GEOGEBRA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO, PROPIEDADES Y ALGUNAS APLICACIONES DE ÁNGULOS EN GRADO SEXTO

DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ
KATHERINE NATHALY PAZ MORA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SAN JUAN DE PASTO
2023

GEOGEBRA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO, PROPIEDADES Y ALGUNAS APLICACIONES DE ÁNGULOS EN GRADO SEXTO

DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ
KATHERINE NATHALY PAZ MORA

ASESORA
Dra. CATALINA MARÍA RÚA ALVAREZ

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al Título de
Magíster en Educación

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SAN JUAN DE PASTO
2023

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1 del acuerdo Nº 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

NOTA DE ACEPTACIÓN

Fecha de sustentación: ______________________

Puntaje: ______________________

____

____

____

____

____

____

DRA. OMAIDA SEPÚLVEDA

Jurado

____

DR. ZAGALO SUAREZ

Jurado

____

DR. HILBERT BLANCO

Jurado

San Juan de Pasto, septiembre de 2023.

AGRADECIMIENTOS

En la culminación de esta tesis agradecemos primeramente a Dios por habernos acompañado y guiado a lo largo de la maestría, dándonos fuerza y coraje para hacer realidad este sueño.

A la Universidad de Nariño por habernos abierto las puertas y darnos la oportunidad de crecer profesionalmente luego de nuestros estudios de pregrado.

A nuestra asesora, Dra. Catalina Rúa quien con su experiencia y conocimientos nos guió en la culminación de este trabajo, a su lado, no solo hemos crecido en la parte académica sino también como personas para contribuir a nuestra sociedad. Agradecidas por su paciencia, su dedicación, por confiar en nosotras y brindarnos su amistad y apoyo incondicional en este proceso.

A los docentes de la Maestría en Educación por brindarnos sus conocimientos y plantar las bases para el desarrollo de esta investigación.

A nuestros familiares, especialmente a nuestros padres, hermanos y abuelos, porque a lo largo de este camino nos brindaron su amor, su apoyo, sus consejos y su paciencia, además en los momentos difíciles nos alentaron a seguir adelante, anhelando siempre nuestra preparación, siendo esta la más valiosa herencia.

A Nathaly Cifuentes por su amistad incondicional porque el tiempo pasa y nuestra amistad perdura.

Este trabajo está dedicado a:

Mi familia y mi Esposo por ser una columna fundamental en mi vida, que me ha dado fuerza y me ha inspirado a seguir en los momentos difíciles y especialmente a mi hija Aura Sofía, que llegó a mi vida llenándola de alegrías infinitas con cada sonrisa, abrazo, travesura y su ternura, convirtiéndose en el motor de mi vida y la razón por la que cada mañana me levanto y soy feliz.

Deiby Castillo

Este trabajo es dedicado a:

A mi familia que me apoya día a día, mis padres que me han formado y siempre me impulsan a seguir adelante, a mi hermano que es mi compañero en este camino llamado vida.

Nathaly Paz

RESUMEN

Las matemáticas hacen parte de los conocimientos básicos de los estudiantes, esto debido a la importancia que tienen en el desarrollo del pensamiento, la lógica y el razonamiento, por medio de las diferentes ramas que la componen, particularmente la geometría fortalece la visualización y creatividad, sin embargo se evidencia que se ha dejado de lado y a pesar de las herramientas que ofrece el entorno y la tecnología estas, generalmente, no se toman en cuenta para enseñarla. Teniendo en cuenta lo anterior, en esta investigación se realizó una propuesta para la enseñanza del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos usando el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) GeoGebra y la resolución de problemas. En primer lugar, los estudiantes presentaron una prueba diagnóstica para determinar el nivel en el que se encontraban, en segundo lugar, con lo obtenido en la prueba se elaboró y aplicó la secuencia de enseñanza basada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la resolución de problemas con el uso de GeoGebra, por último, se evaluó el progreso mediante una prueba final. Entre los resultados se destaca un avance significativo en los estudiantes, pues la manipulación de los objetos geométricos en GeoGebra permitió una mayor comprensión de los ángulos y los identifican en su entorno, asimismo demostraron sus capacidades en la resolución de problemas integrando los diferentes conceptos vistos a lo largo de la secuencia, adicionalmente, se resaltan las ventajas del uso de GeoGebra puesto que permitió diseñar actividades significativas para los estudiantes.

Palabras clave: Geometría, ángulos, resolución de problemas y GeoGebra.

ABSTRACT

Mathematics is part of the basic knowledge of students, this due to the importance it has in the development of thinking, logic and reasoning, through the different branches that compose it, particularly geometry strengthens visualization and creativity, however, it is evident that it has been left aside and despite the tools offered by the environment and technology, these, generally, they are not taken into account to teach it. Considering the above, in this research a proposal was made for the teaching of the concepts of angles using the Dynamic Geometry Environment (DGE) GeoGebra and problem solving. Firstly, the students presented a diagnostic test to determine the level at which they were, secondly, what it was obtained in the test, the teaching sequence based on Brousseau's theory of didactic situations and the resolution of problems with the use of GeoGebra was elaborated and applied, finally, progress was assessed through a final test. Among the results stands out a significant advance in the students, since the manipulation of geometric objects in GeoGebra allowed a greater understanding of the concepts of angles and identify them in their environment, they also demonstrated their abilities in solving problems integrating the different concepts seen throughout the sequence, additionally, the advantages of using GeoGebra are highlighted since it allowed to design significant activities for the students.

Keywords: Geometry, angles, problem solving and GeoGebra.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son una asignatura con un papel relevante en la formación de los estudiantes, es por ello que están incluidas en los diferentes planes curriculares, sin embargo, a lo largo de los años se han convertido en una de las asignaturas que generan mayor dificultad para ser comprendida, pero como se afirma en Muñoz y Matos (2008) la razón no es debido a la asignatura en sí, sino porque en muchos casos las clases no motivan, ni dejan desarrollar la creatividad de los estudiantes. Teniendo en cuenta lo anterior, los docentes deben pensar en nuevas estrategias que promuevan el gusto por las matemáticas y sus diferentes ramas, es por ello que esta investigación se enfoca en una de esas ramas, que es la geometría.

Teniendo en cuenta la aplicación que tiene la geometría al estar presente en el medio que nos rodea, en algunas instituciones es poco el tiempo que se dedica a enseñarla y tampoco es muy aceptada por algunos estudiantes en el aula de clase (Marmolejo, 2010). Además, según Vargas y Gamboa (2013), “el auge de las matemáticas modernas en la década de los setenta provocó que la geometría pasase a segundo termino en el ámbito escolar, relegándose al final de los contenidos anuales”. Incluso en las instituciones en época de la pandemia COVID 19, se vio la necesidad de flexibilizar la malla curricular, dando mayor peso a los procesos algebraicos, con lo cual en algunos casos no se estudió geometría. Es así como nace esta propuesta de investigación, al ver la necesidad de indagar sobre estrategias que aporten en la enseñanza de la geometría de forma amena, y particularmente del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos a través de la resolución de problemas geométricos y el uso del AGD GeoGebra.

En este sentido se usa la resolución de problemas debido a que promueve en los estudiantes la creatividad, hace que salgan de la rutina de los ejercicios y de realizar procesos mecánicos con pasos definidos. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación problema realiza una reflexión, perfeccionando sus ideas y modificándolas al participar activamente en una comunidad de aprendizaje (Santos Trigo, 2008), con lo cual integra sus conocimientos.

También, se usa el programa GeoGebra pues reúne de forma dinámica geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo (GeoGebra, 2023), lo cual hace que se convierta en una herramienta con múltiples potencialidades y con ello se puede captar la atención de los estudiantes frente al aprendizaje de los ángulos, pues les permite ser más activos, manipular objetos y pueden ver los cambios que realizan en tiempo real, lo cual no sucede cuando trabajan con lápiz y papel, además es un software libre que se puede utilizar en las instituciones.

En el desarrollo de la investigación primero se presentan los aspectos generales donde se menciona la descripción del problema, los objetivos y la justificación, evidenciando la necesidad de llevar a acabo la investigación acorde al contexto que se tiene.

Luego, se encuentra el marco referencial, en el cual se incluyen los antecedentes, el contexto y la teoría que va a guiar la investigación para cumplir los objetivos planteados. En este capítulo se hace un recorrido por antecedentes nacionales e internacionales, de trabajos que se han enfocado en la enseñanza de la geometría usando diferentes estrategias, se presenta el contexto de la población donde se tomó la muestra y se estudia la resolución de problemas desde la mirada de autores como Polya, la geometría desde los lineamientos curriculares y el uso de GeoGebra como una herramienta de aprendizaje y exploración.

Posteriormente se encuentra la metodología, donde se desarrollan las etapas de la micro ingeniería didáctica y se describen las observaciones realizadas en la aplicación de la secuencia, la cual se elaboró teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, además se presentan los resultados de la prueba diagnóstica y la prueba final con algunos gráficos que favorecen el análisis e interpretación de resultados.

Finalmente, en el análisis e interpretación de resultados se presentan gráficos comparativos entre la prueba diagnóstica y la prueba final, para pasar a las conclusiones y la propuesta de algunas ideas para el trabajo futuro.

1. ASPECTOS GENERALES

Este capítulo se inicia con el planteamiento del problema de investigación donde se reflexiona acerca del ¿por qué?, se realiza esta investigación, acorde a los Estándares Básicos de Competencias, resultados de olimpiadas y la importancia del uso de los AGD como GeoGebra en las aulas de clases, cerrando esta parte con la formulación de la pregunta de investigación que dirige este trabajo. Posteriormente se exponen el objetivo general y los específicos que exponen la meta que se quiere alcanzar con esta investigación, teniendo en cuenta la teoría de las situaciones, la resolución de problemas y el uso de GeoGebra. Por último, se presenta la justificación resaltando la motivación para realizar esta investigación.

1.1. Planteamiento del problema

En este apartado se presenta la importancia de la geometría desde los Estándares Básicos de Competencia, los resultados de la primera fase del presente año de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Nariño (ORM-UDENAR) del nivel I correspondientes a grado sexto, y la importancia del uso de los AGD como GeoGebra en las aulas de clases luego de pandemia, además se indica la pregunta de investigación que dirige este trabajo.

1.1.1. Descripción del problema

Las matemáticas forman parte del diario vivir, estas se usan de manera inconsciente a cada instante, como afirma Palmer (2019) “muchas de las situaciones y fenómenos que se producen en los ámbitos cotidianos conllevan algún tipo de actividad matemática”, por ejemplo, cuando se va de compras al supermercado, al jugar o practicar algún deporte, al preparar alimentos, entre otros. Dentro de las ramas de la matemática está presente la geometría, la cual se encuentra en el entorno, por ejemplo, el cuaderno con el que se estudia es rectangular, tiene perímetro y área; la habitación en la que dormimos se encuentra llena de objetos geométricos, como la cama, el closet, incluso la ropa que se usa. Sin embargo, “la geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos" (Marmolejo, 2010) puesto que es una de las temáticas que se deja al final de las mallas curriculares, después de los temas del pensamiento aritmético, es así como generalmente no se alcanza a abordar en profundidad.

Actualmente, el Ministerio de Educación Nacional (2006), incluye la geometría en los estándares básicos de aprendizaje otorgando un papel importante dentro del pensamiento espacial y el métrico, sin embargo como afirma Marmolejo (2010) su presencia en las aulas es limitada, por lo que los estudiantes tienen dificultades al momento de presentar las pruebas como las olimpiadas matemáticas que abordan geometría y resolución de problemas.

En la primera ronda de la sexta versión de la ORM-UDENAR realizada en el presente año, se plantearon los problemas entorno a los cinco tipos de pensamiento propuestos por el MEN, donde al analizar los problemas correspondientes al pensamiento espacial, estos movilizan el concepto y las propiedades de ángulos en triángulos y entre rectas, en los cuales el promedio de respuestas correctas en el nivel I, es decir, en grado sexto y séptimo, de los estudiantes del colegio donde se realiza la investigación, fue de 9,34 en un rango de 1 a 24, correspondiente al 37,5 % (Anexo A), evidenciando una posible dificultad en la comprensión y aplicación del concepto y propiedades de ángulos en la resolución de problemas, (`https://orm.udenar.edu.co`). A pesar de la relevancia que tiene la geometría y los ángulos para el desarrollo de habilidades cognitivas y matemáticas, se observa con los resultados anteriores una dificultad en el aprendizaje de estos conceptos y su aplicación en la resolución de problemas.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que en época de la pandemia COVID 19, se exigió desde el MEN la flexibilización curricular, considerando que "la priorización de los aprendizajes debe partir de un proceso de reflexión, teniendo presente que ante la situación de emergencia sanitaria lo importante es el bienestar del sujeto" (Ministerio de Educación Nacional, 2021), lo cual abrió una brecha en el proceso de aprendizaje que llevaban los estudiantes, pues la nueva metodología de enseñanza, de aquel momento, requiere adaptarse a un contexto totalmente virtual y muchos estudiantes no contaban ni siquiera con acceso estable a internet, además el tiempo en que generalmente se abordaba una temática en la presencialidad, en virtualidad se duplicaba o triplicaba llevando a los docente a enseñar lo más básico que consideraran y a disminuir la profundización en ciertas temáticas, incluso algunas no se estudiaron ni en lo más básico, todo esto hizo necesario que los docentes pasaran de un "nivel de consumo de recursos y contenidos digitales y tradicionales a un espacio que les permitiera comprender mejor las potencialidades de las tecnologías"(Baptista, Almazán, Loeza, López, y Cardenas, 2020) con lo cual se logró de alguna manera el replanteamiento de sus clases.

En medio del proceso de adaptación que se tuvo a una educación virtual se miró la necesidad de aprender a usar herramientas digitales, llevando a muchos docentes a buscar nuevas estrategias, plataformas virtuales y ambientes dinámicos para enseñar, innovando así sus clases. En este sentido es importante seguir implementando en las aulas de clase, el avance con herramientas virtuales que se logró, considerando también que los estudiantes de hoy son nativos digitales, puesto que adquieren de manera más natural el lenguaje digital de computadoras, celulares, tablets, videojuegos e internet (Prensky, 2005). En esta investigación se busca profundizar en el uso del AGD GeoGebra puesto que cuenta con una interfaz sencilla de usar y se pueden mezclar diferentes tipos de vistas permitiendo manipular y explorar diferentes objetos geométricos a la vez y en tiempo real, sin perder de vista el proceso riguroso de la argumentación de una solución.

También es importante tener en cuenta que en la institución cada año se abren admisiones para grado sexto, en este año se admitieron 70 estudiantes nuevos de diferentes instituciones publicas y privadas (Universidad de Nariño, 2023a), lo que hace necesario un proceso de nivelación que aporte a todos lo estudiantes en el aprendizaje del concepto y propiedades ángulos y su aplicación a la resolución de problemas, así como la implementación de una estrategia diferente usando GeoGebra para obtener una mayor comprensión de los conceptos que se quieren enseñar, ofreciendo una plataforma múltifuncional que ayuda a abordar esta problemática. Sin embargo, a pesar de las posibilidades que ofrece esta herramienta, puede suceder que su implementación en el aula sea limitada, dando lugar a un enfoque más teórico de los ángulos, que puede no ser suficientemente atractivo para los estudiantes y puede dificultar la transferencia de conocimientos a situaciones del mundo real. En este sentido cabe resaltar que la institución cuenta con dos aulas de informática y este año se implementó un aula inteligente para el uso de los docentes y estudiantes de esta manera se podría potenciar la comprensión del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos y fomentar la resolución de problemas geométricos sobre este tema de forma más intuitiva y práctica.

Finalmente, la investigación busca diseñar e implementar una estrategia dinámica e innovadora que utilice GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos y su aplicabilidad en la resolución de problemas, y así contribuir al avance de la educación matemática en el aprendizaje de ángulos.

1.1.2. Formulación del problema de investigación

Teniendo en cuenta lo expuesto en la descripción del problema se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera una secuencia de enseñanza sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, basada en la teoría de las situaciones didácticas y resolución de problemas geométricos con el uso de GeoGebra favorece la comprensión y aplicación de estos conceptos?

1.2. Objetivos

A continuación se presentan el objetivo general que se propone como meta a alcanzar con esta investigación así como los objetivos específicos que permiten lograrlo, basados en la teoría de las situaciones didácticas, la resolución de problemas, el uso de GeoGebra y acorde a las etapas que plantea la micro ingeniería didáctica.

1.2.1. Objetivo General

Diseñar y analizar una secuencia de enseñanza que promueva el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos en grado sexto a través de la resolución de problemas mediados con el software GeoGebra.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Elaborar una secuencia de enseñanza pertinente a grado sexto sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos.

- Implementar la secuencia didáctica diseñada en GeoGebra, sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, fundamentada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la resolución de problemas.

- Determinar la comprensión alcanzada por los estudiantes al participar en la secuencia aplicada a grado sexto.

1.3. Justificación

Las matemáticas son un área fundamental en la formación de los estudiantes, dado que, como se menciona en los estándares básicos de competencias (MEN, 2006), tienen un papel destacado en la cultura y la sociedad, en aspectos como las artes plásticas, la arquitectura, las grandes obras de ingeniería, la economía y el comercio; en segundo lugar, porque se las ha relacionado con el desarrollo del pensamiento lógico; y finalmente, porque desde el comienzo de la Edad Moderna su conocimiento se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Particularmente, dentro de las matemáticas encontramos la geometría que ha sido "la encargada de interactuar con las formas del mundo real que permiten describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar con él desarrollando la percepción espacial, el uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas" (Urbano, 2018), destacando así la importancia que tiene el estudio de esta rama de las matemáticas en las aulas de clase.

Esta investigación pretende lograr un aprendizaje más profundo y significativo (Ausubel, 1983) en los estudiantes sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos y su aplicación, puesto que no se va a trabajar la clase de forma tradicional, sino por el contrario se busca cambiar de entorno para que sean ellos quienes comprueben los resultados y dejen de ser receptores pasivos del conocimiento, brindando de esta manera un ambiente de aprendizaje enriquecedor (Boo y Leong, 2016), esto a través de una metodología que permite relacionar la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, la resolución de problemas y el uso de GeoGebra en una secuencia didáctica, alcanzando la comprensión de los conceptos y su aplicación.

Con los resultados obtenidos en la investigación al aplicar la secuencia didáctica, se espera que esta aporte, en primer lugar, al proceso de nivelación que necesitan los estudiantes nuevos que ingresan, y en segundo lugar, se vea reflejado en los resultados obtenidos en las Pruebas de Evaluar para Avanzar, Pruebas Saber 11 y olimpiadas matemáticas, brindándoles de esta manera oportunidades en su vida académica y fomentando a la vez el gusto hacia las matemáticas, ya que como afirma Aray, Párraga, y Chun (2019) “la falta de enseñanza de la geometría en la educación secundaria ha provocado un vacío en el conocimiento holístico de la matemática, lo cual dificulta la enseñanza de materias como análisis matemático, álgebra lineal, geometría descriptiva, física, estática y topografía”, que son algunas de las materias que hacen parte del currículo de la educación superior, además se quiere brindar una mirada diferente para que los estudiantes lleguen a su clase de matemáticas con gusto y no se convierta en una carga u obstáculo para ellos.

Por otro lado, con esta investigación se busca contribuir a superar la brecha que dejo en parte la pandemia, sobre el aprendizaje de ángulos y su aplicación, brindando herramientas didácticas y diferentes, a partir del uso de GeoGebra y la teoría de las situaciones didácticas. Además, como el colegio tiene acceso al uso de tecnologías digitales es posible trabajar con software dinámicos como GeoGebra, ofreciendo así una oportunidad única para abordar esta brecha en su aprendizaje. Sin embargo, a pesar de las posibilidades que se ofrecen, a menudo no se integran de manera efectiva en el plan de estudio, es por ello que la propuesta de diseñar y aplicar una secuencia de enseñanza didáctica utilizando GeoGebra se fundamenta en la idea de que esta estrategia es una herramienta útil para mejorar la comprensión de los conceptos de ángulos, pues como afirma Ciro y Villegas (2017) “el uso de este software promueve el fortalecimiento del pensamiento geométrico, ya que el soporte visual estimula el aprendizaje y lo dinamiza, por lo tanto la representación de los objetos brindará elementos nuevos para resolver los problemas de forma alternativa, verificar propiedades y relacionar características”, llevando a los estudiantes a obtener un aprendizaje significativo (Ausubel, 1983).

Además, se busca con los resultados de esta investigación demostrar que el uso interactivo de los objetos geométricos en GeoGebra aumenta la comprensión y la capacidad de resolver de problemas (Rojas, Correa, y Muñoz, 2022), y que los estudiantes puedan reconocer la importancia práctica de los ángulos en su contexto, por ejemplo, que la escuadra que utilizan se compone de un ángulo rectángulo y dos agudos, llevando a los docentes al mismo tiempo a reflexionar sobre una mayor transferencia de los conocimientos adquiridos en clase a situaciones reales fuera del aula.

Finalmente, la investigación se justifica en base a la necesidad de mejorar la enseñanza de la geometría y del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos mediante la integración efectiva de herramientas tecnológicas y metodologías didácticas innovadoras. Los resultados preliminares y los posibles beneficios para el aprendizaje de los estudiantes respaldan la relevancia y el valor de esta investigación.

2. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presentan los aspectos legales en relación con educación, enseñanza y manejo de datos, en antecedentes se encuentran algunos trabajos relacionados con esta investigación y que aportan en el desarrollo de la misma, en el marco contextual se realiza una descripción de la región y la institución donde se lleva a cabo la investigación, finalmente se incluyen algunos de los referentes teóricos en los cuales se fundamenta la investigación.

2.1. Marco legal

La búsqueda de estrategias para enseñar geometría, lleva a indagar sobre la normatividad que legaliza los procesos educativos en Colombia. En este sentido en la Constitución Política de 1991 de Colombia (Constitución Política de Colombia, 1991) se pueden destacar los siguientes artículos:

Artículo 27: el Estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra.

Artículo 67: la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica.

La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos.

Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del servicio y asegurar a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo.

La Nación y las entidades territoriales participarán en la dirección, financiación y administración de los servicios educativos estatales, en los términos que señalen la Constitución y la ley.

También es importante señalar la Ley 115, correspondiente a la Ley General de Educación que rige en Colombia desde el 8 de febrero de 1994.

Artículo 1: Objeto de la ley. La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes.

La presente Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de la Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público.

De conformidad con el Artículo 67 de la Constitución Política, se define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal en sus niveles preescolar, básica (primaria y secundaria) y media, no formal e informal, dirigida niños y jóvenes en edad escolar, a adultos, a campesinos, a grupos étnicos, a personas con limitaciones físicas, sensoriales y psíquicas, con capacidades excepcionales, y a personas que requieran rehabilitación social.

Artículo 2: Servicio educativo. El servicio educativo comprende el conjunto de normas jurídicas, los programas curriculares, la educación por niveles y grados, la educación no formal, la educación informal, los establecimientos educativos, las instituciones sociales (estatales o privadas) con funciones educativas, culturales y recreativas, los recursos humanos, tecnológicos, metodológicos, materiales, administrativos y financieros, articulados en procesos y estructuras para alcanzar los objetivos de la educación.

Artículo 5: Fines de la educación. De conformidad con el Artículo 67 de la Constitución Política, la educación se desarrollará atendiendo a los siguientes fines:

1. El pleno desarrollo de la personalidad sin más limitaciones que las que le imponen los derechos de los demás y el orden jurídico, dentro de un proceso de formación integral, física, psíquica, intelectual, moral, espiritual, social, afectiva, ética, cívica y demás valores humanos.

2. La formación en el respeto a la vida y a los demás derechos humanos, a la paz, a los principios democráticos, de convivencia, pluralismo, justicia, solidaridad y equidad, así como en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad.

3. La formación para facilitar la participación de todos en las decisiones que los afectan en la vida económica, política, administrativa y cultural de la Nación.

4. La formación en el respeto a la autoridad legítima y a la ley, a la cultura nacional, a la historia colombiana y a los símbolos patrios.

5. La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.

6. El estudio y la comprensión crítica de la cultura nacional y de la diversidad étnica y cultural del país, como fundamento de la unidad nacional y de su identidad.

7. El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones.

8. La creación y fomento de una conciencia de la soberanía nacional y para la práctica de la solidaridad y la integración con el mundo, en especial con Latinoamérica y el Caribe.

9. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.

10. La adquisición de una conciencia para la conservación, protección y mejoramiento del medio ambiente, de la calidad de la vida, del uso racional de los recursos naturales, de la prevención de desastres, dentro de una cultura ecológica y del riesgo y la defensa del patrimonio cultural de la Nación.

11. La formación en la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social.

12. La formación para la promoción y preservación de la salud y la higiene, la prevención integral de problemas socialmente relevantes, la educación física, la recreación, el deporte y la utilización adecuada del tiempo libre.

13. La promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo.

Artículo 29: Definición y duración. La educación básica obligatoria corresponde a la identificada en el artículo 356 de la Constitución Política como educación primaria y secundaria; comprende nueve (9) grados y se estructurará en torno a un currículo común, conformado por las áreas fundamentales del conocimiento y de la actividad humana.

Artículo 20: Objetivos generales de la educación básica. Son objetivos generales de la educación básica:

1. Propiciar una formación general mediante el acceso, de manera crítica y creativa, al conocimiento científico, tecnológico, artístico y humanístico y de sus relaciones con la vida social y con la naturaleza, de manera tal que prepare al educando para los niveles superiores del proceso educativo y para su vinculación con la sociedad y el trabajo.

2. Desarrollar las habilidades comunicativas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente.

3. Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.

4. Propiciar el conocimiento y comprensión de la realidad nacional para consolidar los valores propios de la nacionalidad colombiana tales como la solidaridad, la tolerancia, la democracia, la justicia, la convivencia social, la cooperación y la ayuda mutua.

5. Fomentar el interés y el desarrollo de actitudes hacia la práctica investigativa.

6. Propiciar la formación social, ética, moral y demás valores del desarrollo humano.

Finalmente, dado que se trabajará con personas y se recolectarán algunos datos personales, es importante tener en cuenta la ley estatutaria 1581 de 2012 por la cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales.

Artículo 4: Principios para el Tratamiento de datos personales:

1. **Principio de libertad:** El Tratamiento solo se puede ejercer con el consentimiento, previo, expreso e informado del Titular. Los datos personales no podrán ser obtenidos o divulgados sin previa autorización, o en ausencia de mandato legal o judicial que releve el consentimiento.

2. **Principio de confidencialidad:** Todas las personas que intervengan en el Tratamiento de datos personales que no tengan la naturaleza de públicos están obligadas a garantizar la reserva de la información, inclusive después de finalizada su relación con alguna de las labores que comprende el Tratamiento, pudiendo sólo realizar suministro o comunicación de datos personales cuando ello corresponda al desarrollo de las actividades autorizadas en la presente ley y en los términos de la misma.

Artículo 8: Derechos de los Titulares. El Titular de los datos personales tendrá el siguiente derecho:

Revocar la autorización y/o solicitar la supresión del dato cuando en el Tratamiento no se respeten los principios, derechos y garantías constitucionales y legales. La revocatoria y/o supresión procederá cuando la Superintendencia de Industria y Comercio haya determinado que en el Tratamiento el Responsable o Encargado han incurrido en conductas contrarias a esta ley y a la Constitución.

Artículo 12: Deber de informar al Titular. El Responsable del Tratamiento, al momento de solicitar al Titular la autorización, deberá informarle de manera clara y expresa lo siguiente:

1. El Tratamiento al cual serán sometidos sus datos personales y la finalidad del mismo.
2. El carácter facultativo de la respuesta a las preguntas que le sean hechas, cuando estas versen sobre datos sensibles o sobre los datos de las niñas, niños y adolescentes.
3. Los derechos que le asisten como Titular.
4. La identificación, dirección física o electrónica y teléfono del Responsable del Tratamiento.

Teniendo en cuenta lo anterior, se elaboró un consentimiento informado (Anexo B) para evitar la vulneración de los derechos de los menores y que a su vez permita que los acudientes conozcan sobre el proceso que se lleva en la investigación, también se solicito al Director del Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, a través de un oficio el visto bueno para la implementación de la investigación en el colegio (Anexo C).

2.2. Marco de antecedentes

En este apartado se referencian investigaciones relacionadas con el problema de investigación y que realizan aportes al desarrollo de la misma. Para iniciar se presenta un antecedente internacional sobre la resolución de problemas.

La tesis de maestría titulada “Estrategia didáctica para la resolución de problemas geométricos bidimensionales en estudiantes de Educación secundaria de Ventanilla Callao” de Germán Palomino en Lima-Perú en el año 2015 (Palomino, 2015), donde se plantea elaborar una estrategia didáctica para la resolución de problemas geométricos bidimensionales en estudiantes de educación secundaria, mediante una metodología cualitativa que permitiera una análisis holístico. En esta investigación tuvieron en cuenta principalmente la teoría en resolución de problemas, el desarrollo del pensamiento geométrico según Jean Piaget, niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele y las disposiciones generales de educación en Perú. En el diagnóstico de la investigación se evidenció que los docentes trabajan con modelos didácticos tradicionales, que propician la repetición en el uso de estrategias de resolución de problemas geométricos en los estudiantes. Al finalizar, los investigadores concluyen que la resolución de problemas matemáticos permite el logro de competencias humanas que hacen posible el desempeño oportuno y eficaz de las personas en contextos similares o diferentes al suyo, sin embargo lograron evidenciar que los estudiantes tienden a resolver los problemas geométricos acudiendo a estrategias algebraicas pues son las más usadas por el docente, incluso si el problema no tiene una gráfica no consideran el hecho de realizarla.

La investigación “Teaching and Learning of Geometry in Primary School Using GeoGebra” realizada en Malasia por Jia Yi Boo y Kwan Eu Leong en el año 2016 (Boo y Leong, 2016), se realizan la pregunta ¿Cómo se puede usar GeoGebra para enseñar el concepto de ángulo en geometría? y para ello se realizaron dos semanas de exploración donde los docentes usaban GeoGebra como herramienta de enseñanza. Su marco teórico se basa en GeoGebra como herramienta de enseñanza y aprendizaje, geometría con GeoGebra y un análisis de la enseñanza de la geometría en Malasia. En esta los autores proponen actividades para el aprendizaje del ángulo usando GeoGebra, afirman que introducir a los alumnos al concepto de ángulos desde grados iniciales puede mejorar la comprensión de propiedades geométricas, construir figuras correctamente y desarrollar la comprensión de ángulos en diferentes polígonos, además los alumnos al finalizar la investigación manifestaron que les gustaba GeoGebra para aprender matemáticas y comprendieron mejor el concepto de ángulos. Por último, como fortaleza de GeoGebra los autores afirman que los ángulos se pueden construir de forma atractiva en comparación al método tradicional del lápiz y papel, es así como el programa es importante para lograr el aprendizaje del concepto de ángulo.

En cuanto a investigaciones nacionales se destacan cuatro, de las cuales se hace énfasis en el uso de GeoGebra.

La investigación titulada “Estrategia Didáctica Mediada por GeoGebra para el Fortalecimiento del Pensamiento Numérico Variacional en Estudiantes de Grado Octavo” realizada en Antioquia por Diana Rojas, Milena Muñoz y Sulma Correa en el año 2022 (Rojas et al., 2022), las investigadoras tienen como objetivo fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje de la factorización mediante la implementación del software matemático GeoGebra en estudiantes de grado octavo. La investigación se llevó a cabo mediante una investigación acción pedagógica y teniendo en cuenta en su marco teórico principalmente la educación con software y la educación en Colombia. Las autoras destacan que el uso del AGD permitió la manipulación de los objetos por parte de los estudiantes, con lo cual lograron obtener soluciones a los problemas planteados, además generó interés en otros docentes, quienes se propusieron usar estas herramientas en los siguientes años, adicionalmente concluyen que la implementación de estas estrategias hace que el aprendizaje sea significativo potenciando el desarrollo de competencias y resolución de problemas.

El trabajo “Incorporación de GeoGebra en la enseñanza de ángulos y sus medidas en estudiante de grado sexto de la institución educativa Eva Tulia Quintero”, realizada por Ana Harley Palacios Mosquera, en Manizales en el año 2018 (Palacios, 2018), tiene como principal objetivo analizar la influencia de GeoGebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje de ángulos y su medida, en los estudiantes de sexto grado, es decir, cómo GeoGebra facilita el aprendizaje de la geometría, además de resaltar el papel de las herramientas tecnológicas, para ello usaron una metodología cualitativa-descriptiva y su marco teórico se basa fundamentalmente en procesos de enseñanza y aprendizaje, uso de las TIC en el aprendizaje y la teoría de aprendizaje relacionada. Lograron establecer que el AGD GeoGebra influye positiva y efectivamente pues permite llevar el conocimiento a la vida cotidiana y también fortalecer las habilidades tecnológicas, se fomenta el aprendizaje práctico de las matemáticas y genera espacios de discusión y colaboración.

En la Universidad del Cauca, Ricardo Urbano en el año 2018, realizó su investigación titulada “Un diseño de tareas que integran AGD y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto” (Urbano, 2018), el objetivo de la investigación era analizar las características de un diseño de tareas, que integran Cabri y representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para el aprendizaje de la simetría axial y el reconocimiento del pueblo escultor para grado quinto, así se diseñó una secuencia de tareas que integró el AGD Cabri y la modelación geométrica en esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial. La metodología usada es la microingeniería didáctica con las respectivas etapas y el diseño de tareas lo realizó basado en la teoría de las situaciones didácticas. Como resultado el avance en la manipulación de recursos informáticos para promover el aprendizaje de la simetría axial. Son múltiples las conclusiones que se resaltan de la investigación, entre ellas: la manipulación de los objetos mediante el arrastre permite explorar y verificar generalidades, motivación de los estudiantes frente a las actividades y la asignatura, pronta adaptación al uso de un programa que no se ha trabajado con anterioridad.

En la universidad Nacional, sede Medellín, José Rave realizó su investigación titulada “Propuesta metodológica para la enseñanza de los conceptos básicos de geometría (Rectas y ángulos) en la educación media a través de su aplicabilidad en la resolución de problemas” en el año 2017 (Rave, 2017), en la cual se propuso diseñar una propuesta metológica de enseñanza para conceptos básicos de geometría y resolución de problemas para grado noveno. En este caso se usó una investigación acción educativa donde el investigador realizó un análisis de su realidad e intervino frente a lo encontrado. Su marco teórico fue basado en la resolución de problemas, la enseñanza para la comprensión y la normativa Colombiana. Se resalta que fue posible evidenciar que, a pesar del grado que cursaban los estudiantes, existían dificultades en la comprensión de los conceptos y esto se reflejaba en el desarrollo de las actividades que se propusieron, además se desarrollaron actividades con material manipulable y un programa libre con lo cual se evidencian avances en la comprensión y la resolución de problemas.

En cuanto a las investigaciones regionales, en la Universidad de Nariño se desarrolló el proyecto de investigación docente “Resolución de problemas: Olimpiadas Universitarias de Matemáticas UDENAR” aprobado con el acuerdo 192 de 1 de noviembre de 2016 emanado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Posgrados y Relaciones Internacionales (Universidad de Nariño, 2023c), el cual busca fortalecer los conocimientos y habilidades en matemáticas de los estudiantes de las carreras de ciencia e ingeniería de la universidad a través de “reuniones periódicas para estudiar estrategias y la solución de problemas matemáticos que estimulen tanto la creatividad como las habilidades de raciocinio y de análisis”, de este se obtuvieron resultados satisfactorios frente a el aprendizaje de estrategias y capacitación, pero además se evidencia la necesidad de continuar trabajando en el área.

De las anteriores investigaciones se destacan los siguientes aportes: es importante rescatar el pensamiento y las estrategias geométricas puesto que se presenta un tendencia al uso algebraico ya que es el más familiar para los estudiantes; es importante fortalecer el concepto de ángulos desde etapas iniciales para que aporte a otros procesos; los software de matemáticas captan la atención, por tanto las actividades que se propongan deben permitirle un acercamiento progresivo al uso del entorno y motivar la aplicación del mismo; el uso de un AGD motiva la participación de los estudiantes, por ello se deben generar espacios en los cuales ellos puedan expresarse con tranquilidad; propiciar espacios donde sea posible verificar condiciones y generalidades incluso cuando los objetos cambian de lugar o posición y es de vital importancia fortalecer estos conceptos que son base para la comprensión de otros temas en grados superiores, adicionalmente fue posible evidenciar que la investigación es pertinente a nivel regional, ya que las investigaciones en este tema son limitadas.

2.3. Marco contextual

La investigación se llevará a cabo en la ciudad de Pasto, capital del departamento de Nariño. Este departamento se encuentra ubicado en el extremo suroeste de Colombia, en las regiones andina y pacífica, limitando al norte con Cauca, al este con Putumayo, al sur con la República de Ecuador y al oeste con el océano Pacífico.

Nariño presenta una geografía diversa y clima variado según las altitudes: caluroso en la planicie del Pacífico y frío en la parte montañosa, donde vive la mayor parte de la población, situación que se repite en sentido norte-sur. El departamento es esencialmente agrícola y ganadero.

San Juan de Pasto está ubicado al suroccidente, al pie del Volcán Galeras, conocido culturalmente como Urcunina. Esta ciudad es reconocida por los Carnavales de Negros y Blancos declarados en 2009 como un Patrimonio Cultural Inmaterial de la Humanidad.

Entre los colegios públicos que hay en Pasto, se encuentra el Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, que es una Institución Educativa Oficial, de propiedad de la Universidad, dedicada a la educación formal en los niveles de preescolar grado de transición, educación básica primaria, secundaria y media académica, “orientada a la formación de personas emocional y académicamente competentes, con sensibilidad social, espíritu crítico, capacidad de liderazgo y comprometidas con el destino de su entorno” (Universidad de Nariño, 2023b) contribuyendo así a la formación de profesionales universitarios con una educación integral.

La población estudiantil del colegio se caracteriza por su participación activa en las diferentes actividades institucionales, el compromiso con el proyecto Liceísta y el sentido de pertenencia hacia su colegio.

Esta investigación se centra en los estudiantes de sexto grado, quienes presentan una variedad en cuanto a las instituciones de procedencia y el nivel académico, puesto que el colegio realiza admisiones en este grado, por tanto, los 43 estudiantes que participan en la investigación, son del Liceo de la universidad como de colegios públicos y privados de diferentes zonas.

2.4. Marco teórico

En este apartado se presentan los referentes teóricos que fundamentan la investigación, para ello se desarrollan algunos de los aspectos más relevantes sobre los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias, la resolución de problemas, los ambientes de geometría dinámicos particularizando en GeoGebra y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

2.4.1. Lineamientos curriculares

Los lineamientos curriculares son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el Ministerio de Educación Nacional, a través de un largo proceso de la comunidad académica educativa, para apoyar y guiar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales establecidas según la Ley General de Educación. Estos lineamientos están orientados hacia una formación integral de los estudiantes, lo cual incluye la conceptualización por parte de los estudiantes, la comprensión de sus posibilidades y el desarrollo de competencias que les ayude a enfrentar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, la capacidad de resolver conflictos y el manejo de la incertidumbre.

Dentro los lineamientos en matemáticas se busca que los estudiantes aprendan a ocuparse de sus problemas, ya que “a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo y encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones” (Ministerio de Educación Nacional, 1998), puesto que, en matemáticas uno de los procesos que se debe desarrollar es la resolución de problemas y ser capaces de transponer esos conocimientos a los problemas de la vida cotidiana.

En los lineamientos se encuentra que “el estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la matemática moderna. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría” (MEN, 1998). Esto se da ya que después de la geometría de Euclides se profundizó más en la geometría deductiva dejando de lado la intuitiva, que dentro del entorno escolar es de gran importancia en los primeros años, puesto que los niños perciben su entorno como un mundo nuevo que es eminentemente geométrico, lleno de formas por explorar.

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales. Es por ello que en los lineamientos se sugiere que en los primeros años se enseñe la noción y concepto de ángulo a partir de las experiencias que las niñas y niños han tenido al dar una vuelta completa, media vuelta y cuartos de vueltas en sus juegos (MEN, 1998).

A partir de los lineamientos curriculares el MEN desde el 2002, realizó un trabajo mancomunado con la Asociación Colombiana de Facultades de Educación (ASCOFADE), donde intervinieron expertos en educación de reconocida trayectoria para lograr la elaboración de los Estándares Básicos de Competencias, los cuales “constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo” (MEN, 2006). Teniendo en cuenta lo anterior en esta investigación se centra en los lineamientos y los estándares que refieren a matemáticas, para ello se inicia revisando los cinco procesos generales de la actividad matemática.

2.4.2. Procesos generales de la actividad matemática

Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y se toman como base para los estándares de matemáticas son: modelación, comunicación, razonamiento, formulación, comparación y ejercitación, y formulación y resolución de problemas.

La modelación según los lineamientos curriculares es la forma de describir la relación entre el mundo real y las matemáticas, este proceso toma mayor importancia cuando se evidencian los avances industriales, pues estos procesos tecnológicos tienen un modelo matemático. En los Estándares de matemáticas un “modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (MEN, 2006), lo cual permite al estudiante estimar una solución, encontrar diferentes caminos y determinar si estos caminos llevan a una solución o si por el contrario es imposible resolver un problema.

