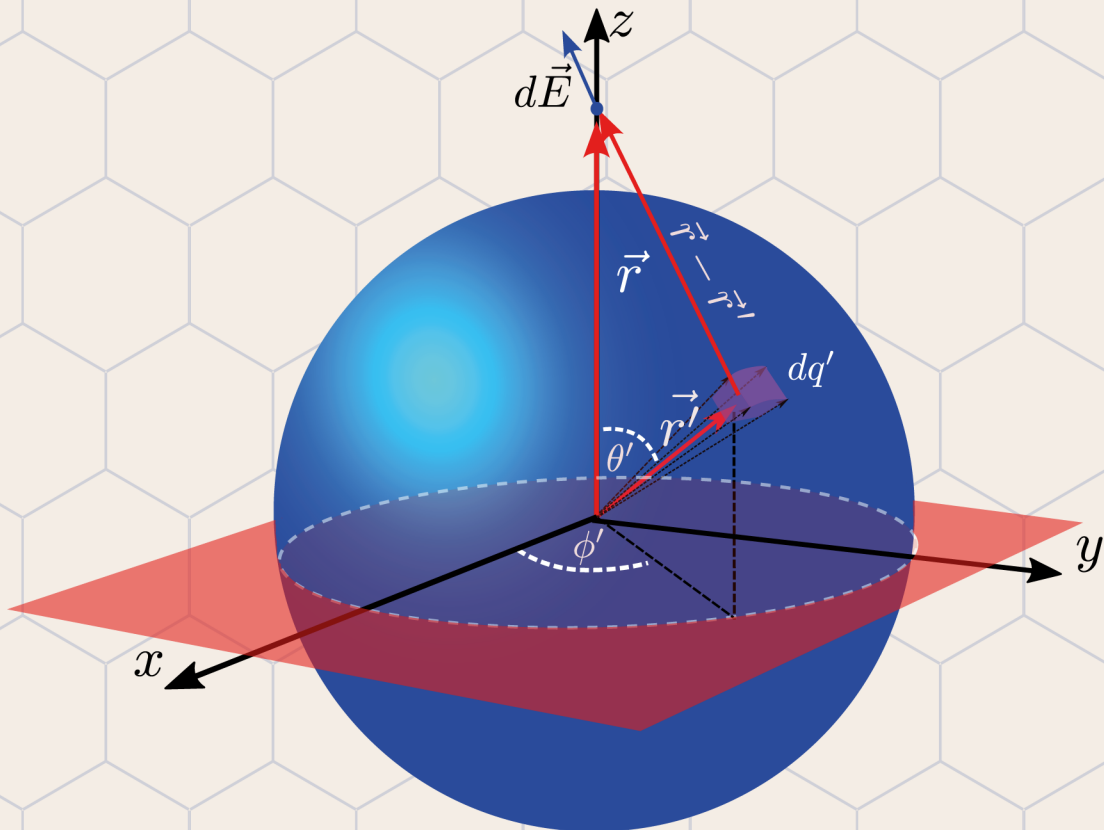


Electrodinámica

Teoría y problemas

Vol. I



German Enrique Ramos Zambrano
Juan Carlos Salazar Montenegro
Ángela Viviana Gómez Azuero


Editorial
Universidad de Nariño

èditorial

Universidad de **Nariño**

Electrodinámica

Teoría y problemas

Vol. I

Electrodinámica

Teoría y problemas

Vol. I

German Ramos Zambrano, Juan Carlos Salazar Montenegro,
Ángela Viviana Gómez Azuero.

editorial
Universidad de **Nariño**

Ramos Zambrano, German Enrique

Electrodinámica : Teoría y problemas / German Enrique Ramos Zambrano, Juan Carlos Salazar Montenegro, Ángela Viviana Gómez Azuero—1ª. Ed. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

V. 1 : ilustraciones, gráficas.

Contenido : V. 1: Operaciones y operadores vectoriales, Fuerza y campo eléctrico, Ecuación de Laplace, Campo eléctrico en materiales.

Incluye referencias bibliográficas p. 268 y reseña de autores p. 269

ISBN: 978-628-7771-76-5

1. Electrodinámica—Ejercicios y problemas 2. Operaciones vectoriales 3. Operadores diferenciales vectoriales 4. Campo eléctrico 5. Ley de Gauss 6. Energía electrostática 7. Delta de kronecker 8. Notación indicial 9. Ecuación de Laplace. I. Salazar Montenegro, Juan Carlos II. Gómez Azuero, Ángela Viviana

537.6 R175e – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Electrodinámica: Teoría y problemas

© Editorial Universidad de Nariño

© German Ramos Zambrano

Juan Carlos Salazar Montenegro

Ángela Viviana Gómez Azuero

ISBN: 978-628-7771-76-5

Primera edición

Corrección de estilo: German Chaves Jurado

Diseño y diagramación: Juan Carlos Salazar Montenegro, Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Agosto de 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

Índice general

1	Operaciones y operadores vectoriales	8
1.1	Delta de Kronecker	8
1.2	Símbolo de Levi-Civita	11
1.2.1	Aplicaciones	12
1.3	Notación indicial	14
1.4	Identidades con operadores vectoriales	18
1.4.1	Operador gradiente	18
1.4.2	Operador Divergencia	20
1.4.3	Operador Rotacional	22
1.4.4	Operador Laplaciano	24
1.4.5	Aplicaciones adicionales	26
1.5	Coordenadas curvilíneas	33
1.5.1	Gradiente en coordenadas curvilíneas	34
1.5.2	Divergencia en coordenadas curvilíneas	36
1.5.3	Rotacional en coordenadas curvilíneas	38
1.5.4	Laplaciano en coordenadas curvilíneas	40
2	Fuerza y campo eléctrico	47
2.1	Ley de Coulomb	47
2.1.1	Densidades de carga eléctrica	50
2.1.2	Densidades de carga volumétricas equivalentes	51
2.1.3	Distribuciones de carga continuas	55

2.2	Campo Eléctrico	56
2.3	Potencial Electrostático	71
2.4	Ley de Gauss	76
2.5	Trabajo y Energía	86
2.6	Dipolo Eléctrico	101
2.7	Torque Sobre un Dipolo Eléctrico	104
2.8	Desarrollo Multipolar de Campos Eléctricos	109
2.9	Condiciones de Frontera	114
3	Ecuación de Laplace	120
3.1	Superposición de soluciones	121
3.2	Unicidad de las soluciones	121
3.3	Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares	125
3.3.1	Problemas en dos dimensiones	125
3.3.2	Solución a la ecuación de Laplace en tres dimensiones	150
3.4	Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas	164
3.4.1	Problemas en Tres Dimensiones	169
3.4.2	Propiedades de las Funciones de Bessel	172
3.5	Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas	196
3.5.1	Armónicos Esféricos	212
4	Campo eléctrico en materiales	219
4.1	Polarización	220
4.2	Potencial y campo eléctrico asociado a un material dieléctrico	221
4.3	Ley de Gauss para un Dieléctrico	236
4.4	Susceptibilidad Eléctrica	238
4.5	Condiciones de Frontera	246
4.6	Energía Electrostática de un Sistema en Presencia de un Dieléctrico	253

1 — Operaciones y operadores vectoriales

En los temas abordados en este texto, se realizarán numerosos procedimientos que implican el uso de operaciones vectoriales y operadores diferenciales vectoriales. Por lo tanto, es útil proporcionar un breve resumen de algunas operaciones vectoriales, incluyendo los operadores diferenciales que se utilizarán durante el curso. Además, se explicará lo que se conoce como *notación indicial*, la cual se empleará en la mayoría de los cálculos en el desarrollo de la temática.

Para iniciar, se definirán y resumirán las principales características de la Delta de Kronecker y del símbolo de Levi-Civita. Posteriormente, se explicará en qué consiste la notación indicial, también conocida como notación de Einstein.

1.1 Delta de Kronecker

La delta de Kronecker es una función de dos variables discretas que se define de la siguiente manera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Los índices i y j en la expresión (1.1) toman valores enteros y satisfacen $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. La delta de Kronecker es útil para simplificar expresiones y facilitar cálculos matemáticos, como se demostrará en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1

Escribir en forma compacta la condición de ortonormalización de los vectores bases $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

Solución: Los vectores base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ del sistema de coordenadas cartesiano tridimensional

son ortonormales; es decir:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \\ \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1.\end{aligned}\quad (1.2)$$

La condición de ortonormalización (1.2) se puede expresar de manera más compacta utilizando la siguiente notación:

$$\hat{e}_1 = \hat{i}, \quad \hat{e}_2 = \hat{j}, \quad \hat{e}_3 = \hat{k}. \quad (1.3)$$

De esta forma, el conjunto de ecuaciones (1.2) se reduce a:

$$\hat{e}_l \cdot \hat{e}_m = \delta_{lm} \quad \forall, l, m = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.2

Escribir la solución de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta, \quad (1.5)$$

en forma compacta utilizando la delta de Kronecker.

Solución: En el cálculo de la integral (1.5) se deben considerar dos casos: $m = n$ y $m \neq n$. Para $m = n$ se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(0)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (1.6)$$

Ahora, si $m \neq n$, resulta que:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta &= \left. \frac{e^{i(m-n)\theta}}{i(m-n)} \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(m-n)} (e^{i(m-n)2\pi} - 1) \\ &= \frac{1}{i(m-n)} (1 - 1) = 0.\end{aligned}\quad (1.7)$$

En (1.7) se ha tenido en cuenta que $e^{i(m-n)2\pi} = 1$ (ya que $(m-n)$ es un entero). Los resultados (1.6) y (1.7) se pueden escribir en forma compacta como:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{mn}. \quad (1.8)$$

Ejemplo 1.3

Utilizar las propiedades de la delta de Kronecker para reducir la siguiente expresión:

$$S = \sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{l3}. \quad (1.9)$$

Solución: La sumatoria planteada en (1.9) establece una suma sobre el índice l , tal que:

$$S = e^{i(2\pi)} \delta_{13} + e^{i(4\pi)} \delta_{23} + e^{i(6\pi)} \delta_{33} + \dots + e^{i(2N\pi)} \delta_{N3}. \quad (1.10)$$

Sin embargo, la función delta de Kronecker, será diferente de cero, solo cuando sus dos índices sean iguales. Por lo tanto (1.10) se reduce a:

$$\begin{aligned} S &= e^{i(2\pi)} \times 0 + e^{i(4\pi)} \times 0 + e^{i(6\pi)} \delta_{33} + \dots + e^{i(2N\pi)} \times 0 \\ &= e^{i(6\pi)} \delta_{33} \\ &= e^{i(6\pi)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Como conclusión:

$$S = \sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{l3} = e^{i(6\pi)} \delta_{33} = e^{i(6\pi)}. \quad (1.12)$$

La presencia de la delta de Kronecker dentro de la sumatoria elimina todos los términos exceptuando el término $l = 3$. En el ejemplo anterior, se fijó un valor de 3 para uno de los índices de la delta; sin embargo, no es necesario especificar numéricamente el valor de uno de los índices, es decir:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{lm} \\ &= e^{i(2m\pi)} \delta_{mm} \\ &= e^{i(2m\pi)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ejemplo 1.4

Utilizar las propiedades de la delta de Kronecker para reducir la siguiente expresión:

$$S = \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{lm}. \quad (1.14)$$

Solución: La presencia de la delta de Kronecker elimina una de las sumas en (1.14), de

manera que:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{lm} = \sum_{m=1}^N \left(\sum_{l=1}^N e^{i(2l\pi)} \delta_{lm} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^N e^{i(2m\pi)} \delta_{mm} \\
 &= e^{i(2\pi)} \delta_{11} + e^{i(4\pi)} \delta_{22} + \dots + e^{i(2N\pi)} \delta_{NN} \\
 &= e^{i(2\pi)} + e^{i(4\pi)} + \dots + e^{i(2N\pi)} \\
 &= 1 + 1 + \dots + 1 \\
 &= N.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

En la expresión anterior, se ha tenido en cuenta que $e^{i2N\pi} = 1$.

1.2 Símbolo de Levi-Civita

El símbolo de Levi-Civita es un conjunto de números definido a partir del signo de una permutación de los números naturales $(1, 2, 3, \dots, n)$, donde n es un número entero positivo. Este símbolo se utiliza principalmente en dos, tres y cuatro dimensiones.

Dos Dimensiones

El símbolo de Levi-Civita en dos dimensiones se denota como ε_{ij} (con $i, j = 1, 2$) y se define por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j) = (1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j) = (2, 1), \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{1.16}$$

El símbolo de Levi-Civita en dos dimensiones tiene la siguiente propiedad:

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}. \tag{1.17}$$

Ejemplo 1.5

Demostrar que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{in} &= \delta_{jn}, \quad y \\
 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} &= 2.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Solución: A partir de (1.17), haciendo $m = i$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon_{in} = \sum_{i=1}^2 \delta_{ii} \delta_{jn} - \sum_{i=1}^2 \delta_{in} \delta_{ji}. \quad (1.19)$$

Utilizando las propiedades de la función delta de Kronecker, se tiene que $\sum_{i=1}^2 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$ y que $\sum_{i=1}^2 \delta_{in} \delta_{ji} = \delta_{nj}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon_{in} = 2\delta_{jn} - \delta_{jn} = \delta_{jn}. \quad (1.20)$$

Ahora, reemplazando en (1.20) $n \rightarrow j$, y realizando una sumatoria sobre j se tiene que:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = \sum_{j=1}^2 \delta_{jj} = 2. \quad (1.21)$$

Tres Dimensiones

El símbolo de Levi-Civita en tres dimensiones se denota como ϵ_{ijk} (con $i, j, k = 1, 2, 3$) y se define por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ o } i = k \text{ o } j = k. \end{cases} \quad (1.22)$$

Si se tiene el conjunto de índices $\{i, j, k, l, m\}$, los cuales puedan tomar valores entre 1 y 3, se cumple que:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

A partir de (1.23), se puede demostrar que:

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (1.24)$$

Ejercicio 1.1 Demuestre a partir de (1.24) que: $\sum_{i=1}^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$

1.2.1 Aplicaciones

Entre las aplicaciones más comunes del símbolo de Levi-Civita se encuentra el producto cruz de dos vectores ($\vec{A}$) y ($\vec{B}$), que se puede expresar en términos del tensor de Levi-Civita como:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \sum_{l,m,n=1}^3 (\epsilon_{lmn} A_m B_n) \hat{e}_l \\ &= \sum_{l=1}^3 \hat{e}_l \left(\sum_{m,n=1}^3 (\epsilon_{lmn} A_m B_n) \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde se asume que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en (1.25) se expanden en una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Desarrollando (1.25), se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= ((\epsilon_{123}A_2B_3) + (\epsilon_{132}A_3B_2))\hat{e}_1 \\ &+ ((\epsilon_{213}A_1B_3) + (\epsilon_{231}A_3B_1))\hat{e}_2 \\ &+ ((\epsilon_{312}A_1B_2) + (\epsilon_{321}A_2B_1))\hat{e}_3,\end{aligned}\quad (1.26)$$

donde se han eliminado términos nulos asociados al símbolo de Levi-Civita con índices iguales. La expresión anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{e}_1 \\ &+ (-A_1B_3 + A_3B_1)\hat{e}_2 \\ &+ (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{e}_3.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Ahora, si la base está asociada al sistema de coordenadas cartesianas, se identifica $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, $\{A_1, A_2, A_3\} = \{A_x, A_y, A_z\}$ y $\{B_1, B_2, B_3\} = \{B_x, B_y, B_z\}$. Entonces, de (1.27) resulta:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (-A_xB_z + A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}.\quad (1.28)$$

La expresión (1.25) también establece que la l -ésima componente del vector $\vec{A} \times \vec{B}$ se identifica por:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_l = \sum_{m,n=1}^3 (\epsilon_{lmn}A_mB_n).\quad (1.29)$$

Otro ejemplo en el que el símbolo de Levi-Civita permite realizar simplificaciones es en el rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$, que se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{l=1}^3 \hat{e}_l \left(\sum_{m,n=1}^3 (\epsilon_{lmn} \partial_m A_n) \right).\quad (1.30)$$

Al considerar la primera componente del vector $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 &= \sum_{m,n=1}^3 (\epsilon_{1mn} \partial_m A_n) \\ &= \epsilon_{123} \partial_2 A_3 + \epsilon_{132} \partial_3 A_2 \\ &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Utilizando la correspondencia con las coordenadas cartesianas, se obtiene que la componente x del rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ es:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y.\quad (1.32)$$

De forma similar, se deduce:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x.\end{aligned}\quad (1.33)$$

1.3 Notación indicial

La notación indicial es una forma simplificada de escribir expresiones matemáticas que implican sumas, eliminando el símbolo (o los símbolos) de suma. Para que esta notación sea consistente, el índice utilizado para especificar la suma (o las sumas) en la expresión matemática debe aparecer como índice repetido en el término i -ésimo (j -ésimo, l -ésimo, etc). que describe el sumando (o los sumandos) de la expresión original. De este modo, si en una expresión aparece un índice repetido, se asume automáticamente que se trata de una suma sobre ese índice. En notación indicial, una expresión no puede tener un índice repetido más de dos veces. Además, si un índice aparece solo una vez en la expresión, no implica una suma.

Para ejemplificar el uso de la notación indicial, a continuación se presentan algunas expresiones en su forma usual (con sumatorias) y en notación indicial.

1. Vector $\vec{A}$ escrito en una base ortonormal:

Notación normal	Notación indicial
$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$	$\vec{A} = A_i \hat{e}_i$

2. Trazo de una matriz A de dimensión 3×3 con entradas a_{ij} :

Notación normal	Notación indicial
$Tr(A) = \sum_{j=1}^3 a_{jj}$	$Tr(A) = a_{jj}$

3. Producto cruz entre vectores $\vec{A} \times \vec{B}$:

Notación normal	Notación indicial
$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$	$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$

4. Componente i -ésima del producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$:

Notación normal	Notación indicial
$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k$	$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

Como se observa en la expresión anterior, el índice (i) especifica una componente del vector y por lo tanto, no está asociado a una suma, ni aparece como índice repetido en la expresión matemática en el mismo lado de la igualdad.

5. Elemento c_{ij} de una matriz C de dimensión 3×3 obtenida por la multiplicación de una matriz $A(3 \times 3)$ por una matriz $B(3 \times 3)$:

Notación normal	Notación indicial
$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$	$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$

En la expresión anterior, los índices i y j aparecen solo una vez en cada lado de la igualdad, por lo tanto no implican suma. El índice k aparece repetido en el lado derecho de la igualdad y por tanto existe implícitamente una suma.

No todas las expresiones matemáticas que implican sumas, se pueden escribir directamente en notación indicial. Por ejemplo, la expresión:

$$S = A_1 B_1 C_1 + A_2 B_2 C_2 + A_3 B_3 C_3, \quad (1.34)$$

se puede escribir de manera abreviada con una suma, tal que:

$$S = \sum_{i=1}^3 A_i B_i C_i. \quad (1.35)$$

Si se intenta utilizar la notación indicial eliminando simplemente el símbolo de la suma, se tiene que:

$$S = A_i B_i C_i; \quad (1.36)$$

Sin embargo, en tal caso, el índice i aparece tres veces en un lado de la igualdad, lo cual no es permitido en notación indicial.

Ejemplo 1.6

Escribir las las siguientes expresiones utilizando notación indicial: a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$, b) $\vec{A} \times \vec{B}$.

Solución:

a) *Producto escalar de vectores:*

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)}_{\delta_{ij}} \\ &= A_i \underbrace{(B_j \delta_{ij})}_{B_i} = A_i B_i \\ &= \underbrace{(A_i \delta_{ij})}_{A_j} B_j = A_j B_j \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \end{aligned} \quad (1.37)$$

El índice repetido j en el producto $A_j B_j$ implica suma sobre j (de 1 a 3 en este caso).

b) *Producto cruz entre vectores:*

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_i \hat{e}_i) \times (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \underbrace{(\hat{e}_i \times \hat{e}_j)}_{\epsilon_{ijk} \hat{e}_k} \\ &= \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Los índices i, j, k en (1.38) están repetidos y por tanto implican una suma por cada índice, donde cada índice toma valores de 1 a 3.

Ejemplo 1.7

Demostrar que: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Solución: En términos de notación indicial, se entiende que el producto vectorial se expresa

como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (1.39)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} B_k A_j = -\hat{e}_i \epsilon_{ikj} B_k A_j \\ &= -\vec{B} \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

De esta relación, se puede deducir que:

$$\vec{A} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{A}, \quad (1.41)$$

con lo cual:

$$2(\vec{A} \times \vec{A}) = \vec{0}, \quad (1.42)$$

de manera que se debe cumplir que:

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}. \quad (1.43)$$

Ejemplo 1.8

Utilizando notación indicial, demostrar que:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (1.44)$$

Solución: Se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= B_j \epsilon_{jki} A_i C_k = B_j \epsilon_{jki} C_k A_i = B_j (\vec{C} \times \vec{A})_j \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (1.45)$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= C_k \epsilon_{kij} A_i B_j \\ &= C_k (\vec{A} \times \vec{B})_k = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ejemplo 1.9

Utilizando notación indicial demostrar que:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.47)$$

Solución: La expresión (1.47) se puede desarrollar así:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \hat{e}_i A_j B_l C_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \hat{e}_i A_j B_l C_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \hat{e}_i A_j B_l C_m \\ &= \underbrace{(\delta_{il} \hat{e}_i)}_{\hat{e}_l} \underbrace{(\delta_{jm} A_j)}_{A_m} B_l C_m - \underbrace{(\delta_{im} \hat{e}_i)}_{\hat{e}_m} \underbrace{(\delta_{jl} A_j)}_{A_l} B_l C_m \\ &= \underbrace{(\hat{e}_l B_l)}_{\vec{B}} \underbrace{(A_m C_m)}_{\vec{A} \cdot \vec{C}} - \underbrace{(\hat{e}_m C_m)}_{\vec{C}} \underbrace{(A_l B_l)}_{\vec{A} \cdot \vec{B}} \\ &= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ejemplo 1.10

Utilizando notación indicial demostrar que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C}). \quad (1.49)$$

Solución: Se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i = (\epsilon_{ijk} A_j B_k) (\epsilon_{ilm} C_l D_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} A_j B_k C_l D_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m \\ &= \underbrace{(\delta_{jl} A_j)}_{A_l} \underbrace{(\delta_{km} B_k)}_{B_m} C_l D_m - \underbrace{(\delta_{jm} A_j)}_{A_m} \underbrace{(\delta_{kl} B_k)}_{B_l} C_l D_m \\ &= \underbrace{(A_l C_l)}_{\vec{A} \cdot \vec{C}} \underbrace{(B_m D_m)}_{\vec{B} \cdot \vec{D}} - \underbrace{(A_m D_m)}_{\vec{A} \cdot \vec{D}} \underbrace{(B_l C_l)}_{\vec{B} \cdot \vec{C}} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ejercicio 1.2 Calcular las expresiones:

$$a) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}). \quad (1.51)$$

$$b) \quad \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}). \quad (1.52)$$

Ejercicio 1.3 Demostrar las siguientes relaciones:

a)

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \quad (1.53)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{B} [\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})] - \vec{A} [\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})]. \quad (1.54)$$

b)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}. \quad (1.55)$$

1.4 Identidades con operadores vectoriales

En las siguientes secciones de este texto, se hará uso de operadores diferenciales vectoriales, los cuales se estudiarán a continuación utilizando notación indicial.

1.4.1 Operador gradiente

Se considera una función diferenciable f que depende de las coordenadas (x, y, z) de la siguiente manera:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (1.56)$$

Esta expresión se puede interpretar como el producto escalar de dos vectores; es decir:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\ &= (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

donde se ha introducido el gradiente de la función escalar f en la forma:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}, \quad (1.58)$$

y esta expresión en forma compacta puede representarse como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \hat{e}_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Al establecer:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.60)$$

se puede expresar el gradiente de un campo escalar f como:

$$\vec{\nabla} f = \hat{e}_i \partial_i f, \quad (1.61)$$

de modo que el operador vectorial gradiente, simbólicamente denotado como $\vec{\nabla}$, se define en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_i \partial_i. \quad (1.62)$$

Ejemplo 1.11

Utilizando notación indicial, demostrar que:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}. \quad (1.63)$$

Solución: Utilizando la definición del operador gradiente se tiene que:

$$\vec{\nabla} r = \hat{e}_i \partial_i r = \hat{e}_i \partial_i (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} = \hat{e}_i \left(\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \partial_i (x_k x_k). \quad (1.64)$$

Posteriormente, al simplificar,

$$\partial_i (x_k x_k) = (\partial_i x_k) x_k + x_k (\partial_i x_k) = 2x_k (\partial_i x_k) = 2x_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.65)$$

y considerando que:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} = \delta_{ik}, \quad (1.66)$$

se concluye que:

$$\partial_i (x_k x_k) = 2x_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right) = 2x_k \delta_{ik} = 2x_i. \quad (1.67)$$

Finalmente, al realizar algunos cálculos algebraicos se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} r &= \hat{e}_i \left(\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \partial_i (x_k x_k) \\ &= \left[(x_j x_j)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} x_i \hat{e}_i \\ &= \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ejemplo 1.12

Calcular $\vec{\nabla} r^n$ utilizando notación indicial.

Solución: Aplicando la definición del operador gradiente en notación indicial se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} r^n &= \hat{e}_i \partial_i r^n = \hat{e}_i \partial_i (x_j x_j)^{\frac{n}{2}} = \hat{e}_i \left(\frac{n}{2} \right) (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} \underbrace{\partial_i (x_j x_j)}_{2x_i} \\
 &= n (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} (\hat{e}_i x_i) = n (x_j x_j)^{\frac{n-2}{2}} (\hat{e}_i x_i) \\
 &= n \left[\underbrace{(x_j x_j)^{\frac{1}{2}}}_r \right]^{(n-2)} \underbrace{(\hat{e}_i x_i)}_{\vec{r}} = n r^{(n-2)} \vec{r} = n \vec{r} r^{(n-2)}. \tag{1.69}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.13

Determinar $\vec{\nabla}(fg)$, donde f y g corresponden a campos escalares.

Solución: Aplicando el operador gradiente se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}(fg) &= \hat{e}_i (\partial_i f) g + \hat{e}_i f (\partial_i g) \\
 &= \underbrace{(\hat{e}_i \partial_i f) g}_{\vec{\nabla} f} + f \underbrace{(\hat{e}_i \partial_i g)}_{\vec{\nabla} g} \\
 &= (\vec{\nabla} f) g + f (\vec{\nabla} g). \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4 Utilizando notación indicial, reducir las expresiones:

a) $\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B})$.

b) $\vec{\nabla} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$.

Ejercicio 1.5 Utilizando notación indicial, demostrar que:

$$\vec{\nabla} (\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2}. \tag{1.71}$$

1.4.2 Operador Divergencia

Si $\vec{A}(x, y, z)$ es un campo vectorial, la divergencia en coordenadas cartesianas se define como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\hat{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \hat{e}_j) = \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)}_{\delta_{ij}} \partial_i A_j = \partial_i A_i, \tag{1.72}$$

que en coordenadas cartesianas se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \partial_i A_i &= \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 \\
 &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\
 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

Ejemplo 1.14

A partir de la definición del operador divergencia, simplificar la expresión: a) $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$.

Solución: Utilizando la definición del operador divergencia, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= \partial_i \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)_i = \partial_i \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = \partial_i \left[x_i (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \underbrace{(\partial_i x_i)}_{\delta_{ii}} (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} + x_i \left(-\frac{3}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}-1} \underbrace{\partial_i (x_j x_j)}_{2x_j} \\
 &= 3 \left[\underbrace{(x_j x_j)^{\frac{1}{2}}}_r \right]^{-3} - 3 \left[\underbrace{(x_j x_j)^{\frac{1}{2}}}_r \right]^{-5} \underbrace{(x_i x_i)}_{r^2} \\
 &= 3r^{-3} - 3r^{-5} r^2 = 3r^{-3} - 3r^{-3} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Ejemplo 1.15

Aplicando la definición del operador divergencia, demostrar que:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \tag{1.75}$$

donde f es un campo escalar y $\vec{A}$ un campo vectorial.

Solución: Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) &= \partial_i (f \vec{A})_i = \partial_i (f A_i) \\
 &= (\partial_i f) A_i + f (\partial_i A_i) \\
 &= (\vec{\nabla} f)_i A_i + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\
 &= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Ejercicio 1.6 Encontrar el resultado de: a) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Ejercicio 1.7 Demostrar las siguiente relaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (1.77)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (r^3 \mathbf{r}) = 6r^3, \quad (1.78)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[r \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = 3r^{-4}, \quad (1.79)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n, \quad (1.80)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[r \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = \partial_i \left[r \partial_i \left(\frac{1}{r^3} \right) \right]. \quad (1.81)$$

1.4.3 Operador Rotacional

De la definición de producto vectorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (1.82)$$

se puede entender que el rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$ en coordenadas cartesianas se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{e}_i \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_i = \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (1.83)$$

En coordenadas cartesianas, esto se representa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (1.84)$$

Ejemplo 1.16

Demostrar que:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (1.85)$$

donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son campos vectoriales.

Solución: Aplicando el operador divergencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i = \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \varepsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) \\ &= B_k \varepsilon_{kij} (\partial_i A_j) - A_j \varepsilon_{jik} (\partial_i B_k) \\ &= B_k (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k - A_j (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Ejemplo 1.17

Calcular la expresión: $\vec{\nabla} \times (f\vec{A})$, siendo f un campo escalar y $\vec{A}$ un campo vectorial.

Solución: Aplicando el operador rotacional, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (f\vec{A}) &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f\vec{A})_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (fA_k) \\
 &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j f) A_k + \hat{e}_i \epsilon_{ijk} f (\partial_j A_k) \\
 &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} f)_j A_k + f \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k) \\
 &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{A} + f (\vec{\nabla} \times \vec{A}).
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Ejemplo 1.18

Evaluar $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ para $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos campos vectoriales.

Solución: Aplicando el operador rotacional, el producto cruz y haciendo uso de notación indicial, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} A_l B_m) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \hat{e}_i \partial_j (A_l B_m) = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \hat{e}_i \partial_j (A_l B_m) \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \hat{e}_i [(\partial_j A_l) B_m + A_l (\partial_j B_m)] \\
 &= \delta_{il} \delta_{jm} \hat{e}_i (\partial_j A_l) B_m + \delta_{il} \delta_{jm} \hat{e}_i A_l (\partial_j B_m) \\
 &\quad - \delta_{im} \delta_{jl} \hat{e}_i (\partial_j A_l) B_m - \delta_{im} \delta_{jl} \hat{e}_i A_l (\partial_j B_m),
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

y aplicando las propiedades de la delta de Kronecker, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \hat{e}_l (\partial_m A_l) B_m + \hat{e}_l A_l (\partial_m B_m) - \hat{e}_m (\partial_l A_l) B_m \\
 &\quad - \hat{e}_m A_l (\partial_l B_m) \\
 &= \underbrace{(B_m \partial_m)}_{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})} \underbrace{(\hat{e}_l A_l)}_{\vec{A}} + \underbrace{(\hat{e}_l A_l)}_{\vec{A}} \underbrace{(\partial_m B_m)}_{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})} - \underbrace{(\hat{e}_m B_m)}_{\vec{B}} \underbrace{(\partial_l A_l)}_{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} \\
 &\quad - \underbrace{(A_l \partial_l)}_{(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})} \underbrace{(\hat{e}_m B_m)}_{\vec{B}};
 \end{aligned} \tag{1.89}$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \tag{1.90}$$

Ejemplo 1.19

Calcular: a) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$.

Solución: Aplicando el operador rotacional, se tiene que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \hat{e}_i \epsilon_{ijj} = \vec{0}. \quad (1.91)$$

Ejercicio 1.8 Demostrar que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}, \quad (1.92)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \quad (1.93)$$

$$\vec{\nabla} \times [f (\vec{\nabla} f)] = \vec{0}, \quad (1.94)$$

$$\vec{\nabla} \times (r^n \vec{r}) = \vec{0}. \quad (1.95)$$

1.4.4 Operador Laplaciano

El operador Laplaciano aplicado a un campo escalar F en coordenadas cartesianas, se define como:

$$\vec{\nabla}^2 F = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} F) = \partial_j (\vec{\nabla} F)_j = \partial_j \partial_j F. \quad (1.96)$$

Ejemplo 1.20

Utilizar la definición del operador Laplaciano para calcular $\vec{\nabla}^2 r^n$.

Solución: Aplicando la definición del operador Laplaciano, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 r^n &= \partial_i \partial_i r^n = \partial_i \partial_i (x_j x_j)^{\frac{n}{2}} = \partial_i \left[\left(\frac{n}{2} \right) (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} \underbrace{\partial_i (x_k x_k)}_{2x_i} \right] \\ &= n \partial_i \left[(x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} x_i \right], \end{aligned} \quad (1.97)$$

al aplicar la segunda derivación se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 r^n &= n \left\{ \left[\partial_i (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} \right] x_i + (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} \underbrace{(\partial_i x_i)}_{\delta_{ii}} \right\} \\
&= n \left\{ x_i \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-2} \underbrace{\partial_i (x_k x_k)}_{2x_i} \right] + \underbrace{\delta_{ii}}_3 (x_j x_j)^{\frac{n}{2}-1} \right\} \\
&= n \left\{ x_i \left[2x_i \left(\frac{n-2}{2} \right) (x_j x_j)^{\frac{n-4}{2}} \right] + 3 (x_j x_j)^{\frac{n-2}{2}} \right\} \\
&= n \left\{ (n-2) \underbrace{(x_i x_i)}_{r^2} \underbrace{(x_j x_j)^{\frac{n-4}{2}}}_{r^{n-4}} + 3 \underbrace{(x_j x_j)^{\frac{n-2}{2}}}_{r^{n-2}} \right\} \\
&= n \left[(n-2) r^{n-2} + 3 r^{n-2} \right] = n (n-2+3) r^{n-2} \\
&= n (n+1) r^{n-2}.
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Ejemplo 1.21

Calcular: a) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$, donde $\vec{F}$ es un campo vectorial.

Solución: Aplicando la definición del operador rotacional, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{F})_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l F_m \\
&= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l F_m = \hat{e}_i \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l F_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \hat{e}_i \partial_j \partial_l F_m \\
&= \delta_{il} \delta_{jm} \hat{e}_i \partial_j \partial_l F_m - \delta_{im} \delta_{jl} \hat{e}_i \partial_j \partial_l F_m \\
&= \hat{e}_l \partial_m \partial_l F_m - \hat{e}_m \partial_l \partial_l F_m \\
&= \underbrace{(\hat{e}_l \partial_l)}_{\vec{\nabla}} \underbrace{(\partial_m F_m)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}} - \underbrace{(\partial_l \partial_l)}_{\vec{\nabla}^2} \underbrace{(\hat{e}_m F_m)}_{\vec{F}}
\end{aligned} \tag{1.99}$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}, \tag{1.100}$$

a partir del cual,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}), \tag{1.101}$$

lo que se interpreta como el Laplaciano de un campo vectorial $\vec{F}$.

Ejemplo 1.22

Probar que: a) $\vec{\nabla} \times [\varphi (\vec{\nabla} \varphi)] = \vec{0}$, donde φ es un campo escalar.

Solución: Aplicando la definición del operador rotacional y el operador gradiente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times [\varphi (\vec{\nabla} \varphi)] &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j [\varphi (\vec{\nabla} \varphi)]_k = \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j [\varphi (\partial_k \varphi)] \\
 &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} (\partial_j \varphi) (\partial_k \varphi) + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \varphi \partial_j (\partial_k \varphi) \\
 &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \varphi)_j (\vec{\nabla} \varphi)_k + \varphi \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \varphi)_k \\
 &= (\vec{\nabla} \varphi) \times (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) \\
 &= \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Ejercicio 1.9 Probar las siguientes identidades:

$$\vec{\nabla}^2 r^n = n(n+1) r^{n-2}, \tag{1.103}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (r^3 \vec{r}) = 6r^3, \tag{1.104}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[r \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = 3r^{-4}. \tag{1.105}$$

Ejercicio 1.10 Probar las siguientes identidades:

$$\vec{\nabla}^2 \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right] = 2r^{-4}, \tag{1.106}$$

$$\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \right] = -2r^{-3} \vec{r}. \tag{1.107}$$

Ejercicio 1.11 Encontrar el resultado de la expresión: a) $\vec{\nabla}^2 \left[\vec{\nabla} \cdot \left[r \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right]$.

