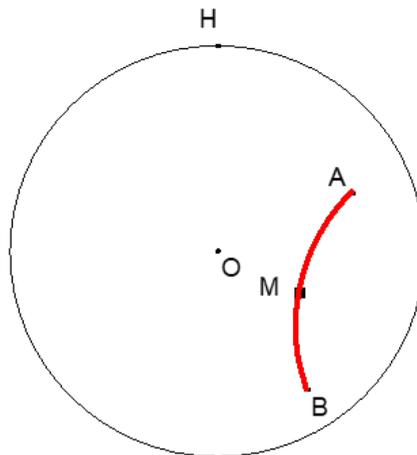


Figura 13. Segmento en el Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

- 1) Determinar el punto medio  $M$  entre los puntos  $A$  y  $B$ , aquí se puede utilizar la macro construida para tal efecto o la herramienta equivalente contenida en el Menú Hiperbólico h- Milieu.
- 2) Trazar el arco  $AMB$  que constituye el segmento pedido (Figura 13).

La *macro-construcción* configurada aquí tiene como objetos iniciales los puntos  $A$  y  $B$  y el horizonte  $H$ , y como objeto final el arco  $AMB$ .

#### 1.2.1.5. Construcción de una recta

Dados la circunferencia horizonte  $H$  de centro  $O$  y radio  $R$  y los puntos  $A$  y  $B$  al interior de la circunferencia  $H$ , se procede como se describe a continuación, utilizando la herramienta h-Simetría Axial, contenida en el Menú Hiperbólico.

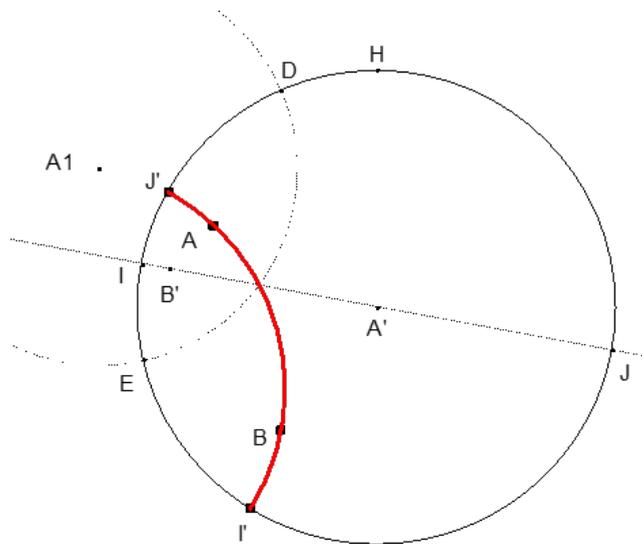


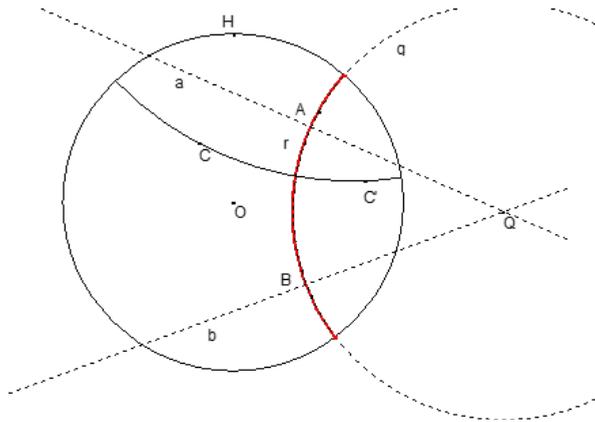
Figura 14. Recta definida por dos puntos

Fuente: elaboración propia

- 1) Obtener el punto  $A1$  como reflexión de  $A$  en  $H$  utilizando la herramienta h – Sym. Axiale.
- 2) Determinar  $D$  y  $E$  como puntos de tangencia de las tangentes a  $H$  desde  $A1$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro  $A1$  y radio  $A1D$ .
- 4) Determinar los puntos  $A'$  y  $B'$  como los puntos reflejados (o inversos) de los puntos  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia  $c$ .
- 5) Obtener los puntos  $J$  e  $I$  como intersección de la recta  $A'B'$  y  $H$ .
- 6) Obtener los puntos  $J'$  e  $I'$  como reflejados de  $J$  e  $I$  sobre la circunferencia  $c$ .
- 7) El arco que pasa por los puntos  $A, B, J'$  e  $I'$  forma la recta hiperbólica buscada (*Figura 14*).

#### 1.2.1.6. Construcción de una recta perpendicular a otra

Dados la circunferencia  $H$  de centro  $O$  y radio  $R$  y los  $A$  y  $B$  que definen la primera recta, se desea trazar desde un punto  $C$ , exterior a ella, una recta perpendicular. Los pasos a realizar son los que siguen.



*Figura 15.* Recta perpendicular a otra recta dada

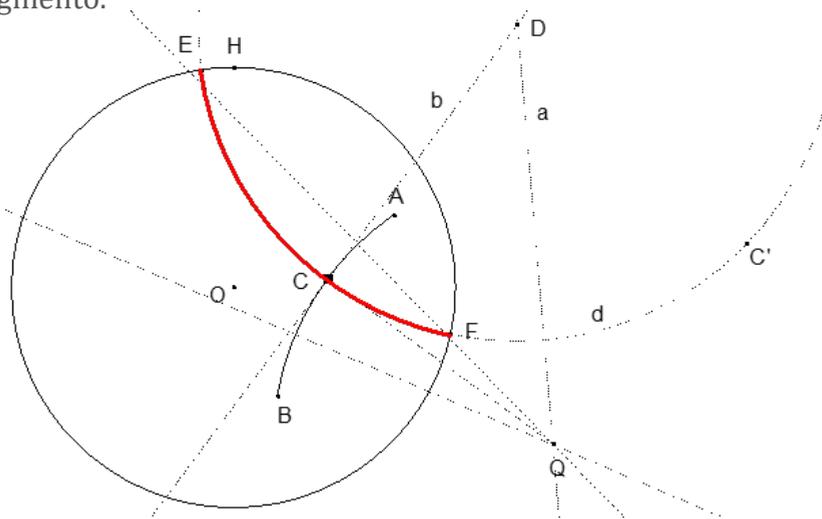
Fuente: elaboración propia

- 1) Construir la h-recta  $r$  que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ . Fíjese que tal recta es en realidad un arco de circunferencia.
- 2) Con ayuda de la herramienta mediatriz, determinar el centro  $Q$  de la circunferencia que contiene al arco  $r$  que es la h-recta dada.
- 3) Trazar la circunferencia  $g$  que contiene a la h-recta  $r$ , inicial dada.
- 4) Determinar el punto reflexivo o inverso  $C'$  de  $C$  respecto de la circunferencia  $g$ .
- 5) Trazar la h-recta que pasa por los puntos  $C$  y  $C'$ . Esta es la recta perpendicular pedida (*Figura 15*).

En este caso, los objetos iniciales de la macro personal, son la circunferencia horizonte  $H$ , los puntos  $A$  y  $B$  y el punto  $C$  que es exterior a  $r$ , y el objeto final es la recta que pasa por  $C$  y  $C'$ .

#### 1.2.1.7. Construcción de la mediatriz a un segmento

Dados la circunferencia horizonte  $H$  de centro  $O$  y radio  $R$  y los puntos  $A$  y  $B$  al interior de la circunferencia  $H$  que determinan un segmento, se procede como se describe a continuación, para calcular la mediatriz de tal segmento.



*Figura 16.* Mediatriz entre dos puntos o de un segmento dado

Fuente: elaboración propia

- 1) Se calcula  $C$  como punto medio del h-segmento determinado por sus extremos  $A$  y  $B$ .
- 2) Con ayuda de las mediatrices entre  $A$  y  $C$ , y  $C$  y  $B$ , se encuentra el centro  $Q$ , de la circunferencia que contiene al arco  $AB$ .
- 3) Por  $C$  se traza la tangente al arco  $AB$  en su punto medio  $C$ , tal tangente se llama  $b$ .
- 4) Se halla  $C'$  como Punto Inverso de  $C$  respecto del horizonte  $H$ .
- 5) Se traza la mediatriz  $a$  de los puntos inversos  $C$  y  $C'$ .
- 6) Se encuentra  $D$  como punto de intersección entre las rectas tangente  $b$  y mediatriz  $a$ .
- 7) Se construye la circunferencia  $d$  que tiene centro en  $D$  y pasa por el punto medio  $C$ .
- 8) Se señalan los puntos  $E$  y  $F$ , intersecciones de las circunferencias  $d$  y horizonte  $H$ .
- 9) El arco determinado por los puntos  $E$ ,  $C$  y  $F$ , es la recta mediatriz hiperbólica deseada (*Figura 16*).

De hecho, si se desea establecer desde la construcción, la macro respectiva, los objetos iniciales deben ser el horizonte  $H$  y los puntos  $A$  y  $B$ ; como objeto final aparece el arco  $ECF$ .

### **1.2.1.8. Circunferencia por centro y punto**

Dados la circunferencia horizonte  $H$  de centro en  $O$  y radio  $R$ , el punto  $A$  como centro de la h-circunferencia a construir y un punto arbitrario  $B$ , como punto de la h-circunferencia al interior de la misma, se procede de acuerdo con los siguientes pasos:

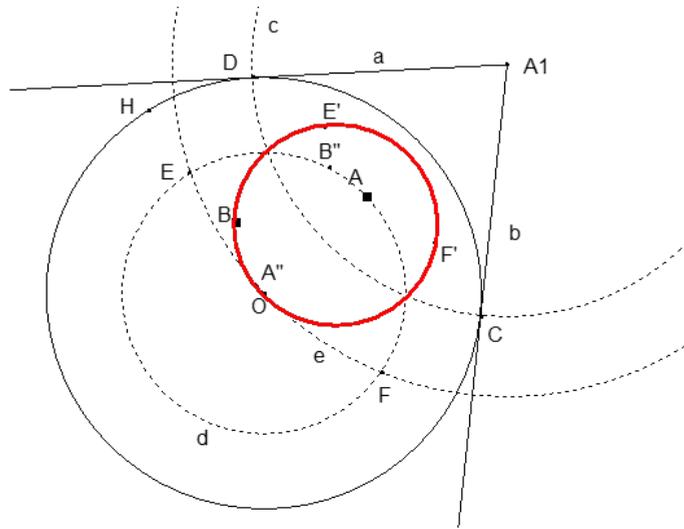


Figura 17. h- circunferencia con centro y punto

Fuente: elaboración propia

- 1) Determinar  $A'$  como Punto Inverso sobre la circunferencia horizonte  $H$ .
- 2) Trazar desde  $A'$  las tangentes  $a$  y  $b$  a la circunferencia horizonte  $H$ .
- 3) Marcar los puntos  $C$  y  $D$  como puntos de tangencia sobre el horizonte  $H$ , de las tangentes lanzadas desde  $A'$ .
- 4) Trazar la circunferencia  $c$  con centro en  $A'$  que pasa por  $C$  y  $D$ .
- 5) Obtener los puntos  $A''$  y  $B''$  como puntos inversos de  $A$  y  $B$  respecto de la circunferencia  $c$ .
- 6) Trazar la circunferencia  $d$  con centro en  $A''$  que pasa por el punto  $B''$ .
- 7) Trazar la circunferencia  $e$  con centro en  $A'$  y que pasa por el punto  $A''$ .
- 8) Ubicar los puntos  $E$  y  $F$  como puntos de intersección de las circunferencias  $d$  y  $e$ .
- 9) Obtener los puntos  $E'$  y  $F'$  como puntos inversos de los puntos  $E$  y  $F$  respectivamente y referidos a la circunferencia  $c$ .
- 10) La h- circunferencia que pasa por los puntos  $B$ ,  $E'$  y  $F'$  es la circunferencia hiperbólica buscada (Figura 17).

### 1.2.2. Algunos movimientos en el Disco de Poincaré

Intentando establecer una analogía que permita comparar los modelos geométricos elemental e hiperbólico, se tiene la obligación de construir sus equivalentes de los movimientos del plano, y con esta consideración se construyen las transformaciones de reflexión de un punto y, en consecuencia, de un objeto, respecto de una recta hiperbólica, la reflexión central sobre un punto y la traslación de acuerdo a un vector. Esto permite utilizar el menú geométrico de manera amplia y con ello avizorar aún más, las diferencias de los modelos.

#### 1.2.2.1. Reflexión sobre una recta

Dados el horizonte  $H$  y la  $h$ -recta determinada por los puntos  $A$  y  $B$  y un punto  $C$  por fuera de ella, para construir la imagen  $C'$ , reflexión de  $C$  respecto de la recta  $AB$ , se deben seguir los siguientes pasos:

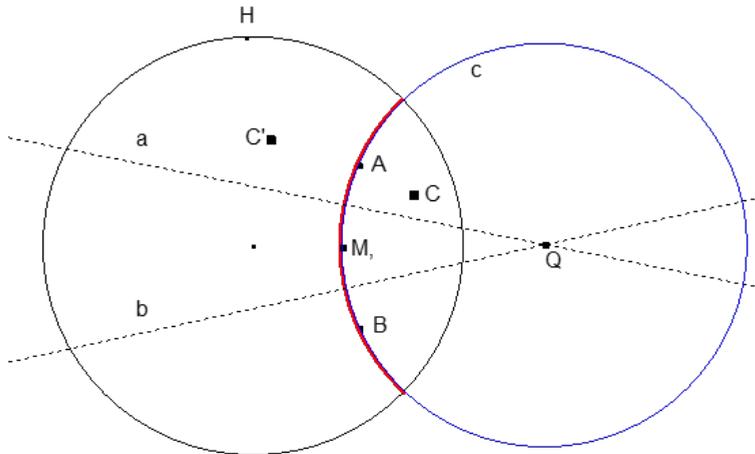


Figura 18. Reflexión axial de un punto

Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la h- recta determinada por los puntos  $A$  y  $B$ .
- 2) Determinar el h- punto medio  $M$  ente los puntos  $A$  y  $B$ .
- 3) Trazar las mediatrices  $a$  y  $b$  entre los puntos  $B$  y  $M$  y  $M$  y  $A$  respectivamente.
- 4) Determinar el punto  $Q$ , intersección entre las mediatrices  $a$  y  $b$ .
- 5) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $Q$  y radio  $QA$ .
- 6) Determinar el punto  $C'$  reflexivo de  $C$  respecto de la circunferencia  $c$ . El punto  $C'$  es la reflexión de  $C$  respecto de la h- recta  $AB$  (Figura 18).

Aquí, ya puede ser oportuno determinar la simetría axial de una figura. En la gráfica siguiente, por ejemplo, se muestra la reflexión del triángulo  $ABC$ , respecto de la recta  $r$  (Figura 19).

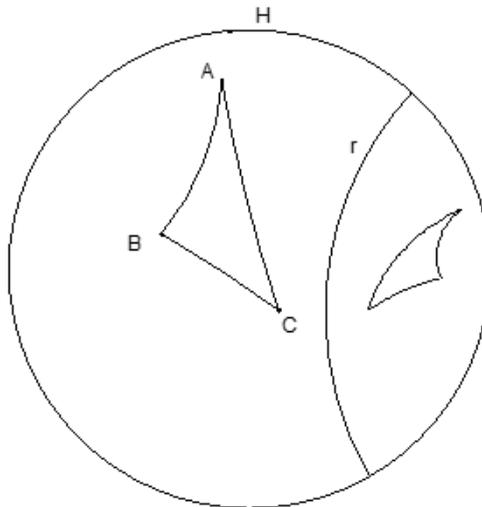


Figura 19. Reflexión axial de un triángulo

Fuente: elaboración propia

### 1.2.2.2. Reflexión en un punto o Simetría Central

Dados la circunferencia horizonte  $H$  de centro en  $O$  y radio  $R$ , el punto  $A$  a reflejar, distinto de  $O$  y  $B$  como centro de reflexión, la determinación de  $A'''$  como simétrico de  $A$  respecto del centro  $B$ , se obtiene con los siguientes pasos:

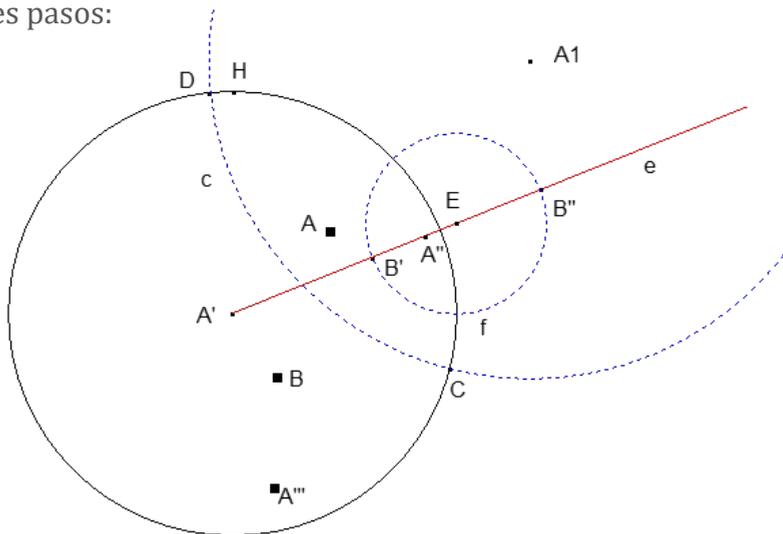


Figura 20. Simetría central de un punto

Fuente: elaboración propia

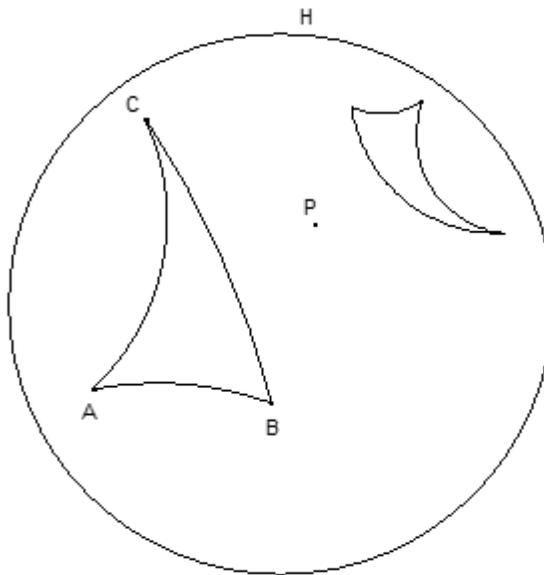
- 1) Determinar  $A1$  como inverso de  $A$  respecto de la circunferencia horizonte  $H$ .
- 2) Determinar los puntos de tangencia  $C$  y  $D$ , de las tangentes a  $H$  lanzadas desde  $A1$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $A1$  que pasa por el punto  $C$ .
- 4) Determinar los puntos  $A'$  y  $B'$  como inversos, de los puntos  $A$  y  $B$  respecto de la circunferencia  $c$ .
- 5) Trazar la semirrecta de origen en el punto  $A'$  (centro de la circunferencia  $H$  y que pasa por el punto  $B'$ ).
- 6) Determinar el punto  $B''$  como Punto Inverso de  $B'$  respecto de la circunferencia horizonte  $H$ .
- 7) Determinar el punto medio  $E$  como punto medio euclideo entre los puntos  $B'$  y  $B''$ .

- 8) Trazar la circunferencia  $f$  de centro en  $E$  y que pasa por el punto  $B'$ .
- 9) Determinar el punto  $A''$  como el inverso de  $A'$  en la circunferencia  $f$ .
- 10) Determinar el Punto Inverso de  $A''$  respecto de la circunferencia  $c$ , es el punto  $A'''$ .

El punto  $A'''$  es el h-simétrico de  $A$  respecto del punto  $B$  buscado (*Figura 20*).

En este punto, se establece la Macro construcción con objetos iniciales el horizonte  $H$ , el primer punto a reflejar  $A$  y el centro de reflexión  $B$  y como objeto final el punto  $A'''$ .

En la *Figura 21* se muestra la imagen por la vía de la simetría central de un triángulo  $ABC$  respecto de un punto  $P$ .



*Figura 21.* Simetría central de un triángulo

Fuente: elaboración propia

**1.2.2.3. Traslación de un punto según un vector determinado por otros dos puntos**

Dados la circunferencia horizonte  $H$  de centro en  $O$  y radio  $R$ , el punto  $C$  a trasladar, distinto de  $O$  y  $A$  y  $B$  como puntos diferentes del origen  $O$ , que determinan el vector de traslación; la determinación de  $A'''$  como trasladado de  $A$  respecto del vector  $AB$  se obtiene con los siguientes pasos:

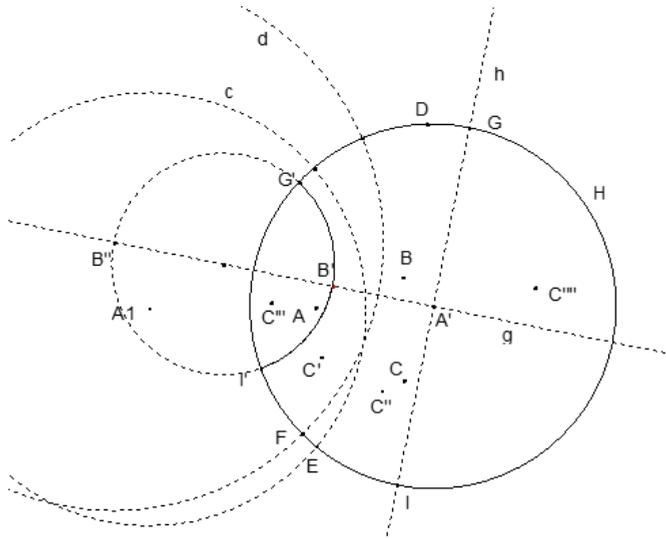


Figura 22. Traslación de un punto en un vector dado  
Fuente: elaboración propia

- 1) Determinar  $A1$  como inverso de  $A$  respecto de la circunferencia horizonte  $H$ .
- 2) Determinar el punto de tangencia  $D$ , de las tangentes a  $H$  lanzadas desde  $A1$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $A1$  que pasa por el punto  $D$ .
- 4) Determinar los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  como inversos, respectivamente de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  respecto de la circunferencia  $c$ .
- 5) Obtener  $B'$ , Punto Inverso de  $B'$  respecto de la circunferencia horizonte  $H$ .
- 6) Determinar el punto de tangencia  $F$ , de las tangentes lanzadas desde

- 7)  $B''$  al horizonte  $H$ .  
Trazar la circunferencia  $d$  con centro en  $B''$  pasando por el
- 8) punto  $F$ .
- 9) Obtener  $C''$ , Punto Inverso de  $C'$  respecto de la circunferencia  $d$ .
- 10) Trazar la recta  $g$  que pasa por los puntos  $A'$  y  $B'$ .
- 11) Trazar la recta  $h$ , recta perpendicular a  $g$ , pasando por el punto  $A'$ .  
Ubicar los puntos  $I$  y  $G$ , puntos de intersección de la recta  $h$  con el
- 12) horizonte  $H$ .  
Obtener los puntos inversos  $I'$  y  $G'$ , inversos respectivos de  $I$  y  $G$ ,
- 13) respecto de la circunferencia  $d$ .
- 14) Trazar el arco  $i$  que pasa por los puntos  $I'$ ,  $B'$  y  $G'$ .  
Determinar el punto  $C'''$  como punto reflejado del punto  $C''$  en el
- 15) arco  $i$ .  
El punto reflejado de  $C'''$  en la circunferencia  $c$  es el punto trasladado buscado y se lo ha denotado por  $C''''$  (*Figura 22*).

Se elabora la Macro construcción en la que los objetos iniciales son el horizonte  $H$ , los extremos del vector  $A$  y  $B$  y el punto a trasladar  $C$ , y el objeto final es  $C''''$ .

En la *Figura 23* se ha dispuesto el triángulo  $PQR$  que se traslada según el vector  $AB$ , para obtener el triángulo trasladado  $P'Q'R'$ , verificando que el cálculo de su área es el mismo; al mismo tiempo puede verificarse que la longitud de los lados también es la misma, lo que hace comprender que la traslación, como la simetría axial y la simetría central que se han diseñado, son congruencias absolutas en este caso, de sentido hiperbólico. En este caso, sólo se ha calculado el área.

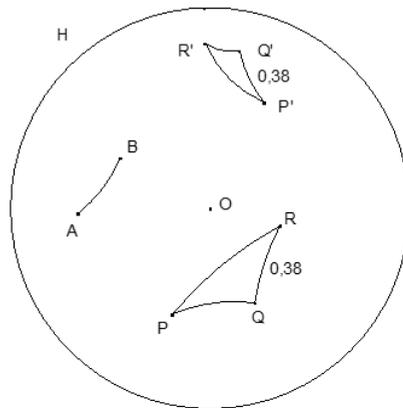


Figura 23. Traslación de un triángulo en un vector dado  
Fuente: elaboración propia

**1.2.2.4. Rotación de un punto con centro de rotación y ángulo determinado por tres puntos**

Dados la circunferencia horizonte  $H$ , el punto a rotarse  $B$  y el ángulo en  $A$  determinado por los segmentos  $PA$  y  $AR$ , el punto imagen de la rotación  $B''''$  en el ángulo en  $A$  se consigue de acuerdo con los siguientes pasos, cuidando de no escoger al punto  $A$  como el centro del horizonte  $H$ .

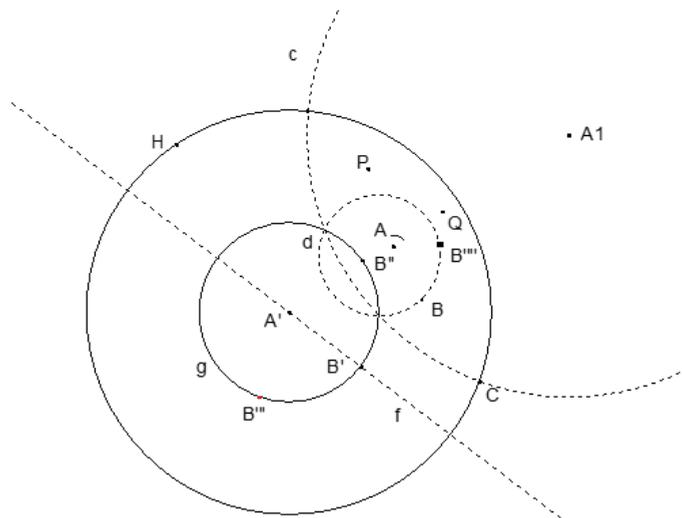


Figura 24. Rotación de un punto en un ángulo dado  
Fuente: elaboración propia

- 1) Determinar  $A1$  como el inverso de  $A$  en relación con el horizonte  $H$ .
- 2) Determinar  $C$  como uno de los puntos de tangencia de las rectas tangentes lanzadas desde  $A1$  al horizonte  $H$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  con centro en  $A1$  que pasa por el punto de tangencia  $C$ .
- 4) Determinar los puntos  $A'$  y  $B'$  como inversos de  $A$  y  $B$  respectivamente, respecto de la circunferencia  $c$ .
- 5) Trazar la h- circunferencia  $d$  con centro en  $A$  pasando por el punto  $B$ .
- 6) Trazar la circunferencia  $g$  con centro en  $A'$  y pasa por el punto  $B'$ .
- 7) Obtener el punto  $B''$  como rotación del punto  $B'$  en el ángulo marcado por los segmentos  $AP$  y  $AQ$  (Hay que disponer la marca de ángulo), en torno al punto  $A'$ .
- 8) Trazar la recta  $f$  determinada por los puntos  $A'$  y  $B'$ .
- 9) Obtener  $B'''$  al reflejar axialmente el punto  $B''$  respecto de la recta  $f$ .
- 10) El punto  $B''''$  que es el Punto Inverso de  $B'''$  respecto de la circunferencia  $c$ , es el punto buscado (*Figura 24*).

La Macro construcción a definir tiene como objetos iniciales el horizonte  $H$ , en su orden los puntos  $P$ ,  $A$  y  $R$  que determinan el ángulo en  $A$  a rotar siendo al mismo tiempo  $A$  el centro de rotación y el punto  $B$  que se rotará, y como objeto final el punto  $B''''$  (*Figura 25*).

En la *Figura 25* se ha dispuesto la rotación del triángulo  $STU$  alrededor del punto  $A$ , con el ángulo de rotación  $PAQ$  y se ha verificado que al igual que en la Geometría Elemental, la rotación mantiene la forma y la dimensión.

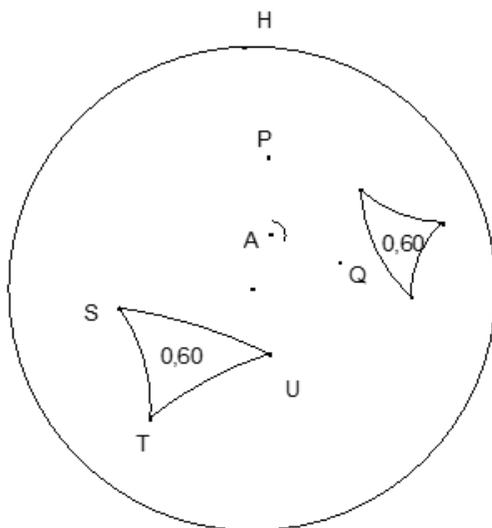


Figura 25. Rotación de un triángulo con centro en un punto  
Fuente: elaboración propia

### 1.2.3. Macros especiales para la Geometría Hiperbólica

#### 1.2.3.1. Macro de un cuadrado dados dos vértices consecutivos del mismo

El modelo del Disco de Poincaré para la Geometría Hiperbólica, está íntimamente ligado al concepto de inversión y la construcción de la Macro anunciada, lo atestigua.

Abierto un histórico de Cabri II Plus, se debe abrir el archivo de extensión men que es el Menú Hiperbólico obsequiado por el profesor brasilero Vincenzo Bongiovanni de la Universidad Bandeirante de São Paulo.

El histórico de Cabri debe verse como se muestra enseguida, y claro, los nombres franceses de las herramientas, se van familiarizando en la medida de su uso.

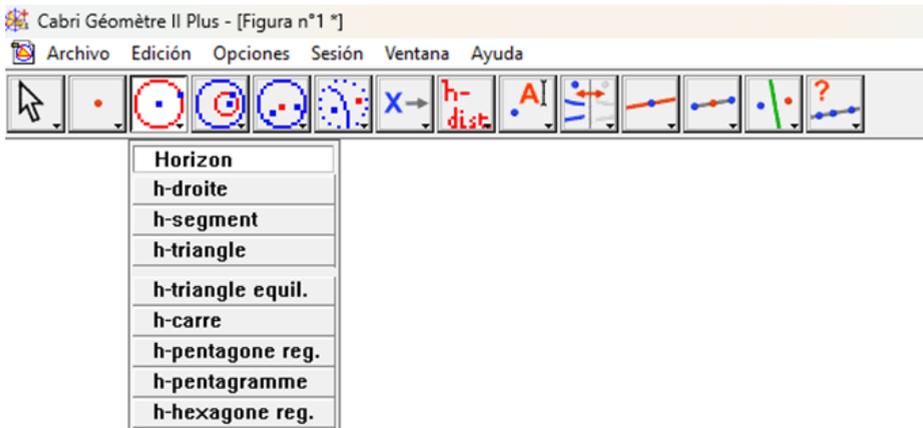


Figura 26. Menú Hiperbólico Cabri

Fuente: elaboración propia

Este menú (Figura 26), hace una mezcla selectiva del Modelo Sintético y el Disco de Poincaré. Lo primero por hacer es establecer la circunferencia horizonte  $H$ . Con este menú se puede construir el cuadrado, disponiendo un punto que es su centro y uno de sus vértices; sin embargo, la construcción de un cuadrado dados dos vértices consecutivos del mismo es más dispendiosa y deben seguirse los pasos que siguen, para los cuales, los objetos a disponer en el modelo Hiperbólico se escribirán con un h- como prefijo, y los que correspondan al modelo euclidiano, carecerán de ella. Al final, se puede establecer una macro, en que los objetos iniciales son los dos vértices contiguos y el círculo horizonte  $H$ .

Con esta macro podrá verificarse, por ejemplo, que el teorema de Varignon deja de cumplirse en la Geometría Hiperbólica, como la gran mayoría de hechos que se satisfacen en el Modelo Sintético.

Es pertinente verificar, por ejemplo, que la suma de los ángulos de cualquier triángulo deja de sumar dos rectos, que las longitudes de los lados de un cuadrado son iguales y muchas cosas que en una clase haremos, en torno del estudio de este modelo que, a todas luces, es simpático y divertido. Esta ya es la tarea que debe realizar por aparte cada estudiante.

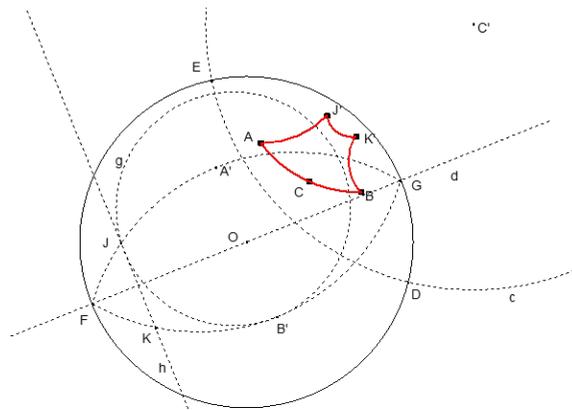


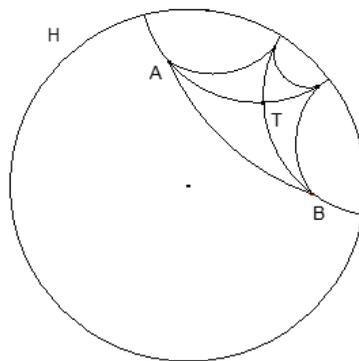
Figura 27. Macro construcción de un cuadrado dado su lado  
Fuente: elaboración propia

Los pasos de la construcción de un cuadrado dado su lado, son los siguientes:

- 1) Establecer el horizonte  $H$
- 2) Ubicar los extremos  $A$  y  $B$  del futuro lado del cuadrado. Se sugiere ubicarlos como se muestra en la figura que sigue.
- 3) Obtener el punto  $C$  como el h-punto medio entre  $A$  y  $B$ .
- 4) Determinar  $C'$ ; Punto Inverso de  $C$  respecto del círculo  $H$ .
- 5) Determinar los puntos  $D$  y  $E$  que son los puntos de tangencia desde  $C'$  respecto de la circunferencia  $H$ .
- 6) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $C'$  y que pasa por los puntos de tangencia  $D$  y  $E$ . Esta circunferencia servirá para una inversión.
- 7) Determinar los puntos  $A'$  y  $B'$  que son los inversos de  $A$  y de  $B$ , respecto del círculo  $c$ .
- 8) Trazar la mediatriz entre  $A'$  y  $B'$  a la que llamamos  $d$ .
- 9) Determinar los puntos  $F$  y  $G$  que son los puntos de intersección de la mediatriz  $d$  con la circunferencia horizonte  $H$ .
- 10) Trazar los arcos  $e(FA'G)$  y  $f(FB'G)$ .
- 11) Dibujar la h-circunferencia  $g$  de centro en  $A'$  que pasa por  $B'$ . Recuerde que los objetos h- (hiperbólicos) requieren señalar siempre el horizonte.