La comunicación es un proceso que nos hace ver que aunque las matemáticas no son un lenguaje, (MEN, 2006) es importante que los estudiantes se comuniquen matemáticamente entre ellos y los docentes para que expresen las soluciones de los problemas, los avances y las dificultades, lo que les permite darle significado a las “palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos” (MEN, 2006). Siendo así la comunicación una parte esencial en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

El desarrollo del razonamiento matemático es importante desde los primeros grados apoyado en su contexto de tal manera que le permita explicar el cómo y porqué de los procesos, justificar, formular hipótesis, encontrar relaciones y utilizar argumentos propios para expresar sus ideas (MEN, 1998), para ello es importante que los estudiantes tengan un contexto que los motive a explorar, ayudándoles a comprender que el fin de las matemáticas no es memorizar reglas y algoritmos, pues el razonamiento fortalece la toma de decisiones, el análisis, síntesis y predicción de situaciones, ayuda a sistematizar y resolver problemas de orden lógico, llevando a una formación básica para que los estudiantes puedan desenvolverse en su cotidianidad (Salvatierra, Gallarday, Ocaña-Fernández, y Palacios, 2019).

Por otro lado, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos es un proceso que implica llevar al estudiante al aprendizaje de procedimientos o modos de saber hacer, que son esenciales en el currículo, puesto que estos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana (Barajas y Parada, 2015). Es importante que el docente enseñe a los estudiantes diferentes tipos de algoritmos y procedimientos para las operaciones aritméticas usuales, permitiendo que ellos decidan cual se facilita más, pues se busca la construcción y ejecución, segura y rápida de estos procedimientos mecánicos o de rutina, dada la importancia de los mismo, pues si un ingeniero realiza mal un cálculo en la construcción de un puente, este podría caerse.

Finalmente, la formulación y resolución de problemas es un proceso que está inmerso en todos los contenidos curriculares de matemáticas, “más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido” (MEN, 2006), esto en la medida en que las situaciones que se aborden estén relacionadas a experiencias cotidianas logrando que sean más significativas para los estudiantes. Lo ideal es que los estudiantes tengan la capacidad de formular ellos mismo los problemas, y que descubran que entre más problemas resuelven mejorarán sus habilidades en este proceso. Cabe señalar que en esta investigación este proceso es un eje en el desarrollo de la secuencia didáctica y por ello más adelante se profundizará más en el, tomando como referencias autores que han estudiado este proceso como un campo de conocimiento.

A continuación se presentan alguno aspectos generales sobre los cinco tipos de pensamientos que se contemplan en los lineamientos y los estándares.

2.4.3. Tipos de pensamientos matemáticos

Los cinco tipos de pensamiento que se contemplan en los lineamientos curriculares de matemáticas y se toman como base para los estándares de matemáticas son: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El pensamiento numérico y sistemas numéricos, se adquieren gradualmente y van evolucionando en la medida en que los estudiantes tienen la posibilidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, es así como se debe dominar “un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos” (MEN, 2006). Los sistemas numéricos se han formado a través del tiempo, con aciertos y errores, entre estos sistemas están los números naturales, enteros, racionales e irracionales, formando todos ellos el sistema de los números reales.

El pensamiento métrico y sistemas de medidas, hace referencia a la comprensión de las magnitudes, su cuantificación y uso con significado y sentido para entender situaciones en contexto. La acción de medir empieza desde muy temprano con situaciones de comparación como mucho o poco, lejos o cerca y grande o pequeño (MEN, 1998). Se debe tener en cuenta los diferentes sistemas de medida, ya que en un principio las medidas se realizaban con partes del cuerpo y por ello eran diferentes en cada región, entonces se vio la necesidad de estandarizarlas para la industria y el comercio. Hoy en día se conoce el sistema decimal de pesos y medidas como el sistema CGS (centímetro-gramo-segundo), MKS (metro-kilogramo-segundo) y SI (Sistema Internacional de unidades y medidas) este último es el más usado actualmente.

El pensamiento aleatorio y sistemas de datos, también llamado probabilístico es usado en situaciones de incertidumbre, azar o riesgo, para la toma de decisiones . Los estudiantes toman conciencia de este pensamiento en juegos como lanzar un dado o una moneda donde reconocen la probabilidad de obtener un determinado resultado.

El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, hace referencia al "reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 2006), relacionándose con los otros tipos de pensamiento a través de modelos matemáticos para situaciones naturales o sociales.

Finalmente, el pensamiento espacial y sistemas geométricos estudian las formas y estructuras geométrica en el espacio, estableciendo relaciones entre los objetos involucrados en el espacio y cada persona. Este pensamiento se encuentra estrechamente relacionado con el pensamiento métrico, puesto que es allí donde se establecen relaciones como el perímetro y el área, el saber que tan cerca o lejos está un objeto, entre otros, esto al pasar de lo cualitativo a lo cuantitativo. Los sistemas geométricos pueden modelarse con lápiz y papel o mentalmente o incluso usando ambientes de geometría dinámica. La geometría activa ofrece alternativas para el estudio de los sistemas geométricos, por medio del uso de materiales como la cartulina, bloques, plastilina e incluso el mismo cuerpo. Así es posible explorar el espacio, manipulando objetos y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, lo cual lleva a la elaboración de conceptos geométricos, como el de volumen, pues la interacción dinámica que se genera entre el entorno y el estudiante, en el proceso de medir, hace que los estudiantes encuentren sentido a los conceptos matemáticos.

2.4.4. Derechos básicos de aprendizaje DBA

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) son un conjunto de aprendizajes estructurantes, es decir, un conjunto coherente de conocimientos y habilidades con potencial para organizar los procesos necesarios en el logro de nuevos aprendizajes (Ministerio de Educación Nacional, 2016), y que, por ende, permiten profundas transformaciones en el desarrollo de las personas. Los DBA están diseñados para los grados desde transición hasta once, estos se deben adaptar a cada institución educativa de acuerdo con su metodología y modelo, además se elaboraron teniendo en cuenta los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias y están redactados en un lenguaje comprensible tanto para padres de familia como para los docentes, es importante resaltar que los DBA se componenen de un enunciado, evidencias de aprendizaje y ejemplo (MEN, 2016).

Como ya se mencionó, los DBA se elaboraron teniendo en cuenta los lineamientos y los estándares por tanto, estos también promueven el desarrollo de cada uno de los pensamientos y sistemas, en particular del pensamiento espacial y sistema geométrico que se relaciona con la construcción y manipulación de las representaciones mentales de objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales (MEN, 2006).

El derecho básico de aprendizaje de sexto grado que se tiene en cuenta en esta investigación es: “propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas” (MEN, 2016) haciendo énfasis en el tema de ángulos.

Por otro lado, se encuentran las matrices de referencia del ICFES, otra herramienta que guía la labor docente hacia la preparación del examen de estado, en estas se presentan los aprendizajes que evalúa el ICFES y relaciona competencias y componentes en las diferentes asignaturas, entre las competencias en matemáticas se encuentra comunicación, razonamiento y resolución y entre los componentes se encuentra el aleatorio, espacial métrico y numérico variacional, además por cada componente y competencia se encuentra una afirmación y las respectivas evidencias.

En el desarrollo de esta investigación se tendrá en cuenta el siguiente aprendizaje que esta incluido en la matriz: “Establecer relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes” y la evidencia “Identificar los atributos de un objeto o evento que tienen la posibilidad de ser medidos: longitud, superficie, espacio que ocupa, duración, etc” (Ministerio de Educación Nacional, 2023) teniendo en cuenta que el tema central son los ángulos.

Los anteriores aspectos se consideran para la elaboración de las actividades de la secuencia de enseñanza, orientando para que se ajuste al nivel de las temáticas trabajadas en grado sexto. Ahora es necesario entrar a hablar sobre algunos aportes que han realizado diferentes autores en el campo de la resolución de problemas.

2.4.5. Resolución de problemas

En el campo de la resolución de problemas se encuentran diferentes autores que han realizado aportes importantes a este, uno de los pioneros es George Pólya quien nació en Budapest, Hungría en el año 1887 y murió en Palo Alto California en el año 1985, él dedicó su vida a las matemáticas y su enseñanza, realizó múltiples aportes a la resolución de problemas y consideró que algo importante en la enseñanza de la matemática era desarrollar estrategias para resolver problemas (Alfaro, 2006).

Es importante resaltar que el papel del docente es fundamental, pues es quien guía el proceso que realiza el estudiante, esta “ayuda” debe realizarse en la medida justa, ya que si se lo deja sólo es posible que no progrese, pero si se le ayuda demasiado, entonces no le queda nada para resolver (Pólya, 1965), además es importante como afirma Alfaro (2006) “preparar con cuidado los ejemplos, no se debe proponer problemas que parezcan imposibles, sino que realmente sean adecuados y que se encuentren al nivel del estudiante“ pues si los problemas no parecen estar al alcance del estudiante este se desmotiva.

Pólya propone así cuatro pasos fundamentales que se pueden seguir cuando se enfrenta a un problema o cuando se guía el proceso de enseñanza de resolución de problemas, estas fases son: comprender el problema, trazar un plan, ejecutar el plan y hacer una mirada retrospectiva (Pólya, 1965).

Comprender el problema es tener claro qué se pide o a dónde se debe llegar, tener presente toda la información dada, ser capaz de contar el problema sin necesidad de leerlo, percatarse de los pequeños detalles aunque parezcan insignificantes y si hay figuras dibujarlas, identificando en ellas los datos dados, incluso, de ser posible se debe asignar una notación clara y los símbolos necesarios para dar claridad al problema. Luego, para trazar un plan, es necesario mirar las relaciones existentes entre los elementos a partir del problema, tener presente los conocimientos previos o soluciones que se han aplicado en problemas similares y así determinar, a modo general, los cálculos, razonamientos, construcciones, entre otros, que se deben realizar para llegar a la solución. Una vez pensado un plan, el paso a seguir es ejecutar el plan, en donde se ponen en juego los conocimientos adquiridos ejecutando las etapas que se consideraron cuando se trazó el plan, además es importante la concentración y la paciencia.

Finalmente, Pólya resalta que al finalizar se debe hacer una mirada retrospectiva, es decir, volver atrás, lo cual enriquece al estudiante, pues en este momento se hace una revisión de los procesos y razonamientos realizados para tener completa seguridad de la validez de su solución y en el caso de no resolver el problema correctamente, idear un nuevo plan. Además, es el punto de partida para pensar en la posibilidad de cambiar el problema, de tal manera que permita crear uno nuevo.

Para Pólya cada una de las etapas es importante pues si bien en algunas ocasiones se puede tener una idea brillante y se puede llegar a un resultado rápidamente, esto no ocurre siempre y por el contrario se puede llegar a resultados que no se esperaban, por ello si el alumno verifica cada paso al llevar a cabo el plan se pueden evitar muchos errores (Pólya, 1965).

En este mismo campo se destaca el matemático español Miguel de Guzmán quien basa sus ideas en Pólya, él nació en Cartagena, España en 1936 y murió en Getafe, España en 2004, considera que las matemáticas deben presentarse desde un contexto histórico puesto que la teoría tendría un sentido motivante y asimilable, además aplicable a la resolución de problemas generando gusto por resolver problemas dentro de las matemáticas (Gaspar y Paitan, 2021). Adicionalmente, de Guzmán (2007) afirma que se deben "transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, para estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, antes que la mera transmisión de recetas adecuadas en cada materia", para lo cual también se debe considerar problemas que sean interesantes para los estudiantes aumentando, su interés, comprensión y conocimiento.

De Guzmán también formuló un modelo aplicable a la resolución de problemas que consiste en cuatro fases que son: familiarización con el problema, búsqueda de estrategias, llevar adelante la estrategia y revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Para familiarizarse con el problema, se debe tratar de entender a detalle el problema, con paciencia y tranquilidad para perderle el miedo, además es importante sacar los datos y tener clara la incógnita (Gaspar y Paitan, 2021), finalmente el docente juega un papel destacado en esta etapa pues puede aclarar dudas de vocabulario, parafrasear el problema o incluso ejemplificar (E. Arteaga, Medina, y del Sol, 2019) para que el estudiante no tenga dudas y así pueda pasar a la siguiente fase.

Después se debe hacer una búsqueda de estrategias, que se convierte en una de las etapas más importantes ya que permite explorar y experimentar a partir de los conocimientos matemáticos, estas deben ser variadas, se sugiere empezar por lo más fácil, ensayar, realizar dibujos, figuras o esquemas, definir la notación, el lenguaje y buscar problemas semejantes o suponer que el problema está resuelto.

Una vez definidas algunas estrategias, es importante llevar adelante la estrategia, aquí se debe seleccionar y ejecutar la mejor idea, cada paso debe ser evaluado con el fin de saber si la estrategia permite acercarse a la solución (M. Arteaga, 2015), así mismo la actitud es muy importante, se debe perseverar en el desarrollo de la estrategia, si el camino se acaba buscar otro alternativo, y si se logra solucionar el problema mirar a fondo los razonamientos realizados.

Por último, se debe revisar el proceso y sacar consecuencias de él, para ello se examina a fondo el camino que se siguió, ya sea que se haya logrado o no encontrar la solución, no obstante, se debe reflexionar sobre los procesos realizados para determinar si hay caminos más simples, hasta donde llega el método, por qué funciona y cómo funciona la solución planteada. Esta etapa debe ser la más fructífera para quien resuelve un problema.

En esta propuesta para resolver problemas de Guzmán (2007), “pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos” permitiendo un procedimiento práctico donde el descubrimiento y la creatividad se usan para resolver el problema basándose, también en las experiencias vividas.

Otro autor destacado en este campo es el investigador de educación matemática estadounidense, Allan Schoenfeld, quien nació en 1946, él luego de estudiar matemática pura se interesó por el trabajo de Pólya, y comenzó a indagar con profesores y estudiantes sobre el método de Pólya, incluso observaba el trabajo de sus estudiantes cuando resolvían problemas y experimentaba cambiando las situaciones (Barrantes, 2006).

Schoenfeld consideró que se deben tener en cuenta algunos factores que hacen parte de este campo, el primero son los recursos que tiene el estudiante para resolver el problema, es decir, los conocimientos previos necesarios para enfrentarse al problema. El docente debe conocer si los estudiantes tienen estos conocimientos pues de lo contrario no podrán llegar a la solución del problema, pues si fuese un problema que trate de ángulos, por ejemplo, y el estudiante no sabe que es un ángulo, entonces no entenderá el problema. También se debe tener en cuenta que estos conocimientos estén bien aprendidos porque si tiene mal la fórmula que necesita o no sabe realizar las operaciones básicas necesarias, entonces tendrá mayor dificultad para resolver el problema. El segundo recurso son las heurísticas dada la importancia de estas, en el desarrollo de un problema, pues el estudiante no debe limitarse a una sola, por eso considera que, solo las heurísticas tal como lo propone Pólya, no son lo único que se debe tener en cuenta a la hora de resolver un problema (Shoenfeld, 1985).

El último factor que considera es el control, haciendo referencia a la capacidad del estudiante para manejar las situaciones que se le presenten al tomar un camino para resolver un problema, se busca que si el estudiante mira que ese camino probablemente no lleva a una solución correcta desista y tome uno nuevo. Algunas acciones que permiten que el estudiante tenga el control al resolver un problema son el entendimiento o comprensión del problema, hacer un diseño con las posibles heurísticas, monitorear el proceso y saber en qué momentos se debe tomar un nuevo camino, llevar a cabo el diseño estando dispuesto a cambiarlo y hacer una revisión del proceso de resolución del problema.

Schoenfeld propone cuatro fases basado en la propuesta de Pólya, estas son: análisis del problema, exploración de posibles soluciones para tomar una camino, ejecución del camino seleccionado y la comprobación de la solución obtenida a través de preguntas.

Por otra parte, Luz Manuel Santos Trigo, físico y matemático, quien nació en San Luis Acatlán, Guerrero en 1957, basa sus ideas en los aportes de Allan Schoenfeld, compartiendo con él que hay elementos importantes que pueden guiar la resolución de un problema como se puede ver en Santos Trigo (2014) y Shoenfeld (1985). Para Santos Trigo, en primer lugar se debe hacer el análisis donde se tiene algunas pautas a seguir, cómo realizar un diagrama si es posible, examinar casos especiales y tratar de simplificar el problema. En segundo lugar se realiza la exploración, donde se pueden considerar problemas equivalentes al reemplazar algunas condiciones o recombinar elementos, también problemas modificados ligeramente, como descomponer el problema y trabajarlo por casos. Finalmente, se realiza la verificación de la solución, en la cual es necesario responder preguntas como por ejemplo ¿se usaron todos los datos?, ¿la solución puede obtenerse de otro modo diferente?, ¿puede reducirse a resultados conocidos?, entre otras.

Los elementos que propone Santos Trigo (2014), pueden servir de guía en el proceso de resolución, sin embargo, no se espera que los estudiantes los mecanicen o utilicen rígidamente, sino que se conviertan en herramientas que ayuden a entender y resolver problemas.

Santos Trigo resalta la importancia de realizar buenas preguntas a la hora de enfrentarse a un problema, ya que es importante saber que tanto se conoce de los conceptos matemáticos posiblemente presentes en el problema a solucionar y además le permite al estudiante ampliar la búsqueda de estrategias heurísticas para resolverlo. También considera que el uso de diferentes herramientas permite interactuar con los problemas para lograr una mayor comprensión del mismo, herramientas como lápiz y papel y las tecnologías digitales. Camacho, Santos Trigo, y Nortes (2018) señalan que “el uso sistemático de diversas herramientas computacionales no constituye solamente una ayuda para explorar y representar relaciones matemáticas sino también puede resultar fundamental para comprender y desarrollar nuevos conceptos matemáticos”, por ello la importancia de incluir en los procesos de enseñanza nuevas herramientas, particularmente en esta investigación se va a trabajar el AGD GeoGrebra.

2.4.6. Ambiente de geometría dinámica GeoGebra

Resolver problemas con el uso de tecnologías digitales fomenta diferentes formas de razonar en comparación con otras herramientas, como papel y lápiz (Barrera y Reyes, 2018), es así como Santos Trigo y Camacho (2018) señalan que el uso de estas tecnologías permiten a los estudiantes "analizar las formas de construir y explorar representaciones de los problemas, en los procesos de formulación de conjeturas y relaciones, en la búsqueda de argumentos para sustentar alguna conjetura y en las maneras de discutir y comunicar resultados", pues estas tecnologías ayudan a los estudiantes a lograr una mejor comprensión de los problemas, por ejemplo en el área de geometría, los estudiantes pueden usar un software de geometría dinámica para representar los objetos presentes en el problema cumpliendo las condiciones dadas y manteniendo invariantes en caso de ser necesarias, lo cual permite manipularlos en tiempo real y con ello explorar diferentes opciones para encontrar una solución correcta.

En el uso de las tecnologías digitales es importante que el docente propicie y busque diferentes estrategias y herramientas para afrontar las dificultades que se presenten al resolver problemas y debe ser el primero en explorar y experimentar con estas herramientas (Leung, 2017), para que al ponerse en el papel del estudiante logre identificar las potencialidades y dificultades de estos ambientes digitales. Cabe señalar que en el ámbito internacional según Pepin, Gueudet, y Trouche (2017) los docentes usan recursos digitales para enseñar, lo cual transforma los procesos educativos y origina nuevas dinámicas educativas.

Como afirma Santos Trigo y Camacho (2018) "el desarrollo de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra representa un avance significativo, dado que proporciona a los estudiantes herramientas para representar y explorar conceptos y problemas matemáticos" llevándolos a comprender el problema y buscar estrategias para encontrar una posible solución. Una fortaleza de un SGD es que nos permite crear y mantener la esencia de una construcción geométrica dinamizando aquellas partes de la construcción que nos interesan para explorar y realizar posibles conjeturas, es decir, que se puede "visualizar el estudio de la variación de un aspecto de la configuración mientras mantenemos otros aspectos constantes, así anticipando la emergencia de patrones invariantes" (Leung, 2008), que son los que ayudan a encontrar diferentes caminos por explorar.

En este sentido, GeoGebra es un Software matemático dinámico para todos los niveles educativos que integra geometría en dos y tres dimensiones, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadística y cálculo en un solo entorno (GeoGebra, 2023). Este software ofrece a los docentes la posibilidad de monitorear el progreso de sus estudiantes en tiempo real a través de GeoGebra Classroom, también se puede utilizar material creado por otros docentes e integrantes de la comunidad de GeoGebra, conformada por millones de usuarios de casi todos los países.

GeoGebra se caracteriza por ser un Software de código abierto y libre, a diferencia de otros que deben pagarse, fácil de utilizar en línea y descargar en el computador o en el celular, cuenta con una interfaz intuitiva y ágil, con herramientas de autoría, es decir, que se pueden crear recursos de aprendizaje interactivos como actividades, libros y páginas web y está disponible en cada idioma requerido por millones de usuarios (GeoGebra, 2023).

Santos Trigo, Camacho, Pytlak, Rowland, y Swoboda (2011) argumentan que el uso de GeoGebra brinda al estudiante a la hora de resolver un problema, desarrollar su pensamiento matemático, ya que es un medio que favorece la comprensión y la exploración del mismo. Por ejemplo al realizar la construcción de un problema geométrico sobre área en cuadrados que se intersecan se pueden manipular los puntos variantes para observar qué pasa con el área, cuando el tamaño de los cuadrados cambia, e incluso mirar casos particulares como cuando estos cuadrados dejen de intersecarse, todo este proceso de exploración que facilita GeoGebra, es el que promueve el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

GeoGebra integra los procesos que intervienen en la resolución de problemas a través del uso de construcciones dinámicas que pueden mezclar las diferentes vistas (geométrica, algebraica, gráfica, etc) al mismo tiempo, favoreciendo la búsqueda de relaciones, invariantes y patrones, que llevaba a la formulación de conjeturas y con ello a establecer caminos de solución para el problema. Poveda (2020) afirma que este software “fomenta la formulación de conjeturas a partir de la información visual a través de la medición de la longitud de un segmento, la posición de un punto en el plano, la amplitud de un ángulo, el perímetro o área de un polígono, entre otros” proporcionando también la posibilidad de plantear conexiones entre diferentes objetos geométrico.

Cabe resaltar que una de las herramientas de GeoGebra, que más se usa en la resolución de problemas donde la solución no es inmediata a través de un proceso algorítmico es el arrastre de los objetos matemáticos presentes en la construcción, debido a que permite identificar conceptos, plantear y sustentar conjeturas (Leung, 2015) y Poveda (2020).

Por otro lado, este software según del Pino (2013) se caracteriza por no tener costo para los centros educativos, ser una multiplataforma, ser sencillo y fácil de usar, pero al mismo tiempo potente al mezclar diversas vistas. También, E. Arteaga et al. (2019) afirman que además de contar con las mismas ventajas de otro software educativo, sobresalen las siguientes: se propician varios tipos de aprendizaje que pueden ser individuales o grupales, se fomenta la creatividad, facilita la construcción de conocimiento por parte del alumno, favorece el aprendizaje autónomo, permite el acceso al conocimiento y a la participación de actividades, incluyen elementos para captar la atención del alumno, favorece el carácter interactivo del aprendizaje y permite la utilización de principios heurísticos, que con otros medios resultan casi imposible de aplicar, como es el caso de la movilidad, la inducción, la generalización, entre otros.

Por tanto, es importante la inclusión SGD como GeoGebra en las aulas de clase, no solo para motivar a los estudiantes sino también para fortalecer sus conocimientos y habilidades matemáticas, pues "los estudiantes en su formación académica deben construir conocimiento sólido y estrategias que los lleven a resolver problemas" (Santos Trigo y Camacho, 2018).

2.4.7. Teoría de las situaciones didácticas.

La teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau es una teoría de enseñanza que hace parte de la didáctica de las matemáticas, se enfoca en la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos, resaltando que es una construcción colaborativa en un espacio académico, es decir es un proceso social. Brousseau afirma que "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, 1986).

Teniendo en cuenta lo anterior, el autor plantea que "una situación" consiste en la interacción entre un sujeto y un medio que determina un conocimiento (Brousseau, 2007), se debe entender el medio como la herramienta que permite llegar a un determinado conocimiento, sin embargo no es el principal protagonista de la situación. En dichas situaciones se presentan dos que son de vital importancia la situación didáctica y situación adidáctica.

La situación didáctica es aquella que se construye intencionalmente por el profesor y que tiene un fin de aprendizaje, se desarrolla mediante cuatro fases que son: situación de acción, situación de formulación, situación de validación y situación de institucionalización.

La situación de acción hace referencia a que el estudiante realice ciertas acciones y tome algunas decisiones, teniendo en cuenta sus conocimientos previos, en esta situación se da una interacción con el medio para llegar a una solución.

La situación de formulación permite a los estudiantes mencionar su proceso de solución, es decir mediante un registro verbal o escrito el estudiante puede describir cuál podría ser la solución, es muy importante que todos los estudiantes participen y comenten sus ideas con sus pares.

En la situación de validación es donde se validan las opciones propuestas por los estudiantes, se evidencia si con lo propuesto se llega a alguna solución o si hay algún error, se interactúa con el docente sobre los procesos llevados a cabo y en sí la solución que se plantea.

En la institucionalización el docente "oficialmente" presenta el conocimiento que se debía adquirir, se verifica que los estudiantes lograron alcanzar el objetivo propuesto, se dan aclaraciones y se comparte la información de manera ordenada para que sea claro para los estudiantes.

La otra situación de relevancia es la a-didáctica, que son momentos que surgen dentro de una situación didáctica y hace referencia a un entorno donde el estudiante hace propia la situación que plantea el docente (la situación se debe poder abordar desde los conocimientos previos que tiene el estudiante) y trabaja en ella para buscar la solución de forma independiente o en grupo, sin la intervención directa del docente (Vidal, 2009).

El papel del docente es guiar el trabajo de los estudiantes sin resolver el problema, responder preguntas que permitan que el estudiante continúe y no obtenga la solución inmediata, aliente a realizar diversos procesos y recuerde los objetivos de la actividad, esto se denomina proceso de devolución. Es importante mencionar que el docente en una situación didáctica debe dejar claras las condiciones y reglas que los estudiantes deben seguir al realizar la tarea, es decir, como menciona Brousseau se debe establecer el contrato didáctico, estas condiciones deben ser claras para los estudiantes, además en caso de ser necesario se pueden modificar o aclarar a medida que se realiza la actividad, de manera que los estudiantes no tengan dudas.

La secuencia de enseñanza ha sido elaborada teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas, abordando las diferentes etapas para lograr que los estudiantes lleguen al conocimiento esperado en cada una de las secciones.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos que se emplean para alcanzar los objetivos de esta investigación. Inicialmente se realiza un acercamiento al diseño metodológico propuesto desde la micro ingeniería didáctica de Artigue, posteriormente se desarrollan cada una de las etapas para cerrar con el análisis de los resultados.

3.1. Tipo de investigación

Esta investigación está basada en la corriente pedagógica constructivista, debido a que se trabaja con la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, la cual se centra en el estudiante mediante un enfoque activo y constructivo que le da importancia a las experiencias y la interacción que tiene con el entorno, además el papel del docente se caracteriza por ser un facilitador del aprendizaje.

Esta investigación es de tipo cualitativa, puesto que se pretende observar, describir y analizar el resultado de aplicar una secuencia didáctica al grupo de estudiantes de grado sexto.

Finalmente, es importante resaltar que esta propuesta se enmarca en la linea de investigación de Educación Matemática del Grupo de Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones (ALTENUA), de la Universidad de Nariño.

3.2. Ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica se incluyó en la didáctica de la matemática a comienzos de los años ochenta y nace para comprender la complejidad de la clase desde la investigación. Artigue, Douady, y Moreno (1995) compara el trabajo didáctico con el de un ingeniero, quien tiene que usar todos los medios disponibles al desarrollar un proyecto, ya que se podía encontrar con objetos más complejos de los que manejaba la ciencia.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por tener “un esquema experimental basado en las relaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (De Faria, 2006) lo que permite observar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Cabe resaltar que “la validación es en esencia interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori” (Campeón, Aldana, y Villa, 2018) y no como en otro tipo de investigaciones donde el rendimiento se da por grupos de control y grupos experimentales.

Dentro de la ingeniería didáctica se distinguen dos niveles teniendo en cuenta la investigación que se quiere realizar, el primero es la macro ingeniería que es global, la cual es amplia y aborda las relaciones de enseñanza y aprendizaje dictadas institucionalmente, por ejemplo, políticas educativas, reformas curriculares y modelos educativos, aunque este nivel tiene mayores dificultades metodológicas e institucionales, son indispensables. El segundo nivel es la micro ingeniería, que es local y más común de llevar a la práctica, puesto que, hace referencia a las acciones didácticas que se realizan en la clase, los ambientes de aprendizaje y el contexto escolar e inmediato del estudiante (Artigue et al., 1995).

En esta investigación se toma como metodología de investigación la micro ingeniería didáctica, ya que es una investigación local, donde se desarrolla una secuencia didáctica en el aula de clases incluyendo un ambiente de aprendizaje diferente.

A continuación se describen brevemente las etapas de esta metodología, resaltando algunos aspectos a tener en cuenta, para más adelante entrar en el desarrollo de cada una de las etapas.

3.3. Etapas de la ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica se desarrolla en cuatro etapas: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori.

El análisis preliminar es la etapa según Jiménez (2021), “de exploración y descubrimiento de las concepciones que tienen los estudiantes, de los obstáculos y dificultades en la enseñanza-aprendizaje”, sobre un tema en específico, siendo la base del análisis a priori. Este primer análisis considera tres dimensiones fundamentales (Artigue et al., 1995):

- Dimensión epistemológica: se centra en el concepto, es decir, consiste en realizar un análisis de la formación y raíces del concepto que está en juego.

- Dimensión cognitiva: se centra en las características cognitivas de los estudiantes a quienes se dirige la enseñanza del concepto.
- Dimensión didáctica: se analiza como es la enseñanza del concepto matemático en el contexto donde se realiza la investigación.

El análisis a priori es la etapa donde se eligen las variables macro y micro didácticas que se van a tener en cuenta según el problema a estudiar. Se convierte en un análisis de control de significado que “comprende una parte descriptiva y una predictiva, centradas en las características de las situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes” (Artigue et al., 1995), es por ello que en esta etapa se diseña la secuencia didáctica y se describen de manera detallada las actividades que se van a realizar, los tiempos que se utilizan, el rol y la intervención del docente en el desarrollo de la secuencia.

La experimentación es la etapa de la implementación de la secuencia y las actividades que se han diseñado y “comprende la constante interacción entre los estudiantes y el docente” (Jiménez, 2021) esto debido a que el docente hace también el papel de investigador y observador. En esta etapa como expone De Faria (2006) se deben explicar los objetivos y las reglas de juego a los estudiantes que participan de la investigación, es decir, que se establece un contrato didáctico. Además, de aplicar los instrumentos de investigación se debe hacer un registro de observaciones durante el proceso que se desarrolle con los estudiantes.

El análisis a posteriori es la última etapa en la cual como afirma Artigue et al. (1995) se basa en los datos que se recolectan en la etapa de la experimentación, tanto las observaciones realizadas en el desarrollo de la secuencia como las producciones de los estudiantes. Con lo anterior se realiza la confrontación del análisis a priori y a posteriori para finalizar con la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Seguidamente, se presenta el desarrollo de cada etapa en la investigación, mostrando los resultados en cada una de ellas.

3.3.1. Análisis preliminar

En esta etapa de la investigación se presenta la dimensión epistemológica, donde se indaga sobre la historia y origen del concepto de ángulo; la dimensión cognitiva donde se analizan los conceptos previos de los estudiantes a partir de una prueba diagnóstica y en la dimensión didáctica se investiga cómo se está enseñando este concepto actualmente en algunos libros de texto que se utilizan en grado sexto.

3.3.2. Dimensión epistemológica

En esta dimensión se encuentra la historia del concepto a lo largo de los años. Cabe resaltar que el concepto de ángulo pasó por un proceso largo, puesto que no fue fácil de definir y comprender, sin embargo, se usaban en algunas civilizaciones antiguas.

Los neolíticos (6.000 a 3.000 a.C) usaron los ángulos de manera implícita para determinar los movimientos de las estrellas y planetas con lo cual realizaban predicciones de los cambios climáticos, definían los días en los cuales llevarían a cabo sus rituales, así como también para determinar el futuro. En el caso de esta civilización se tienen como evidencia piedras talladas donde ubicaban los calendarios que se obtenían de las observaciones del cielo y las ubicaciones de planetas y estrellas, es así como se evidencia el uso del concepto de ángulo, a pesar de que no existía una definición o un nombre para el mismo (Matos, 1990).

En el antiguo Egipto (3.300 a 332 a.C) se evidencian avances en cuanto a geometría en las unidades de medida, pues habían establecido el “codo ” como la unidad principal y el “palmo” y el “dedo” como subunidades con lo cual realizaban cálculos y resolvían problemas, además lograron determinar unidades para las superficies, (Illana, 2012). En cuanto al ángulo se usa y se resuelven problemas, pero no tienen un nombre que lo defina, en esta época también se creo un reloj de estrellas dividido en 360 días, nuevamente se evidencia el uso del ángulo para determinar la posición de las estrellas, pero no existe una definición (Matos, 1990).

En cuanto al imperio babilónico se destaca la elaboración del círculo zodiacal, que al igual que las otras civilizaciones se basan en la posición de las estrellas y el uso implícito de los ángulos.

En cuanto a la cultura griega (746 a 146 a.C) se tienen en cuenta dos épocas una antes de la obra los elementos de Euclides y otra después. En la primera se destaca que ya se tenía un nombre para los ángulos y se distinguía entre los ángulos agudos, rectos y obtusos. Aristóteles filósofo y matemático hizo uso de los ángulos en algunas demostraciones, en estas se puede evidenciar que él concibe los ángulos formados con líneas rectas (ángulo recto), pero también los formados con arcos de circunferencia (ángulo circular) y los definió como figuras, además considera que el ángulo recto tiene mayor importancia que el agudo, esto posiblemente porque el ángulo recto es el primero en definirse y el que se puede componer con ángulos agudos. Aristóteles menciona que se obtiene un ángulo recto cuando se deja caer un objeto, este rebota y forma dos ángulos similares a cada lado del objeto. La otra época se encuentra después de la obra Los elementos de Euclides que contiene 13 libros, en la cual se incluye la teoría referente a la geometría de dos y tres dimensiones. En los elementos de Euclides, se define un ángulo plano como la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta. Adicionalmente se encuentra la clasificación de los ángulos según su medida (Matos, 1990).

Para la edad media (476 a 1.492) se evidencia un estancamiento en cuanto a la geometría y en general de todas las ciencias, esto debido al cierre de las escuelas filosóficas paganas, en este tiempo se observa un desarrollo de la geometría proyectiva dado su uso en el diseño y las construcciones, también es posible notar que la geometría se basó en el uso de regla y compás y era transmitida en su mayoría de manera oral (de la Rosa y Arquitectónica, 2001). En esta época se destaca el filósofo y matemático Proclo quien realiza un comentario al trabajo de Euclides, él afirma que los ángulos se forman con dos líneas o dos superficies (las líneas no son necesariamente rectas ni las superficies planas), además realiza una clasificación: los que se forman con dos líneas rectas los denomina rectilíneos que a su vez pueden ser agudos, rectos y obtusos y los que se forman entre un círculo y su tangente como ángulo en un semicírculo y ángulo cornudo. También Proclo se pregunta sobre la naturaleza del ángulo y concluye que el ángulo es una combinación entre cantidad, relación y cualidad y manifiesta que no siempre en posible determinar la cantidad o cuantificar (Matos, 1990).

La edad moderna (1.492 a 1.789) se caracterizó por los múltiples intentos de los matemáticos por definir la naturaleza del concepto de ángulo, pues el concepto se usaba no sólo en matemáticas sino también en física. En el siglo XIX (1.801 a 1.900) cambian algunas concepciones respecto a los ángulos pues en esta época se comienzan a estudiar las geometrías no euclidianas y tiene mayor fuerza la trigonometría y funciones trigonométricas, lo cual se relaciona estrechamente con los ángulos. Finalmente, para el siglo XX (1.901 a 2.000) el matemático David Hilbert en su obra Fundamentos de la Geometría incluye la siguiente definición de ángulo: sean a cualquier plano arbitrario y h, k cualesquiera dos medios rayos distintos que se encuentran en a y emanan del punto O para formar parte de dos líneas rectas diferentes, llamamos al sistema formado por estos dos medios rayos h, k un ángulo, la cual fue usada para la enseñanza en diversas escuelas (Matos, 1990).

La evolución de la tecnología y los programas de geometría dinámica permiten la manipulación de los diferentes objetos matemáticos, entre ellos los ángulos, con lo cual los estudiantes pueden comprobar las propiedades mediante la prueba de arrastre (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017).

Es así como el concepto de ángulo no se puede asignar a una única persona sino que se reconoce como el resultado de un proceso que se ha desarrollado en diferentes momentos de la historia, que comienza con un uso aplicativo y que poco a poco se fue transformado en teórico y que permitió el avance de las matemáticas y otras ciencias.

3.3.3. Dimensión cognitiva

En esta dimensión se analizan los conocimientos previos de un grupo de 43 estudiantes de grado sexto de un colegio público de San Juan de Pasto, para ello se diseñó y aplicó una prueba diagnóstica, que se usa como base para el diseño y elaboración de la secuencia didáctica que aportará al refuerzo del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, con el uso del AGD GeoGebra y la resolución de problemas.

La prueba se elaboró en un formato de Google forms (Anexo D), en la que se contempla un tiempo de 2 horas clase (una hora clase consta de 45 minutos) para su desarrollo y en ella se organizaron dos secciones: la primera incluye preguntas referentes al contacto que han tenido los estudiantes con la geometría particularizando en ángulos y el uso de software dinámicos que aportan al aprendizaje de este tema; y la segunda tiene como objetivo evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes, para ello se incluyeron 4 preguntas de selección múltiple con única respuesta de la parte teórica sobre el concepto de ángulo, clasificación y propiedades de estos en polígonos, las cuales fueron planteadas en esta investigación; 4 problemas de selección múltiple con única respuesta y 2 problemas donde deben escribir una respuesta numérica, aplicando el concepto y las propiedades de ángulos en la resolución de problemas, los cuales se han tomado de diferentes olimpiadas matemáticas y en cada uno se menciona la olimpiada correspondiente. Es importante resaltar que de estos problemas dos no tienen gráfica, esto con el fin de evidenciar si el estudiante es capaz de comprender un enunciado y realizar una representación gráfica para comprender el problema y sirva de guía en la solución.

La prueba diagnóstica fue presentada a dos expertos para la correspondiente validación, el doctor Jorge Aristizabal docente de la Universidad del Quindío (Anexo E) y la Magíster Corina Dorado docente del Liceo de la Universidad de Nariño (Anexo F). El instrumento diseñado tiene la finalidad de identificar si la prueba a aplicar cumple con criterios de claridad y precisión, coherencia, orden, organización, extensión, estructura de los problemas, gráficas e inocuidad las cuales fueron evaluados en una escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto, adicionalmente se dio la opción de un espacio para observaciones adicionales. El proceso de validación fue de importancia, ya que gracias a los aportes de los docentes evaluadores se reestructuraron algunas preguntas, puesto que parecían ambiguas y podían ser muy complejas para algunos estudiantes.

Las preguntas presentadas tienen como fin ser las directrices del diseño de la secuencia, en primer lugar se pretende tener una referencia de los estudiantes en cuanto a su idea de la geometría, los elementos que han usado para trabajarla y así evidenciar cómo apoyar el proceso. Por otro lado, se espera que los estudiantes al finalizar la secuencia sean capaces de resolver problemas geométricos básicos, por ello es necesario que haya un dominio de los conceptos, teniendo en cuenta esto se hizo una selección de temas que son comunes en problemas de olimpiadas matemáticas. Finalmente, se propusieron problemas para verificar si en verdad era necesario realizar un refuerzo.

Para la presentación de la prueba diagnóstica se establecieron las siguientes reglas con los estudiantes:

- El tiempo de la prueba es de 2 horas clase.
- Se puede utilizar una hoja adicional para realizar procesos necesarios.
- Se permite el uso de regla, compás, lápiz, entre otros, elementos escolares que les ayuden

a elaborar las gráficas necesarias para comprender los problemas que no la tienen.

- Las preguntas de la primera sección son obligatorias.
- Las preguntas de la segunda sección no son obligatorias, ya que se da la opción de dejar sin contestar aquellas donde no recuerden o no conozcan los conceptos que se usan para solucionar el problema.

A continuación se presenta la Tabla 3.1 donde se señala la cantidad de respuestas correctas e incorrectas por pregunta de la segunda sección, ya que es la que permite el análisis de los conocimientos previos de los estudiantes, que se obtiene de la sabana de datos (Anexo G).

	Pregunta	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Respuestas en blanco	
Preguntas teóricas de selección múltiple	1	25	58,1%	16	37,2%	2	4,7%
	2	18	41,9%	23	53,5%	2	4,7%
	3	14	32,6%	28	65,1%	1	2,3%
	4	17	39,5%	24	55,8%	2	4,7%
Resolución de Problemas con preguntas de selección múltiple	5	15	34,9%	26	60,5%	2	4,7%
	6	36	83,7%	6	14,0%	1	2,3%
	7	10	23,3%	23	53,5%	10	23,3%
	8	7	16,3%	28	65,1%	8	18,6%
Resolución de problemas con preguntas abiertas	9	0	0,0%	7	16,3%	36	83,7%
	10	2	4,7%	15	34,9%	26	60,5%

Tabla 3.1: Resultados prueba diagnóstica.