1.4.5 Aplicaciones adicionales

Campos solenoidales

Campos solenoidales son campos vectoriales que satisfacen las siguientes condiciones:

- Su divergencia es cero: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$.
- El resultado de la integral: $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$, es independiente de la superficie de integración.
- La integral: $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ es igual a cero, para alguna superficie cerrada S .
- El campo vectorial $\vec{F}$ se puede expresar como el rotor de un campo vectorial; es decir: $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Ejemplo 1.23

Demostrar que: $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, es un campo solenoidal si $\vec{V}$ es un campo vectorial.

Solución: Aplicando el operador divergencia y rotacional, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \partial_i (\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j V_k) \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j V_k = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_i V_k \\ &= -\epsilon_{jik} \partial_j \partial_i V_k = -\partial_j (\epsilon_{jik} \partial_i V_k) \\ &= -\partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{V})_j = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}),\end{aligned}\quad (1.108)$$

así que

$$2\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0, \quad (1.109)$$

lo que implica que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0. \quad (1.110)$$

Por lo tanto, $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ es un campo solenoidal.

Campos irrotacionales

Se denominan campos irrotacionales a campos vectoriales que satisfacen las siguientes condiciones:

- a) El rotacional del campo vectorial $\vec{F}$ es cero: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.
- b) El resultado de la integral : $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$, es independiente de la trayectoria escogida para unir los puntos extremos a y b .
- c) La integral: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ se anula, para alguna trayectoria cerrada C .
- d) El campos $\vec{F}$ se puede expresar como el gradiente de un campo escalar; es decir: $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$.

Ejemplo 1.24

Demostrar que $\vec{\nabla}F$, es un campo irrotacional si F es un campo escalar.

Solución: Aplicando el operador rotacional y el operador gradiente, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}F) &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla}F)_k = \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F \\ &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_j F = -\hat{e}_i \epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j F \\ &= -\hat{e}_i \epsilon_{ikj} \partial_k (\vec{\nabla}F)_j = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}F),\end{aligned}\quad (1.111)$$

es decir

$$2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}F) = \vec{0}, \quad (1.112)$$

por tanto

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}F) = \vec{0}, \quad (1.113)$$

lo que garantiza que $\vec{\nabla}F$ es un campo irrotacional.

Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz afirma que un campo vectorial puede determinarse de manera única si se conoce su divergencia, su rotacional, y apropiadas condiciones de frontera.

Se busca determinar si es posible encontrar un campo vectorial $\vec{F}$ si se conoce su divergencia y rotacional, es decir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = C, \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{D}, \quad (1.114)$$

donde C es un campo escalar y $\vec{D}$ un campo vectorial, que por consistencia es un campo solenoidal, ya que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (1.115)$$

El teorema de Helmholtz garantiza que el campo $\vec{F}$ estará únivocamente determinado, bajo apropiadas condiciones de frontera. En electromagnetismo el teorema de Helmholtz es útil, ya que los campos eléctricos ($\vec{E}(\vec{r}, t)$) y magnéticos ($\vec{B}(\vec{r}, t)$), satisfacen ecuaciones diferenciales que incluyen las divergencias y los rotacionales de dichos campos. En este caso, las condiciones de frontera se establecen asumiendo que los campos tienden a cero en el infinito, lejos de las distribuciones de carga y corriente.

Si el rotor de un campo vectorial $\vec{G}$ desaparece en todas partes, es decir, es un campo irrotacional; entonces $\vec{G}$ se puede escribir como el gradiente de un campo escalar ϕ , que se conoce como un potencial escalar, es decir,

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0}, \quad \vec{G} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (1.116)$$

donde el signo se ha introducido por conveniencia. El potencial escalar ϕ no es único ya que una constante puede ser adicionada al potencial sin afectar la definición de $\vec{G}$. Ahora, si la divergencia de un campo vectorial $\vec{G}$ desaparece en todas partes; es decir, es un campo solenoidal, entonces $\vec{G}$ se puede expresar por el rotor de un potencial vectorial $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.117)$$

El potencial vectorial $\vec{A}$ no es único ya que el gradiente de un campo escalar puede ser adicionado al potencial vectorial sin afectar el campo $\vec{A}$ ya que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.118)$$

Entonces, se supone que el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ está especificado por un campo escalar $C(\vec{r})$ a partir de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = C, \quad (1.119)$$

y un campo vectorial $\vec{D}(\vec{r})$, tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{D}, \quad (1.120)$$

donde $\vec{D}(\vec{r})$ es un campo solenoidal, como se mostró en (1.115). Sin embargo, si los campos $C(\vec{r})$ y $\vec{D}(\vec{r})$ tienden a cero lo suficientemente rápido en el infinito, ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$), se puede demostrar que el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ se expresará en la forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r}), \quad (1.121)$$

donde $U(\vec{r})$ y $W(\vec{r})$ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{C(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned} \quad (1.122)$$

y donde las integrales se extienden sobre todo el espacio.

Ejercicio 1.12 Probar que:

$$\vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.123)$$

Con el fin de probar (1.121), se aplica a esta relación el operador divergencia, de manera que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r})}_{\vec{\nabla}^2 U(\vec{r})} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r}))}_0 \\ &= -\vec{\nabla}^2 U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{C(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \int_V d^3x' \frac{C(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{\nabla}^2 \left[\frac{C(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' C(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{-4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \int_V d^3x' C(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= C(\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Este resultado garantiza que se cumpla (1.119).

Para el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \underbrace{-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U(\vec{r})}_0 + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r}))}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) - \vec{\nabla}^2 \vec{W}} \\ &= \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{W}(\vec{r})] - \vec{\nabla}^2 \vec{W}(\vec{r}) \\ &= \vec{\nabla} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} - \vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int_V d^3x' \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} - \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{\nabla}^2 \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \end{aligned} \quad (1.125)$$

De la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot [f(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})] = [\vec{\nabla} f(\vec{r})] \cdot \vec{A}(\vec{r}) + f(\vec{r}) [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})], \quad (1.126)$$

se determina que

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] &= \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}') \right]}_0 \\
 &= \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}').
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

Ahora, si $f(x-y)$ es una función diferenciable donde su argumento depende de la diferencia de las variables $z \equiv x-y$, se puede determinar que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(x-y) &= \frac{df(z)}{dz} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_1 = \frac{df(z)}{dz}, \\
 \frac{\partial}{\partial y} f(x-y) &= \frac{df(z)}{dz} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{-1} = -\frac{df(z)}{dz},
 \end{aligned} \tag{1.128}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(x-y), \tag{1.129}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] &= \underbrace{\left[\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \cdot \vec{D}(\vec{r}') = - \left[\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}') \\
 &= - \left\{ \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{D}(\vec{r}') \right]}_0 \right\} \\
 &= -\vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right],
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

donde se utilizó el hecho de que $\vec{D}(\vec{r}')$ es un campo vectorial solenoidal. Así,

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int_V d^3x' \underbrace{\left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{-\vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]} \right\} - \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{\nabla}^2 \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} - \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{D}(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{-4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} + \int d^3x' \vec{D}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &= \vec{D}(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_S d\vec{A} \cdot \left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right], \tag{1.131}
 \end{aligned}$$

donde el teorema de Gauss ha sido utilizado. El volumen V se extiende sobre todo el espacio, de manera que la superficie S que lo limita se extiende al infinito. Ahora, la integral de superficie considera que el integrando $\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ está siendo evaluado en los puntos de esta superficie. Dadas las características del campo vectorial $\vec{D}(\vec{r}')$ que tiende a cero lo suficientemente rápido cuando $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$, se cumple que $\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow 0$, de manera que no hay contribución de la integral de superficie y esta desaparece, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \vec{D}(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_S d\vec{A} \cdot \underbrace{\left[\frac{\vec{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{\rightarrow 0} \\
 &= \vec{D}(\vec{r}), \tag{1.132}
 \end{aligned}$$

garantizando la existencia del campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$.

La demostración asume que las integrales que definen los campos escalar $U(\vec{r})$ y vectorial $\vec{W}(\vec{r})$ convergen, de otro modo estos no se podrían definir. Para entender este argumento se considera que $|\vec{r}'|$ es muy grande, así que:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq |\vec{r}'| \equiv r', \tag{1.133}$$

de esta manera, las integrales de volumen que se han considerado, se comportan como:

$$\begin{aligned}
 \int_V d^3x' \frac{\chi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \int_V r'^2 dr' d\Omega' \frac{\chi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \int_V r'^2 dr' d\Omega' \frac{\chi(\vec{r}')}{r'} \\
 &= \int_0^\infty r' dr' d\Omega' \chi(\vec{r}') \propto \int_0^\infty r' dr' \chi(\vec{r}'). \tag{1.134}
 \end{aligned}$$

Aunque $\chi(\vec{r}') \rightarrow 0$, cuando $r' \rightarrow \infty$, dicha condición no garantiza que la integral (1.134) converja, por ejemplo:

- Si $\chi(\vec{r}') \sim \frac{1}{r'}$, se determina:

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty r' dr' \chi(\vec{r}') = \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty r' dr' \frac{1}{r'} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty dr' \rightarrow \infty, \quad (1.135)$$

con lo cual la integral de volumen diverge.

- Ahora, si $\chi(\vec{r}'^2) \sim \frac{1}{r'^2}$ resulta,

$$\begin{aligned} \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty r' dr' \chi(\vec{r}') &= \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty r' dr' \frac{1}{r'^2} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dr'}{r'} \\ &= \lim_{r' \rightarrow \infty} \ln r' \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.136)$$

de manera que tampoco se tiene un buen comportamiento.

Por lo tanto, los campos $C = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ y $\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ deberán tender mas rápido a cero que $\frac{1}{r'^2}$ para que la prueba sea válida, lo que es más que suficiente para asegurar que la integral de superficie del tipo considerado anteriormente se anule.

Sin embargo, las condiciones impuestas a los campos $C = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ y $\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ para garantizar que el campo vectorial $\vec{F}$ se pueda expresar como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{W}, \quad (1.137)$$

no son suficientes para determinar univocamente el campo vectorial $\vec{F}$, ya que al lado derecho de la ecuación anterior se le puede adicionar un campo vectorial $\vec{G}$, si cumple con las condiciones:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = 0, \quad (1.138)$$

que aún garantiza que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = C$ y $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{D}$. Vectorialmente es posible demostrar que no existe

un campo $\vec{G}$ que posea divergencia y rotacional cero en todas partes y tienda a cero en el infinito. Por tanto, se introducirá el requerimiento que cuando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, el campo vectorial $\vec{F} \rightarrow 0$, lo que garantizará que este sea único. Teniendo en cuenta lo anterior, el Teorema de Helmholtz se puede formular, así:

Si la divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = C$ y el rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{D}$ de un campo vectorial $\vec{F}$ son especificados, y si estos tienden a cero mas rápidamente que $\frac{1}{r^2}$, cuando $r \rightarrow \infty$, y además $\vec{F} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces, $\vec{F}$ es único y se podrá expresar como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{W}. \quad (1.139)$$

Un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ diferenciable que tiende a cero mas rápido que $\frac{1}{r}$ cuando $r \rightarrow \infty$, puede ser expresado como el gradiente de un campo escalar mas el rotor de un campo vectorial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \left[-\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (1.140)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

En electromagnetismo, típicamente los campos eléctricos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y campos magnéticos $\vec{B}(\vec{r}, t)$ tienden a cero a grandes distancias de las distribuciones de carga y corriente, que son las fuentes de estos. Sin embargo, se pueden considerar ejemplos ideales y ficticios en las cuales las fuentes se extienden al infinito, ejemplo: alambres o planos infinitos. Para estos casos, se deberán introducir otros requerimientos con el fin de establecer la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

El campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ satisface:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (1.142)$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \left[-\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.143)$$

donde $\phi(\vec{r})$ es el potencial escalar

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.144)$$

Ahora, en el caso del campo magnetostático $\vec{B}(\vec{r})$, se tiene que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.145)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (1.146)$$

donde $\vec{A}(\vec{r})$ es el potencial vectorial definido como,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.147)$$

1.5 Coordenadas curvilíneas

En el caso de las coordenadas cartesianas, la base en tres dimensiones ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) es constante en todos los puntos del espacio, lo que significa que no depende de las coordenadas cartesianas. En contraste, las coordenadas curvilíneas se refieren a aquellas que tienen una base vectorial ortonormal que, en general, puede variar en función de las coordenadas, lo que implica que los vectores base

pueden cambiar de un punto a otro. Ejemplos comunes de coordenadas curvilíneas incluyen las coordenadas esféricas, con vectores base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$, y las coordenadas cilíndricas, con vectores base $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$. En este contexto, se considera un espacio de tres grados de libertad, donde las coordenadas curvilíneas, que pueden representar cualquier base ortogonal, como las cartesianas, cilíndricas o esféricas, se denotan como:

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad (1.148)$$

y la respectiva base será:

$$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}, \quad (1.149)$$

de tal manera que una función vectorial se escribirá como:

$$\vec{F}(u_1, u_2, u_3) = F_1(u_1, u_2, u_3)\hat{u}_1 + F_2(u_1, u_2, u_3)\hat{u}_2 + F_3(u_1, u_2, u_3)\hat{u}_3. \quad (1.150)$$

A continuación, se procederá a encontrar algunos operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas, como el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano de funciones escalares y vectoriales asumiendo una dependencia en coordenadas curvilíneas.

1.5.1 Gradiente en coordenadas curvilíneas

El gradiente para una función escalar $f(u_1, u_2, u_3)$, en coordenadas curvilíneas, se puede deducir a partir de su definición; es decir, teniendo en cuenta que el diferencial de una función df es igual al producto del vector gradiente $\vec{\nabla}f$ por el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, tal que:

$$df(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}, \quad (1.151)$$

donde

$$df(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3. \quad (1.152)$$

Por otra parte, el diferencial del desplazamiento vectorial $d\vec{r}$ en términos de las coordenadas $\{u_1, u_2, u_3\}$ viene dado por:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (1.153)$$

La derivada parcial del vector $\vec{r}$ respecto a u_1 representa el cambio del vector $\vec{r}$ respecto a u_1 , donde se mantiene constante las coordenadas u_2 y u_3 . Por lo tanto, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ debe ser proporcional al vector unitario $\hat{u}_1$ (ya que $\hat{u}_1$ es precisamente el vector orientado en la dirección en la cual incrementa la coordenada u_1 , manteniendo u_2 y u_3 constantes). Ahora, al dividir el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ sobre su norma $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}|$, se obtiene un vector cuya dirección coincide con el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ y de norma 1, es decir $\hat{u}_1$, por lo tanto:

$$\hat{u}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}|} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad (1.154)$$

donde se ha definido

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|, \quad (1.155)$$

Los valores h_i se conocen como factores de escala de la transformación. A partir de (1.154) se establece que:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i. \quad (1.156)$$

Reemplazando (1.156) en (1.153) se obtiene que:

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3. \quad (1.157)$$

Ahora, el gradiente $\vec{\nabla} f$ es un vector, que en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} f = \left(\vec{\nabla} f \right)_1 \hat{u}_1 + \left(\vec{\nabla} f \right)_2 \hat{u}_2 + \left(\vec{\nabla} f \right)_3 \hat{u}_3, \quad (1.158)$$

donde $\left(\vec{\nabla} f \right)_i$ representa la componenete i-esima del operador vectorial $\vec{\nabla} f$ en la base $\{\hat{u}_i\}$. Al reemplazar (1.157) y (1.158) en (1.151), se tiene que:

$$\begin{aligned} df &= \left(\left(\vec{\nabla} f \right)_1 \hat{u}_1 + \left(\vec{\nabla} f \right)_2 \hat{u}_2 + \left(\vec{\nabla} f \right)_3 \hat{u}_3 \right) \cdot (h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3) \\ &= \left(\vec{\nabla} f \right)_1 h_1 du_1 + \left(\vec{\nabla} f \right)_2 h_2 du_2 + \left(\vec{\nabla} f \right)_3 h_3 du_3. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Por otra parte se sabe que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3. \quad (1.160)$$

Al comparar (1.159) con (1.160), se puede establecer que:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \left(\vec{\nabla} f \right)_i h_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (1.161)$$

y por lo tanto:

$$\left(\vec{\nabla} f \right)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (1.162)$$

con lo cual se puede concluir que (teniendo en cuenta (1.158)):

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{u}_3. \quad (1.163)$$

Así, el operador vectorial gradiente en coordenadas curvilíneas se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}. \quad (1.164)$$

1.5.2 Divergencia en coordenadas curvilíneas

La divergencia de una función vectorial $\vec{F}$, se denota por $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ y se puede interpretar como el “producto escalar” del operador gradiente (1.164) con un campo vectorial representado en la forma de la ecuación (1.150), tal que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1 + F_2 \hat{u}_2 + F_3 \hat{u}_3) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) + \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) + \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3).\end{aligned}\quad (1.165)$$

Al aplicar el operador gradiente (1.164) sobre una de las coordenadas curvilíneas u_i se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} u_i &= \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial u_i}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial u_i}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial u_i}{\partial u_3} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\hat{u}_j}{h_j} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\hat{u}_j}{h_j} \delta_{ij} \\ &= \frac{\hat{u}_i}{h_i}.\end{aligned}\quad (1.166)$$

Ahora, por ser bases orthonormales, se cumple que:

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= \hat{u}_2 \times \hat{u}_3, \\ \hat{u}_2 &= \hat{u}_3 \times \hat{u}_1, \\ \hat{u}_3 &= \hat{u}_1 \times \hat{u}_2,\end{aligned}\quad (1.167)$$

lo cual, teniendo en cuenta la relación encontrada en (1.166) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= h_2 h_3 \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3, \\ \hat{u}_2 &= h_3 h_1 \vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1, \\ \hat{u}_3 &= h_1 h_2 \vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2.\end{aligned}\quad (1.168)$$

Por lo tanto, los términos presentes en (1.165) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) &= \vec{\nabla} \cdot (F_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) &= \vec{\nabla} \cdot (F_2 h_1 h_3 \vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3) &= \vec{\nabla} \cdot (F_3 h_1 h_2 \vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2).\end{aligned}\quad (1.169)$$

Ahora, utilizando la propiedad para el gradiente del producto de un campo escalar f por un campo vectorial $\vec{A}$, dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (1.170)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) &= (\vec{\nabla} F_1 h_2 h_3) \cdot (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3) + F_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) &= (\vec{\nabla} F_2 h_3 h_1) \cdot (\vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1) + F_2 h_3 h_1 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3) &= (\vec{\nabla} F_3 h_1 h_2) \cdot (\vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2) + F_3 h_1 h_2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2).\end{aligned}\quad (1.171)$$

Dado que el rotacional de un gradiente es cero, los términos $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_i \times \vec{\nabla} u_j)$ se anulan:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_i \times \vec{\nabla} u_j) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_i) \cdot \vec{\nabla} u_j - (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_j) \cdot \vec{\nabla} u_i = 0. \quad (1.172)$$

Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) &= (\vec{\nabla} F_1 h_2 h_3) \cdot (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) &= (\vec{\nabla} F_2 h_3 h_1) \cdot (\vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3) &= (\vec{\nabla} F_3 h_1 h_2) \cdot (\vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2).\end{aligned}\quad (1.173)$$

Reemplazando las relaciones (1.168) en (1.173) se determina:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) &= \frac{1}{h_2 h_3} (\vec{\nabla} F_1 h_2 h_3) \cdot (\hat{u}_1), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) &= \frac{1}{h_1 h_3} (\vec{\nabla} F_2 h_3 h_1) \cdot (\hat{u}_2), \\ \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3) &= \frac{1}{h_1 h_2} (\vec{\nabla} F_3 h_1 h_2) \cdot (\hat{u}_3).\end{aligned}\quad (1.174)$$

Ahora al usar la expresión (1.164) para el gradiente en coordenadas curvilíneas, se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(F_1 h_2 h_3) &= \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_3}, \\ \vec{\nabla}(F_2 h_3 h_1) &= \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial(F_2 h_3 h_1)}{\partial u_3}, \\ \vec{\nabla}(F_3 h_1 h_2) &= \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}.\end{aligned}\quad (1.175)$$

Al reemplazar las expresiones (1.175) y teniendo en cuenta que $\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}$, se deduce de (1.174) que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (F_1 \hat{u}_1) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}, \\ \vec{\nabla} \cdot (F_2 \hat{u}_2) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2}, \\ \vec{\nabla} \cdot (F_3 \hat{u}_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}.\end{aligned}\quad (1.176)$$

Finalmente, al reemplazar (1.176) en (1.165) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}. \quad (1.177)$$

La expresión (1.177) representa la divergencia de una función vectorial en coordenadas curvilíneas.

1.5.3 Rotacional en coordenadas curvilíneas

El rotacional de una función vectorial, se puede interpretar como el “producto cruz” del operador gradiente (1.164) con un campo vectorial, tal que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1 + F_2 \hat{u}_2 + F_3 \hat{u}_3) \\ &= \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) + \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) + \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3). \end{aligned} \quad (1.178)$$

A partir de la relación (1.166), se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \vec{\nabla} \times (F_1 h_1 \vec{\nabla} u_1), \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \vec{\nabla} \times (F_2 h_2 \vec{\nabla} u_2), \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \vec{\nabla} \times (F_3 h_3 \vec{\nabla} u_3), \end{aligned} \quad (1.179)$$

lo cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \vec{\nabla} (F_1 h_1) \times \vec{\nabla} u_1 + F_1 h_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_1, \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \vec{\nabla} (F_2 h_2) \times \vec{\nabla} u_2 + F_2 h_2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_2, \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \vec{\nabla} (F_3 h_3) \times \vec{\nabla} u_3 + F_3 h_3 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_3. \end{aligned} \quad (1.180)$$

En (1.180) se ha tenido en cuenta que el rotacional aplicado sobre una función escalar multiplicada por un vector está dado por:

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = \vec{\nabla} (f) \times \vec{A} + f \times \vec{A}. \quad (1.181)$$

Ya que el gradiente del rotacional es cero, las expresiones (1.180) se reducen a:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \vec{\nabla} (F_1 h_1) \times \vec{\nabla} u_1, \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \vec{\nabla} (F_2 h_2) \times \vec{\nabla} u_2, \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \vec{\nabla} (F_3 h_3) \times \vec{\nabla} u_3. \end{aligned} \quad (1.182)$$

Usando la relación (1.166) en (1.182), se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \frac{1}{h_1} \vec{\nabla} (F_1 h_1) \times \hat{u}_1, \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \frac{1}{h_2} \vec{\nabla} (F_2 h_2) \times \hat{u}_2, \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \frac{1}{h_3} \vec{\nabla} (F_3 h_3) \times \hat{u}_3. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Realizando el producto cruz en el lado derecho de las expresiones (1.183) en la forma

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \hat{u}_i, \quad (1.184)$$

la expresión (1.183) se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) = \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_1} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_1 h_1) \right)_j (\hat{u}_1)_k \hat{u}_i, \quad (1.185)$$

$$\vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) = \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_2} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_2 h_2) \right)_j (\hat{u}_2)_k \hat{u}_i, \quad (1.186)$$

$$\vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) = \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_3} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_3 h_3) \right)_j (\hat{u}_3)_k \hat{u}_i. \quad (1.187)$$

Ahora, la componente k de un vector unitario $\hat{u}_i$ es 1 si $k = i$, de lo contrario es cero; es decir, $(\hat{u}_i)_k = \delta_{ik}$ y por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_1} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_1 h_1) \right)_j \delta_{1k} \hat{u}_i = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_1} \epsilon_{ij1} \left(\vec{\nabla}(F_1 h_1) \right)_j \hat{u}_i, \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_2} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_2 h_2) \right)_j \delta_{2k} \hat{u}_i = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_2} \epsilon_{ij2} \left(\vec{\nabla}(F_2 h_2) \right)_j \hat{u}_i, \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{1}{h_3} \epsilon_{ijk} \left(\vec{\nabla}(F_3 h_3) \right)_j \delta_{3k} \hat{u}_i = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_3} \epsilon_{ij3} \left(\vec{\nabla}(F_3 h_3) \right)_j \hat{u}_i. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Por otro lado:

$$\left(\vec{\nabla}(F_i h_i) \right)_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial (F_i h_i)}{\partial u_j}, \quad (1.189)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_1} \epsilon_{ij1} \frac{1}{h_j} \frac{\partial F_1 h_1}{\partial u_j} \hat{u}_i, \\ \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_2} \epsilon_{ij2} \frac{1}{h_j} \frac{\partial F_2 h_2}{\partial u_j} \hat{u}_i, \\ \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_3} \epsilon_{ij3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial F_3 h_3}{\partial u_j} \hat{u}_i. \end{aligned} \quad (1.190)$$

Expandiendo las sumas de las expresiones anteriores resulta:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial u_3} \hat{u}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial u_2} \hat{u}_3, \\
 \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial u_1} \hat{u}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial u_3} \hat{u}_1, \\
 \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_2} \hat{u}_1 - \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_1} \hat{u}_2.
 \end{aligned} \tag{1.191}$$

Finalmente, al reemplazar (1.191) en (1.178) se concluye que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (F_1 \hat{u}_1) + \vec{\nabla} \times (F_2 \hat{u}_2) + \vec{\nabla} \times (F_3 \hat{u}_3) \\
 &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial F_1 h_1}{\partial u_3} \hat{u}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial F_1 h_1}{\partial u_2} \hat{u}_3 \\
 &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial F_2 h_2}{\partial u_1} \hat{u}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial F_2 h_2}{\partial u_3} \hat{u}_1 \\
 &\quad + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial F_3 h_3}{\partial u_2} \hat{u}_1 - \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial F_3 h_3}{\partial u_1} \hat{u}_2,
 \end{aligned} \tag{1.192}$$

que se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial F_3 h_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial F_2 h_2}{\partial u_3} \right) \hat{u}_1 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial F_1 h_1}{\partial u_3} - \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial F_3 h_3}{\partial u_1} \right) \hat{u}_2 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial F_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial F_1 h_1}{\partial u_2} \right) \hat{u}_3.
 \end{aligned} \tag{1.193}$$

1.5.4 Laplaciano en coordenadas curvilíneas

El laplaciano se define como la divergencia de un vector gradiente:

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f). \tag{1.194}$$

Para encontrar la expresión del laplaciano en coordenadas curvilíneas se toma en cuenta la divergencia de un campo vectorial dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}. \tag{1.195}$$

Ahora, si el campo vectorial $\vec{F}$ se obtiene del gradiente de una función escalar f , tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f, \tag{1.196}$$

entonces, a partir de la definición del gradiente en coordenadas curvilíneas (1.163), se establece que las componentes F_i en función de f son:

$$F_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}. \quad (1.197)$$

Reemplazando (1.197) en (1.195) y al tener en cuenta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \nabla^2 f$, se determina que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} h_2 h_3 \right) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} h_1 h_3 \right) \\ & + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} h_1 h_2 \right). \end{aligned} \quad (1.198)$$

Ejemplo 1.25

En este ejemplo se deducirá el gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas esféricas.

Solución Para lograr el objetivo propuesto, se inicia encontrando los factores de escala h_i definidos como:

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|, \quad (1.199)$$

En este caso, se identifican las variables $u_1 \rightarrow u_r$, $u_2 \rightarrow u_\theta$ y $u_3 \rightarrow u_\phi$, tal que:

$$h_1 = h_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|, \quad (1.200)$$

$$h_2 = h_\theta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|, \quad (1.201)$$

$$h_3 = h_\phi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|. \quad (1.202)$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\vec{r} = r \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + r \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + r \cos(\theta) \hat{k}, \quad (1.203)$$

resulta:

$$\begin{aligned} h_r &= \left| \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k} \right| \\ &= |\hat{r}| = 1. \end{aligned} \quad (1.204)$$

De igual forma,

$$\begin{aligned}
h_\theta &= |r \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{j} - \sin(\theta) \hat{k}| \\
&= \sqrt{(r \cos(\theta) \cos(\phi))^2 + (r \cos(\theta) \sin(\phi))^2 + (r \sin(\theta))^2} \\
&= r.
\end{aligned} \tag{1.205}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, para la coordenada ϕ se obtiene:

$$\begin{aligned}
h_\phi &= |-r \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{i} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{j}| \\
&= \sqrt{(r \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + (r \sin(\theta) \cos(\phi))^2} \\
&= r \sin(\theta).
\end{aligned} \tag{1.206}$$

Utilizando las expresiones encontradas para h_r (1.204), h_θ (1.205), h_ϕ (1.206), se determina que:

- Gradiente de una función escalar f :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}.
\end{aligned} \tag{1.207}$$

- Divergencia para un campo vectorial $\vec{F} = F_r \hat{u}_r + F_\theta \hat{u}_\theta + F_\phi \hat{u}_\phi$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{r}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial (F_r h_\theta h_\phi)}{\partial r} + \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial (F_\theta h_r h_\phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial (F_\phi h_r h_\theta)}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (F_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (F_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (F_\phi r)}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}.
\end{aligned} \tag{1.208}$$

- Rotacional para un campo vectorial $\vec{F} = F_r \hat{u}_r + F_\theta \hat{u}_\theta + F_\phi \hat{u}_\phi$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{h_\theta h_\phi} \frac{\partial (F_\phi h_\phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{h_\theta h_\phi} \frac{\partial (F_\theta h_\theta)}{\partial \phi} \right) \hat{r} \\
&+ \left(\frac{1}{h_r h_\phi} \frac{\partial (F_r h_r)}{\partial \phi} - \frac{1}{h_\phi h_r} \frac{\partial (F_\phi h_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\
&+ \left(\frac{1}{h_r h_\theta} \frac{\partial (F_\theta h_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{h_r h_\theta} \frac{\partial (F_r h_r)}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}
\end{aligned} \tag{1.209}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (F_\phi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial \phi} \right) \hat{r} \\
&+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (F_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\
&+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi},
\end{aligned} \tag{1.210}$$

que se reduce a:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}.\end{aligned}\quad (1.211)$$

■ *Laplaciano de una función escalar f :*

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta h_\phi}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_r h_\theta}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ &+ \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_r h_\phi}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (1.212)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (1.213)$$

Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (1.214)$$

Ejemplo 1.26

En este ejemplo se encontrarán los operadores gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas cilíndricas.

Solución: En coordenadas cilíndricas $\{\rho, \phi, z\}$, el vector de posición se puede escribir como:

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}, \quad (1.215)$$

por lo tanto, los valores h_i en coordenadas cilíndricas serán:

$$h_1 = h_\rho = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|, \quad (1.216)$$

$$h_2 = h_\phi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|, \quad (1.217)$$

$$h_3 = h_z = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|, \quad (1.218)$$

tal que

$$h_\rho = |\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1, \quad (1.219)$$

así mismo:

$$h_\phi = |-\rho \sin \phi \hat{i} + \rho \cos \phi \hat{j}| = \rho \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} = \rho, \quad (1.220)$$

y por último:

$$h_z = |\hat{k}| = 1. \quad (1.221)$$

A partir de las expresiones dadas para h_ρ (1.219), h_ϕ (1.220) y h_z (1.221), se obtiene que:

- Gradiente de una función escalar f :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{h_z} \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}. \end{aligned} \quad (1.222)$$

- Divergencia para un campo vectorial $\vec{F} = F_\rho \hat{u}_\rho + F_\theta \hat{u}_\theta + F_\phi \hat{u}_\phi$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial (F_\rho h_\phi h_z)}{\partial \rho} + \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial (F_\phi h_\rho h_z)}{\partial \phi} + \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial (F_z h_\rho h_\phi)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_z \rho)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.223)$$

- Rotacional para un campo vectorial $\vec{F} = F_r \hat{u}_r + F_\theta \hat{u}_\theta + F_\phi \hat{u}_\phi$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{h_\phi h_z} \frac{\partial (F_z h_z)}{\partial \phi} - \frac{1}{h_\phi h_z} \frac{\partial (F_\phi h_\phi)}{\partial z} \right) \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{h_\rho h_z} \frac{\partial (F_\rho h_\rho)}{\partial z} - \frac{1}{h_z h_\rho} \frac{\partial (F_z h_z)}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \\ &+ \left(\frac{1}{h_\rho h_\phi} \frac{\partial (F_\phi h_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{h_\rho h_\phi} \frac{\partial (F_\rho h_\rho)}{\partial \phi} \right) \hat{k}, \end{aligned} \quad (1.224)$$

que se reduce a:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_\phi \rho)}{\partial z} \right) \hat{r} \\ & + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \\ & + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (F_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{k}.\end{aligned}\quad (1.225)$$

■ *Laplaciano para una función escalar f :*

$$\begin{aligned}\nabla^2 f = & \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{h_\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_\rho h_z}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ & + \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_\rho h_\phi}{h_z} \frac{\partial f}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (1.226)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial z} \right),\end{aligned}\quad (1.227)$$

y finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (1.228)$$

Ejercicio 1.13 Coordenadas Parabólicas: La transformación de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) a coordenadas parabólicas (ξ, η, ϕ) , está dada por las siguientes expresiones:

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi \eta}, \quad (1.229)$$

siendo que

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty.$$

Las superficies $\xi = cte$ y $\eta = cte$, constituyen dos familias de paraboloides de revolución con el eje z como eje de simetría. Para la transformación planteada encontrar:

- Los factores de escala.
- El operador gradiente.
- El operador Rotacional.
- El operador Laplaciano.

Ejercicio 1.14 Coordenadas Elípticas: La transformación de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) a coordenadas elípticas (ξ, η, ϕ) , se definen por las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \sigma \xi \eta, \quad (1.230)$$

siendo que

$$0 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1,$$

donde σ representa un parámetro en la transformación. Se introducen las distancias r_1 y r_2 a los puntos A_1 y A_2 sobre el eje z , para los cuales $z = \pm \sigma$, $r_1 = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2}$ y $r_2 = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$. La superficie $\xi = cte$ identifica el elipsoide $\frac{z^2}{\sigma^2 \xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2 (\xi^2 - 1)} = 1$, con focos en (A_1, A_2) , en tanto que la superficie $\eta = cte$ está asociada al hiperboloide $\frac{z^2}{\sigma^2 \eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2 (1 - \eta^2)} = 1$, con focos en (A_1, A_2) . Para la transformación descrita, determinar:

- Los factores de escala.
- El operador gradiente.
- El operador Rotacional.
- El operador Laplaciano.

Ejercicio 1.15 Coordenadas Toroidales: Este sistema de coordenadas están identificadas por las variables (σ, τ, ϕ) , las cuales se caracterizan por:

$$0 \leq \sigma \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Las transformaciones de coordenadas que conectan (σ, τ, ϕ) con las coordenadas cartesianas (x, y, z) , están definidas por:

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi, \quad (1.231)$$

$$y = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \phi, \quad (1.232)$$

$$z = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi. \quad (1.233)$$

Donde a es constante. La superficie $\tau = cte$ representa toros alrededor del eje z . Las superficies $\sigma = cte$, son esferas sobre el eje z . Finalmente, las superficies $\phi = cte$, son planos que contienen al eje z . En términos de coordenadas toroidales encontrar:

- Los factores de escala.
- El operador gradiente.
- El operador Rotacional.
- El operador Laplaciano.

2 — Fuerza y campo eléctrico

Los objetos en general poseen propiedades que les permiten interactuar entre sí. Por ejemplo, los cuerpos, debido a su masa (propiedad intrínseca), pueden interactuar a través de la fuerza gravitacional. Sin embargo, la masa no es la única propiedad que permite a un cuerpo interactuar con otros. Un experimento sencillo ilustra este punto: al frotar un material de ebonita con un pedazo de lana y acercarlo a pequeños trozos de papel, se observa que estos se adhieren al material de ebonita. Es fácil demostrar que dicha interacción no se debe a la masa de los cuerpos (aplicando la ley de gravitación de Newton). Por lo tanto, debe existir otra propiedad asociada a los cuerpos que genere esta interacción. Esta propiedad se denomina carga eléctrica, y se sabe que existen dos tipos: positiva y negativa. A nivel microscópico, la partícula con la menor carga eléctrica negativa es el electrón, y la partícula con la menor carga positiva es el protón ¹. A nivel macroscópico, los objetos cargados positivamente se consideran aquellos con un exceso de protones en relación a los electrones que conforman sus átomos. De manera similar, los objetos cargados negativamente tienen un exceso de electrones en relación a los protones. La carga es una propiedad fundamental de la materia. Sin embargo, incluso cuando las partículas están cargadas, sus efectos macroscópicos pueden ser ocultos. Esto se debe a que, a pesar de la existencia de cargas positivas y negativas, la materia suele ser eléctricamente neutra. Experimentalmente se ha determinado que la carga no se crea ni se destruye, y que la carga total de un sistema cerrado permanece constante.