- 12) Determinar  $J$  como el punto de intersección entre el arco  $e(FA'G)$  y la h-circunferencia  $g$  más cercano a  $F$
- 13) Trazar por  $J$  la perpendicular  $h$  a la mediatriz  $d$ .
- 14) Obtener el punto  $K$  que es la intersección de la perpendicular  $h$  y el arco  $f(FB'G)$ .
- 15) Obtener los puntos  $J'$  y  $K'$  que son los inversos de  $J$  y  $K$  respecto de la circunferencia  $c$  que tiene centro en  $C'$  y pasa por los puntos de tangencia  $D$  y  $E$ .
- 16) Construir los h-segmentos  $AB, AJ', BK'$  y  $J'K'$ , con ello queda formado el cuadrado de lado inicial  $AB$ .
- 17) Configurar la macro construcción cuyos objetos iniciales son la circunferencia  $H$  y los puntos  $A$  y  $B$ , y los objetos finales, cada uno de los arcos configurados en el paso anterior. Verificar en este momento que la macro tiene orientación, es decir, depende del orden en que se señalen los puntos  $A$  y  $B$  (*Figura 27*).

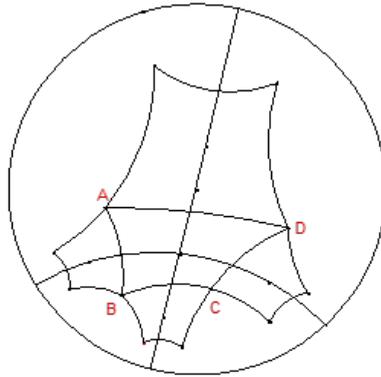
La siguiente construcción se ha conseguido desde la Macro-construcción establecida antes y en la que se ha calculado el centro del cuadrado  $T$  como punto de intersección de las h-bisectrices de los ángulos  $A$  y  $B$ . Ahora es pertinente establecer la macro con objetos iniciales círculo horizonte  $H$  y los puntos  $A$  y  $B$ , los arcos de los lados del cuadrado y el punto centro  $T$ , con los cuales se verificará el no cumplimiento del teorema de Varignon (*Figura 28*).



*Figura 28.* Ejemplo de uso de la macro cuadrado

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 29*, se ha utilizado la macro con todo centro y se ha verificado que, en efecto, el teorema de Varignon, como muchísimos teoremas de la Geometría Elemental, no se satisface.



*Figura 29.* Verificación del Teorema de Varignon

Fuente: elaboración propia

En este punto, y por analogía, deben repetirse los h- objetos que permiten construir las cónicas: parábola, elipse e hipérbola en el Disco de Poincaré. Este es un buen ejercicio, y en la medida que se incursiona y anima a utilizar de manera adecuada su recurso, aparecen resultados que asombran.

Finalmente, debe anotarse que, la Geometría Hiperbólica es poco intuitiva y que el progreso del mundo computacional y, en particular, de la existencia de software de Geometría Dinámica, como Cabrí II Plus y su Menú Hiperbólico, logran demostrar con gran capacidad que las diferentes definiciones de los objetos geométricos permiten establecer teoremas en cada una de las geometrías. En particular, en la Geometría Hiperbólica, por un punto, pueden pasar infinitas paralelas a una recta dada.

Con seguridad, todos los teoremas de paralelismo y perpendicularidad dejan de cumplirse, ya que, en el Modelo Elemental, estos objetos tienen carácter único y no múltiple, como en este tipo de Geometría No Euclidiana. Queda a la imaginación utilizar el trabajo realizado, por ejemplo, como ya se tiene la macro que construye cuadrados desde un lado del mismo,

asalta a la mente ver si se cumple el famoso teorema 47 del Libro I de *Los Elementos de Euclides*, conocido como el Teorema de Pitágoras y conocido siglos atrás por los Babilonios. Una mente ligeramente suspicaz asevera que no es posible su cumplimiento debido a que el teorema involucra perpendicularidades y paralelismo. Pero de otro lado, también el concepto de cuadrado cambia por el del cuadrilátero cerrado, tal que sus lados tienen la misma longitud y sus cuatro ángulos internos miden lo mismo. Igual, y como se apreciará enseguida, definir el concepto de triángulo equilátero, significa limitar tal objeto a una figura cerrada de tres lados que miden lo mismo y que sus ángulos internos tienen la misma amplitud. En los dos casos, las medias de los ángulos internos cambian en correspondencia con la posición de los vértices.

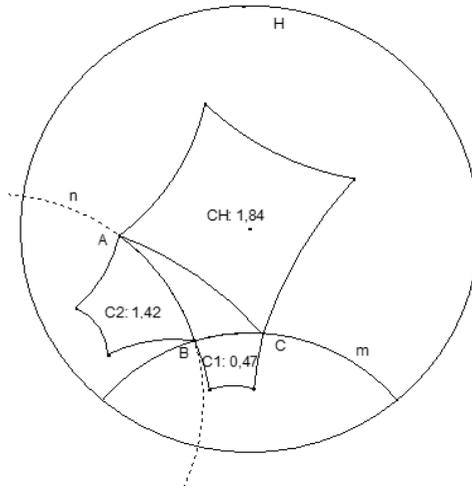


Figura 30. Verificación del Teorema de Pitágoras

Fuente: elaboración propia

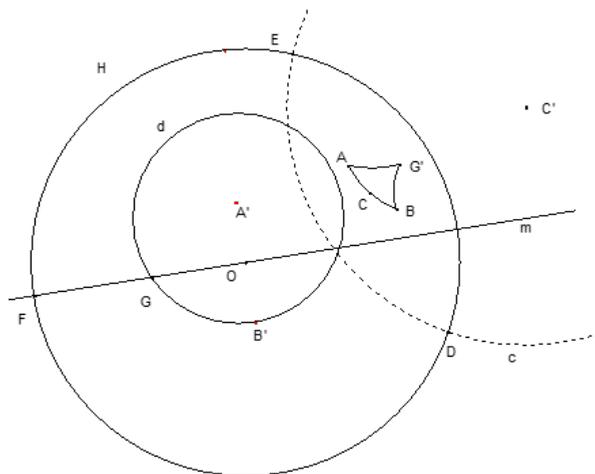
La Figura 30, muestra el diseño del triángulo rectángulo  $ABC$ , ya que los vértices  $B$  y  $C$  yacen en la recta  $m$  y el otro vértice  $A$  en la recta  $n$  que es perpendicular a  $m$  en el vértice  $B$ . Los tres vértices pueden modificar su posición en las rectas. Al calcular las áreas de los cuadrados construidos al exterior sobre cada uno de los lados del triángulo, resulta claro que las áreas de los cuadrados  $C_1$  y  $C_2$  jamás suman el área del cuadrado  $CH$  construido sobre la hipotenusa del mismo. También se ha utilizado el re-

curso que, incluso en este modelo Hiperbólico, se satisface el principio de que el área de un cuadrado es el doble que de cualquiera de los triángulos formados por cualquiera de sus diagonales; entre otras, porque el Menú Hiperbólico solo puede calcular áreas de triángulos.

Y siempre así, una vez construidos los elementos accesorios como estas macros, debe dárseles uso siendo que la matemática tiene carácter involutivo, es decir, los objetos mantienen su existencia al ser utilizados en nuevos objetos matemáticos.

### 1.2.3.2. Macro de un triángulo equilátero dado su lado

De forma similar a la construcción anterior, se puede diseñar la macro de la construcción de un triángulo equilátero, con su centro, y verificar con ella si se cumple el Teorema de Napoleón o la forma de trisecar un segmento (*Figura 31*). El algoritmo aquí descrito, es más complejo que el que puede desarrollarse al tener a la mano el Menú Hiperbólico Cabrí; con este menú, puede hacerse la tarea con sus herramientas en un menor número de pasos.



*Figura 31.* Macro de elaboración de un triángulo equilátero dado su lado  
Fuente: elaboración propia

Los pasos a seguir son los siguientes:

- 1) Establecer el horizonte  $H$
- 2) Ubicar los extremos  $A$  y  $B$  del futuro lado del triángulo. Se sugiere ubicarlos como se muestra en la figura anterior.
- 3) Obtener el punto  $C$  como el h-punto medio entre  $A$  y  $B$ .
- 4) Determinar  $C'$  como Punto Inverso de  $C$  respecto del círculo  $H$ .
- 5) Determinar los puntos  $D$  y  $E$  que son los puntos de tangencia desde  $C'$  respecto de la circunferencia  $H$ .
- 6) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $C'$  y que pasa por los puntos de tangencia  $D$  y  $E$ . Esta circunferencia servirá para una inversión.
- 7) Determinar los puntos  $A'$  y  $B'$  que son los inversos de  $A$  y de  $B$ , respecto del círculo  $c$ .
- 8) Trazar la mediatriz entre  $A'$  y  $B'$  a la que llamamos  $m$ .
- 9) Dibujar la h-circunferencia  $d$  de centro en  $A'$  que pasa por  $B'$ .  
Recuerde que los objetos h- (hiperbólicos) requieren señalar siempre el horizonte.
- 10) Determinar  $G$  como el punto de intersección entre la mediatriz  $m$  y la h-circunferencia  $d$  más cercano a  $F$ . El punto  $F$  es la intersección de la mediatriz  $m$  y la h-circunferencia  $d$ .
- 11) Obtener el punto  $G'$  que es el inverso de  $G$  respecto de la circunferencia  $c$  que tiene centro en  $C'$  y pasa por los puntos de tangencia  $D$  y  $E$ .
- 12) Construir los h-segmentos  $AB$ ,  $AG'$  y  $BG'$  y con ello queda configurado el triángulo equilátero de lado inicial  $AB$ .
- 13) Configurar la macro construcción, cuyos objetos iniciales son la circunferencia  $H$  y los puntos  $A$  y  $B$  y los objetos finales, cada uno de los arcos configurados en el paso anterior. Verificar en este momento que la macro tiene orientación, es decir, depende del orden en que se ubiquen los puntos  $A$  y  $B$ , como se indica enseguida (*Figura 32*).

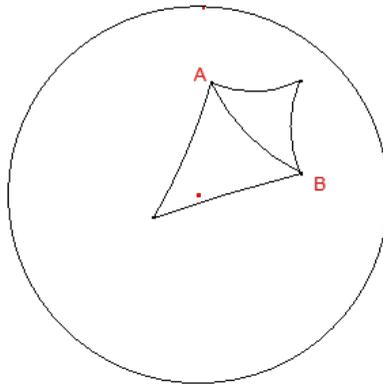


Figura 32. Prueba de la orientación de la macro

Fuente: elaboración propia

Activando la macro se trazan dos medianas a la usanza euclídea y se determina el centro del triángulo  $T$ , como lo indica la Figura 33.

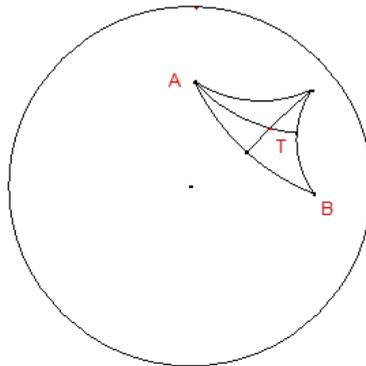
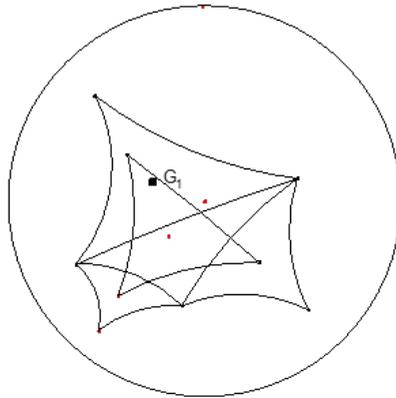


Figura 33. Centro de gravedad de un triángulo

Fuente: elaboración propia

Desde la Figura 33 y, como es debido, con los objetos iniciales  $A$  y  $B$  y el horizonte  $H$  se diseña una nueva macro de objetos finales, el triángulo equilátero y su centro.

Ya está todo dispuesto para verificar si se cumple el Teorema de Napoleón (Diaz, 2012).

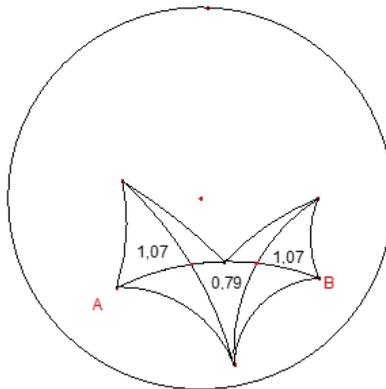


*Figura 34.* Verificación del Teorema de Napoleón

Fuente: elaboración propia

Es claro que, uno de los centros de gravedad es  $G_1$ , que no es vértice del triángulo equilátero que diseñan los otros dos centros de gravedad de los triángulos equiláteros por el exterior a un triángulo cualquiera (*Figura 34*).

Por último, veamos la efectividad o no de la forma regular en la Geometría Euclidiana, de partir un segmento en tres partes iguales con el recurso del triángulo equilátero.

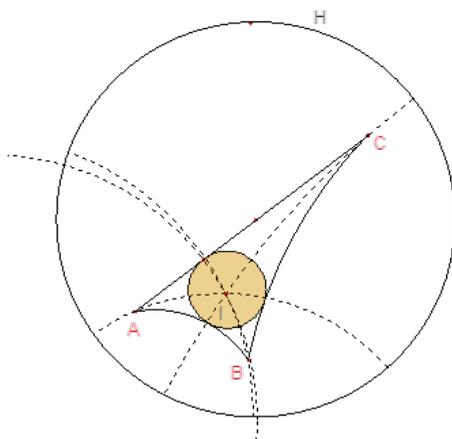


*Figura 35.* Trisección de un segmento

Fuente: elaboración propia

Bueno, tampoco se satisface este procedimiento de trisecar un segmento (*Figura 35*), y claro, por una fuerte razón (el Quinto Postulado), este modelo deja de ser euclidiano y puede asegurarse que, en consecuencia, un alto porcentaje de los resultados que aprendimos en la Geometría Elemental, dejan de cumplirse. Buena disculpa para seguir incursionando en este estudio del que sus creadores, el ruso Nikolái Lobachevsky (1793-1856) y el húngaro János Bolyai (1802-1860) formularon de manera independiente y se convirtió en el primer sistema de Geometría No Euclidiana, y por ello, son oficialmente considerados los fundadores de la Geometría Hiperbólica. Los dos, indudablemente, rebatiendo el Quinto Postulado de las Paralelas, construyeron casi de la nada, un paraíso al que todos podemos entrar y, ya dentro, nadie nos podrá sacar de allí.

De hecho, varios de los procedimientos geométricos y teoremas euclidianos siguen siendo válidos, tal es el caso, por ejemplo, de la certeza del teorema de la concurrencia de la h-bisectrices de un triángulo arbitrario  $ABC$ . El punto de concurrencia es el punto  $I$  y desde allí se traza una h-perpendicular a cualquiera de los lados, se calcula el punto de intersección de tal perpendicular con el h-segmento respectivo y con ello ya se define el h-círculo que se convierte en el incentro de la circunferencia inscrita al triángulo. Esto se observa en la *Figura 36*.

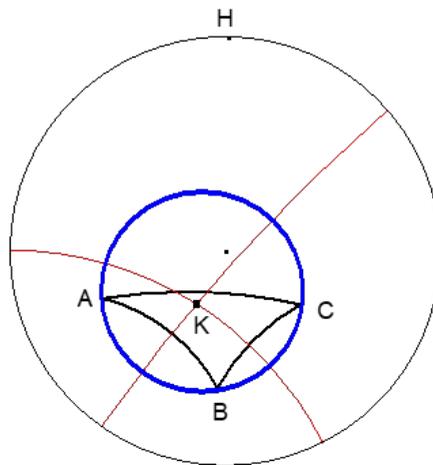


*Figura 36.* Inscripción de una circunferencia en un triángulo  
Fuente: elaboración propia

Para seguir aprovechando el recurso y animarnos a perseverar en su estudio, calculemos el circuncentro que, como se sabe, es el punto de concurrencia de las tres mediatrices a los lados de un triángulo cualquiera. En este caso, se debe utilizar la herramienta h-mediatrix y, calculado el h-punto excírculo, se traza la h-circunferencia respectiva (*Figura 37*).

Y verificar que también las medianas concurren en su centro de gravedad  $G$  para cualquier triángulo  $ABC$ ; solo hay que recordar que, por analogía, en estas construcciones se deben emplear las herramientas hiperbólicas, salvo que se diga lo contrario, como ocurrió en la construcción de un cuadrado y de un triángulo equilátero, dados sus lados.

Recuerde en este caso, del conveniente uso de las herramientas h-punto medio, para calcular los puntos medios de cada lado del triángulo  $ABC$  y, enseguida, h-segmento.



*Figura 37*; Circunferencia excrita a un triángulo

Fuente: elaboración propia

Con esta construcción es factible verificar si los centros de gravedad de todos los triángulos que, teniendo igual base entre paralelas, tienen la misma área, entonces describe como lugar geométrico una recta (*Figura 38*).

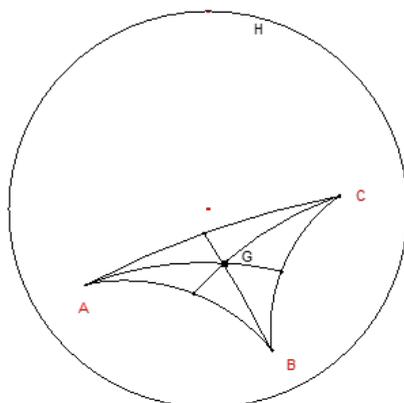


Figura 38. Centro de gravedad de un triángulo

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 39*, se observa que el lugar geométrico deja de ser una recta y tiene un punto de inflexión, lo que enseña que, de ninguna manera el área de triángulos de igual base entre dos paralelas, tiene la misma área.

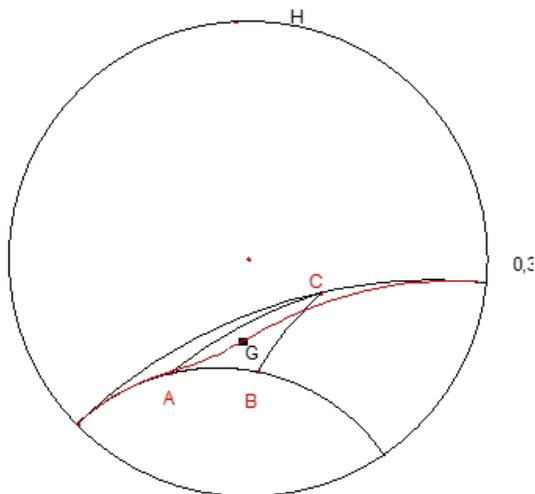
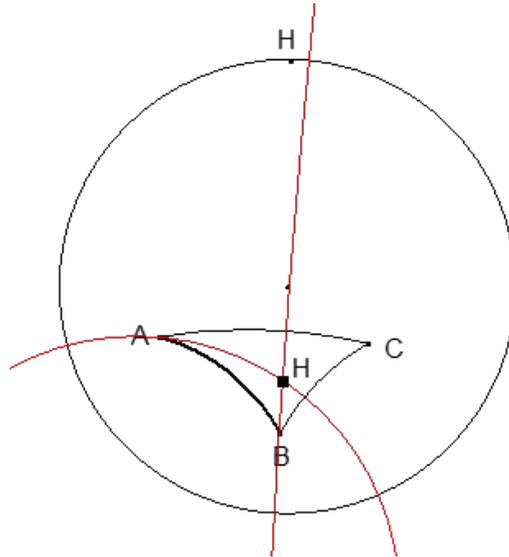


Figura 39. Triángulos de igual área

Fuente: elaboración propia

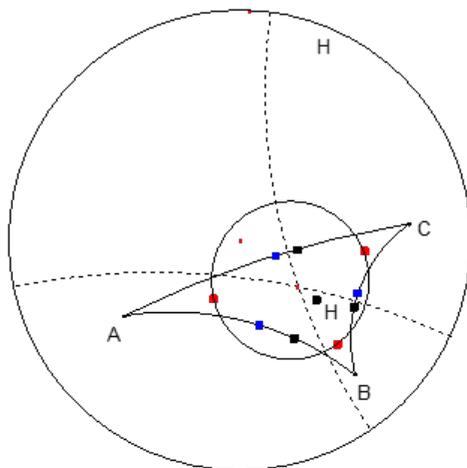
De los cuatro puntos notables de un triángulo (en realidad ahora son más de 46.000) falta verificar la concurrencia de las alturas de un triángulo; recordemos que tal punto se denomina ortocentro y se representa con la letra  $H$  que se ha utilizado en este esbozo de ensayo para llamar al horizonte. Esta repetición cacofónica se utiliza también aquí (*Figura 40*).



*Figura 40.* Cálculo del ortocentro

Fuente: elaboración propia

Dado el carácter de concurrencia que se cumple a satisfacción y cabalidad en los triángulos arbitrarios dentro del Disco de Poincaré, modelo de la Geometría Hiperbólica, están listas las herramientas para ver si también el afamado círculo de los nueve puntos, como teorema de la Geometría Elemental, tiene cabida aquí. Los nueve puntos son los tres puntos medios del triángulo, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos, los tres vértices con el ortocentro del triángulo (*Figura 41*).



*Figura 41.* El círculo de los nueve puntos

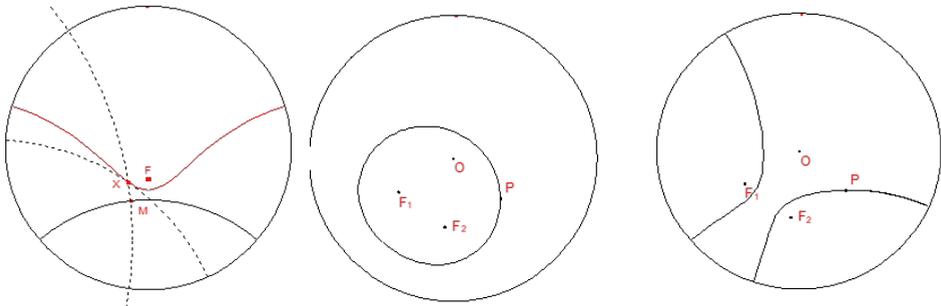
Fuente: elaboración propia

Se evidencia en la *Figura 41*, la no satisfacción del teorema de la circunferencia de los nueve puntos.

Fíjese que se ha tomado la h-circunferencia que pasa por los puntos medios entre los vértices y el ortocentro, y ella no contiene a ninguno de los puntos medios de los lados ni a los pies de las alturas.

¿Y qué se puede decir de las cónicas?

Las secciones cónicas (*Figura 42*) dependen de la métrica que soportan su contexto; como ya se dijo antes, en la métrica del taxista, por ejemplo, ellas resultan escalofriantemente sorprendentes y, de hecho, en la Geometría Hiperbólica y en el modelo que representa, ya sea el semiplano hiperbólico, el Disco de Poincaré u otro, las secciones cónicas maravillarán por su apariencia. Estas curvas se consiguen por analogía de su construcción en el Modelo Sintético y, en consecuencia, su profesor explicará la construcción Cabrí para el Modelo Sintético y ustedes harán lo particular, y especial, con el empleo de las h- herramientas respectivas, para conseguir los lugares geométricos correspondientes.

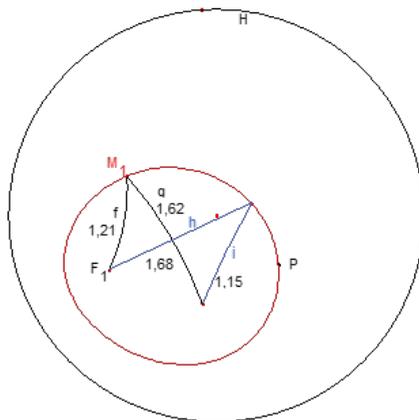


Una parábola de foco  $F$     *Elipse de focos  $F_1$  y  $F_2$  por  $P$*     *Hipérbola de focos  $F_1$  y  $F_2$  por  $P$*

*Figura 42. Las cónicas*

Fuente: elaboración propia

Una tarea que evita la suspicacia del no cumplimiento de la definición de las cónicas que se mantiene en cada uno de los espacios métricos, es la de medir. Esto se deja como tarea, pero se expone el ejemplo de la elipse de focos  $F_1$  y  $F_2$  que pasa por el punto  $P$  del que se han tomado los segmentos desde dos puntos  $M_1$  y  $M_2$  de la curva. Estos puntos pueden ubicarse en cualquier parte y, como se evidencia en la *Figura 43*, sus sumas respectivas desde estos puntos a los focos siempre miden lo mismo.



*Figura 43. Verificación de un teorema*

Fuente: elaboración propia

### 1.3. ANALOGÍAS

El abanico de herramientas del que nos hemos dotado, es propicio para elaborar un estudio análogo de algunos hechos que se cumplen en la Geometría Elemental, en comparación con lo que pueda o no cumplirse en la Geometría Hiperbólica dentro del modelo del Disco de Poincaré y animar al lector a buscar analogías personales.

**Ejemplo 1: verificar si los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo**

En el libro de Lehmann (1974), se propone demostrar analíticamente que los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

Este ejemplo es una muestra de la necesidad de redefinir el concepto de paralelogramo en la Geometría Hiperbólica y dentro del Disco; debe tratarse ahora, de un cuadrilátero tal que, los dos pares de lados opuestos tengan la misma medida y los pares de ángulos opuestos hagan lo propio; es decir, tengan la misma amplitud.

Y ello puede corroborar desde el *Menú Hiperbólico Cabrí*.

A continuación, aparece un esbozo de que esto se cumple en el Plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  (Figura 44).

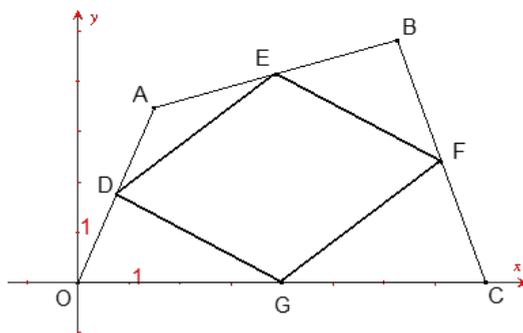
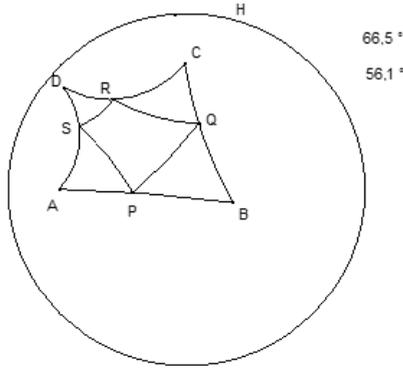


Figura 44. Teorema de los puntos medios de un cuadrilátero  
Fuente: elaboración propia

Y ahora se examina por la vía de la inspección, si se cumple el resultado por la vía de las mediciones en un Disco de Poincaré.



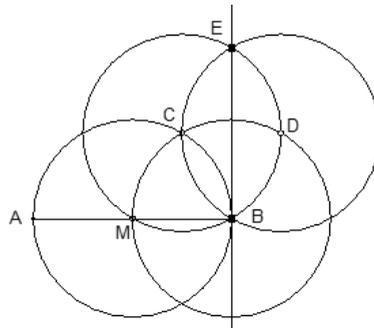
*Figura 45.* Teorema de los puntos medios de un cuadrilátero en el disco

De hecho, este resultado deja de ser satisfactorio en la Geometría Hiperbólica; fíjese que solo se han tomado las medidas de dos ángulos opuestos y se observa que dejan de ser iguales (*Figura 45*).

En todo lo previo, se ha realizado un estudio comparativo de algunos hechos, evidenciando algunos que no se cumplen, como el Teorema de Pitágoras, el de Varignon y el de Napoleón; y otros que sí son satisfactorios, como los teoremas de concurrencia de las líneas notables de un triángulo.

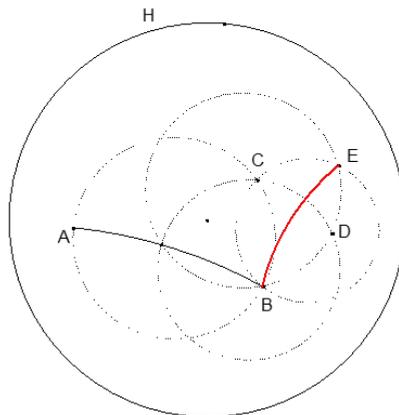
***Ejemplo 2: perpendicular a un segmento dado por uno de los extremos***

El espíritu humano creativo e inquisidor, hace posible comparar por analogía el ámbito de los procedimientos que se realizan dentro del dibujo técnico, como el ejemplo que se presenta aquí, de la construcción de un segmento o línea perpendicular a un segmento dado por uno de los extremos. El caso es simpático, pues obedece a una secuencia finita de circunferencias de igual radio que tienen al extremo *B*, por el que se trazará la perpendicular, como una especie de punto fijo. Con cuatro circunferencias se obtiene lo buscado (*Figura 46*).



*Figura 46.* Perpendicular a un segmento por un extremo  
Fuente: elaboración propia

Dado el segmento  $AB$ , se determina su punto medio  $M$  y se traza con centro en  $M$  la primera circunferencia de diámetro  $AB$ . Enseguida y con centro en  $B$ , se traza la circunferencia que pasa por  $M$ . Estas dos circunferencias se cortan en el punto  $C$ , que se toma como centro de una nueva circunferencia que también pasa por  $B$ , que se corta con aquella centrada en  $C$  en el punto  $D$ , que sirve como centro de una nueva circunferencia pasando por  $B$ . Las circunferencias centradas en  $C$  y  $D$  determinan a  $E$  como punto de intersección. La recta  $BE$ , el segmento  $BE$  o la semirrecta  $BE$  es el elemento lineal perpendicular al segmento  $AB$  en el extremo  $B$  (*Figura 47*).

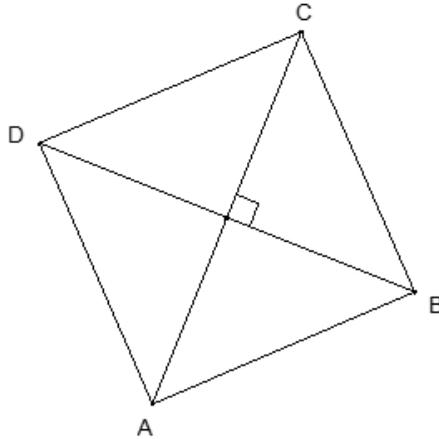


*Figura 47.* Perpendicular a un segmento por un extremo  
Fuente: elaboración propia

Siguiendo los pasos con las herramientas hiperbólicas h-segmento, h-circunferencia y h-perpendicular, se verifica el incumplimiento de la perpendicular entre los elementos lineales que se han trazado.

***Ejemplo 3: diagonales de un cuadrado***

Se sabe que, las diagonales de un cuadrado se cortan en forma perpendicular, como se ve en la *Figura 48*.

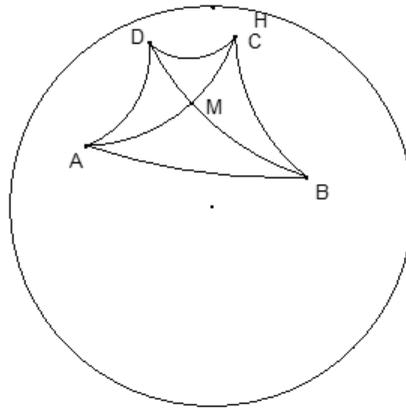


*Figura 48.* Diagonales de un cuadrado

Fuente: elaboración propia

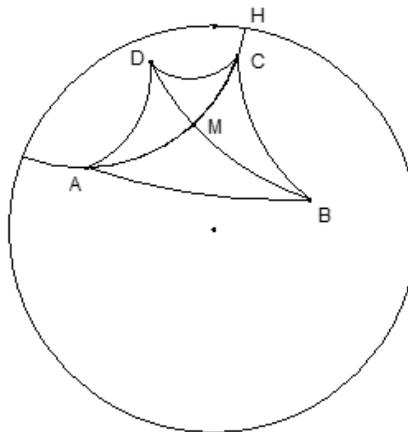
Es el momento oportuno de sacar el archivo de la construcción paso a paso de un cuadrado, cuando se conocen dos vértices consecutivos y, verificar si sus diagonales son o no perpendiculares. Fíjese que la herramienta h- carre del Menú hiperbólico Cabrí, traza los lados de un cuadrado hiperbólico con el primer punto como centro de gravedad del mismo y, el segundo punto, uno de sus vértices, y por ello, no tiene la efectividad que se necesita para resolver ciertos problemas.

En la *Figura 49*, se ha diseñado un cuadrado de lado  $AB$  con sus diagonales  $AC$  y  $BD$ .



*Figura 49.* Diagonales de un cuadrado en el disco  
Fuente: elaboración propia

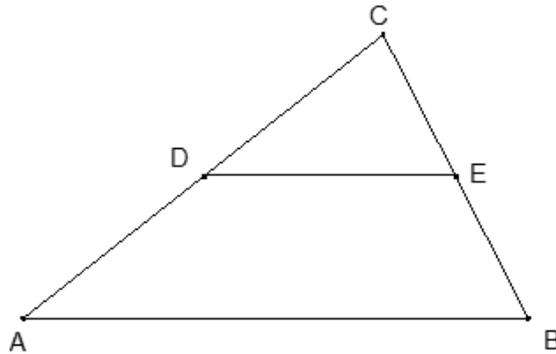
Al ejecutar la Macro respectiva (Que no está en el núcleo del Menú hiperbólico Cabré pero que se ha construido para el ejercicio personal) se ve, a continuación, cómo la perpendicular trazada a la diagonal  $BD$  absorbe a la diagonal  $AC$ , con lo cual, se evidencia la satisfacción del resultado; es decir, las diagonales de un cuadrado, en la Geometría Hiperbólica se cortan de manera perpendicular. Además, las dos diagonales se cortan en su punto medio  $M$  (*Figura 50*).



*Figura 50.* Diagonales de un cuadrado en el disco  
Fuente: elaboración propia

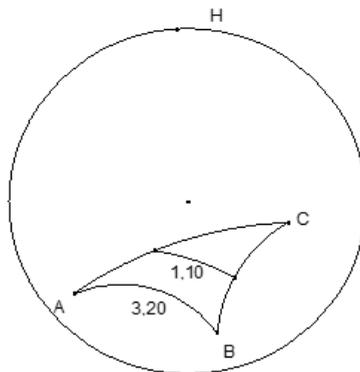
**Ejemplo 4: segmento de los puntos medios de los lados de un triángulo**

Verifiquemos si, el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo, mide la mitad del lado no tocado. En el modelo analítico, también puede demostrarse con generalidad, que tal segmento es paralelo al lado contrario al de los puntos medios (*Figura 51*).



*Figura 51.* El segmento de los puntos medios de los lados de un triángulo  
Fuente: elaboración propia

En la *Figura 51*, se ha representado lo que es evidente en el Modelo Euclídeo. el segmento *DE* es paralelo al lado *AB* del triángulo *ABC* y mide la mitad del mismo.



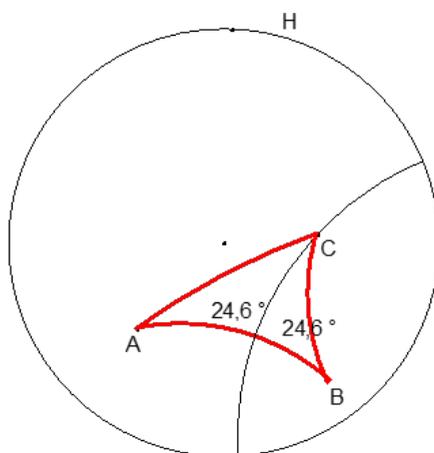
*Figura 52.* El segmento de los puntos medios  
Fuente: elaboración propia

Y ocurre lo esperado. La forma de medir distancia en el modelo del Disco de Poincaré, depende del seno hiperbólico y, en concordancia con ello, es imposible que se satisfaga el teorema, salvo en casos especiales (*Figura 52*).