De esta tabla se puede observa que en la mayoría de las preguntas teóricas la cantidad de respuestas correctas es inferior a la mitad del total de respuestas, lo cual puede suceder porque los estudiantes a veces no recuerdan lo visto en grados anteriores o puede suceder que sean conceptos que no han estudiado aún. También se evidencia que en los problemas con preguntas de selección múltiple la mayoría de estudiantes no logran llegar a la respuesta correcta y además se observa que la cantidad de preguntas que se dejan en blanco comienza a aumentar, se considera que esto sucede porque aumenta la dificultad en estos problemas y se necesita una mayor comprensión del concepto y las propiedades de ángulos y su aplicación en la resolución de problemas. Por otro lado, en las preguntas donde se debe escribir una respuesta se nota una menor cantidad de aciertos, el cual es casi nulo, además la cantidad de respuestas sin contestar aumenta de manera significativa, lleva a pensar que a los estudiantes les da temor arriesgarse y proponer una idea de solución ante problemas nuevos, incluso se puede concluir que tal vez los estudiantes en las preguntas de selección múltiple señalaron una de las opciones sin tener una justificación para ello o pueden realizar procesos incorrectos que de una forma u otra forma los lleva a la respuesta correcta.

En el registro de observaciones realizado en la aplicación de la prueba diagnóstica fue posible notar que la mayoría de estudiantes no hizo procesos en hojas auxiliares para comprender y solucionar los problemas. En el caso del estudiante que intentó realizar procesos como se muestra en la Imagen 3.1, se evidencia la elaboración de gráficas sencillas, es decir, a mano alzada sin el uso de regla u otros instrumentos que brinden precisión y cabe señalar que solo fue de algunos problemas. También se observo en los estudiantes una actitud de incertidumbre puesto que algunos mencionaban que miraron el tema pero no recordaban los conceptos y otros no sabían si en algún momentos se había estudiando esta temática, por ello algunos estudiantes preguntaban frecuentemente a la docente, pero no se dieron respuestas para no afectar los resultados de la investigación. En cuanto al tiempo de la prueba, la mayoría de los estudiantes enviaron sus respuestas antes de lo estipulado, debido a la falta de conocimientos para desarrollar los problemas.

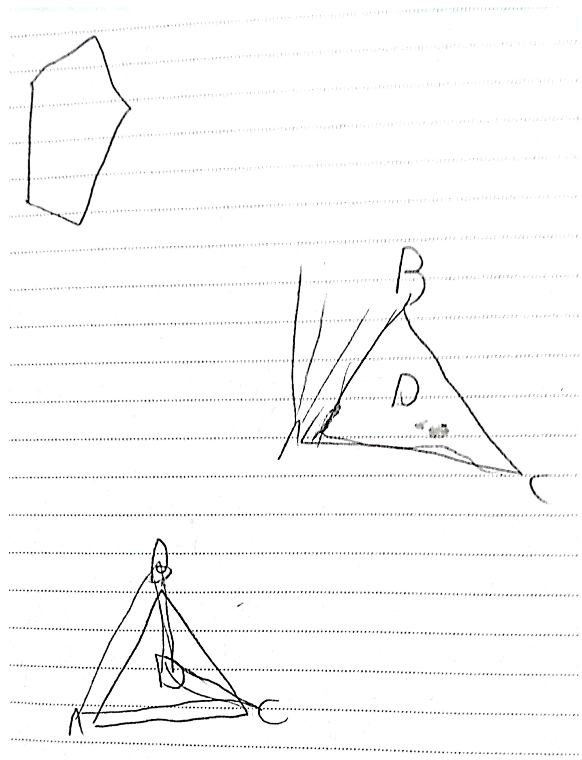


Imagen 3.1: Hoja de procesos de un estudiante de la prueba diagnóstica.

Ahora se realiza un análisis más a detalle por pregunta, de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica y se presentan figuras que ilustran las cantidades obtenidas en cada pregunta.

Enunciado 1. El espacio comprendido entre dos semirrectas que tienen como origen un mismo punto, se conoce como:

a. Polígono

b. Triángulo

c. Ángulo

d. Semirrecta

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: identifica la definición de ángulo.

Respuesta correcta: c. Ángulo.

Análisis: se puede notar que la mayoría de estudiantes conocen la definición de ángulo, sin embargo el 37,2 % aún lo confunden con otro tipo de conceptos geométricos como el polígono,

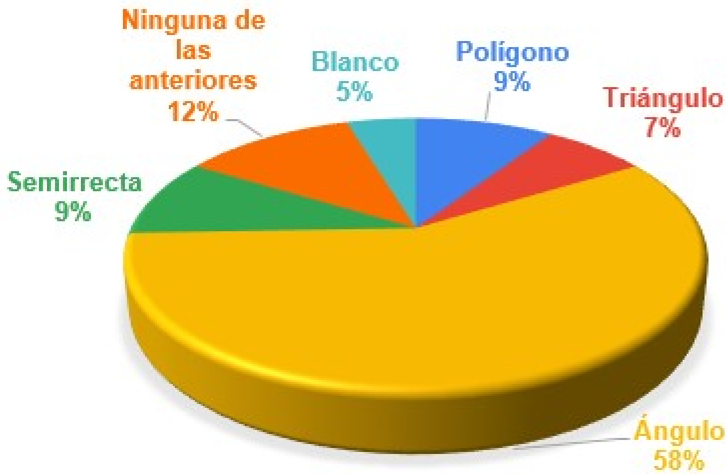


Figura 3.1: Resultados pregunta 1 prueba diagnóstica.

el triángulo y la semirrecta, además como se observa en la Figura 3.1 un 5 % de los estudiantes dejaron la respuesta en blanco.

Enunciado 2. En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre $90°$ y $180°$ se conocen como:

a. Ángulos Obtusos

b. Ángulos Rectos

c. Ángulos Agudos

d. Ángulos Llanos

e. Ninguna de las anteriores

Figura 3.2: Resultados pregunta 2 prueba diagnóstica.

Propósito: identifica la clasificación de ángulos.

Respuesta correcta: a. Ángulos Obtusos.

Análisis: en esta pregunta se puede observar que la mayoría de estudiantes aún no tiene claridad sobre la clasificación de los ángulos según su medida, es posible que esto suceda porque confunden los nombres, pues generalmente se aprenden estas características de los ángulos para presentar una prueba o evaluación, pero después no logran recordarlas con facilidad. Como se puede observar en la Figura 3.2 los sectores circulares son variados y algunos coinciden en los porcentajes, por lo cual se puede inferir que hay confusiones en los conceptos que tienen los estudiantes.

Enunciado 3. Si la suma de la medida de dos ángulos es $90°$, estos se clasifican como:

a. Ángulos complementarios

b. Ángulos suplementarios

c. Ángulos rectos

d. Ángulo completo

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: identifica la clasificación de ángulos según la suma de sus medidas.

Respuesta correcta: a. Ángulos complementarios.

Figura 3.3: Resultados pregunta 3 prueba diagnóstica.

Análisis: en este caso se observa que solo 32,6 % de los estudiantes tienen claridad sobre la clasificación de los ángulos según la suma de sus medidas, y el 65,1 % no reconocen esta clasificación. Como se observa en la Figura 3.3, el porcentaje del ítem c ángulos rectos y el ítem a ángulos complementarios, que es la respuesta correcta, es casi el mismo, esto se puede presentar debido a la falta de comprensión del enunciado, ya que al ver la medida de $90°$ se pudieron apresurar concluyendo que era un ángulo recto, por ellos en trabajos futuros, se puede realizar una actividad previa antes de aplicarla secuencia, en la que se pregunte el motivo de las respuestas obtenidas para determinar si es esto sucede por falta de comprensión o por la relación predeterminada del al ángulo recto con el ángulo de $90°$.

Enunciado 4. La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es:

a. Depende del triángulo

b. $360°$

c. $360°$/3

d. $180°$

e. Ninguna de las anteriores

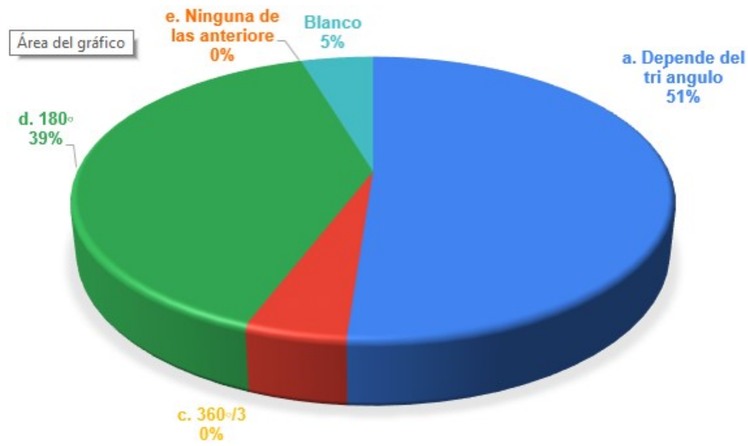


Figura 3.4: Resultados pregunta 4 prueba diagnóstica.

Propósito: identifica la suma de los ángulos internos en un polígono.

Respuesta correcta: c.$180°$.

Análisis: en esta pregunta se evidencia una situación particular y es que de los 24 estudiantes que respondieron de manera incorrecta, 22 consideran que la suma de los ángulos internos del triángulo depende de este, es decir, que no es un valor fijo. Las causas de esta respuesta pueden ser muy variadas, entre ellas que no se ha abordado el tema de ángulos en polígonos, que los estudiantes no hayan realizado ejercicios que les permitan concluir este hecho o que imaginen casos particulares en los que visualmente consideren que las medidas de los ángulos aumenten o disminuyan, la Figura 3.4 permite evidenciar con claridad una de las dificultades que presentan los estudiantes, la cual se relaciona con la falta de realizar actividades que favorezcan el hecho de que el estudiante vea lo que sucede aún cuando las figuras cambian.

Los siguientes puntos hacen parte de la sección de resolución de problemas con preguntas de selección múltiple, en los cuales se debe aplicar uno o más conceptos de ángulos para llegar a la solución debido a que la complejidad aumenta.

Enunciado 5. En la Figura 3.5 la medida del ángulo BAC es:

a. $20°$

b. $45°$

c. $60°$

d. $70°$

e. Ninguna de las anteriores

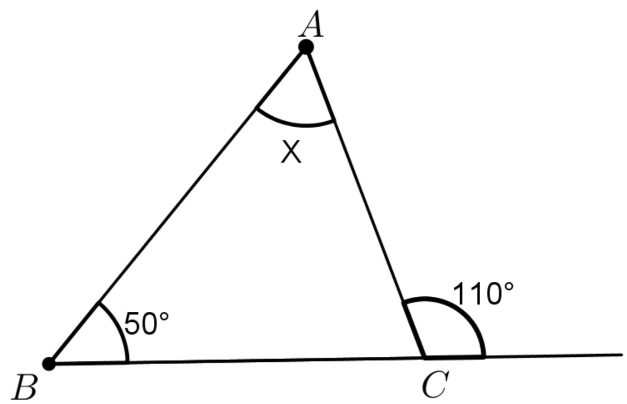


Figura 3.5: Gráfica del problema 5 prueba diagnóstica.

Fuente: tomado de Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba clasificatoria, año 2010.

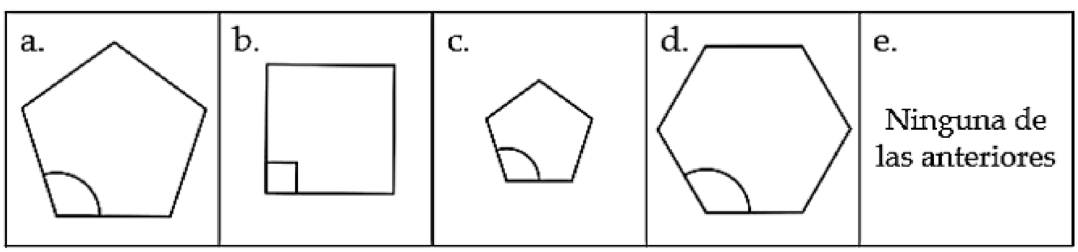
Propósito: identifica la clasificación de ángulos y suma de los ángulos internos de un triángulo.

Respuesta correcta: c. $60°$.

Figura 3.6: Resultados pregunta 5 prueba diagnóstica.

Análisis: en este problema era necesario que los estudiantes conozcan la clasificación de ángulos para encontrar la medida del ángulo interno del triangulo en C y con ello encontrar la medida del ángulo x sabiendo que los tres ángulos internos deben sumar $180°$. En esta pregunta solo el 34,9 % resuelve el problema correctamente mostrando que algunos logran aplicar sus conocimientos en la resolución de problemas, sin embargo, el 60,5 % de los estudiantes respondieron de manera incorrecta, se puede suponer que esta dificultad se presenta porque los estudiantes no siempre tienen claridad sobre el valor de la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo, lo que puede llevarlos a asumir que depende del triángulo, de esta forma no les es posible resolver el problema. También se puede observar que 10 de los 26 estudiantes que responden de manera incorrecta marcaron el ítem d. $70°$, lo que corresponde a la primera parte de la solución, lo anterior se ve reflejado en la Figura 3.6.

Enunciado 6. ¿Cuál de los ángulos marcados en los siguientes polígonos regulares tiene mayor medida?



Fuente: tomado de Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico, nivel intermedio, segunda fase, año 220-2021.

Propósito: identifica la medida de los ángulos internos de un polígono regular.

Respuesta correcta: d. la figura que corresponde al hexágono.

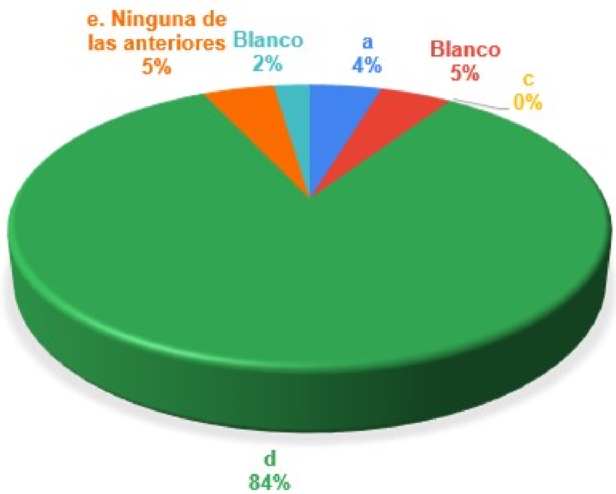


Figura 3.7: Resultados pregunta 6 prueba diagnóstica.

Análisis: en esta pregunta los estudiantes deben comprender que la medida de un ángulo interno en un polígono aumenta o disminuye según la cantidad de lados que tenga, se puede observar que la mayoría de los estudiantes si comprenden esta relación, pues el 83,7 % contestaron correctamente, que los ángulos internos del hexágono son los que tiene mayor medida, de esta manera como se observa en la Figura 3.7 se tiene un mayor sector circular para la respuesta correcta y un sector más pequeño para las otras respuestas incluyendo los estudiantes que no respondieron.

Enunciado 7. $ABCD$ es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PBQ?

a. $150°$

b. $15°$

c. $60°$

d. $30°$

e. Ninguna de las anteriores

Fuente: tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba final, año 2009.

Propósito: identifica la medida de los ángulos internos de un polígono regular, la clasificación de ángulos según su medida y las propiedades de un triángulo isósceles.

Respuesta correcta: b. $15°$.

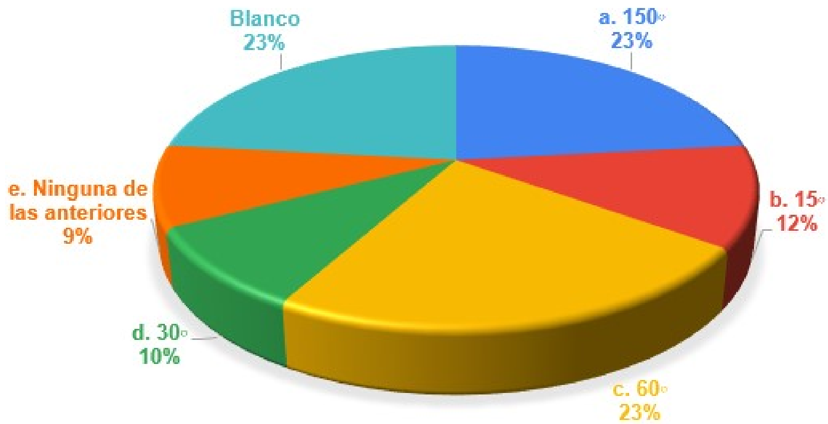


Figura 3.8: Resultados pregunta 7 prueba diagnóstica.

Análisis: en este caso el problema no tiene una gráfica, entonces se espera que el estudiante realice una que le permita comprender y analizar el problema para obtener una posible solución, una alternativa es tener en cuenta que los ángulos internos en los polígonos regulares tiene la misma medida, contar con una estrategia para encontrar la medida de dichos ángulos y además conocer que un ángulo de giro mide $360°$. Como se evidenció en el registro de observaciones la mayoría de los estudiantes no intentaron al menos realizar un dibujo o gráfica de las condiciones del problema, por lo cual se considera que el 53,5 % de los estudiantes responden de manera incorrecta, cabe señalar que entre la cantidad de estudiantes que responden mal 10 de ellos seleccionan el ítem c. $60°$ lo que lleva a pensar que asumen esta respuesta como correcta porque se mencionan triángulos equiláteros en el enunciado, y no se percatan que en realidad el triángulo que se forma es isósceles. Adicionalmente, se resalta que desde esta pregunta se evidencia una mayor cantidad de respuestas en blanco, esto se puede dar por la inseguridad de los estudiantes para resolver los problemas y la falta de estos conocimientos previos para aplicar, incluso pueden conocer estos conceptos pero no saben como utilizarlos. Se resalta de la Figura 3.8 que las respuestas son muy variadas, cada sector tiene un espacio relevante, por lo que se puede concluir que este tipo de situaciones causan gran dificultad en los estudiantes.

Enunciado 8. Sea D un punto interior del triángulo ABC, tal que el ángulo BDC es igual a $123°$, el ángulo ABD es igual a $15°$ y el ángulo ACD es igual a $21°$. La medida del ángulo BAC

es:

a. $47°$

b. $67°$

c. $87°$

d. $107°$

e. Ninguna de las anteriores

Fuente: tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba clasificatoria, año 2009.

Propósito: identifica la medida de los ángulos internos de un polígono y la clasificación de ángulos según su medida.

Respuesta correcta: c. $87°$.

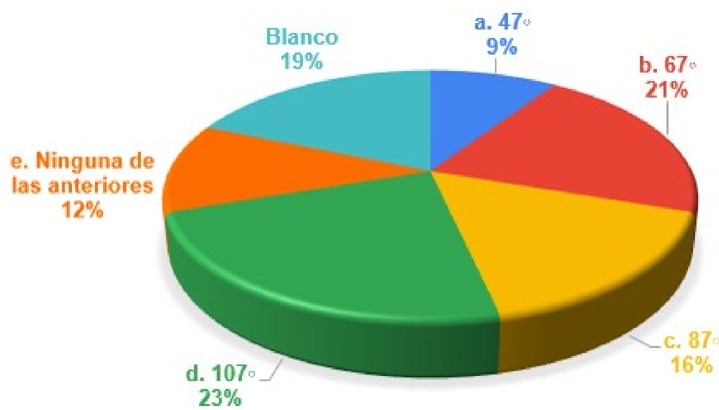


Figura 3.9: Resultados pregunta 8 prueba diagnóstica.

Análisis: al igual que en el problema anterior no se proporciona una gráfica, con el fin de que los estudiantes representen en un dibujo o gráfico las condiciones del problema, así pueden notar que una alternativa de solución es usar el ángulo de giro en el punto D y que la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es de $360°$. Se puede observar que solo el 16,3 % de los estudiantes logran llegar a la respuesta correcta y el 65,1 % tienen respuestas incorrectas, lo cual muestra la dificultad que tienen para comprender las condiciones del enunciado y lograr realizar una representación de ellas que les permita idear un plan para solucionar el problema; en algunos casos también se evidencia que desean realizar una gráfica con los valores dados en el problema, lo cual es bastante complejo, en sí lo que se busca es que ellos logren esbozar el gráfico que los guíe y con ayuda de propiedades lleguen a la solución. Es importante mencionar que en este problema, 8 estudiantes dejaron en blanco su respuesta. Nuevamente en este tipo de preguntas se observa en la Figura 3.9 la variedad en respuestas suministradas por los estudiantes, pues la dificultad a aumentado. Algunos estudiantes obtienen algunas conclusiones erradas y por ello la variedad en sus respuestas.

Los dos problemas que siguen tienen preguntas abiertas para que el estudiante escriba su respuesta. En los cuales se van aplicar el concepto y las propiedades de ángulos para llegar a una solución correcta.

Enunciado 9. $ABCDE$ es un pentágono regular, CDF es un triángulo equilátero y $CFGH$ es un cuadrado (ver Figura 3.10). La medida en grados del ángulo BCH es:

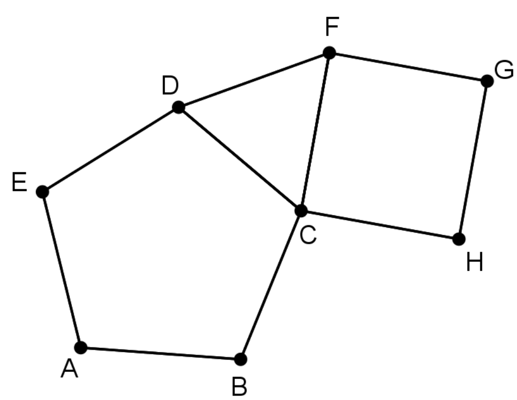


Figura 3.10: Gráfica del problema 9 prueba diagnóstica.

Fuente: tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño, nivel I, primera fase, año 2016.

Propósito: identifica la clasificación de ángulos y ángulos en polígonos regulares.

Respuesta correcta: $102°$.

Análisis: este es el primer problema con pregunta abierta en el cual se busca que los estudiantes tengan en cuenta el ángulo de giro y la medida de los ángulos internos en un polígono regular. Llama mucho la atención observar que ningún estudiantes logro resolver el problema incluso el 83,7 % de ellos no contestaron la pregunta, y solamente 7 de ellos intentaron escribir una posible respuesta, lo cual puede ser porque perciben que la dificultad aumenta, ya que no tienen opciones de respuesta para comparar o tal vez señalar la que creen es correcta, y les da temor o no tienen la confianza para intentar realizar un proceso y escribir una respuesta, también se debe considerar que desde la parte teórica de la prueba se han visto dificultades en la comprensión de los conceptos y su aplicación en la resolución de problemas.

Enunciado 10. En la Figura 3.11, los segmentos SR y PQ se intersecan en T. ¿Cuál es la medida del ángulo S?

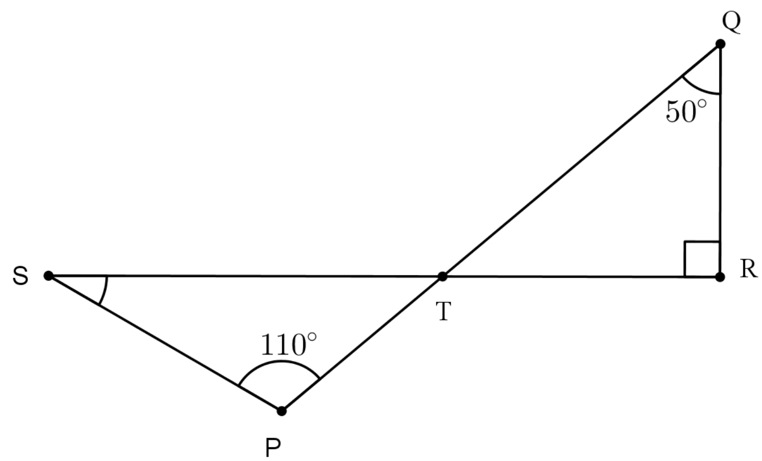


Figura 3.11: Gráfica del problema 10 prueba diagnóstica.

Fuente: tomado de la Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, taller año 2015.

Propósito: identifica la clasificación de ángulos y la suma de la medida de los ángulos internos en un triángulo.

Respuesta correcta: $30°$.

Análisis: en este problema el estudiante tiene que considerar que la suma de los ángulos internos del triángulo es $180°$, que la medida de ángulos opuestos por el vértice es igual y que un ángulo recto mide $90°$. Al igual que en el problema anterior se debe escribir la respuesta y se observa que la mayoría decidió no contestar, si embargo, cabe mencionar que aumenta la cantidad de estudiantes que se arriesgan a escribir una respuesta y hay variedad en ellas, incluso 2 estudiantes sí logran resolver el problema. Particularmente en estas preguntas llamó la atención que algunos estudiantes en la respuesta escribieron “no se” y “no me acuerdo”, lo que nos lleva a inferir que algunas de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los estudiantes es por falta de repaso y estudio constante, pues muchos aprenden solo por el momento o por pasar la nota y luego lo olvidan.

En los resultados de la prueba diagnóstica se observa el incremento de las respuestas incorrectas y las respuestas en blanco, sobre todo en la sección de resolución de problemas, evidenciando con ello dificultades en la comprensión del concepto y las propiedades de ángulos y su aplicación en la resolución de problemas. Esta situación se puede presentar, como se ha mencionado, debido a varias razones dependiendo del proceso que los estudiantes han enfrentado a lo largo de su formación académica, incluso se debe considerar que en ese trayecto se presento para ellos la pandemia que de un modo u otro pudo afectar el aprendizaje de esta temática por diferentes condiciones. Es así como esta investigación pretende fortalecer los conceptos geométricos referentes a ángulos de los estudiantes de grado sexto, para ello se diseña una secuencia teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas y con el uso del programa GeoGebra donde se incluye: la definición y clasificación de ángulos, definición y clasificación en polígonos, la aplicación de estos conceptos en la resolución de problemas, así como algunas actividades que permiten identificar si los estudiantes van comprendiendo los conceptos vistos dónde se puede aplicar lo visto a lo largo de la secuencia.

3.3.4. Dimensión didáctica

En esta dimensión se hace el análisis didáctico de algunos libros de texto que se usan en el colegio en grado sexto para evidenciar el proceso de enseñanza de este tema, como se presenta el concepto de ángulo, sus propiedades y la aplicación en la resolución de problemas. Entre los libros de grados sexto que se usan en el colegio se tiene los siguientes:

- Los Caminos del Saber, Matemáticas 6 (Ramírez et al., 2013).
- Hipertextos, Matemáticas 6 (Joya, Grande, Rojas, y Chizer, 2010).

Para el análisis didáctico de estos libros se observa cómo se presenta y aborda el objeto matemático, los ejemplos que se presentan y cómo los resuelven, los que se proponen y su relación con la resolución de problemas, así como las actividades que se proponen en el software dinámicos.

El primer libro, Los Caminos de Saber, Matemáticas 6 de Santillana (Ramírez et al., 2013), inicia abordando el tema de ángulos, en la página 204, con una imagen de una estrella de mar donde se señala un ejemplo de un ángulo y se presenta la definición de ángulo con las formas de simbolizarlo o nombrarlo, luego en el desarrollo de la temática se enseña cómo medir un ángulo, la clasificación de estos según su medida, la suma de sus medidas y su posición, finalmente se enseña como construir un ángulo.

En el desarrollo de estos subtemas se presenta primero un ejemplo y luego se proponen algunos ejercicios y problemas contextualizados, en los cuales se busca el desarrollo de las competencias como interpretar, argumentar y proponer, también para ejercitar, razonar, modelar y solucionar problemas. Adicionalmente, luego de presentar desarrollar todas las temáticas de la unidad de geometría se proponen al estudiante ejercicios y problemas de repaso, cabe resaltar que para iniciar los problemas se presenta uno contextualizado y resuelto siguiendo los pasos que propone Pólya para resolver un problema.

El libro de texto al finalizar la unidad brinda al estudiante dos apartados, uno que dice "y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?" (Ramírez et al., 2013) lo que le permite al estudiante darle sentido y significado a su aprendizaje y notar que no es algo aislado de su contexto, que además son conceptos que puede usar en su vida diaria, por ejemplo se mencionan los ángulos en que debe estar nuestro cuerpo cuando nos sentamos frente al computador, para obtener una postura correcta evitando dificultades en la salud. El otro apartado propone al estudiante un trabajo con GeoGebra donde el objetivo es determinar el área, el perímetro y las dimensiones de una figura plana, en el desarrollo de los pasos se hace uso de la herramienta ángulo lo que lleva al estudiante a explorar estas herramientas y usarlas en nuevas construcciones.

El segundo libro de texto, Hipertexto, Matemáticas 6, de Santillana (Joya et al., 2010), inicia la temática de ángulos en la página 194, directamente con la definición y las formas en las que se puede simbolizar, luego se presenta loa apartados, medición, clasificación y construcción de ángulos, en cada uno de ellos se presentan ejemplos y actividades que permiten reforzar la habilidades como la interpretación, recuperación de información y fomenta el proceso de ejercitación, razonamiento y resolución de un problema.

Al finalizar la sección de ángulos, se encuentra un "laboratorio con Cabri" que tiene como objetivo conocer y utilizar el software Cabri Geometri, construir rectas y medir ángulos, esto con una actividad guiada en seis pasos sobre como construir una recta paralela y una perpendicular a otra dada, que pase por un punto A.

Al terminar la unidad de geometría se propone un taller de repaso para evaluar lo aprendido en la unidad; una sección de síntesis donde se resumen los conceptos más relevantes y otra sección titulada "y esto que aprendí ¿para qué me sirve?" (Joya et al., 2010), donde se propone una situación relacionada con la geometría de los aviones puntualizando en el ángulo que debe formar el ala del avión con la dirección del viento.

3.3.5. Análisis de restricciones

Para el diseño de la secuencia de enseñanza se tiene en cuenta la información recolectada de los 43 estudiantes seleccionados en esta investigación de la prueba diagnóstica.

El grupo de estudiantes se compone por 18 mujeres, 22 hombres y 3 personas de otro género; sus edades oscilan entre 11 y 12 años. Además como el colegio en grado sexto realiza un proceso de admisiones, se tiene que 13 de los estudiantes cursaron grado quinto en el colegio y los otros 30 cursaron este grado en otros colegios, lo que representa una muestra variada para los fines y resultados de la investigación.

Por otro lado, se tiene que el gusto hacia la geometría es bajo, ya que solo 13 estudiantes afirman que les gusta mucho la geometría, 26 de ellos dicen que su gusto es poco y a 4 estudiantes no les gusta nada la geometría, lo cual es un factor que podría incidir en la investigación dado que se pueden presentar actitudes de desinterés de los estudiantes frente a las actividades propuestas.

También se observa que entre las herramientas más usadas para el estudio de la geometría, se encuentran: regla, transportador, hojas de papel, lápiz y compás, lo cual es un aspecto positivo, ya que estas herramientas hacen parte del proceso de aprendizaje de la geometría y aportan a la comprensión de las características y propiedades de los diferentes objetos geométricos, sin embargo, dado el avance de la tecnología y los procesos de adaptación que se dieron en la pandemia hacia una educación virtual, se considera que se pueden implementar herramientas tecnológicas o programas dinámicos, que también tienen un potencial para el aprendizaje de la geometría, por esto se indagó de manera puntual si los estudiantes han usado aplicaciones o programas de geometría y se encontró que 41 estudiantes no han usado este tipo de herramientas, es así como para la realización de la investigación este es un factor considerable, puesto que los estudiantes tienen un mínimo conocimiento en el uso y funcionamiento de programas de geometría y en particular de GeoGebra.

Se tiene en cuenta un último aspecto que tiene que ver con la participación en olimpiadas matemáticas, esto porque en la prueba diagnóstica se incluyeron problemas tomados de estos concursos pues se considera que estos salen de la rutina de ejercicios y potencian habilidades como el análisis, comprensión y ejecución de procesos. Ante esta pregunta, 12 estudiantes comentan que sí han participado en olimpiadas matemáticas y 31 que no han tenido la oportunidad de hacerlo, siendo este otro factor que va a influir en la investigación puesto que se desea enseñar geometría desde la resolución de problemas.

3.3.6. Análisis a priori

En esta etapa se describen las hipótesis de investigación, las variables macro y micro didácticas que se tendrán en cuenta en la siguiente etapa de experimentación, además se presenta la estructura de la secuencia didáctica creada.

Hipótesis

En esta investigación se plantean las siguientes hipótesis acorde al problema de investigación:

Hipótesis 1: el proceso de enseñanza del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos se puede potenciar mediante la resolución de problemas y el uso del AGD GeoGebra.

Hipótesis 2: una secuencia de enseñanza didáctica sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, diseñada a partir de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, favorece los procesos de comprensión y construcción de conocimientos.

Variables didácticas

En esta investigación se tiene en cuenta las siguientes variables macro didácticas para la aplicación de la secuencia de enseñanza en la fase experimental:

- Los estudiantes trabajarán acorde a las etapas de la teoría de las situaciones didácticas, donde se tendrán espacios de trabajo individual y grupal, así como la intervención del docente en el proceso de institucionalización del saber.

- El tiempo en el desarrollo de las actividades de la secuencia será acorde a la complejidad de las mismas y el docente encargado de la actividad es quien lleva control de este.
- Para el desarrollo de la secuencia se va a trabajar en la sala de informática con el ambiente de geometría dinámica GeoGebra en su versión Online, por ello se hará uso de los computadores y el internet.
- En algunas actividades luego de la experimentación en GeoGebra se entrega material para trabajar las situaciones a-didácticas.

En cuanto a las variables micro didácticas en esta investigación se consideraron las siguientes:

- Determinar ángulos: habilidad para encontrar medidas de ángulos teniendo en cuenta características tanto de los ángulos como de los polígonos.
- Identificación de diferentes tipos de ángulos: capacidad para identificar y distinguir entre diferentes tipos de ángulos y sus características.
- Aplicación en problemas de olimpiadas y contextualizados: capacidad de los estudiantes para aplicar el concepto y las propiedades de los ángulos en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas y contextualizados.
- Justificación y argumentación: capacidad para justificar y argumentar sus respuestas y soluciones relacionadas con los ángulos, utilizando razonamientos lógicos basados en los conceptos aprendidos.
- Representación gráfica: habilidad para representar gráficamente los problemas teniendo en cuenta las condiciones dadas en el enunciado.
- Uso de GeoGebra: capacidad para manipular las herramientas del software, representando las condiciones dadas en un problema y conectando relaciones entre objetos geométricos.

Secuencia de enseñanza didáctica

La secuencia de enseñanza fue diseñada teniendo en cuenta criterios de jerarquía, es decir, se buscó abordar desde lo más básico para continuar con temas más complejos a medida que se avanzaba, además se tuvo en cuenta el desempeño y dificultades que tuvieron los estudiantes en la prueba diagnóstica, para ello se propusieron actividades que permitieran reforzar aquellas preguntas en las cuales los estudiantes presentaron mayor dificultad y en la aplicación se realizó un énfasis para que ellos pudieran tomar conciencia de aquello que les causaba dificultad y con ayuda de GeoGebra verificaron lo mencionado en la prueba.

Es importante resaltar que se realiza la validación de la secuencia, por medio de un formato diligenciado por la docente de matemáticas de grado sexto del colegio donde se implementa la investigación (Anexo H), puesto que conoce el nivel educativo de los estudiantes de grado sexto, lo cual permitió realizar algunos ajustes acordes a las diferencias en el nivel académico de los estudiantes y a la coherencia del contenido con el grado, además por sugerencia de la docente se realizó una refuerzo previo a la aplicación de la secuencia sobre los conceptos de punto, recta, semirrecta y segmento.

Por otro lado, la secuencia didáctica de enseñanza se creó en el entorno del software dinámico GeoGebra con la herramienta libro, en ella se incluyeron secciones que, dada la organización del entorno, se llamaron capítulos, en los cuales se incluyeron conceptos, actividades dinámicas con Applets de GeoGebra, foros y espacios de preguntas, acorde a las fases de la teoría de las situaciones didácticas, estos capítulos son: definición y clasificación de ángulos, definición y clasificación de polígonos y aplicación del concepto y las propiedades de ángulos en la resolución de problemas, como se muestra en la Figura 3.12.

En la primera sección sobre la definición y la clasificación de ángulos se encuentran las subsecciones: puerta oscilante, en la cual se propone al estudiante una actividad introductoria en una Applet de Geogebra para tener una idea o noción de lo que es un ángulo y los elementos que lo componen; en la definición de ángulo, se presenta el concepto de este con las partes que lo componen, indicado a través de imágenes ejemplos de ángulos en su contexto y se propone un foro del conocimiento para compartir con sus compañeros otros ejemplos que ellos puedan identificar en su vida cotidiana; y en clasificación de ángulos se estudia como los

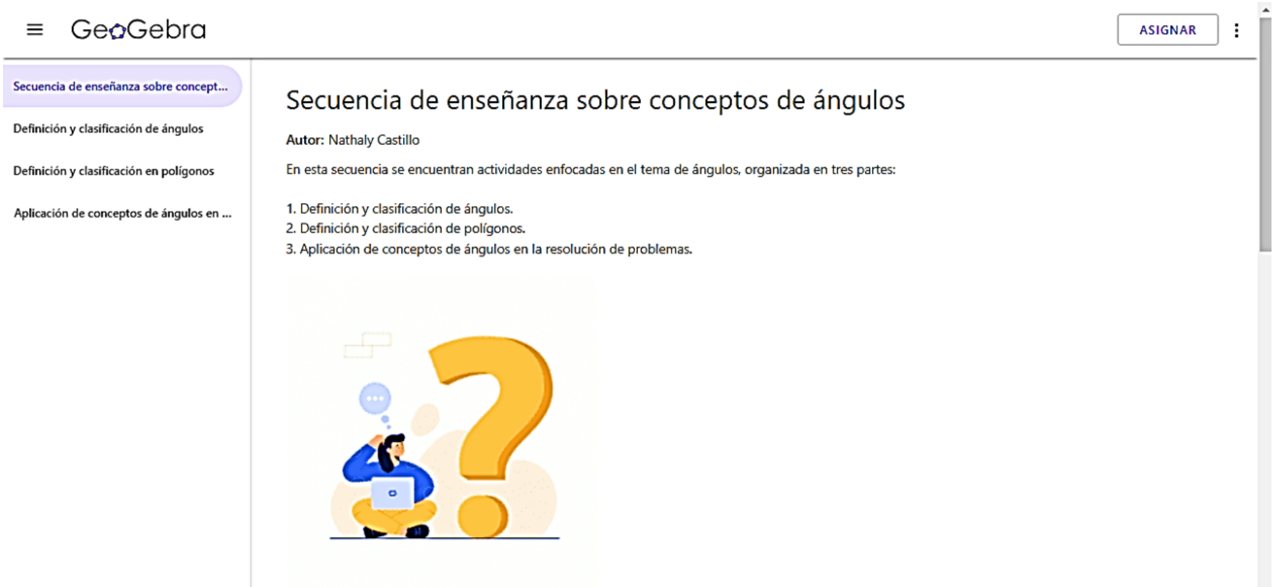


Figura 3.12: Secuencia de enseñanza en GeoGebra online.

ángulos se pueden clasificar según su medida, su posición y la suma de sus medidas, todo esto a través de actividades dinámicas en Applets de GeoGebra, foros del conocimiento y preguntas (ver Figura 3.13).

Figura 3.13: Subsecciones definición y clasificación de ángulos.

En la sección de definición y clasificación de polígonos se encuentra: ¿qué es un polígono?, donde, con una actividad introductoria y un foro del conocimiento, se busca que los estudiantes puedan recordar la noción de este con sus características, también se presenta un vídeo como ayuda visual sobre las partes del polígono, Applets para que los estudiantes puedan explorar estas características y una pregunta de selección múltiple para observar el avance que tienen en la comprensión de los conceptos; en clasificación de polígonos, se presenta como los polígonos se clasifican de acuerdo a su número de lados y a la medida de sus ángulos y lados.

Adicionalmente, también se incluye en esta subsección la relación entre los lados y los ángulos de un polígonos, es decir, la suma de la medida de los ángulos internos de polígono depende de la cantidad de lados que este tenga, incluso se puede saber a partir de esta relación la medida exacta en de un ángulo interno en aquellos polígonos que son regulares, de igual manera se proponen diferentes actividades acorde a la teoría de las situaciones didácticas; en la última subsección se decidió profundizar en el triángulo, debido a que este concepto es bastante usado, además se trabajan sus propiedades en la resolución de problemas, por ello se presenta su definición con las partes que lo componen, así como su clasificación según la medida de sus lados y ángulos.

La última subsección corresponde a la aplicación del concepto y las propiedades de ángulos en la resolución de problemas donde se presentan 8 problemas tomados de diferentes olimpiadas matemáticas y se han se han modificado dos de estos problemas, para adaptarlos a situaciones de contexto, con el fin de llevar a los estudiantes a procesos más elaborados de análisis y comprensión, esto siguiendo los pasos de Pólya para finalmente dejar a los estudiantes solos en el proceso de resolución generando una situación a-didáctica.