2.1 Ley de Coulomb

Las técnicas experimentales han permitido realizar observaciones sobre la fuerza de interacción entre las cargas eléctricas. El resultado de estas observaciones se resume en las siguientes afirmaciones:

1. Hay solo dos clases de carga eléctrica, identificadas como positivas y negativas.
2. Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que están dirigidas a lo largo de la línea imaginaria que las conecta, y su magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la

¹En física de altas energías, donde se estudia el núcleo de los átomos, existen partículas con menor carga que la del electrón, así como partículas cargadas positivamente con la misma masa que el electrón, denominadas positrones. Sin embargo, estos temas no serán abordados en este curso.

distancia que las separa.

3. La fuerza es proporcional al producto de las cargas, resultando ser repulsiva si las cargas son del mismo signo y atractivas si son de signo contrario.

Estas observaciones se compilan en lo que se conoce como ley de Coulomb y matemáticamente se pueden expresar de la siguiente forma: Si q_1 es una carga ubicada en la posición $\vec{r}_1$ respecto a un origen de coordenadas O , mientras que q_2 es una segunda carga ubicada en la posición $\vec{r}_2$ (ver figura 2.1), la fuerza $\vec{F}_{21}$ aplicada sobre la carga q_2 debido a la carga q_1 , está dada por:

$$\vec{F}_{21} = \kappa \frac{q_1 q_2}{\Delta r^2} \hat{\Delta r}. \quad (2.1)$$

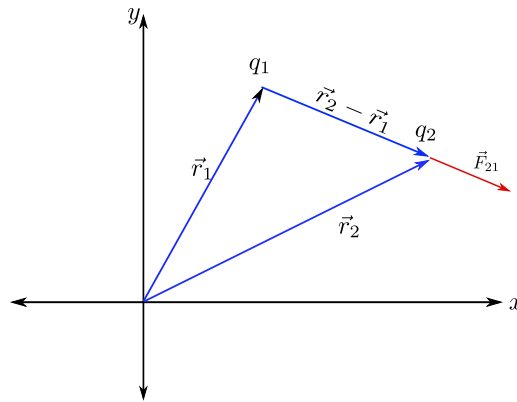


Figura 2.1: Fuerza eléctrica F_{21} entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 .

A partir de la figura 2.1, se puede determinar geométricamente que:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (2.2)$$

y

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad (2.3)$$

por lo tanto la ley de Coulomb se puede escribir como:

$$\vec{F}_{21} = \kappa \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \kappa \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es válida independientemente del signo de las cargas; si estas cargas son del mismo signo, el vector $\vec{F}_{21}$ seguirá la dirección de $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, lo que representa una interacción repulsiva. En caso de que las cargas tengan signos opuestos, el producto $q_1 q_2$ incluirá un signo negativo, y por lo tanto, la dirección del vector fuerza estará determinada por el vector $(-(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))$, lo que indica una interacción atractiva. Para calcular la fuerza que la carga q_2 ejerce sobre la carga q_1 , simplemente se intercambia los índices 1 por 2 en la ecuación (2.4), obteniendo así:

$$\vec{F}_{12} = \kappa \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}. \quad (2.5)$$

La ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales, donde macroscópicamente una carga puntual se interpreta como aquella cuya dimensión es relativamente muy pequeña en comparación con cualquier otra longitud presente en el problema. Esta ley se utiliza para estudiar interacciones entre núcleos a distancias mayores de 10^{-14} metros; a distancias menores, predominan las interacciones fuertes, otro tipo de interacción presente a nivel de los núcleos atómicos.

El valor numérico de la constante κ depende del sistema de unidades que se esté utilizando. En el sistema internacional, la carga eléctrica se mide en culombios (C), de manera que:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9876 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C}, \quad (2.6)$$

donde la constante ϵ_0 se conoce como la permitividad eléctrica del espacio libre. Ahora, si el sistema en consideración está constituido por N cargas puntuales: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$, caracterizadas por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$, se determina que la fuerza ejercida sobre la i -ésima carga q_i del sistema debido a las restantes $N - 1$ cargas, es dada por:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \kappa \frac{q_i q_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_1) + \kappa \frac{q_i q_2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_2) + \dots + \kappa \frac{q_i q_N}{|\vec{r}_i - \vec{r}_N|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_N) \\ &= \kappa \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La suma se extiende sobre todas las cargas que constituyen el sistema, con excepción de la carga q_i . El resultado anterior es simplemente la aplicación del principio de superposición, el cual establece que la fuerza total que actúa sobre una carga es igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales que se ejercen sobre ella.

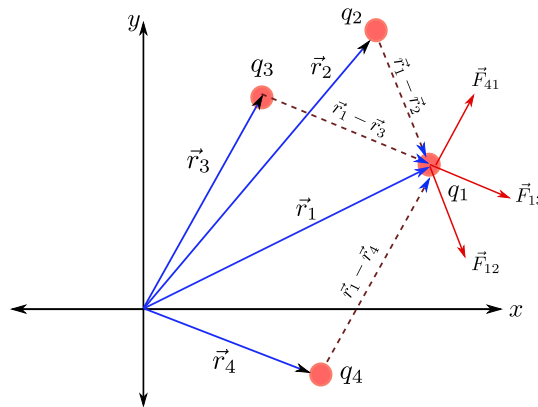


Figura 2.2: Vectores de fuerza debido a la interacción de cuatro cargas puntuales.

Como ejemplo, al aplicar la ecuación (2.7) a un sistema de cuatro partículas cargadas (ver figura 2.2), la fuerza que se ejerce sobre la carga q_1 debida a las cargas q_2 , q_3 y q_4 , será:

$$\vec{F}_1 = \kappa \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \kappa \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \kappa \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_4). \quad (2.8)$$

Ejercicio 2.1 Un pentágono regular tiene cargas Q , $2Q$, $-Q$, $-2Q$ y Q en sus vértices, colocando la primera carga (Q) sobre el semi-eje x positivo y las demás de manera simétrica en sentido antihorario. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga Q situada en el centro?

Ejercicio 2.2 Una pirámide tetraédrica regular cuenta con cargas Q ubicadas en los tres vértices de la base y una carga $-Q$ en el cuarto vértice, posicionada a una altura H desde el centro de la base triangular. Todos los lados de la pirámide son iguales, y en su centro geométrico se encuentra una carga q . Para el sistema planteado, encuentre el valor de la carga q que mantiene en equilibrio al sistema.

Ejercicio 2.3 Considere una configuración de cargas similar al ejercicio (2.2), con la variación de que en este caso la carga q no se encuentra en el centro geométrico de la pirámide. En esta situación, encuentre la posición de equilibrio para dicha carga.

2.1.1 Densidades de carga eléctrica

Los resultados anteriores pueden extenderse a distribuciones continuas de carga, es decir, a casos en los que se considere carga distribuida a lo largo de la longitud, la superficie o el volumen de un objeto. A nivel macroscópico, la carga eléctrica puede tratarse como una magnitud “continua”.

La distribución continua de carga puede expresarse en términos de densidades de carga. Si la carga se distribuye sobre un elemento unidimensional (o cuando una dimensión es mucho mayor que las otras dos que forman el volumen del objeto), se define una densidad lineal de carga λ como:

$$\lambda \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}. \quad (2.9)$$

Cuando la carga se extiende sobre una superficie, se introduce la densidad superficial de carga σ , definida por:

$$\sigma \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}. \quad (2.10)$$

En el caso de carga distribuida en un volumen, se puede hablar de una densidad volumétrica de carga ρ dada por:

$$\rho \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}. \quad (2.11)$$

Estos conceptos permiten calcular la carga total de las diferentes configuraciones de la siguiente manera:

$$q = \int \lambda(\vec{r}') dl(\vec{r}'), \quad q = \int \sigma(\vec{r}') ds(\vec{r}'), \quad q = \int \rho(\vec{r}') dv(\vec{r}'). \quad (2.12)$$

Las respectivas densidades de carga en general son funciones de las coordenadas que definen los puntos ocupados por el cuerpo. Si la carga se distribuye de manera uniforme por el espacio ocupado por el cuerpo, las densidades de cargas toman un valor constante (densidad uniforme) y se puede inferir que:

$$\lambda = \frac{q}{L}, \quad \sigma = \frac{q}{S}, \quad \rho = \frac{q}{V}, \quad (2.13)$$

donde (q, L, S, V) representan la carga, longitud, superficie y volumen totales del sistema.

2.1.2 Densidades de carga volumétricas equivalentes

Cualquier distribución de carga discreta, lineal o superficial, puede considerarse equivalente a una distribución de carga volumétrica utilizando las propiedades de la función delta de Dirac, como se explicará a continuación:

1. Una carga puntual q localizada en la posición establecida por $\vec{r}$, se puede escribir como:

$$q = q(1) = q \int dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \int dV' q \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad (2.14)$$

entonces la densidad volumétrica de carga equivalente es:

$$\rho(\vec{r}') = q \delta(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (2.15)$$

2. La carga total asociada a N cargas puntuales q_i localizadas en las posiciones $\vec{r}_i$, esta dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N q_i(1) = \sum_{i=1}^N q_i \int dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \\ &= \int dV' \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i), \end{aligned} \quad (2.16)$$

de manera que

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i). \quad (2.17)$$

3. La carga total asociada a un plano xy cargado con una densidad superficial de carga $\sigma(x, y)$ localizado en z_0 , se puede calcular como:

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma(\vec{r}') ds(\vec{r}') = \int \sigma(x', y') dx' dy' = \int \sigma(x', y') dx' dy' (1) \\ &= \int \sigma(x', y') dx' dy' \int dz' \delta(z' - z_0) = \int dx' dy' dz' \sigma(x', y') \delta(z' - z_0), \end{aligned} \quad (2.18)$$

y por lo tanto,

$$\rho(\vec{r}') = \sigma(x', y') \delta(z' - z_0). \quad (2.19)$$

4. La carga total asociada a una línea de carga $\lambda(z)$ perpendicular al plano xy y que pasa por el punto (x_0, y_0) , se puede determinar a partir de:

$$\begin{aligned} Q &= \int \lambda(\vec{r}') dl(\vec{r}') = \int \lambda(z') dz' = \int \lambda(z') dz' (1)(1) \\ &= \int \lambda(z') dz' \int dx' \delta(x' - x_0) \int dy' \delta(y' - y_0) \\ &= \int dx' dy' dz' \lambda(z') \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

entonces

$$\rho(\vec{r}') = \lambda(z') \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0). \quad (2.21)$$

Ejemplo 2.1

Una línea de carga se caracteriza por una densidad lineal $\lambda(z)$, la cual es perpendicular al plano xy y paralela al eje z , pasando por el punto (x_0, y_0) . Para la situación planteada se calculará la densidad volumétrica de carga equivalente.

Solución: La carga total asociada a la distribución considerada se expresa como:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(z). \quad (2.22)$$

En coordenadas cartesianas, la delta de Dirac se define como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \quad (2.23)$$

mientras que el elemento de volumen se expresa como:

$$d^3x = dx dy dz. \quad (2.24)$$

La posición de la distribución de carga se garantiza implementando dos deltas de Dirac de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y - y_0) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \lambda(z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ &= \int d^3x \lambda(z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ &= \int d^3x \rho(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde la densidad volumétrica de carga equivalente del sistema se interpreta como:

$$\rho(x, y, z) = \lambda(z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.26)$$

Ejemplo 2.2

Considérese una espira circular de radio a que posee una densidad lineal de carga uniforme λ . El plano de la espira es paralelo al plano xy y su centro se encuentra a una distancia h sobre el eje z . Se desea determinar la densidad de carga volumétrica equivalente.

Solución: La carga total de la espira es:

$$Q = \lambda L, \quad (2.27)$$

donde L es la longitud de la circunferencia, expresada como $L = 2\pi a$. Así, se tiene:

$$Q = \lambda L = \lambda (2\pi a) = \lambda \left(\int_0^{2\pi} a d\phi \right) = \int_0^{2\pi} \lambda a d\phi. \quad (2.28)$$

En coordenadas cilíndricas, la delta de Dirac se representa como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0), \quad (2.29)$$

y el diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas se define como:

$$d^3x = \rho d\rho d\phi dz. \quad (2.30)$$

Un elemento de carga dq sobre la espira se encuentra a una distancia radial a y a una distancia h del plano xy . La posición de la distribución de carga sobre la espira se puede escribir así:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \lambda a d\phi = \int_0^{2\pi} \lambda a d\phi \left(\int_0^\infty d\rho \delta(\rho - a) \right) \left(\int_{-\infty}^\infty dz \delta(z - h) \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty a d\rho d\phi dz \lambda \delta(\rho - a) \delta(z - h) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d^3x \lambda \delta(\rho - a) \delta(z - h) \\ &= \int d^3x \rho(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

con lo que la densidad volumétrica de carga equivalente asociada al sistema es:

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \delta(\rho - a) \delta(z - h). \quad (2.32)$$

Ejemplo 2.3

Calcular la distribución de carga equivalente a una carga puntual localizada a una altura h sobre el eje z , utilizando coordenadas esféricas.

Solución: En coordenadas esféricas, la delta de Dirac se define como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0), \quad (2.33)$$

mientras que el elemento de volumen se expresa como:

$$d^3x = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad (2.34)$$

Para una carga puntual Q localizada a una distancia h sobre el eje z , se tiene que $r_0 = h$, $\theta = 0$ y $\phi = 0$ (ϕ puede tomar cualquier valor sin afectar el resultado, dado la posición sobre el eje z de la carga, el cual por comodidad se tomará igual a 0), entonces a partir de (2.15) se tiene que:

$$\rho(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{Q}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0). \quad (2.35)$$

A partir de la definición anterior se puede verificar que

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3x &= \left\{ \int_0^\infty \frac{Q \delta(r - r_0)}{r^2} r^2 dr \right\} \left\{ \int_0^\pi \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0) d\phi \right\} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \frac{Q \delta(r - r_0)}{r^2} r^2 dr}_Q \underbrace{\int_0^\pi \delta(\theta) d\theta}_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\phi) d\phi}_1 \\ &= Q. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ejercicio 2.4 Un cubo de lado a tiene ocho cargas Q situadas en sus vértices. Calcular la densidad de carga volumétrica equivalente del sistema.

Ejercicio 2.5 Un pentágono regular posee cargas Q , $2Q$, $-Q$, $-2Q$ y Q en sus vértices. La primera carga $2Q$ se ubica sobre el semi-eje x positivo y el resto de forma simétrica en sentido anti-horario. ¿Cuál es la densidad de carga para la distribución de carga dada?

Ejercicio 2.6 Una pirámide tetraédrica regular posee cargas Q situadas en los tres vértices de la base, y una carga $-Q$ situada en el cuarto vértice, que se encuentra a una altura H del centro de la base triangular. Todos los lados de la pirámide son iguales. Además, existe una carga q ubicada exactamente en el centro geométrico de la pirámide. Encontrar la densidad de carga para la configuración de cargas descrita.

Ejercicio 2.7 Para la distribución de carga descrita en el Ejemplo (2.3), calcular la distribución de carga equivalente:

- En coordenadas cartesianas.
- En coordenadas polares.

Ejercicio 2.8 Considérese un anillo de densidad lineal de carga $\lambda(\phi)$ y radio R , paralelo al plano xy y con centro a una distancia b sobre el eje z . Para la configuración planteada, determinar la densidad volumétrica de carga equivalente.

Ejercicio 2.9 Calcular la densidad volumétrica de carga equivalente asociada a un disco de radio R , con densidad superficial de carga $\sigma(\rho, \phi)$, ubicado en el plano xy , con su centro en el origen de coordenadas.

Ejercicio 2.10 Resolver el ejercicio (2.9) en el caso de que el centro del plano del disco se encuentre a una distancia b sobre el eje z .

Ejercicio 2.11 Considérese un cascarón esférico de radio R . Calcular la densidad volumétrica de

carga equivalente en los siguientes casos:

- La densidad superficial de carga σ es uniforme.
- La densidad superficial de carga, depende las coordenadas angulares ($\sigma(\theta, \phi)$).

2.1.3 Distribuciones de carga continuas

De las expresiones (2.9) a (2.11), es posible determinar la fuerza ejercida por una cierta distribución continua de carga sobre una carga puntual q localizada en la posición descrita por el vector $\vec{r}$. Considérese inicialmente una distribución de carga distribuida sobre un volumen V , caracterizada por una densidad de carga $\rho(\vec{r}')$, como se ilustra en la figura 2.3. Inicialmente se toma un elemento de carga infinitesimal dq' ubicado en la posición $\vec{r}'$. La fuerza ejercida por este elemento de carga (considerado como una carga puntual) sobre q está dada por la ecuación (2.4), es decir:

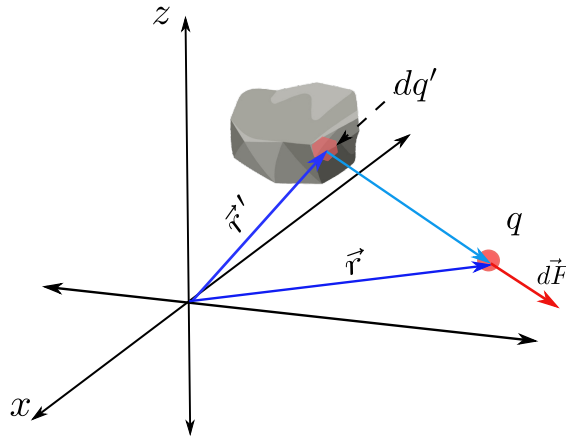


Figura 2.3: Fuerza ejercida por un elemento infinitesimal de carga dq' sobre una carga puntual q .

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \kappa \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = \kappa \frac{q \rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.37)$$

donde se ha utilizado la relación (2.11). Ahora, la fuerza total ejercida por toda la carga distribuida sobre el volumen V se determina de acuerdo al principio de superposición, como la “suma” vectorial de todos los elementos de carga dq' que conforman el sistema. Matemáticamente, una suma de elementos infinitesimales se representa como una integral, por tanto:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \kappa q \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.38)$$

Sin embargo, si el sistema además de poseer carga distribuida sobre el volumen tiene carga en la superficie S que delimita dicho volumen y esta se encuentra caracterizada por una densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r}'')$, la fuerza total ejercida sobre q es:

$$\vec{F} = \kappa q \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \kappa q \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}. \quad (2.39)$$

Si el sistema también está constituido por N cargas puntuales, entonces la fuerza total es dada por la suma de las ecuaciones (2.7) y (2.39), de manera que:

$$\vec{F} = \kappa q \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) + \kappa q \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \kappa q \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}. \quad (2.40)$$

2.2 Campo Eléctrico

El campo eléctrico se puede interpretar como una propiedad que adquiere el espacio debido a la presencia de una distribución de carga, de tal forma que si una carga q se coloca en la región donde el campo está presente, esta experimentará una aceleración (y por tanto, una fuerza, ya que $\vec{F} = m\vec{a}$). Para evidenciar el campo eléctrico en un punto $\vec{r}$, se puede calcular en primera instancia, la fuerza que experimenta una carga de prueba q positiva que se ubica en dicho punto. Esta carga debe ser muy pequeña para evitar los efectos que su propia carga genera en el espacio (una carga q por sí sola genera un campo eléctrico y puede modificar el campo ya existente). Con esto, el campo eléctrico en un punto $\vec{r}$ se define como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (2.41)$$

Si se aplica la definición (2.41), tomando la expresión de la fuerza dada (2.40), se determina que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) + \kappa \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \kappa \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}. \quad (2.42)$$

La expresión (2.42) corresponde al campo eléctrico en el punto $\vec{r}$, debido a una distribución de carga, caracterizada por N cargas puntuales, una distribución continua de carga sobre una superficie S y un volumen V . El límite en la expresión (2.41) se introduce con el fin de garantizar que el campo eléctrico evaluado en $\vec{r}$ sea debido a la distribución de carga, y no exista contribución de la carga de prueba.

Una manera de comprender el campo eléctrico es mediante el concepto de líneas de campo eléctrico, las cuales son líneas imaginarias que ayudan a visualizar cómo cambia la dirección del campo eléctrico al pasar de un punto a otro del espacio. Estas líneas especifican las trayectorias que seguiría la carga de prueba positiva si se dejara libre en el espacio. Las propiedades que se introducen al concepto de líneas de campo son:

1. Las líneas de campo salen de las cargas positivas (consideradas como fuentes de líneas de campo) y llegan a las cargas negativas (interpretadas como sumideros de líneas de campo).
2. El vector campo eléctrico es tangente a las líneas de campo en cada punto.
3. Las líneas de campo eléctrico son abiertas; es decir, salen siempre de las cargas positivas o del infinito y terminan en el infinito o en cargas negativas.
4. El número de líneas que salen de una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional a la magnitud de dicha carga.

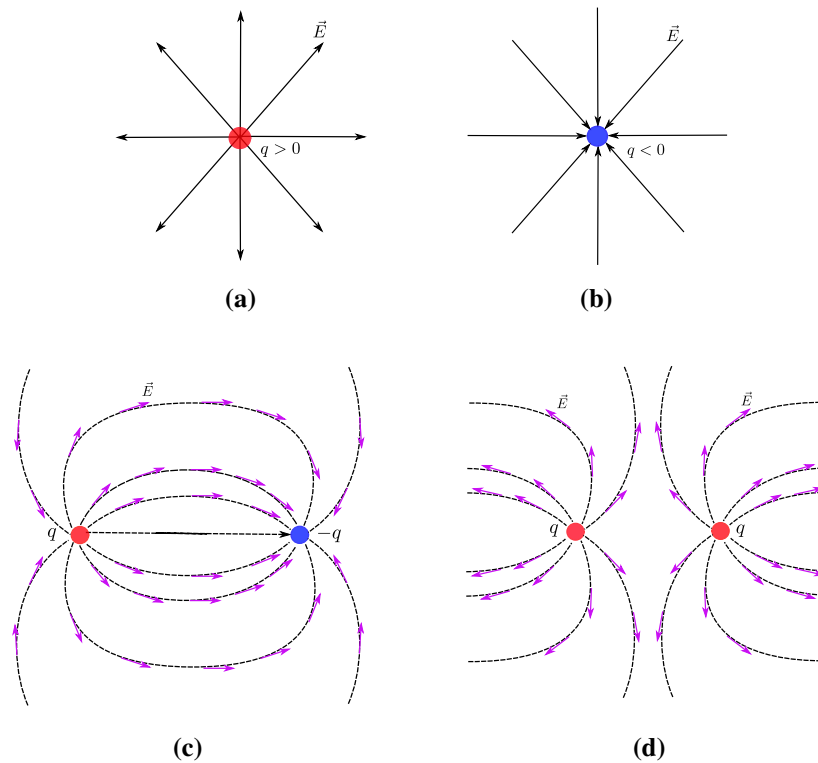


Figura 2.4: Líneas de campo eléctrico (a) carga puntual positiva. (b) Carga puntual negativa. (c) Dos cargas puntuales con $q_1 = -q_2 > 0$. (d) Dos cargas puntuales con $q_1 = q_2 > 0$.

5. La densidad de líneas de campo en una región que rodea un punto es proporcional a la intensidad del campo eléctrico en dicho punto.
6. Las líneas de campo no pueden cortarse. En caso de que se intersecten, se entendería que en un único punto se pueden presentar dos valores de campo eléctrico diferentes.
7. Se puede considerar que a grandes distancias de una configuración de cargas localizada en un región finita del espacio, las líneas de campo eléctrico están igualmente espaciadas y son radiales, comportándose casi como si fueran generadas por una carga puntual.

Algunos ejemplos de líneas de campo eléctrico se indican en la figura 2.4.

Ejemplo 2.4

Esfera hueca cargada (Ver figura 2.5) : En este ejemplo se calcula el campo eléctrico a una distancia r del centro de una superficie esférica cargada de radio R , la cual presenta una densidad superficial de carga σ uniforme y cuyo centro se ubica en el origen de un sistema cartesiano.

Solución: En principio, el punto asociado a $\vec{r}$ donde se evalúa el campo eléctrico podría ser arbitrario; sin embargo, por conveniencia (que se explica más adelante) y sin pérdida de generalidad, se orienta el sistema de coordenadas de manera que $\vec{r}$ esté a lo largo del eje z y se pueda expresar como $\vec{r} = z\hat{k}$. Se consideran los casos $z < R$ (dentro de la esfera) y $z > R$

(fuera de la esfera). El resultado se expresa en términos de la carga total Q de la esfera.

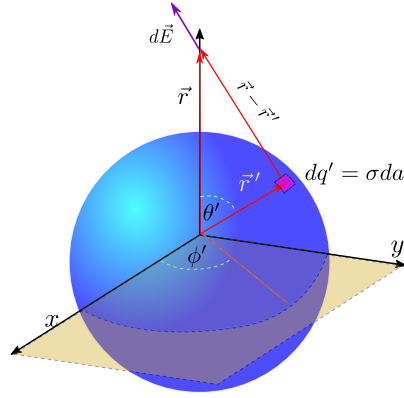


Figura 2.5: Campo eléctrico de un elemento diferencial de carga dq' de una esfera hueca cargada.

Si se considera un diferencial de carga dq' sobre la superficie de la esfera (ver figura 2.5), el campo eléctrico $d\vec{E}(\vec{r})$ generado por dicho elemento de carga es:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \kappa \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.43)$$

Al orientar el sistema de coordenadas como se indica en la figura 2.5, es posible representar el conjunto de vectores $(\vec{r}, \vec{r}')$ de la siguiente manera:

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad \vec{r}' = r'\hat{r}', \quad (2.44)$$

siendo $\hat{r}'$ el vector unitario radial en la base de coordenadas esféricas, que en términos de los vectores unitarios de la base cartesiana, se expresa como (ver figura 2.5):

$$\hat{r}' = \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k}, \quad (2.45)$$

y por lo tanto

$$\vec{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k}. \quad (2.46)$$

A partir de lo anterior se tiene que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}. \quad (2.47)$$

La magnitud del vector $(\vec{r} - \vec{r}')$ se puede deducir a partir de (2.47); sin embargo, también se puede encontrar a través de la aplicación del producto escalar, así:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + \vec{r}' \cdot \vec{r}' \\ &= r^2 - 2rr' \cos(\alpha) + r'^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde α corresponde al ángulo formado entre el vector $\vec{r}$ y el vector $\vec{r}'$, el cual cambia conforme $\vec{r}'$ cambia. Es en este punto donde toma relevancia ubicar $\vec{r}$ a lo largo del eje z ,

ya que por esta razón, el ángulo α coincide con el ángulo θ' que corresponde a una de las coordenadas esféricas que definen el vector $\vec{r}'$. Si no se realiza dicha elección, el ángulo α sería una variable adicional en el proceso de integración a las variables que definen el elemento de área da' .

A pesar que la magnitud del vector $\vec{r}'$ es igual a R , se mantendrá la notación r' para representar la magnitud de $\vec{r}'$ hasta el final del cálculo (ya que el resultado se aplicará al próximo ejemplo, donde r' ya no es constante). Por lo anterior:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

Ahora, el elemento de carga dq' puede ser expresado en términos de su densidad superficial de carga σ como:

$$dq' = \sigma da'. \quad (2.50)$$

Siendo que el diferencial de área da' donde se encuentra confinado el elemento de carga dq' , en coordenadas esféricas se expresa como:

$$da' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.51)$$

Entonces, la relación (2.43) se puede expresar de la siguiente forma:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' [-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}]}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.52)$$

Así, el campo eléctrico total debido a la esfera completa es dado por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' [-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}]}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}} \right]}_I. \quad (2.53)$$

Al identificar la integral

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' [-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}]}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.54)$$

entonces, se puede escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} I. \quad (2.55)$$

Se procede ahora a evaluar la integral I :

$$\begin{aligned}
 I &= -r'^3 \hat{i} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' \sin \theta'}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi'}_0 \\
 &\quad - r'^3 \hat{j} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' \sin \theta'}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi'}_0 \\
 &\quad + r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - r' \cos \theta')}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \\
 &= 2\pi r'^2 \hat{k} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - r' \cos \theta')}{[r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta']^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

El resultado anterior indica que el campo eléctrico está orientado a lo largo del eje z , lo cual se podía predecir dado la simetría del problema. Introduciendo el cambio de variable $\mu = \cos \theta'$, se determina que:

$$d\mu = -\sin \theta' d\theta', \tag{2.57}$$

bajo el cambio de variable aplicado, los límites de integración para la variable μ son:

$$\begin{aligned}
 \theta = 0 &\Rightarrow \mu = 1 \\
 \theta = \pi &\Rightarrow \mu = -1,
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
 I &= -2\pi r'^2 \hat{k} \int_1^{-1} \frac{d\mu (z - r'\mu)}{[r'^2 + z^2 - 2zr'\mu]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\pi r'^2 \hat{k} \int_{-1}^1 \frac{d\mu (z - r'\mu)}{[r'^2 + z^2 - 2zr'\mu]^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento para el encontrar el valor de la integral I , se procede con el cambio de variable: $\omega = r'^2 + z^2 - 2zr'\mu$, con lo cual se tiene que:

$$\omega = r'^2 + z^2 - 2zr'\mu. \tag{2.60}$$

Al derivar con respecto a μ :

$$d\omega = -2zr' d\mu \Rightarrow d\mu = -\frac{d\omega}{2zr'}. \tag{2.61}$$

Ahora, los límites de integración vendrán dados por:

▪ Cuando $\mu = -1$:

$$\omega = r'^2 + z^2 - 2zr'(-1) = (r' + z)^2. \quad (2.62)$$

▪ Cuando $\mu = 1$:

$$\omega = r'^2 + z^2 - 2zr'(1) = (r' - z)^2. \quad (2.63)$$

Entonces, los límites de integración cambian de $\mu \in [-1, 1]$ a $\omega \in [(r' + z)^2, (r' - z)^2]$. Ahora al reescribir la integral usando la nueva variable ω se tiene que:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu (z - r'\mu)}{[r'^2 + z^2 - 2zr'\mu]^{\frac{3}{2}}} = \int_{(r'+z)^2}^{(r'-z)^2} \frac{\left(z - r' \left(\frac{r'^2 + z^2 - \omega}{2zr'}\right)\right) \left(-\frac{d\omega}{2zr'}\right)}{\omega^{3/2}}, \quad (2.64)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d\mu (z - r'\mu)}{[r'^2 + z^2 - 2zr'\mu]^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{1}{4z^2r'} \left((z^2 - r'^2) \int_{(r'+z)^2}^{(r'-z)^2} \omega^{-3/2} d\omega + \int_{(r'+z)^2}^{(r'-z)^2} \omega^{-1/2} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2z^2r'} \left[(z^2 - r'^2) \left(\frac{1}{|r' - z|} - \frac{1}{r' + z} \right) - (|r' - z| - (r' + z)) \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

con lo cual se tiene que:

$$I = \frac{\pi r'}{z^2} \hat{k} \left[(z^2 - r'^2) \left(\frac{1}{|r' - z|} - \frac{1}{r' + z} \right) - (|r' - z| - (r' + z)) \right]. \quad (2.66)$$

De la definición de valor absoluto, se determina que:

$$|r' - z| = \begin{cases} (r' - z) & \text{si } r' > z, \\ (z - r') & \text{si } r' < z. \end{cases} \quad (2.67)$$

Por lo tanto, para $r' > z$, se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi r'}{z^2} \hat{k} \left[\underbrace{(z^2 - r'^2) \left(\frac{1}{(r' - z)} - \frac{1}{r' + z} \right)}_{-2z} - \underbrace{((r' - z) - (r' + z))}_{-2z} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ahora, el segundo resultado de la relación (2.67) se cumple para $z > r'$, es decir, para puntos fuera de la esfera, para los cuales se cumple que:

$$I = \frac{\pi r'^2}{z^2} \hat{k} \left[\underbrace{(z^2 - r'^2) \left(\frac{1}{(z - r')} - \frac{1}{r' + z} \right)}_{2r'} - \underbrace{((z - r') - (r' + z))}_{-2r'} \right]$$

$$= \frac{4\pi r'^2}{z^2} \hat{k}. \quad (2.69)$$

Los resultados obtenidos para la integral I , se pueden resumir como:

$$I = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z < r' \\ \frac{4\pi r'^2}{z^2} \hat{k} & \text{si } z > r' \end{cases}. \quad (2.70)$$

Reemplazando los resultados descritos en (2.70) en (2.55), se tiene que para puntos dentro de la esfera, el campo eléctrico es nulo, mientras que para puntos fuera de la esfera, el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r'^2}{z^2} \hat{k} = \frac{\sigma r'^2}{\epsilon_0 z^2} \hat{k}. \quad (2.71)$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r'^2}, \quad (2.72)$$

se concluye que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{k}. \quad (2.73)$$

La simetría permite inferir que el resultado que se obtendría si $\vec{r}$ se orientará hacia cualquier punto en el espacio, sería:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad (2.74)$$

que es equivalente al campo electrostático generado por una carga puntual en un punto $\vec{r}$ cuando esta se encuentra localizada en el centro de la esfera.

Ejemplo 2.5

Esfera Maciza (Ver figura 2.6) : En este ejemplo, se calcula el campo eléctrico debido a una esfera de radio R , la cual presenta una densidad volumétrica de carga ρ uniforme, y se expresa el resultado final en términos de la carga total Q de la esfera.

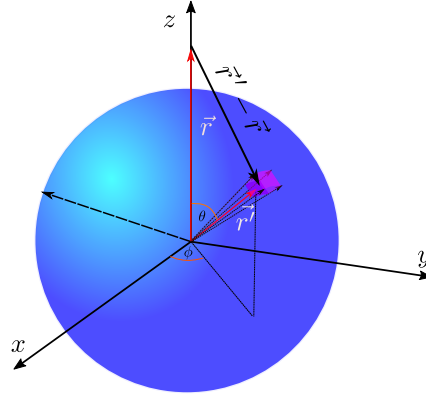


Figura 2.6: Campo eléctrico debido a un elemento de carga dq' sobre una esfera con densidad de carga ρ .

Solución: Si se considera un diferencial de carga dq' dentro de la esfera, el campo eléctrico $d\vec{E}$ generado por dicho elemento de carga es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.75)$$

Si se orienta el sistema de coordenadas como se indica en la figura 2.6, es posible especificar el conjunto de vectores $(\vec{r}, \vec{r}')$ de la siguiente manera:

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad (2.76)$$

$$\vec{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k}. \quad (2.77)$$

Entonces, se determina que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}, \quad (2.78)$$

de donde es posible deducir:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \left[r'^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' + r'^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' + (z - r' \cos \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (r'^2 \sin^2 \theta' + z^2 + r'^2 \cos^2 \theta' - 2zr' \cos \theta')^{\frac{1}{2}} \\ &= (r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta')^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ahora, el elemento de carga dq' puede ser expresado en términos de su densidad volumétrica de carga ρ como:

$$dq' = \rho dV'. \quad (2.80)$$

Dado que el diferencial de volumen dV' , donde se encuentra confinado el elemento de carga dq' , en coordenadas esféricas se expresa como:

$$dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (2.81)$$

entonces, la relación (2.75) se puede escribir de la siguiente forma:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' [-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k}]}{(r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta')^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.82)$$

Así, el campo eléctrico total debido a la esfera completa es dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k})}{(r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta')^{\frac{3}{2}}} \\ \times r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Si se define como I a la integral dada por:

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - r' \cos \theta') \hat{k})}{(r'^2 + z^2 - 2zr' \cos \theta')^{\frac{3}{2}}} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (2.84)$$

es posible establecer que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R I dr'. \quad (2.85)$$

En este punto, se puede constatar que la integral I (ecuación (2.84)) es la misma expresión que ya se analizó en el ejemplo anterior (ver Ejemplo (2.5), ecuación (2.53)). Por lo tanto, teniendo en cuenta los resultados de la integral I definida de la ecuación (2.53) del Ejemplo (2.5) (resultados en (2.69) y (2.68)), se determina que:

$$I = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z < r' \\ \frac{4\pi r'^2}{z^2} \hat{k} & \text{si } z > r' \end{cases}. \quad (2.86)$$

Ahora, si se desea calcular el campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, donde $z > R$, también se tiene que $z > r'$ (ya que $R \geq r'$). Por lo tanto, aplicando el resultado de (2.86), se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{4\pi r'^2}{z^2} \hat{k} dr' \\ &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 z^2} \hat{k} \\ &= \frac{1}{3\epsilon_0 z^2} \frac{Q}{(4/3\pi R^3)} R^3 \hat{k} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\rho = \frac{Q}{(4/3\pi R^3)}. \quad (2.88)$$

Por la simetría del problema, se puede inferir que, si la posición $\vec{r}$ es arbitraria, se tendría que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (2.89)$$

El anterior resultado indica que el campo eléctrico en la región exterior a una esfera maciza cargada es equivalente al de una partícula puntual de carga Q localizada en el centro de la esfera.