***Ejemplo 5: ángulos opuestos de un triángulo isósceles***

En estos últimos ejemplos, abandonamos la evidencia de la satisfacción del resultado en el Modelo Euclídeo y solo nos referimos de manera escueta al modelo Hiperbólico, indicando de manera somera aspectos referidos a su construcción, cuando se considere necesario.

Verifiquemos si los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales (*Figura 53*).

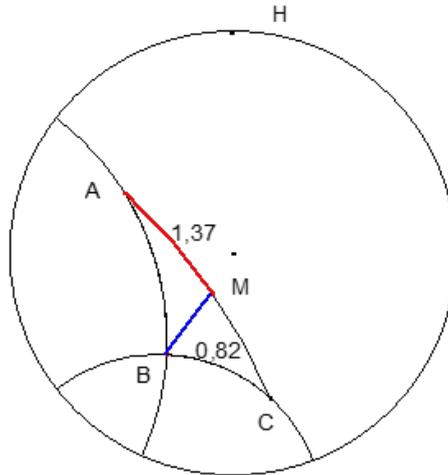


*Figura 53. Ángulos opuestos de un triángulo isósceles*  
Fuente: elaboración propia

En esta construcción, dado el segmento  $AB$ , el punto  $C$ , vértice del triángulo isósceles, pertenece a la mediatriz del segmento  $AB$ . Dentro de la plantilla Cabrí, dinamizar  $C$ , señala al tiempo, la veracidad de este teorema en el modelo Hiperbólico. Es de recordar que la mediatriz entre dos puntos es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellos.

**Ejemplo 6: punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo**

Verifiquemos en este momento si el punto medio de la hipotenusa de todo triángulo rectángulo, equidista de los tres vértices del triángulo.

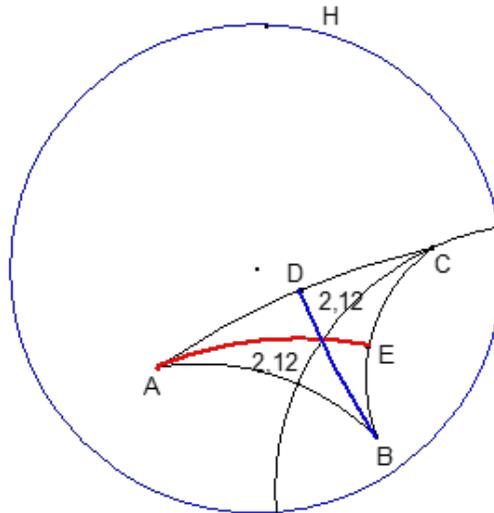


*Figura 54.* El punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo  
Fuente: elaboración propia

La construcción obedece al uso de la macro descrita aquí, para ubicar al interior del horizonte  $H$  dos líneas perpendiculares y lograr que todos los triángulos  $ABC$ , donde  $B$  es el punto de intersección de las perpendiculares, sean rectangulares, y tomado el punto medio  $M$  del h- segmento  $AC$ , verificar que la distancia de  $M$  a  $B$ , es distinta que la de entre los puntos  $M$  y  $A$ . Esto indica que el teorema no es válido en el modelo Hiperbólico. En este caso, un solo ejemplo, basta para asegurar lo negativo (*Figura 54*).

**Ejemplo 7: medianas a los lados iguales de un triángulo isósceles**

Verifiquemos si las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales en su dimensión de longitud.

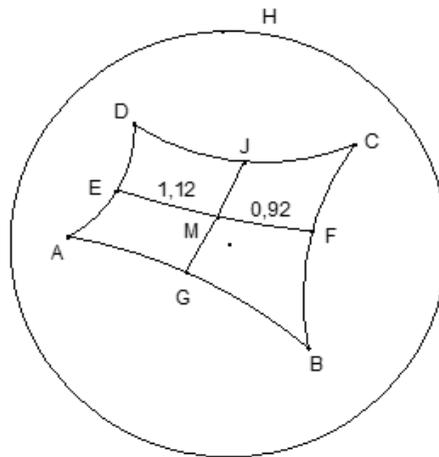


*Figura 55.* Un teorema para los triángulos isósceles  
Fuente: elaboración propia

La construcción elaborada, verifica la veracidad de la sentencia; además, en el archivo Cabrí correspondiente, el dinamismo permite verificar su verdad en los infinitos casos posibles. De modo que su certeza depende de las argucias lógicas, pues en matemáticas, infinitas posibilidades ciertas no demuestran positivamente un enunciado, pero un solo ejemplo que contravenga, demuestra negativamente un enunciado. Este es un aspecto rico de las matemáticas y de sus cuantificadores (*Figura 55*).

***Ejemplo 8: teorema de los puntos medios de un cuadrilátero***

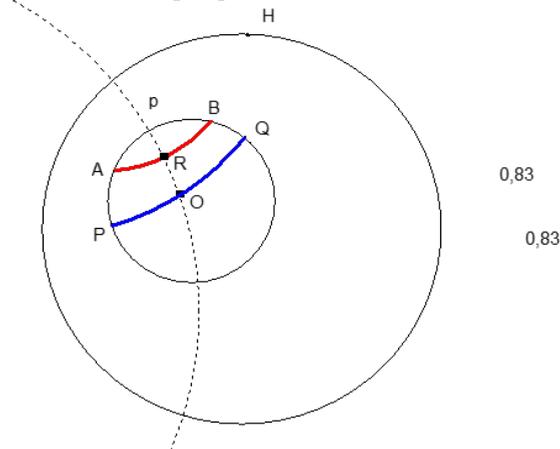
Examinemos la veracidad del teorema euclidiano que asegura que, los segmentos que unen los puntos medios de cada par de lados opuestos de cualquier cuadrilátero, se bisecan entre sí.



*Figura 56. Un teorema de los puntos medios de un cuadrilátero  
Fuente: elaboración propia*

Dado el cuadrilátero  $ABCD$  en el  $H$  horizonte, se han calculado sus puntos medios  $E, F, G$  y  $J$ , y los segmentos  $GJ$  y  $EF$ , y se ha ubicado su punto de corte  $M$ . El solo hecho que los segmentos  $EM$  y  $MF$  tengan diferente medida, dan testimonio del incumplimiento del mencionado teorema (*Figura 56*).

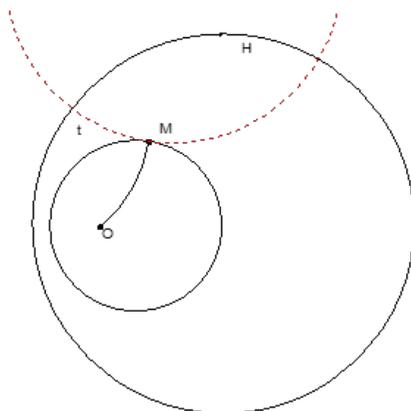
***Ejemplo 9: todo diámetro perpendicular a una h-cuerda, la biseca***



*Figura 57. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la biseca  
Fuente: elaboración propia*

En la *Figura 57*, el arco  $p$ , punteado contiene al diámetro perpendicular a la  $h$ - cuerda  $AB$  y, en efecto, se cortan en el punto  $R$ , que es el punto medio del segmento  $AB$ . Esto se traduce en el teorema que afirma que todo diámetro perpendicular a una cuerda, la biseca.

***Ejemplo 10: tangente a una  $h$ -circunferencia por un punto de ella***



*Figura 58.* Tangente a una  $h$ -circunferencia por un punto de ella  
Fuente: elaboración propia

Por asociación, conseguir la  $h$ -recta tangente  $t$  a una  $h$ -circunferencia de centro en  $O$ , por un punto  $M$  de ella, consiste en trazar la  $h$ -perpendicular por  $M$  al  $h$ -radio  $OM$  (*Figura 58*).

Al tener la  $h$ -tangente a una  $h$ -circunferencia, se piensa en la curva pedaleada correspondiente, con solo recordar que la curva pedaleada asociada a una curva, en especial a una cónica, es el lugar descrito por el pie de la perpendicular lanzada desde un punto a la tangente correspondiente, referida a la curva. En el caso presente, desde el punto  $P$  se traza la  $h$ -perpendicular a la tangente  $t$  de la circunferencia. La tangente  $t$  y la perpendicular  $m$  desde  $P$ , determinan el punto de intersección  $X$ . Llegado a este punto y calcular el lugar geométrico que describe  $X$  al dinamizar  $M$ , es todo uno, y fíjese que la mente queda corta en su imaginario al prever la curva resultante y que se muestra a continuación, y de la que es válida, tan solo, la parte contenida al interior del horizonte  $H$  (*Figura 59*).

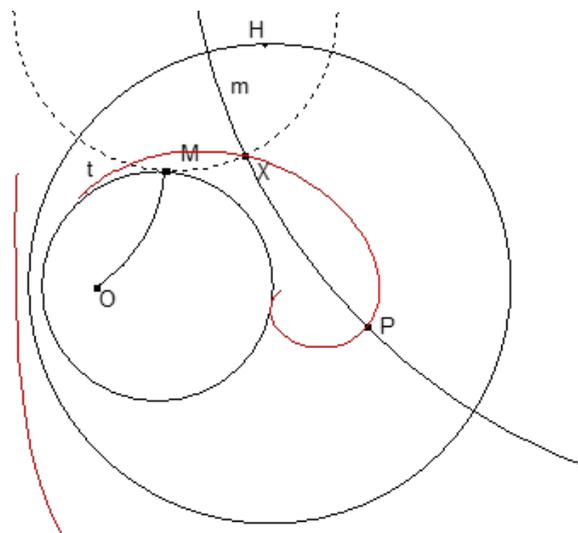


Figura 59. Curva pedal referido a una h-circunferencia  
Fuente: elaboración propia

**Ejemplo 11: línea de los centros de dos h-circunferencias secantes**

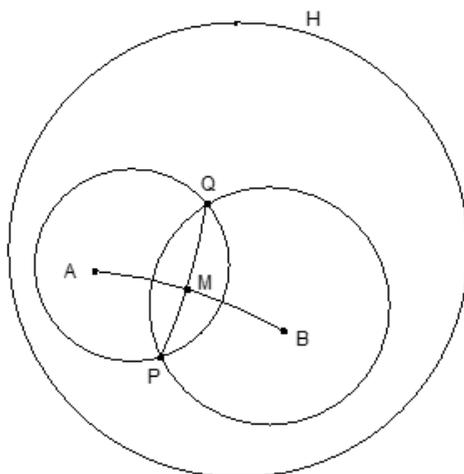
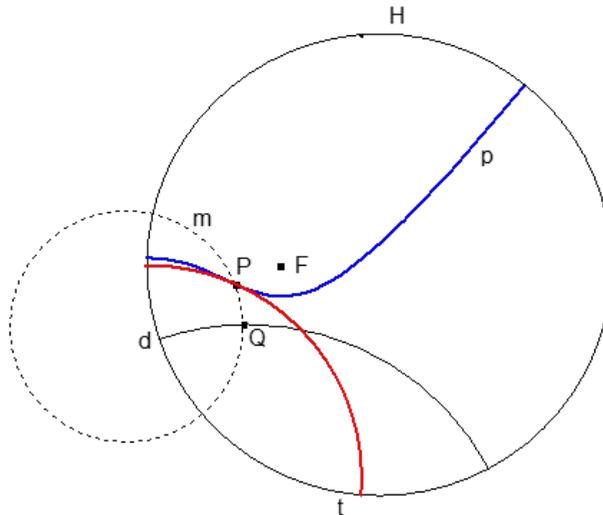


Figura 60. Línea de lo centros biseca a la cuerda común de dos h-circunferencias  
Fuente: elaboración propia

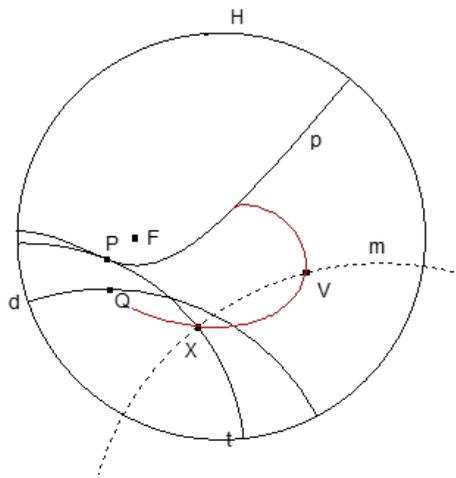
La *Figura 60*, es el montaje del modelo que asegura que, la línea de los centros de dos h-circunferencias secantes, corta a la cuerda común en su punto medio.

***Ejemplo 12: h-recta tangente a una h-parábola***



*Figura 61.* h-recta tangente a una h-parábola por uno de sus puntos  
Fuente: elaboración propia

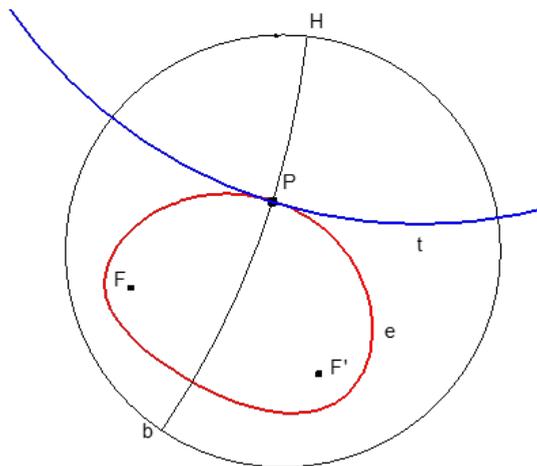
Este ejemplo indica el procedimiento del cálculo de la h-recta tangente  $t$  a una h-parábola  $p$ , por un punto  $P$  arbitrario de ella. La h-recta  $m$  es perpendicular a la directriz de la parábola  $d$  por el punto  $P$ , lo que determina el punto  $Q$ , pie de tal perpendicular. En la Geometría Elemental, la tangente, como aquí, es la bisectriz del ángulo  $QPF$ , siendo  $F$  el foco de la parábola (*Figura 61*).



*Figura 62.* Curva pedal referido a una h-parábola  
Fuente: elaboración propia

De nuevo, se ha calculado la Curva Pedal correspondiente a la parábola  $p$  desde el punto de vista  $V$  al interior del h-círculo horizonte  $H$ . El resultado, debe ser similar al que se muestra en la Figura anterior (*Figura 62*).

***Ejemplo 13: h-tangente a una h-elipse por uno de sus puntos***



*Figura 63.* h-tangente a una h-elipse por uno de sus puntos  
Fuente: elaboración propia

En este ejemplo, se evidencia la efectividad del procedimiento del cálculo de la recta tangente a una elipse  $e$ , por un punto  $P$  que pertenece a ella. Solo se debe recordar que, en el modelo elemental corriente, la tangente  $t$ , es perpendicular a la bisectriz formada por los radios focales  $PF$  y  $PF'$ , donde  $P$  es un punto cualquiera de la elipse  $e$  de focos  $F$  y  $F'$  (Figura 63).

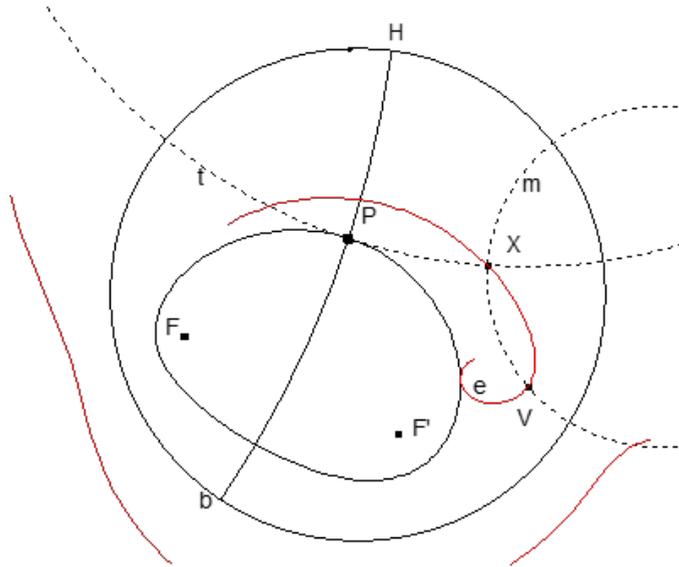
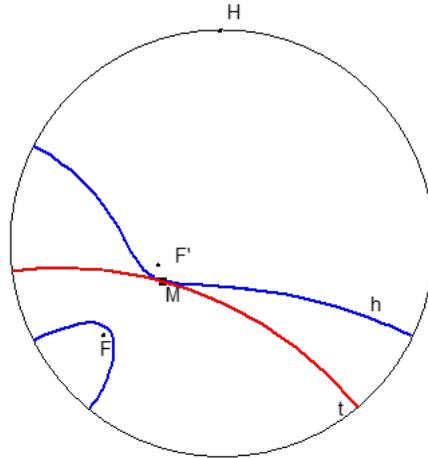


Figura 64. Curva pedal referido a una h-elipse

Fuente: elaboración propia

Al tener la tangente a una elipse por un punto de ella, la mente lucubra conseguir por asociación, la Curva Pedal, calculada desde un punto  $V$  arbitrario. El resultado obedece a un lugar geométrico como el que se presenta en la Figura 64, en la que, su existencia se restringe al interior de la circunferencia horizonte  $H$ .

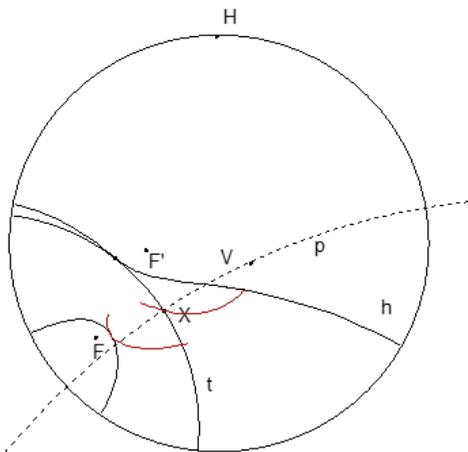
**Ejemplo 14: tangente a una h-hipérbola por uno de sus puntos**



*Figura 65.* Tangente a una h-hipérbola por uno de sus puntos

Fuente: elaboración propia

El cálculo de la h-tangente  $t$  a una h-hipérbola  $h$  por un punto  $P$  que pertenece a ella, se ejecuta siguiendo el proceso análogo al caso analítico, que asegura que, la recta tangente es la bisectriz del ángulo focal  $FPF'$ , siendo  $P$  un punto de ella (*Figura 65*).

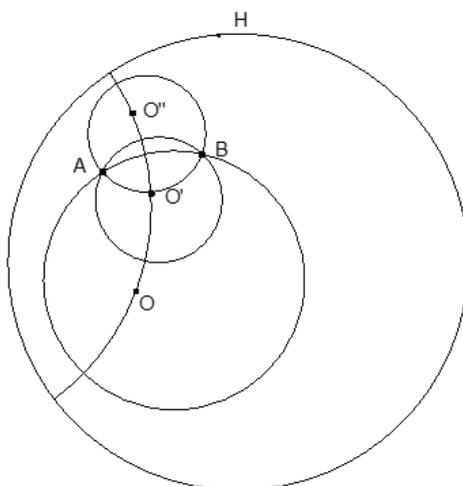


*Figura 66.* Curva pedal referido a una h-hipérbola

Fuente: elaboración propia

La Curva Pedal referido a una hipérbola, lanzada desde un punto  $V$  al interior del horizonte  $H$ , debe verse como en la *Figura 66*. Desde allí, puede inferirse que el ejercicio de abstracción mental es grande, comparado con el objeto análogo al plano cartesiano. Por fortuna, existen aplicativos como Cabrí II Plus y GeoGebra, que permiten de inmediato, obtener la curva correspondiente, haciendo que la mente se ocupe de operaciones más significativas, ya que la liberan del esfuerzo que implica alcanzar resultados como el expuesto.

***Ejemplo 15: alineación de centros de circunferencias***



*Figura 67.* Alineación de los centros de circunferencias que pasan por dos puntos fijos de otra circunferencia

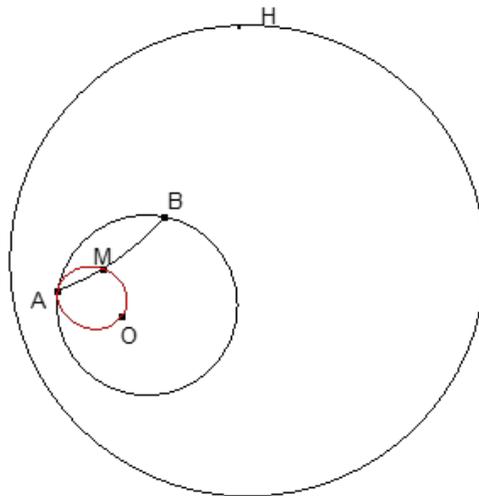
Fuente: elaboración propia

Los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos fijos de una circunferencia están alineados. Para verificar este hecho, en la  $h$ -circunferencia de centro en  $O$  se han fijado los puntos  $A$  y  $B$ , y destacado las circunferencias de centro en  $O'$  y  $O''$  que pasan por estos dos puntos. La recta a la que pertenecen los centros  $O$ ,  $O'$  y  $O''$ , es la  $h$ -mediatriz  $m$  entre los puntos  $A$  y  $B$  (*Figura 67*).

**Ejemplo 16: lugar geométrico definido por el punto medio de una cuerda**

En este ejemplo se evoca el resultado que asegura que el lugar geométrico de los puntos medios de una cuerda a una circunferencia que mantiene fijo uno de sus extremos, es también una circunferencia que pasa por su centro.

Dada la  $h$ - circunferencia de centro en  $O$  en el horizonte  $H$ , se ha trazado una cuerda  $AB$ . Al mantener fijo el extremo  $A$  y móvil el extremo  $B$ , el punto medio  $M$  de la cuerda, describe una circunferencia que contiene al punto  $O$  como uno de sus puntos (*Figura 68*).



*Figura 68.* Lugar geométrico definido por el punto medio de una cuerda  
Fuente: elaboración propia

**Ejemplo 17: repetición de un segmento en una dirección dada**

Para repetir un segmento  $AB$  en la dirección de una semirrecta  $CD$ , como se muestra en el paso inicial de la *Figura 69*, se debe proceder así.

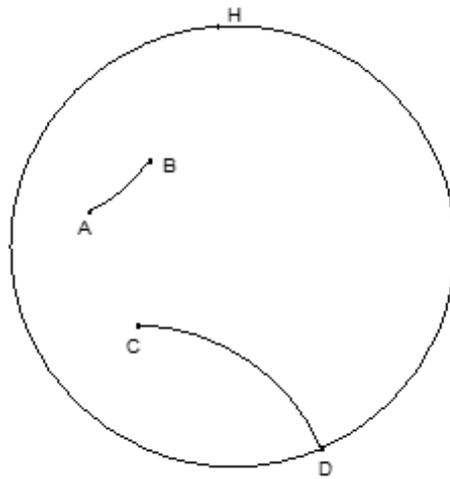
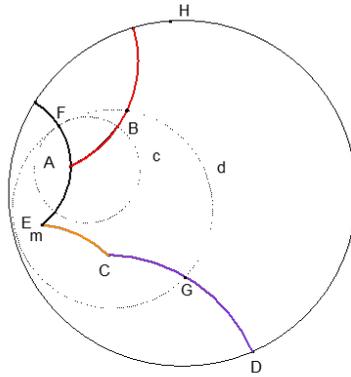


Figura 69. Punto de partida de la repetición de un segmento en una dirección dada

Fuente: elaboración propia

- 1) Construir el triángulo equilátero de lado  $CA$ , con lo que se encuentra el vértice  $E$ , opuesto al lado  $CA$  del triángulo.
- 2) Construir la semirrecta  $m$  de origen en  $E$  y que pasa por  $A$ .
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $A$  pasando por  $B$ .
- 4) Ubicar el punto  $F$ , punto de intersección de la semirrecta  $m$  con la circunferencia  $c$ .
- 5) Trazar la circunferencia  $d$  de centro en  $E$  y que pasa por  $F$ .
- 6) Ubicar el punto  $G$ , intersección entre circunferencia  $d$  y la semirrecta  $CD$ .
- 7) El vector  $CG$  es el segmento pedido.

La construcción debe verse similar a la que se muestra en la *Figura 70*.

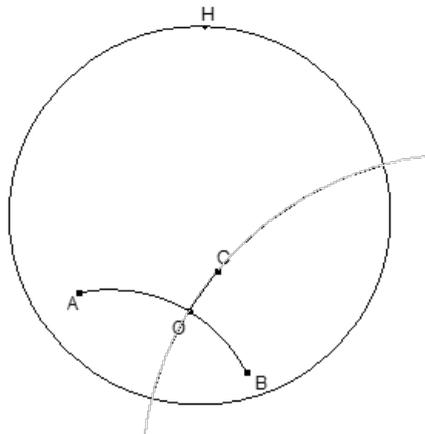


*Figura 70.* Repetir un segmento en dirección dada

Fuente: elaboración propia

***Ejemplo 18: construcción de un triángulo isósceles***

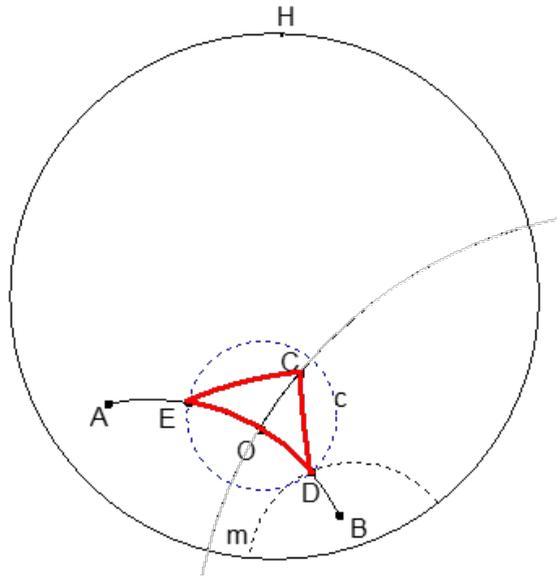
Un problema con infinitos caminos de solución es el de la construcción de un triángulo isósceles cuando esto es posible, si se conoce su perímetro y la altura a la base desigual. Las infinitas soluciones obedecen al uso de las cónicas. Presentamos aquí, la solución canónica con el uso de la mediatriz, y otra, con la construcción de una circunferencia por tres puntos. Los requisitos iniciales del problema se presentan en la *Figura 71*.



*Figura 71.* Fase inicial de la construcción de un triángulo isósceles

Fuente: elaboración propia

El perímetro es el segmento  $AB$  y la altura está dada por el segmento  $OC$ , siendo  $O$  el punto medio entre  $A$  y  $B$  y  $OC$ , contenido en la mediatriz del mismo segmento. Los pasos subsiguientes, son:

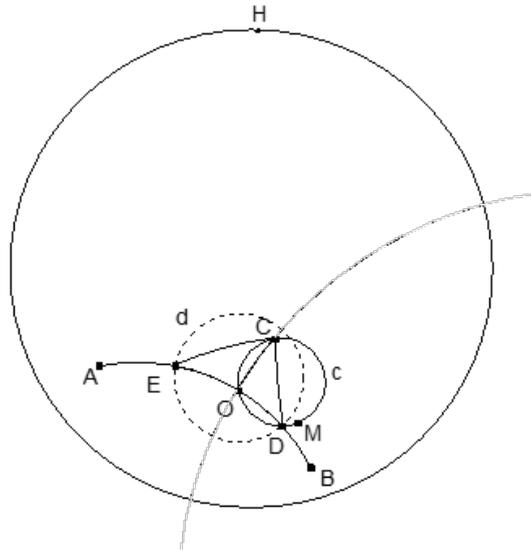


*Figura 72.* Triángulo isósceles dado perímetro y altura

Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la h- mediatriz  $m$  entre los puntos  $B$  y  $C$ .
- 2) Ubicar el punto  $D$  intersección entre el perímetro  $AB$  y la mediatriz  $m$ .
- 3) Trazar la h- circunferencia  $c$  de centro en  $O$  que pasa por  $D$ .
- 4) Ubicar el punto  $E$ , intersección entre la h- circunferencia  $c$  y el segmento  $AB$ . Este punto es simétrico a  $D$  respecto de  $O$ .
- 5) Trazar los h- segmentos  $ED$ ,  $EC$  y  $DC$  que conforman el triángulo isósceles pedido (*Figura 72*).

La segunda alternativa con el uso de una h-circunferencia, procede según los siguientes pasos:



*Figura 73.* Otra alternativa de construcción del triángulo isósceles

Fuente: elaboración propia

- 1) Determinar el punto h- medio  $M$  entre los puntos  $B$  y  $C$ .
- 2) Trazar la h- circunferencia  $c$  que pasa por los puntos  $M$ ,  $O$  y  $C$ .
- 3) Ubicar el punto  $D$  intersección entre el perímetro  $AB$  y la h- circunferencia  $c$ .
- 4) Trazar la h- circunferencia  $d$  de centro en  $O$  que pasa por  $D$ .
- 5) Ubicar el punto  $E$ , intersección entre la h- circunferencia  $d$  y el segmento  $AB$ . Este punto es simétrico de  $D$  respecto de  $O$ .
- 6) Trazar los h- segmentos  $ED$ ,  $EC$  y  $DC$  que conforman el triángulo isósceles pedido (*Figura 73*).

Utilizando la h-elipse se procede como se indica a continuación:

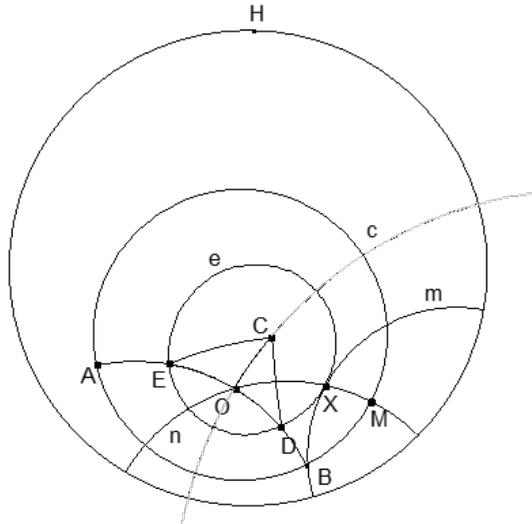
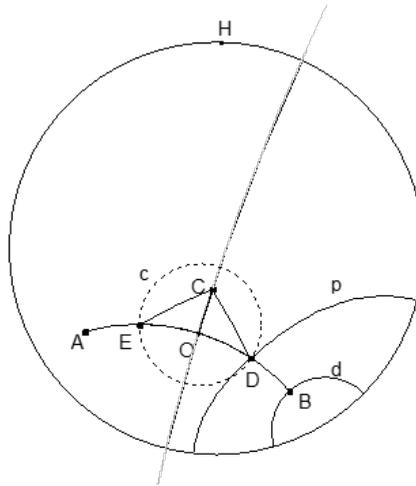


Figura 74. Construcción de un triángulo isósceles dado su perímetro y altura con la elipse

Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la h- circunferencia  $c$  de centro en  $O$  que pasa por el punto  $A$ .
- 2) Ubicar el punto  $M$ , arbitrario en la h- circunferencia  $c$ .
- 3) Trazar la h- recta  $n$  determinada por los puntos  $O$  y  $M$ .
- 4) Trazar la h- mediatriz  $m$  de los puntos  $M$  y  $C$ .
- 5) Ubicar el punto  $X$  de intersección entre las h- rectas  $m$  y  $n$ .
- 6) Determinar el lugar geométrico producido por el punto  $X$  cuando  $M$  se desplaza por la circunferencia  $c$ , obteniendo la elipse  $e$ .
- 7) Determinar los puntos de intersección  $D$  y  $E$ , de la elipse  $e$  con el perímetro  $AB$ .
- 8) Trazar los h- segmentos  $ED$ ,  $EC$  y  $DC$  que conforman el triángulo isósceles pedido (Figura 74).

Ahora se presenta la solución del problema utilizando la h-parábola, para lo cual se procede como se indica a continuación:



*Figura 75.* Construcción de un triángulo isósceles dado su perímetro y altura con la parábola

Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la h- perpendicular  $d$  por el extremo  $B$  del segmento  $AB$  que define el perímetro del triángulo isósceles a construir.
- 2) Trazar la h- parábola  $d$ , que tiene como directriz a la h- recta  $d$  y como foco al punto  $C$  que determina la altura del triángulo a construir.
- 3) Determinar el punto  $D$  intersección entre la parábola  $p$  y el segmento  $AB$ .
- 4) Trazar la h- circunferencia  $c$  de centro en  $O$  y pasando por  $D$ .
- 5) Ubicar el punto  $E$  de intersección entre la h- circunferencia  $c$  y el segmento  $AB$ . Este punto es el simétrico de  $D$  respecto del centro  $O$ .
- 6) Trazar los h- segmentos  $ED$ ,  $EC$  y  $DC$  que conforman el triángulo isósceles pedido (*Figura 75*).

Es bueno observar que este problema de construcción, tiene una sola vía con la h-recta, una sola vía con la h-circunferencia, ninguna vía con la h-hipérbola, varias vías con la h- parábola e infinitos caminos de solución con la h-elipse.

Vale la pena terminar con las palabras de Farkas W. Bolyai (1775-1856) “porque parece ser cierto que muchas cosas tienen, por así decirlo, una época en la que son descubiertas en muchos lugares simultáneamente, como las violetas aparecen en primavera por todas partes.” Debemos hacer una reflexión final sobre lo que puede aportar la Geometría Hiperbólica. No es posible negar el enriquecimiento intelectual que a nivel geométrico aporta el conocimiento y entendimiento de este y otros tipos de geometrías, y desaprovechar el ejercicio de la comparación por analogía en sus procedimientos y algoritmos constructivos.

Una aplicación académica que hace la Geometría Hiperbólica, por su carácter diverso y poco intuitivo, está en su capacidad de mostrar con claridad la distinción entre una definición matemática y los teoremas que se obtienen por la vía de la comparación analógica con otros tipos de geometría. Es trabajo personal, buscar y ejecutar otros teoremas de comparación. Solo esto, ya le da un carácter importante a la existencia de este texto.

Queda mucho terreno por explorar, se cuenta con los aplicativos como el Menú Hiperbólico de Cabri II Plus y la modernidad, y el derecho y la obligación de explorar el recurso.

En este escrito, está la base de una tarea que se torna incontenible y es la de estudiar todos los teoremas constructivos que nos ha legado la Geometría Elemental, también llamada Geometría Sintética.



## CAPÍTULO 2. LAS CÓNICAS Y EL PROBLEMA DE APOLONIO

*“Los encantos de esta ciencia sublime,  
las matemáticas, solo se les revelan a aquellos  
que tienen el valor de profundizar en ella.”  
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*

Apolonio de Perga o Perge (262 a. C. - 190 a.C.) fue un matemático y astrónomo griego famoso por su obra sobre las secciones cónicas; dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola a los lugares geométricos estudiados y logró solucionar la ecuación general de segundo grado por medio de la geometría cónica. Sus trabajos tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de *El Gran Geómetra* (Fernández y Tamaro, 2004).