Inicialmente se presentan tres problemas solucionados siguiendo los pasos de Pólya, luego dos donde se dan unas preguntas orientadoras inicialmente y los últimos tres se proponen para que los estudiantes se enfrenten a estos problemas sin la intervención del docente, aplicando los conocimientos vistos en el transcurso de la secuencia, además los estudiantes pueden modelar en GeoGebra estos problemas para comprender las condiciones del problema, explorar un posible plan, realizar conjeturas y llegar a una solución correcta.

A continuación se presenta un ejemplo de cómo se implementaron las fases de la teoría de las situaciones didácticas en la secuencia con el entorno de GeoGebra.

En la subsección de clasificación de ángulos se plantea una situación de acción donde se le da al estudiante un Applet de Geogebra (ver Figura 3.14) con una animación sobre la clasificación de ángulos según su medida, en la cual se asignaron colores y deslizadores para que los estudiantes al moverlos observen entre qué medidas varía cada uno.

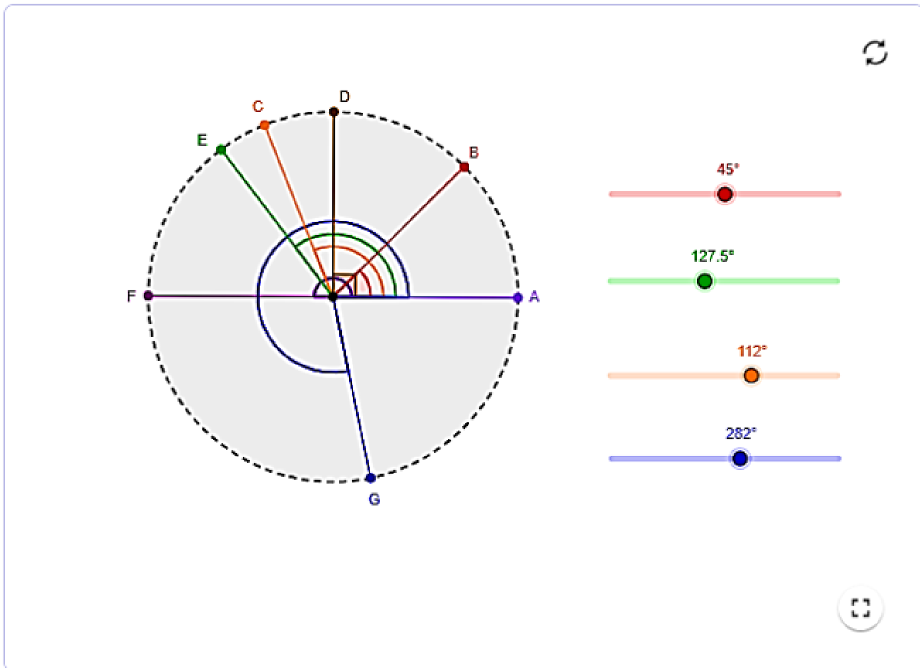


Figura 3.14: Construcción sobre clasificación de ángulos.

Con lo que ellos logren identificar se continúa con una situación de formulación individual donde deban responder unas preguntas para socializarlas, una vez hayan estructurado una respuesta, esta se escribe en el foro del conocimiento (ver Figura 3.15) y se socializa llegando a la situación de validación donde en grupos pequeños comparan sus respuestas y plantean una conclusión general de lo realizado en las etapas anteriores, para que posteriormente se comparta con toda la clase los resultados y así obtener un panorama de lo que se aprendió con la actividad.

Finalmente, el docente realiza la institucionalización de la clasificación de ángulos según su medida teniendo en cuenta los aportes de los estudiantes a lo largo de toda la actividad.

En esta subsección también se han incluido preguntas de selección múltiple (ver Figura 3.16) con el fin de verificar la comprensión de los conceptos que se van presentando, cabe señalar que en estas se puede incluir imágenes y las respuestas llegan al docente de manera resumida en un diagrama de barras.

Por otro lado, se presenta uno de los problemas solucionados siguiendo los pasos que

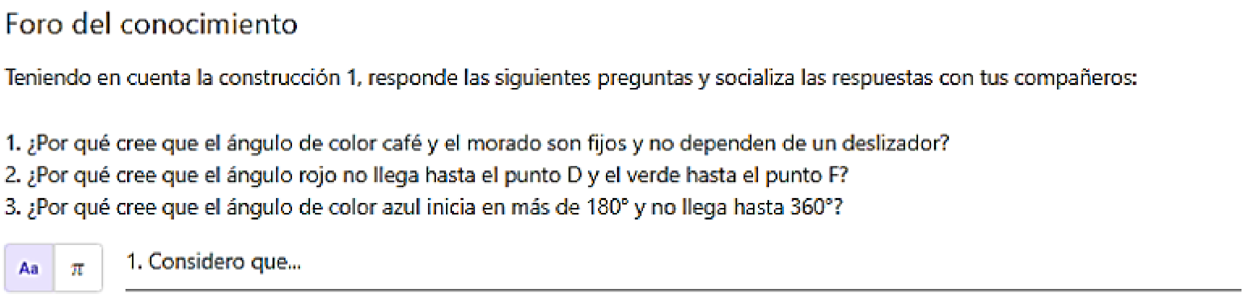


Figura 3.15: Foro del conocimiento sobre introducción a clasificación de ángulos.

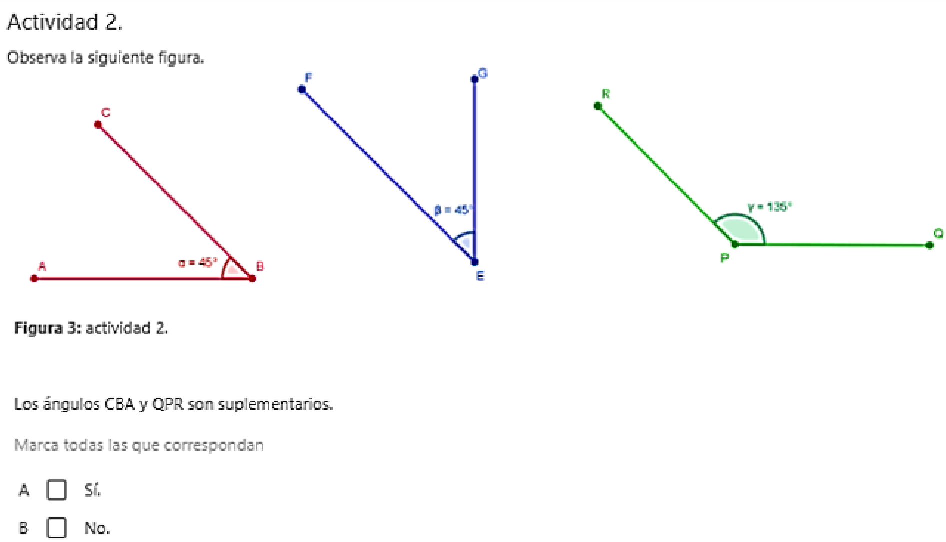


Figura 3.16: Ejemplo de una pregunta de selección múltiple.

propone Pólya y la teoría de las situaciones didácticas. El problema es tomado de la Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), nivel básico, prueba clasificatoria, año 2010, en el cual se busca que los estudiantes recuerden la clasificación de ángulos según su medida y la suma de la medida de los ángulos internos en un triángulo.

Enunciado: en la Figura 3.17 la medida del ángulo X es: ______

Para que el estudiante logre comprender las condiciones que le brinda el problema se presenta un Applet de GeoGebra con la construcción rotada hacia la izquierda y habilitadas las herramientas, para que el estudiante observe que si se hace una construcción robusta, es decir, que al mover un punto en ella las medidas no cambien y no se alteren los objetos geométricos, así el estudiante puede explorar y sacar conjeturas que le permitan idear un plan, incluso puede usar

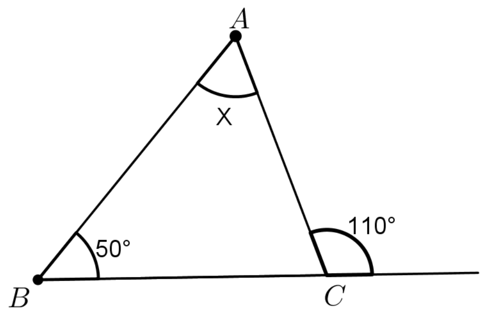


Figura 3.17: Gráfica del problema ORM-UIS 2010.

la herramienta ángulo y encontrar la medida solicitada, adicionalmente se incluyen las siguientes preguntas orientadoras para guiar al estudiante a una posible solución:

- El ángulo ACB y el ángulo que mide $110°$ ¿Cómo se clasifican según la suma de sus medidas?
- ¿Cuál sería la suma de la medida de los dos ángulos anteriores?
- De la conclusión anterior ¿Qué operación se puede realizar para encontrar el ángulo ACB?
- Una vez encontrada la medida del ánguloACB, recuerda ¿Cuánto suma la medida de los ángulos internos de un triángulo?
- Si de los tres ángulos internos del triángulo ya se conoce dos, ¿Qué operación se debe realizar para encontrar el tercero?

El objetivo de las preguntas es dar un paso a paso de la solución, sin hacerlo de manera explícita, se aclara que en la medida que se avanza en los problemas estas se hacen más generales pues se busca llegar a la situación a-didáctica, y se propone un foro del conocimiento para que puedan compartir sus ideas. Después, se espera que ejecuten el plan y puedan hacer una mirada retrospectiva sobre su solución, para determinar si es correcta o si no lo es poder revisar los pasos y buscar un nuevo plan. Finalmente, el docente propone a los estudiantes una posible solución para que se compare con la que ellos tenían y así validar sus procesos.

También se proponen en esta investigación otros problemas contextualizados con situaciones del contexto cotidiano de los estudiantes para que se puedan abordar, aparte de los propuestos en la secuencia.

Problema propuesto 1: Juan Camilo observó a su papá trabajando en el escritorio y realizó un dibujo de él y le explicó que en el colegio le enseñaron que esa no era una postura ergonómica y eso le podía causar dificultades en su salud, por ello elaboró un nuevo dibujo sobre la posición correcta, indicando con el punto verde donde se encontraba su mirada anteriormente, pero olvidó cuál era el ángulo de visión y con ayuda de su papá logró obtener los siguientes datos: el ángulo de visión donde tiene una mala postura es $105°$, la medida del ángulo DCA es $15°$ y la medida del ángulo ABD es el doble del ángulo DCA. Ayuda a Juan Camilo a encontrar la medida del ángulo de visión para tener una postura ergonómica.

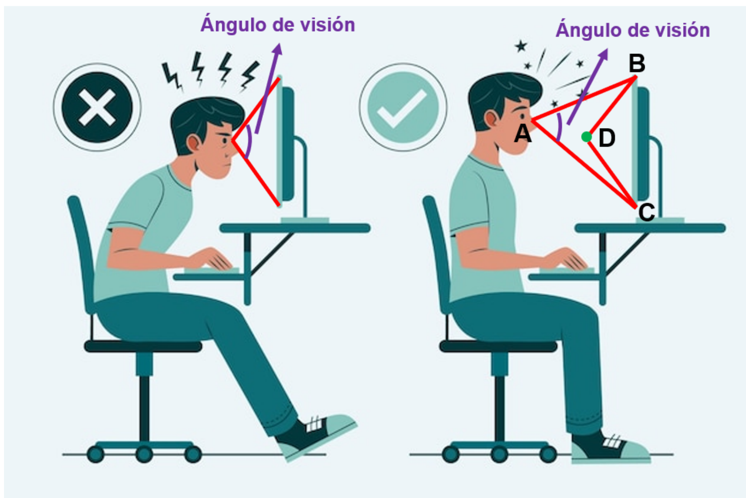


Figura 3.18: Posturas del padre de Juan Camilo.

Problema propuesto 2: En una competencia de cocina se tiene que elaborar un pastel para clasificar a la siguiente ronda, para ello los jurados han decidido tomar el tiempo de cada equipo, en terminar el pastel en un reloj de manecillas como se muestra en la Figura 3.19.

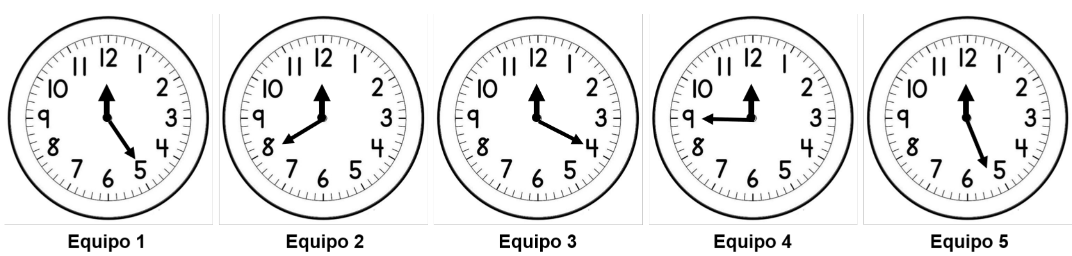


Figura 3.19: Tiempo de los equipos.

Los jurados dan a conocer que los equipos que clasificaron a la siguiente ronda fueron el equipo 1,3 y 5. ¿Determina cual fue el criterio seleccionado por el jurado para clasificar a la siguiente ronda, teniendo en cuenta el ángulo formado entre la manecilla del horario y el minutero?

Problema propuesto 3: Deiby es un niña muy curiosa y ha notado que la luz de la nevera se enciende cuando se forma un ángulo determinado al abrir la puerta, por ello su papá ha decidido ponerle un reto: "Deiby observa un gráfico de la nevera (ver Figura 3.20) donde se ubica la nevera con la puerta abierta formando dos ángulos diferentes, ¿cuál es el ángulo exacto en el que la luz de la nevera se enciende?

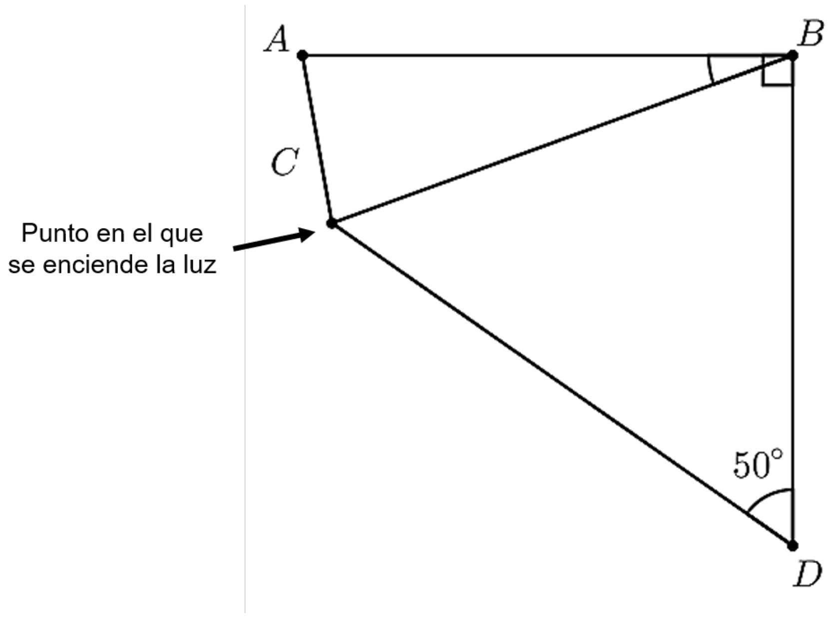


Figura 3.20: Dibujo del los ángulos en la nevera.

Por último, se comparte el enlace de la secuencia diseñada en GeoGebra: `https://www.geogebra.org/m/mftkjwbt`, donde se encuentran detalladas todas las actividades que se realizan con los estudiantes.

3.3.7. Experimentación

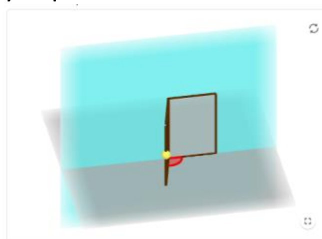
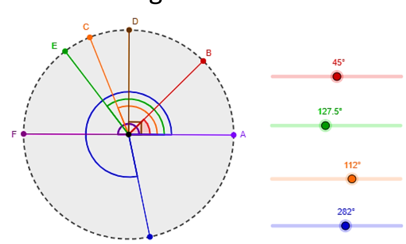
En esta etapa de la experimentación se realiza la puesta en escena de la secuencia creada y se hace el registro de observaciones sobre el desempeño, dificultades y logros de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

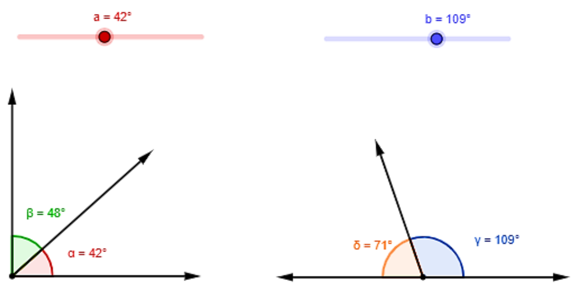
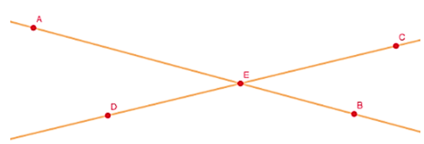
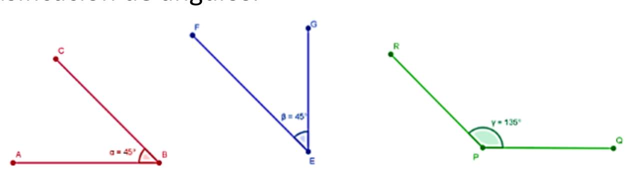
Para la ejecución de la secuencia didáctica de enseñanza inicialmente se planearon tres sesiones en una semana, cada una de dos horas clase, sin embargo, debido a diferentes situaciones que se presentaron como el cambio de clases por actividades propias del colegio, dificultades en la conexión de internet (en estas clases se optó por tener disponibles actividades impresas y las construcciones, sin embargo no se lograba avanzar lo planeado), la disponibilidad de la sala de informática, recomendaciones de la docente encargada del grupo en el colegio y los análisis de los encuentros que permitieron corregir y mejorar las actividades entre ellos, la cantidad de sesiones se modificó como se indica en la Tabla 3.2, donde finalmente se realizaron 8 encuentros con un total de 13 horas clase. Es importante resaltar que en el desarrollo de los diferentes encuentros se contó con el acompañamiento de la docente encargada de la asignatura de matemáticas del grado.

Fecha	Horario	Tema
10-mayo	Miércoles, 11:30 a 12:15 1 horas clase	-Refuerzo punto, segmento, recta y semirrecta.
15-mayo	Lunes, 8:40 a 10:10 2 horas clase	-Noción de ángulos. Puerta oscilante. -Definición y partes de ángulos, cómo nombrarlo y ángulos en el diario vivir. -Clasificación según su medida y según su posición.
17-mayo	Miércoles, 10:45 a 12:15 2 horas clase	-Clasificación de ángulos según la suma de sus medidas. -Actividad introducción a polígonos. -Definición y partes de un polígono.
19-mayo	Viernes, 11:30 a 1:00 2 horas clase	-Construcción de diagonales en un polígono. -Clasificación de polígonos según el número de lados. -Clasificación de polígonos según la medida de sus ángulos y sus lados.
29-mayo	Lunes, 8:40 a 10:10 2 horas clase	-Relación entre lados y ángulos de polígonos, usando la formula y ejercicios.
31-mayo	Miércoles, 10:45 a 11:30 1 horas clase	Actividad de clasificación de polígonos y ángulos en polígonos.
2-junio	Viernes, 11:30 a 12:15 1 hora clase	-Definición de triángulo. -Clasificación de triángulo según la medida de sus lados y ángulos.
5-junio	Lunes, 8:40 a 10:10 2 horas clase	-Actividad resolución de problemas con aplicación de conceptos

Tabla 3.2: Cronograma de la aplicación de la secuencia.

A continuación, se presenta un análisis de la secuencia que se desarrolló en las diferentes sesiones de clase, la cual se organizó en tres partes.

Tema	Tipo de actividad	Actividad	Objetivo
Introducción a ángulos	Repaso	**Actividad 1:** Mueve la chapa de la puerta y observa el arco rojo que se forma en el piso, el cual representa el espacio entre la pared y la puerta.  **Foro del conocimiento** Teniendo en cuenta la simulación de la puerta en GeoGebra, responde las siguientes preguntas y comparte con tus compañeros las respuestas obtenidas: 1. ¿Describe lo que sucede con el arco rojo cuándo se mueve la puerta? 2. ¿Qué partes determinan la abertura del arco rojo? 3. ¿Crees que se puede medir de alguna forma el espacio en el piso, que hay entre el borde inferior de la puerta y la pared? Explica tu respuesta.	Recordar qué es un ángulo y las partes que lo componen.
Definición de ángulo	Repaso	**Actividad 2:** Escribe tres ejemplos de tu entorno, donde se pueden observar ángulos.	Identificar ángulos en el contexto.
Clasificación de ángulos	Repaso	**Actividad 3:** Observa lo que sucede en la siguiente construcción con los ángulos al mover los deslizadores.  **Foro del conocimiento.** Teniendo en cuenta la construcción 1, responde las siguientes preguntas y socializa las respuestas con tus compañeros: 1. ¿Por qué cree que el ángulo de color café y el morado son fijos y no dependen de un deslizador? 2. ¿Por qué cree que el ángulo rojo no llega hasta el punto D y el verde hasta el punto F? 3. ¿Por qué cree que el ángulo de color azul inicia en más de 180° y no llega hasta 360°?	Reconocer ángulos según su medida.
Clasificación de ángulos	Repaso	**Actividad 4:** Observa en la construcción, lo que sucede con los ángulos al mover los deslizadores.	Reconocer ángulos según

		 **Foro del conocimiento.** Teniendo en cuenta la construcción anterior responde las siguientes preguntas y socializa las respuestas con tus compañeros. 1. Si no fuese visible la medida del ángulo β, ¿es posible determinarla a partir de la medida del ángulo α? 2. Si no fuese visible la medida del ángulo δ, ¿es posible determinarla a partir de la medida del ángulo γ? 3. ¿Cuál es la relación entre el ángulo α y β? 4. ¿Cuál es la relación entre el ángulo δ y γ?	la suma de sus medidas.
Clasificación de ángulos	Evaluativa	**Actividad 5:** Responde las siguientes preguntas de acuerdo a la imagen y la clasificación de ángulos.  a. Los ángulos BEC y AED son opuestos por el vértice. ____ Si ____ No b. ¿Los ángulos CEA y DEB son complementarios? ____ Si ____ No	Diferencia los ángulos según su clasificación.
Clasificación de ángulos	Evaluativa	**Actividad 6:** Responde las siguientes preguntas de acuerdo a la imagen y la clasificación de ángulos.  a. Los ángulos CBA y QPR son suplementarios. ____ Si ____ No b. Los ángulos CBA y GEF son complementarios. ____ Si ____ No	Diferenciar los ángulos según su clasificación.

La parte inicial de la secuencia corresponde a la definición y clasificación de ángulos, donde se recordó el concepto de ángulo y su clasificación, por ello las actividades se denominaron de repaso, pues teniendo en cuenta los estándares del Ministerio de Educación el tema se debe abordar en grados anteriores, estas actividades se presentan a continuación.

La primera actividad se propone teniendo en cuenta el entorno inmediato de los estudiantes, en este caso se modeló en el entorno una puerta la cual se puede manipular con un punto, con esto se espera que logren identificar las partes que componen el movimiento, asimismo se le propone identificar en su entorno otros ángulos.

Después se encuentra una construcción que tiene deslizadores, aquí el estudiante debe identificar los rangos en los cuales se mueven los segmentos que forman los ángulos, de esta forma se relaciona con la clasificación según la medida, dado que algunos recordaban la clasificación y sabían que se tenían nombres específicos, sin embargo, no lograban determinar a cuáles correspondía.

De manera similar se presentan las otras clasificaciones, el propósito es que el estudiante tenga un contacto con el programa y mediante la observación logre llegar a sus propias conclusiones que después comparte con sus compañeros, de esta manera se presenta un situación didáctica que, con guía del docente, llega al conocimiento buscado.

Cabe mencionar que el papel del programa en la verificación del desarrollo de las actividades es muy significativo, puesto que es posible ver el trabajo de los estudiantes en tiempo real, para ello en el entorno se pueden proponer diferentes actividades y dependiendo de lo que el docente necesite, como la Applet de GeoGebra o preguntas abiertas donde el software presenta los avances de los estudiantes en ventanas con las respuestas y el nombre de cada uno, aquí es posible ingresar en cada casilla y revisar a detalle lo que han respondido, como se indica por ejemplo en la Figura 3.21.

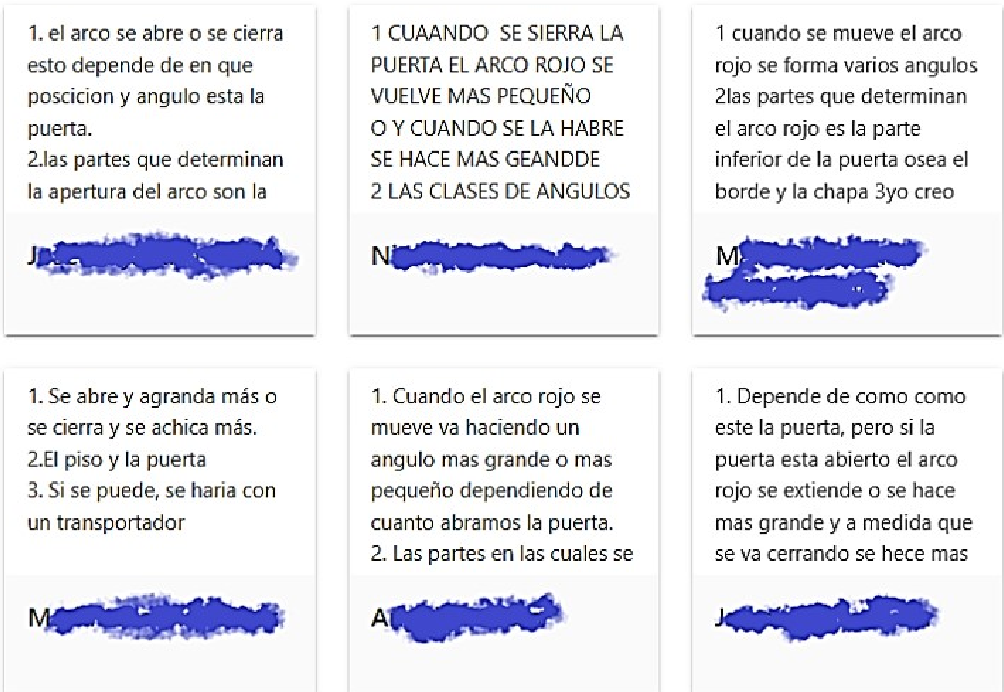


Figura 3.21: Respuestas de la actividad actividad puerta oscilante.

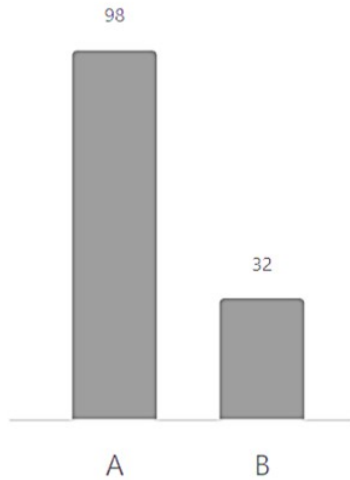
Otra opción es realizar preguntas de selección múltiple, en este caso GeoGebra presenta una gráfica de barras con la cantidad de respuestas y al dar clic sobre las respuestas de los estudiantes aparecen los nombres de quienes seleccionaron cada opción (Ver Figura 3.22).

Al terminar esta sección de la secuencia en GeoGebra, se considera importante verificar que los conceptos hayan sido aprendidos, por ello se decidió proponer una actividad evaluativa (Ver Figura 3.23) en la cual se usó la herramienta de preguntas cerradas de selección múltiple que ofrece GeoGebra y se proponen situaciones que el estudiante puede resolver con lo visto anteriormente, en este caso el programa genera un reporte al docente con las respuestas que los estudiantes han dado, esta herramienta es muy útil pues permite considerar si es necesaria una retroalimentación de lo trabajado.

Tarea 9

Los ángulos BEC y AED son opuestos por el vértice.

REANUDAR | MOSTRAR RESPUESTAS CORRECTAS



A: Sí.

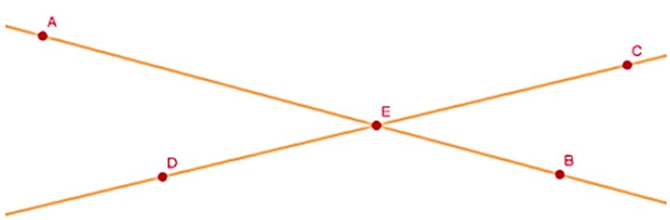
B: No

Figura 3.22: Respuestas estudiantes actividad clasificación de ángulos.

Actividad 1.

Responde las siguientes preguntas de acuerdo a lo visto en la clasificación de ángulos y las Figuras proporcionadas. También registra tus respuestas en el siguiente enlace:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSe4F4cUE-vUSo8g-lFTHqz9EuLCrL8uA-qEnvnqiyQAJbVjnw/viewform?usp=sf_link



Tarea 9 Progreso del estudiante: 132 de 728 DETALLES

Los ángulos BEC y AED son opuestos por el vértice.

Marca todas las que correspondan

A ☐ Sí.

B ☐ No

Tarea 10 Progreso del estudiante: 125 de 728 DETALLES

¿Los ángulos CEA y DEB son complementarios?

Marca todas las que correspondan

A ☐ Sí.

B ☐ No.

Figura 3.23: Actividad clasificación de ángulos.

Es importante señalar que se ubicó un estudiante en cada computador y por ello todos tuvieron la oportunidad de realizar las actividades de manera individual (ver Imagen 3.2). Durante el desarrollo de la primera sección se evidenció interés por parte de los estudiantes, presentaron facilidad para ingresar a la secuencia, pero les generaba curiosidad las construcciones por lo cual las manipulaban frecuentemente y en ocasiones las modificaban, por esto, fue necesario que las instrucciones fueran claras, incluso repetirlas para que no se presentaran más dificultades (ver Imagen 3.3).

También fue necesario agregar en las construcciones de GeoGebra la función de reiniciar construcción con el fin de que si se cambiaban las condiciones del Applet, el estudiante pudiera reiniciarlo de manera inmediata sin afectar su trabajo. Además fue necesario incluir enlaces en Google forms para que los estudiantes realizaran las actividades dado que en ocasiones fallaba el internet y se perdían los avances, en la Figura 3.23 se observa el enlace compartido.

Imagen 3.2: Estudiantes en la sala de informática.

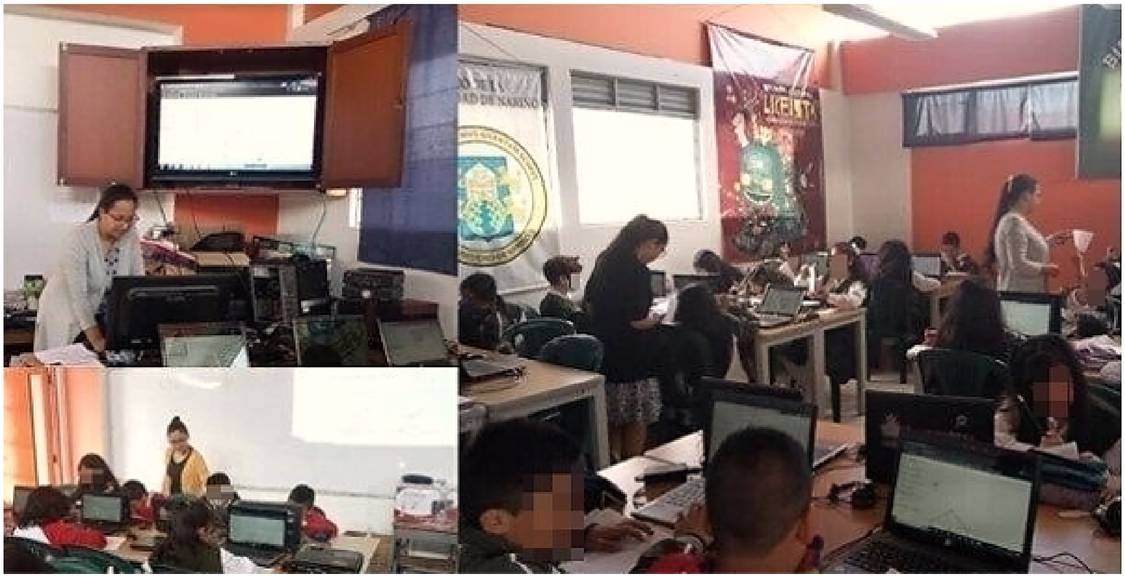


Imagen 3.3: Explicaciones y aclaraciones por parte de las investigadoras.

La segunda parte de la secuencia es la sección correspondiente a la definición y clasificación de polígonos. Para este caso se presentó una actividad en la que se ubicaron figuras que son polígonos y otras no, de esta manera los estudiantes tenían que identificar las diferencias y similitudes con el fin de llegar a la definición de polígono, después se presentaron las partes que componen a los polígonos como lados, vértices, ángulos internos y diagonales, todo esto con el apoyo de un vídeo. La siguiente actividad consistió en construir las diagonales de un polígono, la idea de la actividad es que los estudiantes utilicen herramientas de GeoGebra, en este caso la construcción de segmentos (ver Figura 3.24).

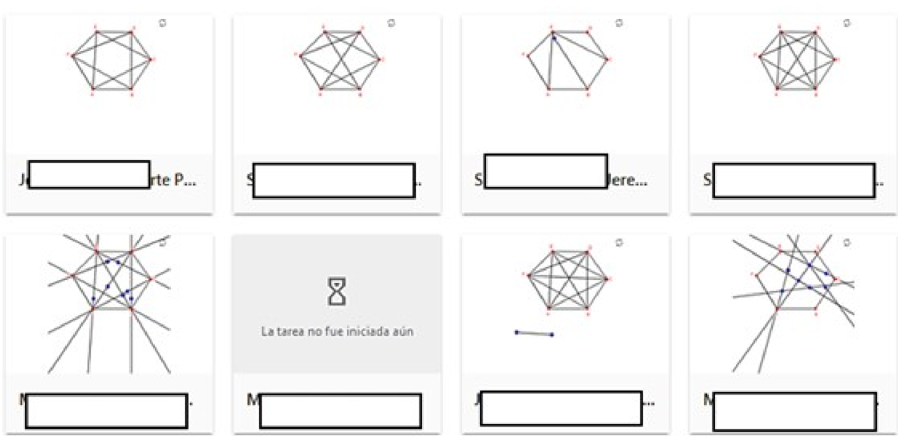


Figura 3.24: Actividad construcción de las diagonales de un polígono.

Posteriormente, se presentó la clasificación de polígonos según el número de lados, al igual que la actividad anterior se buscó que los estudiantes usaran otra herramienta, la cual permitió construir polígonos, es así como ellos fueron generando confianza, intentaron usar el programa y comprendieron que de los errores también se aprende.

A manera de verificación, adicionalmente se presentó una actividad de clasificación de polígonos según el número de lados.

Por otro lado, también se trabajó la clasificación de polígonos según la medida de sus lados y sus ángulos, para ello se propusieron dos actividades donde el estudiante logró manipular los objetos y también usar las herramientas del programa. Para los polígonos regulares la construcción se basó en un deslizador con el cual se podía modificar la cantidad de lados, adicionalmente se solicitó usar la herramienta de GeoGebra y medir tanto los lados como los ángulos, luego manipular el deslizador y notar qué sucedió con la medida de los ángulos y la medida de los lados.

Para la actividad de polígonos irregulares se presentaron varios ejemplos, nuevamente midieron los lados y ángulos. Después deben realizar un análisis de lo que sucedió en las dos Applets anteriores y escribir para finalmente compartir las conclusiones con lo observado.

Al finalizar se institucionalizaron las características de los polígonos regulares e irregulares. Nuevamente, se propuso una sección evaluativa donde el estudiante demostró sus habilidades y aplicó lo aprendido en las actividades, en ella se solicitó determinar si un polígono es regular o no, en este caso se dieron las mismas medidas para los lados del polígono, lo ideal era que el estudiante notara que también era necesario que los ángulos fueran iguales, por lo cual debían usar la herramienta y al notar que no cumplía esa condición, entonces el polígono era irregular.

Dado que la secuencia tiene que ver con los ángulos, se presentó la relación entre los lados y los ángulos de los polígonos, es decir se explicó que existe una expresión que permite determinar la suma de los ángulos en un polígono regular y se puede determinar el valor de cada uno de los ángulos en un polígono regular. En este caso se mostró la relación y se solicitó llenar una tabla realizando los procesos necesarios para completarla.

Posteriormente, se realizaron otras actividades evaluativas, estas con el fin de verificar la comprensión de los estudiantes. Las actividades tenían varios propósitos, entre ellos que los estudiantes usaran las herramientas que tiene GeoGebra, pero también que no se conformaran con esa información, sino que comenzaran a escribir sus soluciones usando la simbología correspondiente y fueran capaces de explicar cada paso, adicionalmente se propusieron las situaciones como una introducción a la resolución de problemas.

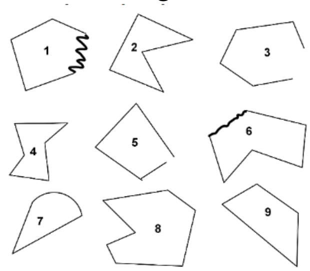
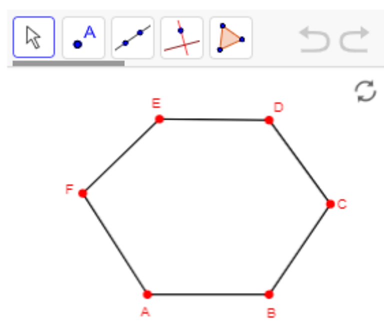
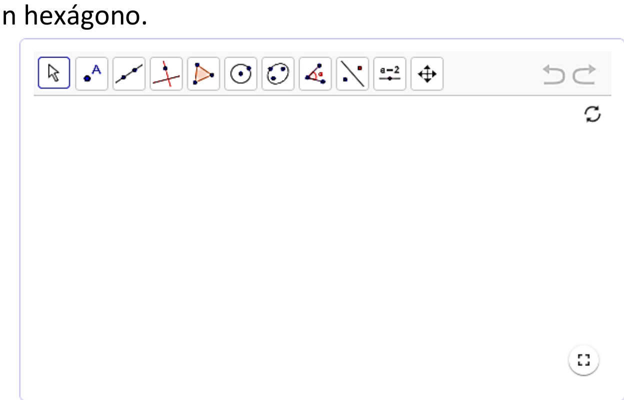
Dada la importancia del polígono triángulo, se presentó una sección referente a este. Allí se encuentra la definición, la clasificación según la medida de sus lados y la medida de sus ángulos. Se agregó una construcción con la cual se podía determinar la característica de los triángulos isósceles, es decir que podían descubrir que si dos lados en un ángulo son iguales, entonces dos ángulos también lo son.

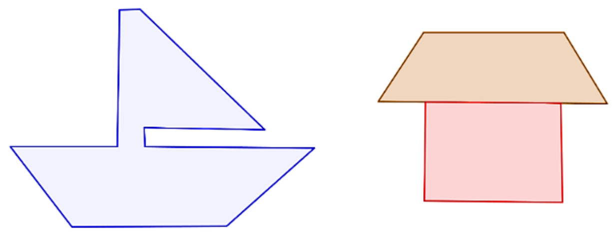
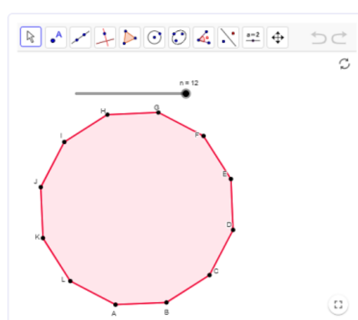
Por último, se presentó un problema de aplicación de triángulos, aquí se empezó a inducir al estudiante a buscar explicaciones y encontrar medidas sin necesidad de usar herramientas, es decir se buscaron explicaciones teóricas por parte de ellos, de esta manera se fortaleció la rigurosidad y se evitó que piensen que siempre se necesita de un programa de geometría o instrumentos como regla o compás para resolver problemas.

Durante esta parte de la secuencia se notó que los estudiantes estaban muy pendientes del cambio en el entorno, puesto que ya aparecían las herramientas y no sólo las construcciones.

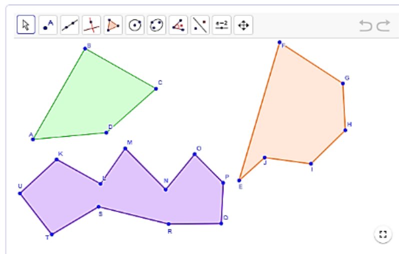
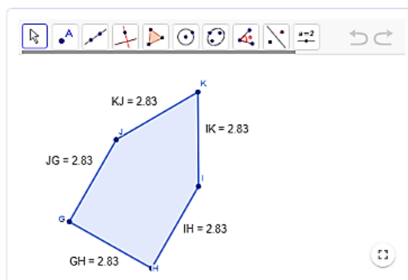
Al igual que con la sección anterior fue necesario repetir las instrucciones para que se hiciera un uso adecuado de las herramientas, es decir se especificó el lugar dónde se encontraban, cómo desplegar más herramientas y cómo usarlas pues cada una tiene sus particularidades (usar sólo clic, usar clic sostenido, arrastrar elementos y el sentido en el que se deben marcar los puntos) esto implicó mayor disposición de tiempo, pues se ayudó a cada estudiante de manera particular y se retomaron frecuentemente las explicaciones.