Ahora, para encontrar el campo eléctrico en el caso que $r < R$ (dentro de la esfera), se debe separar la integral en (2.85) en dos partes, tal que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^z I dr' + \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_z^R I dr'. \quad (2.90)$$

En la segunda integral de (2.90), r' siempre es mayor que z (ya que en dicha integral r' va de z a R) y, por lo tanto, es cero (de acuerdo al resultado establecido en (2.86)). Adicionalmente, en la primera integral, r' siempre es menor que z (ya que en dicha integral, r' toma valores de 0 a z). Por tanto, reemplazando el resultado deducido en (2.86), se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^z I dr' \\ &= \int_0^z \frac{\rho r'^2}{\epsilon_0 z^2} dr' \hat{k} \\ &= \frac{\rho z^3}{3\epsilon_0 z^2} \hat{k} \\ &= \frac{z}{3\epsilon_0} \frac{Q}{(4/3\pi R^3)} \hat{k} \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

La simetría del problema permite generalizar el resultado anterior para cualquier posición $\vec{r}$ (para $r < R$), tal que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r}. \quad (2.92)$$

Ejemplo 2.6

Anillo metálico: En este ejemplo se considera un anillo metálico circular de radio R , como se indica en la figura 2.7, que posee una carga total positiva Q distribuida uniformemente. Se desea determinar el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría z .

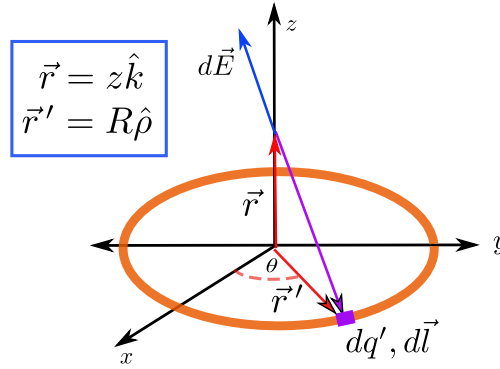


Figura 2.7: Campo eléctrico generado por un elemento de carga dq' de un anillo uniformemente cargado.

Solución: Teniendo en cuenta la orientación de coordenadas indicada en la figura 2.7, es posible deducir la siguiente representación para el conjunto de vectores $(\vec{r}, \vec{r}')$:

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad \vec{r}' = R\hat{\rho}', \quad (2.93)$$

siendo $\hat{\rho}'$ el vector unitario utilizado en coordenadas polares, el cual se expresa en coordenadas cartesianas como:

$$\hat{\rho}' = \cos \phi' \hat{i} + \sin \phi' \hat{j}. \quad (2.94)$$

Entonces, se determina que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \phi' \hat{i} - R \sin \phi' \hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.95)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= [R^2 \cos^2 \phi' + R^2 \sin^2 \phi' + z^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [R^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Así, el campo eléctrico $d\vec{E}$ debido a una distribución de carga dq' localizada sobre el anillo es dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (-R \cos \phi' \hat{i} - R \sin \phi' \hat{j} + z\hat{k})}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.97)$$

El elemento de carga dq' se encuentra en un diferencial de longitud dl' del anillo y se relaciona como:

$$dq' = \lambda dl' = \lambda R d\phi'. \quad (2.98)$$

Dado que la carga Q se distribuye uniformemente sobre el anillo, la densidad lineal de carga se puede expresar como:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}, \quad (2.99)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R\cos\phi'\hat{i} - R\sin\phi'\hat{j} + z\hat{k})}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{Q}{2\pi R} R d\phi' \\ &= \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{(-R\cos\phi'\hat{i} - R\sin\phi'\hat{j} + z\hat{k})}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\phi'. \end{aligned} \quad (2.100)$$

A partir del resultado anterior, se puede evidenciar que el campo eléctrico total generado por la carga distribuida sobre todo el anillo, de acuerdo al principio de superposición, es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(-R\cos\phi'\hat{i} - R\sin\phi'\hat{j} + z\hat{k})}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\phi' \\ &= \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \left[-R\hat{i} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi'}_0 - R\hat{j} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi'}_0 + z\hat{k} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

El resultado anterior indica que el campo eléctrico en el punto en consideración está a lo largo del eje de simetría. Sin embargo, si el punto de interés está en el centro del anillo, es decir, en $z = 0$, se deduce que el campo es nulo, ya que por simetría la contribución de cargas se anula en este punto.

Ahora, si se consideran puntos muy distantes del anillo, comparados con la dimensión del mismo, es decir, $z \gg R$, es posible deducir que:

$$\frac{1}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left[z^2 \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{z^3} \left[1 + \frac{R^2}{z^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.102)$$

Siendo que $z \gg R$, implica $1 \gg \frac{R}{z}$, es posible utilizar la aproximación:

$$(1 + x)^n \simeq 1 + nx, \quad (2.103)$$

de manera que:

$$\frac{1}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) \simeq \frac{1}{z^3}, \quad (2.104)$$

donde se analiza el hecho de que $\left(\frac{R}{z}\right)^2$ es mucho más pequeño que $\frac{R}{z}$, por tanto, mucho menor que uno. Entonces, se determina que el campo electrostático para puntos distantes del anillo tiene la forma:

$$\vec{E} \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} z \hat{k} \frac{1}{z^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{k}}{z^2}; \quad (2.105)$$

es decir, es idéntico al campo generado por una carga puntual Q localizada en el origen. Entonces, en puntos muy distantes del anillo no es posible establecer la forma geométrica de la fuente del campo, de manera que no se puede distinguir entre el campo generado por una carga puntual y el generado por el anillo en puntos ubicados sobre el eje de simetría del anillo.

Ejemplo 2.7

Disco cargado: Sea un disco de radio R (ver figura 2.8) que posee una carga total positiva Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Se desea determinar el campo electrostático generado a lo largo del eje de simetría z .

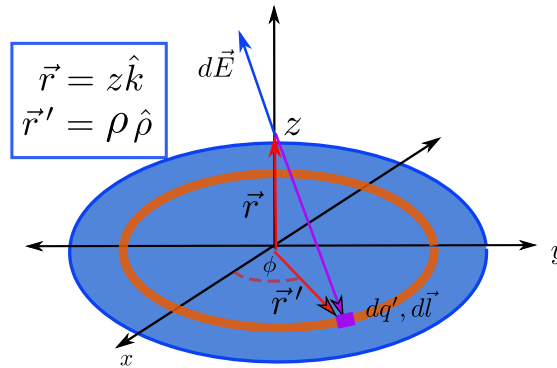


Figura 2.8: Campo eléctrico $d\vec{E}$, debido a una carga dq' sobre un disco de carga Q .

Solución: En primer lugar se evaluará el campo eléctrico debido a un diferencial de carga dq' almacenado en un anillo de radio ρ' . De la figura 2.8, se puede determinar:

$$\vec{r} = z \hat{k} \quad , \quad \vec{r}' = \rho' \hat{\rho}', \quad (2.106)$$

de modo que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\rho' \hat{\rho}' + z \hat{k}. \quad (2.107)$$

Entonces:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [\rho'^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.108)$$

El campo eléctrico $d\vec{E}$ debido a una distribución de carga dq' localizada sobre el disco es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' (-\rho' \hat{\rho}' + z \hat{k})}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.109)$$

Es posible relacionar la cantidad de carga dq' con el área da' ocupada por la misma a través de la siguiente relación:

$$dq' = \sigma da' = \sigma \rho' d\rho' d\phi'. \quad (2.110)$$

Dado que la carga Q está distribuida uniformemente, se tiene que:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad (2.111)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\rho' \hat{\rho}' + z \hat{k})}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{Q}{\pi R^2} \rho' d\rho' d\phi' \\ &= \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \frac{(-\rho' \hat{\rho}' + z \hat{k})}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho' d\rho' d\phi'. \end{aligned} \quad (2.112)$$

El campo eléctrico total debido al disco se obtiene de integrar la relación anterior, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho' \hat{\rho}' + z \hat{k})}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho' d\rho' d\phi' \\ &= \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \left[- \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho' \hat{\rho}'}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho' d\rho' d\phi' + z \hat{k} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho' d\rho' d\phi' \right]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

El vector unitario $\hat{\rho}'$ no puede ser extraído de la primera integral ya que depende de la posición del elemento de carga dq' que se está considerando. Por lo tanto, se debe expresar en términos de una base que no cambie con la posición del elemento de carga. Usando la relación (2.94), la expresión anterior se puede formular de la manera:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \left[\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho' (\cos \phi' \hat{i} + \sin \phi' \hat{j})}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho' d\rho' d\phi' - z\hat{k} \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \right] \\
&= -\frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{\rho'^2}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\rho' \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos \phi' \hat{i} + \sin \phi' \hat{j}) d\phi'}_{\vec{0}} + \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \int_0^R \frac{2\rho' d\rho'}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \int_0^R \frac{2\rho' d\rho'}{[\rho'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.114}
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable: $\mu = \rho'^2 + z^2$, se tiene que:

$$d\mu = 2\rho' d\rho' \quad , \quad \rho' = 0 \Rightarrow \mu = z^2 \quad , \quad \rho' = R \Rightarrow \mu = R^2 + z^2, \tag{2.115}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{d\mu}{\mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \left[\frac{\mu^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{R^2+z^2} \\
&= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\
&= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \hat{k} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \tag{2.116}
\end{aligned}$$

La figura 2.9 muestra gráficamente la solución establecida por (2.116), para un valor de $Q = 1\text{C}$ y $R = 1\text{m}$.

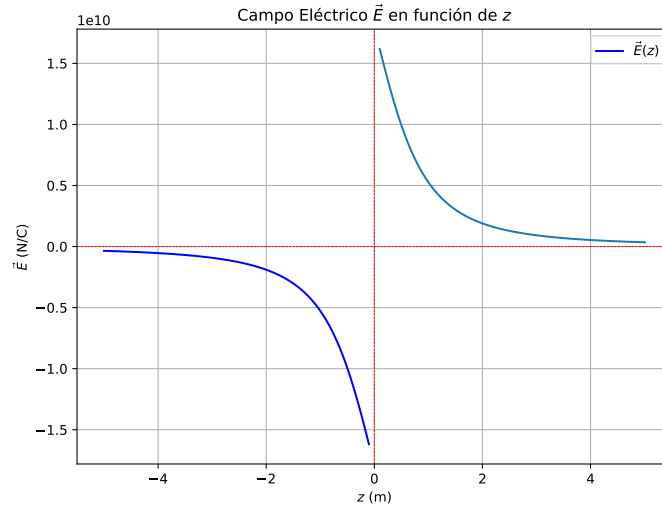


Figura 2.9: Campo eléctrico generado por un anillo cargado en función de la distancia z , para una carga $Q = 1\text{C}$ y $R = 1\text{m}$.

Ejercicio 2.12 Encontrar el campo eléctrico en un punto sobre el eje z generado por un circuito cuadrado de lado a , ubicado en el plano xy y cuyo centro coincide con el origen de coordenadas. Este circuito posee una densidad lineal uniforme de carga λ (ver figura 2.10).

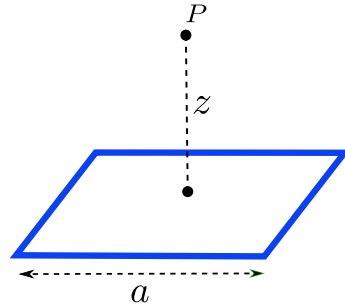


Figura 2.10: Representación de un circuito cuadrado de lado a , ubicado en el plano xy , con densidad de carga λ (Ejercicio (2.12).)

Ejercicio 2.13 Encontrar el campo eléctrico generado por un plano infinito que posee una densidad superficial de carga uniforme σ a una distancia z del mismo.

Ejercicio 2.14 Una carga lineal infinitamente larga tiene una densidad de carga uniforme λ por unidad de longitud. Por integración directa, encuentre el campo eléctrico a una cierta distancia de la línea.

2.3 Potencial Electrostático

Una consecuencia de la ley de Coulomb es que el campo eléctrico es irrotacional debido a su naturaleza conservativa, lo cual se puede demostrar aplicando directamente el operador rotacional sobre el campo eléctrico descrito por la ecuación (2.42) (que se plantea como ejercicio); sin embargo, también es posible demostrar que el campo eléctrico se puede escribir como el gradiente de una función escalar denominada potencial escalar eléctrico, tal que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}), \quad (2.117)$$

y, por consecuencia de ello,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = 0, \quad (2.118)$$

ya que el rotacional de un gradiente siempre es cero. Para mostrar lo anterior, se procederá a calcular la siguiente relación:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \hat{e}_i \partial_i [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.119)$$

al realizar la derivación, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= -\frac{1}{2} \hat{e}_i [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{-\frac{3}{2}} \partial_i [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)] \\
 &= -\hat{e}_i [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{-\frac{3}{2}} \delta_{il} (x_l - x'_l) \\
 &= -\hat{e}_i [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{-\frac{3}{2}} (x_i - x'_i) \\
 &= -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (x_i - x'_i) \hat{e}_i = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

es decir,

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{2.121}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= \kappa \sum_{j=1}^N q_j \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}}_{-\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}} + \kappa \int d^3x' \rho(\vec{r}') \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{-\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} + \kappa \int da'' \sigma(\vec{r}'') \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}}_{-\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|}} \\
 &= -\kappa \sum_{j=1}^N q_j \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} - \kappa \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \kappa \int da'' \sigma(\vec{r}'') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|}.
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \hat{e}_i \partial_i \left[\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \rho(\vec{r}') \hat{e}_i \partial_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{2.123}$$

es posible escribir el campo eléctrico como:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \left[\kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right] - \kappa \int dV' \vec{\nabla} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \kappa \int da'' \vec{\nabla} \frac{\sigma(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \\
 &= -\vec{\nabla} \left[\kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right] - \vec{\nabla} \kappa \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{\nabla} \kappa \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|},
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

de manera que el campo eléctrico se puede escribir como el gradiente de un función escalar, en la forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \left[\kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \kappa \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \kappa \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right] \\
 &= -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}),
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

donde

$$\phi(\vec{r}) = \kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \kappa \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \kappa \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|}. \tag{2.126}$$

La función escalar establecida en (2.126), se interpreta como el *potencial electrostático* de la distribución de carga en un punto $\vec{r}$. El primer término de la relación (2.126) corresponde al potencial electrostático debido a una configuración de N cargas puntuales, el segundo al potencial generado por una distribución continua de cargas confinada a un volumen V y el tercer término es el potencial debido a una distribución de carga ubicada sobre una superficie S .

La relación (2.125) establece que es posible determinar el campo eléctrico en un punto dado a partir del potencial electrostático; de igual forma es posible deducir el potencial electrostático a partir del campo eléctrico, teniendo en cuenta que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (2.127)$$

Al integrar (2.127) a lo largo de una trayectoria entre un punto inicial definido por $\vec{r}_i$ y un punto final $\vec{r}$, se tiene que

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{\nabla}\phi(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (2.128)$$

El integrando en el lado izquierdo de la expresión anterior corresponde al diferencial $d\phi(\vec{r})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' &= - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} d\phi(\vec{r}') \\ &= - [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_i)]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Entonces,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \quad (2.130)$$

con lo cual,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_i) - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (2.131)$$

Si se considera una distribución de carga localizada, se puede asumir que para un cierto punto definido por el vector $\vec{r}_i \rightarrow \infty$, se tiene $\phi(\vec{r}_i) = 0$. Esto es una consideración apropiada, teniendo en cuenta que los efectos de una distribución de carga localizada deberían desaparecer a distancias muy lejanas de la configuración de carga en estudio. Por lo tanto, la relación (2.131) se expresa como:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (2.132)$$

Ahora, de la relación (2.125) es posible verificar que si se hace la transformación:

$$\phi(\vec{r}) \rightarrow \phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + a, \quad (2.133)$$

donde a es una constante, el campo electrostático no cambia:

$$\vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[\phi(\vec{r}) + a] = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.134)$$

lo que indica que el potencial electrostático no es único. Si la distribución de carga no está localizada, la consideración de que $\phi(\vec{r}) = 0$, para $\vec{r} \rightarrow \infty$ no puede ser contemplada, ya que no importa qué tan distante se esté de la distribución, sus efectos no disminuirán. Sin embargo, se puede adoptar para un punto $\vec{r}_i$, que $\phi(\vec{r}_i) = cte$. El valor constante asignado a $\phi(\vec{r}_i)$ corresponde a la constante que se incorpora en la transformación (2.133), que garantiza que el campo electrostático no cambie.

Ejemplo 2.8

En este ejemplo se demostrara que $(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$, partiendo de la expresión (2.42).

Solución: Para realizar la demostración anterior, primero se muestra que:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.135)$$

Siendo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.136)$$

se determina que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]_k \\ &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \left\{ (x_k - x'_k) [(x_i - x'_i)(x_i - x'_i)]^{-\frac{3}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.137)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \underbrace{(\partial_j x_k)}_{\delta_{jk}} [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (x_k - x'_k) \left\{ \partial_j [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)]^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \hat{e}_i \underbrace{\epsilon_{ijj}}_0 [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{3}{2} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (x_k - x'_k) [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)]^{-\frac{5}{2}} \underbrace{\partial_j [(x_m - x'_m)(x_m - x'_m)]}_{2(\partial_j x_m)(x_m - x'_m)} \\ &= -3 [(x_l - x'_l)(x_l - x'_l)]^{-\frac{5}{2}} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (x_k - x'_k) \underbrace{(\partial_j x_m)}_{\delta_{jm}} (x_m - x'_m) \end{aligned} \quad (2.138)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= -\frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} (x_k - x'_k) (x_j - x'_j) \\ &= -\frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0.\end{aligned}\quad (2.139)$$

Finalmente se ha demostrado que:

$$\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0. \quad (2.140)$$

Así, de la expresión (2.42)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) + \kappa \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \kappa \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}, \quad (2.141)$$

se puede deducir que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \kappa \vec{\nabla} \times \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) + \kappa \vec{\nabla} \times \int dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &\quad + \kappa \vec{\nabla} \times \int da'' \frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}.\end{aligned}\quad (2.142)$$

Dado que las operaciones de derivación e integración se realizan sobre variables independientes, se pueden conmutar, resultando en:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \kappa \sum_{j=1}^N q_j \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}}_0 + \kappa \int dV' \vec{\nabla} \times \left[\frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &\quad + \kappa \int da'' \vec{\nabla} \times \left[\frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right] \\ &= \kappa \int dV' \vec{\nabla} \times \left[\frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + \kappa \int da'' \vec{\nabla} \times \left[\frac{\sigma(\vec{r}'') (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right]\end{aligned}\quad (2.143)$$

Ahora, dado que el operador diferencial $\vec{\nabla}$ actúa sobre las coordenadas no primadas, no influye sobre las densidades de carga $\rho(\vec{r}')$ y $\sigma(\vec{r}'')$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \kappa \int dV' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_0 + \kappa \int da'' \sigma(\vec{r}'') \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}}_0 \\ &= 0.\end{aligned}\quad (2.144)$$

Ejercicio 2.15 Dados los siguientes vectores,

1. $\vec{E} = C \left(xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k} \right),$
2. $\vec{E} = C \left(y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k} \right),$

donde C es una constante. Determinar cuál de estos vectores describe un campo electrostático. Para el campo electrostático, calcule el potencial tomando el origen como punto de referencia.

Ejercicio 2.16 Un cascarón esférico posee una densidad de carga,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{k}{r^2}, \quad a \leq r \leq b. \quad (2.145)$$

Utilizando la relación (2.132), encontrar el potencial en el centro del cascarón esférico, utilizando el infinito como punto de referencia.

Ejercicio 2.17 Calcular el potencial a una distancia ρ de un alambre recto infinito que posee una densidad de carga lineal uniforme λ . Definir un punto de referencia adecuado para el potencial eléctrico.

Ejercicio 2.18 Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera sólida cargada uniformemente de radio R y carga total Q . Utilizar el infinito como punto de referencia. Además, derivar el campo eléctrico resultante y demostrar que el valor obtenido es correcto.

2.4 Ley de Gauss

El campo eléctrico debido a una distribución de carga según la ley de Coulomb viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.146)$$

Si la distribución de carga está definida por una densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{r})$, el campo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.147)$$

Ahora, si se toma la divergencia del campo eléctrico, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right], \end{aligned} \quad (2.148)$$

En la última igualdad, se ha considerado que el operador $\vec{\nabla}$ actúa sobre las coordenadas no primadas, por lo tanto no afecta la densidad $\rho(\vec{r}')$. Ahora, teniendo en cuenta el resultado,

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.149)$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right].\end{aligned}\quad (2.150)$$

Además, se sabe que:

$$\vec{\nabla}^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.151)$$

Por lo tanto, la divergencia del campo eléctrico se puede escribir como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{r}') [-4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x \rho(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}),\end{aligned}\quad (2.152)$$

es decir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (2.153)$$

La relación (2.153) se conoce como la ley de Gauss en su forma diferencial e indica que la divergencia del campo eléctrico en un punto dado es proporcional a la densidad de carga en dicho punto. Si se integra la ecuación (2.153) sobre un volumen V (el cual contiene la carga distribuida sobre un volumen V' , como se observa en la figura 2.11), se obtiene:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{r}), \quad (2.154)$$

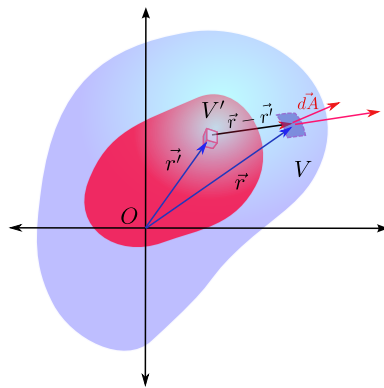


Figura 2.11: Ley de Gauss. Volumen V que rodea una densidad de carga ρ distribuida en el volumen V' .

Ahora, utilizando el teorema de Gauss, se deduce que

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}, \quad (2.155)$$

y por lo tanto la expresión (2.154) se puede escribir como:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{r}). \quad (2.156)$$

Por otra parte, la integral $\int_V d^3x \rho(\vec{r})$ se puede realizar separando la contribución del volumen V' (donde la densidad $\rho(r)$ es diferente de cero) y el volumen exterior a V' (es decir, $V - V'$ donde $\rho(r) = 0$), tal que:

$$\int_V d^3x \rho(\vec{r}) = \int_{V'} d^3x \rho(\vec{r}) + \int_{V-V'} d^3x \rho(\vec{r}). \quad (2.157)$$

Ahora el término $\int_{V'} d^3x \rho(\vec{r})$ corresponde a la carga contenida dentro del volumen V' , que corresponde a la carga interior al volumen V (que se denominará q_{int}), de tal manera que:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \rho(\vec{r}) &= \underbrace{\int_{V'} d^3x \rho(\vec{r})}_{q_{int}} + \underbrace{\int_{V-V'} d^3x \rho(\vec{r})}_0 \\ &= q_{int}, \end{aligned} \quad (2.158)$$

por lo tanto

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int}. \quad (2.159)$$

La ecuación (2.159) representa la forma integral de la ley de Gauss (que se ha deducido a partir de su forma diferencial). La ley de Gauss es una de las ecuaciones de Maxwell que resumen los fenómenos electromagnéticos. En términos del potencial eléctrico, la ecuación (2.153) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [-\vec{\nabla} \phi(\vec{r})] = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \phi(\vec{r})] \\ &= -\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.160)$$

es decir,

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}), \quad (2.161)$$

La ecuación (2.161) se conoce como la *ecuación de Poisson*.

Ejercicio 2.19 Demostrar la relación (2.151).

Ejercicio 2.20 Una esfera de radio R posee una carga Q distribuida de manera que $\rho(\vec{r}) = \frac{k}{r}$, donde r es la distancia radial medida desde el centro de la esfera y k es una constante. Calcular el valor de k y utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

Ejercicio 2.21 Un cilindro muy largo de radio R tiene una carga Q distribuida de acuerdo con la expresión:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \right), \quad (2.162)$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga, ρ_0 y α son constantes, y ρ es la coordenada cilíndrica que mide la distancia de un punto al eje en el plano xy . Calcular el campo eléctrico producido por este cilindro a una distancia d respecto al eje del cilindro, que puede estar dentro ($d < R$) o fuera del mismo ($d > R$), utilizando la ley de Gauss.

Ejemplo 2.9

Se considera el campo eléctrico definido por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^a}. \quad (2.163)$$

En este ejemplo se demostrará que el campo eléctrico en mención es irrotacional y se determinará la densidad de carga que lo genera. Además, se calculará el potencial eléctrico asociado.

Solución: Para demostrar que el campo es irrotacional, se calculará el rotor del campo eléctrico de dos maneras diferentes: utilizando notación indicial y coordenadas curvilíneas.

1. Mediante notación indicial:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{r}}{r^a} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \left[\frac{\vec{r}}{r^a} \right]_k \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \left\{ x_k (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \left\{ \underbrace{(\partial_j x_k)}_{\delta_{jk}} (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} + x_k \left(-\frac{a}{2} \right) (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}-1} \underbrace{\partial_j (x_m x_m)}_{2x_m \partial_j x_m} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \left\{ \delta_{jk} (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a x_k (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}-1} x_m \underbrace{(\partial_j x_m)}_{\delta_{jm}} \right\}, \quad (2.164) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \left\{ \delta_{jk} (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a x_k (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}-1} x_j \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \delta_{jk} (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a \hat{e}_i \epsilon_{ijk} x_k (x_l x_l)^{-\frac{a+2}{2}} x_j \right\}, \quad (2.165) \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\hat{e}_i \epsilon_{ijj}}_0 (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a (x_l x_l)^{-\frac{a+2}{2}} \hat{e}_i \epsilon_{ijk} x_k x_j \right\} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^{a+2}} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0.\end{aligned}\quad (2.166)$$

2. Utilizando coordenadas curvilíneas: El rotacional en coordenadas esféricas viene dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}.\end{aligned}\quad (2.167)$$

Dado que el campo en estudio solo tiene componente E_r ($E_\theta = E_\phi = 0$) y que depende exclusivamente de la variable r , se tiene que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\phi} = \vec{0}.\quad (2.168)$$

En conclusión:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}.\quad (2.169)$$

Para determinar la distribución de carga, se utiliza la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}),\quad (2.170)$$

1. Mediante notación indicial, se tiene que:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^a} \right] = \frac{q}{4\pi} \partial_i \left[x_i (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[\underbrace{(\partial_i x_i)}_{\delta_{ii}} (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} + x_i \left(-\frac{a}{2} \right) (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}-1} \underbrace{\partial_j (x_m x_m)}_{2x_m \partial_j x_m} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[\underbrace{\delta_{ii}}_3 (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a x_i (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}-1} \underbrace{(\partial_i x_m)}_{\delta_{im}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[3 (x_l x_l)^{-\frac{a}{2}} - a x_i x_i (x_l x_l)^{-\frac{a-2}{2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[\frac{3}{r^a} - a \frac{1}{r^{a+2}} r^2 \right] = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{3}{r^a} - a \frac{1}{r^a} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{(3-a)}{r^a}.\end{aligned}\quad (2.171)$$

Entonces,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{(3-a)}{r^a}. \quad (2.172)$$

2. Aplicando la divergencia al campo eléctrico en coordenadas esféricas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta h_\phi E_r}{h_r} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta E_r}{1} \right) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1} \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^{a-1}} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^{a-3}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{3-a}{r^a}. \end{aligned} \quad (2.173)$$

A partir de este resultado, es posible calcular el potencial utilizando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l}' = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \left[\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^a} \right] \cdot d\vec{l}' \\ &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \left[\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r' \hat{r}}{r'^a} \right] \cdot [dr' \hat{r} + r' d\theta \hat{\theta} + r' \sin \theta d\phi \hat{\phi}] \\ &= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{r'}{r'^a} dr' = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^r r'^{1-a} dr', \end{aligned} \quad (2.174)$$

entonces

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r'^{(1-a)+1}}{(1-a)+1} \Big|_{\infty}^r = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{r^{(1-a)+1}}{(1-a)+1} - \frac{r'^{(1-a)+1}}{(1-a)+1} \Big|_{\infty} \right] \\ &= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{(2-a)} r^{(2-a)} - \frac{1}{(2-a)} r'^{(2-a)} \Big|_{\infty} \right] \\ &= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{(2-a)} \frac{1}{r^{(2-a)}} - \frac{1}{(2-a)} \frac{1}{r'^{(a-2)}} \Big|_{\infty} \right] \\ &= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r^{(2-a)}}{(2-a)} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{(2-a)} \frac{1}{r^{(2-a)}}, \end{aligned} \quad (2.175)$$

con lo cual, se obtiene que

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{(2-a)} \frac{1}{r^{a-2}}. \quad (2.176)$$

Ejemplo 2.10

El potencial de Coulomb de apantallamiento está definido por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}, \quad (2.177)$$

donde λ es una constante. Se desea calcular el campo eléctrico y la densidad de carga.

Solución: Para determinar el campo eléctrico y la densidad de carga, se emplearán dos enfoques diferentes: uno utilizando notación indicial y otro a través de los operadores de gradiente y divergencia definidos en coordenadas esféricas.

1. Mediante notación indicial: El campo eléctrico asociado está dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \partial_i \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \left[\frac{\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} + e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \left[-\frac{1}{\lambda r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i(r) + e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \left[-\frac{1}{\lambda r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i(x_j x_j)^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \hat{e}_i \left[-\frac{1}{\lambda r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\partial_i(x_l x_l)}_{2x_l \partial_i x_l} + \left(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\partial_i(x_l x_l)}_{2x_l \partial_i x_l} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\lambda r} \hat{e}_i e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_l \underbrace{\partial_i x_l}_{\delta_{il}} - \hat{e}_i e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} x_l \underbrace{\partial_i x_l}_{\delta_{il}} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\lambda r} (\hat{e}_i x_i) e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} - (\hat{e}_i x_i) e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\lambda r} \vec{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{1}{r} - \vec{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{1}{r^3} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{r}{\lambda}} \vec{r} \left(-\frac{1}{\lambda r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right), \end{aligned} \quad (2.178)$$

por lo tanto, el campo eléctrico correspondiente es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{r} \right). \quad (2.179)$$

Para calcular la distribución de carga asociada a este potencial se utiliza:

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[-\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \right] = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \right] = -\epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) \\
 &= -\epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right] = -\frac{q}{4\pi} \partial_i \partial_i \left[\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right] = -\frac{q}{4\pi} \partial_i \left\{ \partial_i \left[\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right] \right\} \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \partial_i \left[\frac{\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} + e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) \right], \tag{2.180}
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{\partial_i (\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}})}{r} + \left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \partial_i \left(e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + e^{-\frac{r}{\lambda}} \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{\partial_i (\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}})}{r} + 2 \left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \underbrace{e^{-\frac{r}{\lambda}} \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right)}_{-4\pi\delta^3(\vec{r})} \right], \tag{2.181}
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{\partial_i (\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}})}{r} + 2 \left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) - 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right]. \tag{2.182}$$

A continuación se desarrollará de forma independiente cada uno de los términos expresados en (2.182):

$$\begin{aligned}
 \partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (\partial_i r) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \partial_i (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\partial_i (x_l x_l)}_{2x_l \partial_i x_l} \\
 &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_l \underbrace{\partial_i x_l}_{\delta_{il}} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i, \tag{2.183}
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i. \tag{2.184}$$

Ahora, derivando la expresión obtenida en (2.184), tal que

$$\partial_i (\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}}) = -\frac{1}{\lambda} \partial_i \left[e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i \right], \tag{2.185}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 \partial_i(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}}) &= -\frac{1}{\lambda} \partial_i \left[e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i \right] \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \left\{ \underbrace{\left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)}_{-\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i + e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[\partial_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \right] x_i + e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\partial_i x_i}_{\delta_{ii}} \right\} \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i + e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\partial_i (x_m x_m)}_{2x_m \partial_i x_m} \right] x_i \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\delta_{ii}}_3 \right\} \\
 &= -\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i - \left[(x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} x_m \underbrace{\partial_i x_m}_{\delta_{im}} \right] x_i + 3(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
 &= -\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} (x_i x_i) (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} - (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} (x_i x_i) + 3(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{1}{r} r^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} r^2 + 3 \frac{1}{r} \right] = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} + 3 \frac{1}{r} \right), \quad (2.186)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\partial_i(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}}) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda} + 2 \frac{1}{r} \right). \quad (2.187)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) &= \partial_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \right) (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\partial_i (x_l x_l)}_{2x_l \partial_i x_l} \\
 &= -(x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} x_l \underbrace{\partial_i x_l}_{\delta_{il}} \\
 &= -(x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} x_i, \quad (2.188)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\partial_i \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}. \quad (2.189)$$

Al reemplazar las expresiones (2.184), (2.187) y (2.189) en (2.182), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \underbrace{\partial_i \left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)}_{-\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda} + 2\frac{1}{r} \right)} + 2 \underbrace{\left(\partial_i e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)}_{-\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i} \underbrace{\partial_i \left(\frac{1}{r} \right)}_{-\frac{x_i}{r^3}} - 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(r) \right] \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{1}{\lambda r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda} + 2\frac{1}{r} \right) + 2 \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} x_i \right) \left(\frac{x_i}{r^3} \right) - 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(r) \right] \\
 &= -\frac{q}{4\pi} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[-\frac{1}{\lambda r} \left(-\frac{1}{\lambda} + 2\frac{1}{r} \right) + 2 \frac{1}{\lambda} \frac{1}{r} \frac{r^2}{r^3} - 4\pi \delta^3(r) \right] \\
 &= -\frac{q}{4\pi} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda^2 r} - 2 \frac{1}{\lambda r^2} + 2 \frac{1}{\lambda r^2} - 4\pi \delta^3(r) \right] \\
 &= -\frac{q}{4\pi} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda^2 r} - 4\pi \delta^3(r) \right]. \tag{2.190}
 \end{aligned}$$

Con lo cual, la distribución de carga asociada es:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda^2 r} - 4\pi \delta^3(r) \right]. \tag{2.191}$$

2. Mediante la aplicación del gradiente y la divergencia en coordenadas esféricas se deduce que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) \hat{e}_r, \tag{2.192}$$

donde se ha tenido en cuenta que $h_r = 1$, y se tiene que:

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \right) \hat{e}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} - \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \right) \hat{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^3} \vec{r} \right), \tag{2.193}$$

lo cual, se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} - \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \right) \hat{e}_r. \tag{2.194}$$

Ahora, la densidad de carga está dada por:

$$\begin{aligned}
\rho &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^3} \vec{r} \right) = \frac{q}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^3} \vec{r} \right) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r \right) + \left(\vec{\nabla} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + e^{-\frac{r}{\lambda}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r \right) + \left(\vec{\nabla} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\}. \tag{2.195}
\end{aligned}$$

Usando la divergencia y el gradiente en coordenadas esféricas (sin considerar derivas sobre las variables θ y ϕ), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{q}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \hat{e}_r \right) + \left(\vec{\nabla} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta h_\phi}{h_r} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \right) + \left(\frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \hat{e}_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \hat{e}_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda} \right) + \left(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda} \right) \hat{e}_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda} - \frac{r e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda^2} \right) + \left(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r^2} \right) + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi} \left\{ -\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda^2} + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}} \delta^3(\vec{r}) \right\}. \tag{2.196}
\end{aligned}$$

En la anterior expresión se ha tenido en cuenta que $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin \theta$.