Uno de los problemas célebres estudiados por Apolonio o al menos propuesto por él, y que se identifica con su nombre, es el de Apolonio, y consiste en encontrar las circunferencias tangentes a tres objetos dados: puntos, rectas o circunferencias. El problema deriva en diez casos, algunos con subdivisiones particulares; el llamado Décimo Caso, consiste en determinar la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas,

cuando esto es posible; es el más complicado de todos y en este texto se presenta su solución como una aplicación de la transformación de inversión de un punto respecto de una circunferencia. Apolonio propuso y resolvió el Décimo Caso, en la obra *Tangencias*.

Las soluciones esperadas, como todo lo euclidiano, retan al estudioso a utilizar como herramientas solo la regla y el compás a la usanza euclidiana y, de hecho, hay numerosos estudios que atestiguan y presentan las soluciones. Por esta razón, soluciones como la de Adriaan van Roomen, elaborada en el siglo XVI, en la que utiliza las hipérbolas, se consideran poco elegantes y afortunadas.

En este capítulo, escapándonos de buscar la elegancia, pero sí la efectividad, se presentan las soluciones a diversos casos, recurriendo a las cónicas. La motivación es simple, establecidas como herramientas incorporadas al software Cabrí, como macro construcciones, se convierten en poderosas herramientas que deben utilizarse con diligencia.

Para algunos de los casos en que se diversifica el problema, también se presenta por analogía la búsqueda de la solución, en el contexto del Disco de Poincaré, ligada al modelo de la Geometría Hiperbólica.

## **2.1. MACROS DE LAS CÓNICAS**

### **2.1.1. La parábola**

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo  $F$ , llamado foco y de una recta fija  $d$ , llamada directriz.

Para el diseño de la macro que permite un empleo efectivo en las construcciones, se recurre a la mediatriz que, a su vez, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros dos puntos fijos, dados.

La Macro construcción se establece en Cabrí, con los pasos que se indican enseguida, siendo que se conocen tan solo la directriz  $d$  y el foco  $F$  por fuera de ella (*Figura 76*).

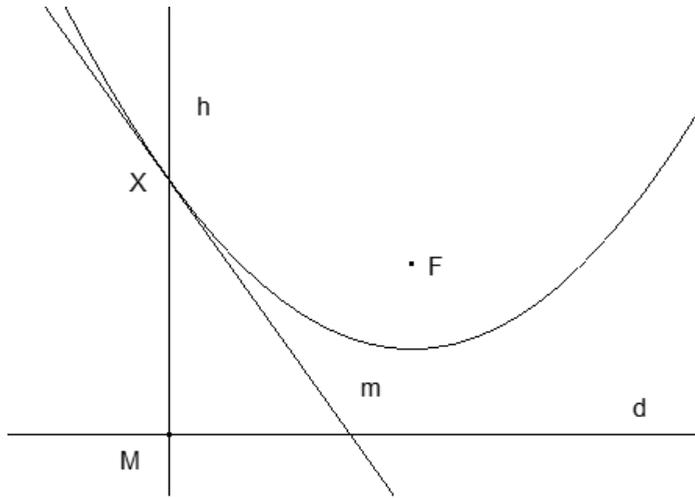


Figura 76. Construcción de la parábola

Fuente: elaboración propia

- 1) Ubicar con libre albedrío un punto  $M$  perteneciente a la directriz  $d$ .
- 2) Trazar por  $M$  la perpendicular  $h$  a la directriz  $d$ .
- 3) Determinar la mediatriz  $m$  entre los puntos  $M$  y  $F$ .
- 4) Ubicar el punto de intersección  $X$ , entre las rectas  $h$  y  $m$ .
- 5) Determinar el lugar geométrico trazado por el punto  $X$ , cuando  $M$  se desplaza por la directriz  $d$ .
- 6) Trazar la cónica utilizando la herramienta de igual nombre, haciendo click en cinco puntos del lugar geométrico buscado.
- 7) Ocultar el lugar geométrico y los cinco puntos señalados.
- 8) Definir la macro teniendo como objetos iniciales la directriz  $d$  y el foco  $F$ , y como objeto final la cónica encontrada.
- 9) Definir la macro con un nombre adecuado y su ayuda correspondiente.

Siguiendo los mismos pasos, se procede a construir la macro respectiva, dentro de un horizonte  $H$  del Menú Hiperbólico, con las herramientas hiperbólicas análogas. A continuación, se presenta el resultado gráfico esperado (Figura 77). Sin embargo, debe recordarse que el Menú Hiperbólico Cabrí, contiene en su núcleo la macro de una parábola en tal

espacio métrico y que, para el mundo hiperbólico, herramientas como cónica, no existen; en consecuencia, se deben establecer como objetos finales las curvas de los lugares geométricos correspondientes.

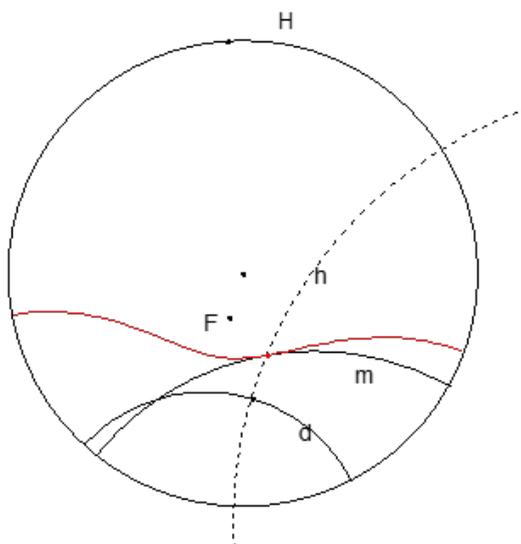


Figura 77. La parábola en el Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

### 2.1.2. La elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos  $X$  que se mueven, de tal modo que, la suma de sus distancias a dos puntos fijos  $F$  y  $F'$  es constante. Los puntos fijos se llaman focos de la elipse.

La macro construcción de marras requiere de la ubicación en el plano histórico Cabrí, de los focos  $F$  y  $F'$  y de un punto  $P$ , tal que su distancia, respecto de  $F$  sea mayor, de manera evidente, que la distancia entre los dos focos.

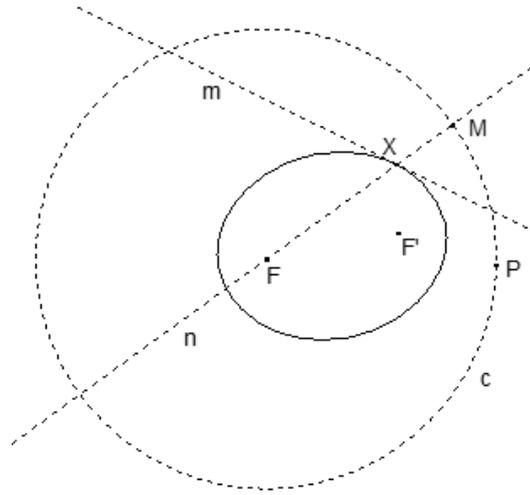


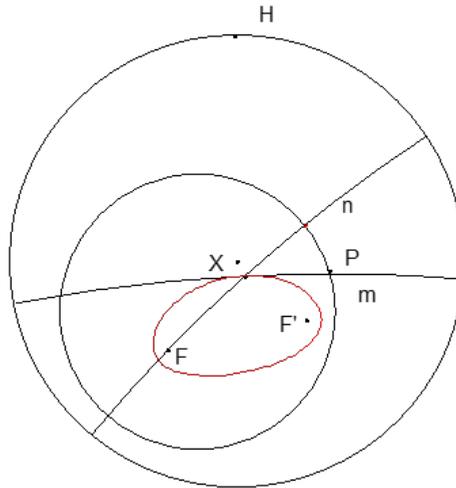
Figura 78. Construcción de la elipse

Fuente: elaboración propia

- 1) Ubicar en el plano histórico, los focos  $F$  y  $F'$ .
- 2) Ubicar el punto  $P$ , tal que la distancia entre  $F$  y  $P$  es la constante que define la elipse.
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $F$  y radio  $FP$ .
- 4) Ubicar en  $c$  el punto  $M$  que recorrerá la circunferencia.
- 5) Trazar la recta  $n$  determinada por los puntos  $F$  y  $M$ .
- 6) Trazar la mediatriz  $m$  entre los puntos  $M$  y  $F'$ , que actúa como foco de la elipse.
- 7) Determinar el punto  $X$  intersección entre las rectas  $m$  y  $n$ .
- 8) Determinar el lugar geométrico descrito por  $X$  cuando se mueve el punto  $M$  a lo largo de la circunferencia  $c$ .
- 9) Determinar la cónica por cinco puntos tomados en el lugar geométrico encontrado en el paso anterior.
- 10) Ocultar los cinco puntos que determinan la cónica del paso anterior y el lugar geométrico que subyace en ella.

La macro construcción de la elipse tiene como objetos iniciales los dos focos  $F$  y  $F'$  y un punto  $P$  que determina el valor de la constante que define la elipse y, como objeto final, la cónica encontrada (Figura 78).

Siguiendo los mismos pasos, pero con las herramientas hiperbólicas dispuestas en el Menú Hiperbólico, se construye la macro respectiva, que también trae incorporado en su núcleo en el Menú Hiperbólico. La construcción debe verse como se muestra en la *Figura 79*.



*Figura 79.* La elipse en el Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

La macro correspondiente a la elipse dentro del Menú Hiperbólico Cabrí, es ligeramente diferente a la *Figura 79*, pero las dos tienen el mismo sentido de oportunidad a su utilización por conveniencia.

### 2.1.3. La hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto  $X$  que se mueve, de modo que, la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

La macro construcción en estudio requiere de la ubicación en el plano histórico Cabrí, de los focos  $F$  y  $F'$  y de un punto  $P$ , tal que su distancia, respecto de  $F$  sea menor, de manera evidente, que la distancia entre los dos focos (*Figura 80*).

Los pasos a seguir, en el diseño de la macro construcción, son los que se listan a continuación.

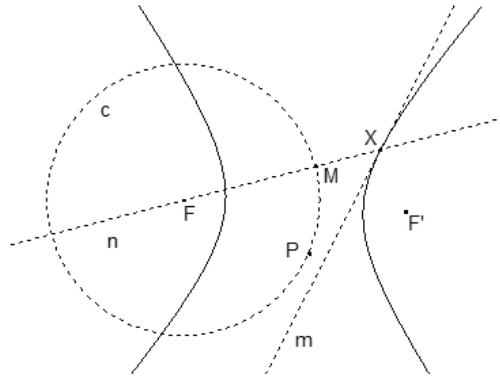


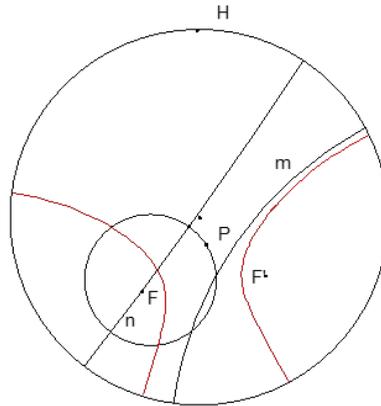
Figura 80. Construcción de la hipérbola

Fuente: elaboración propia

- 1) Ubicar en el plano histórico, los focos  $F$  y  $F'$ .
- 2) Ubicar el punto  $P$ , tal que la distancia entre  $F$  y  $P$  es la constante que define la elipse.
- 3) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $F$  y radio  $FP$ .
- 4) Ubicar en  $c$  el punto  $M$  que recorrerá la circunferencia.
- 5) Trazar la recta  $n$  determinada por los puntos  $F$  y  $M$ .
- 6) Trazar la mediatriz  $m$  entre los puntos  $M$  y  $F'$ , que actúa como foco de la elipse.
- 7) Determina el punto  $X$  intersección entre las rectas  $m$  y  $n$ .
- 8) Determinar el lugar geométrico descrito por  $X$  cuando se mueve el punto  $M$  a lo largo de la circunferencia  $c$ .
- 9) Determinar la cónica por cinco puntos tomados en el lugar geométrico encontrado en el paso anterior.
- 10) Ocultar los cinco puntos que determinan la cónica del paso anterior y el lugar geométrico que subyace en ella.

La macro construcción de la hipérbola tiene como objetos iniciales los dos focos  $F$  y  $F'$  y un punto  $P$  que determina el valor de la constante que define la hipérbola y, como objeto final, la cónica encontrada.

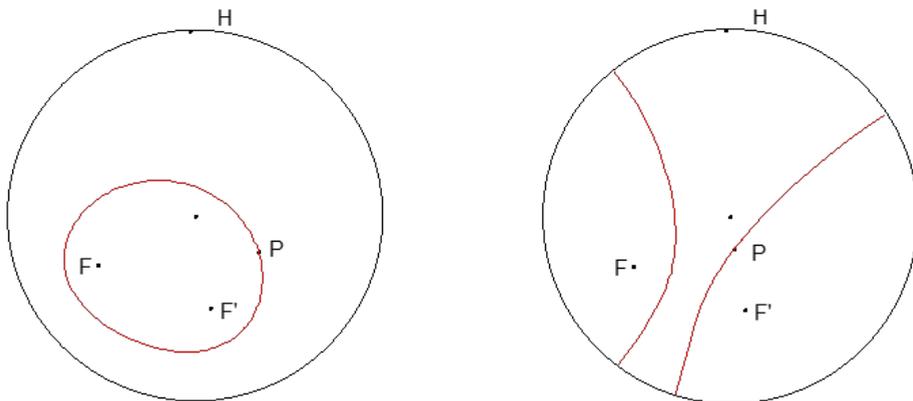
Siguiendo los mismos pasos, pero con las herramientas hiperbólicas dispuestas en el menú hiperbólico, se construye la macro respectiva, que también trae incorporado en su núcleo, en el menú hiperbólico. La construcción debe verse como se muestra en la *Figura 81*.



*Figura 81.* La hipérbola en el Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

Dado que, para el caso de la elipse, la macro incorporada en el Menú tiene un sentido ligeramente diferente, pues se aleja un poco de la definición, en el caso de utilizar las macros del Menú, las cónicas respectivas contienen al punto  $P$ , hecho que se ve en la *Figura 82*.



*Figura 82.* Elipse e Hipérbola con las macros del menú

Fuente: elaboración propia

## 2.2. CASOS PARTICULARES DEL PROBLEMA DE APOLONIO

### 2.2.1. Primer caso: circunferencia pasando por tres puntos

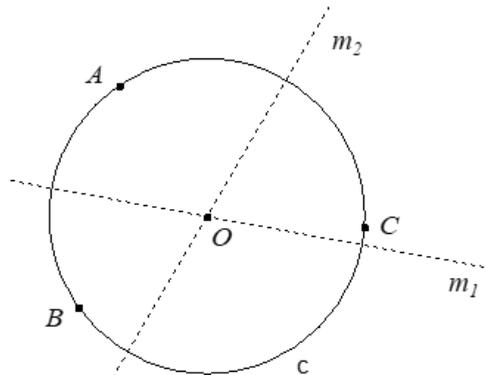


Figura 83. Circunferencia pasando por tres puntos

Fuente: elaboración propia

Dados los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  del plano, la circunferencia que pasa por tales puntos se consigue con la siguiente secuencia de acciones:

- 1) Trazar la mediatriz  $m_1$  de los puntos  $A$  y  $B$ .
- 2) Trazar la mediatriz  $m_2$  entre  $B$  y  $C$ .
- 3) Determinar el punto  $O$ , común a las mediatrices  $m_1$  y  $m_2$ .
- 4) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $O$  y que pasa por  $A$ .

La circunferencia  $c$ , es la pedida. Recuerde que una mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados y este hecho asegura la equidistancia de los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , dados. De inmediato, también se tiene todo disponible para diseñar una macro construcción en la que los objetos iniciales son los puntos dados  $A$ ,  $B$  y  $C$  y, el objeto final, es la circunferencia  $c$  (Figura 83).

Al repetir la secuencia de acciones en el Disco de Poincaré, también se tiene la posibilidad de construir una  $h$ - circunferencia en un horizonte  $H$ , en el caso que se requiera. La construcción se vería como la Figura 84.

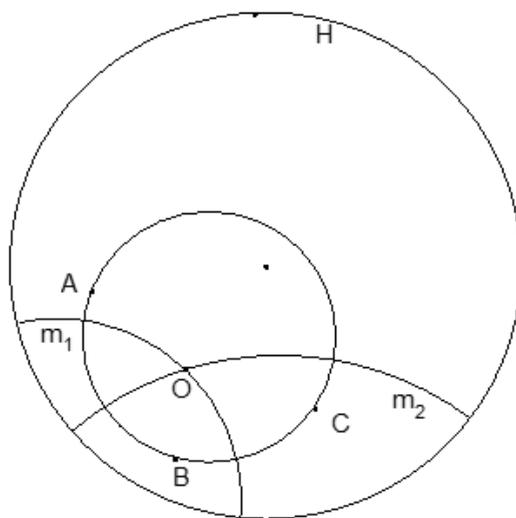


Figura 84. Circunferencia por tres puntos en el Disco de Poincaré  
Fuente: elaboración propia

### 2.2.2. Segundo caso: circunferencia tangente a tres rectas dadas

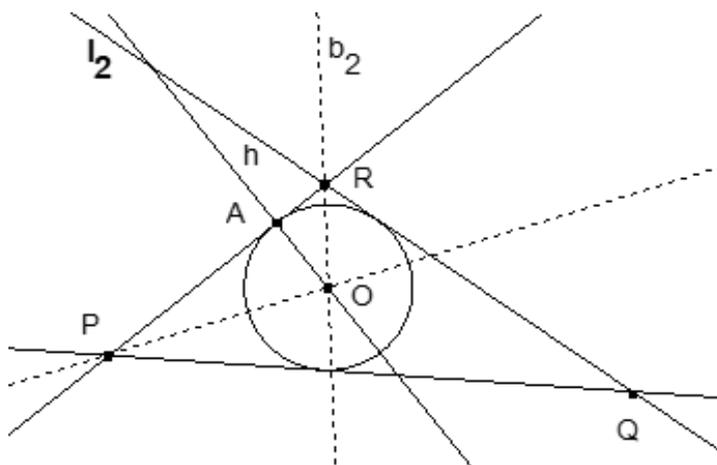
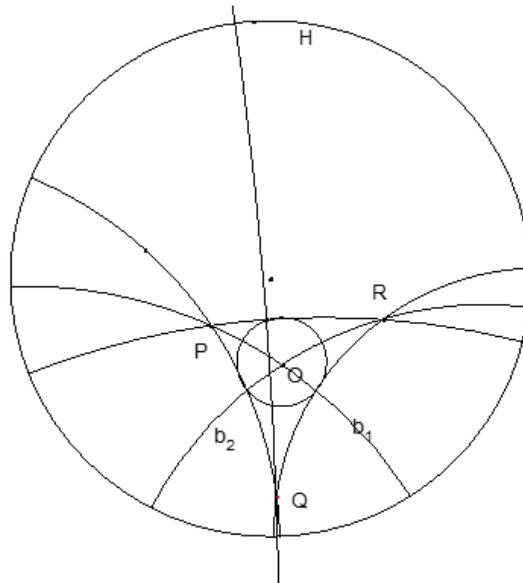


Figura 85. Circunferencia tangente a tres rectas  
Fuente: elaboración propia

Dadas las rectas  $l_1, l_2$  y  $l_3$  que determinan un triángulo, se procede como sigue:

- 1) Determinar los puntos  $P, Q$  y  $R$  intersecciones de las rectas dadas, dos a dos.
- 2) Trazar dos bisectrices, como las expuestas  $b_1$  y  $b_2$  a los ángulos  $P$  y  $R$ .
- 3) Determinar el punto incentro  $O$ , como intersección de las dos bisectrices  $b_1$  y  $b_2$ .
- 4) Trazar por  $O$ , la perpendicular al lado  $PR$  del triángulo.
- 5) Determinar el punto de intersección  $A$ , entre la recta  $h$  y el lado  $PR$
- 6) Trazar la circunferencia de centro en  $O$  pasando por  $A$  que es la circunferencia pedida (*Figura 85*).

Con las h-herramientas correspondientes, se procede a calcular la h- circunferencia tangente a tres h- rectas dadas. Claro, también cabe la posibilidad de que el procedimiento sea incompatible. Para este caso particular, la construcción debe verse como la *Figura 86*.



*Figura 86.* Circunferencia tangente a tres rectas en el Disco de Poincaré  
Fuente: elaboración propia

### 2.2.3. Tercer caso: circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos dados

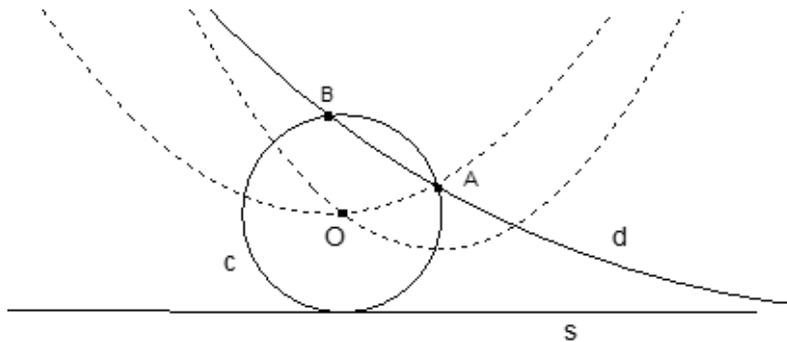


Figura 87. Circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos  
Fuente: elaboración propia

Siendo la recta  $s$  y los puntos  $A$  y  $B$  del mismo lado de la recta, se procede del siguiente modo:

- 1) Determinar la parábola que tiene como directriz a la recta  $s$  y como foco al punto  $A$ .
- 2) Determinar la parábola que tiene como directriz a la recta  $s$  y como foco al punto  $B$ .
- 3) Determinar los puntos de intersección  $O$  y  $Q$  de las dos parábolas anteriores.
- 4) Trazar la circunferencia  $c$  de centro en  $O$  pasando por  $A$ .
- 5) Trazar la circunferencia  $d$  de centro en  $Q$ , pasando por  $A$ .
- 6) Las dos circunferencias  $c$  y  $d$ , son las circunferencias pedidas (Figura 87).

Vale la pena anotar que, el argumento de la validez y solidez de la construcción, radica en la definición de parábola y corresponde al lector efectuar tal deducción.

La h-construcción análoga a la euclidiana, sigue los pasos anteriores con las herramientas hiperbólicas de rigor y debe ser como se presenta en la Figura 88.

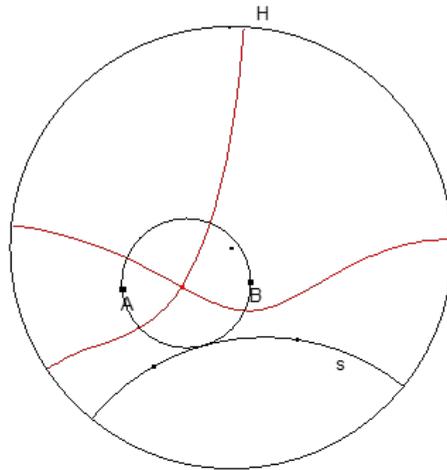


Figura 88. Circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos en el disco

Fuente: elaboración propia

**2.2.4. Cuarto caso: circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto**

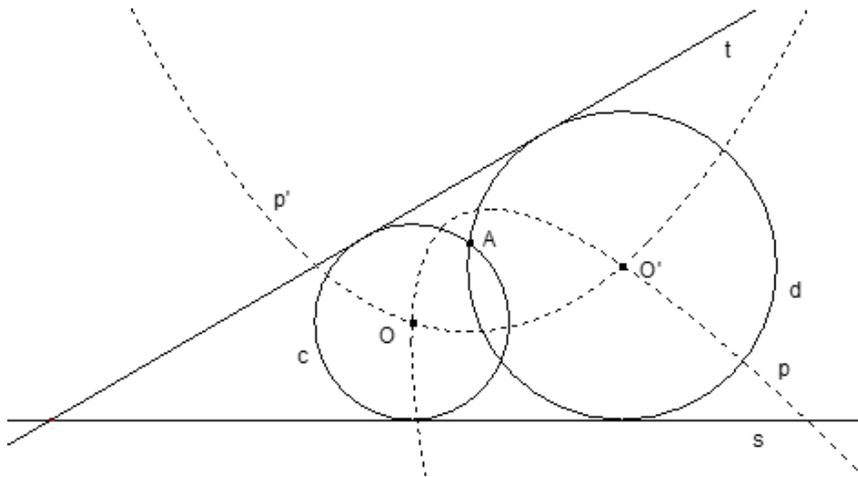


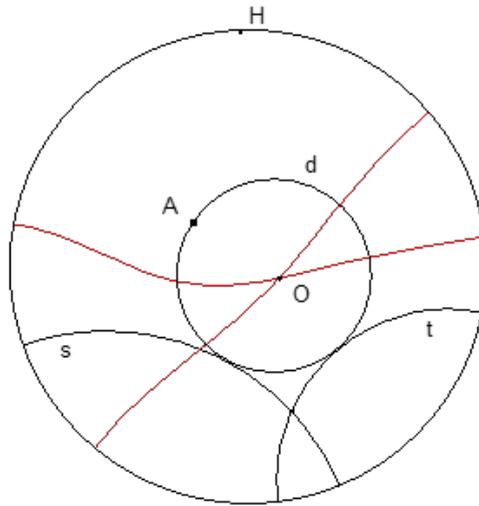
Figura 89. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto

Fuente: elaboración propia

Sean las rectas  $s$  y  $t$  y el punto  $A$  entre ellas. La construcción de las circunferencias tangentes comunes a las dos rectas que pasan por  $A$ , se ejecuta con los siguientes pasos:

- 1) Construir la parábola  $p$  con directriz  $t$  y foco el punto  $A$ .
- 2) Construir la parábola  $p'$  cuya directriz es la recta  $s$  y foco el punto  $A$ .
- 3) Determinar los puntos de intersección  $O$  y  $O'$  entre las parábolas  $p$  y  $p'$ .
- 4) Trazar las circunferencias  $c$  de centro en  $O$  pasando por  $A$  y  $d$  de centro en  $O'$  que también pasa por  $A$ . Estas son las dos circunferencias buscadas (*Figura 89*).

Emulando los pasos en el ambiente del Disco de Poincaré y con la macro personal o la incluida en el menú hiperbólico Cabrí, se diseña una construcción similar a la que se muestra en la *Figura 90*.



*Figura 90.* Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto en el disco

Fuente: elaboración propia

El algoritmo de la construcción se satisface, incluso cuando las rectas  $s$  y  $t$  dadas son ultraparalelas, como las que se representan en la *Figura 91*.

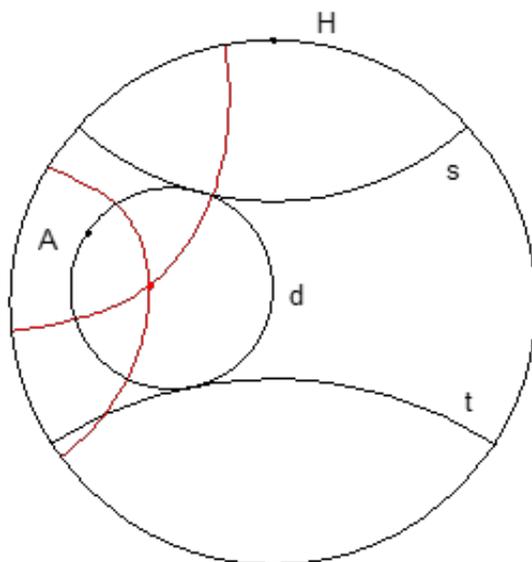


Figura 91. El caso de rectas ultraparalelas  
Fuente: elaboración propia

### 2.2.5. Quinto caso - parte 1: circunferencia tangente a otra pasando por dos puntos en su interior

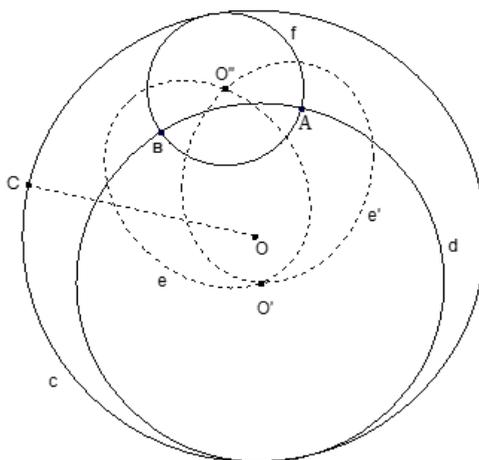
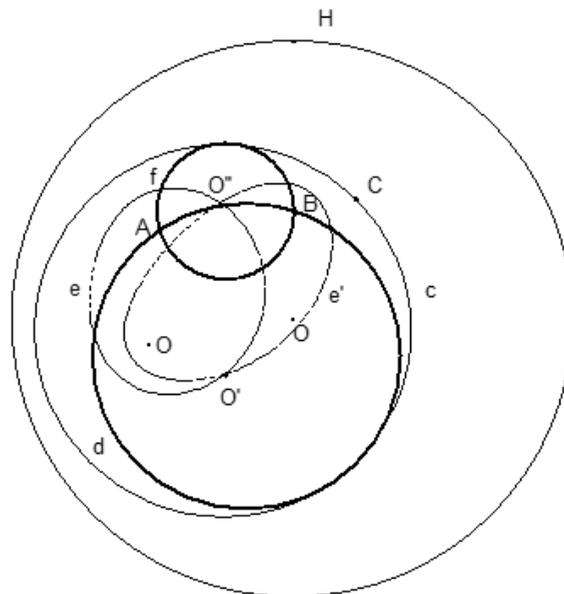


Figura 92. Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su interior  
Fuente: elaboración propia

Con la circunferencia  $c$  de radio  $R$  y centro en  $O$  y, dados los puntos  $A$  y  $B$  en su interior, el cálculo de las circunferencias tangentes a  $c$  que pasan por los puntos  $A$  y  $B$  se consigue, siguiendo los pasos descritos a continuación:

- 1) Trazar el segmento  $OC$  con  $C$  en la circunferencia  $c$  inicial y cuya longitud es la constante que origina las dos siguientes elipses.
- 2) Trazar la elipse  $e$  de focos en los puntos  $O$  y  $B$ .
- 3) Trazar la elipse  $e'$  de focos en los puntos  $O$  y  $A$ .
- 4) Ubicar los dos puntos de intersección  $O'$  y  $O''$  entre las elipses  $e$  y  $e'$ .
- 5) Trazar las circunferencias  $d$  y  $f$  con centros respectivos  $O'$  y  $O''$  pasando por cualquiera de los puntos  $A$  o  $B$ . Estas son las dos curvas pedidas (*Figura 92*).

Por analogía y respetando que cada uno de los objetos en el Disco de Poincaré, son de carácter hiperbólico, se repiten los pasos anteriores para conseguir un resultado similar al que se muestra en la *Figura 93*.



*Figura 93.* El caso del Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

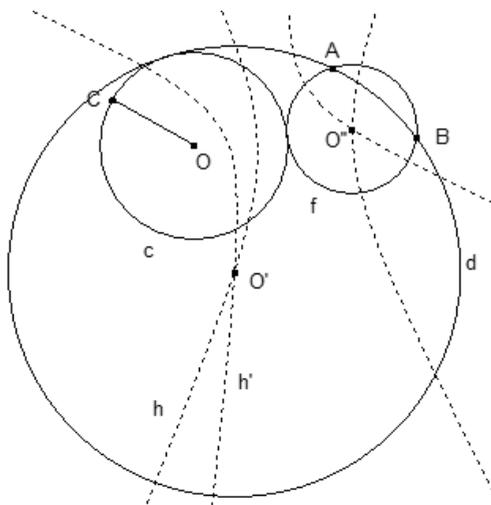
En este caso, se ha propuesto la constitución de la  $h$ -circunferencia  $c$  de centro en  $O$  y radio  $OC$ , al interior de la circunferencia  $H$  horizonte del disco. La circunferencia  $c$  tiene un radio que supera la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  y la elipse  $e$  tiene como focos los puntos  $O$  y  $A$ , mientras que la elipse  $e'$  tiene como focos los puntos  $O$  y  $B$ . Tales elipses determinan por intersección los centros  $O'$  y  $O''$  de las circunferencias  $d$  y  $f$  que pasan por  $A$  y  $B$ .

Fíjese que, el algoritmo constructivo es exacto al propuesto en el modelo analítico corriente y soluciona de manera efectiva el problema.

### **2.2.6. Quinto caso – parte 2: circunferencia tangente a otra pasando por dos puntos en su exterior**

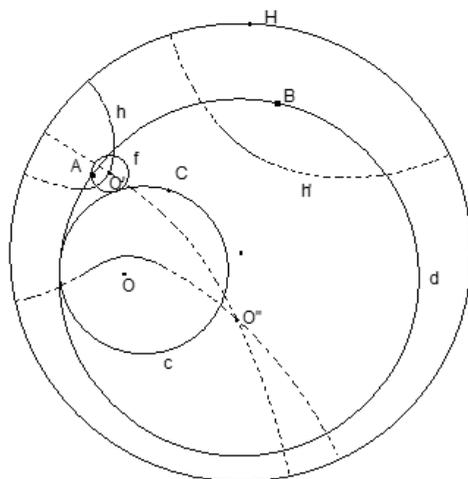
Dada la circunferencia  $c$  de centro en  $O$  y radio  $OC$ , menor que la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  exteriores a  $c$ , los pasos conducentes a calcular las dos circunferencias tangentes a  $c$  que pasan por los puntos  $A$  y  $B$ , se obtienen con los siguientes pasos:

- 1) Trazar el segmento  $OC$  con  $C$  en la circunferencia  $c$  inicial y cuya longitud es la constante que origina las dos siguientes hipérbolas.
- 2) Trazar la hipérbola  $h$  de focos en los puntos  $O$  y  $B$ .
- 3) Trazar la hipérbola  $h'$  de focos en los puntos  $O$  y  $A$ .
- 4) Ubicar los dos puntos de intersección  $O'$  y  $O''$  entre las hipérbolas  $h$  y  $h'$ .
- 5) Trazar las circunferencias  $d$  y  $f$  con centros respectivos  $O'$  y  $O''$  pasando por cualquiera de los puntos  $A$  o  $B$ . Estas son las dos curvas pedidas y una sola de ellas soluciona de manera efectiva el problema (*Figura 94*).



*Figura 94.* Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su exterior  
Fuente: elaboración propia

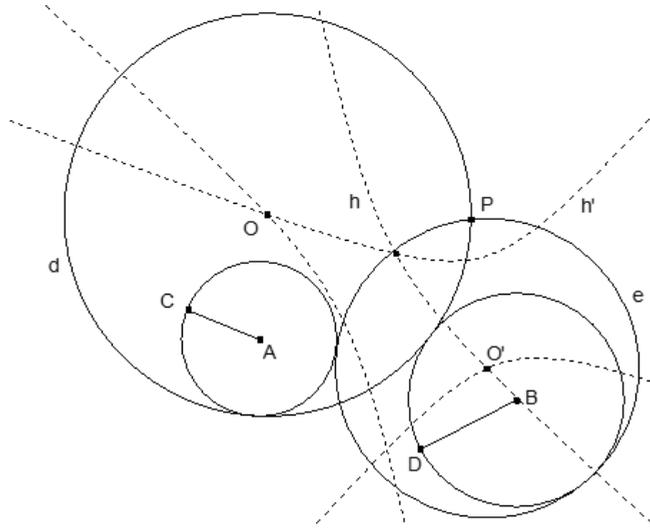
Con las herramientas hiperbólicas y siguiendo paso a paso el algoritmo descrito, se encuentra una situación similar a la que se evidencia en la *Figura 95* y, puede verse que, solo una de las dos circunferencias tangentes a  $c$ ,  $d$  y  $f$  pasan por los puntos  $A$  y  $B$ , tal y como ocurre en el Modelo Euclídeo.