A continuación se resumen las actividades descritas de estas secciones.

Tema	Tipo de actividad	Actividad	Objetivo
Noción de polígonos	Repaso	**Actividad 1:** Observa las imágenes de la siguiente figura.  **Foro del conocimiento.** Observa las imágenes de la figura 1, ¿qué diferencias y similitudes puedes encontrar?	Recordar las características de un polígono.
Partes de polígono	Repaso	**Actividad 2:** En el siguiente polígono, construye las diagonales del polígono.  ¿Cuántas diagonales tiene en total el hexágono EDCBAF? a. 6 diagonales. b. 5 diagonales. c. 9 diagonales.	Identificar las diagonales de un hexágono. Construir las diagonales de un polígono usando las herramientas de GeoGebra.
Clasificación de polígonos	Repaso	**Actividad 3:** Intenta construir un triángulo, para ello ve a la barra de herramientas y despliega las que están en la quinta posición, luego selecciona "polígono", y ubica tres puntos separados para formar el triángulo y señala el primer punto que se construyó. Luego, intenta construir un hexágono. 	Reconocer polígonos según la cantidad de lados. Construir polígonos usando la herramienta “polígono” de GeoGebra.

Clasificación de polígonos	Repaso	**Actividad 4:** Teniendo en cuenta la clasificación de polígonos según el número de lados, los polígonos que se ven en la siguiente figura, son respectivamente:  a. Decágono y octágono. b. Dodecágono y octágono. c. Decágono y heptágono.	Reconocer polígonos según la cantidad de lados.
Clasificación de polígonos	Repaso	**Actividad 5:** Realiza los siguientes pasos en la construcción dada. 1. Mide los ángulos internos del polígono, para ello usa la herramienta que se encuentra en la octava posición, despliega las opciones y selecciona ángulo. Ten en cuenta que los puntos deben marcarse en sentido contrario a las manecillas del reloj. 2. Mide los lados del polígono, para ello te debes ubicar en la herramienta que se encuentra en la octava posición, desplegar las opciones, seccionar distancia o longitud y luego marcar los puntos de inicio y final del segmento que se desea medir 3. Mueve el deslizador y observa lo que sucede en el polígono.  Realiza los siguientes pasos en la siguiente construcción. 1. Mide los ángulos internos de los polígonos, para ello usa la herramienta de ángulo (se encuentra en la	Encontrar la medida de los ángulos y lados de un polígono en GeoGebra usando la herramienta “ángulo” y “distancia o longitud”. Reconocer la diferencia entre polígonos regulares e irregulares.

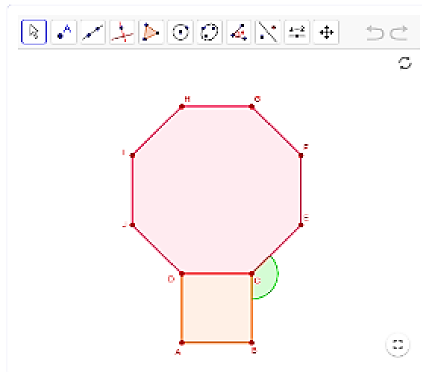
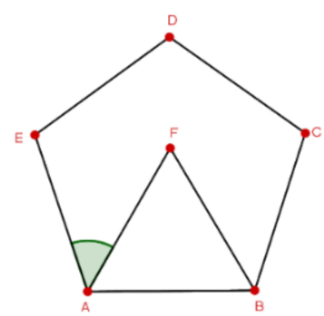
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>posición 8 de izquierda a derecha). Ten en cuenta que los puntos deben marcarse en sentido contrario a las manecillas del reloj.

2. Mide los lados de los polígonos para ello te debes ubicar en la sección de ángulo (se encuentra en la posición 8 de izquierda a derecha), en la herramienta distancia o longitud.

Foro del conocimiento. Escribe tus conclusiones frente a lo que sucede en las dos construcciones anteriores.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Clasificación de polígonos</td>
<td>Repaso</td>
<td>Actividad 6: Observa la construcción, en ella se encuentran las medidas de cada uno de los lados del polígono.


En la construcción anterior, el polígono es:
a. Regular.
b. Irregular.</td>
<td>Utilizar las herramientas de GeoGebra para encontrar las propiedades del polígono.

Reconocer los polígonos según la medida de sus lados y ángulos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Relación entre los lados y ángulos de un polígono</td>
<td>Evaluativa</td>
<td>Actividad 7: Completa la siguiente tabla.
<table>
<tr><th>Número de lados de un polígono "n"</th><th>Suma de las medidas de los ángulos internos del polígono (sea regular o irregular)</th><th>Si fuese regular el polígono ¿cuánto mediría cada ángulo interno?</th></tr>
<tr><td>3</td><td>$(3-2)x180° = 1x180° = 180°$</td><td>$\frac{(3-2)x180°}{3} = \frac{1x180°}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>Identificar la medida de la suma de los ángulos internos de un polígono regular o irregular.

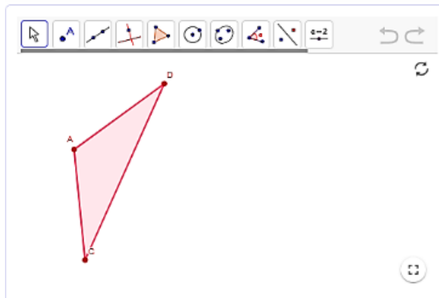
Identificar la medida de un ángulo interno de un polígono regular.</td>
</tr>
</table>

Clasificación de polígonos	Evaluativa	**Actividad 8:** Observa la siguiente construcción y con ayuda de la herramienta ángulo determina la medida del ángulo verde.  Explica por qué ese ángulo tiene la medida obtenida.	Aplicar propiedades de polígonos en la resolución de situaciones problema.
Clasificación de polígonos	Evaluativa	**Actividad 9:** En el polígono EDCBA y el triángulo AFB son regulares, ¿cuál es la medida del ángulo FAE?  a. 108° b. 60° c. 48°	Aplicar propiedades de polígonos en la resolución de situaciones problema.
Triángulos	Repaso	**Actividad 10:** En la siguiente construcción se encuentra un triángulo que cumple con una particularidad, para descubrirla usa las herramientas de GeoGebra, ten en cuenta los siguientes pasos. 1. Mide los ángulos, para ello te debes ubicar en la octava casilla de las herramientas, desplegar las opciones y escoger la primera opción (ángulo), luego debes seleccionar el ángulo que desear medir, recuerda realizarlo en sentido contrario a las manecillas del reloj. 2. Mide los lados, para ello te debes ubicar en la octava casilla de herramientas, desplegar las opciones y escoger la tercera opción (distancia o longitud), luego debes	Determinar invarianzas con ayuda de GeoGebra. Caracterizar un triángulo isósceles.

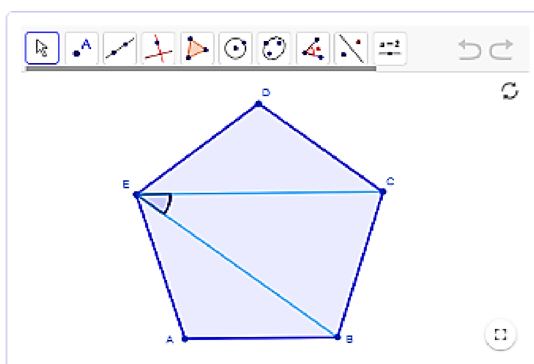
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>seleccionar los puntos de inicio y final del segmento que se desea medir.

3. Mueve los puntos D y C y observa lo que sucede con las medidas tomadas en los pasos 1 y 2.

Foro del conocimiento.



1. De acuerdo la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados, ¿cómo se clasifica el triángulo ADC?
2. ¿Qué sucede con la medida de los ángulos que se forman en el vértice C y D?
3. Teniendo en cuenta los anterior ¿qué conclusión se puede sacar?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Triángulo</td>
<td>Repaso</td>
<td>**Actividad 11:** Observa la construcción. ¿Cuánto mide el ángulo BEC?



a. 60°
b. 36°
c. 108°

Foro del conocimiento. ¿Explica cómo se puede encontrar ese valor sin usar la herramienta "ángulo" de GeoGebra?</td>
<td>Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.</td>
</tr>
</table>

Una vez realizadas las anteriores actividades se pasa a la sección de aplicación de conceptos de ángulos en resolución de problemas. Los problemas presentados en esta sección fueron tomados de diversas olimpiadas matemáticas teniendo en cuenta que se pueden resolver aplicando lo visto a lo largo de la secuencia.

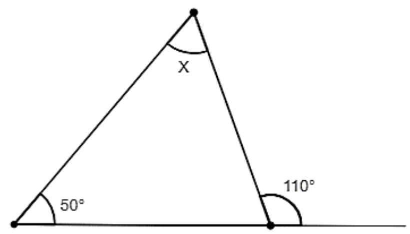
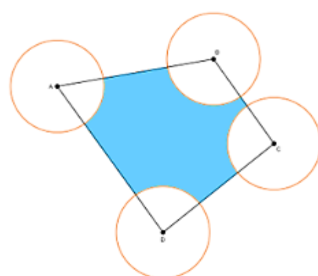
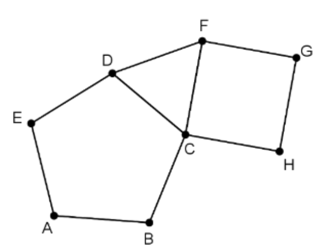
Los problemas han sido organizados teniendo en cuenta que a medida que se avanza el estudiante va tomando un papel más protagónico. Los primeros problemas fueron organizados con preguntas orientadoras, de manera que si se sigue el orden de las mismas el estudiante puede comprender el proceso de solución, esto con el fin de que note que no son procesos ajenos ni conceptos diferentes a los abordados en las clases pasadas, además van tomando confianza en este proceso, es importante resaltar que en este proceso se hace énfasis en que se pueden equivocar, pero lo realmente importante es intentarlo y aprender no sólo de los aciertos sino también de los errores. A partir del cuarto problema las ayudas disminuyen, se plantean preguntas más generales que dejan dudas y algunos vacíos que se espera generen inquietud en el estudiante, de manera que se planteara ideas y con algo de creatividad aplicara lo visto y pudiera superarlos.

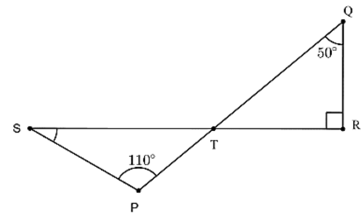
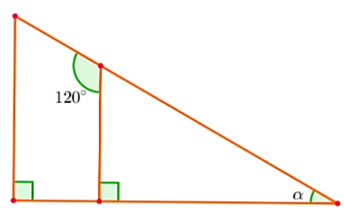
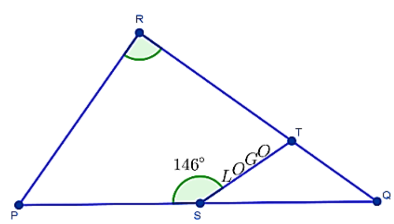
Finalmente, se da todo el protagonismo al estudiante, es decir, se espera que sea él quien proponga sus soluciones, procesos e incluso construcciones que lo guíen hacia la solución, es importante motivarlos para que se animen a plantear ideas que faciliten la obtención de una respuesta.

Se destaca que los dos últimos problemas fueron propuestos en este trabajo, el objetivo es mostrar a los estudiantes que lo visto en la secuencia también se puede aplicar en nuestra vida diaria, en diseños y en sus carreras a futuro.

En esta última sección de la secuencia: se nota que los estudiantes perciben de manera diferente los problemas, ellos afirman que cuando presentaron la prueba diagnóstica y leyeron los problemas no tenían ideas para resolverlos y pensaban que era muy complicado, sin embargo ahora evidencian que son conceptos que se pueden aplicar con facilidad y se sienten motivados cuando pueden resolver de forma correcta los problemas. También resaltan la importancia de la elaboración de gráficas, pues con ellas pueden proponerse ideas claras para dar solución a un problema. De igual manera se nota que resaltan lo útil del programa pues pudieron observar y manipular los objetos matemáticos teniendo mayor claridad de lo que sucede en los problemas (ver Imagen 3.4).

Imagen 3.4: Estudiantes realizando las actividades de la secuencia.

Tema	Tipo de actividad	Actividad	Objetivo
Resolución de problemas	Repaso	**Problema 1.** Tomado de Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba clasificatoria, año 2010. **Enunciado:** En figura la medida del ángulo X es: 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Repaso	**Problema 2.** Tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba final, año 2009. **Enunciado:** ABCD es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PBQ?	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Repaso	**Problema 3.** Tomado de Olimpiada Matemática de Guanajuato, primer selectivo del año 2020. **Enunciado:** En la figura ABCD es un cuadrilátero de área 5. Si los cuatro círculos tienen radio 1 y centro en los vértices del cuadrilátero, ¿Cuánto mide el área sombreada? 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Evaluativa	**Problema 4.** Tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño, nivel I, primera fase, año 2016. **Enunciado:** ABCDE es un pentágono regular, CDF es un triángulo equilátero y CFGH es un cuadrado. La medida en grados del ángulo BCH es: 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.

Resolución de problemas	Evaluativa	**Problema 5.** Tomado de la Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, taller año 2015. **Enunciado:** En la figura, los segmentos SR y PQ se intersecan en T. ¿Cuál es la medida del ángulo S? 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Evaluativa	**Problema 6.** Tomado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba clasificatoria, año 2009. **Enunciado:** Sea D un punto interior del triángulo ABC, tal que BDC=123°, ABD=15°, ACD=21°, la medida de BAC es.	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Evaluativa	**Problema 7.** Modificado de Universidad Industrial de Santander, nivel básico secundaria, prueba clasificatoria, 2016. **Enunciado:** se desea construir unas gradas en una casa. El ingeniero afirma que debe tener dos soportes que formen ángulos rectos con el piso. Además, se han asignado algunas medidas como indica la figura. ¿Cuál es la inclinación que tienen las gradas (ángulo)? 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.
Resolución de problemas	Evaluativa	**Problema 8.** Modificado de Universidad Industrial de Santander, nivel básico secundaria, prueba clasificatoria, 2011. **Enunciado:** una empresa diseña un resbaladero (deslizadero) en forma de triángulo y ubica su logo como indica la figura. Si los diseñadores desean que los lados TS y TQ tengan la misma longitud, al igual que PQ y QR. ¿Cuál debe ser la medida del ángulo PRQ? t 	Aplicar conceptos de ángulos en situaciones problema.

3.3.8. Análisis a posteriori

En esta etapa se presentan los resultados de la prueba final que se elaboró y aplicó con el propósito de evidenciar los avances y resultados luego de aplicar la secuencia didáctica.

La prueba final se elaboró en un formato de Google forms (Anexo I), con un tiempo estimado de dos horas clase para su desarrollo, en ella se organizaron dos secciones: la primera incluye preguntas referentes a la percepción de los estudiantes respecto a la secuencia y cómo aportó al aprendizaje y fortalecimiento del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos y la segunda tiene como objetivo evidenciar los conocimientos obtenidos luego de la aplicación de la secuencia didáctica, para ello se incluyeron 4 preguntas de selección múltiple con única respuesta sobre la parte teórica con el fin de evidenciar los avances respecto a la comprensión del concepto de ángulo y su clasificación; 6 problemas, 4 son con preguntas de selección múltiple con única respuesta y 2 con preguntas abiertas, para determinar si se logró un avance en la aplicación de los ángulos ante una situación problema, además se considera que los problemas con preguntas abiertas tienen una mayor complejidad, pues se quita la opción del descarte que suele ser muy usada, y entre los problemas se proponen 2 que no tiene una ayuda gráfica, exigiendo a los estudiantes un proceso más elaborado en la resolución.

El contrato didáctico que se estableció para la presentación de la prueba final es el mismo que corresponde a la prueba diagnóstica.

Al igual que la prueba diagnóstica, la prueba final fue presentada a los expertos para la correspondiente validación, los criterios seleccionados son nuevamente los mismos y de manera similar dan su opinión de la pertinencia para aplicar la prueba (Anexos J y K). En esta prueba se considero nuevamente la complejidad para que sea acorde a los conocimientos de los estudiantes de grado sexto.

A continuación se presenta un tabla donde se señala la cantidad de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por pregunta de la segunda sección (ver Tabla 3.3), ya que permite el análisis de los avances logrados con la aplicación de la secuencia, estos datos fueron obtenidos de la sabana de datos de las respuestas de la prueba (Anexo L).

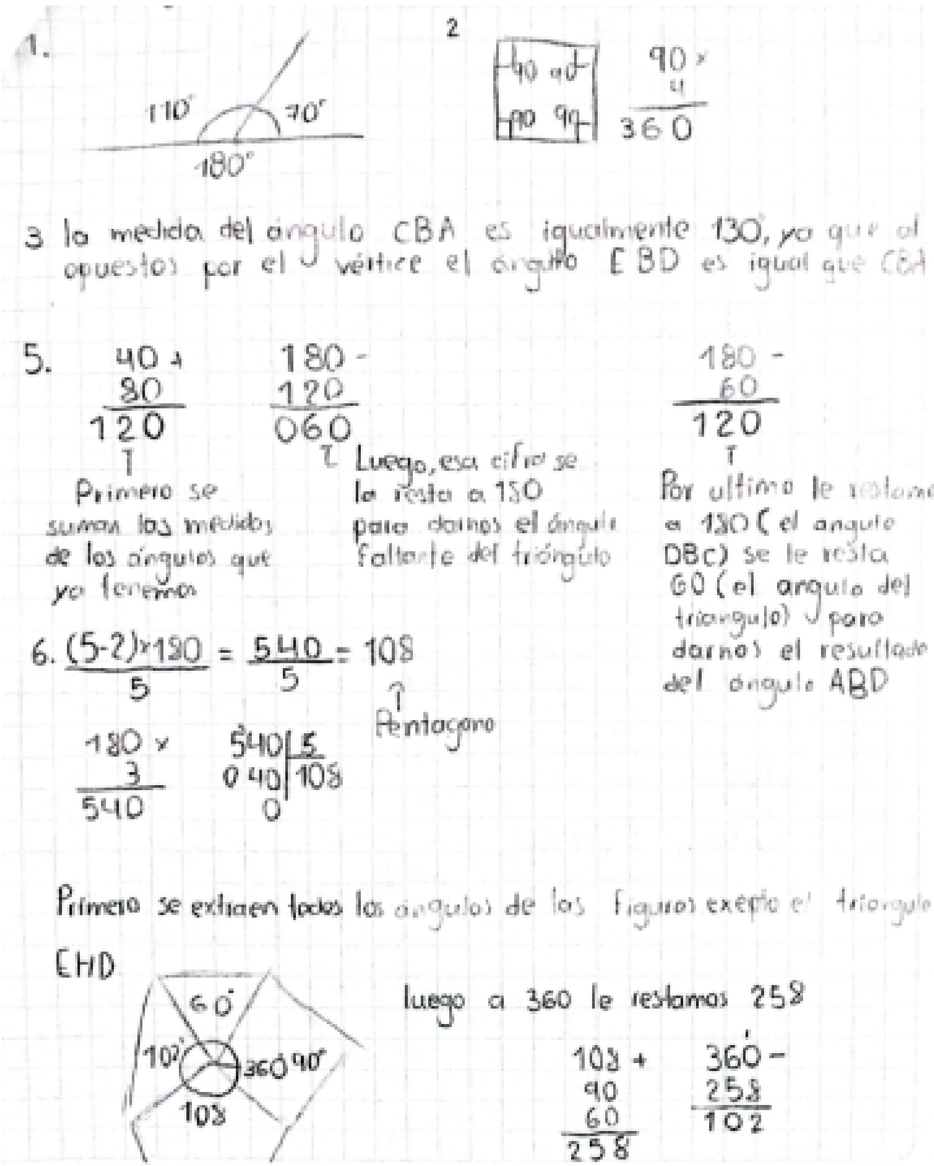
En esta tabla se puede observar que en las preguntas teóricas más de la mitad respondieron correctamente y no hubieron preguntas sin contestar evidenciando una mayor comprensión

	Pregunta	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Respuestas en blanco	
Preguntas teóricas de selección múltiple	1	35	81,4%	8	18,6%	0	0,0%
	2	31	72,1%	12	27,9%	0	0,0%
	3	29	67,4%	14	32,6%	0	0,0%
	4	32	74,4%	11	25,6%	0	0,0%
Resolución de Problemas con preguntas de selección múltiple	5	29	67,4%	13	30,2%	1	2,3%
	6	14	32,6%	26	60,5%	3	7,0%
	7	24	55,8%	18	41,9%	1	2,3%
	8	14	32,6%	17	39,5%	12	27,9%
Resolución de problemas con preguntas abiertas	9	10	23,3%	26	60,5%	7	16,3%
	10	5	11,6%	24	55,8%	14	32,6%

Tabla 3.3: Resultados prueba final.

del concepto y las propiedades de ángulos. En los problemas se observa que en dos de ellos se obtiene un porcentaje mayor al 50 % de las respuestas correctas y también se evidencias que las preguntas sin contestar tienen un porcentaje bajo, de donde se puede inferir que aunque se pueden presentar dificultades en la comprensión de los problemas y aplicación de los conceptos, los estudiantes tuvieron más interés por resolver los problemas aunque se equivocarán.

En el registro de observaciones realizado en la aplicación de la prueba final, fue posible notar que la mayoría de los estudiantes realizaron procesos un poco más elaborados en hojas adicionales, es decir, que intentaron escribir el paso a paso en la solución del problema, incluso se evidencia una mejora en la redacción, para ello se toma como ejemplos los textos escritos por algunos estudiantes, el primer ejemplo corresponde al estudiante E17 (ver imágenes 3.5, 3.6 y 3.7).


1\. 110° 70° 180°

2\. 90 90 / 90 90

$90 \times 4 = 360$

3 la medida del ángulo CBA es igualmente 130, ya que al opuestos por el vértice el ángulo EBD es igual que CBA

5\. $40 + 80 = 120$ $\quad 180 - 120 = 060$ $\quad 180 - 60 = 120$

Primero se suman las medidas de los ángulos que ya tenemos

Luego, esa cifra se le resta a 180 para darnos el ángulo faltante del triángulo

Por ultimo le restamos a 180 (el angulo DBC) se le resta 60 (el angulo del triangulo) para darnos el resultado del ángulo ABD

6\. $\frac{(5-2)\times 180}{5} = \frac{540}{5} = 108$

Pentagono

$180 \times 3 = 540$ $\quad 540 \div 5 = 108$

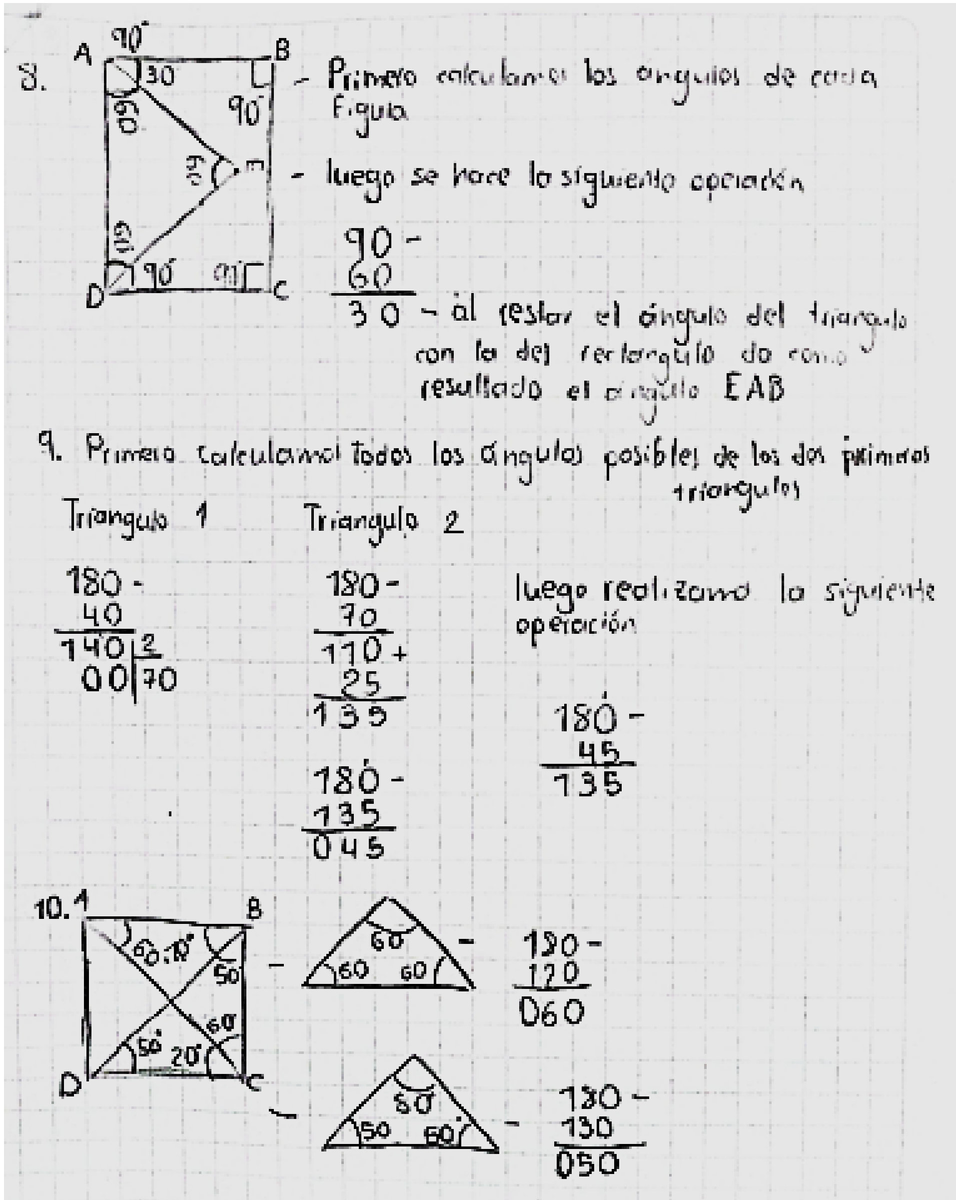
Primero se extraen todos los ángulos de las figuras excepto el triangulo EHD

60° 108° 360 90° 108

luego a 360 le restamos 258

$108 + 90 + 60 = 258$ $\quad 360 - 258 = 102$

Imagen 3.5: Hoja de procesos del estudiante E17 de los problemas 1 al 6.



8\. - Primero calculamos los ángulos de cada figura

- luego se hace la siguiente operación

90 -
60
30 - al restar el ángulo del triangulo con la del rectangulo da como resultado el angulo EAB

9\. Primero calculamos todos los ángulos posibles de los dos primeros triangulos

Triangulo 1

180 -
40
140 | 2
00 | 70

Triangulo 2

180 -
70
110 +
25
135

180 -
135
045

luego realizamos la siguiente operación

180 -
45
135

10\.

180 -
120
060

180 -
130
050

Imagen 3.6: Hoja de procesos del estudiante E17 de los problemas 8 al 10.

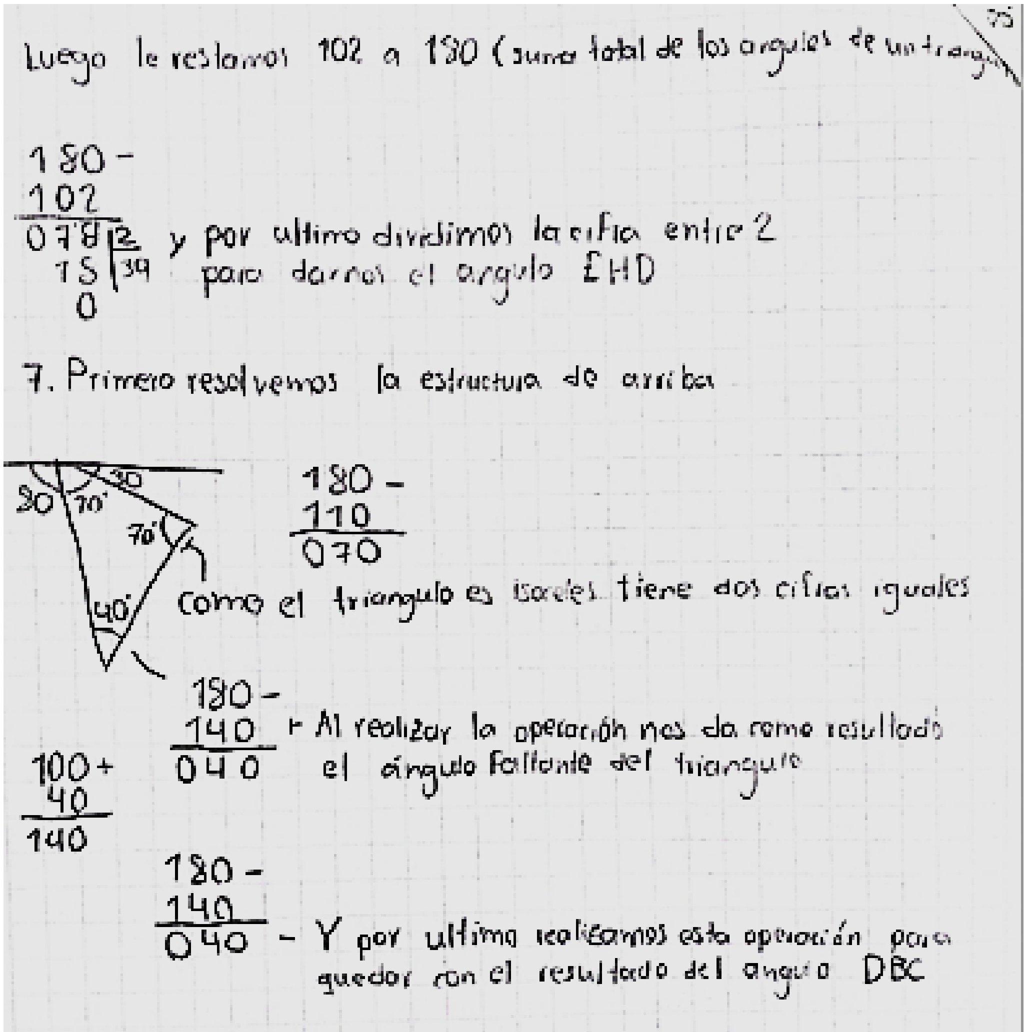
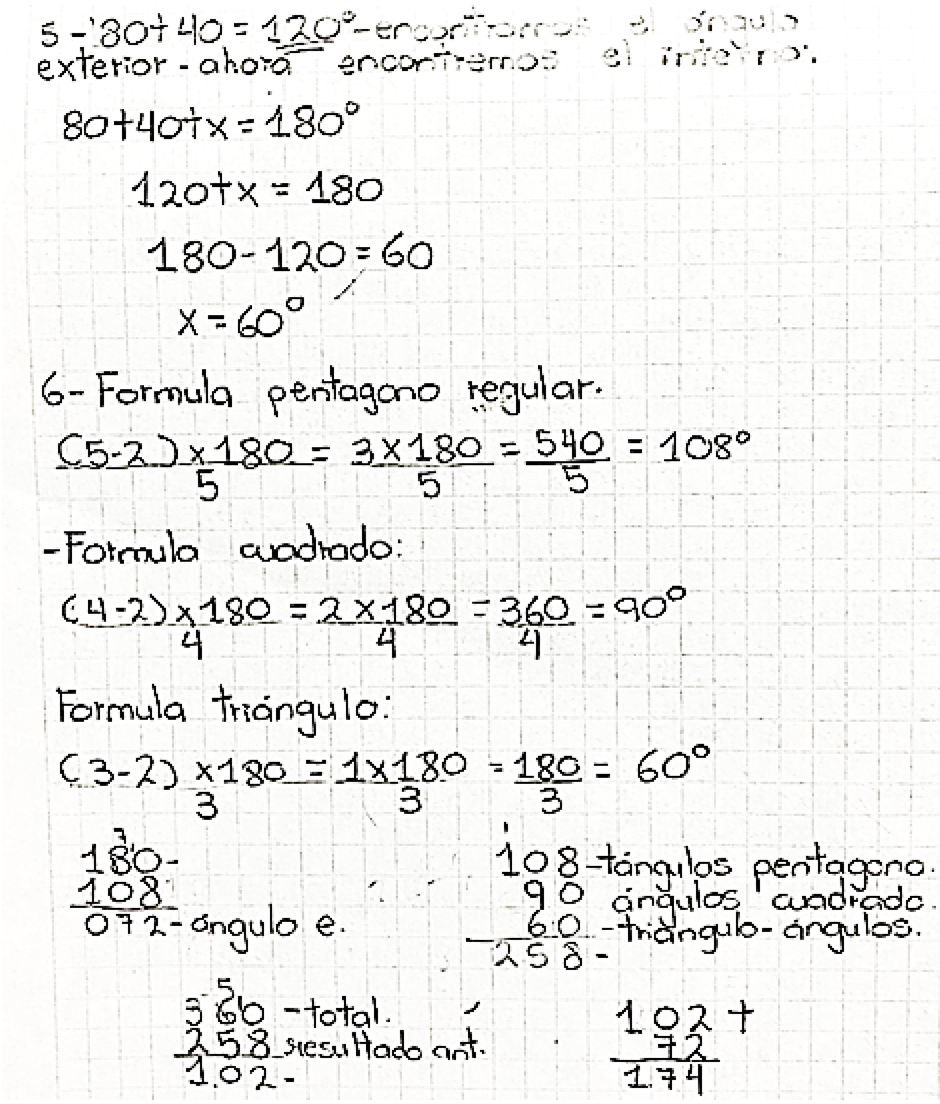


Imagen 3.7: Hoja de procesos del estudiante E17 del problema 7.

Como se puede ver en las imágenes, el estudiante escribió un proceso de solución más estructurado, debido a que en algunos problemas esboza un gráfico acorde a las condiciones dadas en el enunciado, observando así la etapa de comprensión del problema; además intenta realizar una secuencia de pasos coherente para encontrar la solución, la cual se detalla con las palabras “primero”, “luego” y “por último”, reflejando la etapa de la planeación y ejecución, también se puede considerar que el estudiante realiza una mirada retrospectiva, ya que realiza conclusiones, verificando su respuesta.

Un segundo ejemplo corresponde al estudiante E43 (ver imágenes 3.8 y 3.9)


5 - 80+40 = 120° - encontramos el ángulo exterior - ahora encontremos el interno.

$80+40+x=180°$

$120+x=180$

$180-120=60$

$x=60°$

6- Formula pentagono regular.

$\frac{(5-2)\times 180}{5} = \frac{3\times 180}{5} = \frac{540}{5} = 108°$

-Formula cuadrado:

$\frac{(4-2)\times 180}{4} = \frac{2\times 180}{4} = \frac{360}{4} = 90°$

Formula triángulo:

$\frac{(3-2)\times 180}{3} = \frac{1\times 180}{3} = \frac{180}{3} = 60°$

180 -
108
072 - angulo e.

108 - ángulos pentagono.
90 ángulos cuadrado.
60 - triángulo - ángulos.
258 -

360 - total.
258 resultado ant.
102 -

102 +
72
174

Imagen 3.8: Hoja de procesos del estudiante E43 problemas 5 y 6.

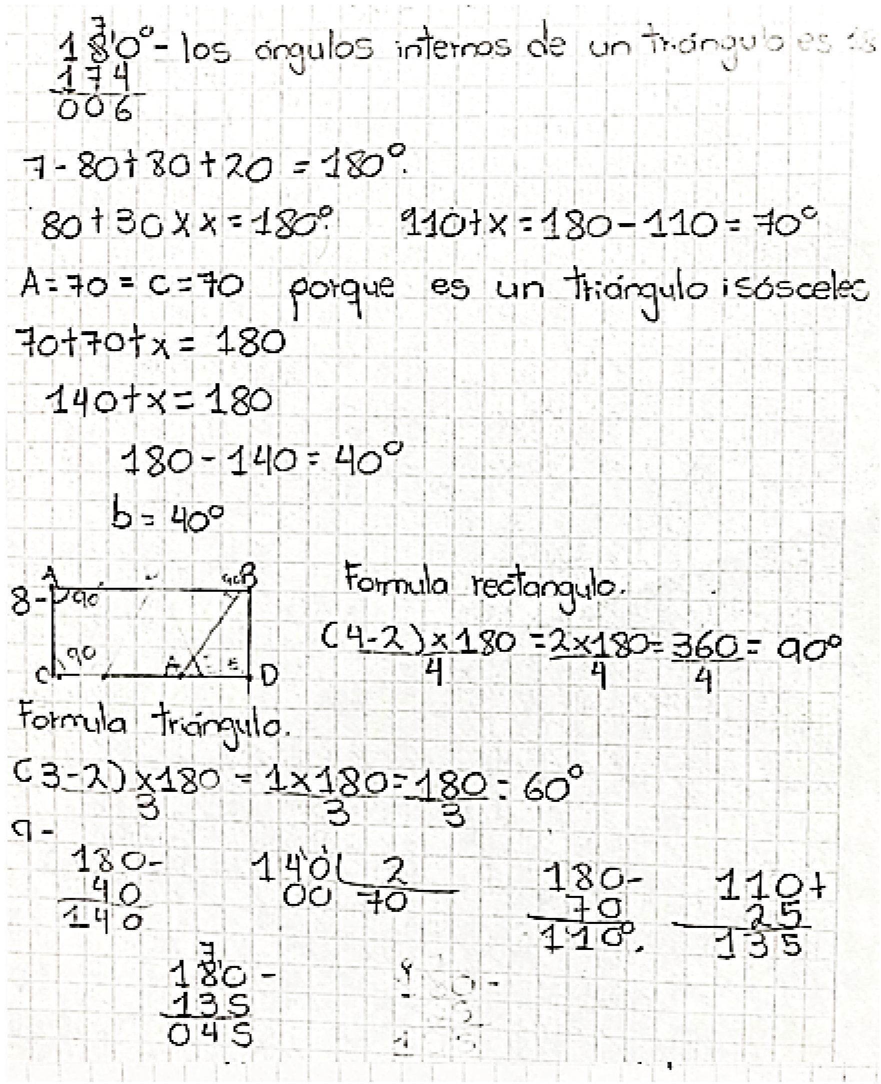

180°- los ángulos internos de un triángulo es
174
006
7- 80+80+20 = 180°.
80+30 x x = 180°   110+x = 180-110 = 70°
A=70 = C=70 porque es un triángulo isósceles
70+70+x = 180
140+x = 180
180-140 = 40°
b = 40°
8-
A B C D
Formula rectangulo.
(4-2)x180 / 4 = 2x180 / 4 = 360 / 4 = 90°
Formula triángulo.
(3-2)x180 / 3 = 1x180 / 3 = 180 / 3 = 60°
9-
180- 40 140
140 ÷ 2 = 70
180- 70 110.
110+ 25 135
180- 135 045

Imagen 3.9: Hoja de procesos del estudiante E43 problemas 7 y 8.

En esta prueba se pueden evidenciar procesos claros con descripciones de las operaciones que se están realizando y donde demuestra un dominio de lo trabajado en las diferentes sesiones de clase, aplica propiedades y logra determinar ángulos con precisión, adicionalmente elabora gráficos que permiten ilustrar la situación descrita en el problema.

Un último ejemplo corresponde al estudiante E15 (ver imágenes 3.10 y 3.11)

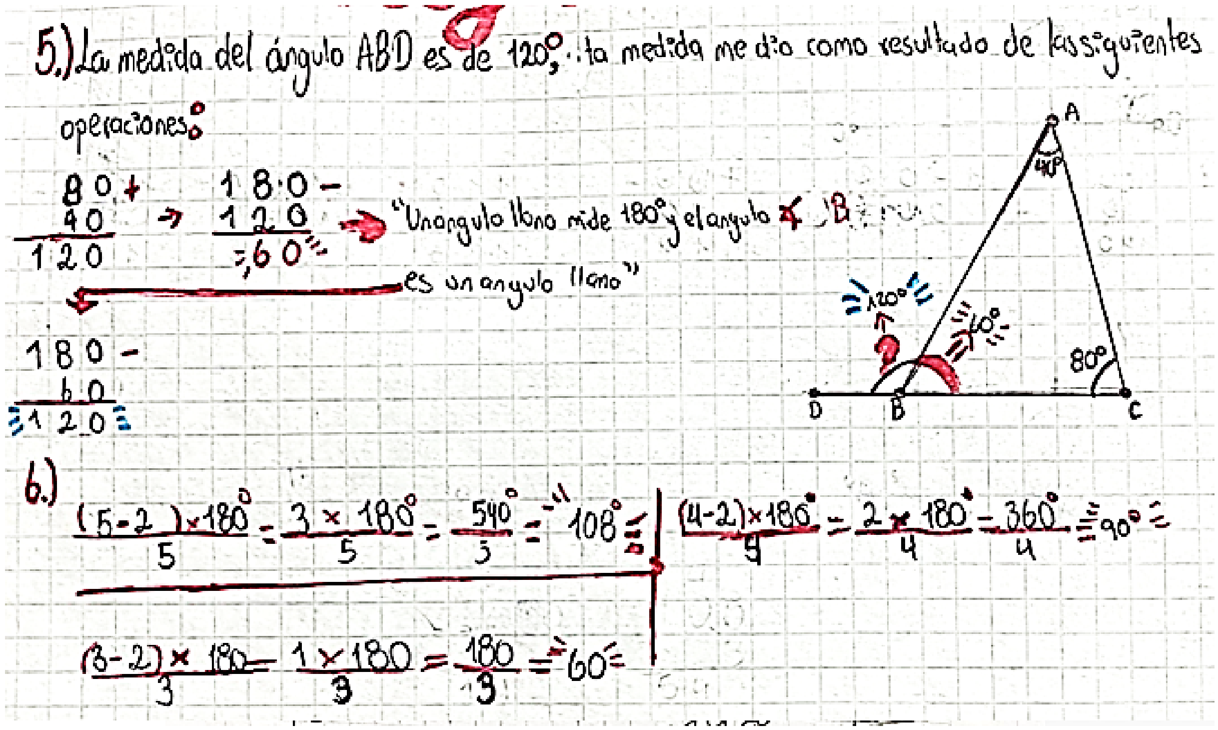


Imagen 3.10: Hoja de procesos del estudiante E15 problemas 5 y 6.