Ejercicio 2.22 Se tiene que el campo eléctrico en una región es:

$$\vec{E} = k r^3 \hat{r}, \tag{2.197}$$

donde k es una constante. Para la situación descrita, encontrar:

1. La densidad volumétrica de carga (ρ).
2. Calcular la carga total contenida en una esfera de radio R , centrada en el origen, utilizando la ley de Gauss.

2.5 Trabajo y Energía

Se sabe que la fuerza ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ sobre una carga Q es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q \vec{E}(\vec{r}). \tag{2.198}$$

Además, se puede expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}), \quad (2.199)$$

de esta forma, la fuerza eléctrica se define como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[Q\phi(\vec{r})]. \quad (2.200)$$

La expresión $[Q\phi(\vec{r})]$ es una función escalar denominada energía potencial eléctrica $U(\vec{r})$. Por lo tanto, la fuerza eléctrica puede expresarse en términos del gradiente de la energía potencial, tal que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}). \quad (2.201)$$

El trabajo realizado por esta fuerza se define como:

$$W_{\vec{F}} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla}U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU(\vec{r}) = -U(\vec{r}) \Big|_A^B = -(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)), \quad (2.202)$$

por lo tanto,

$$W_{\vec{F}} = -\Delta U(\vec{r}). \quad (2.203)$$

Este resultado muestra que el trabajo realizado por la fuerza es independiente de la trayectoria, y si la trayectoria es cerrada (ver figura 2.12), este trabajo es nulo. Por lo tanto, se concluye que la fuerza electrostática es conservativa, lo que implica que el campo electrostático también lo es, en virtud de (2.199).

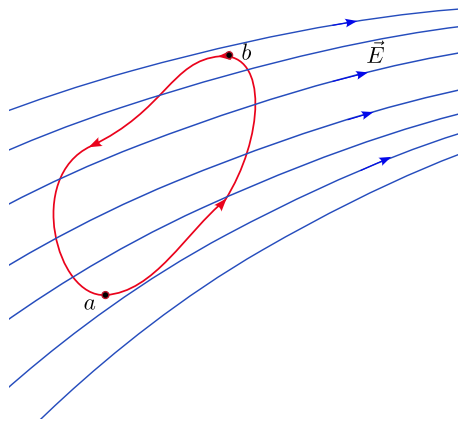


Figura 2.12: Representación gráfica de una trayectoria cerrada.

En general, a toda fuerza conservativa se le puede asociar una energía potencial, y el trabajo realizado por dicha fuerza es igual a menos el cambio de la energía potencial asociada. La energía potencial se interpreta como la capacidad de una carga Q para realizar trabajo debido a su posición.

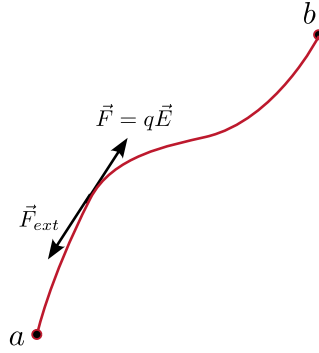


Figura 2.13: Cancelación de la fuerza eléctrica por una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ en el movimiento cuasiestático.

La energía potencial eléctrica dada por (2.203) también se puede entender como el trabajo mínimo necesario para mover la carga Q desde el infinito hasta la posición $\vec{r}$ (donde existe un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ y un potencial $\phi(\vec{r})$), en contra de la fuerza eléctrica. Este trabajo sería realizado por una fuerza externa, y será denotado como W_{ext} . Para calcular el trabajo externo, se considera que la carga Q se mueve de manera cuasiestática, es decir, aplicando una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ que contrarresta la fuerza eléctrica $\vec{F}$ en cada punto de la trayectoria, como se muestra en la figura 2.13. Esto se expresa como:

$$\vec{F}_N = \vec{F} + \vec{F}_E = 0. \quad (2.204)$$

Por lo tanto, el trabajo neto para llevar la carga de $\vec{r}' \rightarrow \infty$ a $\vec{r}' \rightarrow r$ es:

$$W_{ext} = \int_{\infty}^r \vec{F}_{ext}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \vec{F}_E(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -Q \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = Q[\phi(\vec{r}) - \phi(\infty)]. \quad (2.205)$$

Si se asume que $\phi(\infty) \rightarrow 0$, entonces el trabajo externo es:

$$W_{ext} = Q\phi(\vec{r}) = U(\vec{r}). \quad (2.206)$$

El resultado anterior muestra que la energía potencial $U(\vec{r})$ representa el trabajo externo mínimo necesario en contra de la fuerza eléctrica para mover una carga Q desde el infinito hasta el punto $\vec{r}$ (bajo la condición de $\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$). Es crucial distinguir la energía potencial que posee una carga en una región donde hay un potencial eléctrico (definida por (2.206)), de la energía potencial eléctrica de una configuración dada de cargas que se explicará a continuación.

Energía potencial de una distribución de cargas discretas y continuas

Para calcular la energía potencial de un sistema compuesto por N partículas cargadas, es fundamental determinar el trabajo necesario para configurar dicho sistema. Una estrategia consiste en llevar cada una de las cargas, una por una, desde el infinito (donde se establece el potencial de referencia $\phi = 0$) hasta su posición en la configuración deseada, y medir el trabajo mínimo requerido en contra del campo eléctrico para desplazar cada carga. La energía potencial del sistema será la suma de los trabajos individuales.

Como ejemplo, se considerará la configuración de cuatro cargas puntuales descritas en la figura 2.14 y se calculará la energía eléctrica asociada a dicha configuración. Inicialmente, se asume que las cargas están lo suficientemente separadas para que la interacción electrostática entre ellas sea

despreciable. Luego, se procede a llevar una a una cada carga hasta alcanzar la configuración final, tal como se esquematiza en la figura 2.14.

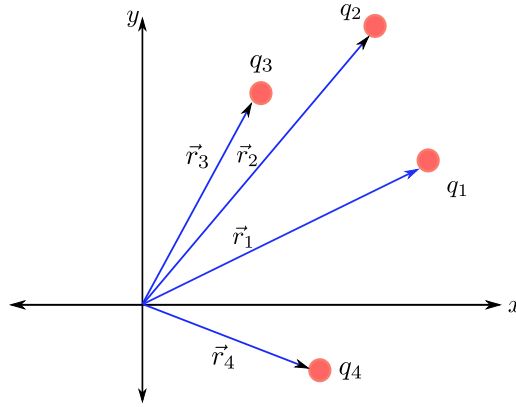


Figura 2.14: Configuración de 4 cargas puntuales en el espacio.

Al posicionar la primera carga q_1 , no se requiere realizar trabajo, ya que se parte del supuesto de que las otras cargas eléctricas se sitúan en el infinito, por lo tanto, su campo eléctrico en la posición $\vec{r}$ es insignificante. Para desplazar la carga q_2 hasta la configuración deseada, es necesario realizar trabajo en contra de la fuerza eléctrica originada por la carga q_1 (ver figura 2.15a). Este trabajo viene dado por:

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 \phi_1(\vec{r}_2) = q_2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \end{aligned} \quad (2.207)$$

donde el potencial $\phi_1(\vec{r}_2)$ representa el potencial generado por la carga q_1 en la posición $\vec{r}_2$ (donde se encuentra la carga q_2).

Para desplazar la carga q_3 , es necesario realizar trabajo en contra de la fuerza eléctrica generada por las cargas previamente posicionadas q_1 y q_2 (consultar figura 2.15b). Este trabajo se expresa como:

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 [\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3)] \\ &= q_3 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}, \end{aligned} \quad (2.208)$$

donde $\phi_1(\vec{r}_3)$ representa el potencial generado por la carga q_1 en la posición $\vec{r}_3$, y $\phi_2(\vec{r}_3)$ es el potencial creado por la carga q_2 en la posición $\vec{r}_3$.

Por último, el trabajo necesario para colocar la cuarta carga q_4 será (referirse a la figura 2.15c):

$$\begin{aligned}
 W_4 &= q_4 [\varphi_1(\vec{r}_4) + \varphi_2(\vec{r}_4) + \varphi_3(\vec{r}_4)] \\
 &= q_4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|}, \quad (2.209)
 \end{aligned}$$

siendo $\varphi_1(\vec{r}_4)$ el potencial debido a la carga q_1 en la posición $\vec{r}_4$ (donde se ubicará la carga q_4), $\varphi_2(\vec{r}_4)$ el potencial generado por la carga q_2 en la posición $\vec{r}_4$, y finalmente $\varphi_3(\vec{r}_4)$ es el potencial generado por q_3 en $\vec{r}_4$.

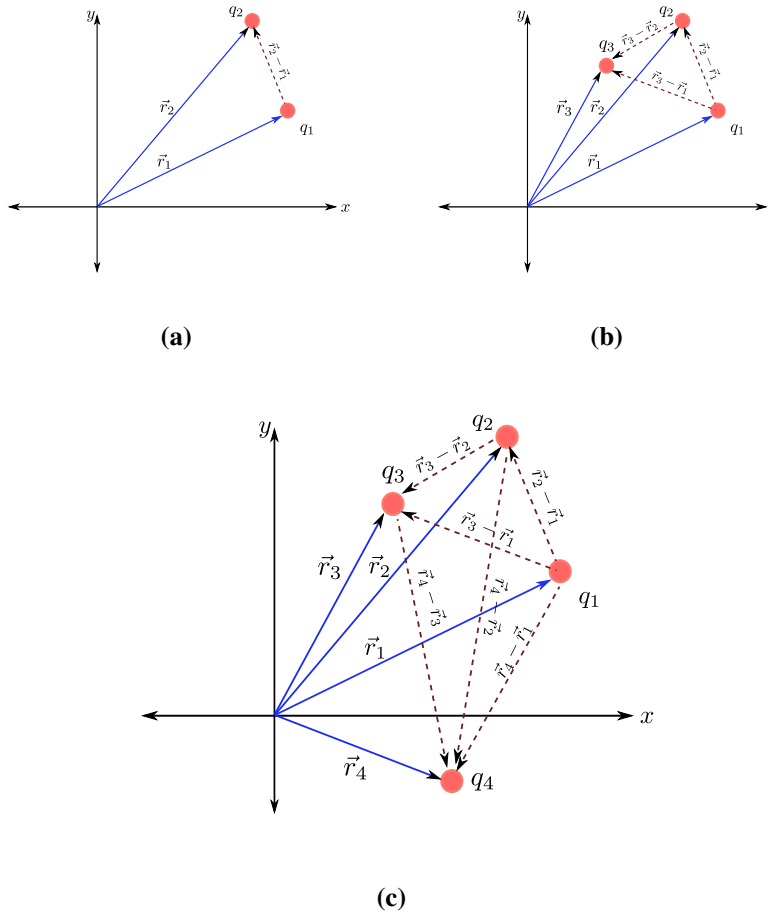


Figura 2.15: (a) Trabajo para desplazar la carga q_2 a la posición $\vec{r}_1$. (b) Trabajo para desplazar la carga q_3 a $\vec{r}_3$. (c) Trabajo para desplazar la carga q_4 a $\vec{r}_4$.

El trabajo total para formar la configuración de cuatro cargas mostrado en la figura 2.14 es:

$$\begin{aligned}
 W_T &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|},
 \end{aligned} \tag{2.210}$$

lo cual se podría expresar como

$$W_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{\varphi(\vec{r}_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \varphi(\vec{r}_i). \tag{2.211}$$

Por lo tanto, el trabajo necesario para conformar un sistema de N cargas puntuales se generaliza de (2.211) y se expresa como:

$$W_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{\varphi(\vec{r}_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\vec{r}_i) = U, \tag{2.212}$$

resultado que se interpreta también como la energía potencial electrostática del sistema de N cargas puntuales.

En el caso de una distribución continua de cargas se puede generalizar la sumatoria en la expresión (2.212). Si se toma de una distribución continua de carga un diferencial de carga dq' , entonces la energía potencial de dicho diferencial sera:

$$dU = dq'(\vec{r}) \varphi(\vec{r}), \tag{2.213}$$

donde $\varphi(\vec{r})$ corresponde al potencial medido en el punto donde se ubica el diferencial de carga dq' . La energía total de la distribución de carga se obtiene integrando (2.213), y se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int dq'(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \tag{2.214}$$

El factor $1/2$ que aparece en (2.214) se presenta para evitar “doble conteo” (de forma equivalente, como existe un factor $1/2$ en la expresión para la energía asociada a cargas discretas).

Ahora, si se considera que la carga se encuentra distribuida en un volumen V y caracterizada por una densidad $\rho(\vec{r})$, la relación anterior se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \tag{2.215}$$

La energía eléctrica se puede escribir exclusivamente en términos del campo eléctrico, para lo cual se tiene en cuenta la ley de Gauss en forma diferencial

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}), \tag{2.216}$$

a partir de lo cual se obtiene que

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}). \quad (2.217)$$

Ahora, utilizando la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] = \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \varphi(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right], \quad (2.218)$$

se determina que

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right] &= \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] - \underbrace{\left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{-\vec{E}(\vec{r})} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{E}^2(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.219)$$

De tal forma que la expresión para la energía eléctrica se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{E}^2(\vec{r}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.220)$$

Al aplicar el teorema de Gauss sobre la primera integral, se tiene que:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S d\vec{a} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x E^2(\vec{r}). \quad (2.221)$$

La superficie S en la anterior expresión, representa la frontera que delimita el volumen V . Si dicho volumen se extiende hasta abarcar todo el espacio, la evaluación de los campos en puntos de la frontera que se encuentran en el infinito, donde el comportamiento del potencial eléctrico y del campo eléctrico es:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0, \quad E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow 0, \quad (2.222)$$

conlleva a que la integral $\oint_S d\vec{a} \cdot \left[\varphi(\vec{x}) \vec{E}(\vec{r}) \right]$ tienda a cero:

$$\begin{aligned} \oint_S d\vec{a} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] &\rightarrow \oint_S r^2 d\Omega \left[\left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] \\ &\sim \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S d\Omega \left(\frac{1}{r} \right) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.223)$$

donde $da = r^2 d\Omega = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Por consiguiente, la energía potencial electrostática de una distribución continua de carga se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 E^2(\vec{r}) = \int_V d^3x \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\vec{r}) \right]. \quad (2.224)$$

El resultado anterior, permite concluir que la energía electrostática se encuentra distribuida de forma continua a lo largo del espacio, con una densidad de energía dada por:

$$\mu_E = \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\vec{r}) \right]. \quad (2.225)$$

La energía potencial electrostática de una distribución continua de cargas se describe únicamente en función del campo eléctrico, lo que sugiere que el campo eléctrico en sí posee energía.

Ejemplo 2.11

Tres cargas puntuales están situadas en las esquinas de un cuadrado con lado a , como se muestra en la figura 2.16. En este ejemplo se evaluará el trabajo necesario para llevar una carga $+q$ desde $\vec{r} \rightarrow \infty$ hasta la esquina superior derecha del cuadrado.

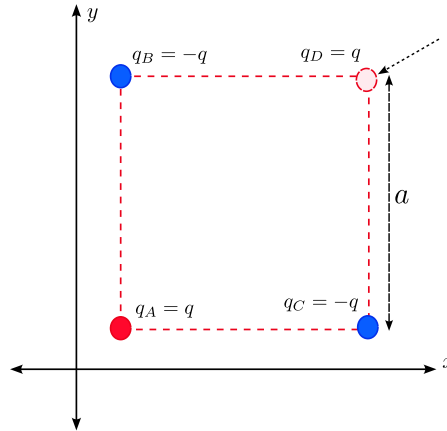


Figura 2.16: Configuración de un sistema de tres cargas puntuales localizadas en las esquinas de cuadrado de la lado a ; una carga $+q$ se ubicará en el cuarto vértice.

Solución: El trabajo necesario para traer la carga $+q$ y situarla en la esquina superior derecha del cuadrado se calcula de la siguiente manera:

$$W = q\phi(\vec{r}), \quad (2.226)$$

donde $\phi(\vec{r})$ es el potencial debido a las otras tres cargas en el punto $\vec{r}$, donde se ubicará la carga $+q$. Este potencial, considerando el origen de coordenadas en la carga $+q$, se

encuentra a partir de:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}) &= \varphi_{+q}(\vec{r}) + \varphi_{-q}(\vec{r}) + \varphi_{-q}(\vec{r}) \\
 &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) + \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right). \tag{2.227}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo requerido es:

$$W = q\varphi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right). \tag{2.228}$$

A continuación, se determina la energía necesaria para configurar este arreglo de cuatro cargas. Utilizando el resultado previamente derivado:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\vec{r}_i), \tag{2.229}$$

que para este caso en particular se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \varphi(\vec{r}_i), \tag{2.230}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} [q_A \varphi(\vec{r}_A) + q_B \varphi(\vec{r}_B) + q_C \varphi(\vec{r}_C) + q_D \varphi(\vec{r}_D)] \\
 &= \frac{1}{2} [(+q) \varphi(\vec{r}_A) + (-q) \varphi(\vec{r}_B) + (-q) \varphi(\vec{r}_C) + (+q) \varphi(\vec{r}_D)] \\
 &= \frac{q}{2} [\varphi(\vec{r}_A) - \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_C) + \varphi(\vec{r}_D)]. \tag{2.231}
 \end{aligned}$$

Calculando cada potencial en las posiciones indicadas:

$$\varphi(\vec{r}_A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right), \tag{2.232}$$

$$\varphi(\vec{r}_B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \tag{2.233}$$

$$\varphi(\vec{r}_C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \tag{2.234}$$

$$\varphi(\vec{r}_D) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right). \tag{2.235}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{q}{2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) \right] \\
 &= \frac{q}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right] \\
 &= \frac{q}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 8 \right). \tag{2.236}
 \end{aligned}$$

Finalmente, la energía potencial asociada a la configuración de cuatro cargas vendrá dada por:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right). \tag{2.237}$$

Ejemplo 2.12

Se desea determinar la energía almacenada en una esfera sólida cargada uniformemente, la cual posee un radio R y una carga total q . Este objetivo se alcanzará mediante dos enfoques diferentes: en el primero se deducirá la energía a partir de la ecuación (2.215) y en el segundo a partir de la expresión (2.224).

Solución: Para deducir la energía eléctrica a partir de la densidad de carga y el potencial eléctrico, se parte de la expresión:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \tag{2.238}$$

Para hacer uso de la expresión anterior, es necesario evaluar el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera, asumiendo que el potencial en el infinito es cero. Así, se tiene que:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \tag{2.239}$$

A partir de la ley de Gauss, se puede determinar que el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera está dado por (lo cual se deja como ejercicio para el lector):

$$\vec{E}_{out}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \vec{E}_{in}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r}. \tag{2.240}$$

Ahora, utilizando el vector $d\vec{r}$ en coordenadas esféricas (se deja como ejercicio para el lector):

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}, \tag{2.241}$$

se establece que el potencial eléctrico en un punto exterior a la esfera ($r > R$) es:

$$\begin{aligned}
\phi_{out}(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r'^2} \right] \cdot [dr' \hat{r} + r' d\theta \hat{\theta} + r' \sin \theta d\phi \hat{\phi}] \\
&= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r,
\end{aligned} \tag{2.242}$$

por lo tanto:

$$\phi_{out}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \tag{2.243}$$

Realizando un procedimiento similar, es posible determinar el potencial eléctrico en un punto $\vec{r}$ dentro de la esfera ($r \leq R$), para lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned}
\phi_{in}(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= - \int_{\infty}^R \vec{E}_{out}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_R^{\vec{r}} \vec{E}_{in}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= - \int_{\infty}^R \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r'^2} \right] \cdot [dr' \hat{r} + r' d\theta \hat{\theta} + r' \sin \theta d\phi \hat{\phi}] \\
&\quad - \int_R^{\vec{r}} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{R^3} \hat{r} \right] \cdot [dr' \hat{r} + r' d\theta \hat{\theta} + r' \sin \theta d\phi \hat{\phi}] \\
&= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr'}{r'^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \int_R^r r' dr',
\end{aligned} \tag{2.244}$$

donde se ha tenido en cuenta la ortonormalidad de los vectores base en coordenadas esféricas. Al realizar las respectivas integrales, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\phi_{in}(\vec{r}) &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^R - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_R^r \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^3} (r^2 - R^2) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left[1 - \frac{1}{2R^2} (r^2 - R^2) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} (2R^2 - r^2 + R^2),
\end{aligned} \tag{2.245}$$

es decir,

$$\phi_{in}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} (3R^2 - r^2). \tag{2.246}$$

Retomando el cálculo de la energía eléctrica, se debe observar que en la expresión (2.215), el volumen de integración se extiende a todo el espacio. Por lo tanto, dicha integración se

debe realizar dividiendo el espacio en dos regiones: interior y exterior a la esfera y tener en cuenta que la densidad fuera de la esfera es cero. Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_{in}} d^3x \rho(\vec{r}) \phi_{in}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int_{V_{out}} d^3x \underbrace{\rho(\vec{r})}_0 \phi_{out}(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_{in}} d^3x \rho(\vec{r}) \phi_{in}(\vec{r}).
 \end{aligned} \tag{2.247}$$

Dado que la carga está distribuida uniformemente, se establece que,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{V_{in}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}, \tag{2.248}$$

a partir de lo cual, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{V_{in}} d^3x \left[\frac{3q}{4\pi R^3} \right] \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} (3R^2 - r^2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3q}{4\pi R^3} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} \right) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi (3R^2 - r^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3q}{4\pi R^3} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} \right) (4\pi) \int_0^R dr (3R^2 r^2 - r^4) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3q}{4\pi R^3} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} \right) \int_0^R (3R^2 r^2 - r^4) dr \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3q}{4\pi R^3} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} \right) \left(3R^2 \left(\frac{r^3}{3} \right) - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^R \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3q}{4\pi R^3} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{2R^3} \right) \left(\frac{4}{5} R^5 \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q^2}{5R} \right),
 \end{aligned} \tag{2.249}$$

es decir,

$$U = \frac{1}{20\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q^2}{R} \right). \tag{2.250}$$

La manera alternativa de llegar al mismo resultado es a partir de la ecuación (2.224),

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \epsilon_0 E^2(\vec{r}). \tag{2.251}$$

Para este caso, se deben considerar los valores del campo eléctrico dentro y fuera de la esfera. Así, se tiene que:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{in}} d^3x E_{in}^2(\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{out}} d^3x E_{out}^2(\vec{r}). \quad (2.252)$$

Utilizando los resultados conocidos para el campo eléctrico, se tiene que:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{in}} d^3x \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} \right]^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{out}} d^3x \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right]^2 r^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right]^2 (4\pi) \int_0^R r^4 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 (4\pi) \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^R + \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^5}{5} + \frac{1}{R} \right), \end{aligned} \quad (2.253)$$

con lo cual se obtiene el resultado ya deducido:

$$U = \frac{1}{20\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q^2}{R} \right). \quad (2.254)$$

Ejercicio 2.23 Demuestre las relaciones (2.241) y (2.240).

Ejercicio 2.24 Utilizando la expresión de la energía potencial dada por:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S d\vec{a} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x \vec{E}^2(\vec{r}), \quad (2.255)$$

encontrar el campo eléctrico fuera de una esfera de radio R ($r > R$) y densidad uniforme $\rho(r)$. Tomar el límite cuando $r \rightarrow \infty$ en el resultado. Demostrar que este resultado es igual al encontrado en (2.254).

Ejemplo 2.13

En este ejemplo se considera dos cascarones esféricos concéntricos con radios a y b . Se asume que el cascarón interior lleva una carga q y el cascarón exterior una carga $-q$. El objetivo es calcular la energía de esta configuración.

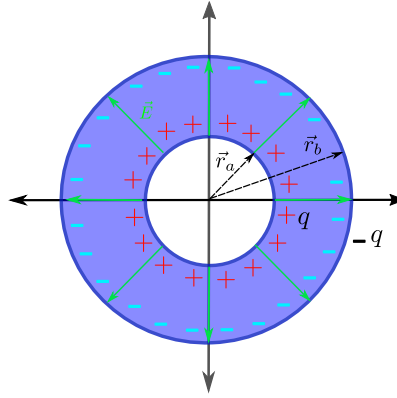


Figura 2.17: Configuración de dos cascarones esféricos concéntricos con radios a y b , con cargas q y $-q$, respectivamente.

Solución: Aplicando la ley de Gauss, se puede establecer que el campo eléctrico es diferente de cero exclusivamente en la región comprendida entre los cascarones y está dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (2.256)$$

por lo tanto, la energía del sistema se determina a partir de:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x E^2(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (4\pi) \int_a^b dr \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.257)$$

Resolviendo la integral, se obtiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \end{aligned} \quad (2.258)$$

Una manera alternativa de llegar a este resultado es recordar que el campo eléctrico $\vec{E}$ es consecuencia de la superposición de los campos debidos a las cargas q y $-q$, dados por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > a, \\ \vec{E}_2 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b, \end{aligned} \quad (2.259)$$

de manera que el campo eléctrico de la configuración es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2.260)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x E^2(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x [\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x [E_1^2(\vec{r}) + E_2^2(\vec{r}) + 2\vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{E}_2(\vec{r})] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x [E_1^2(\vec{r}) + E_2^2(\vec{r})] + \epsilon_0 \int_V d^3x \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{E}_2(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.261)$$

Evaluando cada término,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right]^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{2} \int_b^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right]^2 \\ &\quad - \epsilon_0 \int_b^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \right] \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.262)$$

En la última igualdad de la expresión anterior, se ha tenido en cuenta que el campo generado exclusivamente por el cascarón esférico de radio b es cero en su región interior ($r < b$), y por ello la integral solo se evalúa teniendo en cuenta como límite inferior el punto $r = b$. Ahora, resolviendo las integrales, se obtiene que:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (4\pi) \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (4\pi) \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &\quad - \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (4\pi) \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right)_\infty + \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)_\infty \\ &\quad - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)_\infty \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{b} \right) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \end{aligned} \quad (2.263)$$

lo cual es consistente con el resultado obtenido anteriormente.

Ejercicio 2.25 Demostrar la ecuación (2.256).

Ejercicio 2.26 Considerar un cascarón esférico de radio R con una densidad superficial de carga uniforme σ . ¿Cuál es la energía electrostática almacenada por dicho sistema? ¿Qué sucede cuando el radio de la esfera disminuye?

Ejercicio 2.27 Considerar una distribución de carga esférica para la cual la densidad de carga volumétrica tiene la forma:

$$\rho(\vec{r}) = kr^{-n}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (2.264)$$

donde k y n son constantes positivas. Calcular la energía electrostática asociada con dicha distribución de carga. ¿Para qué valor de n la energía es finita?

2.6 Dipolo Eléctrico

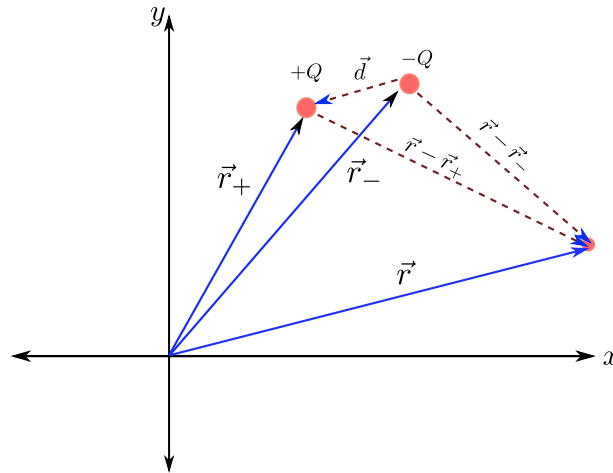


Figura 2.18: Dipolo Eléctrico. (a) Diagrama para calcular el potencial y campo eléctrico en $\vec{r}$. (b) Líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

Un dipolo se interpreta como un sistema constituido por dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto (ver figura 2.18). El potencial debido a este sistema es:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.265)$$

De la figura 2.19 se determinar que:

$$\vec{r}_- = \vec{r}'_- + \vec{r}', \quad (2.266)$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r}'_+ + \vec{r}', \quad (2.267)$$

donde $\vec{r}'$ es un vector que determina el centro de masa del dipolo eléctrico. Así que:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_+|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-|} \right]. \quad (2.268)$$

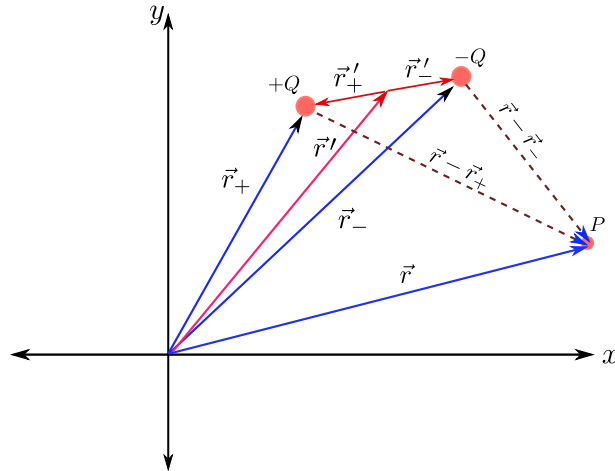


Figura 2.19: Definición de coordenadas $\vec{r}'_+$ y $\vec{r}'_-$ en el dipolo eléctrico.

El segundo término en (2.268), se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-|} &= [(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-) \cdot (\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-)]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= [(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - 2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + \vec{r}'_- \cdot \vec{r}'_-]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 - 2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + |\vec{r}'_-|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left\{ |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \left[1 - \frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{|\vec{r}'_-|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 &= |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left\{ 1 - \left[\frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{|\vec{r}'_-|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.269)
 \end{aligned}$$

Ahora, definiendo:

$$\frac{|\vec{r}'_-|}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \varepsilon, \quad (2.270)$$

y bajo la aproximación $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'_-|$, se determina que $\varepsilon \ll 1$. Respecto a la proporcionalidad con ε del segundo y tercer factor en el radical de (2.269), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= \frac{r'_- |\vec{r} - \vec{r}'| \cos \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{r'_- \cos \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sim \left(\frac{r'_-}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)^1 = \varepsilon, \\
 \frac{|\vec{r}'_-|^2}{2|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &\sim \left(\frac{r'_-}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)^2 = \varepsilon^2. \quad (2.271)
 \end{aligned}$$

Manteniendo exclusivamente factores a orden ε^1 , en la expresión (2.269), se tiene que:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-|} \approx |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left\{ 1 - \frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.272)$$

Ahora, de la expansión en serie de potencias:

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 - \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \dots, \quad (2.273)$$

identificando

$$n \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad x \rightarrow \frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}, \quad (2.274)$$

resulta que:

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \left[\frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.275)$$

de manera que en aproximación a primer orden en $\left(\frac{r'_-}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$, se tiene que:

$$\left\{ 1 - \left[\frac{2\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}. \quad (2.276)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-|} &\simeq \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[1 + \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (2.277)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\vec{r}'_+ = -\vec{r}'_-$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_+|} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + \vec{r}'_-|} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (2.278)$$

Entonces, el potencial eléctrico debido al dipolo, en puntos muy distantes al centro de masa del mismo, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_+|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'_-|} \right] \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r}'_- \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{r}'_+ \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q(-\vec{r}'_-) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.\end{aligned}\quad (2.279)$$

Identificando el vector $\vec{d} = (-2\vec{r}'_-)$, como el vector orientado desde la carga negativa del dipolo a la carga positiva, se tiene que:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{d}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.\quad (2.280)$$

La cantidad $Q\vec{d}$ se denomina momento dipolar eléctrico, tal que

$$\vec{p} \equiv Q\vec{d},\quad (2.281)$$

y por lo tanto

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.\quad (2.282)$$

Ejercicio 2.28 Demostrar que el campo eléctrico del dipolo es dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right].\quad (2.283)$$

Ejercicio 2.29 Demostrar que el campo eléctrico (2.283) es un campo irrotacional.

2.7 Torque Sobre un Dipolo Eléctrico

En esta sección se analiza el comportamiento de un dipolo eléctrico cuando se encuentra expuesto a un campo eléctrico externo. Cada carga del dipolo está sometida a la acción de una fuerza eléctrica, tal como se ilustra en la figura 2.20, lo que provoca la aparición de un torque sobre el dipolo eléctrico. El torque resultante, considerando el centro de masa del dipolo como origen, se expresa como:

$$\vec{\tau}_o = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+,\quad (2.284)$$

donde se cumple que,

$$\vec{r}_+ = -\vec{r}_-.\quad (2.285)$$

Asumiendo inicialmente que el campo eléctrico es uniforme, resulta que,

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_-,\quad (2.286)$$

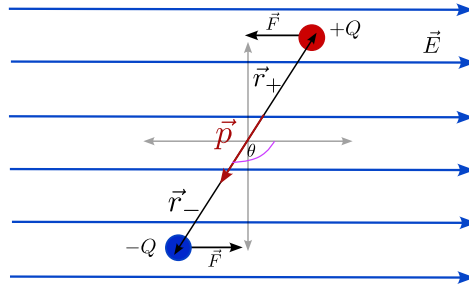


Figura 2.20: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo.

de manera que

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_o &= \vec{\tau}_- + \vec{\tau}_+ = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = (-\vec{r}_+) \times (-\vec{F}_+) + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ \\ &= 2\vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = \underbrace{2\vec{r}_+}_{\vec{d}} \times \underbrace{(Q\vec{E})}_{\vec{p}} = Q\vec{d} \times \vec{E},\end{aligned}\quad (2.287)$$

es decir,

$$\vec{\tau}_o = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (2.288)$$

El torque que experimentaría un dipolo en presencia de un campo eléctrico homogéneo orienta al dipolo en la dirección del campo. En contraste, cuando el campo eléctrico no es homogéneo, cada carga del dipolo experimenta una fuerza que depende de su posición en el espacio. Como resultado, el dipolo se verá sometido a una fuerza total dada por:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q\vec{E}_+ + (-Q)\vec{E}_- = Q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \\ &= Q[\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)],\end{aligned}\quad (2.289)$$

donde $\vec{r}_+$ y $\vec{r}_-$ son los vectores de posición de las cargas Q y $-Q$, respectivamente, en relación al origen de coordenadas O como están indicados en la figura 2.19.