*Figura 95.* El caso en el Disco de Poincaré  
Fuente: elaboración propia

### 2.2.7. Sexto caso: circunferencia tangente a dos circunferencias pasando por un punto de su exterior común

Dadas las circunferencias de centros en  $A$  y  $B$  y con radios  $AC$  y  $BD$  respectivamente, las circunferencias que son tangentes a tales circunferencias y que pasan por un punto  $P$  en su exterior común, se consiguen con los pasos que se describen enseguida:



*Figura 96.* Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su exterior  
Fuente: elaboración propia

- 1) Trazar la hipérbola  $h$  cuyos focos son los puntos  $A$  y  $P$  y cuya constante de definición es la longitud del segmento  $AC$ .
- 2) Trazar la hipérbola  $h'$  cuyos focos son los puntos  $B$  y  $P$  y cuya constante de definición es la longitud del segmento  $BD$ .
- 3) Ubicar los puntos de intersección entre las hipérbolas  $h$  y  $h'$  que se han marcado como  $O$  y  $O'$ .
- 4) Trazar las circunferencias  $d$  de centro en  $O$ , pasando por  $P$  y  $e$  de centro en  $O'$  pasando por  $P$ . Esas son las circunferencias pedidas (*Figura 96*).

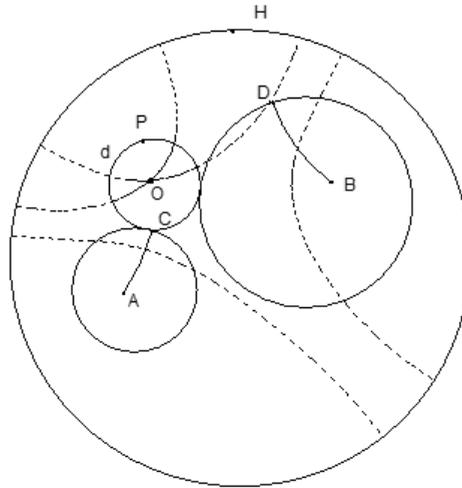


Figura 97. El mismo caso en el Disco de Poincaré

Fuente: elaboración propia

Por analogía y tomando las h- herramientas correspondientes, se construye la h- circunferencia tangente común a dos circunferencias que pasan por un punto  $P$  fijo en el disco horizonte  $H$ , en el exterior común de las circunferencias dadas. La construcción debe verse similar a la que se muestra en la *Figura 97*.

En el ambiente dinámico de Cabrí, hay que desplazar puntos a fin de evidenciar la existencia de al menos un punto de intersección.

### 2.2.8. Séptimo caso: circunferencia tangente a dos rectas dadas y a una circunferencia en el interior del ángulo que ellas determinan

Dadas las rectas  $s$  y  $t$  y la circunferencia de centro en  $O$  y radio  $OG$  al interior del ángulo que tales rectas determinan, se construye la circunferencia tangente común a estos tres elementos, con los pasos que se indican a continuación:

- 1) Ubicar los puntos  $A$  y  $B$  en las rectas  $t$  y  $s$  respectivamente y desde cada punto se trazan perpendiculares a las rectas que los contienen.

- 2) Trazar circunferencias de radio  $OG$  con centros  $A$  y  $B$ . Es útil llevar este radio con la herramienta compás del aplicativo.
- 3) Ubicar los puntos  $C$  y  $D$  como puntos de intersección de las circunferencias descritas en el paso anterior y sus respectivas perpendiculares.
- 4) Trazar una paralela a la recta  $t$  por el punto  $C$ . Tal recta se ha denominado  $t'$ .
- 5) Trazar una paralela a la recta  $s$  por el punto  $D$ .
- 6) Trazar la parábola cuya directriz es la recta  $t'$  y de foco el punto  $O$ .
- 7) Trazar la parábola que tiene como directriz a la recta  $s'$  y cuyo foco es el mismo punto  $O$ .
- 8) Determinar los puntos  $O'$  y  $O''$ , que son comunes a las dos parábolas  $p$  y  $p'$ .
- 9) Trazar perpendiculares por  $O'$  y  $O''$  para determinar los puntos  $E$  y  $F$ , como intersecciones de las perpendiculares con la recta  $t$ .
- 10) Trazar las circunferencias  $d$  de centro en  $O'$  y radio  $O'E$  y la de centro en  $O''$  y radio  $O''F$  que hemos llamado  $e$ . Estas son las circunferencias buscadas (Figura 98).

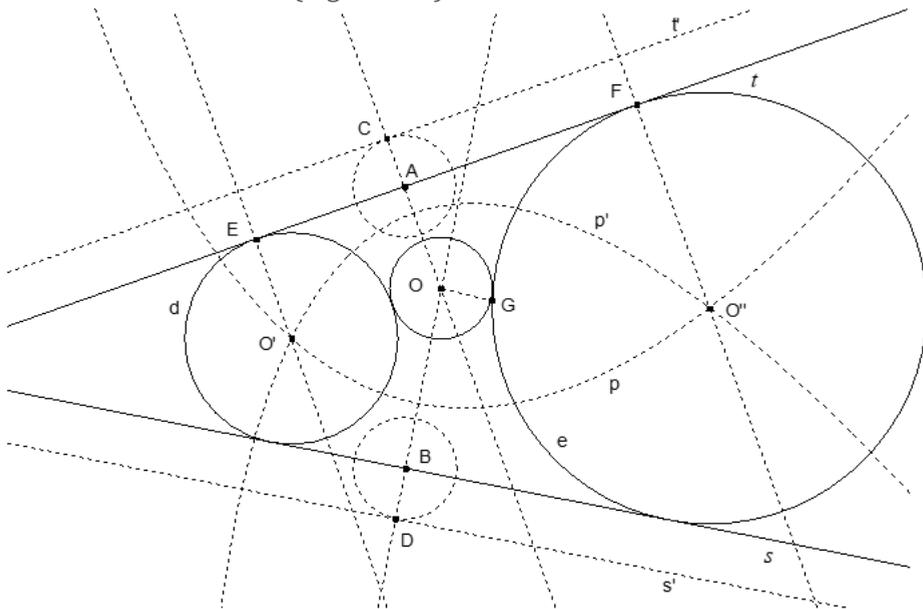


Figura 98. Circunferencia tangente a dos rectas y a otra circunferencia en su interior

Fuente: elaboración propia

Observe que, este caso requiere del concepto de paralelismo, del que no disponemos y, por tanto, rehusamos el intento de elaborar una construcción dentro del Disco de Poincaré.

Esta construcción se requiere para resolver con el concepto de inversión de un punto respecto de una circunferencia, el caso de la construcción de la circunferencia tangente común a tres circunferencias dadas, que se estudia en el siguiente capítulo.

### 2.2.9. Octavo caso: circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto

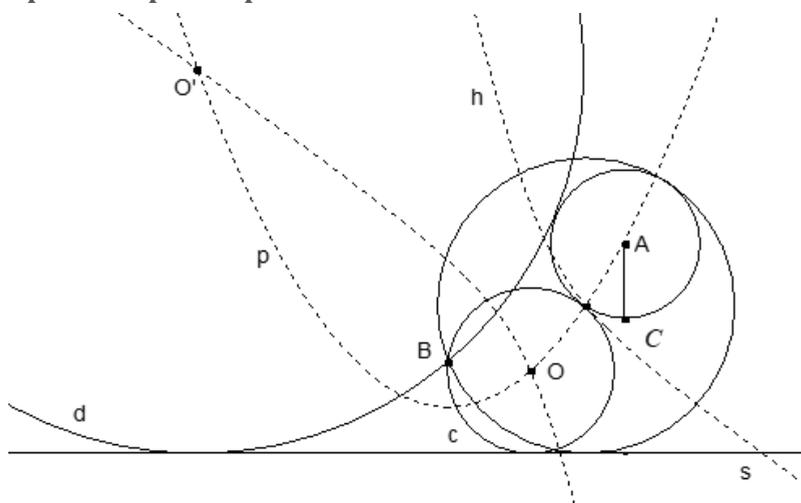


Figura 99. Circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto

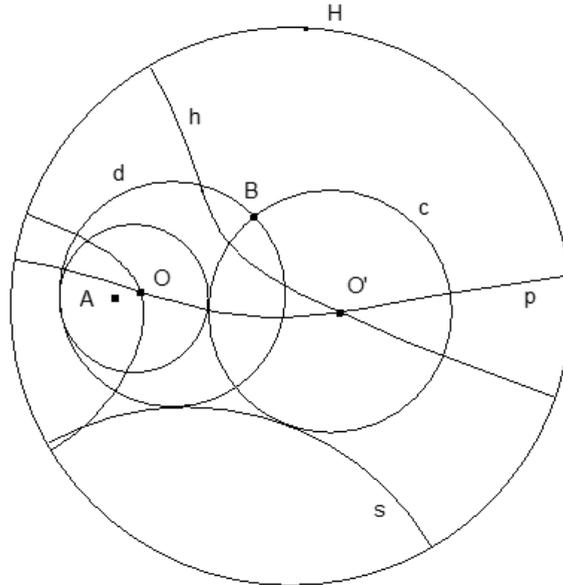
Fuente: elaboración propia

Siendo la recta  $s$  la circunferencia de centro en  $A$  y radio  $AC$  y el punto  $B$  exterior a ella y en el mismo semiplano de la circunferencia, la circunferencia tangente a estos dos elementos, pasando por el punto  $B$ , se encuentra con los siguientes pasos:

- 1) Trazar la hipérbola  $h$  con focos en los puntos  $A$  y  $B$  cuya constante de diferencia es la longitud del segmento  $AC$ .

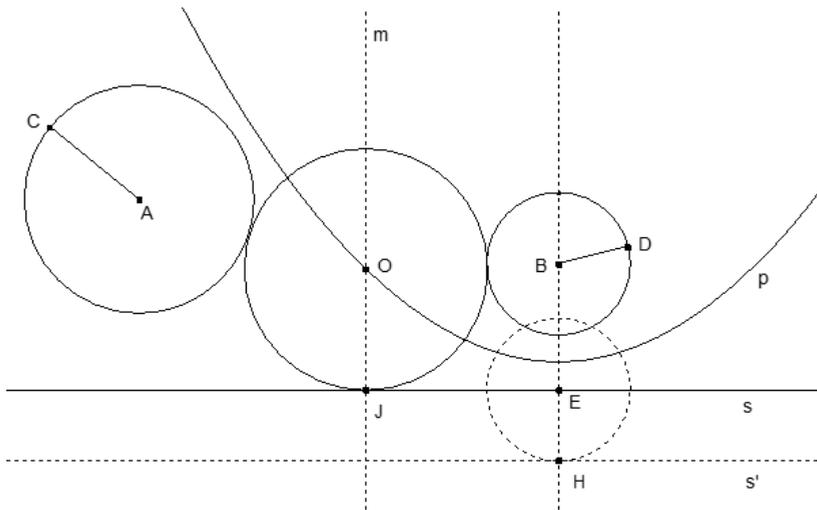
- 2) Trazar la parábola  $p$  cuya directriz es la recta  $s$  y con foco en el punto  $B$ .
- 3) Determinar los puntos de intersección entre la hipérbola  $h$  y la parábola  $p$  que se denominan  $O$  y  $O'$ .
- 4) Trazar las circunferencias  $c$  y  $d$  de centros en los puntos  $O$  y  $O'$  pasando por el punto  $B$ . Estas dos circunferencias resuelven el caso particular del problema (*Figura 99*).

Al realizar los pasos correspondiente y análogos a los elementos hiperbólicos descritos dentro de un horizonte  $H$ , se encuentra la disposición que soluciona el caso particular del Problema de Apolonio, tal como se indica en la *Figura 100*.



*Figura 100.* Circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto, caso del disco  
Fuente: elaboración propia

**2.2.10. Noveno caso: circunferencia tangente a una recta y a dos circunferencias disjuntas en el mismo semiplano de la recta.**



*Figura 101.* Circunferencia tangente a una recta y dos circunferencias  
Fuente: elaboración propia

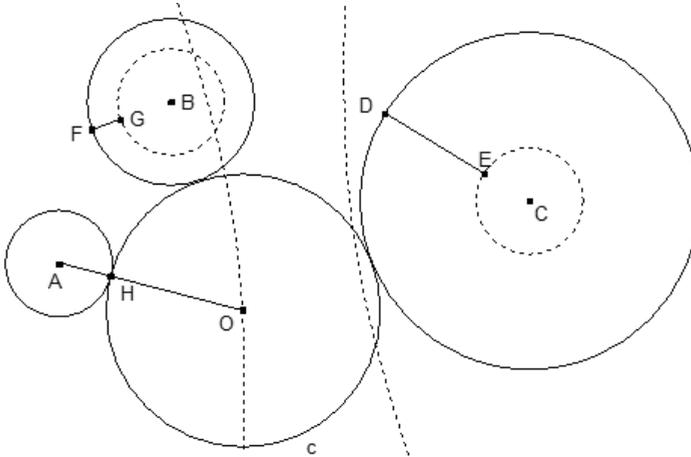
Dadas la recta  $s$ , las circunferencias de centros en los puntos  $A$  y  $B$  de radios respectivos  $AC$  y  $BD$ , los pasos conducentes a conseguir la circunferencia tangente a estos tres elementos, son los siguientes:

- 1) A partir de los segmentos  $AC$  y  $BD$ , radios de las circunferencias, se consigue el segmento de su diferencia que actúa como la constante que define la hipérbola  $h$  del paso que sigue. En la Figura anterior, la imagen de la hipérbola se ha ocultado.
- 2) Trazar la hipérbola  $h$  con focos en los puntos  $A$  y  $B$ , centros de las circunferencias dadas.
- 3) Trazar la recta  $s'$  paralela a la recta dada  $s$  y a una distancia igual a  $BD$ .
- 4) Trazar la parábola  $p$  cuya directriz es la paralela  $s'$  a  $s$  y de foco el punto  $B$ .
- 5) Determinar el punto  $O$ , intersección entre la parábola  $p$  y la hipérbola  $h$ .

- 6) Trazar por  $O$  una perpendicular a  $s$  para determinar el punto  $J$ , intersección entre esta perpendicular y la recta  $s$ .
- 7) Trazar la circunferencia de centro en  $O$  y que pasa por  $J$ . Es la circunferencia que resuelve este caso especial del Problema de Apolonio (*Figura 101*).

En este caso, no vale la pena intentar por analogía resolver el problema dentro de un disco horizonte  $H$ , puesto que la construcción depende del trazado de una paralela. Recuerde que, en el Modelo Sintético el paralelismo tiene sentido único, en cambio, en el modelo Hiperbólico es diverso.

### 2.2.11. Décimo caso: circunferencia tangente a tres circunferencias



*Figura 102.* Circunferencia tangente a tres circunferencias

Fuente: elaboración propia

Siendo las circunferencias de centros en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de radios diferentes dos a dos, los pasos conducentes a obtener la circunferencia tangente a las dos dadas, son los que se describen enseguida:

- 1) Determinar los segmentos  $FG$  y  $DE$  como diferencias de las respectivas circunferencias en relación con la de radio menor. Estos segmentos actuarán como constantes en la confección de las hipérbolas que se requieren en los dos siguientes pasos.

- 2) Trazar la hipérbola de focos en los puntos  $A$  y  $B$  y constante  $FG$ .
- 3) Trazar la hipérbola de focos en los puntos  $A$  y  $C$  y con constante de definición  $DE$ .
- 4) Determinar el punto de intersección  $O$  entre las hipérbolas diseñadas en los dos pasos anteriores.
- 5) Trazar el segmento  $OA$  que interseca a la circunferencia de centro en  $A$  en el punto  $H$ ,
- 6) Trazar la circunferencia de centro en  $O$  pasando por  $H$ . Esta es la circunferencia que soluciona el caso especial del Problema de Apolonio (*Figura 102*).

La abundancia de pasos intermedios, impide que nos animemos a resolver este caso dentro de un Disco de Poincaré, pero un lector porfiado puede intentar hacerlo.

En uno de los memorables eventos de *modelación matemática* que se realizaba entorno de seminarios Cabré en la Universidad de Medellín, el profesor Vincenzo Bongiovanni de la Universidad Bandeirante de São Paulo, ofreció un cursillo sobre la resolución del Problema de Apolonio con el uso de las cónicas, cursillo al que tuvimos la suerte de escoger y asistir. El cursillo se fundamentaba en la estrategia de pensar cada uno de los casos resueltos y, ver que en la búsqueda del centro o centros de las circunferencias solución, se escondían de manera tácita el ejercicio delicado de las definiciones de las cónicas. A primera vista, cada solución se convertía en una manera eficiente y rápida de solucionar el problema, y distinta, al menos, a las que se presenta en el artículo del profesor Benjamín Sarmiento Lugo de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, que se acerca a la utilización de la regla compás y las herramientas propias del Modelo Euclídeo, y que, por ende, son más laboriosas que las que aquí se presentan.

Animados ante la existencia del *Menú Hiperbólico Cabré*, en este capítulo, se ha estudiado por analogía y comparación, cada uno de los casos del Problema de Apolonio dentro del Disco de Poincaré, que brinda el espacio métrico acotado y adecuado para medir la oportunidad de la universalidad de las definiciones y la recursividad de los procesos.

En este sentido, el Problema de Apolonio se convierte en un problema perteneciente a la geometría absoluta que, en la gran mayoría de caso, ni siquiera requiere el concepto de paralelismo, el cual, en el modelo Hiperbólico es diverso y no único.

Como es deseable, cada una de las construcciones han sido elaboradas con los pasos indicados por los autores e invitamos al lector a ejecutarlas, no solo para alcanzar un conocimiento significativo, sino también, para entender que el aprendizaje es una actividad divertida.

Este Décimo Caso del Problema de Apolonio, es significativo y ha obedecido a la confección de soluciones adicionales como la que se propone en el capítulo que sigue de este libro. La solución estudiada se fundamenta en el concepto de inversión de un punto respecto de una circunferencia, concepto íntimamente ligado a la constitución del Disco de Poincaré, el cual se liga al modelo de la Geometría Hiperbólica.



### APÍTULO 3. EL DÉCIMO CASO DEL PROBLEMA DE APOLONIO

*“Hay geometría en el zumbido de las cuerdas,  
hay música en la separación de las esferas.”  
Pitágoras (Circa 570-495 a.C.)*

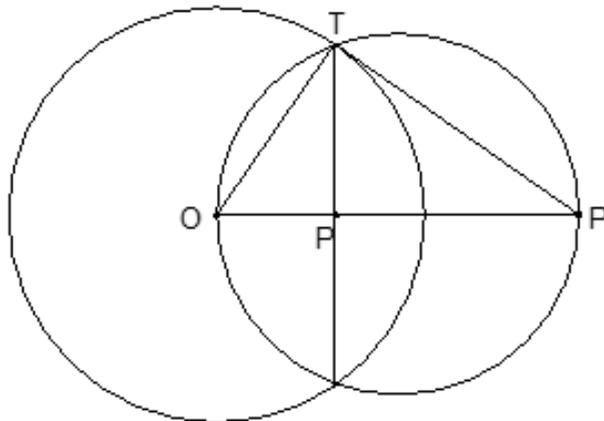
El matemático C. Stanley Ogilvy elabora la solución del Problema de Apolonio en su Décimo Caso, consistente en el cálculo de la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas en el plano, cuando esto es posible. La solución es ingeniosa y satisfactoria e, incluso, más efectiva que la presentada en el capítulo anterior. Aquí, se realiza una traducción aumentada y acomodada de la misma (Ogilvy, 1969).

Lo particular de esta solución, es que utiliza el concepto de inversión, transformación del plano referida a una circunferencia que tiene la capacidad de vaciar el interior en el exterior y viceversa, de transformar rectas en circunferencias y circunferencias en rectas y de dejar una infinitud de objetos invariantes a tal transformación.

De otro lado, la inversión tiene una íntima relación con la Geometría Hiperbólica que se ha estudiado por analogía con la euclidiana, en los dos capítulos anteriores, mediante el mecanismo algorítmico de la construcción de objetos.

### 3.1. LA INVERSIÓN

El matemático alemán Ludwing Immanuel Magnus, en 1831 ideó la transformación llamada Inversión, la cual está referida a una circunferencia fija de centro en  $O$  (inversión en  $O$ ) y que resulta novedosa en el sentido en que transforma rectas en círculos (Salvo infinitos casos) y viceversa; pero, además, tiene carácter involutivo, y tiene como característica especial, que preserva la amplitud. De hecho, la Inversión, vuelca el exterior de la circunferencia en el interior y el interior en el exterior, salvo el centro  $O$  del mismo que, para fines matemáticos, se aplica en el infinito. El trabajo de Magnus mereció que, de parte del Consejo Superior de la universidad de Bonn, se le otorgase el título de doctor honoris causa. Todos sus trabajos aparecen en los Anales de Georogonne de matemáticas puras y aplicadas en los volúmenes XI y XVI (1820-1825) y en los Journal de Crelle, volúmenes V, VII, VIII y IX (1830-1832) con segunda parte en 1833.



*Figura 103.* Cálculo de un punto de inversión

Fuente: elaboración propia

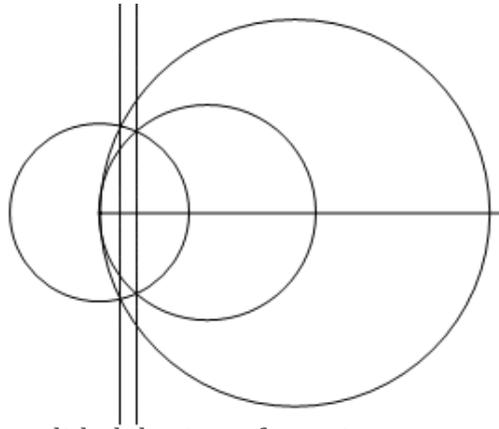
A partir de la circunferencia de centro en  $O$  y de radio  $r$ , se define el inverso de un punto  $P$  diferente de  $O$ , como el punto  $P'$  del rayo  $OP$ , tal que, su distancia a  $O$  satisface la ecuación  $OP \times OP' = r^2$  (*Figura 103*).

De inmediato, se tiene como consecuencia, que el inverso de  $P'$  es  $P$  y que si  $P$  se encuentra en la circunferencia, el punto  $P$  es invariante; es decir, que su imagen por inversión es él mismo. Este concepto de invariancia, se agranda al tener que, todo el círculo es invariante consigo mismo, porque cada uno de sus puntos es invariante; toda recta que pasa por el centro  $O$  es invariante, aunque no punto por punto, porque los únicos puntos invariantes resultan ser los dos puntos de intersección con la circunferencia, que son extremos del diámetro.

El inverso de un punto  $P$  en el exterior del círculo se puede construir trazando la circunferencia cuyo diámetro es el segmento  $OP$  y que corta a la circunferencia de inversión en  $T$ ; la perpendicular a  $OP$  desde  $T$  corta a este diámetro en  $P'$  o viceversa. Desde la semejanza de los triángulos rectángulos  $OPT$  y  $TPP'$ , se puede inferir el cumplimiento de la definición de la imagen inversa de un punto  $P$ . Aquí, también se puede observar que, los segmentos  $OT$  y  $PT$  son perpendiculares, lo que anima a asegurar que los dos círculos así definidos son ortogonales, y que cualquier punto del arco exterior se transforma en un punto del arco interior de la misma circunferencia; y viceversa, es decir, que la circunferencia de diámetro  $OP'$  es invariante para la inversión, pero no punto por punto. En este sentido, tan solo son invariantes absolutos los puntos  $T$  y su simétrico respecto de  $P$ , esto es,  $P'$ .

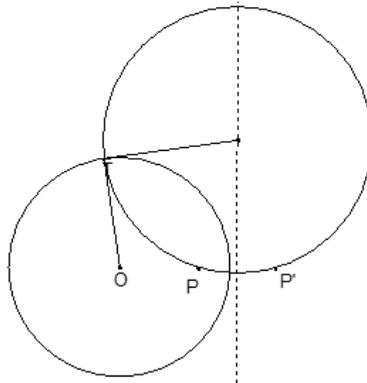
### 3.2. CÍRCULOS ORTOGONALES

Como se dijo, dos círculos son ortogonales si intersecándose en dos puntos, las tangentes comunes en tales puntos de contacto son perpendiculares. De esta simple definición aparece como consecuencias que, el círculo  $O$  tiene infinitos círculos ortogonales con él; y algo más, cada uno de esos círculos es invariante respecto de la inversión sobre  $O$  (*Figura 104*).



*Figura 104.* Ortogonalidad de circunferencias  
Fuente: elaboración propia

Como consecuencia inmediata de la definición de Punto Inverso, se tiene que, todas las circunferencias que pasan por dos puntos mutuamente inversos  $P$  y  $P'$  y cuyos centros se encuentran en la mediatriz de tales puntos, son ortogonales y, en consecuencia, cada una de las circunferencias es invariante respecto de la inversión en la otra. Así, cada circunferencia se transforma en sí misma. Este punto es un asunto notable y se debe tener en cuenta en la solución del Décimo Caso del Problema de Apolonio (*Figura 105*).



*Figura 105.* Verificación de la ortogonalidad de circunferencias  
Fuente: elaboración propia

Y claro, también resulta evidente que, en un plano se pueden escoger infinitas circunferencias que son invariantes respecto de un círculo  $O$ .

Como resultado de lo descrito, se tiene que, el inverso de un punto  $P$  es el segundo punto de intersección de dos o más círculos que son ortogonales al círculo inicial y que pasan por  $P$  (Figura 106).

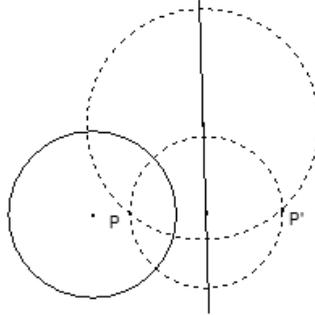


Figura 106. Las circunferencias por dos puntos mutuamente inversos son ortogonales

Fuente: elaboración propia

### 3.3. INVERSIONES DE RECTAS Y CÍRCULOS

Se afirmó que, las rectas que pasan por el centro del círculo se invierten en sí mismas, pero no punto a punto; solo los puntos que son extremos del diámetro son invariantes en sentido absoluto.

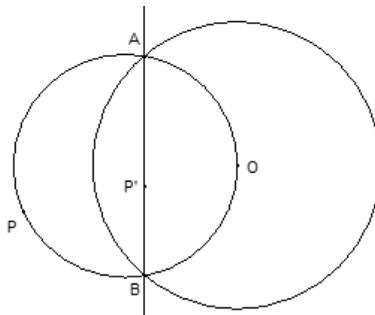


Figura 107. Inversión de una recta

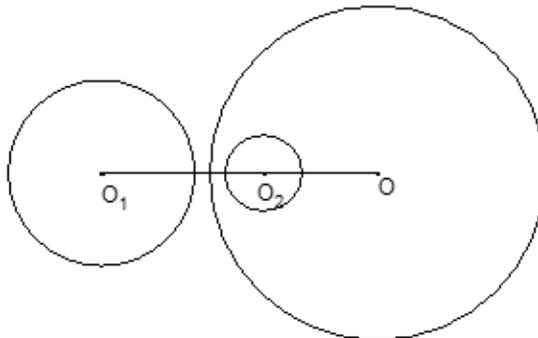
Fuente: elaboración propia

**Teorema 1.**

La imagen de cualquier línea recta que no pase por el centro del círculo de inversión es una circunferencia que contiene al centro del círculo de inversión y, consecuentemente, la imagen por inversión de una circunferencia que pasa por el centro del círculo de inversión, es una recta perpendicular a la línea de centros que contiene a los puntos de intersección de tales circunferencias y que no pasa por el centro del círculo de inversión (*Figura 107*).

**Teorema 2.**

La imagen de una circunferencia que no pasa por el centro de la circunferencia de inversión, es otra circunferencia que no pasa por el centro de la circunferencia de inversión. Los centros de las tres circunferencias permanecen alineados (*Figura 108*).



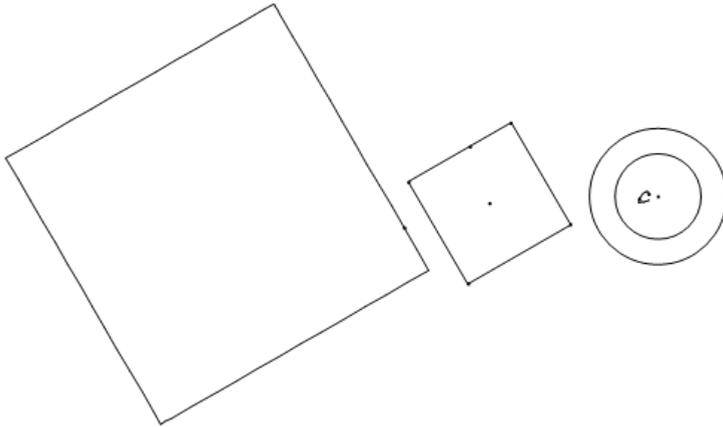
*Figura 108.* Inversión de una circunferencia

Fuente: elaboración propia

**Nota**

La Inversión es una transformación del plano que preserva la amplitud en sentido inverso, es decir, todo ángulo se invierte en un ángulo igual, y más estrictamente, en su ángulo opuesto, como se observó, al preservar la

ortogonalidad de circunferencias ortogonales que pertenecen invariantes a la transformación. Así, las circunferencias ortogonales se invierten en circunferencias ortogonales, en donde se incluyen a las rectas que pasan por el centro de la circunferencia de inversión.

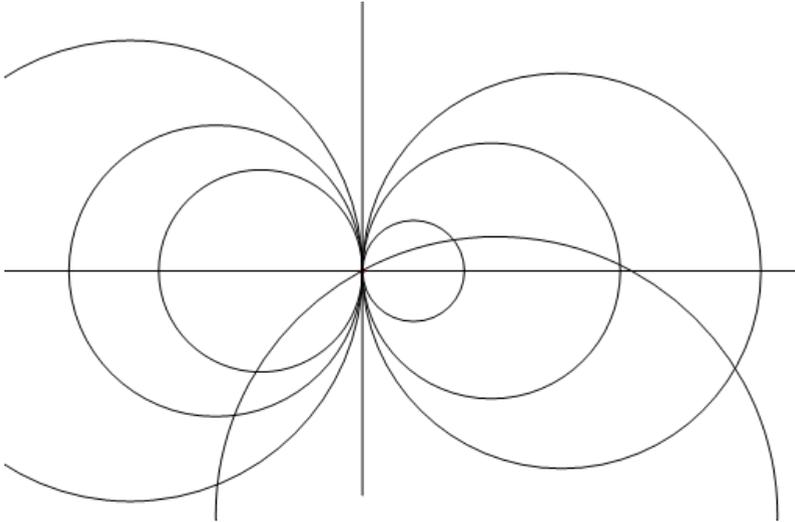


*Figura 109.* Compuesta de dos inversiones concéntricas

Fuente: elaboración propia

De modo que, al preservar amplitud y tener sentido inverso, la compuesta de dos inversiones en circunferencias concéntricas, se convierte en una dilatación u homotecia, pues se preserva de manera absoluta el paralelismo; la razón de la homotecia de centro en  $O$ , tiene como factor  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ , siendo  $r_1$  el radio de la circunferencia sobre la que actúa en primera instancia la compuesta de inversiones, y  $r_2$  el radio de la circunferencia de inversión final. En la figura anterior, se avizora la forma en que un cuadrado pequeño se dilata por composición inversiva a través de dos circunferencias concéntricas y se ve la forma en que el paralelismo se conserva (*Figura 109*).

### 3.4. DOS PROBLEMAS DE FÁCIL SOLUCIÓN



*Figura 110.* Una circunferencia secante a una familia infinita de ellas  
Fuente: elaboración propia

Al considerar una familia de circunferencias tangentes unas a otras y al eje  $Y$ , que concurren al origen de coordenadas, y una circunferencia que pasando por el origen no es tangente al eje  $Y$ , puede demostrarse por inversión que, esta última circunferencia corta a todas y cada una de la familia, debido a que, la inversión preserva el ángulo de incidencia (*Figura 110*).

De este modo, las circunferencias tangentes, se convierten por inversión respecto de cualquier circunferencia con centro en el origen de coordenadas, en una familia de rectas paralelas y, la circunferencia no tangente, se invierte en otra recta que corta a la familia de paralelas bajo el mismo ángulo de incidencia (*Figura 111*).

Es más evidente entre rectas que, una secante a un par de paralelas también corta a toda la infinita familia de paralelas a ellas; la inversión resuelve de manera clara, que este hecho se traslada de manera fiel, al caso de las circunferencias que concurren tangencialmente al origen de coordenadas.

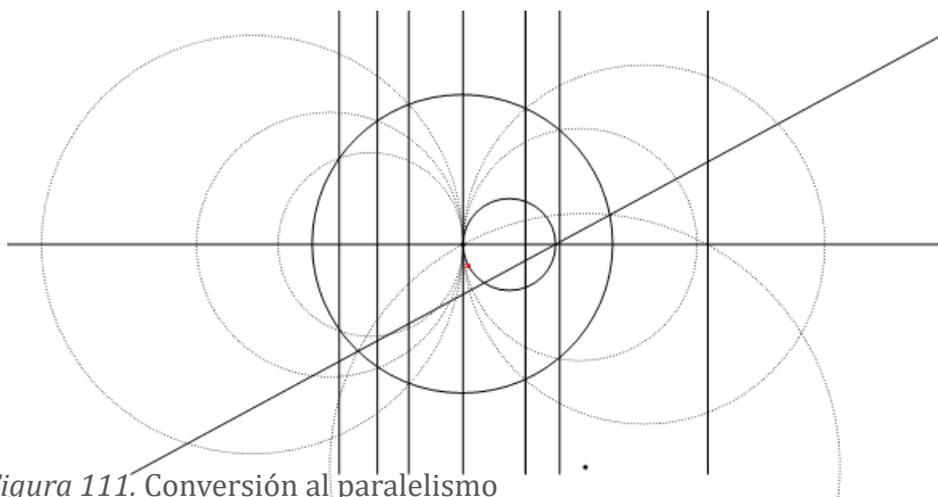


Figura 111. Conversión al paralelismo

Fuente: elaboración propia

Un resultado general y derivado de lo expuesto respecto de la inversión, es el de la preservación de la tangencia entre objetos geométricos; facultad esta que se emplea para resolver de manera efectiva un caso del afamado Problema de Apolonio.