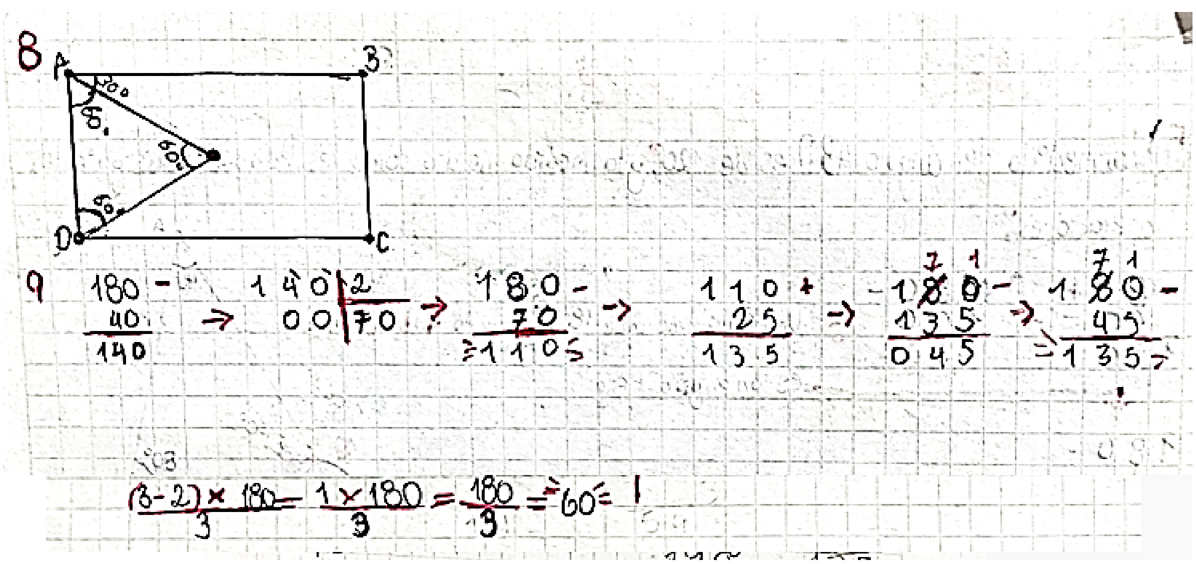


Imagen 3.11: Hoja de procesos del estudiante E15 problemas 8 y 9.

Para este caso se evidencian procesos claros que corresponden a los realizado en la secuencia, a diferencia de los otros dos las explicaciones y las justificaciones han disminuido, pero de igual manera el estudiante logra resolver los procesos. Cabe resaltar que al igual que sus compañeros realiza gráficas claras con las cuales puede guiarse y de esta manera llegar a una solución del problema planteado.

Por otro lado, respecto a la actitud de los estudiantes frente a la prueba se observó más interés y confianza en sus conocimientos, aunque algunos aun preguntaban sobre conceptos puntuales como ¿cuánto suma dos ángulos suplementarios? o cuando querían corroborar un dato ¿la suma de los ángulos internos en el triángulo es $180°$? Sin embargo, para no afectar los resultados de la investigación no se dio respuesta, sino por el contrario se los incentivo a tratar de recordar y conectar ideas. En cuanto al tiempo estipulado para la prueba, la mayoría de los estudiantes uso por completo el tiempo, a excepción de algunos que terminaron un poco antes.

Ahora se realiza un análisis más a detalle por pregunta de los resultados obtenidos en la prueba final.

Enunciado 1. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a:

a. $40°$

b. $90°$

c. $180°$

d. $360°$

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: identifica la clasificación de ángulos.

Respuesta correcta: c. $180°$.

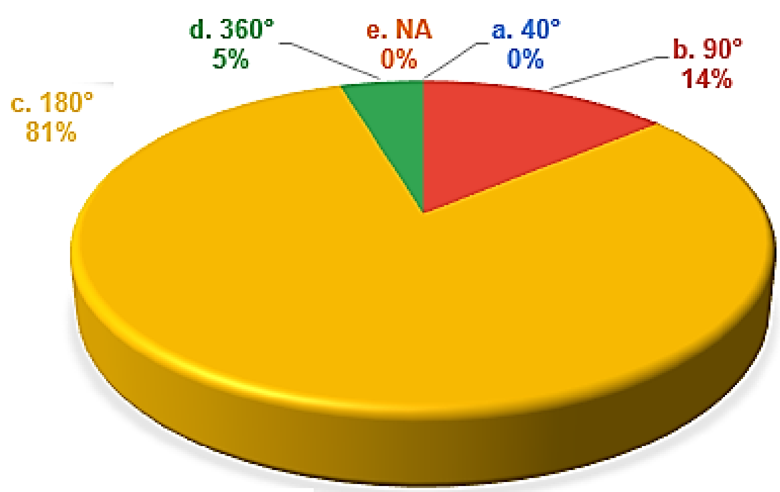


Figura 3.25: Resultados pregunta 1 prueba final.

Análisis: en la Figura 3.25 se puede observar que la mayoría de los estudiantes tiene claridad sobre la clasificación de ángulos según la suma de sus medidas, aunque algunos aún tienen tienen dificultad en identificar el concepto de ángulos suplementarios y lo confunden con el de complementarios.

Enunciado 2. La suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es:

a. Depende del cuadrilátero

b. $360°$

c. $360°/4$

d. $180°$

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: determina la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero.

Respuesta correcta: b. $360°$.

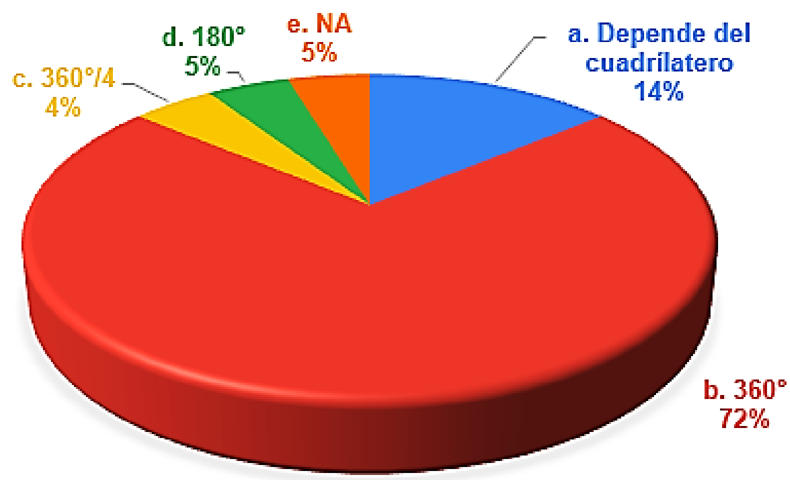


Figura 3.26: Resultados pregunta 2 prueba final.

Análisis: en esta pregunta se observa que el 72 % de los estudiantes (ver Figura 3.26) tiene claridad sobre la propiedad de la suma de los ángulos internos en un cuadrilátero, aunque llama la atención que un pequeño porcentaje aun considere que esto depende del cuadrilátero y no lograron generalizar esta propiedad.

Enunciado 3. Observa la Figura 3.27. Si la medida del ángulo EBD es $130°$, ¿cuál es la medida del ángulo CBA?

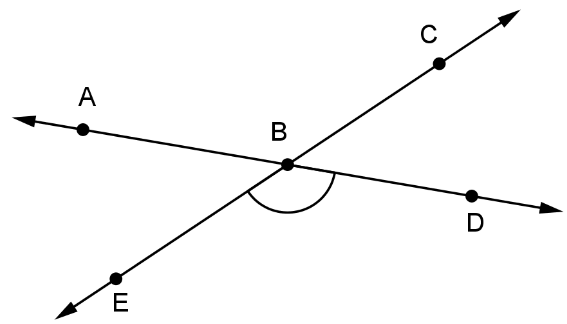


Figura 3.27: Gráfica pregunta 3 prueba final.

a. $50°$

b. $130°$

c. $180°$

d. $310°$

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: identifica la clasificación de ángulos.

Respuesta correcta: b. $130°$.

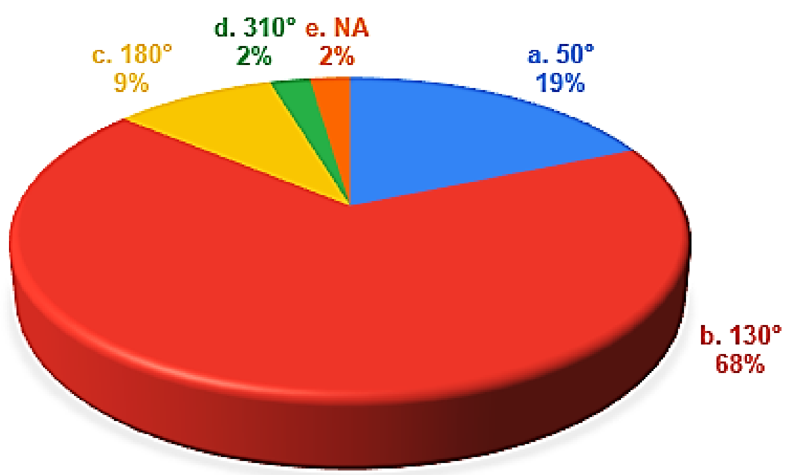


Figura 3.28: Resultados pregunta 3 prueba final.

Análisis: en esta pregunta se requiere de la comprensión del concepto de ángulos opuestos por el vértice y se observa que el 68 % de los estudiantes tiene claridad sobre el concepto, además extraen la información del gráfico que se presenta, sin embargo el 19 % de los estudiantes probablemente consideraron que eran suplementarios y por ello señalaron la opción a. $50°$ (ver Figura 3.28), mostrando que aun se deben reforzar la diferencia entre las clasificaciones de ángulos.

Enunciado 4. En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre $180°$ y $360°$ se conocen como:

a. Ángulos agudos

b. Ángulos convexos

c. Ángulos llanos

d. Ángulos cóncavos

e. Ninguna de las anteriores

Propósito: identifica la clasificación de ángulos.

Respuesta correcta: d. Ángulos cóncavos.

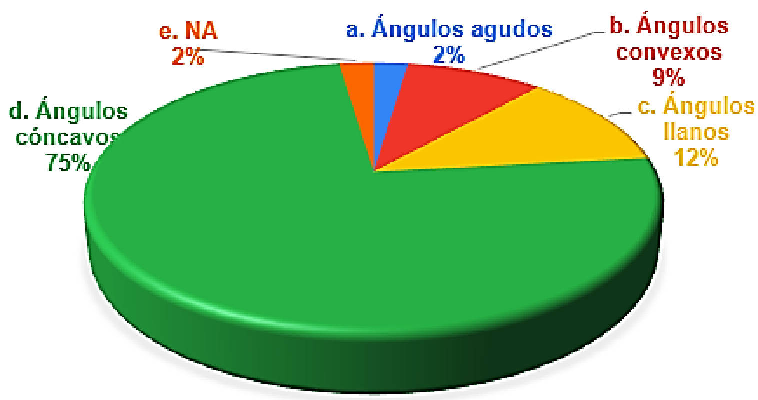


Figura 3.29: Resultados pregunta 4 prueba final.

Análisis: en la Figura 3.29 se puede evidenciar que el 75 % de los estudiantes han comprendido la clasificación de ángulos según su medida representando un porcentaje alto, sin embargo es necesario seguir reforzando en esta clasificación puesto que el 25 % aun los confunde.

En este primer grupo de preguntas teóricas se puede evidenciar que las Applets dinámicas de GeoGebra ayudaron a lograr un aprendizaje significativo, puesto que se evidencia que el 73,8 % de estudiantes lograron la comprensión de estos conceptos en las clasificaciones de ángulos y las diferencian. Además es importante resaltar que el porcentaje de estudiantes que no se arriesgo a señalar una respuesta, es decir, dejarla en blanco fue del 0 %, infiriendo así que se rompió un poco la barrera que había frente al temor a equivocarse.

Los siguientes puntos que se presentan corresponden a la sección de problemas: son preguntas de selección múltiple, en donde se hace necesario que los estudiantes comprendan los conceptos y los puedan aplicar; idear un plan y lograr resolver cada problema.

Enunciado 5. En la siguiente Figura 3.30, ¿cuál es la medida del ángulo ABD?

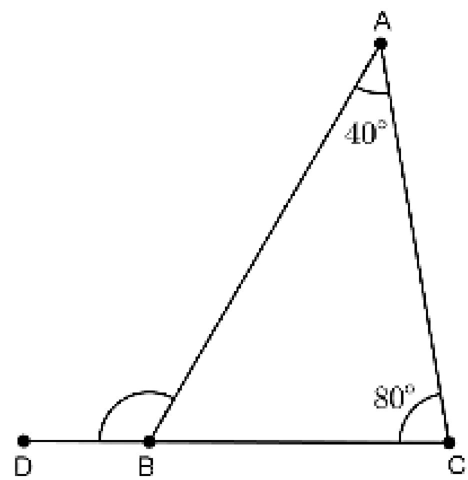


Figura 3.30: Gráfica de la problema 5 prueba final.

a. $60°$

b. $90°$

c. $120°$

d. $180°$

e. Ninguna de las anteriores

Fuente: tomado de Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico, tercera fase año 2015 - 2016.

Propósito: determina un ángulo interno en un triángulo y aplica la clasificación de ángulos.

Respuesta correcta: c. $120°$.

Análisis: para la solución de este problema se tiene que tener presente que la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es $180°$ y además que los ángulos suplementarios también suman $180°$. Se puede observar en el diagrama de barras (ver Figura 3.31) que repuesta correcta, es decir, la opción c. $120°$ fue la más seleccionada pues el 68 % de los estudiantes la eligieron, sin embargo el 23 % de ellos seleccionaron la opción a. $60°$ que era el primer paso para encontrar la medida del ángulo CBA, desarrollando el 50 % de la solución, incluso el 7 % de los estudiantes seleccionan que la medida del ángulo solicitado es $180°$, lo cual pudo suceder porque lo confundieron con los ángulos suplementarios.

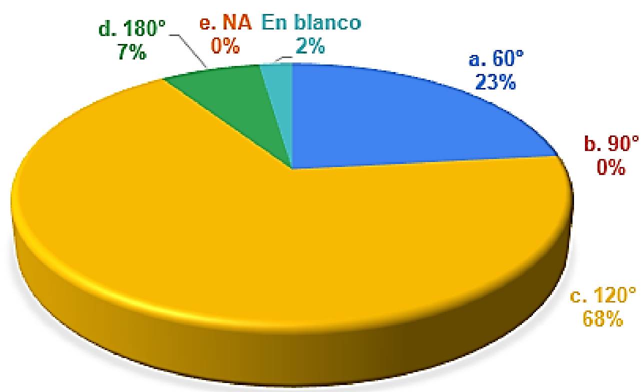


Figura 3.31: Resultados pregunta 5 prueba final.

Enunciado 6. En la Figura 3.32, $AEDCB$ es un pentágono regular, $DGFC$ es un cuadrado y DHG es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo EHD?

a. $102°$

b. $78°$

c. $39°$

d. $180°$

e. Ninguna de las anteriores

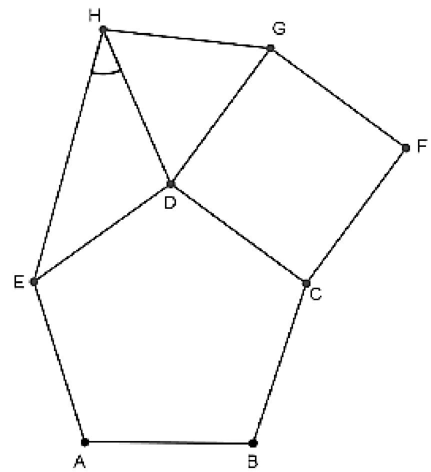


Figura 3.32: Gráfica pregunta 6 prueba final.

Fuente: modificado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño, nivel I, primera fase, año 2016.

Propósito: identifica la clasificación de ángulos y ángulos en polígonos regulares.

Respuesta correcta: c. $39°$.

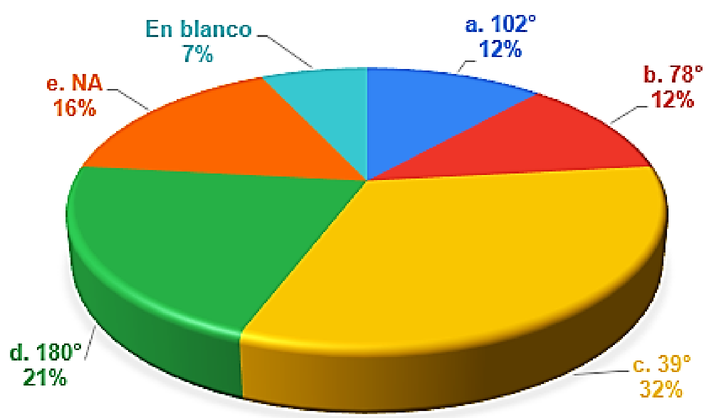


Figura 3.33: Resultados pregunta 6 prueba final.

Análisis: para el desarrollo de este problema era necesario recordar que en los polígonos regulares los ángulos internos tienen la misma medida, que el ángulo de giro mide $360°$ y que los ángulos de la base de un triángulo isósceles tiene la misma medida. Se puede notar que al aumentar la dificultad del problema el porcentaje de estudiantes que desarrollan correctamente el problema bajó, ya que solo el 32 % seleccionó la respuesta correcta (ver Figura 3.33), por otro lado se puede observar que el 12 % seleccionó la opción b, que corresponde a la suma de la medida de los dos ángulos de la base del triángulo isósceles y que al dividirse entre 2 se obtenía la respuesta correcta que era $39°$, aquí se observa un manejo de las propiedades de ángulos, sin embargo es necesario profundizar más para que logren identificar en una situación problema cuales de los conceptos que ha aprendido puede utilizar.

Enunciado 7. En la siguiente Figura 3.34 el triángulo ACB es isósceles, con los segmentos AB y BC de igual medida, ¿cuál es la medida del ángulo DBC?

a. $40°$

b. $60°$

c. $87°$

d. $70°$

e. Ninguna de las anteriores

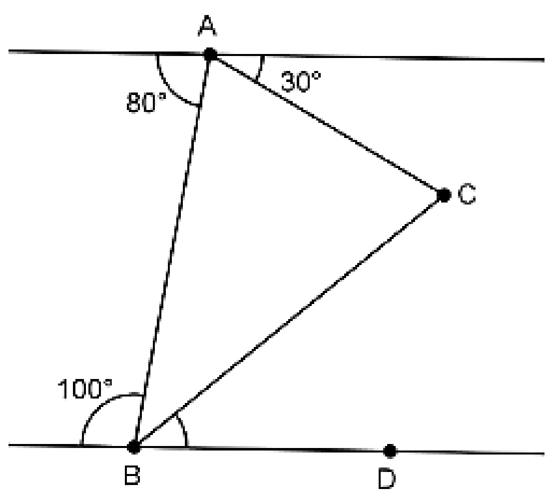


Figura 3.34: Gráfica del problema 7 prueba final.

Fuente: modificado de Olimpiadas de Chile, guías de entrenamiento, año 2015.

Propósito: identifica la clasificación de ángulos y determina ángulos en un triángulo.

Respuesta correcta: a. $40°$.

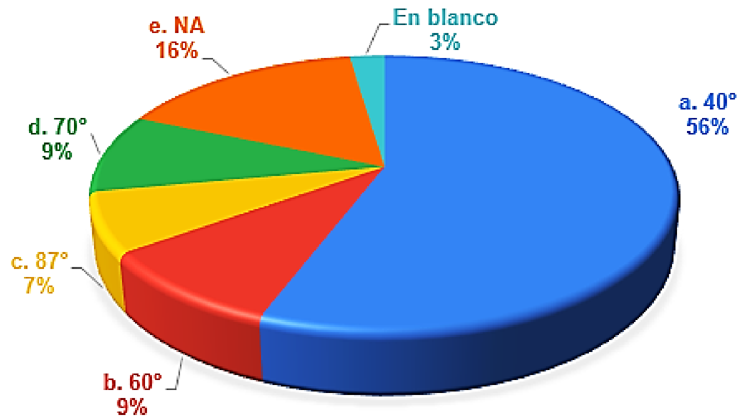


Figura 3.35: Resultados del pregunta 7 prueba final.

Análisis: en este problema para que el estudiante lograra llegar a una posible solución tenia que manejar el concepto de ángulo llano, las propiedades de un triángulo isósceles y la suma de los ángulos internos de un triángulo. Se puede notar que el 55,8 % de los estudiantes (ver Figura 3.35), lograron resolver el problema aplicando el concepto y las propiedades de ángulos, sin embargo el 9 % de estudiantes se quedaron en el primer paso que era encontrar la medida del ángulo $BAC = 70°$, esto puede suceder porque aveces los estudiantes se aceleran por terminar y no intentan leer y profundizar más en la comprensión del problema, y como en las opciones de respuesta estaba esta opción se quedan con esa y no realizan la mirada retrospectiva para verificar que realmente se dio solución al problema propuesto.

Enunciado 8. $ABCD$ es un rectángulo de lados AB, BC, CD y DA. El triángulo equilátero DAE, está dentro del rectángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo EAB?

a. $90°$

b. $60°$

c. $30°$

d. $10°$

e. Ninguna de las anteriores

Fuente: modificado de Olimpiadas matemáticas de Puerto Rico, tercera fase, año 2019-2020.

Propósito: identifica ángulos en polígonos.

Respuesta correcta: c. $30°$.

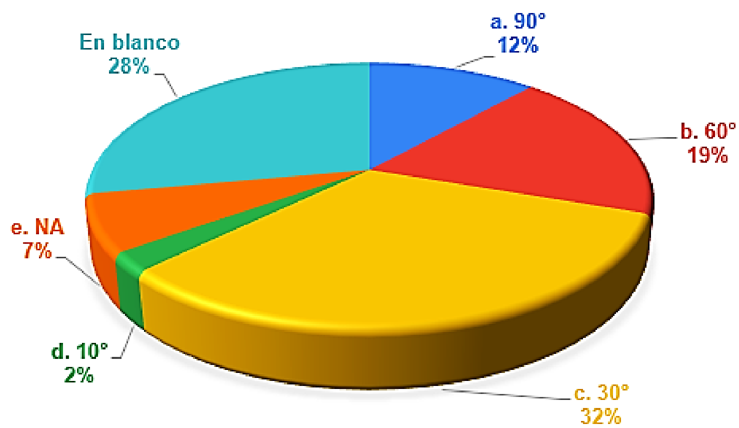


Figura 3.36: Resultados pregunta 8 prueba final.

Análisis: en este problema no se agrego una gráfica como ayuda visual, puesto que se busca que los estudiantes también sean capaces de realizar el bosquejo de las condiciones dadas, pues es una de las heurísticas más usadas en la resolución de problemas. Para tener una posible idea de solución era necesario conocer que los ángulos internos de un rectángulo son rectos y que en un triángulo equilátero la medida de cada uno de sus ángulos internos es de $60°$, hay que resaltar que si no se atendía a la aclaración de que el triángulo estaba en el interior del rectángulo se encontraría la medida de un ángulo diferente, al solicitado. El 32 % de los estudiantes (ver Figura 3.36), lograron responder de forma correcta, y es interesante notar que los que seleccionaron la opción a y b, lograron identificar parte de una posible solución. Además es importante resaltar que cuando un problema no cuenta con una ayuda visual y no se ha desarrollado esta habilidad de visualizar objetos geométricos es difícil hacer el bosquejo de una situación problema, probablemente por ello el 28 % de los estudiantes prefirieron dejar en blanco.

Con el anterior problema se termina el grupo de problemas con preguntas de selección múltiple, en los cuales se observó un porcentaje de respuestas correctas promedio, aunque se observa que hay dificultades aun en la comprensión del concepto y las propiedades de ángulos y el saber cómo usarlos para resolver el problema. A continuación se presentan dos problemas con los que se termina la prueba, en los cuales se han planteado preguntas abiertas.

Enunciado 9. En el triángulo ACB, los segmentos AB y AD tienen la misma medida (ver Figura 3.37) . ¿Cuál es la medida del ángulo CEA?

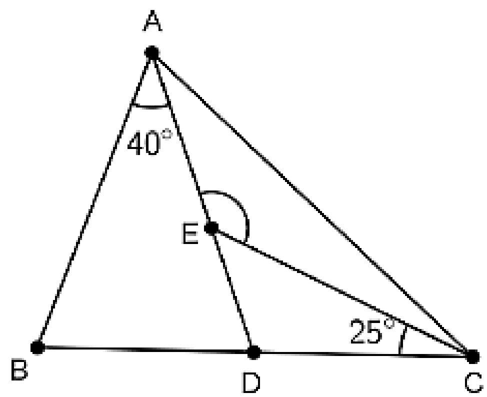


Figura 3.37: Gráfica del problema 9 prueba final.

Fuente: tomado de Olimpiada matemática Argentina, intercolegial, año 2020.

Propósito: determina ángulos en triángulos y aplica la clasificación.

Respuesta correcta: $135°$.

Análisis: una posible solución a este problema es usando ángulos suplementarios, la suma de los ángulos internos del triángulo y la propiedad de un triángulo isósceles respecto a los ángulos de su base. Para este problema se presenta un diagrama, puesto que permite observar la diferencia en las opciones, en este problema como no se dan opciones de respuesta y se obtuvieron variedad en ellas, se organizaron en respuestas correctas, incorrecta y en blanco, donde la mayoría de ellas llegaban hasta una parte de la solución, sin embargo, 10 de los estudiantes si lograron culminar su proceso de solución de manera correcta (ver Figura 3.38).

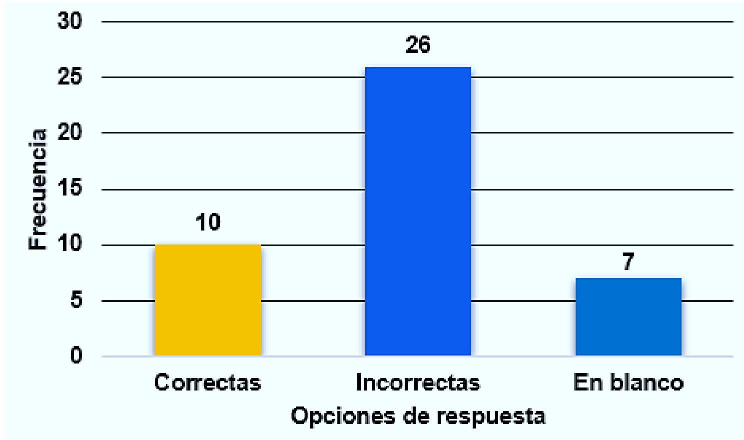


Figura 3.38: Resultados pregunta 9 prueba final.

Enunciado 10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero de lados AB, BC, CD y DA. Se sabe que el ángulo ABD mide $10°$, el ángulo DBC mide $50°$, el ángulo BCA mide $60°$ y el ángulo ACD mide $20°$. ¿Cuál es la medida de los ángulos CAB y CDB?

Fuente: modificado de Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, año 2012.

Propósito: determina ángulos en polígonos.

Respuesta correcta: $CAB = 60°$ y $CDB = 50°$.

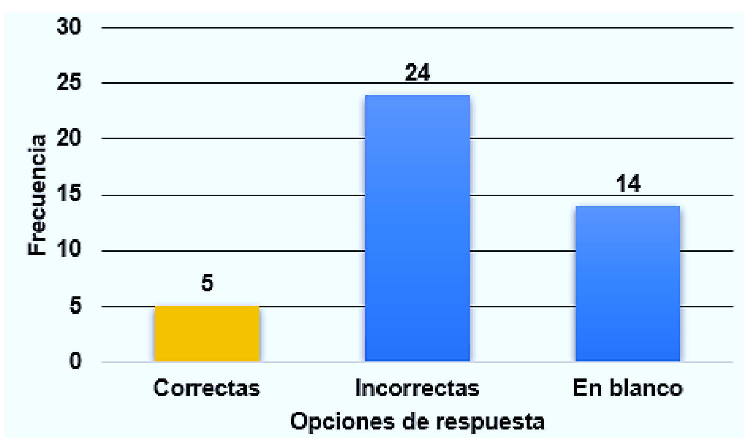


Figura 3.39: Resultados pregunta 10 prueba final.

Análisis: este problema podría considerarse con una complejidad mayor debido a que es un problema con pregunta abierta y además no cuenta con una gráfica que ayude a comprender las condiciones del problema, además los estudiantes deben tener en cuenta a la hora de hacer un dibujo de como se asignaron los vértices ya que, de no ubicarlos en ese orden, se encontraría un ángulo equivocado. En el diagrama de barras (ver Figura 3.39) se puede observar que 5 estudiantes si lograron resolver el problema, y se resalta que 24 de ellos se arriesgaron a intentarlo aunque la respuesta no fue correcta, demostrando que hay más confianza y apropiación en la aplicación del concepto y propiedades de ángulos.

Estos dos últimos problemas con preguntas abiertas, representaron un reto mayor, debido a que con las posibles respuestas los estudiantes pueden tener una idea de hacia donde deber ir o incluso se suele tener la oportunidad de descartar opciones que definitivamente salen de las condiciones del problema planteado, además se evidenció que genera en los estudiantes un poco de temor equivocarse al escribir una repuesta, sin embargo muchos a diferencia de la prueba diagnóstica esta vez lo intentaron y no dejaron la respuesta en blanco, es por ello que se necesita seguir trabajando en la confianza por parte de los estudiantes es sus conocimientos y la aplicación de los mismos en el campo de la resolución de problemas.

Finalmente, se resalta que en la prueba final se nota un avance en la comprensión de los ángulos y su aplicación, aunque es importante profundizar más en la parte de resolución de problemas; para tener mayor claridad sobre lo que se logró mejorar con la aplicación de la secuencia didáctica, se realiza en el siguiente capítulo un contraste entre las dos pruebas y con ello un análisis más profundo de los resultados obtenidos en la investigación.

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se va a realizar un análisis general de la prueba diagnóstica, la secuencia y la prueba final, así como un análisis del comparativo sobre los resultados de la prueba diagnóstica y final, entorno al análisis entre grupo de preguntas, entre preguntas equivalentes y al promedio del grupo en general, para evaluar el avance que lograron tener los estudiantes de grado sexto en el aprendizaje del concepto y propiedades de ángulos y su aplicación.

4.1. Análisis general de la prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica fue una herramienta que guió el diseño de la secuencia didáctica, en la Tabla 4.1 se puede observar un resumen de 8 de las preguntas que eran de selección múltiple, además se ha marcado con color amarillo la casilla que corresponde a la cantidad de respuestas correctas.

Opciones de repuesta	Preguntas teóricas				Problemas con preguntas se de selección múltiple			
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	4	18	14	22	3	2	10	4
b	3	6	9	2	7	2	5	9
c	25	6	14	0	15	0	10	7
d	4	6	2	17	10	36	4	10
e	5	5	3	0	6	2	4	5
En blanco	2	2	1	2	2	1	10	8

Tabla 4.1: Resumen de las respuestas de la prueba diagnóstica 1 a 8.

En este caso es posible evidenciar que los resultados no son muy favorables, si se considera que este tema hace parte tanto de los estándares como de los DBA de grados anteriores, es por ello que la secuencia se elaboró reforzando conceptos anteriores y ampliando los correspondientes al grado, por ello se abordó inicialmente la definición y clasificación de ángulos, luego la definición y clasificación de polígonos enfatizando en las propiedades de polígonos relacionadas con ángulos, para concluir en la aplicación del concepto y las propiedades de ángulos en la resolución de problemas.

Por otro lado, se presenta la Tabla 4.2 donde se resume la información de las preguntas 9 y 10 que corresponden a los problemas de pregunta abierta, las cuales se agruparon en correctas, incorrecta y en blanco, donde se observó mayor dificultad posiblemente porque los estudiantes tiene miedo a equivocarse y el tener que escribir una respuesta genera mayor incertidumbre, además algunos estudiantes decidieron escribir que se habían olvidado o no sabían sobre el tema, por ello es necesario continuar fortaleciendo habilidades en los estudiantes, para que tengan más confianza y comprendan que más allá de siempre obtener una respuesta correcta, es importante el proceso y también aprender de los errores que se puedan cometer en el camino.

Respuestas	Problemas con preguntas abiertas	
	9	10
Correctas	0	2
Incorrectas	7	15
En blanco	36	26

Tabla 4.2: Resumen de las respuestas prueba diagnóstica 9 y 10.

Finalmente, con la prueba diagnóstica se pudo evidenciar las dificultades de los estudiantes sobre el concepto y propiedades de ángulos y su aplicación, lo cual sirvió de guía en el desarrollo de la secuencia y los avances obtenidos por los estudiantes.

4.2. Análisis general de los resultados de la secuencia

En la prueba diagnóstica además de las preguntas referentes a lo aprendido a lo largo de la secuencia y de la resolución de problemas se incluyeron algunas preguntas donde se buscaba tener la opinión de los estudiantes hacia la geometría y lo realizado a lo largo de la investigación.

De los 43 estudiantes 17 afirman que después de realizar las actividades les gusta mucho la geometría, 22 afirman que les gusta poco y 4 nada, si bien el número de estudiantes que les gusta mucho la geometría aumentó, no es una respuesta significativa y esto se puede presentar por muchos factores, por ejemplo, la predisposición que se tenía antes de iniciar la investigación, realizar las actividades cuando habían pasado algunos días o tenían otras concepciones frente a la geometría por lo cual no demuestran el suficiente interés por su aprendizaje.

También se cuestionó si ellos consideran que la secuencia les ayudó a mejorar sus conocimientos de ángulos, a lo cual se obtuvo una respuesta afirmativa, pues 33 dicen que les ayudó mucho, 10 mencionan que poco, pero ninguno manifiesta que las actividades no le ayudaron a progresar en su aprendizaje.

En cuanto a la secuencia 41 estudiantes afirman que la organización tenía un ambiente dinámico e intuitivo y por ello se logró la comprensión del concepto, propiedades y aplicación de ángulos, adicionalmente 42 consideran que las construcciones de la secuencia fueron útiles y con ellas se logró llegar al conocimiento esperado, también 39 estudiantes consideran que el ambiente de geometría dinámica fue útil en la comprensión y solución de problemas, en cuanto a la parte teórica 33 afirman que fue clara y suficiente para resolver problemas. Por otro lado, 39 estudiantes consideran recomendar GeoGebra a otras personas para emplearlo en la solución de los problemas, lo cual resulta satisfactorio pues los estudiantes lograron percibir las bondades del programa tanto en la parte teórica de las matemáticas como en la aplicación en la resolución de problemas.

Por último, se destaca el hecho de que 35 estudiantes consideran importante aprender geometría para su vida diaria, entre las razones mencionan que su entorno se forma de objetos geométricos y por tanto es importante para comprender el mundo que los rodea; la importancia en su plan de vida a futuro pues consideran que la mayoría de carreras aplican estos conocimientos y también visualizan la aplicación de la geometría en un ambiente laboral haciendo mayor énfasis en carreras como ingeniería y arquitectura.

4.3. Análisis general de la prueba final

La prueba final fue una herramienta que permitió realizar un análisis sobre los avances que se lograron con la implementación de la secuencia sobre el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, en la Tabla 4.1 se presenta un resumen de las respuestas de las primeras 8 preguntas resaltando con amarillo la casilla que corresponde a la cantidad de respuestas correctas.

En la tabla se observa que la cantidad de respuestas correctas en la mayoría de las pre-

Opciones de repuesta	Preguntas teóricas				Problemas con preguntas se de selección múltiple			
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0	6	8	1	10	5	24	5
b	6	31	29	4	0	5	4	8
c	35	2	4	5	29	14	3	14
d	2	2	1	32	3	9	4	1
e	0	2	1	1	0	7	7	3
En blanco	0	0	0	0	1	3	1	12

Tabla 4.3: Resumen de las respuestas de la prueba final 1 a 8.

guntas paso el 50 %, infiriendo de esta manera que se logro que los estudiantes tengan mayor comprensión de los conceptos de ángulo estudiados, sobre todo en la parte teórica sobre su clasificación. También es importante resaltar que la cantidad de respuestas en blanco disminuyó considerablemente, lo cual se puede presentar porque lograron adquirir confianza en sus conocimientos y capacidades dejando de lado el temor a equivocarse.

Por otro lado, los resultados de los problemas 9 y 10, se presentan en la Tabla 4.4, en esta el porcentaje de la cantidad de estudiantes que responden correctamente no aumentó de manera significativa, sin embargo al revisar los procesos fue posible evidenciar que la mayoría de estudiantes lograron avanzar en la solución a diferencia de la prueba diagnóstica en la cual no se observó ningún progreso.

Respuestas	Problemas con preguntas abiertas	
	9	10
Correctas	10	5
Incorrectas	26	24
En blanco	7	14

Tabla 4.4: Resumen de las respuestas prueba final 9 y 10.

Es importante resaltar que la prueba final fue el instrumento que permitió determinar los avances obtenidos con la aplicación de la secuencia didáctica, donde se muestra que los estudiantes lograron aprehender el concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, pero es necesario fortalecer más las habilidades en la resolución de problemas.

4.4. Análisis comparativo entre la prueba diagnóstica y final

Para iniciar se va a presentar el comparativo entre grupos de preguntas que se estructuraron tanto en la prueba diagnóstica como final: preguntas teóricas, problemas con preguntas de selección múltiple y problemas con preguntas abiertas.

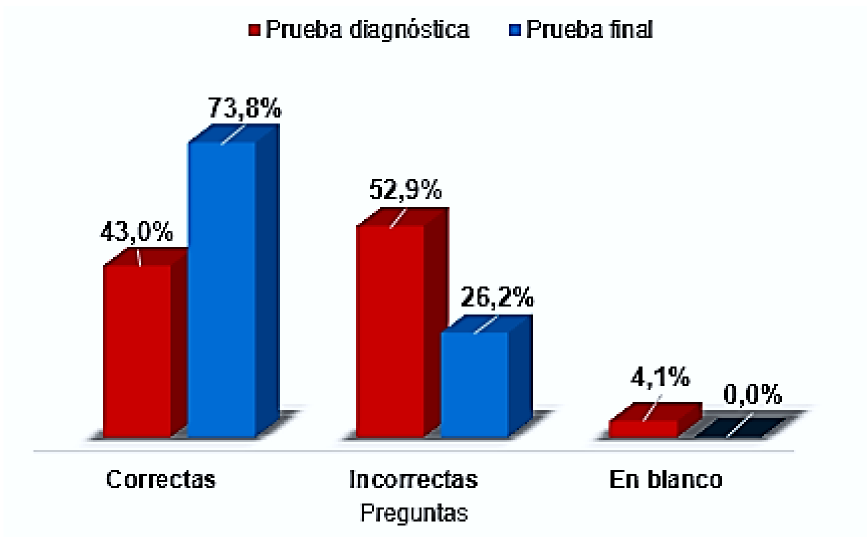


Figura 4.1: Comparativo de preguntas teóricas.

En las preguntas teóricas (ver Figura 4.1) se observa como la barra de respuestas correctas aumento un 30,8 %, lo que influyó en bajar la cantidad de respuestas incorrectas aproximadamente a la mitad, llevando a concluir que la secuencia didáctica con todas las actividades dinámicas que se hicieron ayudaron a lograr una mayor apropiación del concepto y las propiedades de ángulos, incluso se debe resaltar que a diferencia de la prueba diagnóstica en la prueba final nadie dejo las preguntas sin respuesta.

En las problemas con preguntas de selección múltiple con única respuesta (ver Figura 4.2) se puede observar que la cantidad de repuestas correctas aumento un 7.6 %, disminuyendo así el de las preguntas incorrectas y en blanco, aquí se debe tener en cuenta que el proceso de aplicar el concepto y las propiedades de ángulos en la resolución de problemas exige de un nivel alto de comprensión y abstracción de parte de los estudiantes, ya que puede suceder que un estudiante memorice muy bien los conceptos de ángulos pero no identifique en que momento puede usarlos.