De la figura (2.19). se tiene que $\vec{r}'$ define el vector de posición del centro del dipolo, $\vec{r}_+$ la posición de la carga Q en relación al centro geométrico de las dos cargas y $\vec{r}_-$ la posición de la carga $-Q$ con respecto al punto en mención. Para este calculo se renombrará $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$, entonces,

$$\vec{F} = Q[\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)] = Q[\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_-)]. \quad (2.290)$$

Ahora, se considera que $|\vec{r}_+| \ll |\vec{r}|$ y $|\vec{r}_-| \ll |\vec{r}|$, de manera que se puede realizar una expansión en serie de Taylor en torno a la posición $\vec{r}$. La expansión se realiza teniendo en cuenta que para una función escalar $f(u)$ de una variable, el polinomio de Taylor en torno de un punto u_0 viene dado por,

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(u)}{du^n} \right|_{u=u_0} (u - u_0)^n. \quad (2.291)$$

Ahora, en el caso de una función de varias variables, las derivadas se realizan sobre ellas de manera que se convierten en parciales y la serie de Taylor de $f(\vec{u}) = f(u_x, u_y, u_z)$ en torno a (u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}) se define como,

$$f(\vec{u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!l!} \frac{\partial^{(n+m+l)} f(\vec{u}_0)}{\partial u_x^n \partial u_y^m \partial u_z^l} (u_x - u_{x0})^n (u_y - u_{y0})^m (u_z - u_{z0})^l, \quad (2.292)$$

que al considerar los primeros términos se reduce a:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(\vec{u}_0) + (u_x - u_{x0}) \frac{\partial f(\vec{u}_0)}{\partial u_x} + (u_y - u_{y0}) \frac{\partial f(\vec{u}_0)}{\partial u_y} + (u_z - u_{z0}) \frac{\partial f(\vec{u}_0)}{\partial u_z} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(u_x - u_{x0})^2 \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_x^2} + (u_y - u_{y0})^2 \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_y^2} + (u_z - u_{z0})^2 \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_z^2} \right. \\ &\quad \left. + (u_x - u_{x0})(u_y - u_{y0}) \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_x \partial u_y} + (u_x - u_{x0})(u_z - u_{z0}) \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_x \partial u_z} \right. \\ &\quad \left. + (u_y - u_{y0})(u_z - u_{z0}) \frac{\partial^2 f(\vec{u}_0)}{\partial u_y \partial u_z} \right] + \dots \\ &= f(\vec{u}_0) + \left[(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{\nabla} \right] f(\vec{u}_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.293)$$

En el caso del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{u}) = E_i(\vec{u}) \hat{e}_i$, la serie de Taylor para la componente E_i se expresa como,

$$E_i(\vec{u}) = E_i(\vec{u}_0) + \left[(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{\nabla} \right] E_i(\vec{u}_0) + \dots, \quad (2.294)$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{u}) &= E_i(\vec{u}) \hat{e}_i = E_i(\vec{u}_0) \hat{e}_i + \left[(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{\nabla} \right] E_i(\vec{u}_0) \hat{e}_i + \dots \\ &= \vec{E}(\vec{u}_0) + \left[(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E}(\vec{u}_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.295)$$

Realizando el cambio de variable,

$$\vec{u}_0 \rightarrow \vec{r}, \quad \vec{u} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_{\pm} \quad (2.296)$$

se tiene que,

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_{\pm}) = \vec{E}(\vec{r}) + \left(\vec{r}_{\pm} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}(\vec{r}) + \dots \quad (2.297)$$

Siendo que $|\vec{r}_{\pm}| \ll |\vec{r}|$, se puede aproximar la relación anterior a

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_{\pm}) \simeq \vec{E}(\vec{r}) + \left(\vec{r}_{\pm} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.298)$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= Q \left[\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_-) \right] \\
 &= Q \left\{ \left[\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] - \left[\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \right\} \\
 &= Q \left[(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) - (\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= Q \left[\underbrace{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}_{\vec{d}} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E}(\vec{r}) \\
 &= \left[\underbrace{(Q\vec{d})}_{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E}(\vec{r}). \tag{2.299}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza que se ejerce sobre el dipolo eléctrico debido a un campo eléctrico externo no homogéneo es:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}). \tag{2.300}$$

Ahora, el torque que ejerce el campo eléctrico sobre la carga $+Q$ y medido respecto al origen 0, estará dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_+ &= \vec{r}_+ \times \vec{F}(\vec{r}_+) = \vec{r}_+ \times [Q\vec{E}(\vec{r}_+)] = Q(\vec{r} + \vec{r}_+) \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_+) \\
 &\simeq Q(\vec{r} + \vec{r}_+) \times \left[\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= Q \left\{ (\vec{r} \times \vec{E}) + \vec{r} \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] + \vec{r}_+ \times \vec{E}(\vec{r}) + \vec{r}_+ \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \right\}. \tag{2.301}
 \end{aligned}$$

En forma similar, sobre la carga $-Q$ el torque será:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_- &= \vec{r}_- \times \vec{F}(\vec{r}_-) = \vec{r}_- \times [-Q\vec{E}(\vec{r}_-)] = -Q(\vec{r} + \vec{r}_-) \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_-) \\
 &\simeq -Q(\vec{r} + \vec{r}_-) \times \left[\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= -Q \left\{ (\vec{r} \times \vec{E}) + \vec{r} \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] + \vec{r}_- \times \vec{E}(\vec{r}) + \vec{r}_- \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \right\}. \tag{2.302}
 \end{aligned}$$

El torque total se expresa como,

$$\vec{\tau}_o = \vec{\tau}_- + \vec{\tau}_+, \tag{2.303}$$

y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \tau_o &= Q \left\{ (\vec{r} \times \vec{E}) + \vec{r} \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] + \vec{r}_+ \times \vec{E}(\vec{r}) + \vec{r}_+ \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \right\} \\
 &\quad - Q \left\{ (\vec{r} \times \vec{E}) + \vec{r} \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] + \vec{r}_- \times \vec{E}(\vec{r}) + \vec{r}_- \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \right\} \\
 &= Q(\vec{r} \times \vec{E}) + Q\vec{r} \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] + Q\vec{r}_+ \times \vec{E}(\vec{r}) + Q\vec{r}_+ \times [(\vec{r}_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \\
 &\quad - Q(\vec{r} \times \vec{E}) - Q\vec{r} \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] - Q\vec{r}_- \times \vec{E}(\vec{r}) - Q\vec{r}_- \times [(\vec{r}_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})] \tag{2.304}
 \end{aligned}$$

que al simplificar factores, toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \tau_0 &= Q\vec{r} \times \left\{ \left[\underbrace{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}_{\vec{d}} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E}(\vec{r}) \right\} + Q \underbrace{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}_{\vec{d}} \times \vec{E}(\vec{r}) \\
 &\quad + Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] - Q\vec{r}_- \times \left[(\vec{r}'_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= \vec{r} \times \left\{ \left[\underbrace{(Q\vec{d})}_{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E}(\vec{r}) \right\} + \underbrace{(Q\vec{d})}_{\vec{p}} \times \vec{E}(\vec{r}) \\
 &\quad + Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] - Q\vec{r}_- \times \left[(\vec{r}'_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= \vec{r} \times \left[(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}) + Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &\quad - Q\vec{r}_- \times \left[(\vec{r}'_- \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right]. \tag{2.305}
 \end{aligned}$$

Ahora, al tener en cuenta que $\vec{r}'_+ = -\vec{r}'_-$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_o &= \vec{r} \times \left[(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}) + Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &\quad - Q \underbrace{\vec{r}_-}_{-\vec{r}_+} \times \left[\left(\underbrace{\vec{r}'_-}_{-\vec{r}_+} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &= \vec{r} \times \left[(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}) + Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \\
 &\quad - Q\vec{r}_+ \times \left[(\vec{r}'_+ \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right], \tag{2.306}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \underbrace{\left[(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right]}_{\vec{F}} + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}). \tag{2.307}$$

El segundo término en (2.307) se interpreta como el torque alrededor del centro del dipolo, mientras que el primer término se entiende como el torque medido respecto al origen O producido por la fuerza resultante que actúa sobre el dipolo y que se aplica en el punto $\vec{r}$ (centro geométrico del dipolo).

Ejercicio 2.30 Mostrar que la energía potencial de un dipolo cuando este está sometido a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ está dado por:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \tag{2.308}$$

Probar que el resultado (2.308) es válido aún cuando el campo eléctrico externo es no homogéneo.

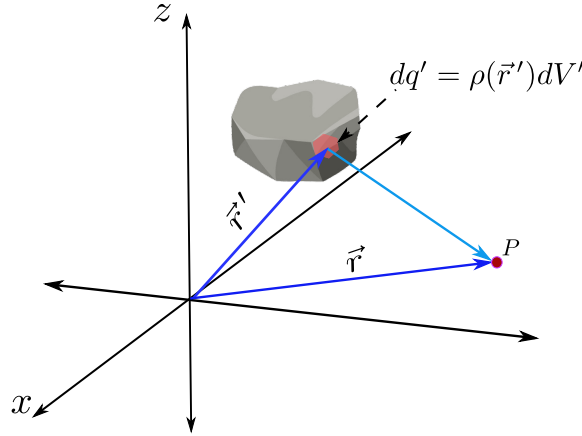


Figura 2.21: Diagrama para calcular potencial y campo eléctrico de una distribución de carga caracterizada por una densidad $\rho(\vec{r}')$.

2.8 Desarrollo Multipolar de Campos Eléctricos

Una distribución de carga que ocupa un volumen V , caracterizada por una densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ (ver figura 2.21), tiene un potencial eléctrico dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.309)$$

Ahora, el factor $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{[(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(\vec{r}^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + \vec{r}'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(r^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + r'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.310)$$

Si se considera un punto $\vec{r}$ muy alejado de la distribución de carga en estudio, es posible expandir la cantidad $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ en una serie de potencias en función de $\frac{\vec{r}'}{r}$ ($\frac{\vec{r}'}{r} \ll 1$), para lo cual se tiene en cuenta la expansión en serie de Taylor para $x < 1$ dada por:

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots, \quad (2.311)$$

con lo cual, al relacionar,

$$x \rightarrow \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}, \quad (2.312)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8} \left[\frac{4(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^4} + \frac{r'^4}{r^4} - \frac{4r'^2(\vec{r}' \cdot \vec{r})}{r^4} \right] + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \underbrace{\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2}}_{\frac{1}{r}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^4} - \frac{r'^2}{r^2} \right]}_{\frac{1}{r^2}} - \frac{3}{2} \underbrace{\frac{r'^2(\vec{r}' \cdot \vec{r})}{r^4}}_{\frac{1}{r^3}} + \frac{3}{8} \underbrace{\frac{r'^4}{r^4}}_{\frac{1}{r^4}} + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^4} - \frac{r'^2}{r^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \dots \right\}. \quad (2.313)
 \end{aligned}$$

Tomando términos hasta segundo orden en $1/r^2$, se cumple para puntos distantes que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\approx \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^4} - \frac{r'^2}{r^2} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})(\vec{r}' \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3x'_i x_i x'_j x_j}{r^5} - \frac{x'_i x'_i}{r^3} \right] \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \left(3x'_i x_i x'_j x_j - r'^2 \underbrace{r^2}_{x_i x_i} \right) \\
 &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} (3x'_i x_i x'_j x_j - r'^2 \delta_{ij} x_i x_j), \quad (2.314)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}). \quad (2.315)$$

Bajo los resultados anteriores el potencial se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r} \int_V dV' \rho(\vec{r}')}_Q + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V dV' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}), \tag{2.316}
 \end{aligned}$$

por consiguiente, el potencial eléctrico puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_V d^3x' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}). \tag{2.317}
 \end{aligned}$$

El primer término en (2.317) se interpreta como el potencial que surgiría si la carga total Q estuviera concentrada en el origen. El integrando del segundo término es una generalización del concepto de momento dipolar para una distribución continua de carga, conocido como el *momento dipolar de la distribución de carga*:

$$\vec{p} \equiv \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}', \tag{2.318}$$

y por lo tanto, el segundo término en (2.317), representa el potencial que surgiría si un dipolo puntual con un momento dipolar $\vec{p}$ y carga Q estuviera ubicado en el origen de coordenadas. El tercer término de la expresión (2.317) puede simplificarse al introducir la cantidad:

$$\mathcal{Q}_{ij} \equiv \int_V dV' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}), \tag{2.319}$$

llamada *tensor de momento de cuadripolo*, que amplía el concepto de momento dipolar. El tensor Q_{ij} posee una representación matricial $\mathbb{Q}$ con nueve componentes (debido a que $i, j = 1, 2, 3$). Dado que el tensor es simétrico, es decir: $Q_{ij} = Q_{ji}$, solo seis componentes son independientes.

Al considerar términos de orden superior en el potencial, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^n}\right)$ con $n \geq 7$, surgen momentos de orden superior que son relevantes en física nuclear.

Ejemplo 2.14

Verificar que $\mathcal{Q}_{ij}$ (ecuación (2.319)) posee traza cero.

Solución: La traza es definida por:

$$\text{Traz}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}_{ii}, \tag{2.320}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \text{Traz}(\mathcal{Q}) &= \mathcal{Q}_{ii} = \int_V dV' \rho(\vec{r}') \left(\underbrace{3x'_i x'_i}_{r'^2} - \underbrace{r'^2}_3 \delta_{ii} \right) \\
 &= \int_V dV' \rho(\vec{r}') (3r'^2 - 3r'^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.321}$$

Ejemplo 2.15

Evaluar los multipolos cartesianos equivalentes a una carga puntual localizada en $z = a$ como se indica en la figura 2.22.

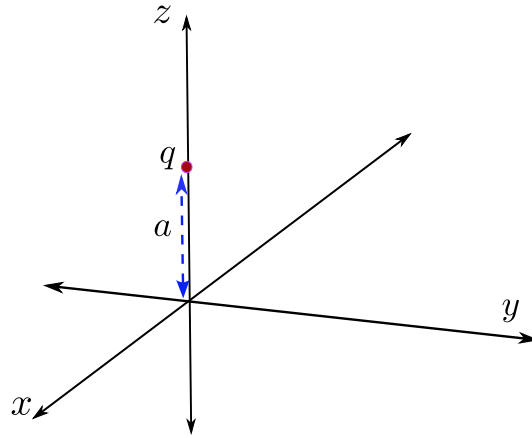


Figura 2.22: Representación de una carga puntual localizada en $z = a$.

Solución: La densidad volumétrica de carga, correspondiente a una carga puntual, viene dada por:

$$\begin{aligned}
 Q &= q = q(1)(1)(1) = q \int dx \delta(x) \int dy \delta(y) \int dz \delta(z-a) \\
 &= q \int dx dy dz \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) = \int d^3x [q \delta(x) \delta(y) \delta(z-a)] \\
 &= \int d^3x \rho(x, y, z),
 \end{aligned} \tag{2.322}$$

con lo cual, la densidad volumétrica equivalente a la carga puntual de la figura 2.22 es,

$$\rho(x, y, z) = q \delta(x) \delta(y) \delta(z-a). \tag{2.323}$$

Por tanto, el primer término cartesiano que se conoce como monopolos es:

$$q = \int d^3x \rho(\vec{r}) = \int d^3x q \delta(x) \delta(y) \delta(z-a). \tag{2.324}$$

El siguiente término, es el dipolo y se expresa como:

$$\vec{p} = \int d^3x \rho(\vec{r}) \vec{r}, \quad (2.325)$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición asociado a la carga y que viene dado por:

$$\vec{r} = a\hat{k}, \quad (2.326)$$

de manera que

$$\vec{p} = \int d^3x \rho(\vec{r}) a\hat{k} = a\hat{k} \underbrace{\int d^3x \rho(\vec{r})}_q = aq\hat{k}. \quad (2.327)$$

El siguiente término, que corresponde al tensor de cuadrupolo, se calcula a partir de:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_i x_j - a^2 \delta_{ij}), \quad (2.328)$$

de donde,

$$\mathcal{Q}_{11} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_1 x_1 - a^2 \delta_{11}) = -a^2 \underbrace{\int_V d^3x \rho(\vec{r})}_q = -qa^2, \quad (2.329)$$

$$\mathcal{Q}_{22} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_2 x_2 - a^2 \delta_{22}) = -qa^2, \quad (2.330)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{33} &= \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_3 x_3 - a^2 \delta_{33}) = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3a^2 - a^2) \\ &= 2a^2 \int_V d^3x \rho(\vec{r}) = 2qa^2, \end{aligned} \quad (2.331)$$

$$\mathcal{Q}_{12} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_1 x_2 - a^2 \delta_{12}) = 0, \quad (2.332)$$

$$\mathcal{Q}_{13} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_1 x_3 - a^2 \delta_{13}) = 0, \quad (2.333)$$

$$\mathcal{Q}_{23} = \int_V d^3x \rho(\vec{r}) (3x_2 x_3 - a^2 \delta_{23}) = 0. \quad (2.334)$$

En las expresiones anteriores, se ha tenido en cuenta que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = a$ (componentes cartesianas de la partícula en estudio). A partir de los resultados obtenidos, el cuadrupolo escrito en forma matricial toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} & \mathcal{Q}_{13} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} & \mathcal{Q}_{23} \\ \mathcal{Q}_{31} & \mathcal{Q}_{32} & \mathcal{Q}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2qa^2 \end{pmatrix} \\ &= qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.335)$$

Ejercicio 2.31 Calcular el campo eléctrico que se deriva del potencial (2.317).

Ejercicio 2.32 Mostrar que el siguiente orden en el potencial (2.317) es de la forma:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i x_j x_k}{6r^7} \mathcal{M}_{ijk}, \quad (2.336)$$

donde

$$\mathcal{M}_{ijk} \equiv 3 \int_V dV' \rho(\vec{r}') [5x'_i x'_j x'_k - r'^2 (x'_i \delta_{jk} + x'_j \delta_{ik} + x'_k \delta_{ji})], \quad (2.337)$$

cantidad que se conoce como momento de octupolo eléctrico.

Ejercicio 2.33 Calcular los momentos de multipolo cartesiano de la distribución de carga mostrado en la figura 2.23.

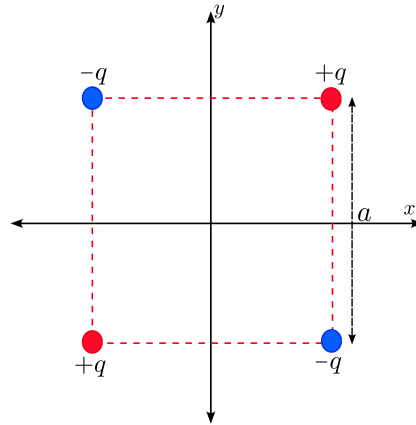


Figura 2.23: Distribución de cargas en un cuadrado con cargas $+q$ y $-q$ alternadas en los vértices.

Ejercicio 2.34 Un cubo de lado a tiene ocho cargas Q situadas en sus vértices. Calcular los momentos de multipolo cartesiano del sistema.

2.9 Condiciones de Frontera

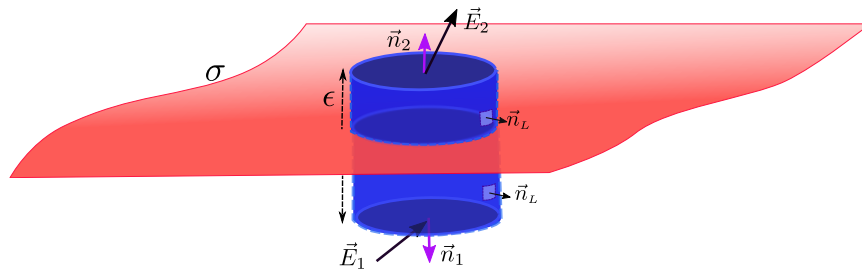


Figura 2.24: Condiciones de frontera para el campo eléctrico a partir de la Ley de Gauss.

Para analizar las condiciones de frontera que el campo eléctrico debe cumplir al pasar a través de dos medios, se considera dos regiones del espacio separadas por una superficie con una densidad superficial de carga σ , la cual se identifica como la frontera. Las condiciones de frontera se examinan teniendo en cuenta la divergencia y el rotacional del campo en las proximidades de esta superficie.

La integral de la divergencia del campo eléctrico en un volumen V lleva a la Ley de Gauss. Para aplicarla, se define una superficie cerrada de integración. Se asume una superficie cerrada S en forma de una caja cilíndrica (véase figura 2.24). La altura de la caja es ε y el área de la base es A . Se debe calcular el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana S utilizando la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{ins}}}{\varepsilon_0}. \quad (2.338)$$

La integral cerrada en el izquierdo de la ecuación (2.338) se puede dividir en tres superficies; superior (S_2), inferior (S_1) y lateral (S_L), tal que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{a}, \quad (2.339)$$

donde S_1 y S_2 son las superficies correspondientes a la cara superior e inferior de la caja, respectivamente, y S_L identifica la superficie lateral de la misma. Los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ representan el campo eléctrico en las regiones (1) y (2), respectivamente. Ahora, se tomará el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, con el fin de acercar las superficies S_1 y S_2 a la frontera. Bajo esta aproximación, el flujo $\int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{a} \approx 0$, de manera que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \approx \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}. \quad (2.340)$$

Aunque los campos $\vec{E}_1(\vec{r})$ y $\vec{E}_2(\vec{r})$ dependen del punto, si el área de la base A es lo suficientemente pequeña, se puede considerar que estos campos son uniformes, es decir:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} &\approx \vec{E}_1 \cdot \int_{S_1} d\vec{a} + \vec{E}_2 \cdot \int_{S_2} d\vec{a} \\ &= \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 A + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 A \\ &= (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2) A. \end{aligned} \quad (2.341)$$

Ahora, $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 \equiv \hat{n}$, siendo $\hat{n}$ un vector normal a la superficie que rodea un punto en la frontera. Por lo tanto,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} A. \quad (2.342)$$

Ahora, la carga encerrada por la superficie S es:

$$q_{\text{ins}} = \int dq' = \int da \sigma(\vec{r}). \quad (2.343)$$

Aunque la densidad de carga $\sigma(\vec{r})$ también depende del punto, cuando A es lo suficientemente pequeña, esta se torna uniforme, de manera que:

$$q_{\text{ins}} \approx \sigma \int da = \sigma A. \quad (2.344)$$

Por lo tanto, al combinar las expresiones (2.342) y (2.344) en la ley de Gauss, se obtiene:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A, \quad (2.345)$$

es decir:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.346)$$

La cantidad $\vec{E} \cdot \hat{n} \equiv E_n$, representa la componente del campo eléctrico que es normal a la superficie. De esta manera, la ecuación (2.346) establece que la componente normal del campo eléctrico es discontinua en la frontera por una cantidad de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$. En el caso particular de que $\sigma = 0$, se puede afirmar que $E_{n1} = E_{n2}$, es decir, la componente normal del campo es continua en la frontera. Dado que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, la ecuación (2.346) se reduce a:

$$(-\vec{\nabla}\phi_2 + \vec{\nabla}\phi_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.347)$$

entonces

$$(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi_2) - (\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi_1) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.348)$$

donde se puede observar que

$$(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (2.349)$$

La relación anterior corresponde a la derivada normal del potencial, es decir, la razón de cambio del potencial en la dirección perpendicular a la frontera. Por lo tanto, la ecuación (2.346) se puede representar en la forma:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.350)$$

Un análisis similar resulta al examinar la otra condición que satisface el campo electrostático relacionada con su rotacional. Se sabe que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.351)$$

Esta relación es equivalente a:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.352)$$

Ejercicio 2.35 Demostrar la ecuación (2.352).

Para hacer uso de la ecuación (2.352), se considera una trayectoria cerrada C que abarca las dos regiones (véase figura 2.25). La trayectoria consiste en un rectángulo con lados l y ϵ . Para la trayectoria en consideración, la ecuación (2.352) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{l_1} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{l_2} \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{l_3} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{l_4} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \end{aligned} \quad (2.353)$$

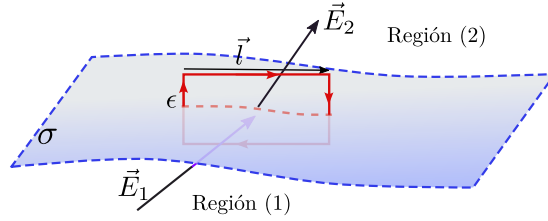


Figura 2.25: Condiciones de frontera a partir de la condición de irrotacionalidad del campo eléctrico.

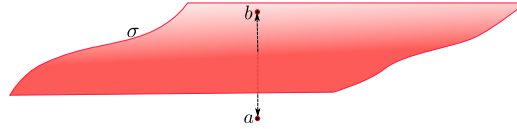


Figura 2.26: Continuidad del potencial a través de una frontera.

donde las trayectorias l_2 y l_1 se encuentran en las regiones superior e inferior, respectivamente, mientras que l_3 y l_4 son trayectorias de longitud ϵ . Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$, lo que implica aproximar las trayectorias l_1 y l_2 cerca de la frontera, resulta en que la contribución de las integrales a lo largo de l_3 y l_4 en la expresión anterior es casi nula, de manera que:

$$0 \approx \int_{l_1} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{l_2} \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.354)$$

Ahora, si la longitud l de las trayectorias l_1 y l_2 es lo suficientemente pequeñas, tal que $\vec{E}_1(\vec{r})$ y $\vec{E}_2(\vec{r})$ sean aproximadamente uniformes, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \vec{E}_1 \cdot \int_{l_1} d\vec{r} + \vec{E}_2 \cdot \int_{l_2} d\vec{r} \\ &= \vec{E}_1 \cdot l\hat{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot l\hat{l}_2 \\ &= (\vec{E}_1 \cdot \hat{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{l}_2)l, \end{aligned} \quad (2.355)$$

donde $\hat{l}_1$ y $\hat{l}_2$ son vectores tangentes a las trayectorias l_1 y l_2 . Se puede observar que $\hat{l}_2 = -\hat{l}_1 \equiv \hat{l}$, con lo cual:

$$0 = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{l}. \quad (2.356)$$

Identificando $\vec{E} \cdot \hat{l} \equiv E_t$, como la componente tangencial del campo eléctrico, la ecuación anterior establece que las componentes tangenciales de los campos son continuas en la frontera, es decir:

$$E_{t2} = E_{t1}. \quad (2.357)$$

Esto significa que no hay discontinuidad en la componente tangencial del campo eléctrico al pasar de una región a otra, lo cual es una propiedad fundamental del campo electrostático en presencia de una frontera.

Ahora, se demostrará que el potencial es continuo a través de la frontera. En la figura 2.26 se muestra la diferencia de potencial entre el punto a , ubicado en la región 1, y el punto b , localizado en la región 2. La diferencia de potencial se calcula como:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.358)$$

Si la longitud de la trayectoria tiende a cero, la integral de trayectoria también tiende a cero. Por lo tanto,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \quad (2.359)$$

lo que implica:

$$\varphi_2 = \varphi_1. \quad (2.360)$$

El calculo anterior ha establecido la continuidad del potencial en la frontera.

Ejemplo 2.16

Un cascarón esférico de radio R posee una densidad superficial de carga uniforme σ . Se debe mostrar que este resultado es consistente con la ecuación (2.346).

Solución: Para derivar el campo eléctrico dentro y fuera del cascarón, se utilizará la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int}. \quad (2.361)$$

Fuera de la esfera, se considera una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$ centrada en el cascarón, para la cual se cumple que:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} &= \oint_S (E\hat{r}) \cdot (\hat{r}da) = \oint_S E da = E \oint_S da \\ &= E(4\pi r^2). \end{aligned} \quad (2.362)$$

Ahora, fuera de la esfera, la carga encerrada por la superficie gaussiana S es:

$$q_{int} = \int \sigma da = \sigma \int da = \sigma(4\pi R^2), \quad (2.363)$$

de manera que

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int}, \quad (2.364)$$

resulta en:

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(4\pi R^2). \quad (2.365)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico fuera de la esfera es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r > R. \quad (2.366)$$

Para analizar el campo eléctrico al interior de del cascaron esférico, se considera una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$, para la cual se cumple que:

$$q_{int} = 0, \quad (2.367)$$

por lo tanto, aplicando la ley de Gauss, se tiene que

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0, \quad (2.368)$$

con lo cual se concluye que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad r < R. \quad (2.369)$$

El campo eléctrico en la región exterior e interior del cascarón esférico, esta dado por las expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > R, \\ \vec{E}_1 &= \vec{0}, & r < R, \end{aligned} \quad (2.370)$$

con lo cual se determina que:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}|_S &= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{r}|_{r=R} = \left(\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \vec{0} \right) \cdot \hat{r}|_{r=R} \\ &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \Big|_{r=R} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.371)$$

lo que garantiza el cumplimiento de la condición de frontera.

Ejercicio 2.36 Considere un largo tubo cilíndrico de radio R que lleva una densidad superficial de carga σ . Para la configuración descrita, muestre que se cumple la condición de frontera (2.346).

3 — Ecuación de Laplace

El potencial y el campo eléctrico han sido calculados para distribuciones de carga que poseen un alto grado de simetría y en puntos donde las integrales se pueden evaluar de manera exacta. Sin embargo, si se desea evaluar, por ejemplo, el potencial o el campo eléctrico generado por un disco uniformemente cargado, en un punto distinto del eje de simetría del disco, el cálculo de las integrales podría resultar más complicado. Para este tipo de casos, evaluar el potencial eléctrico implica utilizar otros métodos, y uno de ellos consiste en resolver una ecuación diferencial.

De la ley de Gauss, escrita en forma diferencial, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (3.1)$$

y del carácter irrotacional del campo eléctrico, que establece que:

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}), \quad (3.2)$$

es posible deducir que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}) = \nabla \cdot [-\nabla\phi(\vec{r})] = -\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (3.3)$$

es decir:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (3.4)$$

La ecuación anterior se conoce como *la ecuación de Poisson*. Esta ecuación establece una relación entre una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ conocida y el potencial generado por ella. Ahora, puede ocurrir que se esté interesado en evaluar el potencial en regiones del espacio donde la distribución de cargas es nula, es decir, $\rho(\vec{r}) = 0$. Para estos casos, la ecuación (3.4) se reduce a:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0. \quad (3.5)$$

La ecuación anterior se conoce como la *ecuación de Laplace*, la cual se pretende resolver para algunos casos de interés. Si bien la ecuación (3.5) proporciona un mecanismo para encontrar el potencial en lugares donde no existen densidades de carga, se asume que debe existir una fuente que genere dicho potencial. La solución de la ecuación (3.5) dependerá entonces de cómo se distribuyen las cargas en el espacio, información que afecta la solución al considerar las condiciones de frontera.

Antes de resolver problemas a partir de la ecuación de Laplace, se estudiarán algunas propiedades fundamentales de las ecuaciones de Poisson y de Laplace.

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial para el potencial $\phi(\vec{r})$ en una región del espacio de volumen V , donde está definida la distribución de carga $\rho(\vec{r})$, y la cual está limitada por una superficie S . Esta ecuación requiere de *condiciones de frontera* que garantizan que la solución o las soluciones de la ecuación sean completamente determinadas. Con el propósito de hacer énfasis en estas condiciones, se introducirá una serie de observaciones que son fundamentales.

3.1 Superposición de soluciones

Si $\phi_1(\vec{r})$, $\phi_2(\vec{r})$, $\phi_3(\vec{r})$, $\dots$, $\phi_n(\vec{r})$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laplace (3.5), entonces, la solución más general de la ecuación es una combinación lineal de estas con coeficientes apropiados, es decir:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \phi_{\alpha}(\vec{r}). \quad (3.6)$$

La demostración de este teorema es bastante simple; se puede aplicar el operador Laplaciano a la ecuación (3.6), es decir:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &= \nabla^2 \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \phi_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^n \nabla^2 [a_{\alpha} \phi_{\alpha}(\vec{r})] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \nabla^2 \phi_{\alpha}(\vec{r}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces, $\phi(\vec{r})$ es también solución de la ecuación de Laplace. Las constantes a_{α} se escogen de manera que se satisfagan las condiciones de frontera dadas en cada problema.

3.2 Unicidad de las soluciones

Sean $\phi_a(\vec{r})$ y $\phi_b(\vec{r})$ dos soluciones generales de la ecuación de Poisson. Estas soluciones se pueden escribir, utilizando el principio de superposición como:

$$\varphi_a(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\vec{r}), \quad (3.8)$$

$$\varphi_b(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\vec{r}). \quad (3.9)$$

Si estas soluciones satisfacen las mismas condiciones de frontera en una región definida por el volumen V , el cual está limitado por la superficie S , entonces, los potenciales $\varphi_a(\vec{r})$ y $\varphi_b(\vec{r})$ difieren a lo sumo por una constante numérica aditiva. Para demostrar lo anterior, primero se establecerán los tres tipos de condiciones de frontera que un problema puede tener:

- Condiciones de frontera de *Dirichlet*: consiste en definir el valor del potencial φ sobre las superficies que limitan el volumen en estudio; es decir,

$$\varphi(\vec{r})|_S \equiv \varphi_S. \quad (3.10)$$

- Condiciones de frontera de *Neumann*: cuando se establece (o se conoce) la componente normal del campo eléctrico en la superficie S que limita el volumen en estudio; es decir, $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{n}$, donde $\hat{n}$ es un vector unitario normal en cada punto de la superficie S . Ahora, siendo que $\mathbf{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$, esta condición de frontera se puede expresar como:

$$\begin{aligned} E_n(\vec{r})|_S &= \mathbf{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}|_S = -\nabla \varphi(\vec{r}) \cdot \hat{n}|_S \\ &= \left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} \right|_S, \end{aligned} \quad (3.11)$$

es decir, la derivada normal del potencial evaluada en la frontera. Esta es una forma equivalente de hacer referencia a la condición de Neumann.

- Condiciones de frontera de *Cauchy*: es aquella que se caracteriza por definir el valor del potencial φ sobre algunas superficies y el valor de la derivada normal del potencial $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ en otras.

Los problemas que se resolverán en este libro utilizarán las condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann, ya que son más simples de trabajar.

Ahora, se mostrará la unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace. Dadas dos soluciones $\varphi_a(\vec{r})$ y $\varphi_b(\vec{r})$ que satisfacen las mismas condiciones de frontera, se puede definir la función:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \varphi_a(\vec{r}) - \varphi_b(\vec{r}), \quad (3.12)$$

la cual satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= \nabla^2 \varphi_a(\vec{r}) - \nabla^2 \varphi_b(\vec{r}) \\ &= -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} - \left[-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

es decir, $\varphi(\vec{r})$ es solución de la ecuación de Laplace en la región de consideración. Si las condiciones de frontera en consideración son de Dirichlet, se cumple que:

$$\varphi_a|_S = \varphi_b|_S, \quad (3.14)$$

pero si las condiciones de frontera son de Neumann, se debe cumplir que:

$$\left. \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_b}{\partial n} \right|_S. \quad (3.15)$$

De esta manera, las condiciones de frontera que satisface el potencial $\varphi(\vec{r})$ serán:

$$\varphi|_S = \varphi_a|_S - \varphi_b|_S = 0, \quad \text{C. F. Dirichlet}, \quad (3.16)$$

o bien:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} \right|_S - \left. \frac{\partial \varphi_b}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \text{C. F. Neumann}. \quad (3.17)$$

Ahora, de la primera identidad de Green se tiene

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \left[\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla} \Psi) \right] &= \int_V d^3x \left[\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \right] \\ &= \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{n} da, \end{aligned} \quad (3.18)$$

considerando $\Psi = \Phi = \varphi$, se obtiene:

$$\int_V d^3x \left[\varphi \nabla^2 \varphi + \underbrace{\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi}_{|\nabla \varphi|^2} \right] = \oint_S \varphi \underbrace{[\nabla \varphi \cdot \hat{n}]}_{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} da. \quad (3.19)$$

Ejercicio 3.1 Probar la identidad de Green (3.18).

Teniendo en cuenta que el potencial φ satisface la ecuación de Laplace (3.13), se determina que:

$$\int_V d^3x |\nabla \varphi|^2 = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} da. \quad (3.20)$$

El lado derecho en (3.20), considera el valor del potencial o su derivada normal sobre la frontera S que limita el volumen V . Si se consideran las condiciones de frontera, ya sea las de Dirichlet o

de Neumann (ver (3.16) y (3.17)), el integrando en el lado derecho de la ecuación (3.20) es igual a cero, de manera que:

$$\int_V d^3x |\nabla \phi|^2 = 0. \quad (3.21)$$

Ahora, $|\vec{\nabla} \phi|^2$ es una cantidad que siempre es positiva, por lo cual, para garantizar que la integral se anule, debe cumplirse que:

$$\vec{\nabla} \phi = 0, \quad (3.22)$$

en cada punto contenido en el volumen V . La relación anterior establece entonces que ϕ deberá ser constante dentro del volumen V y, teniendo en cuenta la continuidad de la solución, también será constante sobre la superficie que limita al volumen V , donde se conoce su valor o el valor de su derivada (por las condiciones de Dirichlet o Neumann). Por tanto, habrá dos situaciones, dependiendo de si se aplican las condiciones de Dirichlet o Neumann, tal que:

- **Condición de Dirichlet:** siendo que $\phi_a|_S = \phi_b|_S$, entonces

$$\phi_S = \phi_a|_S - \phi_b|_S = C = 0, \quad (3.23)$$

con lo cual

$$\phi_a = \phi_b, \quad (3.24)$$

de manera que el potencial será único.

- **Condición de Neumann:**

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right|_S - \left. \frac{\partial \phi_b}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (3.25)$$

es decir,

$$\left. \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \phi_b}{\partial n} \right|_S. \quad (3.26)$$

Por lo tanto,

$$\phi_a = \phi_b + \text{cte}, \quad (3.27)$$

lo que implica que las dos soluciones difieren a lo sumo en una constante, así, excepto por la recalibración, el potencial es único.