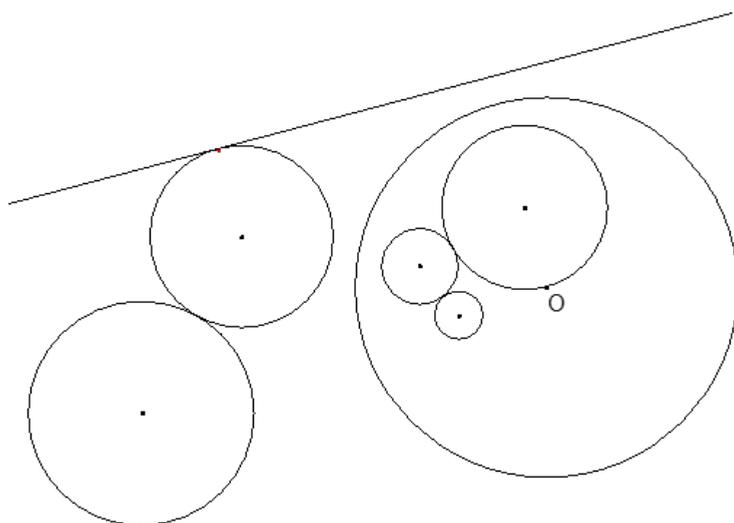


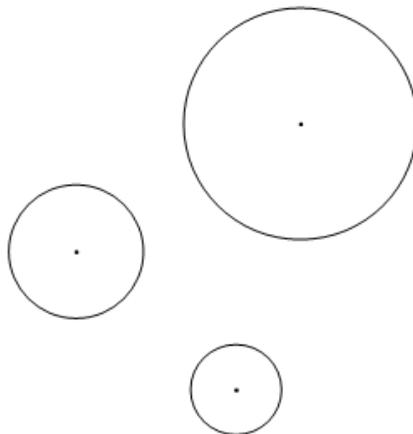
Figura 112. Preservación de la tangencia en objetos

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 112*, las dos circunferencias tangentes entre sí y la recta tangente a una de ellas, se transforman en objetos al interior de la circunferencia de inversión que preservan su carácter de tangentes. Este hecho, permite convertir el problema de la construcción de la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas (siempre que el problema tenga solución) al problema de calcular la circunferencia tangente a dos rectas paralelas y una circunferencia contenida en su franja.

### 3.5. EL PROBLEMA DE APOLONIO

El Problema de Apolonio ha sido heredado desde la antigüedad y consiste en utilizar tan solo regla y compás, a la usanza euclidiana, para construir la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas. Las tres circunferencias dadas pueden tener diferente radio y pueden o no intersectarse unas a otras. Desde luego, aparecen situaciones en la que resulta imposible su solución; por ejemplo, el caso en que los centros de las circunferencias sean colineales y los radios de las mismas sean diferentes, porque de tener el mismo radio, la circunferencia tangente es el caso defectuoso de una recta que se adopta como una circunferencia de radio infinito, la recta es cualquiera de las dos rectas tangentes comunes a las tres circunferencias.



*Figura 113.* El Décimo Caso del Problema de Apolonio

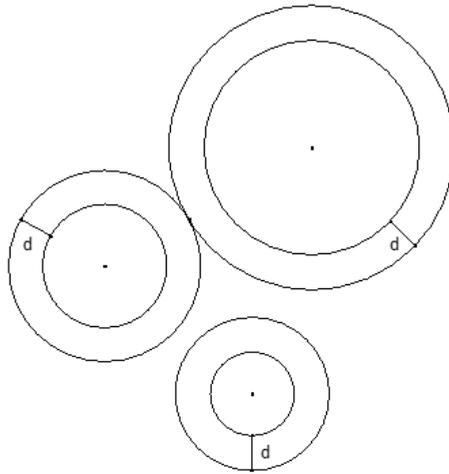
Fuente: elaboración propia

Y así, pueden pensarse en casos de solución imposible, como si dos o las tres circunferencias sean concéntricas.

El Problema de Apolonio, consiste en construir una circunferencia tangente a tres objetos geométricos que pueden ser puntos, rectas o circunferencias. Se presentan diez casos particulares al combinar los objetos base: puntos, rectas y circunferencias, y algunos de los casos producen subcasos especiales.

Concentramos la atención en la solución del caso especial de la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas, siempre que la solución sea posible. La búsqueda de la solución al problema, es una tarea pesada sino se recurre a la inversión y, de hecho, se inicia pensando en tres circunferencias dispuestas como en la *Figura 113*, y que las mismas posean diferentes radios; hecho que no implica diversos caminos de solución- Así que, la solución de otros casos y disposiciones, siguen los pasos específicos que aquí se señalan.

La solución al problema comienza con el incremento  $d$  para cada uno de los radios de las tres circunferencias; incremento que se consigue como el punto de contacto para que las dos circunferencias más cercanas sean tangentes entre sí; tales nuevas dos circunferencias, se convierten en dos rectas perpendiculares a su línea de centros, si se invierten respecto de cualquier circunferencia centrada en su punto de tangencia (*Figura 114*).



*Figura 114.* Uno de los pasos iniciales vía solución

Fuente: elaboración propia

Se hace evidente en este punto, que de ser posible hallar la solución del problema para estas tres nuevas circunferencias de mayor radio, incrementadas en el mismo valor  $d$ , el centro de la circunferencia tangente a ellas, también es el centro de la circunferencia tangente a las tres circunferencias originales, y que la diferencia entre los radios de las dos circunferencias tangentes es exactamente el mismo valor  $d$ . Esto significa que, al radio de la circunferencia tangente a las tres nuevas circunferencias, tan solo debemos incrementarlo en el valor  $d$  (*Figura 114*).

Retornando a la solución, ahora se hace suficiente recordar que, toda circunferencia que pase por el centro de la circunferencia de inversión, se transforma en una recta perpendicular a la línea de sus centros. Pero no tomaremos cualquier circunferencia de inversión, sino aquella circunferencia de centro en  $O$  que es ortogonal a la circunferencia de centro  $O_3$ , para tener que la circunferencia  $O_3$  sea invariante a la inversión sobre su circunferencia ortogonal  $O$  (*Figura 115*).

Según teorema 1, se tiene también que las circunferencias  $O_1$  y  $O_2$  se invierten en sendas rectas perpendiculares a la línea de sus centros y, por lo tanto, paralelas entre sí.

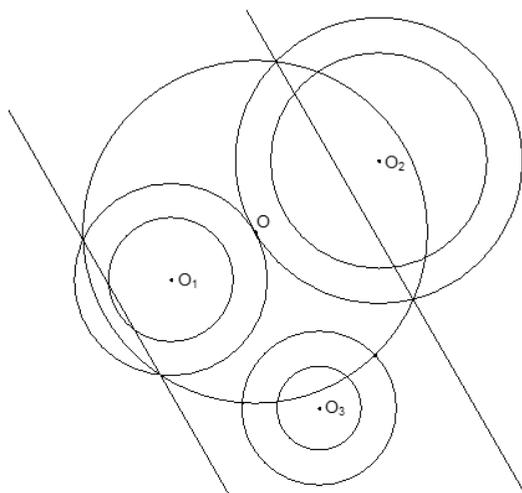


Figura 115. Rectas inversas paralelas  
Fuente: elaboración propia

Ahora, basta recordar que, a su vez, las rectas paralelas se invierten en las circunferencias  $O_1$  y  $O_2$ ; por tal razón, el problema de encontrar la circunferencia tangente a la vez a tres circunferencias, se ha transformado en el cálculo de la circunferencia tangente a dos rectas paralelas y a la circunferencia  $O_3$  que subyace entre ellas. Este último problema, se resuelve de manera fácil, recurriendo a la parábola (Figura 116).

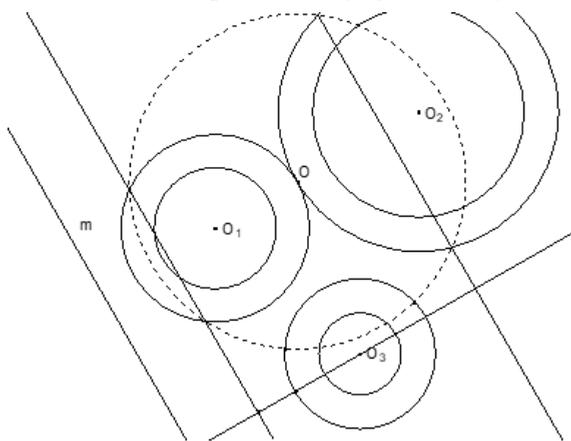


Figura 116. Un paso intermedio de la solución  
Fuente: elaboración propia

Es suficiente ubicar la directriz de la parábola como la recta  $m$  paralela a las rectas invertidas y una distancia igual a la del radio de la circunferencia  $O_3$ , incrementada en  $d$  (Figura 117).

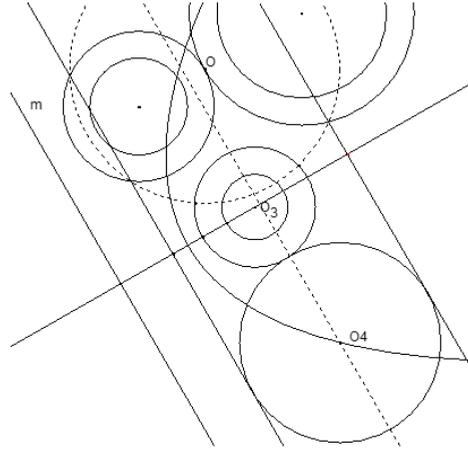


Figura 117. De nuevo la parábola en apoyo a la solución  
Fuente: elaboración propia

El centro  $O_4$  de la circunferencia tangente común de las rectas paralelas y de la circunferencia  $O_3$ , es el punto de intersección entre la elipse de directriz  $m$  y la mediatriz entre las paralelas. Con esto, se construye la circunferencia tangente a estos tres elementos y que se invierte, en consecuencia, en la circunferencia tangente a la vez a las circunferencias incrementadas  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$  (Figura 118 y 119).

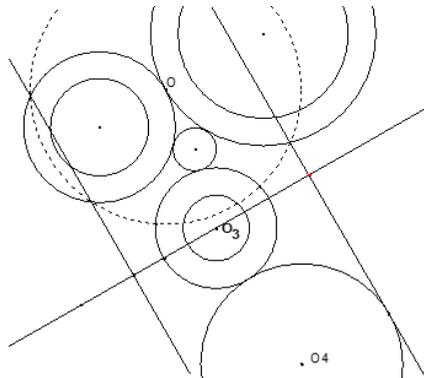
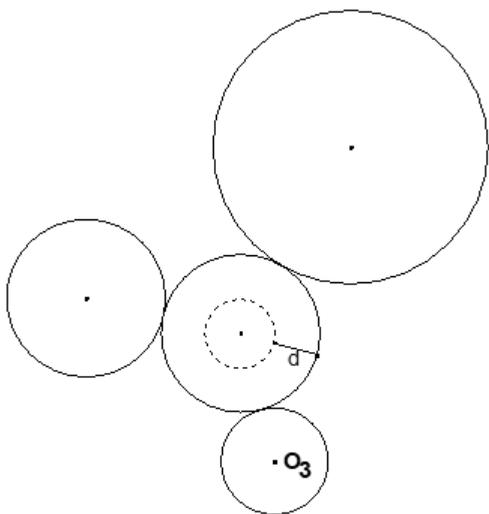


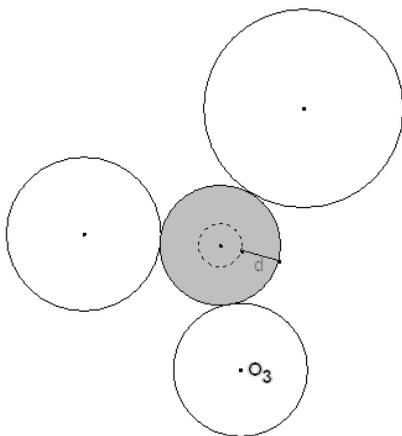
Figura 118. El centro de la circunferencia tangente  
Fuente: elaboración propia



*Figura 119.* Solución del Problema de Apolonio

Fuente: elaboración propia

La inversión de la circunferencia  $O_4$ , por último, debe incrementarse en la magnitud  $d$  para encontrar la circunferencia buscada y que es la tangente a las tres circunferencias dadas (*Figura 120*).

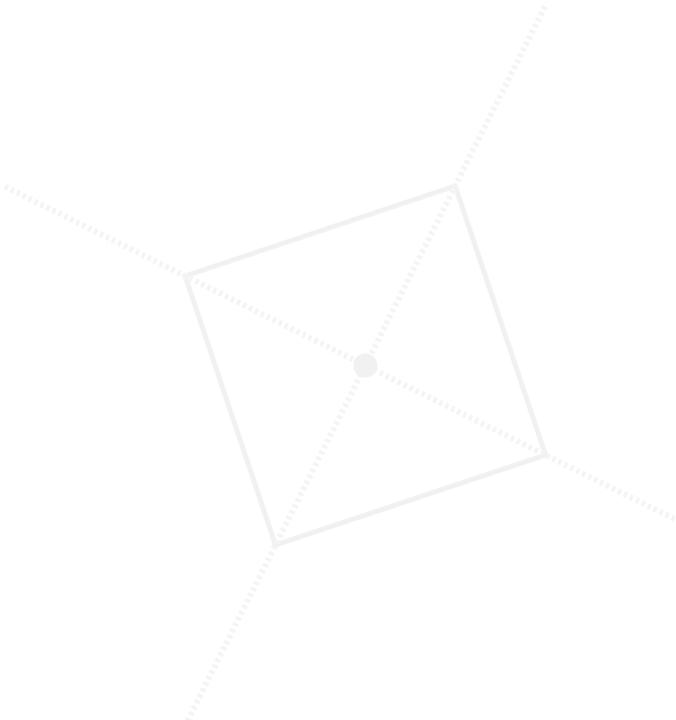


*Figura 120.* Una apreciación de la solución del Problema de Apolonio

Fuente: elaboración propia

Con Cabrí II Plus, se puede hacer el montaje de los pasos explicados aquí, previa la construcción de las macros que se infieren de las explicaciones dadas; por ejemplo, las macro construcciones de inversión de una recta, de una circunferencia pasando por el centro de inversión, de la circunferencia ortogonal a otra que pasa por un punto, de la circunferencia que pasa por tres puntos y de la elipse dada su directriz y su foco.

Pero se hace necesario aquí, repetir que muchos de los problemas que se solucionan en las matemáticas, se resuelven dentro de una estructura isomorfa más simple; así, por ejemplo, los cálculos multiplicativos entre reales positivos, se pueden hacer simples a través de la utilización de logaritmos que convierten el problema en el cálculo de sumas; igual, muchos problemas de variable real, se resuelven atravesando el terreno de la variable compleja. En el caso que se ha expuesto, la construcción de la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas, se ha transformado en resolver la construcción de la circunferencia tangente a la vez a dos rectas paralelas y a un círculo compendiado en la franja que ellas determinan, y que, a todas luces, es un problema de mayor sencillez para el que toca aplicar el sentido común.



## CAPÍTULO 4. CÓNICAS EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

“La vida es una marioneta del tiempo en la medida en que cambia a cada instante, cambia el mundo interior y el exterior de forma que no somos los mismo dos instantes seguidos.”

Aldous Huxley (1894 - 1963)

En este capítulo, se efectúa una relación comparativa de las definiciones de los objetos en dependencia del espacio métrico que habitan. Los objetos son las cónicas: la circunferencia (como caso especial de una elipse), la elipse, la hipérbola y la parábola cuya definición depende de la existencia de rectas y la misma recta, que necesariamente se debe definir como el conjunto de puntos que equidistan de los dos puntos que la definen. Con este presupuesto, se hace fácil trabajar y comparar, pero al tiempo, evidenciar que la riqueza de las matemáticas radica en la versatilidad de su variedad; variedad que se asume, en ese caso, como un espacio métrico diverso.

Con seguridad, ejecutar los archivos elaborados en el CAS Derive, que tiene una estructura simple y de fácil manejo, permite la evidencia de objetos diversos y distintos a los que se está acostumbrado dentro del modelo de la geometría analítica e, incluso, de la sintética y, de hecho, causan asombro. Es un hecho simple también, encontrar similitudes, pero también diferencias.

La riqueza didáctica de este libro, aparece allí, consistente en el hecho en que las cónicas, su estudio y su aplicación a ciertas actividades geométricas prácticas, se desarrollan en tres espacios métricos diferentes, a saber: el espacio bidimensional real, el espacio hiperbólico del modelo del Disco de Poincaré y el espacio bidimensional discreto de los enteros.

El campo de acción en la métrica del taxista, que se adopta en este texto, es en consecuencia el dominio entero del plano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , en el que la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  del plano,  $P(a,b)$  y  $Q(c,d)$ , se calcula mediante la fórmula  $d(P,Q) = |a-c| + |b-d|$  y obedece a la forma que deben utilizar los taxistas (automovilistas) en el tráfico urbano, para sus desplazamientos (*Figura 121*). En esta forma, se impide ir de un punto  $A$  a un punto  $B$  a través de un segmento rectilíneo y, por el contrario, debe hacerlo a través de una trayectoria quebrada, recorriendo siempre la menor distancia posible. Las posibilidades de desplazamiento dependen de la ubicación de los extremos de la trayectoria y, en número, pueden ser abundantes, en la medida en que la distancia se va haciendo mayor. En la *Figura 122*, se ven algunas de tales posibilidades respecto del gráfico a izquierda, problema que es de interés dentro de la aritmética y, particularmente, en teoría de números.

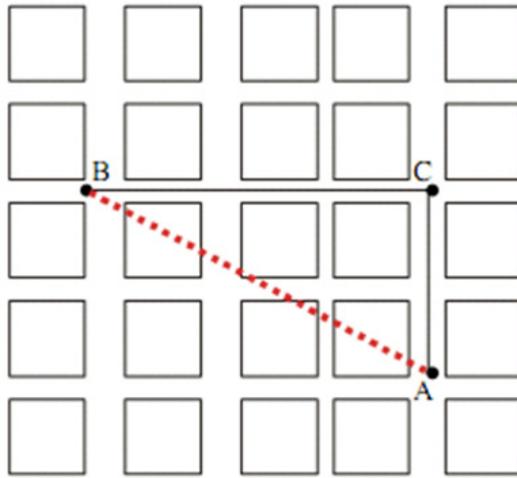


Figura 121. Un mapa urbano

Fuente: elaboración propia

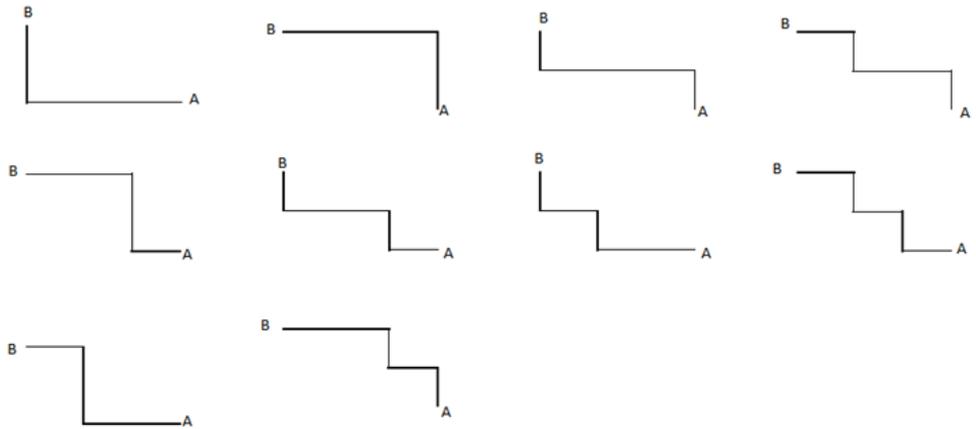


Figura 122. Recorridos urbanos posibles

Fuente: elaboración propia

Es de interés asegurar la forma en que es definido un objeto por un grupo de determinadas propiedades. Por ejemplo, al estudiar el comportamiento de las cónicas, las cuales se definen por propiedades o requisitos

fundamentadas en una función de distancia; es decir, la métrica que se emplee en la construcción teórica de los objetos, define el mundo en que ellos habitan.

En el desarrollo explicativo de la utilización de cada uno de los archivos utilitarios elaborados en el *CAS Derive*, se explican detalles importantes de su utilización y resultados que, por no ser motivo de estudio en este texto, no dejan de ser importantes dentro del modelo y son interesantes dentro de los campos de la aritmética, pues juega un papel central el conteo como evidencia directa del cumplimiento de los requisitos en cada uno de los casos.

#### 4.1. LA CIRCUNFERENCIA

En el modelo euclidiano y en espacios con otras formas del cálculo de distancias, la circunferencia es el lugar de los puntos que equidistan de otro, llamado centro. En la forma de medir en *métrica del taxista*, por asuntos topológicos, existen varios puntos que equidistan de otro, pero de ninguna manera se ubican en arcos. La circunferencia es la única cónica con centro en cualquier punto y radio entero mayor que cero. La existencia de otras curvas cónicas, como se verá más adelante, en esencia, depende de la paridad entre la distancia de los puntos y las constantes que las definen. Para este caso, el archivo implementado en CAS Derive, tiene el modelo indicado en el *Cuadro 1*.

$$l1(a,b,r).=VECTOR([a,b]+[i,r-i],i,0,r)$$

$$l2(a,b,r).=VECTOR([a,b]+[i,i-r],i,0,r)$$

$$l3(a,b,r).=VECTOR([a,b]+[-i,r-i],i,0,r)$$

$$l4(a,b,r).=VECTOR([a,b]+[-i,r-i],i,0,r)$$

$$circunferencia(a,b,r).$$

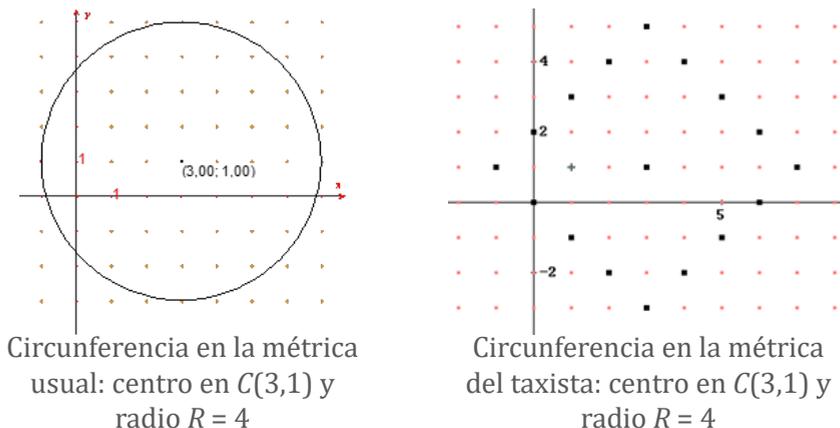
$$=APPEND([a,b],l1(a,b,r),l2(a,b,r),l3(a,b,r),l4(a,b,r))$$

$$grilla(n).=VECTOR(VECTOR([i,j],i,-10-n,10+n),j,-n,n)$$

*Cuadro 1.* Modelo de algoritmo implementado con CAS Derive

Fuente: elaboración propia

A continuación, en la *Figura 123* se esbozan dos gráficas comparativas que evidencian de manera creativa y recreativa, lo general de la definición y lo particular y rico del espacio métrico adoptado.



*Figura 123.* Evidencia análoga de circunferencias

Fuente: elaboración propia

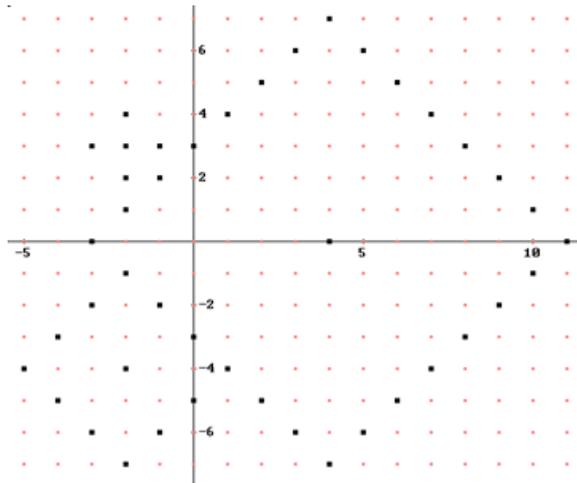
La función *grilla(n)* establece el reticulado. Es recomendable establecer *n* entre 15 y 20, y desde la opción *gráfica deshabilitar* la orden de cambio de color, y enseguida ubicar el próximo color en rojo.

Al simplificar la expresión *circunferencia(3,1,4)*, se genera una matriz de puntos que se dibuja desde la línea de opciones de pantalla en color negro y con tamaño grande para los puntos. De esta manera, se obtiene la gráfica de la derecha de la *Figura 123*.

En general, la orden *circunferencia(a,b,r)* se corresponde con una circunferencia de centro en  $C(a,b)$  y de radio  $R = r$ , siendo todos estos parámetros números enteros, puesto que se está trabajando sobre el plano discreto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Un asunto atinente a esta situación, es que siempre existe una circunferencia centrada en cualquier punto y con radio  $r \in \mathbb{Z}^+$ . Las siguientes son representaciones sustentadas desde las simplificaciones de las

expresiones  $\text{circunferencia}(-2,3,1)$ ,  $\text{circunferencia}(-2,-4,3)$  y  $\text{circunferencia}(4,0,7)$ , las cuales se representan en una sola gráfica con la intención de calcular sus puntos de intersección que, bajo estas condiciones, pueden ser más de dos (*Figura 124*).



*Figura 124.* Circunferencias secantes

Fuente: elaboración propia

## 4.2. LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos  $F_1 (a,b)$  y  $F_2 (c,d)$  llamados focos, es una constante  $r$  no menor que el valor de la distancia entre los focos.

El archivo utilitario conseguido para evidenciar el cumplimiento de los requisitos expuestos en esta definición, se muestra en el *Cuadro 2*, y en esencia, hace una escogencia de los puntos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que en un rectángulo adecuado del plano satisfacen los requisitos de la definición; esto mismo se hace en todas las cónicas.

$$\text{taxi}(a,b,c,d) := \text{ABS}(c - a) + \text{ABS}(d - b)$$

$$\text{suma}(a1,b1,a,b,c,d) := \text{taxi}(a1,b1,a,b) + \text{taxi}(a1,b1,c,d)$$

$$\text{prueba}(a1,b1,a,b,c,d,r) := \text{IF}(\text{suma}(a1,b1,a,b,c,d) = r, [a1,b1], [])$$

***ellipse\_oblicua(a,b,c,d,r):***

$=\text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{prueba}(\text{FLOOR}((a+c)/2)+i,\text{FLOOR}((b+d)/2)+j,a,b,c,d,r),i,-\text{FLOOR}(r/2)-1,\text{FLOOR}(r/2)+1),j,-\text{FLOOR}(r/2)-1,\text{FLOOR}(r/2)+1)$

***ellipse(a,b,c,d,r):= APPEND([a,b;c,d],ellipse\_oblicua(a,b,c,d,r))***

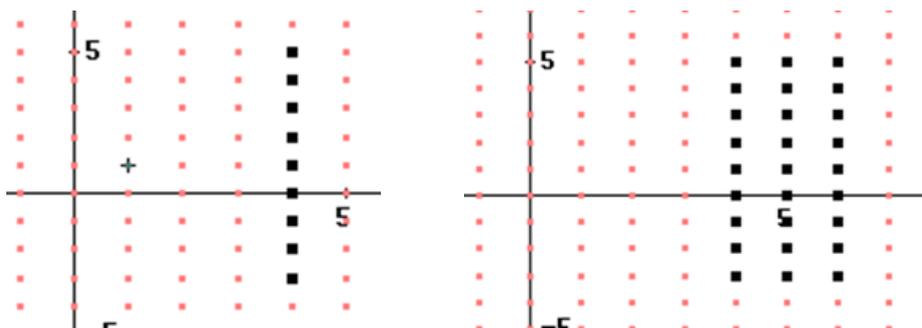
***ellipse\_taxista(a,b,c,d,r):= IF(MOD(ABS(a+b+c+d),2)***

$=\text{MOD}(r,2)\boxtimes\text{taxi}(a,b,c,d)"r,\text{ellipse}(a,b,c,d,r),"No\ existe")$

***grilla(n).=VECTOR(VECTOR([i,j],i,-10-n,10+n),j,-n,n)***

Cuadro 2. Modelo de algoritmo para elipse implementado con CAS derive  
Fuente: elaboración propia

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de la utilización del aplicativo con el que muy pronto se decide que, la elipse existe solo cuando la paridad de la constante es igual a la de la suma de las cuatro componentes o coordenadas de los focos (Figura 125).



Elipse de focos  $F_1(4,5)$  y  $F_2(4,-3)$  y con radio  $r = 8$  que se halla con la orden *ellipse\_taxista(4,5,4,-3,8)*

Elipse de focos  $F_1(4,5)$  y  $F_2(6,-3)$  y con radio  $r = 10$  conseguida con la orden *ellipse\_taxista(4,5,6,-3,10)*

Figura 125. Casos típicos de elipses

Fuente: elaboración propia

En la elipse a izquierda de la Figura 126, los focos se ubican sobre la paralela al eje Y y la distancia entre ellos es igual a la constante. En la elipse de la derecha, los focos no se ubican en ninguna de las paralelas a los ejes,

pero la constante es igual a la distancia entre ellos; esto permite que la elipse adquiera una forma inusitada e inesperada.

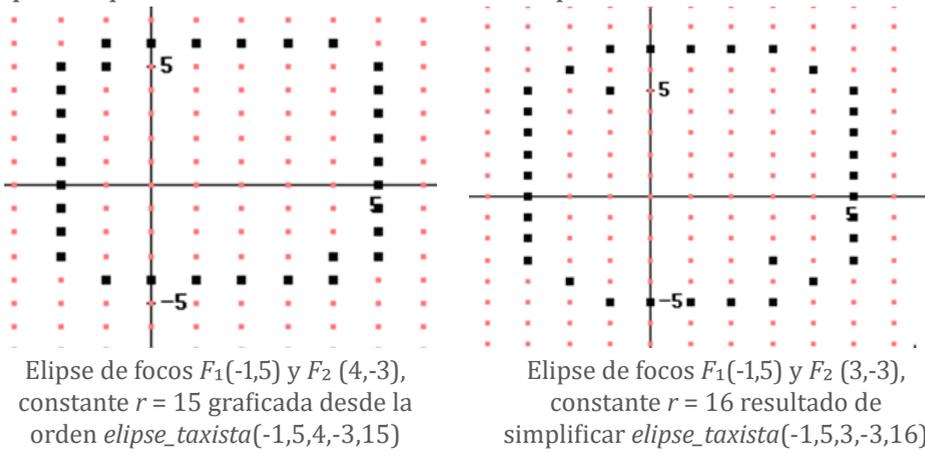


Figura 126. Elipses cercanas a las euclidianas

Fuente: elaboración propia

En los ejemplos precedentes se observa que, la paridad de la distancia focal en la métrica del taxista coincide con la paridad de la constante que se utiliza, y que no puede ser menor a la distancia entre los focos.

En los dos ejemplos de la Figura 127, los focos se ubican sobre paralelas a los ejes coordenados.

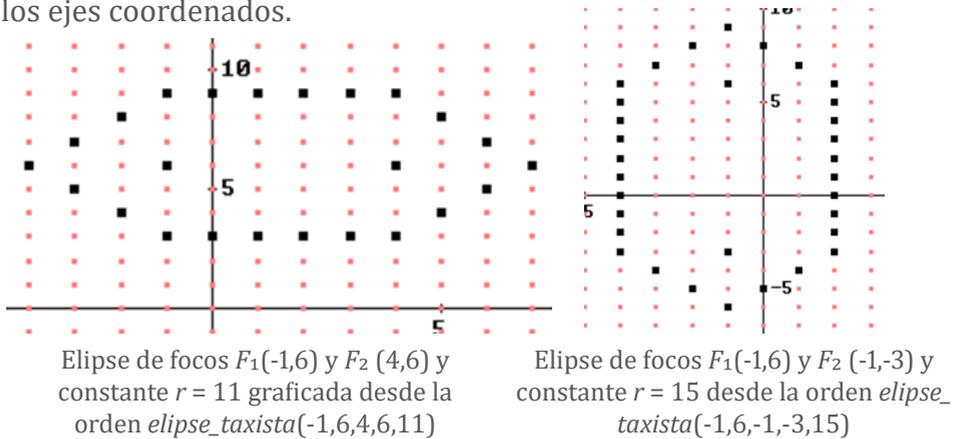


Figura 127. Elipses típicas en la métrica del taxista

Fuente: elaboración propia

### 4.3. LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos  $F_1 (a,b)$  y  $F_2 (c,d)$  llamados focos, es una constante  $r$  no mayor que el valor de la distancia entre los focos.

El archivo utilitario conseguido para evidenciar el cumplimiento de los requisitos expuestos en esta definición, se muestra en el *Cuadro 3* y, en esencia, hace una escogencia de los puntos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que en un rectángulo adecuado del plano satisfacen los requisitos de la definición; esto mismo se hace en todas las cónicas.

```

taxi(a,b,c,d):= ABS(c-a) + ABS(d-b)
FOCOS(a,b,c,d):= [a,b;c,d]
RESTA(a1,b1,a,b,c,d):= ABS(taxi(a1,b1,a,b) - taxi(a1,b1,c,d))
prueba(a1,b1,a,b,c,d,r):= IF(RESTA(a1,b1,a,b,c,d)=r,[a1,b1],[ ])
HIPERBOLA(a,b,c,d,r,n):
    =VECTOR(VECTOR(prueba(FLOOR((a+c)/2)+i,FLOOR
    ((b+d)/2)+j,a,b,c,d,r),i,-r-n,r+n),j,-r-n,r+n)
hiperbola_taxista(a,b,c,d,r,n):
    = APPEND(FOCOS(a,b,c,d),HIPERBOLA(a,b,c,d,r,n))
hiperbola_taxi(a,b,c,d,r,n):=IF(MOD(ABS(a+b+c+d),2)
    =MOD(r,2)andtaxi(a,b,c,d)<
    =r,hiperbola_taxista(a,b,c,d,r,n),"Noexiste")
grilla(n):=VECTOR(VECTOR([i,j],i,-10-n,10+n),j,-n,n)
    
```

*Cuadro3.*Modelo de algoritmo para hipérbola implementado con CAS Derive  
Fuente: elaboración propia

Al igual que en el caso de la elipse, la paridad de la suma de las coordenadas de los focos debe coincidir con la paridad de la constante diferencia para que exista hipérbola. En la función *hiperbola\_taxi(a,b,c,d,r,n)*, el valor de  $n$  amplía la zona de examen aumentando el área del rectángulo sobre el que se escogen los puntos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que satisfacen las condiciones.

Esta función determina la hipérbola de focos fijos  $F_1(a,b)$  y  $F_2(c,d)$ , y la constante diferencia  $r$  que no puede ser mayor que la distancia entre los focos. A continuación, se exponen algunos ejemplos de uso del utilitario.

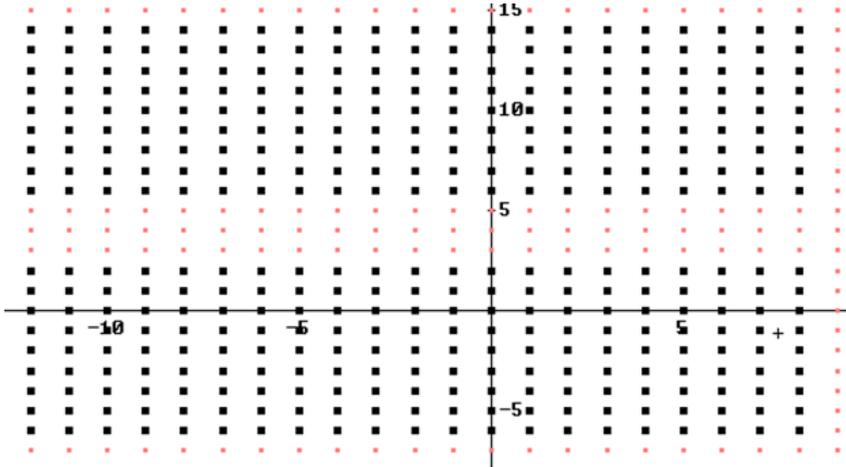


Figura 128. Una hipérbola fenomenal

Fuente: elaboración propia

La Figura 128 es la hipérbola que se consigue al simplificar y representar la orden *hiperbola\_taxi*(-2,2,-2,6,4,6) que se corresponde con la hipérbola de focos  $F_1(-2,2)$  y  $F_2(-2,6)$ , y constante  $r = 4$ .