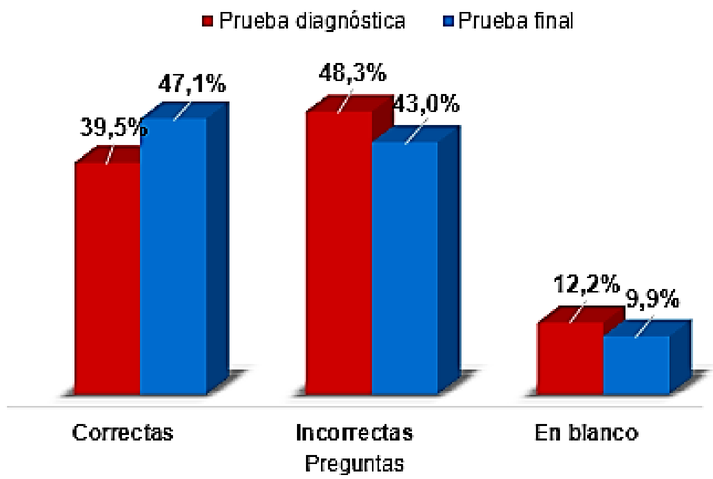


Figura 4.2: Comparativo de problemas con preguntas de selección múltiple.

En los problemas con preguntas abiertas (ver Figura 4.3) se puede notar un cambio drástico frente a los dos gráficos anteriores debido a que en la prueba diagnóstica solamente el 2,3 % lograron resolver el problema y con la aplicación de la secuencia didáctica se logro mejorar en un 15,1 % los resultados en este tipo de problemas, de donde se puede inferir que los problemas que exigen al estudiante escribir una repuesta o señalar un proceso son de mayor complejidad, pues en algunas ocasiones las opciones de respuesta son una ayuda para orientar la solución de hacia donde se debe llegar, incluso algunos pueden usar el descarte de opciones como una estrategia. Además, se puede observar en el diagrama que el porcentaje de respuestas incorrectas aumenta, pero el de respuestas en blanco disminuye en un 47.7 %, siendo esto un avance significativo puesto que los estudiantes intentaron al menos comprender y resolver el problema y aunque no hayan encontrado un camino correcto, se evidencia un proceso que en la mirada retrospectiva de Pólya aporta para que los estudiantes en un próximo intento tengan más elementos para enfrentarse a problemas similares.

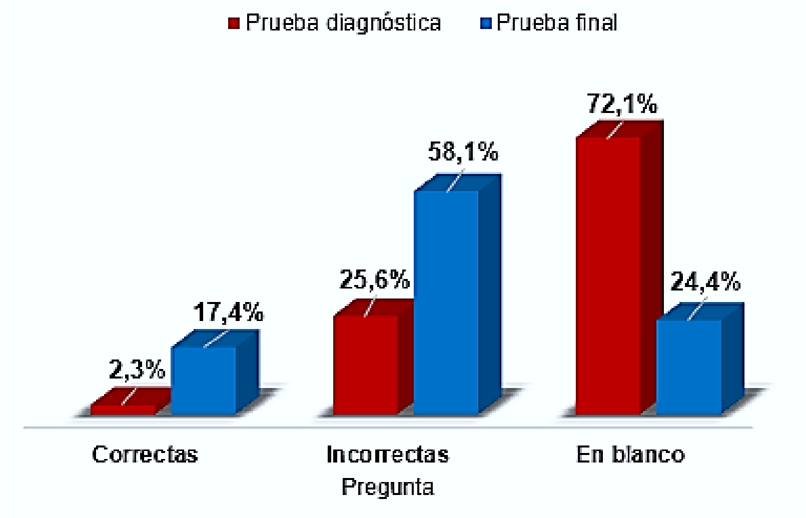


Figura 4.3: Comparativo de problemas con preguntas abiertas.

A continuación, se presenta un diagrama de barras (ver Figura 4.4) con el comparativo total de los grupos de preguntas.

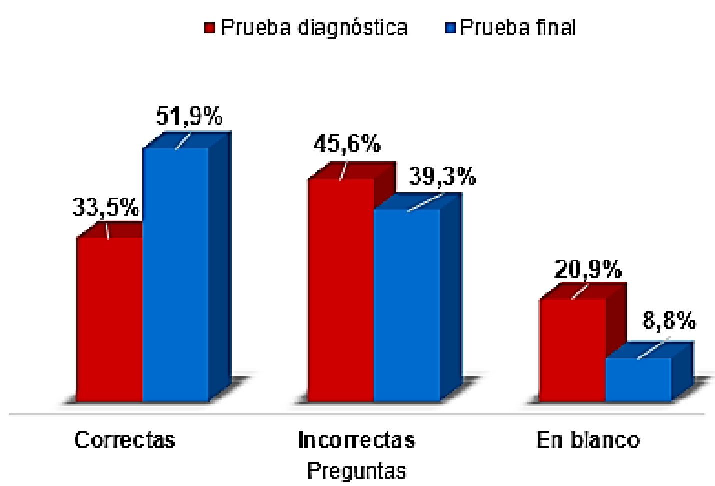


Figura 4.4: Comparativo entre prueba diagnóstica y final.

Se observa que los resultados de la prueba final en comparación con la prueba diagnóstica mejoraron en un 18,4 %, de donde se puede concluir que la secuencia didáctica con la interacción de objetos geométricos en GeoGebra fue útil para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de grado sexto sobre el concepto y propiedades de ángulos y su aplicación, también cabe señalar que las respuestas en blanco disminuyeron en 12.1 %, mostrando mayor confianza y apropiación de conceptos por parte de los estudiantes.

Luego, se presenta el comparativo por preguntas equivalentes (ver Figura 4.5), donde se puede observar una mejora significativa en la mayoría de ellas, sobre todo en la parte inicial donde las preguntas incluidas eran teóricas, sin embargo en las correspondientes a problemas se debe tener en cuenta que el proceso de resolución de problemas requiere tiempo y práctica, por ello la importancia de trabajar en clase con actividades de este tipo para seguir impulsando a los estudiantes en la correcta aplicación de los conocimientos que adquieren.

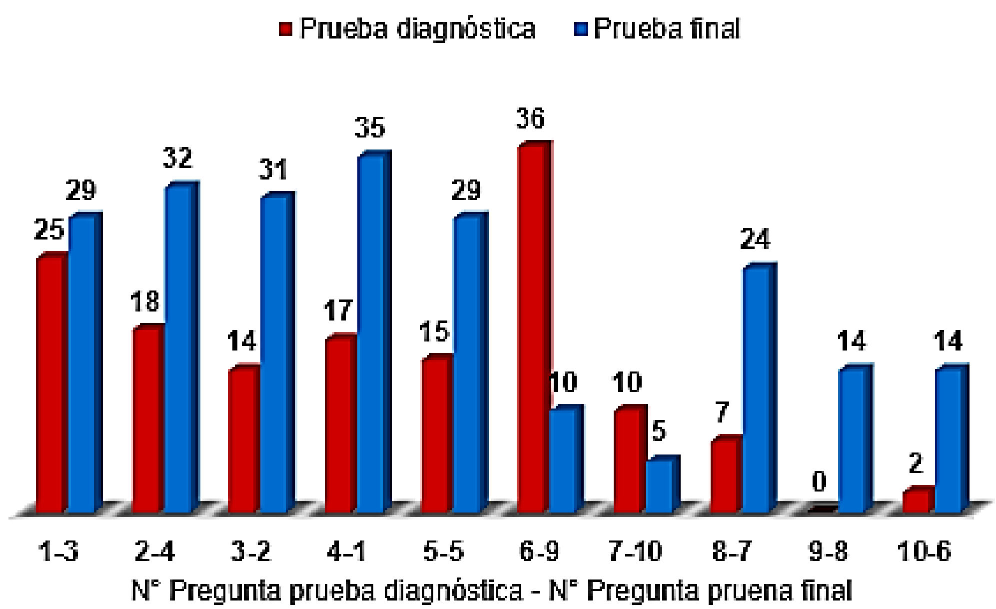


Figura 4.5: Comparativo de respuestas correctas entre preguntas equivalente.

Finalmente, se presenta el promedio de respuestas correctas obtenido de la prueba diagnóstica y final, para ello el rango de valores que se tuvo en cuenta fue de 0 a 10 puntos, ya que por cada respuesta correcta se asigno un punto y por las incorrectas o las que se dejaron en blanco 0 puntos. En la Figura 4.6 se puede observar que hay un incremento de 1.84 puntos correspondiente al $18{,}4\,\%$, el cual es positivo, ya que muestra un avance en el aprendizaje del concepto y propiedades de ángulos y su aplicación, sin embargo, se debe considerar que este resultado pudo haber sido más alto si la secuencia se hubiese logrado aplicar de forma más secuencial.

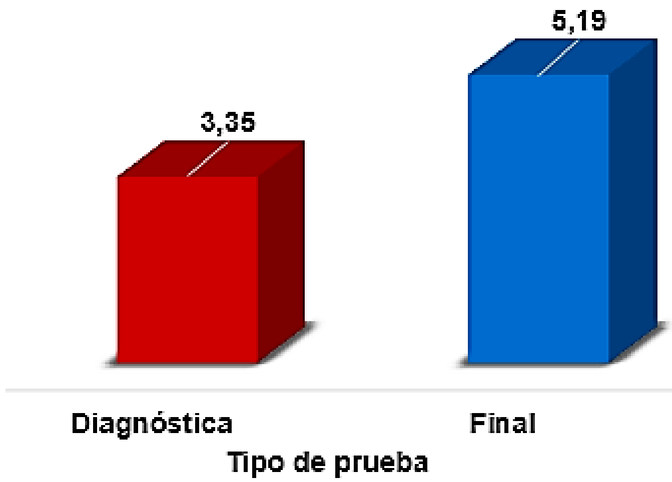


Figura 4.6: Comparativo del promedio entre la prueba diagnóstica y final.

Es así como de manera general se evidencia un avance en los estudiantes después de la aplicación de la secuencia tanto en la parte de conceptos de ángulos como en la aplicación de los mismo, además se observó que la resolución de problemas es un proceso más complejo para ellos, por lo cual se debe continuar fortaleciendo en la enseñanza y aprendizaje de la geometría como de otras ramas de las matemáticas donde estos también se pueden aplicar, por otro lado el uso del AGD GeoGebra brindó un entorno innovador y diferente al de una clase tradicional donde los estudiantes son receptores pasivos del conocimiento, pues este entorno les permitió manipular los objetos geométricos en tiempo real e interactuar con ellos observando invariantes y características, incluso algunos estudiantes tuvieron la curiosidad de explorar otras herramientas a las propuestas para ángulos, lo que les permite ampliar sus conocimientos y encontrar relaciones entre los diferentes objetos geométricos. También se quiere resaltar el avance que se observó en cuanto a la redacción, organización y presentación de la solución de los problemas por parte de algunos estudiantes, cabe mencionar que estas habilidades podrán ser de utilidad en la comprensión de las pruebas que en un futuro los estudiantes deben presentar.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados de la investigación se presentan algunas conclusiones entorno al cumplimiento de las hipótesis y aspectos relevantes en la investigación.

En la investigación se plantearon dos hipótesis, en relación con la primera se concluye que tanto la resolución de problemas como el uso del AGD GeoGebra potenció el proceso de enseñanza del concepto y propiedades de ángulos, pues se puede evidenciar un avance significativo en la comparación de la prueba diagnóstica y final, además en el registro de observaciones se notó el interés de los estudiantes por manipular las construcciones de GeoGebra y el querer explorar las herramientas con las que cuenta el AGD logrando que los estudiantes recomienden este sofware dinámico, sin embargo se debe señalar que se presentaron algunas dificultades en la comprensión de los problemas y la aplicación de los conocimientos adquiridos para resolverlos.

En cuanto a la segunda hipótesis la secuencia didáctica ayudó a fortalecer la comprensión del concepto, propiedades y algunas aplicaciones de ángulos, pues las applets dinámicas de GeoGebra permitieron a los estudiantes explorar su interfaz a través del arrastre de los objetos geométricos, con ello lograban observar las invariantes en las construcciones y así determinar algunas propiedades que los guiaron hacia los conocimientos esperados, siendo activos en la construcción de sus saberes y dejando de lado la aprobación constante del docente.

Por otro lado, la secuencia de enseñanza diseñada con la teoría de las situaciones didácticas, la resolución de problemas y el uso de GeoGebra permite llevar la geometría al aula de clase de forma creativa captando la atención de los estudiantes, pues en la actualidad las herramientas digitales son muy usadas desde temprana edad, además la implementación de la secuencia permitió desarrollar habilidades y destrezas tanto matemáticas como de computación las cuales son de utilidad en el contexto académico y social.

También se destaca que el AGD GeoGebra es una herramienta que ofrece múltiples opciones que son de utilidad para los docentes con las cuales se puede enfrentar los cambios en el proceso educativo, además es un entorno que se puede usar de manera intuitiva. Es así como la enseñanza de la geometría y en particular del concepto y las propiedades de ángulos con un AGD como GeoGebra permite mejorar en los estudiantes la visualización y comprensión de las relaciones entre elementos geométricos, sin embargo, se considera que algunos aspectos como la demostración y la justificación de procesos, se deben mantener ya que fomentan la rigurosidad de la disciplina y fortalecen la capacidad argumentativa.

En cuanto a la comparación de la prueba diagnóstica y final se muestra que hay una mejora en los estudiantes, es decir con la estrategia didáctica implementada se logró una mayor apropiación de los concepto de ángulos, su clasificación y ángulos en polígonos, sin embargo como en la resolución de problemas se evidenciaron algunas dificultades es necesario que se trabaje este proceso establecido desde los lineamientos curriculares a lo largo de la formación de los estudiantes, puesto que en un principio se piensa que es muy complejo, sin embargo en la experimentación de este trabajo se pudo observar que los estudiantes son capaces de enfrentarse a ellos y a medida que se avanza toman más confianza y se arriesgan a resolverlos aun con el riesgo de equivocarse.

En las preguntas abiertas se evidencian más inseguridades en los estudiantes, puesto que cuando realizan procesos no confían en lo realizado, mientras que cuando su respuesta se encuentra entre las opciones corroboran que su proceso es correcto, incluso en muchas ocasiones algunas de las opciones de respuesta se pueden descartar o por el contrario guían al estudiante hacia donde debe llegar.

Finalmente, se resalta que para los estudiantes es más sencillo mecanizar procesos a través de algoritmos, pues generalmente estos no representan un nivel alto de comprensión e interpretación de la información, como por ejemplo cuando se aprende a dividir se mecanizan los pasos y se memorizan las tablas de multiplicar, pero cuando se ubica una división en un contexto donde se deben comprender los datos que se dan se genera un bloqueo en los estudiantes puesto que no es simplemente seguir una secuencia de pasos de manera mecánica, sino que por el contrario se debe entender cuáles son los números a dividir y que significa el resultados que se va a obtener para dar una respuesta correcta, en esta investigación esto se logro observar en el grupo de preguntas teóricas puesto que tuvieron un incremento alto, sin embargo aunque en los problemas se evidenció una mejoría no fue igual a la parte teórica dado que es necesario que haya mayor comprensión, argumentación y aplicación conjunta de conocimientos por lo cual tiende a ser más complicado, es por ello que en la resolución de problemas se necesita de un proceso consciente y reflexivo que se puede apoyar en los pasos y las estrategias que los autores de este campo proponen.

RECOMENDACIONES

A partir del desarrollo de esta investigación, se proponen las siguientes recomendaciones que pueden contribuir y aportar a un espacio de reflexión en el proceso investigativo de otros estudios, así como recomendaciones para implementar la propuesta didáctica que aquí se presenta.

Se recomienda indagar sobre el nivel académico del grupo de estudiantes que se seleccione en la investigación así como su contexto escolar, dado que es importante que todos tengan una misma base para lograr aportar en su aprendizaje y los resultados esperados, por ello si se identifica alguna desigualdad en cuanto al conocimiento es importante hacer un refuerzo de conocimientos previos, de esta manera los estudiantes estarán atentos e interesados en lo que se enseña.

Se sugiere investigar más en los recursos didácticos que ofrece la plataforma GeoGebra, pues se pueden crear más empleando otras herramientas o usar algunos que están diseñados para complementar lo trabajado, incluso se puede pensar en la opción de crear tutoriales que los estudiantes pueden ver en casa. Además, existen múltiples herramientas en línea tanto para aprender geometría como para otras ramas de las matemáticas, por tanto se puede pensar en el uso de otras plataformas o la combinación de GeoGebra con otras herramientas en línea que motiven aún más a los estudiantes.

También se recomienda que para la resolución de problemas no sea una sola sección, por el contrario es en esta parte donde más se debe profundizar debido a las dificultades presentadas, así como la constante aplicación de los pasos para resolver un problema como los que propone Pólya, insistiendo que sea un proceso reflexivo y de un aprendizaje significativo.

Por otro lado, dado que la investigación se realizó con un grupo reducido de estudiantes, se puede pensar en otra investigación con una población mayor para determinar resultados más generales de los obtenidos.

La metodología se adaptó a la enseñanza de los ángulos, sin embargo se puede pensar en la posibilidad de extender la investigación y abordar otros conceptos geométricos, con lo cual se puede evaluar la efectividad de la metodología en diversos contextos y de esta forma que los docentes tengan mayores posibilidades para enseñar distintos temas usando las herramientas propuestas en esta investigación.

Finalmente, se sabe que la enseñanza tradicional aún es un referente en las aulas de clase, por tanto se podría realizar una comparación entre la enseñanza tradicional y la realizada con el uso de un AGD para evaluar el nivel de los estudiantes al finalizar la experiencia.

REFERENCIAS

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución. *Cuadernos de investigación y fomación en educación matemática*, *1*, 1–13.

Aray, C., Párraga, O., y Chun, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, *4*(1), 23–36.

Arteaga, E., Medina, J., y del Sol, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la secundaria básica haciendo matemática. *Conrado*, *15*(70), 102–108.

Arteaga, M. (2015). *Aplicación del “modelo Miguel de Guzmán en la resolución de situaciones problemáticas”, para el logro de aprendizajes significativos del área de matemática en los estudiantes del 3°“a” de nivel secundario de la Institución Educativa “Virgen del Carmen” del Distrito de San Jerónimo, Provincia de Andahuaylas, Departamento de Apurímac 2013-2015.* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.

Artigue, M., Douady, R., y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*(1-10), 1–10.

Baptista, P., Almazán, A., Loeza, C., López, V., y Cardenas, J. (2020). Encuesta Nacional a Docentes ante el COVID-19. Retos para la educación a distancia. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *50*, 41–88.

Barajas, C., y Parada, S. (2015). Una mirada al proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la resolución de con el que ingresan los estudiantes a la universidad. *Comunicación XIV CIAEM-IACME*, *14*, 1–12.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas, el Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y fomación en educación matemática*, *1*, 14–22.

Barrera, F., y Reyes, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 41–72.

Boo, J. Y., y Leong, K. E. (2016). Teaching and learning geometry in primary school using GeoGebra. En *21st asian technology conference in mathematics.*

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Camacho, M., Santos Trigo, M., y Nortes, R. (2018). Resolución de matemáticos: Tecnologías Digitales, Procesos Cognitivos y Metacognitivos y Formación de Profesores de Matemáticas. *Education Siglo XXI*, *36*(3), 13–20.

Campeón, M., Aldana, E., y Villa, J. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, *14*(2), 115–126.

Ciro, F., y Villegas, S. (2017). *Visualización de los conceptos geométricos en los polígonos con el software GeoGebra.* [Tesís de maestría]. Universidad Pontifica Bolivariana.

Constitución Política de Colombia. (1991). *República de colombia.* https://www.registraduria.gov.co/IMG/pdf/constitucio-politica-colombia-1991.pdf.

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica, cuadernos de investigación y formación en educación matemática. *Universidad de Costa Rica*.

de Guzmán, M. (2007). En señanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 19–58.

de la Rosa, J., y Arquitectónica, D. d. E. G. (2001). El arquitecto en la edad media. En *La técnica de la arquitectura medieval* (pp. 151–174).

del Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*(2), 243–250.

Gaspar, J., y Paitan, B. (2021). *El modelo de Miguel de Guzman y la resolucion de problemas en estudiantes de la IE "Cesar Vallejo Mendoza" PUMARANRA, ACOBAMBA.* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Huancavelica.

GeoGebra. (2023). ¿Qué es GeoGebra? *https://www.geogebra.org/about?lang=es*.

Illana, J. (2012). Matemáticas en el antiguo Egipto. *Suma*, *71*, 47–61.

Jiménez, M. (2021). *La ingeniería didáctica como metodología para la enseñanza del teorema del residuo de variable compleja y su aplicación en la solución de integrales reales.* [Tesis de pregrado]. Universidad Tecnológica de Pereira.

Joya, A., Grande, X., Rojas, V., y Chizer, J. (2010). *Hipertexto matemáticas 6.* Editorial Santillana S.A.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*, 135–157.

Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 451–469).

Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls*, 3–16.

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, *10*(2), 10–26.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, *1*(1).

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *http://www. mineducacion. gov. co/1621/articles-340021_recurso_.*

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje.* https://www.colombiaaprende.edu.co/contenidos/coleccion/derechos-basicos-de-aprendizaje.

Ministerio de Educación Nacional. (2021). *Flexibilización curricular.* https://www.mineducacion.gov.co/portal/secciones/Glosario/82793:FLEXIBILIZACION-CURRICULAR.

Ministerio de Educación Nacional. (2023). *Matriz de referencia, Siempre día e.* https://diaegiron.files.wordpress.com/2015/08/matriz-matemc3a1ticas.pdf.

Muñoz, J., y Matos, M. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de eso. *Revista de Investigación Educativa*, *26*(1), 209–226.

Palacios, A. (2018). *Incorporación de geogebra, en la enseñanza de ángulos y sus medidas en estudiantes de sexto grado de la institución educativa eva tulia quintero.* [Tesis de maestria]. Universidad Autónoma de Manizales.

Palmer, M. (2019). *Las matemáticas de la vida cotidiana: La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión*. Los Libros de la Catarata.

Palomino, G. (2015). *Estrategia didáctica para la resolución de problemas geométricos bidimensionales en estudiantes de educación secundaria de ventanilla, callao.* [Tesis de maestria]. Universidad San Ignacio de Loyola.

Pepin, B., Gueudet, G., y Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 799–812.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Poveda, W. (2020). Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *9*(1), 26–42.

Prensky, M. (2005). Digital natives, digital immigrants. *Gifted*(135), 29–31.

Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortíz, L., Cell, V., De Armas, R., ... Jiménez, J. (2013). *Los caminos del saber matemáticas 6.* Editorial Santillana S.A.

Rave, J. (2017). *Propuesta metodológica para la enseñanza de los conceptos básicos de geometría (rectas y ángulos) en la educación media a través de su aplicabilidad en la resolución de problemas.* [Tesís de maestria]. Universidad Nacional de colombia.

Rojas, D., Correa, S., y Muñoz, M. (2022). *Estrategia didáctica mediada por Geogebra para el fortalecimiento del pensamiento numérico variacional en estudiantes de grado octavo.* [Tesis doctoral]. Universidad de Cartagena.

Rubio-Pizzorno, S., y Montiel, G. (2017). Memorias del 23 encuentro de geometria y sus aplicaciones. En (cap. Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría). Universidad Pedagógica Nacional.

Salvatierra, Á., Gallarday, S., Ocaña-Fernández, Y., y Palacios, J. (2019). Caracterización de las habilidades del razonamiento matemático en niños con TDAH. *Propósitos y Representacio-*

nes, *7*(1), 165-184.

Santos Trigo, M. (2008). La resolución de matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En *Investigación en educación matemática XII* (p. 1-24).

Santos Trigo, M. (2014). *La resolución de matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas.

Santos Trigo, M., y Camacho, M. (2018). La resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnología digital en el diseño de libros interactivos. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 21–40.

Santos Trigo, M., Camacho, M., Pytlak, M., Rowland, T., y Swoboda, E. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En *Proceedings of the seventh conference of the european society for research in mathematics education* (pp. 2258–2277).

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Universidad de Nariño. (2023a). *Admisiones liceo grado sexto año 2023.* https://www.udenar.edu.co/admisiones-liceo-grado-sexto-ano-2023/.

Universidad de Nariño. (2023b). *Liceo de la Universidad de Nariño.* https://www.udenar.edu.co/dependencias/liceo/acerca-del-liceo/.

Universidad de Nariño. (2023c). *Sistema de consulta de proyectos de investigación docente.* http://sisinfoviis.udenar.edu.co/consultarProyectos.

Urbano, R. (2018). *Un diseño de tareas que integra AGD y las representaciones geométricas en las esculturas de san agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto.* [Tesis de maestría]. Universidad del Valle.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74–94.

Vidal, R. (2009). *La didáctica de las matemáticas y la teoría de situaciones.* [Tesis de maestría]. Universidad Alberto Hurtado.

ANEXOS

En este capítulo se encuentran algunos de los soportes de esta investigación, los cuales están organizados de la siguiente forma:

Anexo A. Resultado primera fase de la sexta versión de las olimpiadas regionales de matemáticas de la Universidad de Nariño.

Anexo B. Formato de Consentimiento informado usado.

Anexo C. Vo. Bo. Director liceo de la Universidad de Nariño.

Anexo D. Prueba diagnóstica.

Anexo E. Validación prueba diagnóstica Dr. Jorge Aristizabal.

Anexo F. Validación prueba diagnóstica Mg. Corina Dorado.

Anexo G. Sabana de datos prueba diagnóstica.

Anexo H. validación secuencia de enseñanza.

Anexo I. Prueba final.

Anexo J. Validación prueba final Dr. Jorge Aristizabal.

Anexo K. Validación prueba final Mg. Corina Dorado.

Anexo L. Sabana de datos prueba final.

Anexo A: Resultado primera fase de la sexta versión de las olimpiadas regionales de matemáticas de la Universidad de Nariño

Formato de información para institución.

Institución: LICEO DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Nivel de prueba: “Nivel 1”

preg	Dificultad	Pensamiento	puntaj_PROM	tope max
1	baja	Numérico	0,15	4
2	media	Aleatorio	3,38	6
3	baja	Numérico	1,25	4
4	baja	Numérico	0,21	4
5	baja	Geométrico	0,54	4
6	media	Numérico	2,05	6
7	alta	Variacional	6,02	10
8	media	Variacional	3,68	6
9	media	Aleatorio	3,47	6
10	alta	Numérico	3,95	10
11	alta	Geométrico	5,11	10
12	media	Métrico	2,10	6
13	alta	Variacional	7,44	10
14	alta	Geométrico	3,68	10
15	baja	Aleatorio	0,78	4
PUNTAJE TOTAL			43,82	100

Pensamiento	Puntaje	tope max
Organización y clasificación de datos (Aleator	7,64	16
Las variaciones de números y figuras (Variaci	17,14	26
Pensar en los números (Numérico)	7,61	28
Pensar en la geometría (Geométrico)	9,34	24
Pensar en las medidas(Métrico)	2,10	6
PUNTAJE TOTAL	43,82	100

Nivel Dificultad de la pregunta	Puntaje	tope max
baja	2,93	20
media	14,68	30
Alta	26,20	50
PUNTAJE TOTAL	43,82	100

Anexo B: Consentimiento informado.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Cordial saludo.

Apreciados padres de familia, la presente es con el fin de informarles que desde la Maestría en Educación de la Universidad de Nariño, se llevan a cabo procesos que aportan al aprendizaje de las matemáticas, en esta ocasión se extiende la invitación a los estudiantes de grado 6-2, para participar de un refuerzo en el tema de ángulos integrando programas propios para el aprendizaje de la geometría (ambiente de geometría dinámica GeoGebra), lo cual brinda a los estudiantes posibilidades para explorar nuevos conocimientos, además, desarrollar sus habilidades tecnológicas y digitales. Es importante resaltar que esta temática hace parte de la malla curricular de grado sexto y las actividades programadas aportan al buen desempeño de las y los estudiantes, por lo anterior, las sesiones se desarrollarán durante la jornada escolar, en las clases de matemáticas.

Las actividades consisten en desarrollar una prueba diagnóstica que permitirá identificar las dificultades de los estudiantes en el tema de ángulos y sus aplicaciones en la resolución de problemas, con ello se diseña y aplica una secuencia de enseñanza para reforzar dicha temática, por último, se realizará una prueba final para evidenciar el avance obtenido. Es importante resaltar que las pruebas mencionadas aportan a la investigación, pero no hacen parte de las valoraciones correspondientes de la asignatura de matemáticas en el segundo periodo. Además, la información obtenida es de uso confidencial y los nombres de los estudiantes no serán revelados.

Finalmente, la participación en las actividades es voluntaria y si en algún momento no desea ser parte de la investigación puede manifestarlo.

—---
-------------------------- CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPAR EN EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra

Yo ________________________________ identificado con cedula de ciudadanía n° ________________ de __________________ acudiente de ____ identificado con tarjeta de identidad n° ________________ de __________________autorizo que participe en la investigación "**Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra**", un proyecto desarrollado en el marco la maestría en educación de la Universidad de Nariño.

Entiendo que este estudio busca analizar los resultados de la aplicación de una secuencia de enseñanza de ángulos, la cual se enfoca hacia la resolución de problemas con la integración del ambiente de geometría dinámica GeoGebra. Sé que la participación consistirá en responder algunas pruebas y participar de manera activa en los diferentes encuentros que se realizarán durante su jornada escolar, en clase de matemáticas. También, entiendo que la información registrada será confidencial, y que el nombre de mi hij@ no será revelado, es decir, que las respuestas no podrán ser conocidas por otras personas ni tampoco serán identificadas en el análisis de resultados. Estoy en conocimiento que los datos no me serán entregados y que no habrá retribución por la participación en este estudio. Asimismo, sé que puedo negar la participación o retirar a mi hij@ en cualquier etapa de la investigación, sin expresión de causa ni consecuencias negativas para nosotros.

Firma acudiente: ____ C. C ________________________ Fecha: ______________________

Anexo C: Vo. Bo. Director liceo de la Universidad de Nariño.

San Juan de Pasto, 4 de mayo de 2023.

Recibí
4-mayo-2023
V. Bo.

Doctor
Fernando Garzón Velásquez
Director
Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño
Ciudad

Asunto: Solicitud de implementación de instrumentos de investigación en el marco del proyecto "Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra”

Cordial saludo.

Por medio de la presente **Katherine Nathaly Paz Mora** identificada con **c.c.** 1.086.225.004 y **Deiby Yohana Castillo Narváez** identificada con **c.c.** 1.085.319.075, estudiantes de la XV promoción de la Maestría en Educación y asesoradas por la profesora del Departamento de Matemáticas y estadística de la Universidad de Nariño **Catalina María Rúa Álvarez**, solicitamos de manera respetuosa permiso para aplicar los instrumentos de investigación del proyecto de grado **"Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra"**, en el grado 6-2 de tan prestigiosa institución.

Los instrumentos a aplicar son los siguientes: una **prueba diagnóstica** para conocer el nivel en que se encuentran los estudiantes de grado sexto respecto al tema de ángulos, una **secuencia de enseñanza** elaborada en el software de geometría dinámica GeoGebra, donde se incluyen diferentes actividades que permiten fortalecer las habilidades **de los** estudiantes en la parte teórica de ángulos y su aplicación en la resolución de problemas y una **prueba final** para evidenciar el avance que los estudiantes lograron obtener. Dado que las actividades fueron elaboradas en medios digitales se anexa un pantallazo de las mismas y los enlaces donde se encuentran.

- **Prueba diagnóstica:**

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeeRQJpbwxk ntQdHTluSf6Qbf1eCSC QUBrA0QDOvbGZUONSQ/viewform?usp=sf link

- **Secuencia de enseñanza**: https://www.geogebra.org/m/mftkjwbt

- **Prueba final:**

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSWFa7xm37rPyEtzvmHhNxrRUDfhy
hnQ63G ZWv9qviR24Zg/viewform?usp=sf link

Para el desarrollo de las anteriores actividades se ha estimado un tiempo aproximado de 6 horas de clase (3 bloques), las cuales solicito amablemente, si es posible, sean concedidas en los siguientes días:

- Miércoles, 10 de mayo de 10:45 am - 12:15 am.
- Viernes, 12 de mayo de 11:30 am - 1:00 pm.
- Lunes, 15 de mayo de 8:40 am 10:10 am.

Es importante resaltar que se han escogido estas fechas puesto que coinciden con el inicio del segundo periodo y de esta manera no se afectaría el desarrollo normal de las actividades programadas por la docente.
Los resultados obtenidos **sólo** serán usados con fines investigativos y los nombres de los estudiantes no serán revelados en el documento final.

De antemano agradecemos su atención y colaboración.

Atentamente,

Deiby Castillo Narvaez

Deiby Castillo Narvaez
Deiby Yohana Castillo Narvaez
Estudiante Maestría en Educación
Universidad de Nariño
Correo: yodeibycn@gmail.com

Nathaly Paz M.

Nathaly Paz M.
Katherine Nathaly Paz Mora
Estudiante Maestría en Educación
Universidad de Nariño
Correo: npaz217@gmail.com

Vo.Bo.

Catalina M. Rúa A.

Catalina María Rúa Álvarez, PhD
Docente tiempo completo
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
Asesora

Anexo D: Prueba diagnóstica

Esta prueba diagnóstica ha sido elaborada para identificar información general frente al proceso de aprendizaje en geometría y los conocimientos referentes al tema de ángulos, en el marco del Proyectode investigación "**Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometríadinámica GeoGebra".**

El desarrollo de este instrumento es con fines netamente investigativos y los resultados serán considerados de confidencialidad. Te solicitamos responder las preguntas de manera honesta y consciente, pues estos resultados se tendrán en cuenta para la elaboración y aplicación de una secuencia didáctica de aprendizaje.

El tiempo estimado de la prueba es de 50 minutos.

* Indica que la pregunta es obligatoria

INFORMACIÓN GENERAL

A continuación, se encuentra la primera sección con 9 preguntas sobre algunos datos personales y procesosde aprendizaje en geometría.

1. Apellidos *

2. Nombres *

3. Género. *

Marca solo un óvalo.

Femenino

Masculino

Otro

4. ¿Cursó el grado quinto de primaria en el Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño? *

Marca solo un óvalo.

Si

No

5. ¿Te gusta la geometría? *

Marca solo un óvalo.

Mucho

Poco

Nada

6. ¿Qué herramientas has utilizado al estudiar geometría tanto en espacios escolares como extraescolares? Selecciona las tres que más has usado.

Selecciona todos los que correspondan.

- [ ] Regla
- [ ] Transportador
- [ ] Compás
- [ ] Calculadora
- [ ] Lápiz
- [ ] Hojas de papel
- [ ] Computador
- [ ] Ninguno
- [ ] Otro: ______________________

7. ¿En algún grado escolar, en clase de matemáticas has usado una aplicación o programa de geometría para solucionar problemas?

Marca solo un óvalo.

SI

NO

Si tu respuesta en la pregunta 7 es SI responde la siguiente pregunta.

8. ¿Cuáles aplicaciones o programas de geometría has usado?

____

____

____

9. ¿Has participado en Olimpiadas Matemáticas? *

Marca solo un óvalo.

Si

No

TEORÍA DE ÁNGULOS Y SU APLICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DEPROBLEMAS

A continuación, se presenta la segunda sección sobre la parte teórica de ángulos y su aplicación en resolución de problemas, la cual consta de 8 preguntas de selección múltiple con única respuesta y 2 preguntas abiertas donde se debe escribir una respuesta numérica y una pregunta final sobre las herramientas usadas para resolver los problemas. Si en alguna de laspreguntas no sabes la respuesta, puedes dejar sin contestar y continuar con el siguiente.

1 . El espacio comprendido entre dos semirrectas que tienen como origen un mismo punto, se conoce como:

Marca solo un óvalo.

a. Polígono

b. Triángulo

c. Ángulo

d. Semirrecta

e. Ninguno de los anteriores

2. En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre 90° y 180° se conocen como:

Marca solo un óvalo.

a. Ángulos obtusos

b. Ángulos rectos

c. Ángulos agudo

d. Ángulos llanos

e. Ninguna de las anteriores

3. Si la suma de la medida de dos ángulos es 90°, estos se clasifican como:

Marca solo un óvalo.

f. Ángulos complementarios

g. Ángulos suplementarios

h. Ángulos rectos

i. Ángulo completo

j. Ninguna de las anteriores

4. La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es:

Marca solo un óvalo.

a. Depende del triángulo

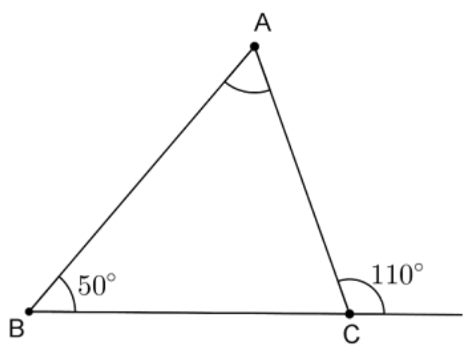
b. 360°

c. 360°/3

d. 180°

e. Ninguna de las anteriores

5. En la siguiente figura la medida del ángulo BAC es:
Marca solo un óvalo.



a. 20°

b. 45°

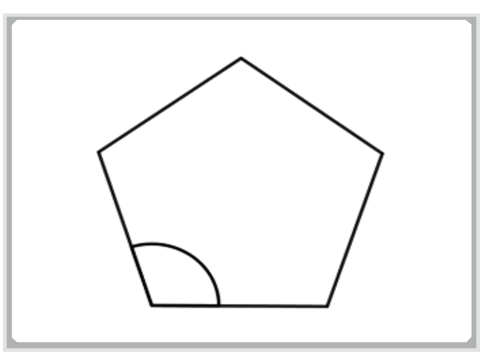
c. 60°

d. 70°

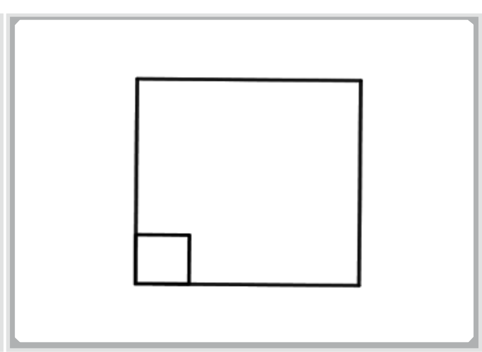
e. Ninguna de las anteriores

6. ¿Cuál de los ángulos marcados en los siguientes polígonos regulares tiene mayor medida?

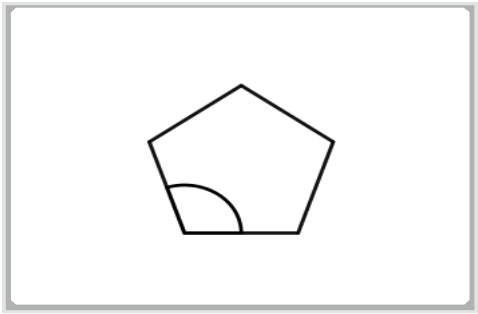
Marca solo un óvalo.



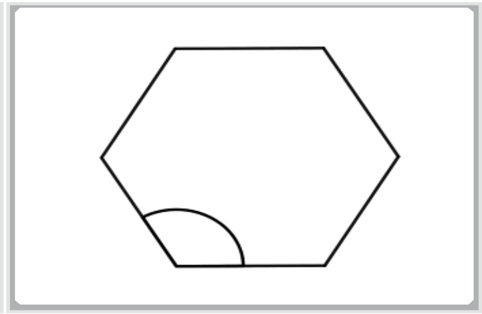
a.



b.



c.



d.

e. Ninguna de las anteriores.

7. ABCD es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PBQ?

Marca solo un óvalo.

a. 150°

b. 15°

c. 60°

d. 30°

e. Ninguna de las anteriores

8. Sea D un punto interior del triángulo ABC, tal que el ángulo BDC es igual a 123°, el ángulo ABD es igual a 15° y el ángulo ACD es igual a 21°. La medida del ángulo BAC es:

Marca solo un óvalo.

a. 47°

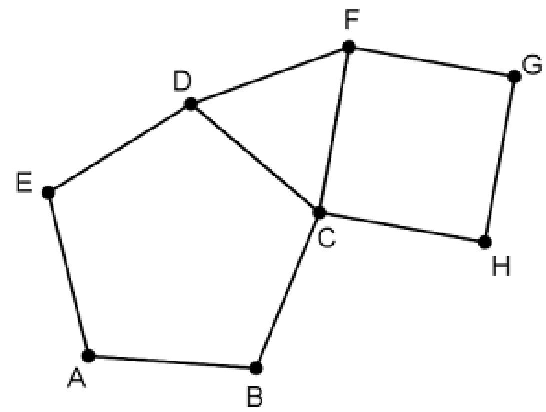
b. 67°

c. 87°

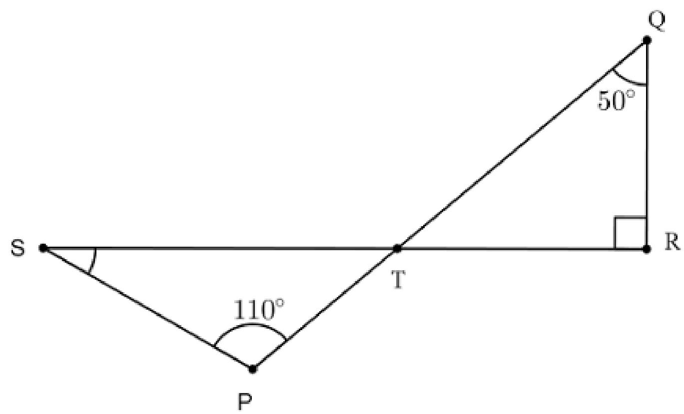
d. 107°

e. Ninguna de las anteriores

9. ABCDE es un pentágono regular, CDF es un triángulo equilátero y CFGH es un cuadrado. La medida en grados del ángulo BCH es:



10. En la figura, los segmentos SR y PQ se intersecan en T. ¿Cuál es la medida del ánguloS?



11. Teniendo en cuenta los procesos realizados en la prueba ¿qué herramientas usó para dar solución a los problemas? *

Selecciona todos los que correspondan.