Los problemas en electrostática se resuelven mediante la especificación de las condiciones de Dirichlet o de Neumann sobre la misma región de la superficie, una excluye a la otra.

3.3 Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares

3.3.1 Problemas en dos dimensiones

Inicialmente, se procederá a resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones utilizando coordenadas cartesianas. Para ello, se identifican las dimensiones en consideración como x y y , de modo que la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} = 0. \quad (3.28)$$

Con el fin de resolver la ecuación, se aplicará el método de separación de variables, mediante el cual la función $\varphi(x,y)$ se expresa como un producto de dos funciones: $X(x)$ y $Y(y)$, tal que:

$$\varphi(x,y) = X(x)Y(y). \quad (3.29)$$

Al sustituir (3.29) en (3.28), se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [X(x)Y(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [X(x)Y(y)] \\ &= Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dividiendo la ecuación anterior por $\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$, se obtiene:

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}. \quad (3.31)$$

En la ecuación (3.31), el lado izquierdo depende exclusivamente de la variable x , mientras que el lado derecho depende exclusivamente de la variable y . Si se espera que la identidad se cumpla para todos los valores de (x,y) , ambos lados deben ser iguales a una constante k , de tal manera que:

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k. \quad (3.32)$$

La constante k puede ser positiva o negativa; la elección dependerá de las condiciones de frontera de cada problema en específico. Sin embargo, sin pérdida de generalidad, en la búsqueda de la solución general se puede asumir que k es positiva (finalmente, las condiciones de frontera corregirán el signo de la misma). Por lo tanto, se puede elegir $k = \alpha^2$, con lo cual se tiene que:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \alpha^2 Y(y) = 0. \quad (3.34)$$

Para el caso $\alpha > 0$, las soluciones de la ecuación (3.33) son armónicas, es decir:

$$X(x) \sim e^{\pm i\alpha x}, \quad (3.35)$$

o de forma equivalente

$$X(x) \sim \sin(kx), \cos(kx). \quad (3.36)$$

La elección de (3.35) o (3.36) como solución a la ecuación (3.33) es arbitraria; sin embargo, las funciones $\sin x$ y $\cos x$ tienen una paridad definida y llevan a una solución más directa en el caso que los problemas a tratar presenten alguna simetría. Por lo tanto, en este libro se utilizará dicha solución, de manera que:

$$X(x) = A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x. \quad (3.37)$$

Por otro lado, en el caso de la ecuación (3.34), las soluciones son de la forma:

$$Y(y) \sim e^{\pm \alpha y}, \quad (3.38)$$

de modo que se propone que $Y(y)$ se exprese como:

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}. \quad (3.39)$$

Las constantes $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha)$, serán determinadas por las condiciones de frontera para cada problema. De esta forma, la solución de la ecuación de Laplace para el caso $\alpha > 0$ se expresa como:

$$\varphi_\alpha(x, y) = X(x)Y(y) = (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}). \quad (3.40)$$

Ahora, considerando el caso $\alpha = 0$, el sistema de ecuaciones (3.33) y (3.34) toma la forma:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0. \quad (3.42)$$

Es fácilmente demostrable que las soluciones de estas ecuaciones son:

$$X(x) = A_0 x + B_0, \quad Y(y) = C_0 y + D_0, \quad (3.43)$$

de manera que, para $\alpha = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) \\ &= \underbrace{A_0 C_0 xy}_{E_1} + \underbrace{A_0 D_0 x}_{E_2} + \underbrace{B_0 C_0 y}_{E_3} + \underbrace{B_0 D_0}_{E_4}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

es decir, para el caso $\alpha = 0$, la solución es:

$$\varphi(x, y) = E_1 xy + E_2 x + E_3 y + E_4. \quad (3.45)$$

La solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones resulta de combinar las expresiones (3.40) y (3.45) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) \\ & + E_1 xy + E_2 x + E_3 y + E_4. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La solución más general debe contemplar todos los valores posibles de α ; sin embargo, las características de α dependen de las condiciones de frontera específicas de cada problema. Por lo tanto, el método que se utilizará en este libro para encontrar soluciones particulares consistirá en aplicar, en primera instancia, las condiciones de frontera que determinen las características de α para incluir todos los valores posibles en la solución del potencial.

Ejemplo 3.1

Calcular el potencial en la región mostrada en la figura 3.1.

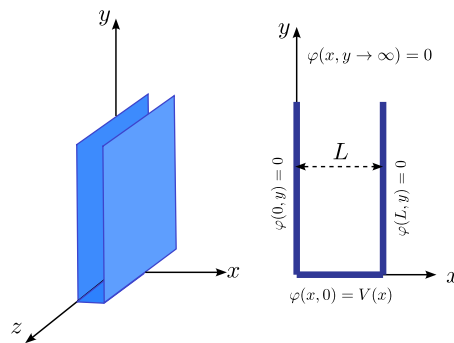


Figura 3.1: Ejemplo (3.1). Región donde se calculará el potencial eléctrico $\varphi(x, y)$ en un dominio rectangular.

Este problema está caracterizado por las siguientes condiciones de frontera:

- $\varphi(0, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(L, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(x, y \rightarrow \infty) = 0$ para todo valor de x .
- $\varphi(x, 0) = V(x)$ para todo valor de x .

Solución: Utilizando la primera condición de frontera en la ecuación (3.46), se obtiene:

$$\varphi(0, y) = (A_\alpha) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_3 y + E_4 = 0. \quad (3.47)$$

Teniendo en cuenta la independencia lineal de las funciones y , $e^{\pm \alpha y}$ y la función constante E_4 , la condición establecida en (3.47) implica que:

$$A_\alpha = 0, \quad (3.48)$$

$$E_3 = E_4 = 0, \quad (3.49)$$

de manera que la solución parcial del problema es:

$$\varphi(x, y) = (B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 xy + E_2 x. \quad (3.50)$$

Al considerar la segunda condición de frontera, se obtiene:

$$\varphi(L, y) = B_\alpha \sin \alpha L (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 L y + E_2 L = 0. \quad (3.51)$$

Ahora, teniendo en cuenta que la condición anterior debe cumplirse para todo valor de y , y que las funciones: y , $e^{\pm \alpha y}$ y la función constante $E_2 L$, son linealmente independientes, se debe exigir que:

$$B_\alpha \sin \alpha L = 0, \forall \alpha, \quad (3.52)$$

$$E_1 L = E_2 L = 0. \quad (3.53)$$

Siendo L una constante bien definida y diferente de cero, se debe establecer que $E_1 = E_2 = 0$. Ahora, con el fin de evitar la solución trivial, se requiere que $B_\alpha \neq 0$, por lo tanto:

$$\sin \alpha L = 0. \quad (3.54)$$

Para que la ecuación anterior se cumpla, es necesario que el ángulo sea un múltiplo entero de π , es decir:

$$\alpha L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{etc}, \quad (3.55)$$

de este modo, se tiene que:

$$\alpha \rightarrow \frac{n\pi}{L}. \quad (3.56)$$

La relación anterior define los posibles valores que pueden asumir las constantes α en términos de n . Por lo tanto, en la solución general se debe incluir una suma sobre todos los valores permitidos para n , obteniéndose así:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(C_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right). \quad (3.57)$$

Ahora, se examinará la condición de frontera: $\varphi(x, y \rightarrow \infty) = 0$, para todo valor de x . Cuando se considera el límite $y \rightarrow \infty$, la función $e^{\frac{n\pi}{L}y}$ diverge. Para que se obtenga una solución finita y bien comportada en este límite, se debe retirar la contribución de esta función, lo que se logra seleccionando $C_n = 0$. Así, se tiene que:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n D_n}_{B'_n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n\pi}{L}y} = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n\pi}{L}y}. \quad (3.58)$$

La última condición de frontera, $\varphi(x, 0) = V(x)$, permite determinar las constantes B'_n , de manera que:

$$\varphi(x, 0) = V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.59)$$

El conjunto de funciones $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$ constituye una base ortonormal en el intervalo $[0, L]$, y satisfacen la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{nm}. \quad (3.60)$$

Por lo tanto, utilizando la condición (3.60), es posible deducir que:

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{nm}} \quad (3.61)$$

$$= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \delta_{nm} \quad (3.62)$$

$$= \frac{L}{2} B'_m, \quad (3.63)$$

por consiguiente,

$$B'_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) V(x). \quad (3.64)$$

Considerando el caso particular en el que $V(x) = V = \text{cte}$, se determina que:

$$\begin{aligned} B'_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) V \\ &= \frac{2}{L} V \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^L \\ &= \frac{2}{n\pi} V \left[1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} V [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} V & \rightarrow n \text{ impar} \\ 0 & \rightarrow n \text{ par} \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

entonces, el potencial se expresa como:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n\pi}{L}y} = V \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n\pi}{L}y}. \quad (3.66)$$

La figura 3.2 muestra una representación gráfica de la solución (3.66), truncando la sumatoria en $N = 20$, para $V = 5(N/m * C)$ y $L = 1m$. La barra de colores a la derecha, indica el valor del potencial, y las curvas punteadas en rojo representan líneas equipotenciales para los valores de potencial señalados en la gráfica. Se observa de la gráfica que, efectivamente, el potencial en $x = 0$ y $x = L$ es cero, mientras que en $y = 0$ el potencial es V ($5(N/m * C)$). En el eje y , la gráfica se acotó a $2L$ donde ya se observa que el potencial tiende a cero.

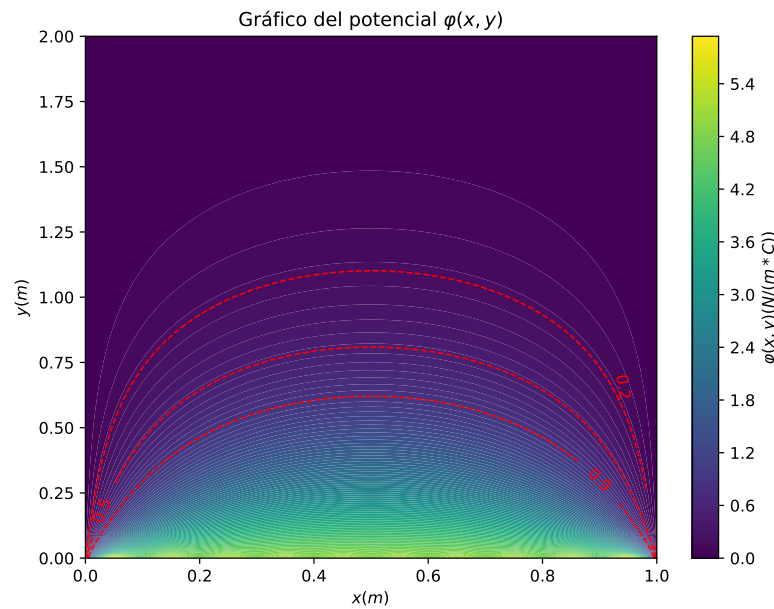


Figura 3.2: Representación gráfica de la solución (3.66), con $L = 1m$ y $V = 5(N/m * C)$, acotando la suma a 20 términos.

Ejercicio 3.2 Probar la ecuación (3.60).

Ejemplo 3.2

Se considera el caso de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, localizadas en $x = 0$ y $x = a$, que están acopladas en $\pm b$ a otras dos placas metálicas que se encuentran a un potencial constante V_0 , como se muestra en la figura 3.3. El objetivo es encontrar el potencial dentro del tubo rectangular.

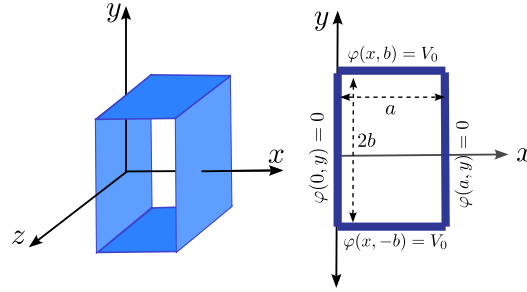


Figura 3.3: Ejemplo (3.2). Configuración de placas metálicas para encontrar el potencial en la región dentro del tubo rectangular.

Las condiciones de frontera del problema son las siguientes:

- $\varphi(0, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(a, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(x, -b) = V_0$ para todo valor de x .
- $\varphi(x, b) = V_0$ para todo valor de x .

Solución: Al aplicar la primera condición de frontera, $\varphi(0, y) = 0$, en la ecuación (3.46), se tiene:

$$\varphi(0, y) = (A_\alpha) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_3 y + E_4 = 0. \quad (3.67)$$

Dado que la condición (3.67) es válida para todo valor de y , se concluye que:

$$A_\alpha = 0, \quad (3.68)$$

$$E_3 = E_4 = 0, \quad (3.69)$$

de modo que la solución parcial del problema es:

$$\varphi(x, y) = (B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 xy + E_2 x. \quad (3.70)$$

Al considerar la segunda condición de frontera, se obtiene:

$$\varphi(a, y) = B_\alpha \sin \alpha a (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 ay + E_2 a = 0. \quad (3.71)$$

Considerando que esta igualdad debe cumplirse para todo valor de y , y que las funciones: y , $e^{\pm \alpha y}$, y la función constante $E_2 a$, son linealmente independientes, se debe imponer que:

$$B_\alpha \sin \alpha a = 0, \quad (3.72)$$

$$E_1 a = E_2 a = 0. \quad (3.73)$$

Dado que a es una constante bien definida y diferente de cero, se debe cumplir que $E_1 = E_2 = 0$. Ahora, para descartar la solución trivial, se requiere que $B_\alpha \neq 0$, lo que conduce a la condición:

$$\sin \alpha a = 0. \quad (3.74)$$

Para que esto se cumpla, es necesario que el ángulo sea un múltiplo entero de π , es decir:

$$\alpha a = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.75)$$

de modo que se tiene que:

$$\alpha \rightarrow \frac{n\pi}{a}. \quad (3.76)$$

La relación anterior define los posibles valores que puede asumir la constante α . Así, en la solución general se debe incluir una suma sobre todos sus posibles valores que ingresarán en términos de n , tal que:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right). \quad (3.77)$$

La segunda condición de frontera se expresa como:

$$\varphi(x, -b) = V_0 = \varphi(x, b). \quad (3.78)$$

Esta condición de frontera se puede interpretar de manera general como una condición de simetría que debe satisfacer la solución de la ecuación de Laplace para el problema en consideración, que se expresa como:

$$\varphi(x, -y) = \varphi(x, y), \quad (3.79)$$

y que debe ser válida para todo (x) . Esta condición implica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{\frac{n\pi}{a}y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right). \quad (3.80)$$

y dada la independencia de las funciones senoidales, se tiene que:

$$C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{\frac{n\pi}{a}y} = C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}, \quad (3.81)$$

o, de manera equivalente:

$$(C_n - D_n) e^{\frac{n\pi}{a}y} + (D_n - C_n) e^{-\frac{n\pi}{a}y} = 0. \quad (3.82)$$

Dado que las funciones $e^{\pm \frac{n\pi}{a}y}$ son linealmente independientes, se concluye que:

$$C_n = D_n. \quad (3.83)$$

De esta manera, la solución se expresará como:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(e^{\frac{n\pi}{a}y} + e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2B_n C_n}_{B'_n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Las constantes B'_n serán deducidas de la condición de frontera $V_0 = \varphi(x, b)$, de manera que:

$$V_0 = \varphi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (3.85)$$

Ahora, utilizando la condición de ortogonalidad (3.60), se determina que:

$$\begin{aligned} \int_0^a dx, \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) V_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \underbrace{\int_0^a dx, \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}_{\frac{a}{2} \delta_{nm}} \\ &= \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \delta_{nm} \\ &= \frac{a}{2} \cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right) B'_m. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por consiguiente, se establece que:

$$B'_n = \frac{2V_0}{a} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad (3.87)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} B'_n &= \frac{2V_0}{a} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ &= \frac{2V_0}{a} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \left[-\frac{a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_0^a, \end{aligned} \quad (3.88)$$

de tal manera que:

$$B'_n = \frac{2V_0}{a} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \frac{a}{n\pi} \left[1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right] = \frac{2V_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} [1 - (-1)^n], \quad (3.89)$$

por lo tanto se concluye que:

$$B'_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \rightarrow n \text{ impar} \\ 0 \rightarrow n \text{ par} \end{cases}. \quad (3.90)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Laplace para el problema en consideración es:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

La figura 3.4 muestra gráficamente la solución (3.91), truncando la sumatoria en $N = 100$, para $V = 10(N/m \cdot C)$, $a = 1m$ y $b = 1m$. La barra de colores a la derecha, indica el valor del potencial, y las curvas punteadas en rojo representan líneas equipotenciales para los valores de potencial señalados en la gráfica. Se observa de la gráfica que efectivamente el potencial en $x = 0$ y $x = a$ es cero mientras que en $y = -b$ y $y = b$ es V_0 ($10(N/m \cdot C)$).

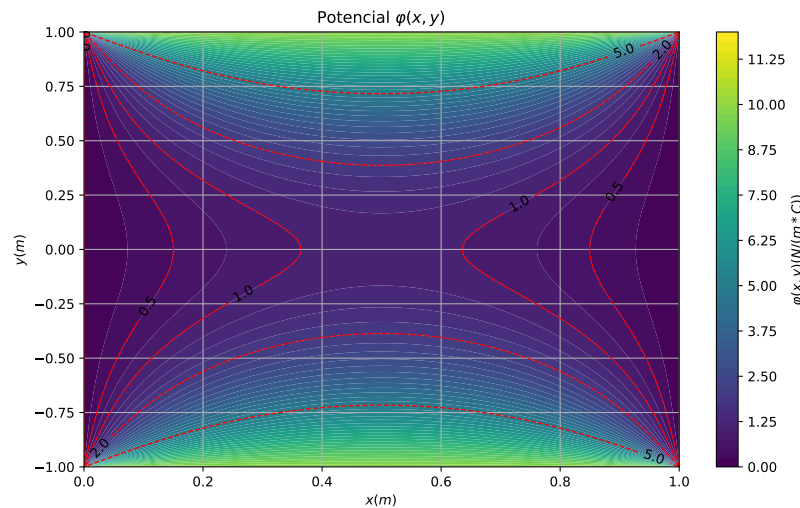


Figura 3.4: Solución ejemplo (3.2). Potencial $\varphi(x,y)$, para $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Ejemplo 3.3

En este ejemplo se considera el problema de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, localizadas en $x = -a$ y $x = a$, acopladas en $y = \pm b$ a otras dos placas metálicas que se encuentran a un potencial V_0 para $y = -b$ y a un potencial $V(x)$ para $y = b$, como se muestra en la figura 3.5. El objetivo es encontrar el potencial en la región entre las placas.

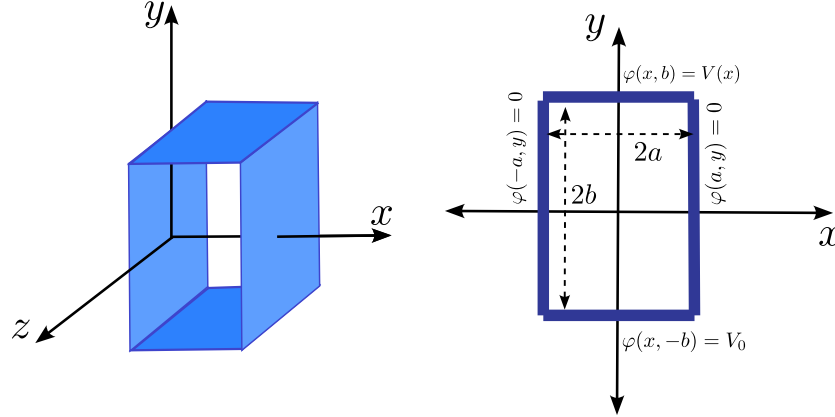


Figura 3.5: Ejemplo (3.3). Configuración de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, acopladas a dos placas a potencial constante V_0 .

Las condiciones de frontera del problema son las siguientes:

- $\varphi(-a, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(a, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(x, -b) = V_0$ para todo valor de x .
- $\varphi(x, b) = V(x)$ para todo valor de x .

Solución: Al aplicar la condición establecida en $x = -a$ en (3.46), se tiene que:

$$\varphi(-a, y) = (A_\alpha \cos \alpha a - B_\alpha \sin \alpha a) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) - E_1 a y - E_2 a + E_3 y + E_4 = 0. \quad (3.92)$$

La relación (3.92) debe ser válida para todo valor de y , y por lo tanto:

$$(A_\alpha \cos \alpha a - B_\alpha \sin \alpha a) = 0 \quad (3.93)$$

$$-E_1 a + E_3 = 0 \quad (3.94)$$

$$-E_2 a + E_4 = 0. \quad (3.95)$$

De manera similar, al aplicar la condición establecida en $x = a$, se tiene que

$$\varphi(a, y) = (A_\alpha \cos \alpha a + B_\alpha \sin \alpha a) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 a y + E_2 a + E_3 y + E_4 = V_0. \quad (3.96)$$

La relación anterior se puede escribir como

$$(A_\alpha \cos \alpha a + B_\alpha \sin \alpha a) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + (E_1 a + E_3)y + (E_2 a + E_4 - V_0) = 0, \quad (3.97)$$

lo cual, al ser válido para todo valor de y , establece que

$$(A_\alpha \cos \alpha a + B_\alpha \sin \alpha a) = 0, \quad (3.98)$$

$$E_1 a + E_3 = 0, \quad (3.99)$$

$$E_2 a + E_4 - V_0 = 0. \quad (3.100)$$

Ahora, si se suman las ecuaciones (3.94) y (3.99), se obtienen que $2E_3 = 0$ y, por lo tanto, $E_3 = 0$. Este resultado, al ser reemplazado en (3.94), lleva a que $E_1 = 0$. Además, al sumar (3.95) y (3.100), se tiene que $2E_4 = V_0$, y, al ser sustituido en (3.95), determina que $E_2 = \frac{V_0}{2a}$. En resumen:

$$E_1 = E_3 = 0, \quad (3.101)$$

$$E_4 = \frac{V_0}{2}, \quad (3.102)$$

$$E_2 = \frac{V_0}{2a}. \quad (3.103)$$

Adicionalmente, al sumar (3.93) y (3.98), se obtiene:

$$2A_\alpha \cos \alpha a = 0, \quad (3.104)$$

y al restar (3.93) de (3.98), se obtiene:

$$2B_\alpha \sin \alpha a = 0. \quad (3.105)$$

Si no se permite una solución trivial (es decir, $A_\alpha = B_\alpha = 0$), las posibles soluciones de (3.104) y (3.105) serán:

a) $B_\alpha \neq 0$ y $\sin \alpha a = 0$. Lo anterior implica que $\cos \alpha a \neq 0$ y, por lo tanto, $A_\alpha = 0$.

b) $A_\alpha \neq 0$ y $\cos \alpha a = 0$. Esto implica que $\sin \alpha a \neq 0$ y, por lo tanto, $B_\alpha = 0$.

Para encontrar la solución mas general, se debe evaluar independientemente las condiciones a) y b), así:

Condición $B_\alpha \neq 0$: Si, $A_\alpha = 0$, $B_\alpha \neq 0$ y $\sin \alpha a = 0$, se tiene que:

$$\sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}. \quad (3.106)$$

Al considerar todos los posibles valores de α y reemplazar el valor de las constantes establecidas hasta el momento en (3.46), la solución del potencial toma la forma:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\underbrace{B_n C_n}_{C'_n} e^{\frac{n\pi}{a}y} + \underbrace{B_n D_n}_{D'_n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Ahora, la condición en $y = -b$ establece

$$\varphi(x, -b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \underbrace{\left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \right)}_{H_n} + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} = V_0, \tag{3.108}$$

es decir

$$\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) H_n. \tag{3.109}$$

Para establecer los valores de H_n , se hace uso de la ortogonalidad de las funciones seno, y se tiene que:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-a}^a \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right) dx}_{a\delta_{nm}} H_n, \tag{3.110}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
H_m &= -\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \\
&= -\frac{V_0}{2a^2} \underbrace{\int_{-a}^a \left(x \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right)}_{-\frac{2a^2}{m\pi}(-1)^m} + \frac{V_0}{2a} \underbrace{\left(\int_{-a}^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right)}_0 \\
&= \frac{V_0(-1)^m}{m\pi}.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Ya que H_n depende de C'_n y D'_n , se tiene que

$$\left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \right) = \frac{V_0(-1)^n}{n\pi}. \tag{3.112}$$

La última condición sobre el potencial en $y = b$, establece que:

$$\varphi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \underbrace{\left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b}\right)}_{I_n} + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} = V(x), \quad (3.113)$$

es decir

$$\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) I_n. \quad (3.114)$$

Nuevamente, para encontrar los valores de I_n se hace uso de la ortogonalidad de las funciones seno, con lo cual se tiene que:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-a}^a \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right) dx}_{a\delta_{nm}} I_n, \quad (3.115)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} I_m &= -\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \\ &= -\frac{V_0}{2a^2} \underbrace{\int_{-a}^a \left(x \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\right)}_{-\frac{2a^2}{m\pi}(-1)^m} - \frac{V_0}{2a} \underbrace{\left(\int_{-a}^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\right)}_0 + \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\right) \\ &= \frac{V_0(-1)^m}{m\pi} + \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ya que I_n depende de C'_n y D'_n , se tiene que

$$\left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\right) = \frac{V_0(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx\right). \quad (3.117)$$

Las relaciones (3.112) y (3.117) representan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C'_n y D'_n , las cuales determinan completamente la solución para el potencial (ec (3.107)), para el caso en el cual $A_\alpha = 0$, $B_\alpha \neq 0$, $\sin \alpha a = 0$.

Condición $A_\alpha \neq 0$: Siguiendo un procedimiento similar al realizado en el literal a), bajo la elección $B_\alpha = 0$, $A_\alpha \neq 0$, $\cos \alpha a = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha a = 0 &\Rightarrow \alpha a = \frac{n\pi}{2}, \quad n = \text{impar} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{2a}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Al considerar todos los posibles valores de α y las constantes establecidas hasta el momento, la solución del potencial tendrá la forma:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \left(\underbrace{A_n C_n}_{C_n''} e^{\frac{n\pi}{2a}y} + \underbrace{A_n D_n}_{D_n''} e^{-\frac{n\pi}{2a}y} \right) + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \left(C_n'' e^{\frac{n\pi}{2a}y} + D_n'' e^{-\frac{n\pi}{2a}y} \right) + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2}.\end{aligned}\quad (3.119)$$

Ahora, la condición en $y = -b$ establece

$$\varphi(x, -b) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \underbrace{\left(C_n'' e^{-\frac{n\pi}{2a}b} + D_n'' e^{\frac{n\pi}{2a}b} \right)}_{J_n} + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} = V_0, \quad (3.120)$$

es decir

$$\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) J_n. \quad (3.121)$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones coseno, es posible encontrar los valores de J_n , tal que:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \underbrace{\int_{-a}^a \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \right) dx}_{a\delta_{nm}} J_n, \quad (3.122)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}J_m &= -\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x - \frac{V_0}{2} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx \\ &= -\frac{V_0}{2a^2} \underbrace{\int_{-a}^a \left(x \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx \right)}_{=0} + \frac{V_0}{2a} \underbrace{\left(\int_{-a}^a \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx \right)}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (3.123)$$

Ya que J_n depende de C_n'' y D_n'' , se tiene que

$$\left(C_n'' e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D_n'' e^{\frac{n\pi}{a}b}\right) = 0. \quad (3.124)$$

La última condición sobre el potencial en $y = b$, establece que:

$$\varphi(x, b) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \underbrace{\left(C_n'' e^{\frac{n\pi}{a}b} + D_n'' e^{-\frac{n\pi}{a}b}\right)}_{K_n} + \frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} = V(x), \quad (3.125)$$

es decir

$$\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) K_n, \quad (3.126)$$

con lo cual se puede establecer que

$$\int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-a}^a \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right)\right) dx}_{a\delta_{nm}} K_n, \quad (3.127)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} K_m &= -\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{V_0}{2a}x + \frac{V_0}{2} - V(x)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx \\ &= -\frac{V_0}{2a^2} \underbrace{\int_{-a}^a x \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) dx}_{=0} - \frac{V_0}{2a} \underbrace{\left(\int_{-a}^a \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) dx\right)}_{=0} + \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) dx\right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) dx\right). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Ya que K_n depende de C_n'' y D_n'' , se tiene que

$$\left(C_n'' e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D_n'' e^{\frac{n\pi}{a}b}\right) = \frac{1}{a} \left(\int_{-a}^a V(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) dx\right). \quad (3.129)$$

Las relaciones (3.124) y (3.129) representan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C_n'' y D_n'' , las cuales determinan completamente la solución para el potencial (ec (3.107)) para el caso en el cual $A_\alpha \neq 0$, $B_\alpha = 0$, $\cos \alpha a = 0$. Para este caso, la solución general solo contempla una sumatoria sobre valores impares.

La solución mas general, será la suma de las soluciones establecidas a partir del literal a) y b) contempladas anteriormente, lo cual conlleva a la evaluación de las constantes $\{C_n', D_n'\}$ y $\{C_n'', D_n''\}$.

Ejercicio 3.3 Determinar la solución para el potencial expresado en el ejemplo (3.2), para los casos dados por:

- a) $V(x) = \frac{V_0}{2}x^2$.
- b) $V(x) = V_0 \sin(2\pi/a)$.

Ejemplo 3.4

Dos placas metálicas infinitas a potencial cero, se localizan en $x = 0$ y $x = a$, y están acopladas en $\pm b$ a otras dos placas metálicas con potenciales definidos, como se muestra en la figura 3.6. Para el sistema establecido, se procederá a encontrar el potencial dentro del tubo rectangular.

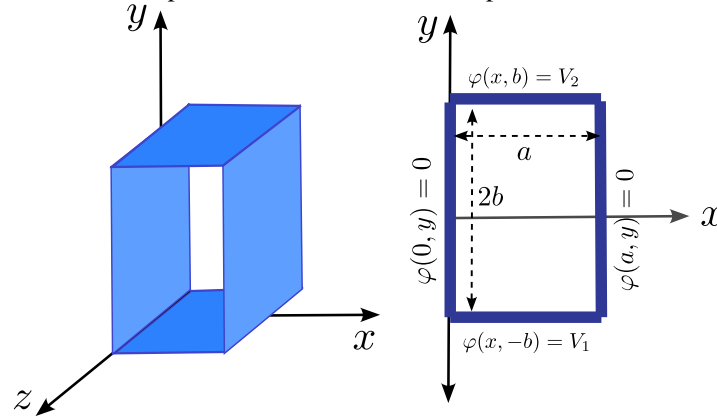


Figura 3.6: Ejemplo (3.4). Configuración de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, acopladas a dos placas con potenciales definidos.

Las condiciones de frontera del problema son las siguientes:

- $\varphi(0, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(a, y) = 0$ para todo valor de y .
- $\varphi(x, -b) = V_1$ para todo valor de x .
- $\varphi(x, b) = V_2$ para todo valor de x .

Solución: Aplicando la primera condición $\varphi(0, y) = 0$ en (3.46), se tiene que:

$$\varphi(0, y) = (A_\alpha) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_3 y + E_4 = 0. \quad (3.130)$$

La condición establecida en (3.130) se satisface para todo valor de y si

$$A_\alpha = 0, \quad (3.131)$$

$$E_3 = E_4 = 0, \quad (3.132)$$

de manera que la solución parcial del problema es:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & (B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) \\ & + E_1 xy + E_2 x. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Al considerar la segunda condición de frontera, se obtiene:

$$\varphi(a, y) = B_\alpha \sin \alpha a (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) + E_1 ay + E_2 a = 0. \quad (3.134)$$

Ahora, la condición de frontera anterior se garantiza si

$$B_\alpha \sin \alpha a = 0, \quad (3.135)$$

$$E_1 a = E_2 a = 0. \quad (3.136)$$

Dado que a es una constante distinta de cero, se debe requerir que $E_1 = E_2 = 0$. La solución trivial se evita si $B_\alpha \neq 0$, lo que implica que

$$\sin \alpha a = 0. \quad (3.137)$$

La condición anterior se garantiza si

$$\alpha a = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.138)$$

por lo cual

$$\alpha \rightarrow \frac{n\pi}{a}. \quad (3.139)$$

Al incluir todos los posibles valores de α en la solución general, se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\underbrace{B_n C_n}_{C'_n} e^{\frac{n\pi}{a}y} + \underbrace{B_n D_n}_{D'_n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Ahora se aplica la condición:

$$\begin{aligned} \varphi(x, b) = V_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} \right)}_{J_n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ V_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \end{aligned} \quad (3.141)$$

En (3.141), se ha definido

$$J_n = \left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} \right). \quad (3.142)$$

Para encontrar el valor de J_n a partir de (3.141), se hace uso de la ortogonalidad de la función $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, lo que implica que:

$$\begin{aligned} \int_0^a V_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} J_n \int_0^a \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right) dx \\ &= \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n \delta_{nm} = \frac{a}{2} J_m, \end{aligned} \quad (3.143)$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{2}{a} \int_0^a V_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) dx = -\frac{2V_2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \Big|_0^a \\ &= -\frac{2V_2}{n\pi} \{\cos(n\pi) - 1\} = -\frac{2V_2}{n\pi} \{(-1)^n - 1\}, \end{aligned} \quad (3.144)$$

lo que lleva a:

$$J_n = \begin{cases} \frac{4V_2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.145)$$

Por lo tanto, a partir de (3.142) se tiene que:

$$\frac{4V_2}{n\pi} = \left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} \right), \quad \text{para } n \text{ impar,} \quad y \quad (3.146)$$

$$0 = \left(C'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} \right), \quad \text{para } n \text{ par.} \quad (3.147)$$

A continuación, se aplica la condición establecida para $y = -b$, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi(x, -b) &= V_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \right)}_{H_n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ V_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \end{aligned} \quad (3.148)$$

En la ecuación (3.148), se ha definido:

$$H_n = \left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \right). \quad (3.149)$$

Para determinar el valor de H_n a partir de la ecuación (3.148), se emplea la ortogonalidad de la función $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, resultando en:

$$\begin{aligned} \int_0^a V_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \int_0^a \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) \right) dx \\ &= \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n \delta_{nm} = \frac{a}{2} H_m. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 H_n &= \frac{2}{a} \int_0^a V_1 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = -\frac{2V_1}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Big|_0^a \\
 &= -\frac{2V_1}{n\pi} \{\cos(n\pi) - 1\} = -\frac{2V_1}{n\pi} \{(-1)^n - 1\},
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

lo que lleva a:

$$H_n = \begin{cases} \frac{4V_1}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \tag{3.152}$$

De esta manera, se tiene que:

$$\frac{4V_1}{n\pi} = \left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\right) \text{ para } n \text{ impar,} \tag{3.153}$$

$$0 = \left(C'_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + D'_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\right) \text{ para } n \text{ par} \tag{3.154}$$

Las ecuaciones (3.153) y (3.146) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C'_n y D'_n para $n = \text{impar}$. De igual forma, las ecuaciones (3.154) y (3.147) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: C'_n y D'_n para $n = \text{par}$. Al resolver los sistemas de ecuaciones planteados, se tiene que:

$$C'_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \frac{(V_1 e^{-\frac{n\pi}{a}b} - V_2 e^{\frac{n\pi}{a}b})}{(e^{-2\frac{n\pi}{a}b} - e^{2\frac{n\pi}{a}b})} & \text{para } n \text{ impar,} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \tag{3.155}$$

$$D'_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \frac{(V_1 e^{\frac{n\pi}{a}b} - V_2 e^{-\frac{n\pi}{a}b})}{(e^{2\frac{n\pi}{a}b} - e^{-2\frac{n\pi}{a}b})} & \text{para } n \text{ impar,} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \tag{3.156}$$

Finalmente, al sustituir los valores obtenidos de C'_n y D'_n en (3.140), se tiene:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{impar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\frac{(V_1 e^{-\frac{n\pi}{a}b} - V_2 e^{\frac{n\pi}{a}b})}{(e^{-2\frac{n\pi}{a}b} - e^{2\frac{n\pi}{a}b})} e^{\frac{n\pi}{a}y} + \frac{(V_1 e^{\frac{n\pi}{a}b} - V_2 e^{-\frac{n\pi}{a}b})}{(e^{2\frac{n\pi}{a}b} - e^{-2\frac{n\pi}{a}b})} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right). \tag{3.157}$$

Con algunos cálculos algebraicos, la solución se puede expresar como:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{impar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\frac{V_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) + V_2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b+y)\right)}{\sinh\left(\frac{2n\pi b}{a}\right)} \right). \tag{3.158}$$

La figura 3.7, representa gráficamente la solución (3.158), truncando la sumatoria en $N = 20$, para $V_1 = 10$, $V_2 = 5$ y $a = b = 1$. La barra de colores a la derecha, indica el valor del potencial, y las curvas punteadas en rojo representan líneas equipotenciales para los valores de potencial señalados en la gráfica. Se observa de la gráfica que, efectivamente, el potencial en $x = 0$ y $x = a$ es cero, mientras que en $y = -b$ el potencial es V_1 ($10(N/m \cdot C)$) y en $y = b$ es V_2 ($5(N/m \cdot C)$).