En este caso, el sexto parámetro, que es igual a 6, amplía un poco el rectángulo de escogencia de los puntos que satisfacen los requisitos de la definición.

Para el caso representado en la Figura 128, se han tomado los focos sobre una línea vertical y la distancia focal como la constante diferencia que define la hipérbola.

Enseguida se representa la matriz que se consigue al simplificar la función *hiperbola\_taxi*(-2,2,-2,8,2,6), que tiene como focos  $F_1(-2,2)$  y  $F_2(-2,8)$  y la constante de diferencia  $r=2$ .

En este caso, los focos se ubican en una paralela al eje Y, y la distancia focal es mayor que la diferencia que impone requisito sobre la hipérbola (Figura 129).

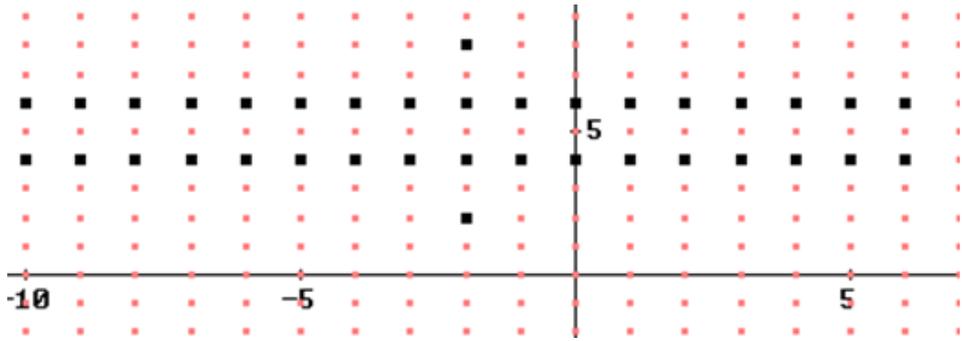
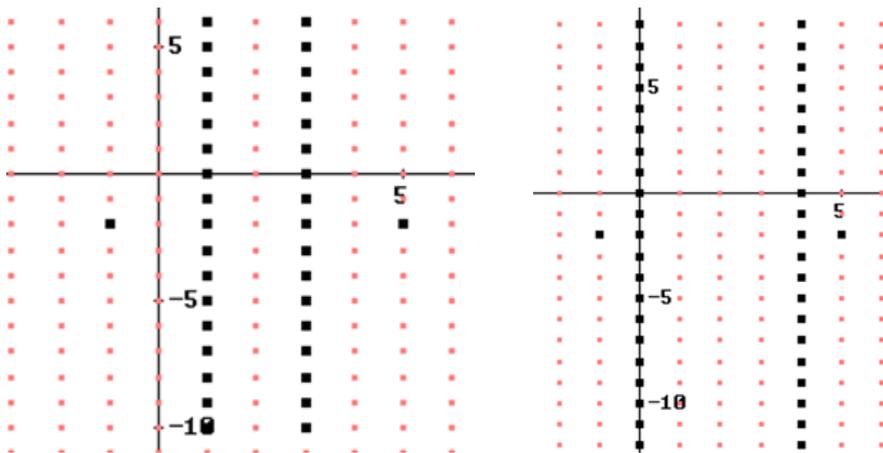


Figura 129. Una hipérbola curiosa

Fuente: elaboración propia

La Figura 130, corresponde a hipérbolas con focos en una paralela al eje X.



Hipérbola de focos  $F_1(-1,-2)$  y  $F_2(5,-2)$  y con constante  $r = 2$

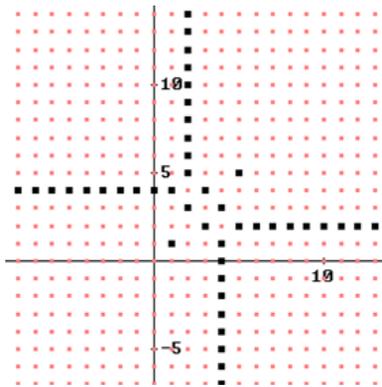
Hipérbola de focos  $F_1(-1,-2)$  y  $F_2(5,-2)$  y con constante  $r = 4$

Figura 130. Hipérbolas de este mundo discreto

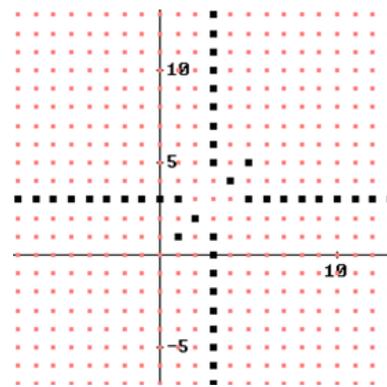
Fuente: elaboración propia

La utilización de los archivos es simple y, en consecuencia, en lo que sigue

se omiten al máximo las órdenes o expresiones que deben ejecutarse para simplificar y representar cada una de las cónicas en estudio (*Figura 131*).



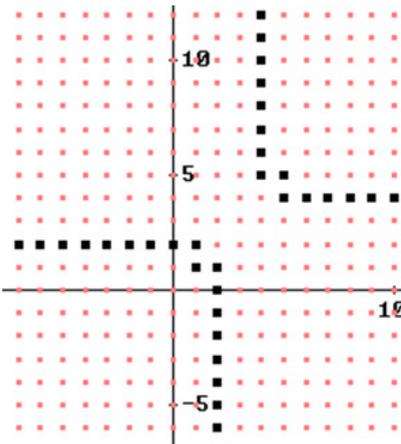
Hipérbola de focos  $F_1(1,1)$  y  $F_2(5,5)$  y con constante  $r = 2$



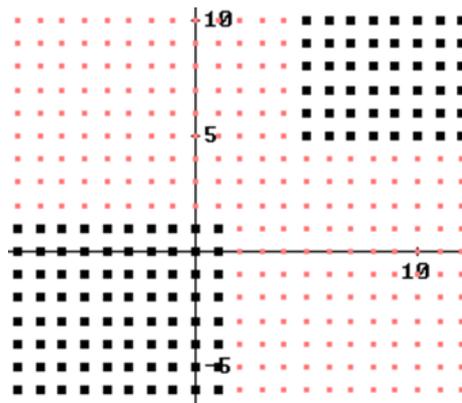
Hipérbola de focos  $F_1(1,1)$  y  $F_2(5,5)$  y con constante  $r = 4$

*Figura 131.* Hipérbolas similares a las clásicas euclidianas

Fuente: elaboración propia



Hipérbola de focos  $F_1(1,1)$  y  $F_2(5,5)$  y con constante  $r = 6$



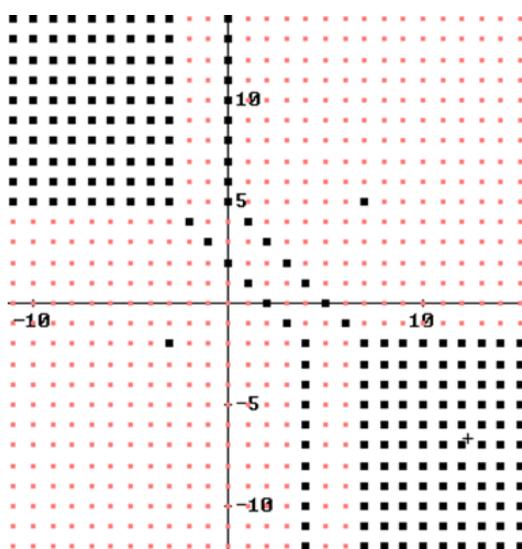
Hipérbola de focos  $F_1(1,1)$  y  $F_2(5,5)$  y con constante  $r = 8$

*Figura 132.* Hipérbolas que asombran por su apariencia

Fuente: elaboración propia

Observe que en la *Figura 132*, para la gráfica a derecha, el valor constante de la diferencia de distancias  $r=8$ , es igual a la distancia en la métrica del taxista entre los focos. El resultado no deja de ser especial y, de hecho, causa asombro, pues difiere de lo que se consigue con la métrica euclidiana usual.

La hipérbola de la *Figura 133* se encuentra al simplificar y graficar la expresión  $hiperbola\_taxi(-3,-2,7,5,3,10)$ ; es decir, es la de focos  $F_1(-3,-2)$  y  $F_2(7,5)$ , y radio o constante de diferencia  $r = 3$ . Todo esto no deja de ser llamativo, pues asegura cómo al cambiar la métrica se cambian los paradigmas.



*Figura 133.* Hipérbolas poco evidentes por su configuración

Fuente: elaboración propia

Es de utilidad graficar las matrices que resultan de simplificar las siguientes expresiones:

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,5,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,9,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,13,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,17,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,7,10)$

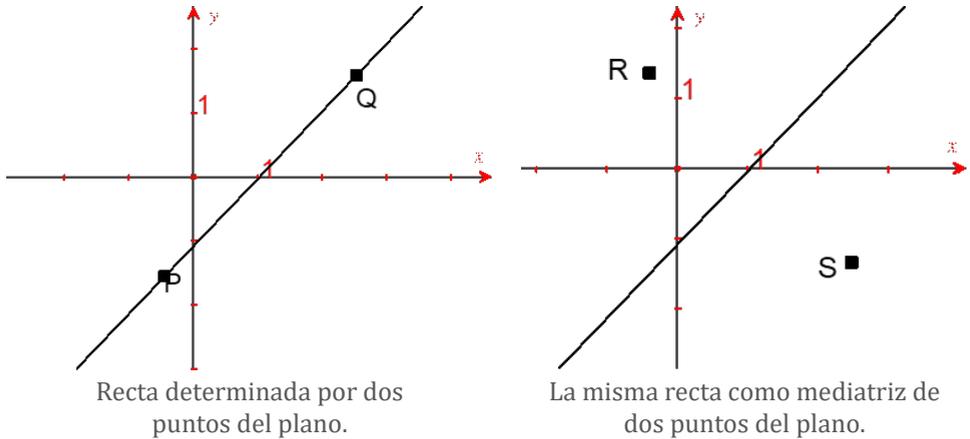
***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,11,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,15,10)$

***hiperbola\_taxi*** $(-3,-2,7,5,19,10)$

#### 4.4. LÍNEAS RECTAS

En la métrica euclidiana, dos puntos del plano determinan una recta que pasa por ellos; tal recta se determina por una infinidad de pares de puntos contenidos en la misma recta. Sin embargo, también es factible determinarla por infinidad de pares de puntos que no pertenecen a la recta y que se ubican en una perpendicular a ella y equidistantes del punto de intersección de las dos rectas. Es decir, es factible definir cualquier recta como el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos dados. Esta definición concuerda con la definición del lugar geométrico denominado mediatriz entre dos puntos (*Figura 134*).



*Figura 134.* Formas de definir una recta

Fuente: elaboración propia

Esta forma de definir la recta, como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos dados, permite el estudio de las rectas en general dentro de la métrica del taxista y, en consecuencia, estudiar y configurar las parábolas.

Se muestra a continuación el utilitario diseñado para este efecto, encontrando algunas particularidades para ellas. Por ejemplo, para definir una recta se requiere que la medida, en la métrica del taxista, sea un número par, además, se encuentra que existen solo tres tipos de rectas: paralelas al eje  $X$ , paralelas al eje  $Y$ , y paralelas a las bisectrices  $y = x$ ,  $ey = -x$ ,

en algún sentido segmentado. Esto permite al mismo tiempo, definir rectas paralelas y pares de rectas perpendiculares.

A continuación, en el *Cuadro 4* se detalla el archivo utilitario elaborado en el CAS Derive que implementa en la métrica del taxista la idea de mediatriz como definición de recta.

```

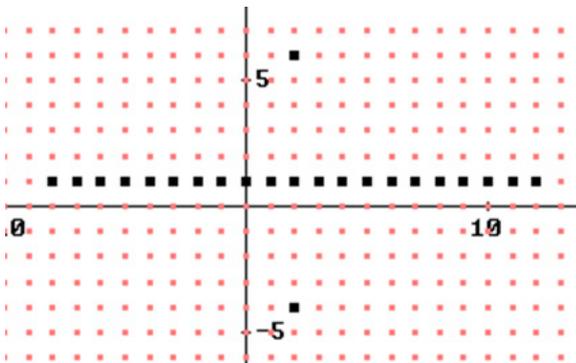
taxi(a,b,c,d): = ABS(c - a) + ABS(d - b)
prueba1(a1,b1,a,b,c,d):
    = IF(taxi(a1,b1,c,d)=taxi(a1,b1,a,b),[a1,b1],[ ])
linea(a,b,c,d,n):
    = VECTOR(VECTOR(prueba1(i,j,a,b,c,d),i,MIN(a,c)
    - n,MAX(a,c) + n),j,MIN(b,d) - n,MAX(b,d) + n)
lineaconpuntos(a,b,c,d,n): = APPEND([[a,b]],[[c,d]],linea(a,b,c,d,n))
linea_taxi(a,b,c,d,n): = IF(MOD(taxi(a,b,c,d),2)
    = 0,lineaconpuntos(a,b,c,d,n),"No existe")
M: = [0,-1; 1,0]
grilla(n): = VECTOR(VECTOR([i,j],i,-10 - n,10 + n),j,-n,n)
    
```

*Cuadro 4.* Modelo de algoritmo para líneas rectas implementado con CAS Derive  
Fuente: elaboración propia

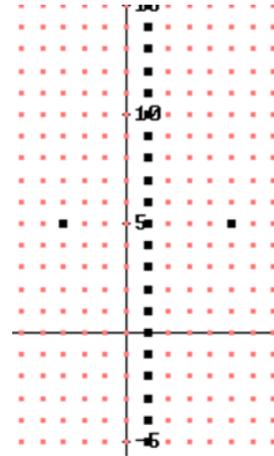
La hipérbola de la Figura 133, se encuentra al simplificar y graficar la expresión  $hiperbola\_taxi(-3,-2,7,5,3,10)$ ; es decir, es la de focos  $F_1(-3,-2)$  y  $F_2(7,5)$ , y radio o constante de diferencia  $r=3$ . Todo esto no deja de ser llamativo, pues asegura cómo al cambiar la métrica se cambian los paradigmas.

La función  $linea\_taxi(a,b,c,d,n)$  determina la mediatriz entre los puntos  $P(a,b)$  y  $Q(c,d)$ . El parámetro  $n$  se utiliza para ampliar el rectángulo de observación para la escogencia de los puntos que satisfacen los requisitos de equidistancia.

A continuación, se muestran ejemplos de la simplificación y graficación de rectas en la métrica del taxista (*Figura 135*).



Recta conseguida al simplificar  $linea\_taxi(2,-4,2,6,10)$  y que por consiguiente está determinada por  $P(2,-4)$  y  $Q(2,6)$ .

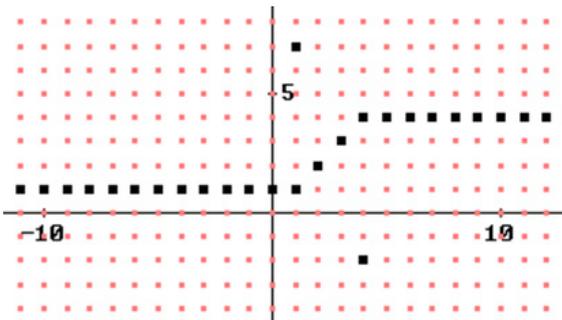


Recta determinada por los puntos  $P(-3,5)$  y  $Q(5,5)$ .

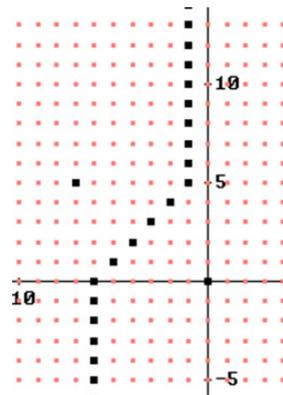
Figura 135. Rectas similares a las del mundo euclidiano

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 136* está representada la recta definida por la expresión  $linea\_taxi(1,7,4,-2,15)$ ; en consecuencia, es la mediatriz de los puntos  $P(1,7)$  y  $Q(4,-2)$ .



Recta definida por  $P(1,7)$  y  $Q(4,-2)$ .



Recta definida por  $P(-7,5)$  y  $Q(0,0)$ .

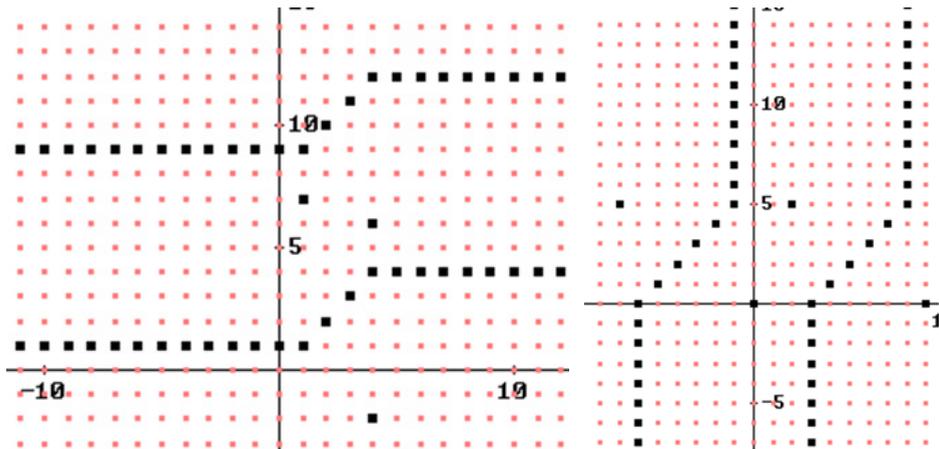
Figura 136. Rectas ligeramente diversas en el plano entero

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 136*, la recta a la izquierda, tiene mayor sentido de horizontalidad hacia el infinito; es decir, es paralela al eje  $X$ ; mientras que, la recta a derecha tiene mayor sentido de paralelismo con el eje  $Y$ . Al mismo tiempo, es evidente que muchas rectas tienen una porción segmentada paralela a las bisectrices de los cuadrantes, como se anotó antes. Esto permite definir, para estos dos casos de paralelismo usual de rectas, a los ejes coordenados, rectas paralelas que se desplazan según un vector en sentido vertical (sumando igual valor a las ordenadas de las coordenadas de los puntos), en el caso tipo a izquierda, y trasladando según un vector horizontal (sumando igual valor a las abscisas que definen los puntos) en el caso tipo a derecha.

De esta manera, los siguientes pares de órdenes producen rectas paralelas y corresponden a las que se presentan en la *Figura 137*.

$$\begin{aligned} & \textit{linea\_taxi}(1,7,4,-2,15); \textit{linea\_taxi}(1,7+8,4,-2+8,15) \\ & \textit{linea\_taxi}(-7,5,2,5,15); \textit{linea\_taxi}(-7+9,5,2+9,5,15) \end{aligned}$$



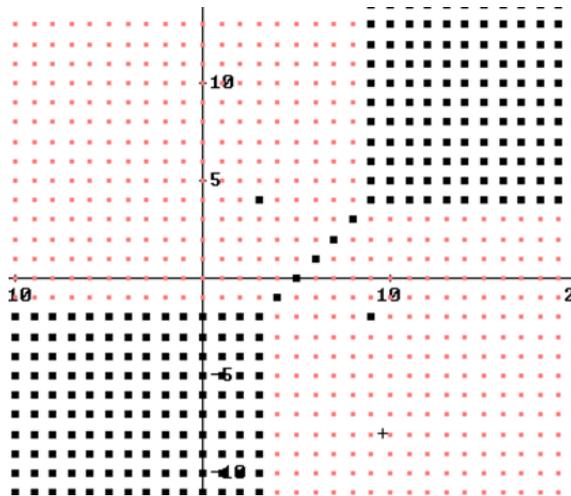
*Figura 137.* El concepto de paralelismo en rectas

Fuente: elaboración propia

La matriz  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  se utiliza para determinar rectas perpendiculares a una dada.

Antes de estudiar la perpendicularidad, conviene asegurar que la definición de recta que se ha propuesto es consistente y la única vía de definir líneas rectas dentro de la métrica del taxista; sin embargo, cuando los puntos que definen la recta son simétricos a una paralela a cualquiera de las dos bisectrices de los cuadrantes, la recta definida adquiere un aspecto que rompe lo paradigmático.

La siguiente recta definida por la expresión  $linea\_taxi(-2+5,4,4+5,-2,15)$  es un claro ejemplo de lo expuesto y se representa en la *Figura 138*.



*Figura 138.* El concepto de perpendicularidad

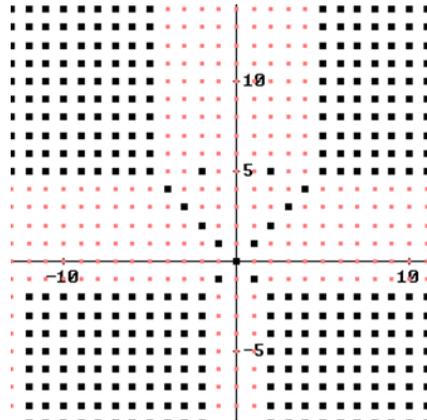
Fuente: elaboración propia

Ahora bien, debido a que la matriz  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  representa a la transformación lineal de una rotación en  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  de todos los puntos del plano alrededor del origen, se tiene una forma general de hablar de una perpendicular a una recta.

Siendo que  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ , las órdenes  $linea\_taxi(a,b,c,d,n)$  y  $linea\_taxi(-b,a,-d,c,n)$  producen rectas perpendiculares

alrededor del origen, que deben trasladarse en el sentido del paralelismo que se ha definido antes.

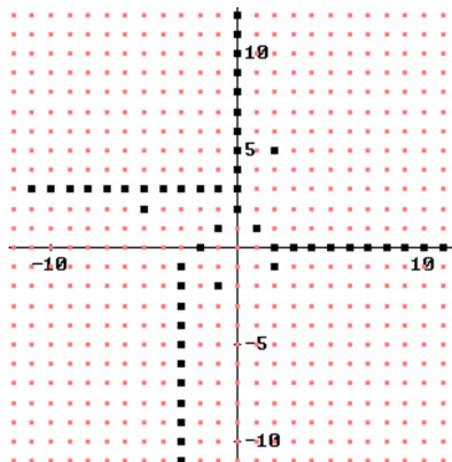
En la *Figura 139* se presentan dos ejemplos de rectas perpendiculares; el primero, determinado por las órdenes  $linea\_taxi(-2,5,5,-2,10)$  y  $linea\_taxi(-5,-2,2,5,10)$ .



*Figura 139.* Rectas perpendiculares

Fuente: elaboración propia

El siguiente par de rectas perpendiculares a representar, se determinan por las expresiones  $linea\_taxi(-1,-2,2,5,10)$  y  $linea\_taxi(2,-1,-5,2,10)$  (*Figura 140*).



*Figura 140.* Un nuevo par de recta perpendiculares

Fuente: elaboración propia

## 4.5. LA PARÁBOLA

Definida una recta y su perpendicular, cada una de ellas puede ser directriz de una parábola.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que tienen la misma distancia a una recta (directriz de la parábola) y a un punto fijo  $F(\alpha, \beta)$  llamado foco.

El archivo utilitario diseñado para la parábola, contiene los casos de los tres tipos de directrices y la ubicación del foco, con el fin de optimizar la zona a examinar de los puntos que satisfacen los requisitos que definen la parábola.

El utilitario se describe a continuación.

```

taxi(a,b,c,d):= ABS(c-a)+ABS(d-b)
lineah(centro,s,n):= VECTOR([centro-i,s],i,-n,n)
lineav(centro,s,n):= VECTOR([s,i],i,-n,n)
prueba(a1,b1,l,m,s):= IF(taxi(a1,b1,l,m)=b1-s,[a1,b1],[ ])
foco(l,m):=[l,m]
parabolaarriba(l,m,s,n):
    =VECTOR(VECTOR(prueba(i,j,l,m,s),i,l-n,l+n),j,s,m+3·n)
prueba1(a1,b1,l,m,s):= IF(taxi(a1,b1,l,m)=s-b1,[a1,b1],[ ])
parabolaabajo(l,m,s,n):
    =VECTOR(VECTOR(prueba1(i,j,l,m,s),i,l-n,l+n),j,m-3·n,s)
prueba2(a1,b1,l,m,s):= IF(taxi(a1,b1,l,m)=a1-s,[a1,b1],[ ])
prueba3(a1,b1,l,m,s):= IF(taxi(a1,b1,l,m)=s-a1,[a1,b1],[ ])
parabolaaderecha(l,m,s,n)
    =VECTOR(VECTOR(prueba2(i,j,l,m,s),i,s,s+2·n),j,m-2·n,m+2·n)
parabolaazquierda(l,m,s,n):
    =VECTOR(VECTOR(prueba3(i,j,l,m,s),i,s-2·n,s),j,m-2·n,m+2·n)
lineaoblicua(centro,desplazamiento,n):
    =VECTOR([i+desplazamiento,i],i,centro-n,centro+n)
prueba4(a1,b1,l,m,desp):= IF(taxi(a1,b1,l,m)

```

$$=a1-b1-desp,[a1,b1],[[]]$$

**parabolaaderechaoblicua(l,m,n,desplazamiento):**

$$=VECTOR(VECTOR(prueba4(i,j,l,m,desplazamiento),i,l-n,l+3\cdot n),j,m-2\cdot n,m+2\cdot n)$$

**prueba5(a1,b1,l,m,desp):= IF(taxi(a1,b1,l,m)**

$$=b1+desp-a1,[a1,b1],[[]]$$

**parabolaazquierdaoblicua(l,m,desp,n):**

$$=VECTOR(VECTOR(prueba5(i,j,l,m,desp),i,l-2\cdot n,l+n),j,m-2\cdot n,m+3\cdot n)$$

**grilla(n):= VECTOR(VECTOR([i,j],i,-10-n,10+n),j,-n,n)**

En las funciones iniciales, el centro es el parámetro que indica el punto del segmento central de recta que se va a representar, el cual, se sugiere que sea también una de las componentes de las coordenadas del foco, así debe ser abscisa u ordenada.

El parámetro  $s$  es la recta horizontal  $y = s$  o la vertical  $x = s$  en concordancia con el tipo de parábola que se va a representar. Los parámetros  $l$  y  $m$  son las coordenadas del foco  $F(l,m)$ , y de nuevo, el elemento  $n$  amplía el rectángulo sobre el que el test (pruebas) escoge los puntos que satisfacen los requisitos que definen la parábola.

El usuario del utilitario debe ejercer una actividad interactiva en concordancia con la ubicación de los focos y de los tipos de recta que definen las parábolas.

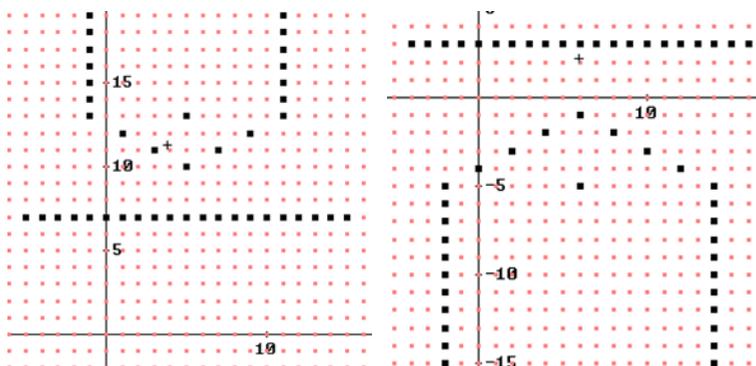


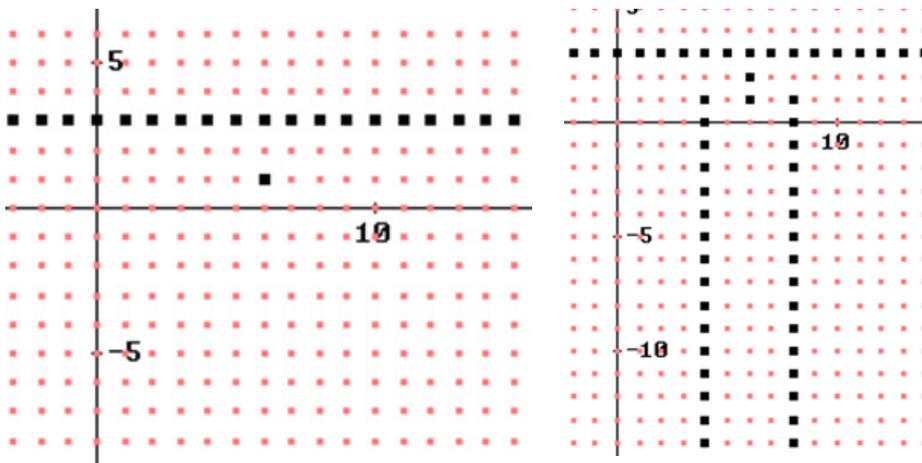
Figura 141. Parábolas con directrices horizontales

Fuente: elaboración propia

En la *Figura 141* se han utilizado las funciones:  $lineah(5,7,10)$ ,  $foco(5,13)$  y  $parabolaarriba(5,13,7,10)$ . Se observa que la ubicación del foco requiere de una parábola cóncava hacia arriba. La representación corresponde al gráfico de la izquierda en la *Figura 141*; la directriz es la recta  $y = 7$  y el foco es  $F(5,13)$ .

En la *Figura 141*, el gráfico a la derecha corresponde a la parábola que tiene como directriz la recta  $y = 3$  y foco  $F(6,-5)$ ; para ello, se han simplificado las expresiones  $lineah(6,3,10)$ ,  $foco(6,-5)$  y  $parabolaabajo(6,-5,3,10)$ .

Si en el segundo caso, se cambia el foco por el punto  $F(6,1)$ , manteniendo la directriz, solo cambiaría la tercera orden por  $parabolaabajo(6,1,3,10)$  y se vería la secuencia de dos cuadros como se presenta en la *Figura 142*.



*Figura 142.* Parábolas que no son evidentes

Fuente: elaboración propia

Las dos ilustraciones de la *Figura 143*, se corresponden con directrices verticales y con focos ubicados a derecha o izquierda de las mismas.

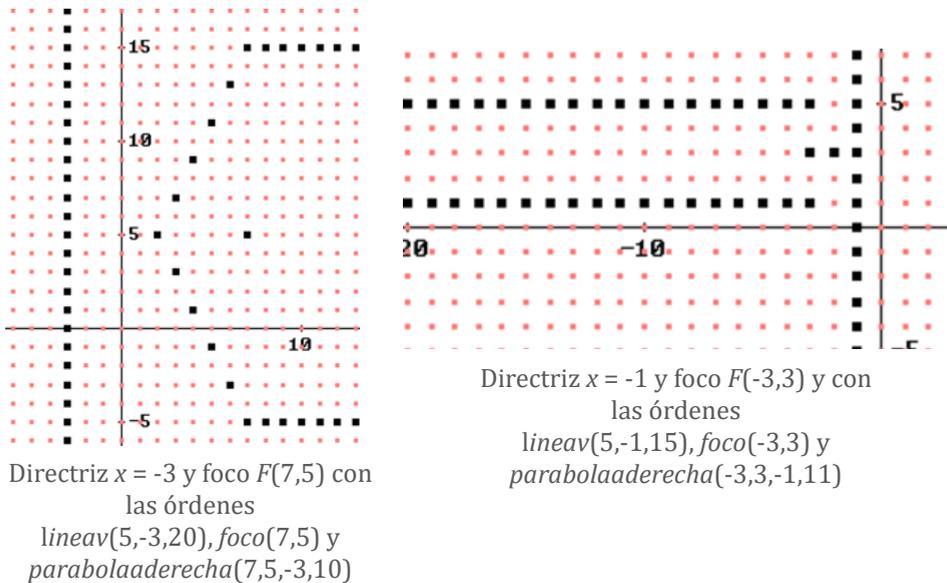


Figura 143. Parábolas cóncavas a izquierda y derecha

Fuente: elaboración propia

En caso de que la directriz sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante  $y = x$ , se tiene la orden *lineaoblicua*(centro,desplazamiento,n) en la que, *centro* indica un punto central  $(c,c)$  de la bisectriz; el parámetro *desplazamiento* es el valor que la mencionada bisectriz se desplaza y *n* es la mitad de puntos por calcular de la recta.

La secuencia de órdenes del siguiente ejemplo son: *lineaoblicua*(5,4,12), que calcula unos 24 puntos de la recta  $y = x + 4$ ; *foco*(12,2), que ubica el foco de la parábola  $F(12,2)$ ; y la expresión *parabolaaderechaoblicua*(12,2,12,4) en la que, el último valor 4, se corresponde con el desplazamiento de la bisectriz del primer cuadrante (Figura 144).

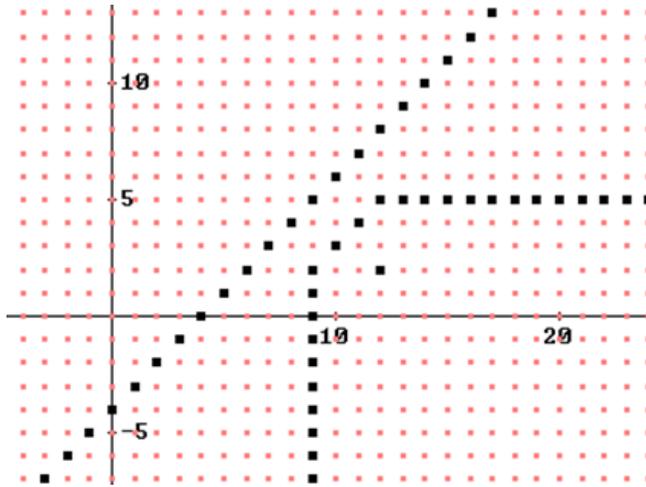


Figura 144. Parábolas con directriz oblícua

Fuente: elaboración propia

Con las siguientes expresiones:

$lineaoblicua(3,2,15)$ ,  $foco(-3,3)$  y  $parabolaizquierdaoblicua(-3,3,2,10)$ , se obtiene la representación de la Figura 145, que corresponde a la parábola que tiene como directriz la recta  $y = x + 2$  y foco  $F(-3,3)$ .

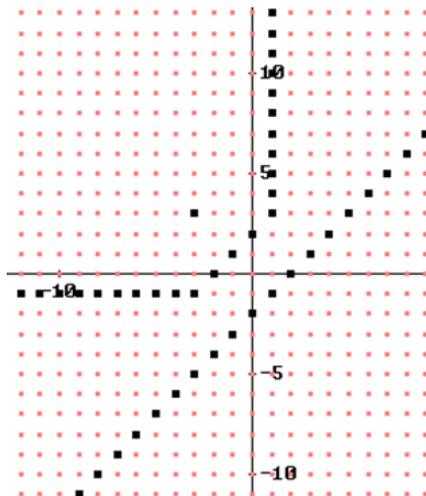


Figura 145. Parábola con directriz oblícua

Fuente: elaboración propia

De hecho, en varias ocasiones no existe parábola y se deja como ejercicio estudiar el caso y, en consecuencia, redefinir cada parábola.