- [ ] Regla
- [ ] Transportador
- [ ] Compás
- [ ] Calculadora
- [ ] Lápiz
- [ ] Hojas de papel
- [ ] Computador
- [ ] Ninguno
- [ ] Otro: ______________________

¡GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!

Anexo E: Validación prueba diagnóstica.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN PRUEBA DIAGNÓSTICA

Título del proyecto: Aplicación de conceptos ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Programa: Maestría en Educación de la Universidad de Nariño.

Estudiantes: Katherine Nathaly Paz Mora y Deiby Yohana Castillo Narvaez.

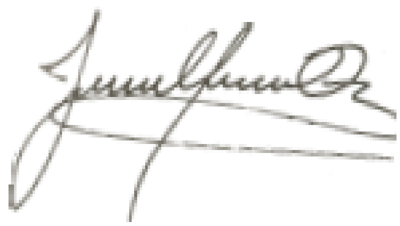
Docente evaluador: Jorge Hernán Aristizábal Zapata.

Este formato busca determinar si el instrumento de medición, reúne los indicadores mencionados, por ello le solicitamos diligenciar teniendo en cuenta la escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto.

N°	**Indicador**	**Definición**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
1	Claridad y precisión	Las preguntas están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.	X				
2	Coherencia	Las preguntas guardan relación con el título del proyecto.	X				
3	Orden	Las preguntas han sido redactadas teniendo en cuenta la complejidad para sexto grado.		X			
4	Organización	La estructura es adecuada, cuenta con elementos de presentación, desarrollo y agradecimiento.	X				
5	Extensión	El número de preguntas es adecuado y coherente para el tiempo propuesto.		X			
6	Estructura de los problemas	Los problemas se redactaron de manera clara y coherente.	X				
7	Estructura de los problemas	Los datos suministrados son suficientes para resolver los problemas.	X				
8	Gráficas	Las gráficas son claras y cumplen con las condiciones del enunciado.	X				
9	Inocuidad	las preguntas no constituyen riesgo para el encuestado.	X				

Observaciones: Hay que tener cuidado con los supuestos, esto debido a que si bien es cierto que los estándares y los DBA enuncian unos mínimos, las instituciones educativas tienen cierta flexibilidad curricular y puede que por alguna razón no se den todos los temas, o en ocasiones se deja la geometría para el último periodo y por múltiples eventos no se da, con ello en mente es buen profundizar en ciertos aspectos.

En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado: **SI** x **NO** _.



Firma del Docente evaluador

Anexo F: Validación prueba diagnóstica.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN PRUEBA DIAGNÓSTICA

Título del proyecto: Aplicación de conceptos ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Programa: Maestría en Educación de la Universidad de Nariño.

Estudiantes: Katherine Nathaly Paz Mora y Deiby Yohana Castillo Narvaez.

Docente evaluador: Corina Dorado G.

Este formato busca determinar si el instrumento de medición, reúne los indicadores mencionados, por ello le solicitamos diligenciar teniendo en cuenta la escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto.

N°	**Indicador**	**Definición**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
1	Claridad y precisión	Las preguntas están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.	X				
2	Coherencia	Las preguntas guardan relación con el título del proyecto.	X				
3	Orden	Las preguntas han sido redactadas teniendo en cuenta la complejidad para sexto grado.	X				
4	Organización	La estructura es adecuada, cuenta con elementos de presentación, desarrollo y agradecimiento.	X				
5	Extensión	El número de preguntas es adecuado y coherente para el tiempo propuesto.		X			
6	Estructura de los problemas	Los problemas se redactaron de manera clara y coherente.	X				
7	Estructura de los problemas	Los datos suministrados son suficientes para resolver los problemas.	X				
8	Gráficas	Las gráficas son claras y cumplen con las condiciones del enunciado.	X				
9	Inocuidad	las preguntas no constituyen riesgo para el encuestado.	X				

Observaciones:

En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado: **SI** x **NO_**

Corina Dorado G

Firma del Docente evaluador

Anexo G: Sabana de datos prueba diagnóstica.

I1: Género.
I2: ¿Cursó el grado quinto de primaria en el Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño?
I3: ¿Te gusta la geometría?
I4: ¿Qué herramientas has utilizado al estudiar geometría tanto en espacios escolares como extraescolares? Selecciona las tres que más has usado.
I5: ¿En algún grado escolar, en clase de matemáticas has usado una aplicación o programa de geometría para solucionar problemas?
I6: Si tu respuesta en la pregunta 7 es SI responde la siguiente pregunta. ¿Cuáles aplicaciones o programas de geometría has usado?
I7: ¿Has participado en Olimpiadas Matemáticas?
II1: El espacio comprendido entre dos semirrectas que tienen como origen un mismo punto, se conoce como
II2: En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre 90° y 180° se conocen como
II3: Si la suma de la medida de dos ángulos es 90°, estos se clasifican como:
II4: La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es:
II5: En la siguiente figura la medida del ángulo BAC es:
II6: ¿Cuál de los ángulos marcados en los siguientes polígonos regulares tiene mayor medida?
II7: ABCD es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PBQ?
II8: Sea D un punto interior del triángulo ABC, tal que el ángulo BDC es igual a 123°, el ángulo ABD es igual a 15° y el ángulo ACD es igual a 21°. La medida del ángulo BAC es:
II9: ABCDE es un pentágono regular, CDF es un triángulo equilátero y CFGH es un cuadrado. La medida en grados del ángulo BCH es:
II10: En la figura, los segmentos SR y PQ se intersecan en T. ¿Cuál es la medida del ángulo S?
II11: Teniendo en cuenta los procesos realizados en la prueba ¿qué herramientas usó para dar solución a los problemas?

Código	I1	I2	I3	I4	I5	I6
E01	Masculino	No	Poco	Regla, Compás, Calculadora	NO	
E02	Femenino	Si	Mucho	Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel	NO	ninguna pero en primaria si me enseñaron geometría pero no usamos ninguna aplicación
E03	Masculino	No	Mucho	Regla, Compás, Calculadora	NO	
E04	Femenino	No	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E05	Masculino	No	Poco	Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	Ninguno
E06	Masculino	No	Poco	Regla	NO	
E07	Masculino	No	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	NINGUNO
E08	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Compás	NO	
E09	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E10	Masculino	No	Poco	Transportador, Calculadora, Lápiz	NO	
E11	Otro	Si	Poco	Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E12	Masculino	No	Nada	Transportador, Compás, Hojas de papel	NO	
E13	Masculino	Si	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E14	Masculino	Si	Poco	Regla, Transportador, Compás	NO	
E15	Masculino	No	Mucho	Regla, Compás, Computador	NO	
E16	Femenino	No	Mucho	Regla, Calculadora, Computador	NO	no
E17	Masculino	No	Poco	Regla, Transportador, Lápiz	NO	
E18	Femenino	Si	Poco	Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel	SI	
E19	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Compás, Calculadora, Lápiz, Hojas de papel, Computador	NO	ninguna
E20	Masculino	Si	Nada	Regla, Lápiz, Hojas de papel	SI	No me acuerdo
E21	Masculino	No	Poco	Regla, Transportador, Lápiz	NO	

E22	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Lápiz	NO	
E23	Femenino	No	Poco	Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E24	Femenino	Si	Mucho	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E25	Masculino	No	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E26	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Lápiz	NO	
E27	Masculino	No	Poco	Regla, Compás, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E28	Masculino	Si	Mucho	Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E29	Masculino	No	Poco	Regla, Transportador, Compás, Calculadora, Hojas de papel	NO	
E30	Masculino	No	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E31	Femenino	No	Poco	Regla, Transportador, Lápiz	NO	
E32	Masculino	No	Mucho	Regla, Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E33	Masculino	No	Poco	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E34	Otro	Si	Nada	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	no eh utilizado ningún programa
E35	Femenino	Si	Mucho	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E36	Masculino	No	Poco	Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E37	Femenino	Si	Mucho	Transportador, Compás, Lápiz	NO	
E38	Femenino	No	Mucho	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E39	Masculino	Si	Poco	Regla, Compás, Lápiz	NO	
E40	Femenino	No	Mucho	Regla, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E41	Otro	Si	Nada	Regla, Compás, Lápiz	NO	
E42	Femenino	No	Mucho	Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	
E43	Femenino	No	Mucho	Transportador, Lápiz, Hojas de papel	NO	

I7	II1	II2	II3	II4	II5
No	c. Ángulo		d. Ángulo completo	a. Depende del triángulo	e. Ninguna de las anteriores
No	d. Semirrecta	c. Agudos	b. Ángulos suplementarios	a. Depende del triángulo	d. 70°
No	e. Ninguno de los anteriores	a. Obtusos	b. Ángulos suplementarios	d. 180°	c. 60°
Si	c. Ángulo		c. Ángulos rectos	a. Depende del triángulo	e. Ninguna de las anteriores
No		a. Obtusos	c. Ángulos rectos	a. Depende del triángulo	d. 70°
No	c. Ángulo	b. Rectos	c. Ángulos rectos	a. Depende del triángulo	d. 70°
No	c. Ángulo	d. Llanos	b. Ángulos suplementarios	d. 180°	
No	c. Ángulo	a. Obtusos	a. Ángulos complementarios	d. 180°	c. 60°
No	d. Semirrecta	c. Agudos	b. Ángulos suplementarios	a. Depende del triángulo	c. 60°
Si	c. Ángulo	a. Obtusos	a. Ángulos complementarios	a. Depende del triángulo	d. 70°
Si	c. Ángulo	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores	a. Depende del triángulo	c. 60°
Si	c. Ángulo	a. Obtusos	a. Ángulos complementarios	d. 180°	c. 60°
No	a. Polígono	c. Agudos	a. Ángulos complementarios	d. 180°	d. 70°
No	c. Ángulo	a. Obtusos	b. Ángulos suplementarios	d. 180°	a. 20°
No	e. Ninguno de los anteriores	a. Obtusos	a. Ángulos complementarios	a. Depende del triángulo	c. 60°
No	c. Ángulo	d. Llanos	c. Ángulos rectos	d. 180°	c. 60°
No	c. Ángulo	c. Agudos	a. Ángulos complementarios	a. Depende del triángulo	d. 70°
No	d. Semirrecta	e. Ninguna de las anteriores	b. Ángulos suplementarios	a. Depende del triángulo	b. 45°
Si	c. Ángulo	a. Obtusos	c. Ángulos rectos	e. Ninguna de las anteriores	b. 45°
No	b. Triángulo	c. Agudos	a. Ángulos complementarios	d. 180°	b. 45°
No	c. Ángulo	c. Agudos	a. Ángulos complementarios	a. Depende del triángulo	d. 70°

II6	II7	II8	II9	II10
d.				
d.	d. 30°	d. 107°		
e. Ninguna de las anteriores.	c. 60°	a. 47°	no se	no se
d.		d. 107°		ni me acuerdo
d.				
a.	a.150°	d. 107°		
d.	a.150°	b. 67°		
d.	c. 60°	c. 87°	NO SE NO TENGO TRANSPORTADOR UWU	NO SE
d.	d. 30°	d. 107°		
d.	c. 60°	b. 67°		25
d.	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores	No se.	No se.
d.	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores		
d.	a.150°	d. 107°	80°	20°
d.	b.15°	b. 67°	48 por que es una forma para poligonos regulares	la medida del agulo S es 10
d.	a.150°	d. 107°	no se	180 grados
d.	b.15°	b. 67°		
e. Ninguna de las anteriores.	c. 60°	b. 67°	96	30
d.	c. 60°	a. 47°		
d.	a.150°	d. 107°	no se	40
b.	c. 60°	b. 67°	18	24
d.	c. 60°	b. 67°		30°

d.	b.15°	d. 107°		
d.	a.150°			
d.	b.15°	b. 67°		15°
b.	c. 60°	c. 87°	isoceles	50 grados
d.	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores	No lo se	No lo se
d.	d. 30°	c. 87°	140°	La B
d.			180	60
d.	b.15°	e. Ninguna de las anteriores	NO LO SE	NO LO SE
d.				
d.	a.150°	b. 67°		
d.	a.150°	d. 107°	48 porque es una forma para poligonos regulares	la medida del angulo s es 160
d.	d. 30°	c. 87°	140 grados	la b
d.		d. 107°	la medida en grados de BCH es de 230 grados	No me acuerdo
d.				
d.		e. Ninguna de las anteriores	180	70
d.	e. Ninguna de las anteriores			
d.	c. 60°	a. 47°	19	25
d.	c. 60°	c. 87°	121	40 grados
a.		a. 47°		
d.	a.150°	c. 87°	102	160 grados
d.	a.150°	c. 87°	200°	50°

II11
Lápiz
Lápiz, Hojas de papel
Regla, Transportador, Calculadora
Computador
Ninguno
Regla
Ninguno
Ninguno, NO USE NADA POR QUE NO LO TRAJE
Lápiz, Hojas de papel, Computador
Regla, Transportador, Calculadora
Ninguno
Transportador, Calculadora, Hojas de papel
Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel
Regla, Transportador, Compás, Lápiz, Hojas de papel
Regla, Compás, Computador
Regla, Lápiz, Hojas de papel
Lápiz, Hojas de papel
Regla, Lápiz, Computador
Computador, Ninguno
Regla, Lápiz, Hojas de papel
Ninguno

Lápiz, Hojas de papel
Ninguno
Lápiz, Hojas de papel
Computador, Ninguno, mente
Computador
Lápiz, Hojas de papel
Ninguno
Ninguno
Lápiz
Lápiz, Hojas de papel
Regla, Transportador, Computador
Ninguno
Regla, Computador, la mente
Ninguno
Transportador, Lápiz, Hojas de papel
Computador
Lápiz, Hojas de papel
Regla, Lápiz, Hojas de papel
Lápiz, Hojas de papel, Computador
Regla, Compás, Calculadora, Lápiz, Hojas de papel
Lápiz, Hojas de papel, Computador
Computador, Ninguno

Anexo H: Validación secuencia de enseñanza.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN SECUENCIA DIDÁCTICA

Título del proyecto: GeoGebra y resolución de problemas, una propuesta didáctica para la enseñanza de conceptos de ángulos en grado sexto.

Programa: Maestría en Educación de la Universidad de Nariño.

Estudiantes: Katherine Nathaly Paz Mora y Deiby Yohana Castillo Narvaez.

Docente evaluador: Corina Dorado G

Este formato busca determinar si el instrumento de medición, reúne los indicadores mencionados, por ello le solicitamos diligenciar teniendo en cuenta la escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto.

N°	Indicador	Definición	5	4	3	2	1
1	Contenido	Las temáticas abordadas corresponden a los contenidos y conceptos de ángulos propios para el grado.	X				
2	Complejidad	Las actividades han sido elaboradas teniendo en cuenta el nivel de dificultad para sexto grado.	X				
3	Claridad y precisión	Las actividades están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.	X				
4	Coherencia	Las actividades guardan relación con el tema de ángulos.	X				
5	Organización	La estructura de la secuencia es adecuada, cuenta con elementos de introducción, instrucciones, desarrollo de actividades y cierre.	X				
6	Extensión	El desarrollo de la secuencia es adecuado y coherente para el tiempo estimado.	X				
7	Herramientas de GeoGebra	Las actividades elaboradas en los applets de GeoGebra son dinámicas e intuitivas.	X				
8	Herramientas de GeoGebra	Las herramientas de GeoGebra fueron usadas de manera adecuada brindando.	X				

9	Entorno de GeoGebra	El entorno de GeoGebra es ameno y llamativo para los estudiantes.	X					
10	Estructura de los problemas y actividades	Los problemas y las actividades se redactaron de manera clara y coherente.	X					
11	Estructura de los problemas y actividades	Los datos suministrados son suficientes para resolver los problemas y las actividades propuestas.	X					
12	Gráficas	Las gráficas son claras y cumplen con las condiciones del enunciado.	X					

Observaciones: El material y todo lo utilizado fue de gran ayuda, pero hay que tener un poco de paciencia con los estudiantes que no recuerdan muchos de los conceptos e ir despacio para que puedan aplicarlos.

En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado: **SI** __X__ **NO** ____

Corina Dorado G.

Firma del Docente evaluador

Anexo I: Prueba final.

Esta prueba ha sido elaborada en el marco del Proyecto de investigación "**Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometríadinámica GeoGebra"** para identificar el progreso obtenido en las temáticas de ángulos y su aplicación una vez desarrollada la secuencia de enseñanza.

El desarrollo de este instrumento es con fines netamente investigativos y los resultados serán considerados de confidencialidad. Te solicitamos responder las preguntasde manera honesta y consciente, pues estos resultados se tendrán en cuenta para determinar el progreso después de la implementación de la secuencia didáctica de aprendizaje.

El tiempo estimado para la prueba es 50 minutos.

* Indica que la pregunta es obligatoria

INFORMACIÓN GENERAL

A continuación se encuentra la primera sección con 10 preguntas sobre algunos datos personales y procesos de aprendizaje en geometría.

1. Apellidos *

2. Nombres *

3. Después de haber desarrollado la secuencia, tu gusto por la geometría es: *

Marca solo un óvalo.

- Mucho
- Poco
- Nada

4. ¿El desarrollo de la secuencia le ayudó a mejorar sus conocimientos sobre ángulos?

Marca solo un óvalo.

- Mucho
- Poco
- Nada

5. ¿Consideras que la organización de la secuencia en GeoGebra generó un ambiente dinámico e intuitivo para aprender sobre los conceptos relacionados con ángulos?

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

6. ¿Consideras que en la secuencia, las construcciones dinámicas fueron útiles para comprender el concepto de ángulo y sus propiedades?

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

7. ¿Consideras que haber usado el ambiente de geometría dinámica GeoGebra fue útil para resolver los problemas?

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

8. ¿Consideras que la parte teórica (definición, clasificación y propiedades) de la secuencia fue clara y suficiente para desarrollar los problemas?

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

9. ¿Le recomendarías a otra persona que use GeoGebra para resolver problemas de geometría?

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

10. ¿Consideras que es importante aprender geometría para la vida diaria? *

Marca solo un óvalo.

- Si
- No

11. ¿Por qué? *

TEORÍA DE ÁNGULOS Y SU APLICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DEPROBLEMAS

A continuación se presenta la segunda sección sobre la parte teórica de ángulos y su aplicación en resolución de problemas, la cual consta de 8 preguntas de selección múltiple con única respuesta, 2 preguntas abiertas donde se debe escribir una respuesta numérica y una pregunta final sobre las herramientas usadas para resolver los problemas.

Si en alguna de las preguntas no sabes la respuesta, puedes dejar sin contestar y continuarcon la siguiente.

1. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a:

Marca solo un óvalo.

- a. 40°
- b. 90°
- c. 180°
- d. 360°
- e. Ninguno de los anteriores

2. La suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es:

Marca solo un óvalo.

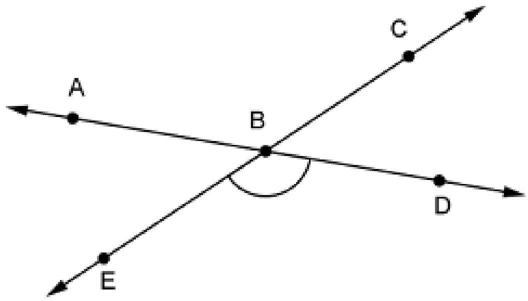
- a. Depende del cuadrilátero
- b. 360°
- c. 360°/4

d. 180°

e. Ninguna de las anteriores

3. Observa la imagen a continuación. Si la medida del ángulo EBD es 130°, ¿cuál esla medida del ángulo CBA?

Marca solo un óvalo.



a. 50°

b. 130°

c. 180°

d. 310°

e. Ninguna de las anteriores

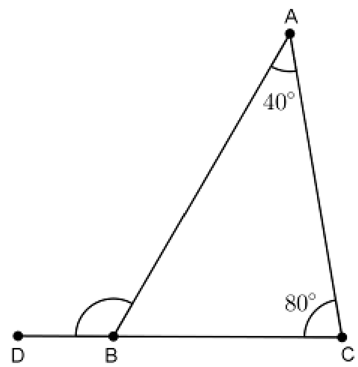
4. En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre 180° y 360° se conocen como:

Marca solo un óvalo.

a. Ángulos agudos
b. Ángulos convexos
c. Ángulos llanos
d. Ángulos cóncavos
e. Ninguna de las anteriores

5. En la siguiente figura, ¿cuál es la medida del ángulo ABD?

Marca solo un óvalo.



a. 60°

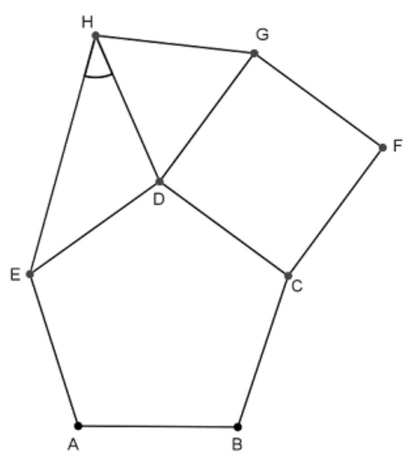
b. 90°

c. 120°

d. 180°

e. Ninguna de las anteriores

6. En la imagen AEDCB es un pentágono regular, DGFC es un cuadrado y DHG es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo EHD?



Marca solo un óvalo.

102°

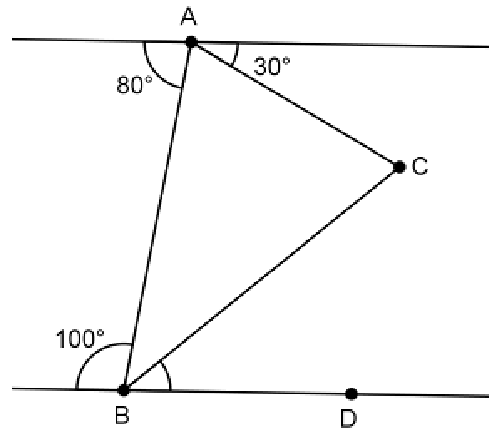
78°

39°

180°

Ninguna de las anteriores

7. En la siguiente figura el triángulo ACB es isósceles, con los segmentos AB y BC de igual medida, ¿cuál es la medida del ángulo DBC?



Marca solo un óvalo.

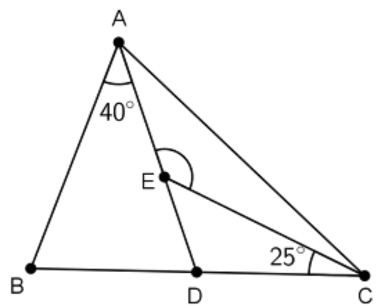
- a. 40°
- b. 60°
- c. 87°
- d. 70°
- e. Ninguna de las anteriores

8. ABCD es un rectángulo de lados AB, BC, CD y DA. El triángulo equilátero DAE,está dentro del rectángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo EAB?

Marca solo un óvalo.

- a. 90°
- b. 60°
- c. 30°
- d. 10°
- e. Ninguna de las anteriores

9. En el triángulo ACB, los segmentos AB y AD tienen la misma medida. ¿Cuál es la medida del ángulo CEA?



10. Sea ABCD un cuadrilátero de lados AB, BC, CD y DA. Se sabe que el ángulo ABD mide 10°, el ángulo DBC mide 50°, el ángulo BCA mide 60° y el ángulo ACDmide 20°. ¿Cuál es la medida de los ángulos CAB y CDB?

11. Teniendo en cuenta los procesos realizados en la prueba ¿qué herramientas usó para dar solución a los problemas?

Selecciona todos los que correspondan.

- [ ] Regla
- [ ] Compás
- [ ] Calculadora
- [ ] Lápiz
- [ ] Hojas de papel
- [ ] Computador
- [ ] Otro: ____________

¡GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!

Anexo J: Validación prueba final.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN
PRUEBA FINAL

Título del proyecto: Aplicación de conceptos ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Programa: Maestría en Educación de la Universidad de Nariño.

Estudiantes: Katherine Nathaly Paz Mora y Deiby Yohana Castillo Narvaez.

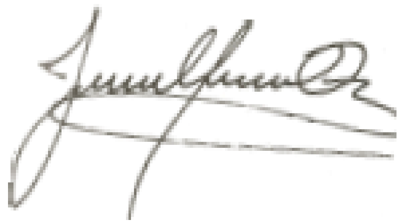
Docente evaluador: Jorge Hernán Aristizábal Zapata.

Este formato busca determinar si el instrumento de medición, reúne los indicadores mencionados, por ello le solicitamos diligenciar teniendo en cuenta la escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto.

N°	Indicador	Definición	5	4	3	2	1
1	Claridad y precisión	Las preguntas están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.	X				
2	Coherencia	Las preguntas guardan relación con el título del proyecto.	X				
3	Orden	Las preguntas han sido redactadas teniendo en cuenta la complejidad para sexto grado.	X				
4	Organización	La estructura es adecuada, cuenta con elementos de presentación, desarrollo y agradecimiento.	X				
5	Extensión	El número de preguntas es adecuado y coherente para el tiempo propuesto.	X				
6	Estructura de los problemas	Los problemas se redactaron de manera clara y coherente.	X				
7	Estructura de los problemas	Los datos suministrados son suficientes para resolver los problemas.	X				
8	Gráficas	Las gráficas son claras y cumplen con las condiciones del enunciado.	X				
9	Inocuidad	las preguntas no constituyen riesgo para el encuestado.	X				

Observaciones:

En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado: **SI** x **NO** .



Firma del Docente evaluador

Anexo K: Validación prueba final.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

FORMATO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN
PRUEBA FINAL

Título del proyecto: Aplicación de conceptos ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Programa: Maestría en Educación de la Universidad de Nariño.

Estudiantes: Katherine Nathaly Paz Mora y Deiby Yohana Castillo Narvaez.

Docente evaluador: Corina Dorado G.

Este formato busca determinar si el instrumento de medición, reúne los indicadores mencionados, por ello le solicitamos diligenciar teniendo en cuenta la escala de 1 a 5, donde 1 es poco y 5 es alto.

N°	Indicador	Definición	5	4	3	2	1
1	Claridad y precisión	Las preguntas están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.		X			
2	Coherencia	Las preguntas guardan relación con el título del proyecto.	X				
3	Orden	Las preguntas han sido redactadas teniendo en cuenta la complejidad para sexto grado.		X			
4	Organización	La estructura es adecuada, cuenta con elementos de presentación, desarrollo y agradecimiento.	X				
5	Extensión	El número de preguntas es adecuado y coherente para el tiempo propuesto.		X			
6	Estructura de los problemas	Los problemas se redactaron de manera clara y coherente.	X				
7	Estructura de los problemas	Los datos suministrados son suficientes para resolver los problemas.	X				
8	Gráficas	Las gráficas son claras y cumplen con las condiciones del enunciado.	X				
9	Inocuidad	las preguntas no constituyen riesgo para el encuestado.	X				

Observaciones: Tener en cuenta la complejidad ya que hay estudiantes que tienen diferentes dificultades.

En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado: **SI** x **NO**_

Corina Dorado G

Firma del Docente evaluador

Anexo L: Sabana de datos prueba final.

I1: Después de haber desarrollado la secuencia, tu gusto por la geometría es.
I2: ¿El desarrollo de la secuencia le ayudó a mejorar sus conocimientos sobre ángulos?
I3: ¿Consideras que la organización de la secuencia en GeoGebra generó un ambiente dinámico e intuitivo para aprender sobre los conceptos relacionados con ángulos?
I4: ¿Consideras que, en la secuencia, las construcciones dinámicas fueron útiles para comprender el concepto de ángulo y sus propiedades?
I5: ¿Consideras que haber usado el ambiente de geometría dinámica GeoGebra fue útil para resolver los problemas?
I6: ¿Consideras que la parte teórica (definición, clasificación y propiedades) de la secuencia fue clara y suficiente para desarrollar los problemas?
I7: ¿Le recomendarías a otra persona que use GeoGebra para resolver problemas de geometría?
I8: ¿Consideras que es importante aprender geometría para la vida diaria?
I9: ¿Por qué?
II1: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a:
II2: La suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es:
II3: Observa la imagen a continuación. Si la medida del ángulo EBD es 130°, ¿cuál es la medida del ángulo CBA?
II4: En la clasificación de los ángulos según su medida, los ángulos que se encuentran entre 180° y 360° se conocen como:
II5: En la siguiente figura, ¿cuál es la medida del ángulo ABD?
II6: En la imagen AEDCB es un pentágono regular, DGFC es un cuadrado y DHG es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo EHD?
II7: En la siguiente figura el triángulo ACB es isósceles, con los segmentos AB y BC de igual medida, ¿cuál es la medida del ángulo DBC?
II8: ABCD es un rectángulo de lados AB, BC, CD y DA. El triángulo equilátero DAE, está dentro del rectángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo EAB?
II9: En el triángulo ACB, los segmentos AB y AD tienen la misma medida. ¿Cuál es la medida del ángulo CEA?
II10: Sea ABCD un cuadrilátero de lados AB, BC, CD y DA. Se sabe que el ángulo ABD mide 10°, el ángulo DBC mide 50°, el ángulo BCA mide 60° y el ángulo ACD mide 20°. ¿Cuál es la medida de los ángulos CAB y CDB?
II11: Teniendo en cuenta los procesos realizados en la prueba ¿qué herramientas usó para dar solución a los problemas?

Código	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8
E01	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E02	Poco	Mucho	Si	Si	Si	No	Si	Si
E03	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E04	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E05	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E06	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E07	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E08	Nada	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	No
E09	Poco	Poco	Si	No	Si	Si	No	Si
E10	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E11	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	No
E12	Poco	Poco	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E13	Poco	Poco	No	Si	Si	Si	Si	No
E14	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E15	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si

E16	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E17	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E18	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E19	Poco	Poco	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E20	Poco	Poco	Si	Si	No	Si	No	No
E21	Poco	Mucho	Si	Si	Si	No	No	No
E22	Poco	Mucho	Si	Si	No	No	Si	Si
E23	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E24	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E25	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E26	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E27	Nada	Poco	Si	Si	Si	Si	Si	No

E28	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E29	Nada	Mucho	Si	Si	Si	No	Si	Si
E30	Poco	Poco	Si	Si	Si	No	No	Si
E31	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E32	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E33	Nada	Poco	Si	Si	Si	No	Si	No
E34	Mucho	Mucho	No	Si	No	No	Si	Si
E35	Poco	Poco	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E36	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E37	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E38	Mucho	Poco	Si	Si	Si	No	Si	Si
E39	Poco	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E40	Poco	Mucho	Si	Si	Si	No	Si	No
E41	Poco	Mucho	Si	Si	No	No	Si	Si
E42	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si
E43	Mucho	Mucho	Si	Si	Si	Si	Si	Si

I9	II1	II2	II3	II4
Bueno aprender geometría puede ser muy util para la vida diaria incluso para trabajar un ejemplo de esto sería construir torres ya que ellos deben tener muy bien calculado todo para que el edificio salga bien	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
la geometría te va a servir para medir y saber como sacar un ángulo y más	c. 180°	a. Depende del cuadrilátero	d. 310°	b. Ángulos convexos
sirve mucho gracias a que si te vas a ser arquitecto necesitas calcular la posición un ángulo de una casa, apartamento o edificio	c. 180°	a. Depende del cuadrilátero	a. 50°	b. Ángulos convexos
seria importante para la vida ya que tener profecion se necesita matematicas y geometria para realizar graficas y saber cuanto porcentaje han vendido, o sobrado, para saber cuanto medicamento darle a una persona y más	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
porque nos sirve para la costruccion de muchas cosas	d. 360°	e. Ninguna de las anteriores	b. 130°	e. Ninguna de las anteriores
porque nos ayuda a resolver problemas en la vida y nos sirve para calcular medidas	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
porque en todo nuetsro entorno podriamos aplicar la geometria	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
no porque en la vida diaria no necesitamos la geometria	c. 180°	b. 360°	a. 50°	d. Ángulos cóncavos
porque hay en ocasiones que la necesitas para la vida cotidiana	b. 90°	b. 360°	a. 50°	d. Ángulos cóncavos
Porque me ayuda para resolver problemas todos los días y además me ayuda si quiero estudiar arquitectura o otra profesión	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
Es necesario como aprendizaje básico, pero desde mi perspectiva no influye mucho en la vida cotidiana	c. 180°	b. 360°	b. 130°	b. Ángulos convexos
porque si quieres ser un arquitecto o vas hacer una construccion vas a necesitar estos conocimientos	c. 180°	a. Depende del cuadrilátero	a. 50°	c. Ángulos llanos
uno no le va a servir tanto en la vida cotidiana solo si quieres estudiar arquitectura	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
yo creo que es importante aprender geometría porque si eres constructor debes tener medidas, cuanto mide el angulo y así	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
Porque un arquitecto necesita saber los ángulos para que el edificio no se caiga.	b. 90°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos

Pues porque en la vida diaria se necesita mucho la matemática, la geometría entre otras cosas porque si tu quieres crear tu casa perfecta tienes que saber un poco de geometría para que tu casa no quede mal	c. 180°	c. 360°/4	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
PORQUE AL APRENDER ESTOS CONCEPTOS PODEMOS RESOLVER PROBLEMAS QUE SE NOS PRESENTEN EN LA CARRERA QUE ESTUDIEMOS EN EL FUTURO, SOBRE TODO ARQUITECTURA, PARA REALIZAR CONSTRUCCIONES QUE REQUIERAN VARIEDAD DE MATEMATICAS.	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
es muy buena herramienta y es divertida pero a veces se me trababa y no podía seguir al paso de mis compañeros, me ayudo mucho a entender	b. 90°	b. 360°	c. 180°	d. Ángulos cóncavos
Si es necesario porque lo utilizamos para medir ropa, cosas, angulos, alturas etc.. tambien para la medicion de espacios y lugares que serian los angulos	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
a veces no es muy necesaria la geometría en la vida diaria, no siempre debe medir los ángulos	b. 90°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
porque si uno no quiere llevar una vida en la que se necesiten angulos no son necesarios	c. 180°	b. 360°	b. 130°	a. Ángulos agudos
porque por ejemplo para construir una casa se debe saber las medidas para no caerse ni derrumbarse	c. 180°	d. 180°	a. 50°	d. Ángulos cóncavos
Si es importante aprender geometría hoy en día porque para los trabajos de arquitectura depende de esto	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
porque si uno quiere ser un arquitecto o más necesitariamos utilizar los conceptos, también es importante porque uno necesita para la vida la geometría y las matemáticas en todo.	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
Porque este simulador de geometría y matemáticas dinámicas puede ayudar mucho en el transcurso del aprendizaje en geometría y también para que otras personas puedan usar esta herramienta	c. 180°	b. 360°	b. 130°	c. Ángulos llanos
porque en muchas profesiones se usa geometría como lo es la ingeniería	c. 180°	b. 360°	a. 50°	d. Ángulos cóncavos
porque no es que yo vaya caminando y mire una palmera y me den ganas de sacarle el angulo, area y perimetro, pero por otra parte sirve para ver los productos y no pagar mas de lo que debes, pero no conozco a nadie que haga eso	d. 360°	a. Depende del cuadrilátero	c. 180°	c. Ángulos llanos

me parece necesario ya que esto esta en todos los lugares del mundo y saber esto nos caracteriza como liceristas	c. 180°	b. 360°	c. 180°	d. Ángulos cóncavos
SI PORQUE ADEMÁS DE QUE LA MATEMÁTICA, LA FÍSICA Y LA BIOLOGÍA ESTAN INMERSAS EN TODO CREO QUE LA GEOMETRIA SE RELACIONA MUCHO FISICA Y MATEMÁTICAS	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
Digamos la geometría está inmersa en todo	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
en un futuro vamos a necesitar la geometría porque bastantes trabajos requieren saber sobre la geometría	c. 180°	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores	d. Ángulos cóncavos
Porque me ayudan a encontrar los ángulos semejantes de figuras geométricas como el triángulo, cuadrado polígonos y más	c. 180°	d. 180°	a. 50°	b. Ángulos convexos
para mi la verdad geometria si es una parte de estudio nos sirve aveces pero la mayoria es que no	c. 180°	a. Depende del cuadrilátero	a. 50°	d. Ángulos cóncavos
porque aprender de esto puede ayudarnos mucho en algun trabajo que tengamos proximamente, porque por lo general casi todas las carreras universitatrias tienen matematicas y en eso tambien usaran geometria	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
porque siempre en nuestra vida diaria en cualquier lugar que nos encontremos vamos a ver angulos como en un tv borrador entre otros	c. 180°	c. 360°/4	b. 130°	d. Ángulos cóncavos
si es impotante ya que si nos preguntaran sobre un tema de geometria fuera del colegio lo podriamos responder muy facilmente y ademas la geometria tambien la podemos ver en las diferentes areas	c. 180°	b. 360°	b. 130°	d. Ángulos cóncavos

II5	II6	II7	II8	II9	II10	II11
c. 120°	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores				Lápiz, Hojas de papel, Lapicero
c. 120°	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores		no me acuerdo	45°	Regla, Compás, Calculadora, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	b. 78°	d. 70°	c. 30°	70°	90°	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°	c. 30°	135°	110 y 70	Hojas de papel
a. 60°	d. 180°	e. Ninguna de las anteriores	b. 60°		130 y 180	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°	e. Ninguna de las anteriores	135°	220°	Compás, Lápiz, Hojas de papel
	d. 180°	c. 87°	a. 90°	nose		Lápiz, Hojas de papel
d. 180°	d. 180°	c. 87°			nose	Lápiz
c. 120°	c. 39°	a. 40°	c. 30°	65°		Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°		135°	110°	Regla, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	a.102°	a. 40°	c. 30°	136°	110	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	b. 78°	c. 87°	b. 60°	65	70 y 20	Regla, Calculadora, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	d. 180°	a. 40°		115°		Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°	c. 30°	135°	10°	Regla, Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°		135°		Regla, Lápiz, Hojas de papel

d. 180°	d. 180°	a. 40°		15°	80°	Regla, Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°	a. 40°	c. 30°	135	60 y 50	Lápiz, Hojas de papel, borrador
c. 120°	d. 180°	b. 60°		75°	180° y 80°	Lápiz, Hojas de papel, Borrador
c. 120°	c. 39°	a. 40°		10 y 20	60 y 180	Hojas de papel
c. 120°	a.102°	b. 60°	c. 30°	75°	30° y 90°	Calculadora, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	e. Ninguna de las anteriores	e. Ninguna de las anteriores	d. 10°	10		Lápiz, Hojas de papel, borrador
c. 120°	c. 39°	a. 40°	c. 30°	180°	10°	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	b. 78°	e. Ninguna de las anteriores	c. 30°	35°		Lápiz, Hojas de papel, Cuaderno
c. 120°	c. 39°	a. 40°		120	110	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	a.102°	a. 40°	c. 30°			Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	c. 39°				65°	Lápiz, Hojas de papel, Fórmulas
c. 120°	b. 78°	a. 40°	a. 90°	135	60 y 70	Lápiz, Hojas de papel

c. 120°	e. Ninguna de las anteriores	a. 40°	e. Ninguna de las anteriores	120°	30° y 110°	Lápiz, Hojas de papel, Pulso
c. 120°		d. 70°	c. 30°	65°	30°	Lápiz, Hojas de papel, Mente
c. 120°	c. 39°	a. 40°		135°		Lápiz, Hojas de papel, La mente
c. 120°	a.102°	a. 40°	b. 60°	20°	30°	cuaderno
c. 120°	c. 39°	a. 40°	b. 60°	50°	218°	Regla, Lápiz, Hojas de papel, mente-inteligencia
c. 120°	e. Ninguna de las anteriores	a. 40°	c. 30°	140°	45 y 45	Lápiz, Hojas de papel
c. 120°	d. 180°	b. 60°	b. 60°	15°	20°	Regla, Lápiz, Hojas de papel
c. 120°		b. 60°	b. 60°	115		Regla, Compás, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	a.102°	a. 40°	c. 30°	135	110	Regla, Hojas de papel, LAPICERO
c. 120°	c. 39°	a. 40°	a. 90°	50°		Lápiz, Hojas de papel
c. 120°		e. Ninguna de las anteriores	a. 90°	90	90	Lápiz, Hojas de papel
d. 180°	d. 180°	e. Ninguna de las anteriores	a. 90°	180°	60° y 50°	Compás, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	d. 180°	d. 70°	e. Ninguna de las anteriores	25	no me acuerdo	Regla, Lápiz, Hojas de papel, borrador
a. 60°	e. Ninguna de las anteriores	a. 40°	b. 60°	25		Regla, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	e. Ninguna de las anteriores	a. 40°	b. 60°	135	60 y 80	Regla, Lápiz, Hojas de papel
a. 60°	b. 78°	d. 70°	c. 30°	205°	110 y 70	Regla, Lápiz, Hojas de papel