En una analogía con la métrica usual de Euclides, respecto de la circunferencia, también existe un solo tipo de circunferencias, salvo que se degeneren en un punto que, en este caso, son familias de rombos con diagonales paralelas a los ejes coordenados.

En la métrica del taxista también hay tres tipos de elipses, a saber: segmentos, rectángulos completos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y elipses con ejes paralelos a los ejes coordenados; esto sugiere la inexistencia de elipses con ejes orientados en diferente inclinación.

Para el caso de las hipérbolas, hay alguna variedad, pues se alejan del paradigma de curvas y pueden eventualmente tener sectores conformados por nubes infinitas de puntos. También hay tres tipos de rectas: las paralelas a los ejes coordenados, aquellas que tienen un sector oblicuo finito paralelo a las bisectrices de los cuadrantes, y las que tienen un sector infinito de puntos como nube rectangular. En este sentido, también se abre la posibilidad de distinguir un conjunto finito de clases de parábolas y que se corresponden con las tres clases de rectas que en este caso adquieren el título de directrices. Las parábolas que tienen directriz paralela a la bisectriz a un cuadrante, se acercan en gran sentido a la imagen de hipérbola de la métrica usual.

Lo significativo de este estudio, es que, si cada una de las cónicas en las dos diferentes métricas tienen elementos similares, son justamente los aspectos que las diferencian los que permiten decidir que la métrica del taxista es un recurso didáctico importante para la comprensión estructural de los conceptos.

Como último ejemplo y para corroborar cómo se cambian los paradigmas, se presenta una parábola sin vértice y se deja como tarea el disponer una parábola, tal que, si el foco queda a una distancia de 1 de su directriz, el mismo foco se convierte en vértice de la parábola.

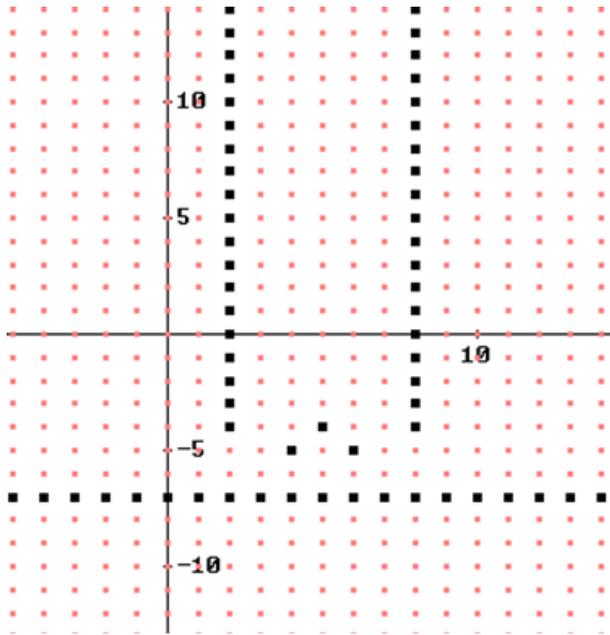


Figura 146. Una parábola a todas luces elegante

Fuente: elaboración propia

La parábola de la Figura 146, surge de las órdenes *lineah*(5,-7,15), *foco*(5,-4) y *parabolaarriba*(5,-4,-7,13).

Y unos últimos ejemplos, en los que se indica la forma en que se modifican el sentido de focos y vértices.

La primera parábola adopta una especie de dos vértices, se representa en la Figura 147, obtenida a través de la simplificación de las siguientes expresiones *lineav*(4,10,20), *foco*(5,4) y *parabolaizquierda*(5,4,10,15).

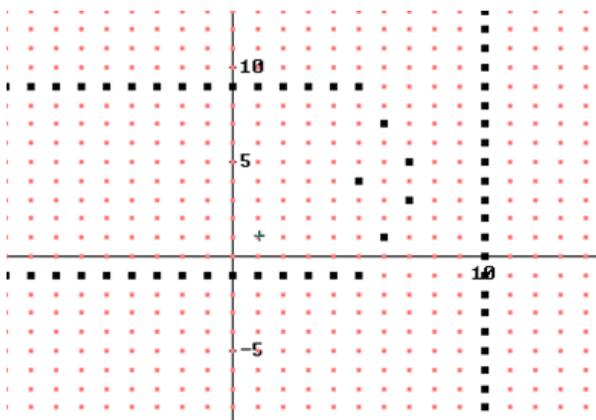


Figura 147. Un nuevo ejemplo de parábola cóncava a izquierda  
Fuente: elaboración propia

Estudieemos lo que ocurre cuando la distancia del foco está a un solo paso de la directriz (Figura 148).

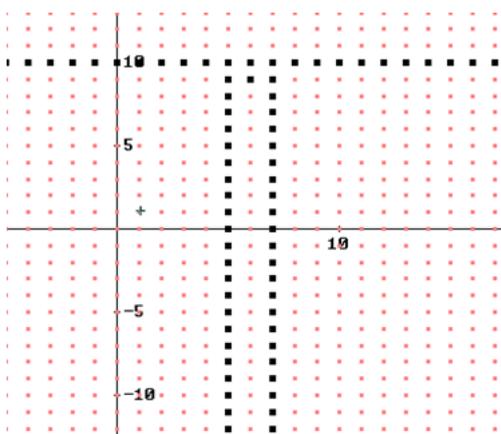
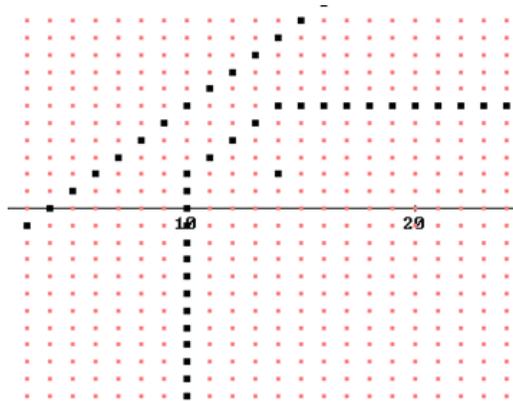


Figura 148. Una parábola que relaciona la distancia del foco a su directriz  
Fuente: elaboración propia

Es claro que, el foco es a la vez vértice de la parábola y, solo este hecho, cambia sustancialmente los aspectos paradigmáticos del conocimiento y ponen en apuesta el interés del estudio por nuevas particularidades de los objetos geométricos.

En el ejemplo de la *Figura 148*, se utilizaron las expresiones  $foco(14,2)$ ,  $lineaoblicua(5,4,12)$  y  $parabolaaderechaoblicua(14,2,12,4)$ ; es bueno reconocer que, en infinitos casos no existe parábola, como ocurre con las expresiones:

$parabolaaderechaoblicua(14,1,12,4)$  o  $parabolaaderechaoblicua(81,12,4)$   
(*Figura 149*).



*Figura 149.* Nuevo ejemplo de parábola con directriz oblicua  
Fuente: elaboración propia

El ejercicio de estudiar las cónicas dentro de este espacio métrico, se hace importante ya que, con él se subraya la importancia de la definición de los objetos. Las cónicas con su definición universal, hacen que, en dependencia del espacio métrico, modifiquen su apariencia a pesar de satisfacer los requisitos de sus definiciones.

Sin duda, quedan cosas por examinar, como las formas de constituir triángulos o cuadriláteros dentro de esta métrica, o la forma posible en que la bisectriz de un ángulo puede estar constituida por un único punto. Es decir, escoger un nuevo espacio métrico en el que subyacen los objetos, todos aquellos que se derivan de los iniciales modifican su apariencia. En esto radica la importancia de este capítulo, con el que se demuestra que, en la naturaleza variable de la matemática, radica su riqueza y su belleza.

## EJERCICIOS

### Ejercicios Capítulo 1

Realice la construcción robusta y creativa correspondiente a cada uno de los teoremas que siguen, en el modelo de la geometría Sintética, la analítica y la hiperbólica. Para ello, puede utilizar cualquier software de geometría dinámica, como GeoGebra y Cabrí II Plus, que va acompañado del Menú Hiperbólico.

Los ejercicios de este primer bloque conservan la numeración de las proposiciones correspondientes del *Libro I de los Elementos* de Euclides.

- ✓ *Proposición 2.* Dado un segmento y un punto cualquiera, se puede construir un segmento de la misma longitud que este y en cualquier dirección.
- ✓ *Proposición 3.* Dados dos segmentos desiguales, destacar del mayor un segmento igual al menor.
- ✓ *Proposición 4.* Si dos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido; entonces tienen igual también el tercer lado, el triángulo es igual al triángulo y los demás ángulos, opuestos a lados iguales, también son iguales.
- ✓ *Proposición 5.* Los triángulos isósceles tienen iguales los ángulos de la base.
- ✓ *Proposición 6.* Si un triángulo tiene iguales dos ángulos, entonces los lados opuestos también son iguales entre sí.
- ✓ *Proposición 8.* Si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, entonces los triángulos son iguales.
- ✓ *Proposición 9.* Dividir por la mitad un ángulo.
- ✓ *Proposición 10.* Dividir por la mitad un segmento.
- ✓ *Proposición 11.* Construir la perpendicular a una recta por un punto de esta.
- ✓ *Proposición 12.* Construir la perpendicular a una recta dada por un punto fuera de ella.

- ✓ *Proposición 15.* Dos rectas que se cruzan forman ángulos opuestos al vértice, iguales entre sí.
- ✓ *Proposición 16.* En cualquier triángulo, un ángulo exterior es mayor que cada uno de los dos ángulos interiores no adyacentes.
- ✓ *Proposición 18.* En cada triángulo, a lado mayor queda opuesto ángulo mayor.
- ✓ *Proposición 19.* En cada triángulo, a ángulo mayor queda opuesto lado mayor.
- ✓ *Proposición 20.* En cada triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.
- ✓ *Proposición 22.* Dados tres segmentos tales que la suma de dos cualquiera de ellos sea mayor que el tercero, construir un triángulo con los lados respectivamente iguales a los tres segmentos.
- ✓ *Proposición 23.* Construir sobre una recta y con vértice en un punto de ella, un ángulo igual a un ángulo dado.
- ✓ *Proposición 32.* En cada triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

## Ejercicios Capítulo 2

Utilizando las macro construcciones indicadas en el capítulo 2 del presente libro, resuelva en el Modelo Sintético y en el hiperbólico, los problemas que siguen:

- ✓ Determine la circunferencia tangente a dos rectas perpendiculares que pasan por un punto que no yace en ninguna de ellas.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a dos circunferencias que son tangentes entre sí.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a dos circunferencias que son secantes entre sí.
- ✓ Determine la circunferencia que es tangente a dos circunferencias tangentes entre sí, que pasan por un punto en el exterior común a ellas.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a dos circunferencias secantes entre sí, que pasan por un punto exterior común a ellas.

- ✓ Determine la circunferencia que es tangente a dos circunferencias tangentes entre sí, que también es tangente a una recta que yace en el exterior de las dos circunferencias.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a dos circunferencias secantes entre sí, que también es tangente a una recta que yace en el exterior de las dos circunferencias.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a otra circunferencia y a una recta que yace en el exterior a la misma.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a una circunferencia y a una recta que es tangente en un punto cualquiera de la misma.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a una circunferencia y a una recta que es secante a ella.
- ✓ Determine la circunferencia tangente a una recta y a un punto por fuera de ella.

### Ejercicios Capítulo 3

Siguiendo el esquema indicado en el capítulo 3 del presente libro, encuentre la ecuación de la circunferencia tangente a las tres circunferencias que se describen en cada uno de los siguientes puntos:

- ✓  $C_1. (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4; C_2. (x+6)^2 + (y-7)^2 = 9; C_3. (x-16)^2 + (y+10)^2 = 25.$
- ✓  $C_1. (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4; C_2. (x-6)^2 + (y-7)^2 = 9; C_3. (x-16)^2 + (y+10)^2 = 25.$
- ✓  $C_1. x^2 + (y+1)^2 = 1; C_2. (x+6)^2 + (y-7)^2 = 9; C_3. (x-16)^2 + (y+10)^2 = 25.$
- ✓  $C_1. (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16; C_2. (x+6)^2 + (y-7)^2 = 9; C_3. (x-16)^2 + (y+10)^2 = 4.$
- ✓  $C_1. (x-10)^2 + (y+1)^2 = 4; C_2. (x+8)^2 + (y-8)^2 = 9; C_3. (x-16)^2 + (y-10)^2 = 25.$

## Ejercicios Capítulo 4

### Caso circunferencia

- ✓ Utilizando el *CAS Derive* y con los archivos correspondientes e indicados en el capítulo 4 del presente libro, determine las curvas en el plano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , aplicando la métrica del taxista.

*circunferencia*(10,-2,5) para obtener la correspondiente a la ecuación:

$$(x - 10)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

*circunferencia*(10,2,4); *circunferencia*(5,-2,8).

- ✓ Grafique las matrices correspondientes a las siguientes circunferencias y determine las razones que inducen a determinar que siempre existen puntos del plano entero que satisfacen su definición siempre que el radio es un entero positivo.

*circunferencia*(-2,-4,3); *circunferencia*(-2,-4,4); *circunferencia*(-2,-4,7).  
*circunferencia*(2,3,7); *circunferencia*(2,3,8); *circunferencia*(2,3,9).

- ✓ Las órdenes *circunferencia*(-2,-4,3) y *circunferencia*(4,0,7) se corresponden en el Modelo Euclídeo con circunferencias tangentes ya que, mediante la métrica del taxista, la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios; sin embargo, verifique que estas circunferencias en su métrica, se cortan en más de dos puntos. Proponga ejemplos de parejas de circunferencias que, siendo tangentes, si y no satisfagan estos criterios de tangencia.
- ✓ Verifique que las circunferencias determinadas por las órdenes *circunferencia*(2,3,5) y *circunferencia*(10,3,7) se cortan en dos puntos. Proponga pares de circunferencias que hagan lo mismo.

- ✓ Verifique que las circunferencias determinadas con las órdenes *circunferencia*(10,3,8) y *circunferencia*(2,3,5), siendo secantes no se cortan en punto alguno. Proponga pares de circunferencias que hagan lo mismo.

### Caso elipse

- ✓ En cada caso que sigue, señale los focos de la elipse y la constante que la define.

*elipse\_taxista*(4,-5,4,-3,8)

*elipse\_taxista*(2,5,4,-3,9)

*elipse\_taxista*(4,5,-4,-3,6)

*elipse\_taxista*(4,1,4,-3,9)

*elipse\_taxista*(3,1,4,-3,10)

*elipse\_taxista*(2,1,-4,-3,6)

Simplifique las siguientes matrices correspondientes a elipses y gráfíquelas indicar cuales son los focos y la constante y verificar que los puntos satisfacen la definición de la curva: *elipse\_taxista*(4,5,4,-13,18).

Señale la razón porque no o si existen, en la métrica del taxista, las elipses que se señala con las siguientes órdenes, indicándolos focos y la constante de definición de la curva y dibujándolas en el histórico de Derive:

*elipse\_taxi*(-1,6,-1,-3,12)

*elipse\_taxi*(-1,6,-1,-3,11)

*elipse\_taxi*(-1,6,-1,-3,13)

*elipse\_taxi*(-1,6,-1,-3,14)

*elipse\_taxista*(4,5,4,-3,8)

- ✓ Trace la elipse que se diseña con la orden *elipse\_taxista*(4,5,6,-3,10) y determine las razones por las cuales se rompen todos los paradigmas evidentes de la curva. ¿Ocurre lo mismo con la orden *elipse\_taxista*(2,2,6,-3,9)?
- ✓ Grafique las elipses que siguientes, las cuales tienen los ejes paralelos a los ejes coordenados:

*elipse\_taxista*(-1,6,4,6,11)

*elipse\_taxista*(-1,6,4,6,12)

*elipse\_taxista*(-1,6,4,6,13)

*elipse\_taxista*(-1,6,4,6,15)

*elipse\_taxista*(5,6,5,8,11)

*elipse\_taxista*(5,6,5,8,12)

*elipse\_taxista*(5,6,5,8,13)

*elipse\_taxista*(5,6,5,8,14)

### Caso hipérbola

- ✓ En cada caso, señale los focos de la hipérbola y la constante que la define:

*hiperbola\_taxi*(-2,2,-2,6,4,5)

*hiperbola\_taxi*(2,2,-2,6,4,2)

*hiperbola\_taxi*(-2,2,-2,8,2,4)

*hiperbola\_taxi*(2,2,-2,8,2,6)

*hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,5,10); *hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,7,10)

*hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,9,10); *hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,11,10)

*hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,13,10); *hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,15,10)

*hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,17,10); *hiperbola\_taxi*(-3,-2,7,5,19,10)

- ✓ Grafique las matrices correspondientes a las siguientes órdenes relativas a hipérbolas, en el caso de que no exista la curva, señale las razones de su no existencia. En cada caso, señale los focos de la cónica y la constante comprometida en su definición.

*hiperbola\_taxi(7,10,12,11,4,8)*  
*hiperbola\_taxi(-6,2,18,-10,13,9)*  
*hiperbola\_taxi(-6,2,18,-10,12,9)*  
*hiperbola\_taxi(7,-9,14,-2,1,10)*  
*hiperbola\_taxi(7,-9,14,-2,2,10)*  
*hiperbola\_taxi(7,-9,14,-2,14,10)*  
*hiperbola\_taxi(7,-9,14,-2,8,10)*  
*hiperbola\_taxi(7,-9,14,-2,14,10)*

### Caso de la recta

Grafique las matrices correspondientes a las siguientes órdenes relativas a líneas; en el caso de que no exista la curva, señale las razones de su no existencia.

*linea\_taxi(2,-4,7,9,10)*  
*linea\_taxi(5,12,11,3,15)*  
*linea\_taxi(5,-1,13,7,10)* (Examine lo extraordinario de esta recta)  
*linea\_taxi(5,-1,13,8,10)*  
*linea\_taxi(5,-1,13,9,10)*  
*linea\_taxi(3,0,-4,5,15)*  
*linea\_taxi(7,4,9,2,15)*  
*linea\_taxi(-1,-2,2,5,10)*  
*linea\_taxi(2,-1,-5,2,10)*  
*linea\_taxi(-1,2,2,5,10)*

### Caso parábola

- ✓ En cada caso, en un solo histórico, grafique las matrices correspondientes a las tres órdenes siguientes:

*lineah(5,7,10), foco(5,13); parabolaarriba(5,13,7,10).*

*lineah(6,3,10), foco(6,-5); parabolaabajo(6,-5,3,10).*

*lineah(5,-7,15), foco(5,-4); parabolaarriba(5,-4,-7,13).*

*foco(14,2), lineaoblicua(5,4,12); parabolaaderechaoblicua(14,2,12,4).*

- ✓ Grafique las matrices correspondientes a las siguientes ternas de órdenes relativas a parábolas; en el caso de que no exista la curva, señale las razones de su no existencia.

*lineav(4,10,20);foco(-4,4);parabolaaiizquierda(-4,4,10,15).*

*lineah(6,3,10); foco(5,13);parabolaarriba(5,13,7,10).*

*lineah(6,3,10); foco(6,-1);parabolaabajo(6,-1,3,10).*

*lineav(5,-3,12);foco(7,5);parabolaaderecha(7,5,-3,10).*

*lineav(5,-1,15);foco(0,3);parabolaaiizquierda(-3,3,-1,11).*

*lineaoblicua(5,4,12);foco(12,2);parabolaaderechaoblicua(12,2,12,4).*

✓ *lineaoblicua(3,2,15);foco(8,10);parabolaaderechaoblicua(12,4,12,4).*

*lineaoblicua(3,2,15);foco(-3,3);parabolaaiizquierdaoblicua(-3,3,2,10).*

## BIBLIOGRAFÍA

- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. Editorial Limusa S.A. México.
- David, E. J. (s.f). *Los elementos de Euclides*,  
[http://www.euclides.org/menu/elements\\_esp/indiceeuclides.htm](http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm)
- Díaz, M. (2012). *El teorema de napoleón*.  
<https://matesmates.wordpress.com/2012/01/16/el-teorema-de-napoleon/>
- Díaz, M. (2012). *El teorema de napoleón*.  
<https://matesmates.wordpress.com/2012/01/16/el-teorema-de-napoleon/>
- Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). *Biografía de Apolonio de Pérgamo. En Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea* [Internet]. Barcelona, España. Disponible  
[https://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/apolonio\\_de\\_pergamo.htm](https://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/apolonio_de_pergamo.htm) [fecha de acceso: 5 de mayo de 2024].
- García, J. (2005). *Poincaré, el último matemático universalista*.  
<https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo2tf/2/jcalcines.html>
- Gentile, E. R. (2021). *Construcciones con regla y compás. Revista De Educación Matemática*, 3(2), 1-12.  
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11218>
- Hemmerling, E. (2005). *Geometría Elemental*. México. Limusa.
- Hurtado E. (2019). *Circunferencias ortogonales*.
- Jácome, L. M., Caicedo-Zambrano, S.J. y Soto-Ágreda, O. F. (2024). *Lecciones de Geometría Elemental*. Editorial Universidad de Nariño. Pasto, Colombia.
- Kostovski. A. (1980). *Construcciones geométricas mediante un compás*. Moscú. Mir.
- Landaverde, F. (1987). *Curso de Geometría*. Editorial Progreso. México.
- Lehmann (1989). *Geometría Analítica*. Limusa.

- Lehmann, Ch. (1974). *Geometría Analítica*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México.
- Martínez, A. (2007). *Geometrías no euclidianas*.  
<http://geometrias-no-euclideanas.blogspot.com/2007/09/parte-ii-la-primera-geometra-no.html>
- Navarro, M. (s. f). *Construcciones con regla y compás*.  
[https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG\\_NAVARRO+AG%-C3%9CERA\\_Construcciones+con+regla+y+comp%C3%A1s.pdf/bd1c1d55-642c-47ce-812a-93758769cfd](https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_NAVARRO+AG%-C3%9CERA_Construcciones+con+regla+y+comp%C3%A1s.pdf/bd1c1d55-642c-47ce-812a-93758769cfd)
- Navas, A. (2022). *La cuadratura del triángulo*. Images des Mathématiques.  
<https://images.math.cnrs.fr/La-cuadratura-del-triangulo.html?lang=es>
- Ocampo, R. (2021). *Circunferencia de los 9 puntos*.  
<https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-i-circunferencia-de-los-nueve-puntos/>
- Ogilvy, C. S. (1969). *Excursions In Geometry*. New York. Oxford University Press.
- Ogilvy, C. S. (1969). *Excursions in Geometry*. Dover Publications Inc. New York, 1969.
- Portilla-Obando, H.J, y Caicedo-Zambrano, S.J. (s.f.). Elementos de Álgebra y Geometría Vectorial. Editorial Universidad de Nariño. Libro en proceso de evaluación.
- Rozas, B., E. (2020). *Geometría Hiperbólica. Desarrollo de Herramientas con Grasshopper*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid. Universidad Politécnica de Madrid.
- Rozas-Bellido, E. (2020). *Geometría Hiperbólica. Desarrollo de Herramientas con Grasshopper*. Trabajo de Grado. Universidad Politécnica de Madrid.  
[https://oa.upm.es/63932/1/TFG\\_Jun\\_20\\_Rozas\\_Bellido\\_Elena.pdf](https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf)
- Ruiz, A. (1997). *Otros modelos geométricos: El otro modelo de Poincaré*.  
[https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo\\_07/Cap\\_07\\_03.htm](https://www.centroedumatematica.com/arui/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_03.htm)

- Ruiz, A. (1997a). *Otros modelos geométricos: Dentro de un disco*.  
[https://www.centroedumatematica.com/aruiiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo\\_07/Cap\\_07\\_03.htm](https://www.centroedumatematica.com/aruiiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_03.htm)
- Ruiz, A. (1997b). *Dentro de un disco*.  
[https://www.centroedumatematica.com/aruiiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo\\_07/Cap\\_07\\_02.htm](https://www.centroedumatematica.com/aruiiz/libros/No%20euclidianas/Capitulo_07/Cap_07_02.htm)
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.
- Soto, F. (2000). *Geometría con Cabrí*. Universidad de Nariño. 2000.
- Zalamea, F. (2019). *Fundamentos de Matemáticas*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá.

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Construcción de un triángulo equilátero desde un segmento dado .....	11
Figura 2. Construcción de un triángulo equilátero en la Geometría Hiperbólica .....	13
Figura 3. Circunferencia tangente a un h- recta pasando por un punto al interior del horizonte .....	15
Figura 4. Simetría axial de un punto respecto de una h- recta .....	16
Figura 5. Simetría central de un punto respecto de otro .....	17
Figura 6. Algunas herramientas del Menú Hiperbólico Cabri .....	29
Figura 7. Fase inicial de la repetición de un triángulo .....	29
Figura 8. Repetición de un triángulo desde un punto arbitrario .....	30
Figura 9. Posición relativa de rectas .....	33
Figura 10. Tangente a una recta .....	35
Figura 11. Semirrecta en el Disco de Poincaré .....	36
Figura 12. Punto medio entre dos puntos .....	37
Figura 13. Segmento en el Disco de Poincaré .....	38
Figura 14. Recta definida por dos puntos .....	39
Figura 15. Recta perpendicular a otra recta dada .....	40
Figura 16. Mediatriz entre dos puntos o de un segmento dado .....	41
Figura 17. h- circunferencia con centro y punto .....	43
Figura 18. Reflexión axial de un punto .....	44
Figura 19. Reflexión axial de un triángulo .....	45
Figura 20. Simetría central de un punto .....	46
Figura 21. Simetría central de un triángulo .....	47
Figura 22. Traslación de un punto en un vector dado .....	48
Figura 23. Traslación de un triángulo en un vector dado .....	50
Figura 24. Rotación de un punto en un ángulo dado .....	50
Figura 25. Rotación de un triángulo con centro en un punto .....	52
Figura 26. Menú Hiperbólico Cabri .....	53
Figura 27. Macro construcción de un cuadrado dado su lado .....	54
Figura 28. Ejemplo de uso de la macro cuadrado .....	55
Figura 29. Verificación del Teorema de Varignon .....	56
Figura 30. Verificación del Teorema de Pitágoras .....	57
Figura 31. Macro de elaboración de un triángulo equilátero dado su lado .....	58
Figura 32. Prueba de la orientación de la macro .....	60

Figura 33. Centro de gravedad de un triángulo .....	60
Figura 34. Verificación del Teorema de Napoleón .....	61
Figura 35. Trisección de un segmento .....	61
Figura 36. Inscripción de una circunferencia en un triángulo .....	62
Figura 37; Circunferencia excrita a un triángulo .....	63
Figura 38. Centro de gravedad de un triángulo .....	64
Figura 39. Triángulos de igual área .....	64
Figura 40. Cálculo del ortocentro .....	65
Figura 41. El círculo de los nueve puntos .....	66
Figura 42. Las cónicas .....	67
Figura 43. Verificación de un teorema .....	67
Figura 44. Teorema de los puntos medios de un cuadrilátero .....	68
Figura 45. Teorema de los puntos medios de un cuadrilátero en el disco .....	69
Figura 46. Perpendicular a un segmento por un extremo .....	70
Figura 47. Perpendicular a un segmento por un extremo .....	70
Figura 48. Diagonales de un cuadrado .....	71
Figura 49. Diagonales de un cuadrado en el disco .....	72
Figura 50. Diagonales de un cuadrado en el disco .....	72
Figura 51. El segmento de los puntos medios de los lados de un triángulo .....	73
Figura 52. El segmento de los puntos medios .....	73
Figura 53. Ángulos opuestos de un triángulo isósceles .....	74
Figura 54. El punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo .....	75
Figura 55. Un teorema para los triángulos isósceles .....	76
Figura 56. Un teorema de los puntos medios de un cuadrilátero .....	77
Figura 57. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la biseca .....	77
Figura 58. Tangente a una h- circunferencia por un punto de ella .....	78
Figura 59. Curva pedal referido a una h-circunferencia .....	79
Figura 60. Línea de lo centros biseca a la cuerda común de dos h-circunferencias .....	79
Figura 61. h-recta tangente a una h-parábola por uno de sus puntos .....	80
Figura 62. Curva pedal referido a una h-parábola .....	81
Figura 63. h-tangente a una h-elipse por uno de sus puntos .....	81
Figura 64. Curva pedal referido a una h-elipse .....	82
Figura 65. Tangente a una h-hipérbola por uno de sus puntos .....	83
Figura 66. Curva pedal referido a una h-hipérbola .....	83

Figura 67. Alineación de los centros de circunferencias que pasan por dos puntos fijos de otra circunferencia .....	84
Figura 68. Lugar geométrico definido por el punto medio de una cuerda .....	85
Figura 69. Punto de partida de la repetición de un segmento en una dirección dada .....	86
Figura 70. Repetir un segmento en dirección dada .....	87
Figura 71. Fase inicial de la construcción de un triángulo isósceles .....	87
Figura 72. Triángulo isósceles dado perímetro y altura .....	88
Figura 73. Otra alternativa de construcción del triángulo isósceles .....	89
Figura 74. Construcción de un triángulo isósceles dado su perímetro y altura con la elipse .....	90
Figura 75. Construcción de un triángulo isósceles dado su perímetro y altura con la parábola .....	91
Figura 76. Construcción de la parábola .....	95
Figura 77. La parábola en el Disco de Poincaré .....	96
Figura 78. Construcción de la elipse .....	97
Figura 79. La elipse en el Disco de Poincaré .....	98
Figura 80. Construcción de la hipérbola .....	99
Figura 81. La hipérbola en el Disco de Poincaré .....	100
Figura 82. Elipse e Hipérbola con las macros del menú .....	100
Figura 83. Circunferencia pasando por tres puntos .....	101
Figura 84. Circunferencia por tres puntos en el Disco de Poincaré .....	102
Figura 85. Circunferencia tangente a tres rectas .....	102
Figura 86. Circunferencia tangente a tres rectas en el Disco de Poincaré .....	103
Figura 87. Circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos .....	104
Figura 88. Circunferencia tangente a una recta pasando por dos puntos en el disco .....	105
Figura 89. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto .....	105
Figura 90. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto en el disco .....	106
Figura 91. El caso de rectas ultraparalelas .....	107
Figura 92. Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su interior .....	107
Figura 93. El caso del Disco de Poincaré .....	108
Figura 94. Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su exterior .....	110

Figura 95. El caso en el Disco de Poincaré .....	110
Figura 96. Circunferencia tangente a otra por dos puntos en su exterior .....	111
Figura 97. El mismo caso en el Disco de Poincaré .....	112
Figura 98. Circunferencia tangente a dos rectas y a otra circunferencia en su interior .....	113
Figura 99. Circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto .....	114
Figura 100. Circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia pasando por un punto, caso del disco .....	115
Figura 101. Circunferencia tangente a una recta y dos circunferencias .....	116
Figura 102. Circunferencia tangente a tres circunferencias .....	117
Figura 103. Cálculo de un punto de inversión .....	121
Figura 104. Ortogonalidad de circunferencias .....	123
Figura 105. Verificación de la ortogonalidad de circunferencias .....	123
Figura 106. Las circunferencias por dos puntos mutuamente inversos son ortogonales .....	124
Figura 107. Inversión de una recta .....	124
Figura 108. Inversión de una circunferencia .....	125
Figura 109. Compuesta de dos inversiones concéntricas .....	126
Figura 110. Una circunferencia secante a una familia infinita de ellas .....	127
Figura 111. Conversión al paralelismo .....	128
Figura 112. Preservación de la tangencia en objetos .....	128
Figura 113. El Décimo Caso del Problema de Apolonio .....	129
Figura 114. Uno de los pasos iniciales vía solución .....	131
Figura 115. Rectas inversas paralelas .....	132
Figura 116. Un paso intermedio de la solución .....	132
Figura 117. De nuevo la parábola en apoyo a la solución .....	133
Figura 118. El centro de la circunferencia tangente .....	133
Figura 119. Solución del Problema de Apolonio .....	134
Figura 120. Una apreciación de la solución del Problema de Apolonio .....	134
Figura 121. Un mapa urbano .....	138
Figura 122. Recorridos urbanos posibles .....	138
Figura 123. Evidencia análoga de circunferencias .....	140
Figura 124. Circunferencias secantes .....	141
Figura 125. Casos típicos de elipses .....	142

Figura 126. Elipses cercanas a las euclidianas .....	145
Figura 127. Elipses típicas en la métrica del taxista .....	143
Figura 128. Una hipérbola fenomenal .....	145
Figura 129. Una hipérbola curiosa .....	146
Figura 130. Hipérbolas de este mundo discreto .....	146
Figura 131. Hipérbolas similares a las clásicas euclidianas .....	147
Figura 132. Hipérbolas que asombran por su apariencia .....	147
Figura 133. Hipérbolas poco evidentes por su configuración .....	148
Figura 134. Formas de definir una recta .....	149
Figura 135. Rectas similares a las del mundo euclidiano .....	151
Figura 136. Rectas ligeramente diversas en el plano entero .....	151
Figura 137. El concepto de paralelismo en rectas .....	152
Figura 138. El concepto de perpendicularidad .....	153
Figura 139. Rectas perpendiculares .....	154
Figura 140. Un nuevo par de recta perpendiculares .....	154
Figura 141. Parábolas con directrices horizontales .....	156
Figura 142. Parábolas que no son evidentes .....	157
Figura 143. Parábolas cóncavas a izquierda y derecha .....	158
Figura 144. Parábolas con directriz oblícua .....	159
Figura 145. Parábola con directriz oblícua .....	159
Figura 146. Una parábola a todas luces elegante .....	161
Figura 147. Un nuevo ejemplo de parábola cóncava a izquierda .....	162
Figura 148. Una parábola que relaciona la distancia del foco a su directriz .....	162
Figura 149. Nuevo ejemplo de parábola con directriz oblicua .....	163

# èditorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: Mayo 2025  
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El libro de texto Elementos de Geometrías: algoritmos comparativos, destaca la presentación de proposiciones algorítmicas en la geometría euclidiana e hiperbólica. Al subrayar la aplicación de algoritmos comunes en distintos modelos de geometría, este texto proporciona un estudio que amplía la comprensión de la forma, dinamizando el uso de rectas, circunferencias y el cálculo de puntos de intersección. Además, la resolución de casos del problema de Apolonio mediante el uso de cónicas, tanto en la geometría euclidiana como en la hiperbólica, resalta la universalidad de cada algoritmo como un procedimiento de solución y a estas curvas como herramientas efectivas y eficaces en el hallazgo de respuestas. Este enfoque detallado y comparativo entre distintos modelos de geometría realza la importancia del libro como una fuente integral de herramientas y conocimientos para los lectores interesados en profundizar en este campo. El libro se vuelve aún más importante si el lector acude a cada algoritmo para construir su acervo de herramientas y se arriesga a presentar las razones lógicas de cada paso en tales procedimientos. En este contexto, el libro ofrece un valor significativo al animar a los lectores a analizar y presentar las razones lógicas de cada paso en los procedimientos algorítmicos, fomentando así una comprensión más profunda y una apropiación personal del conocimiento geométrico. Esta etapa argumentativa no solo fundamenta las razones detrás de cada algoritmo, sino que también enfatiza la importancia de la publicación de esta obra. Así, el libro no solo se destaca por su contenido teórico, sino también por su capacidad para comprometer y desafiar activamente a sus lectores, convirtiéndolo en una herramienta valiosa para el desarrollo de habilidades en geometría y algoritmia.