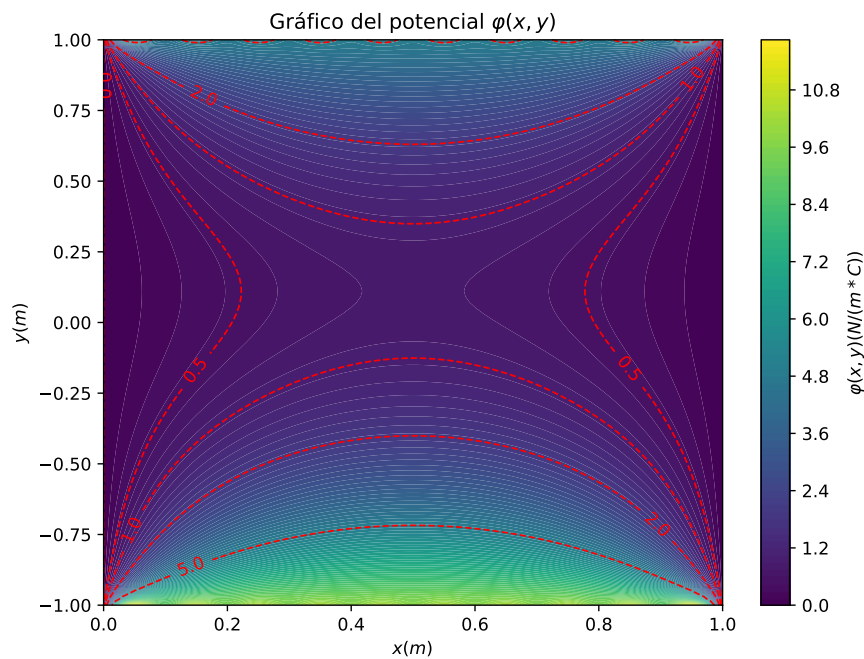


Figura 3.7: Solución ejemplo (3.4). Potencial $\varphi(x, y)$, para $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Ejercicio 3.4 Mostrar que la solución (3.46) es inconsistente para las condiciones de frontera indicadas en la figura 3.8. Encontrar la solución de la ecuación de Laplace para el problema indicado en la figura 3.8.

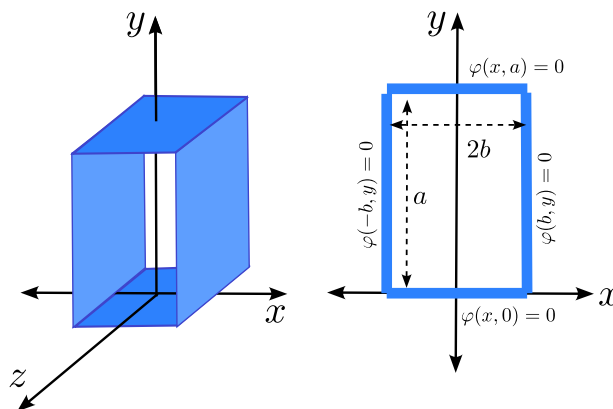


Figura 3.8: Condiciones de frontera para el Ejercicio (3.4).

Ejercicio 3.5 Evaluar el potencial en el caso mostrado en la figura 3.9.

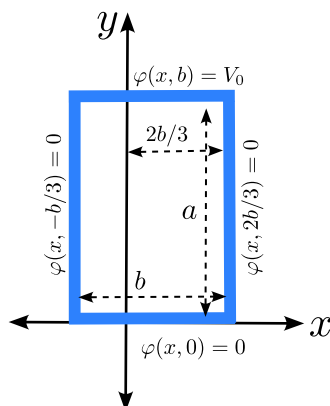


Figura 3.9: Condiciones de frontera: a) Ejercicio (3.5).

Ejercicio 3.6 Evaluar el potencial para el caso mostrado en la figura 3.10.

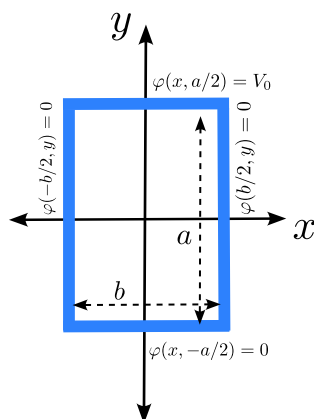


Figura 3.10: Condiciones de frontera: a) Ejercicio (3.6).

Ejemplo 3.5

En este ejemplo se consideran dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L , tal como se ilustra en la figura 3.11, bajo las siguientes condiciones de frontera:

- $\phi(x, 0) = 0$ para todo x .
- $\phi(x, L) = V(\phi)$ para todo x .
- $\phi(x \rightarrow \pm\infty, y) \rightarrow \text{finito}$ para todo y .

El objetivo de este ejemplo es determinar el potencial eléctrico en la región situada entre las placas.

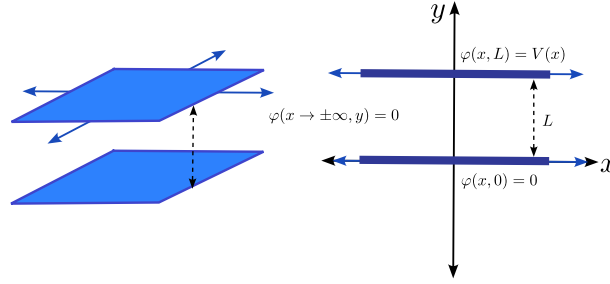


Figura 3.11: Ejemplo (3.5). Configuración de dos placas metálicas paralelas separadas por una distancia L .

Solución: La solución de este problema requiere un enfoque distinto al que se ha abordado previamente, ya que en este caso no existen condiciones de frontera que definan posibles valores de α . Por lo tanto, la solución general debe incluir todos los posibles valores de α , abarcando el rango de los números reales; es decir, $-\infty < \alpha < \infty$. Un cambio adicional consiste en preferir una solución armónica expresada en términos de funciones exponenciales, es decir, $e^{\pm i\alpha x}$, lo que lleva a que la solución más general sea:

$$\varphi(x, y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (A_{\alpha} e^{i\alpha x} + B_{\alpha} e^{-i\alpha x}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) d\alpha}_{I} + E_1 xy + E_2 x + E_3 y + E_4. \quad (3.159)$$

La integral en (3.159) puede reescribirse de manera más conveniente, mediante el siguiente procedimiento:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (A_{\alpha} e^{i\alpha x}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} (B_{\alpha} e^{-i\alpha x}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) d\alpha. \quad (3.160)$$

Ahora, en el segundo término, se reemplaza $\alpha \rightarrow -\alpha$, de modo que:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (A_{\alpha} e^{i\alpha x}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} (B_{-\alpha} e^{i\alpha x}) (C_{-\alpha} e^{-\alpha y} + D_{-\alpha} e^{\alpha y}) d\alpha. \quad (3.161)$$

Al agrupar términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left[\underbrace{(A_{\alpha} C_{\alpha} + B_{-\alpha} D_{-\alpha})}_{F(\alpha)} e^{\alpha y} + \underbrace{(A_{\alpha} D_{\alpha} + B_{-\alpha} C_{-\alpha})}_{G(\alpha)} e^{-\alpha y} \right] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [F(\alpha) e^{\alpha y} + G(\alpha) e^{-\alpha y}] d\alpha. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Por lo tanto, la solución más general en este caso se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [F(\alpha)e^{\alpha y} + G(\alpha)e^{-\alpha y}] d\alpha \\ & + E_1xy + E_3y + E_4.\end{aligned}\quad (3.163)$$

Al aplicar la primera condición de frontera, se tiene que:

$$\varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [F(\alpha) + G(\alpha)] d\alpha + E_2x + E_4 = 0. \quad (3.164)$$

Multiplicando la igualdad anterior por $e^{-i\alpha'x}$ e integrando respecto a x , se obtiene:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-\alpha')x} dx}_{2\pi\delta(\alpha-\alpha')} [F(\alpha) + G(\alpha)] d\alpha + E_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\alpha'x} dx}_{\rightarrow \infty} + E_4 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha'x} dx}_{-2\pi\delta(\alpha')} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \alpha') [F(\alpha) + G(\alpha)] d\alpha + E_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\alpha'x} dx}_{\rightarrow \infty} - E_4 2\pi\delta(\alpha') \\ &= 2\pi [F(\alpha') + G(\alpha')] + E_2 (\rightarrow \infty) - E_4 2\pi\delta(\alpha').\end{aligned}\quad (3.165)$$

Como se observa, el coeficiente E_2 está acompañado de una integral que diverge, por lo tanto se requiere que $E_2 = 0$, adicionalmente para que la condición anterior se cumpla para todo valor de α' se debe cumplir que :

$$F(\alpha) = -G(\alpha), \quad (3.166)$$

$$E_4 = 0. \quad (3.167)$$

Por tanto, la solución toma la forma:

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\alpha)e^{i\alpha x} \sinh(\alpha y) d\alpha + E_1xy + E_3y. \quad (3.168)$$

Aplicando ahora la segunda condición sobre el potencial, se obtiene:

$$\varphi(x, L) = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\alpha)e^{i\alpha x} \sinh(\alpha L) d\alpha + E_1xL + E_3L. \quad (3.169)$$

Multiplicando la igualdad anterior por $e^{-i\alpha'x}$ e integrando respecto a x , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{-i\alpha'x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-\alpha')x} dx}_{2\pi\delta(\alpha-\alpha')} \sinh(\alpha L) 2F(\alpha) d\alpha \\
&+ E_1 L \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\alpha'x} dx}_{\rightarrow \infty} + (E_3 L) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha'x} dx}_{-2\pi\delta(\alpha')} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \alpha') \sinh(\alpha L) 2F(\alpha) d\alpha + E_1 L (\rightarrow \infty) - (E_3 L) 2\pi\delta(\alpha') \\
&= 2\pi \sinh(\alpha' L) 2F(\alpha') + E_1 L (\rightarrow \infty) - (E_3 L) 2\pi\delta(\alpha'). \quad (3.170)
\end{aligned}$$

Dado que la integral que acompaña al coeficiente E_1 tiende a infinito, se debe considerar $E_1 = 0$. Adicionalmente, para que la relación anterior se satisfaga para todo valor de α' , es necesario imponer que $E_3 = 0$, resultando en:

$$F(\alpha) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{-i\alpha x} dx}{4\pi \sinh(\alpha L)}. \quad (3.171)$$

Finalmente, el potencial se expresa como:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh(\alpha L)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} V(x') e^{-i\alpha x'} dx' \right) e^{i\alpha x} \sinh(\alpha y) d\alpha. \quad (3.172)$$

Para el caso particular en que $V(x) = V = \text{constante}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \frac{V}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh(\alpha L)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x'} dx' \right) e^{i\alpha x} \sinh(\alpha y) d\alpha \\
&= -V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh(\alpha L)} \delta(\alpha) e^{i\alpha x} \sinh(\alpha y) d\alpha \\
&= -V \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha L)} e^{i\alpha x} \\
&= -V \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha L} \\
&= -\frac{Vy}{L}. \quad (3.173)
\end{aligned}$$

El campo eléctrico, entonces, se expresa como:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla \varphi(y) = -\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \hat{j} \\
&= \frac{V}{L} \hat{j}. \quad (3.174)
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.7 Evaluar el potencial para las placas mostradas en la la figura 3.12, en los que $\varphi(x, y) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

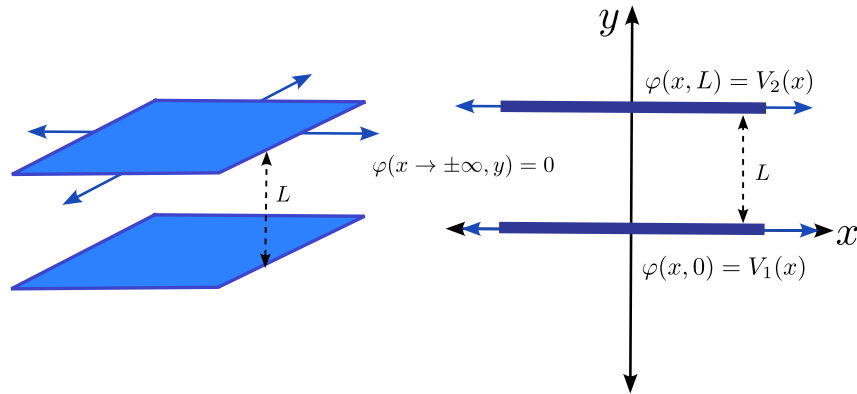


Figura 3.12: Ejercicio (3.7). Configuración de dos placas paralelas separadas por una distancia L , con potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$.

3.3.2 Solución a la ecuación de Laplace en tres dimensiones

Ahora se considerará la solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones en coordenadas cartesianas. En este caso, la ecuación se expresa como:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (3.175)$$

Utilizando nuevamente el método de separación de variables, se propone la solución en la forma:

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (3.176)$$

Al reemplazar (3.176) en (3.175) y dividir la ecuación resultante por $X(x)Y(y)Z(z)$, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{h(z)} = 0. \quad (3.177)$$

Cada uno de los términos en (3.177) depende exclusivamente de una sola variable; por lo tanto, para que la expresión (3.177) sea válida para todo valor de x, y y z , cada término debe ser igual a una constante, es decir:

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{k_x = \text{cte}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{k_y = \text{cte}} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{k_z = \text{cte}} = 0, \quad (3.178)$$

y por lo tanto

$$k_x + k_y + k_z = 0, \quad (3.179)$$

con lo cual

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k_x, \quad (3.180)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_y, \quad (3.181)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k_z. \quad (3.182)$$

Las anteriores ecuaciones diferenciales tienen soluciones armónicas para $k_i > 0$ (combinación lineal de senos y cosenos), hiperbólicas si $k_i < 0$ (combinación lineal de $e^{\pm\sqrt{k_i}x_i}$) o lineales si $k_i = 0$. Los valores que puedan tomar las constantes k_i , dependen de las condiciones de frontera de cada problema en particular y por lo tanto no se puede predecir con certeza si la solución para una determinada coordenada será armónica, hiperbólica o lineal. Sin embargo, metodológicamente si es posible asumir inicialmente valores positivos o negativos para las constantes k_i y por tanto definir posibles soluciones armónicas o hiperbólicas. Tras aplicar condiciones de frontera, una elección inadecuada en los signos de las constantes será corregido y la solución que se presenta como armónica resultará en una solución hiperbólica y viceversa. Por lo tanto sin pérdida de generalidad se puede tomar que:

$$\begin{aligned} k_x &= -\alpha^2, \\ k_y &= -\beta^2, \\ k_z &= \gamma^2, \end{aligned}$$

lo cual a partir de (3.179) conlleva a que

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0, \quad (3.183)$$

por lo cual $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Las ecuaciones diferenciales que se obtendrían a partir de (3.177) son:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 X(x), \quad (3.184)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta^2 Y(y), \quad (3.185)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 Z(z). \quad (3.186)$$

En este punto, las soluciones dependerán de los valores que puedan tomar las constantes α^2, β^2 y γ^2 , donde además se debe tener en cuenta la relación (3.183). A partir de lo anterior, se deben contemplar los siguientes casos:

- Si $\alpha^2 > 0$ y $\beta^2 > 0$, entonces las soluciones para las variables x y y serán armónicas (de acuerdo a (3.184) y (3.185)), mientras que la solución para la variable z será hiperbólica (de acuerdo a la ecuación (3.186)), por lo tanto se tiene que:

$$\varphi(x, y, z) = (A_{\alpha_1} \cos \alpha_1 x + B_{\alpha_1} \sin \alpha_1 x) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}), \quad (3.187)$$

donde se ha redefinido $\alpha \rightarrow \alpha_1$, $\beta \rightarrow \beta_1$ y $\gamma \rightarrow \gamma_1$, para diferenciar la solución encontrada de otras posibles soluciones que se analizarán a continuación.

- Si se toma $\alpha^2 = 0$ en (3.184), entonces a partir de (3.183) se tiene que $\beta^2 = \gamma^2$ y la solución más general será (lineal para la variable x , solución armónica para y y solución hiperbólica para z):

$$\varphi(x, y, z) = (A_1x + B_1) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}), \quad (3.188)$$

donde se ha redefinido $\beta \rightarrow \beta_2$.

- Si $\beta^2 = 0$, a partir de (3.183), se tiene que $\alpha^2 = \gamma^2$ y la solución para $Y(y)$ será lineal, armónica para $X(x)$ e hiperbólica para $Z(z)$. Por lo tanto, la solución más general en este caso para $\varphi(x, y, z)$ será:

$$\varphi(x, y, z) = (C_1 y + D_1) (A_{\alpha_2} \cos \alpha_2 x + B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}), \quad (3.189)$$

donde se ha redefinido $\alpha \rightarrow \alpha_2$.

- Si $\gamma^2 = 0$, a partir de (3.183), se tiene que $\alpha^2 = -\beta^2$ y las ecuaciones (3.184), (3.185) y (3.186), toman la forma

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 X(x), \quad (3.190)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \alpha^2 Y(y), \quad (3.191)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0, \quad (3.192)$$

que corresponde a una solución armónica para $X(x)$, hiperbólica para $Y(y)$ y lineal para $Z(z)$; es decir

$$\varphi(x, y, z) = (F'_0 z + G'_0) (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}), \quad (3.193)$$

- Si se toma $\alpha^2 = 0$ y $\beta^2 = 0$, entonces se tiene que $\gamma^2 = 0$ y las soluciones para $Y(y)$, $X(x)$ y $Z(z)$ son lineales. De tal manera que la solución más general en este caso para $\varphi(x, y, z)$ será:

$$\varphi(x, y, z) = (A_0 x + B_0) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0). \quad (3.194)$$

Con lo anterior, la solución más general para el potencial vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (A_{\alpha_1} \cos \alpha_1 x + B_{\alpha_1} \sin \alpha_1 x) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\ & + (A_1 x + B_1) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\ & + (C_1 y + D_1) (A_{\alpha_2} \cos \alpha_2 x + B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\ & + (F'_0 z + G'_0) (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x) (C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}) \\ & + (A_0 x + B_0) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0). \end{aligned} \quad (3.195)$$

Nuevamente, es importante mencionar que la solución general debe incluir todos los posibles valores que puedan tomar las constantes $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ y γ_1 .

Ejemplo 3.6

Se considera una caja conductora rectangular de lados a , b y c que define un volumen en el espacio el cual está libre de carga, como se indica en la figura 3.13. Todas las superficies, a excepción de una, se encuentran a potencial cero. Se desea encontrar el potencial dentro de la caja.

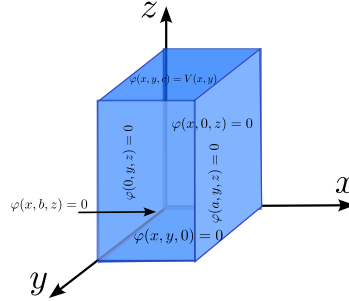


Figura 3.13: Ejemplo (3.6). Cascarón rectangular, con superficies a potencial cero con excepción de la superficie $z = c$.

Las condiciones de frontera asociadas al problema son:

- $\phi(0, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $\phi(a, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $\phi(x, 0, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $\phi(x, b, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $\phi(x, y, 0) = 0$ para todo valor de x y y .
- $\phi(x, y, c) = V(x, y)$ para todo valor de x y y .

Solución: Aplicando la primera condición sobre la solución general (3.195), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \phi(0, y, z) = & (A_{\alpha_1}) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
 & + (B_1) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
 & + (C_1 y + D_1) (A_{\alpha_2}) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
 & + (F'_0 z + G'_0) (A_{\alpha}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) \\
 & + (B_0) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.196}$$

Teniendo en cuenta que la condición (3.196) se debe cumplir para cualquier valor de y y z , y que las funciones involucradas son independientes, se deduce que:

$$A_{\alpha} = A_{\alpha_1} = A_{\alpha_2} = B_1 = B_0 = 0. \tag{3.197}$$

Con lo anterior, la solución queda:

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
 & + (A_1 x) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
 & + (C_1 y + D_1) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
 & + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) \\
 & + (A_0 x) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0).
 \end{aligned} \tag{3.198}$$

Al aplicar la condición $\varphi(x, 0, z) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (C_{\beta_1}) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\ & + (A_1 x) (C_{\beta_2}) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\ & + (D_1) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\ & + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (C_{\alpha} + D_{\alpha}) \\ & + (A_0 x) (D_0) (F_0 z + G_0) = 0.\end{aligned}\quad (3.199)$$

Para que la condición anterior se cumpla para cualquier x y z , se requiere que:

$$\begin{aligned}C_{\beta_1} = C_{\beta_2} = D_1 = D_0 = 0, \quad y, \\ D_{\alpha} = -C_{\alpha},\end{aligned}\quad (3.200)$$

entonces, la solución parcial se escribe en la forma:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\ & + (A_1 x) (D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\ & + (C_1 y) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\ & + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha y) \\ & + (A_0 x) (C_0 y) (F_0 z + G_0).\end{aligned}\quad (3.201)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\varphi(x, y, 0) = 0$, resulta:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, 0) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} + G_{\gamma_1}) \\ & + (A_1 x) (D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} + G_{\beta_2}) \\ & + (C_1 y) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} + G_{\alpha_2}) \\ & + (G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha y) \\ & + (A_0 x) (C_0 y) (G_0) = 0.\end{aligned}\quad (3.202)$$

Exigir que la condición (3.202) se garantice para todo valor de x y y requiere que:

$$\begin{aligned}F_{\gamma_1} &= -G_{\gamma_1}, \\ F_{\beta_2} &= -G_{\beta_2}, \\ F_{\alpha_2} &= -G_{\alpha_2}, \\ G_0 &= G'_0 = 0.\end{aligned}\quad (3.203)$$

Con lo anterior, la solución hasta el momento tiene la forma:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = & (F_{\gamma_1} B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) \underbrace{(e^{\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 z})}_{2 \sinh \gamma_1 z} \\
& + (A_1 x) (F_{\beta_2} D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) \underbrace{(e^{\beta_2 z} - e^{-\beta_2 z})}_{2 \sinh \beta_2 z} \\
& + (F'_0 z) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha y) \\
& + (C_1 y) (F_{\alpha_2} B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) \underbrace{(e^{\alpha_2 z} - e^{-\alpha_2 z})}_{2 \sinh \alpha_2 z}.
\end{aligned} \tag{3.204}$$

Ahora, la condición $\varphi(x, b, z) = 0$ implica:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, b, z) = & (2F_{\gamma_1} B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 b) (\sinh \gamma_1 z) \\
& + (A_1 x) (2F_{\beta_2} D_{\beta_2} \sin \beta_2 b) (\sinh \beta_2 z) \\
& + (F'_0 z) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha b) \\
& + (C_1 b) (2F_{\alpha_2} B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (\sinh \alpha_2 z).
\end{aligned} \tag{3.205}$$

La condición establecida por (3.205) exige que:

$$\begin{aligned}
\sin \beta_1 b = 0 & \Rightarrow \beta_1 b = n\pi \Rightarrow \beta_1 = \frac{n\pi}{b}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \text{etc,} \\
\sin \beta_2 b = 0 & \Rightarrow \beta_2 b = k\pi \Rightarrow \beta_2 = \frac{k\pi}{b}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, \text{etc,} \\
C_1 = 2F'_0 B_{\alpha} C_{\alpha} & = 0.
\end{aligned} \tag{3.206}$$

Así que la solución hasta el momento, considerando todos los posibles valores de β_i ($i = 1, 2$), se reduce a:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} (2F_{\gamma_1} B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) \left(D_n \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \gamma_1 z) \\
& + (A_1 x) \sum_k \left(2F_{\beta_2} D_k \sin \left(\frac{k\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \beta_2 z).
\end{aligned} \tag{3.207}$$

La condición $\varphi(a, y, z) = 0$ se traduce en:

$$\begin{aligned}
\varphi(a, y, z) = & \sum_n (2F_{\gamma_1} B_{\alpha_1} \sin \alpha_1 a) \left(D_n \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \gamma_1 z) \\
& + (A_1 a) \sum_k \left(2F_k D_k \sin \left(\frac{k\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \beta_2 z) = 0,
\end{aligned} \tag{3.208}$$

que se debe cumplir para todo valor de y y z , y dada la independencia de las funciones implicadas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 a = 0 &\Rightarrow \alpha_1 a = m\pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, \text{etc,} \\ A_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Finalmente, la solución del problema, bajo las condiciones de frontera consideradas, se escribe como:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{2F_{\gamma_1} B_n D_m}_{A_{mn}} \left(\sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right) \left(\sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \gamma_1 z) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right) \left(\sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \gamma_1 z), \end{aligned} \quad (3.210)$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = \sqrt{\pi^2 \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)}$, que se denominará γ_{nm} , tal que:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right) \left(\sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right) (\sinh \gamma_{nm} z). \quad (3.211)$$

Las constantes A_{nm} se deducen de la condición $\varphi(x, y, c) = V(x, y)$ para todo valor de x y y , resultando en:

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sinh(\gamma_{nm} c). \quad (3.212)$$

Utilizando la condición de ortogonalización (3.60), que para el caso se lee como:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n'\pi}{a} x \right) dx &= \frac{a}{2} \delta_{nn'}, \\ \int_0^b \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{b} y \right) dy &= \frac{b}{2} \delta_{mm'}, \end{aligned}$$

se deduce que:

$$\int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin \left(\frac{m'\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n'\pi}{b} y \right) dx dy = \frac{ab}{4} A_{n'm'} \sinh(\gamma_{n'm'} c). \quad (3.213)$$

Es decir:

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a \int_0^b V(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy dx. \quad (3.214)$$

Considerando el caso: $V(x,y) = V_0 = \text{constante}$, los coeficientes A_{nm} son:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy dx \\ &= \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \\ &= \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \left[-\frac{a}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right]_0^a \left[-\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right]_0^b \\ &= \frac{4}{nm\pi^2 \sinh(\gamma_{nm}c)} \left[1 - \underbrace{\cos(m\pi)}_{(-1)^m} \right] \left[1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right] \\ &= \frac{4}{nm\pi^2 \sinh(\gamma_{nm}c)} [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n], \end{aligned} \quad (3.215)$$

de donde se determina que los únicos elementos diferentes de cero se cumplen cuando (n,m) toman valores impares. Por tanto:

$$\begin{aligned} A_{(2n+1)(2m+1)} &= \frac{4}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \frac{V_0}{\sinh(\gamma_{(2n+1),(2m+1)}c)} (2)(2) \\ &= \frac{16}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \frac{V_0}{\sinh(\gamma_{(2n+1),(2m+1)}c)}, \end{aligned} \quad (3.216)$$

con lo cual el potencial para el problema en consideración toma la forma:

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{(2n+1)(2m+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{b}y\right) \sinh(\gamma_{(2n+1),(2m+1)}z), \quad (3.217)$$

donde $A_{(2n+1)(2m+1)}$ está determinado por la expresión (3.216).

Ejemplo 3.7

Un tubo de metal semi-infinito de sección transversal rectangular de lados a y b se encuentra “aterizado” (ver figura 3.14). Sin embargo, uno de sus extremos se encuentra a un potencial específico $V_0 = \text{cte}$. Se desea encontrar el potencial en el interior del tubo.

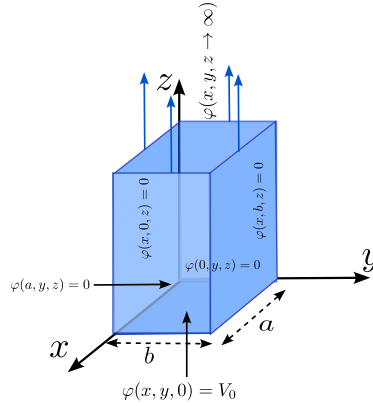


Figura 3.14: Ejemplo (3.7). Tubo de metal semi-infinito de sección transversal rectangular de lados a y b .

Las condiciones de frontera del problema son:

- $\varphi(0, y, z) = \varphi(a, y, z) = 0$ para todo valor de (y, z) .
- $\varphi(x, 0, z) = \varphi(x, b, z) = 0$ para todo valor de (x, z) .
- $\varphi(x, y, 0) = V_0$ para todo valor de (x, y) .
- $\varphi(x, y, z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ para todo valor de (x, y) .

Solución: Como punto de partida, se toma la solución más general de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (A_{\alpha_1} \cos \alpha_1 x + B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\ & + (A_1 x + B_1) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\ & + (C_1 y + D_1) (A_{\alpha_2} \cos \alpha_2 x + B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z}) \\ & + (F'_0 z + G'_0) (A_{\alpha} \cos \alpha x + B_{\alpha} \sin \alpha x) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) \\ & + (A_0 x + B_0) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0). \end{aligned} \quad (3.218)$$

Aplicando la primera condición sobre la solución general (3.218), se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, z) = & (A_{\alpha_1}) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\ & + (B_1) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\ & + (C_1 y + D_1) (A_{\alpha_2}) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z}) \\ & + (F'_0 z + G'_0) (A_{\alpha}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) \\ & + (B_0) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.219)$$

Dado que la condición (3.219) se debe cumplir para cualquier valor de y y z , se obtienen las siguientes restricciones:

$$A_{\alpha} = A_{\alpha_1} = A_{\alpha_2} = B_1 = B_0 = 0, \quad (3.220)$$

resultando en la siguiente solución parcial del problema:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (C_{\beta_1} \cos \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
& + (A_1 x) (C_{\beta_2} \cos \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
& + (C_1 y + D_1) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
& + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) \\
& + (A_0 x) (C_0 y + D_0) (F_0 z + G_0).
\end{aligned} \tag{3.221}$$

La condición $\varphi(x, 0, z) = 0$ establece que:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, 0, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (C_{\beta_1}) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
& + (A_1 x) (C_{\beta_2}) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
& + (D_1) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
& + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (C_{\alpha} + D_{\alpha}) \\
& + (A_0 x) (D_0) (F_0 z + G_0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.222}$$

El resultado expresado en (3.222) es válido para cualquier valor de x y z , lo que implica:

$$C_{\beta_1} = C_{\beta_2} = D_1 = D_0 = 0, \quad y \quad D_{\alpha} = -C_{\alpha}, \tag{3.223}$$

con lo que es posible escribir:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 y) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
& + (A_1 x) (D_{\beta_2} \sin \beta_2 y) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
& + (C_1 y) (B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
& + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha y) \\
& + (A_0 x) (C_0 y) (F_0 z + G_0).
\end{aligned} \tag{3.224}$$

Ahora, al aplicar la condición $\varphi(x, b, z) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, b, z) = & (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) (D_{\beta_1} \sin \beta_1 b) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
& + (A_1 x) (2F_{\beta_2} D_{\beta_2} \sin \beta_2 b) (F_{\beta_2} e^{\beta_2 z} + G_{\beta_2} e^{-\beta_2 z}) \\
& + (C_1 b) (2F_{\alpha_2} B_{\alpha_2} \sin \alpha_2 x) (F_{\alpha_2} e^{\alpha_2 z} + G_{\alpha_2} e^{-\alpha_2 z}) \\
& + (F'_0 z + G'_0) (B_{\alpha} \sin \alpha x) (2C_{\alpha} \sinh \alpha b) \\
& + (A_0 x) (C_0 b) (F_0 z + G_0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.225}$$

La condición establecida por (3.225) impone los siguientes requisitos:

$$\begin{aligned}
\sin \beta_1 b = 0 &\Rightarrow \beta_1 b = m\pi \Rightarrow \beta_1 = \frac{m\pi}{b}, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, \text{etc}, \\
\sin \beta_2 b = 0 &\Rightarrow \beta_2 b = k\pi \Rightarrow \beta_2 = \frac{k\pi}{b}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, \text{etc}, \\
C_1 = C_0 = C_\alpha &= 0.
\end{aligned} \tag{3.226}$$

Así que la solución general, considerando todos los posibles valores de β_i ($i = 1, 2$), se reduce a:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, b, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (B_{\alpha_1} \sin(\alpha_1 x)) \left(D_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
&+ (A_1 x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(2F_k D_k \sin\left(\frac{k\pi}{b} y\right) \right) \left(F_k e^{\frac{2k\pi}{b} z} + G_k e^{-\frac{2k\pi}{b} z} \right). \tag{3.227}
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la condición $\varphi(a, y, z) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi(a, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (B_{\alpha_1} \sin \alpha_1 a) \left(D_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}) \\
&+ (A_1 a) \sum_k \left(2F_k D_k \sin\left(\frac{k\pi}{b} y\right) \right) \left(F_k e^{\frac{2k\pi}{b} z} + G_k e^{-\frac{2k\pi}{b} z} \right) = 0. \tag{3.228}
\end{aligned}$$

La condición (3.228) exige que:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha_1 a = 0 &\Rightarrow \alpha_1 a = n\pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{n\pi}{a}, \\
A_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.229}$$

lo que permite expresar parcialmente la solución en la forma:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_n D_m \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\sin \frac{m\pi}{b} y \right) (F_{\gamma_1} e^{\gamma_1 z} + G_{\gamma_1} e^{-\gamma_1 z}). \tag{3.230}$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = \sqrt{\pi^2 \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)}$, que se denominará γ_{nm} . Así que:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_n D_m \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\sin \frac{m\pi}{b} y \right) (F_{\gamma_{nm}} e^{\gamma_{nm} z} + G_{\gamma_{nm}} e^{-\gamma_{nm} z}). \tag{3.231}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\varphi(x, y, z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, se debe establecer que $F_{\gamma_{nm}} = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{B_n D_m G_{\gamma_{nm}}}_{A_{nm}} \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\sin \frac{m\pi}{b} y \right) (e^{-\gamma_{nm} z}) \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{nm} \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\sin \frac{m\pi}{b} y \right) (e^{-\gamma_{nm} z}).
\end{aligned} \tag{3.232}$$

Finalmente, la condición $\varphi(x, y, 0) = V_0$ permitirá fijar las constantes A_{nm} , resultando en:

$$\varphi(x, y, 0) = V_0 = \sum_{n,m} A_{nm} \left(\sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right) \left(\sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right). \tag{3.233}$$

Utilizando las condiciones de ortonormalización:

$$\int_0^a \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n'\pi}{a} x \right) dx = \frac{a}{2} \delta_{n,n'}, \tag{3.234}$$

$$\int_0^b \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{b} y \right) dy = \frac{b}{2} \delta_{m,m'}, \tag{3.235}$$

se determina que:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b V_0 \sin \left(\frac{n'\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{b} y \right) dx dy &= \sum_{n,m} A_{nm} \left(\int_0^a \sin \left(\frac{n'\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \right) \\
&\quad \left(\int_0^b \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{m'\pi}{b} y \right) dy \right) \\
&= \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sum_{nm} A_{nm} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \\
&= \frac{ab}{4} A_{n'm'},
\end{aligned} \tag{3.236}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
A_{nm} &= \frac{4V_0}{ab} \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \int_0^b \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) dy \\
&= \frac{4V_0}{ab} \left[-\frac{a}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right]_0^a \left[-\frac{b}{m\pi} \cos \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right]_0^b \\
&= \frac{4V_0}{\pi^2 nm} [1 - \cos(n\pi)] [1 - \cos(m\pi)] \\
&= \frac{4V_0}{\pi^2 nm} [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m],
\end{aligned} \tag{3.237}$$

por lo tanto se tiene que:

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{16V_0}{\pi^2 nm} & \text{para } n \text{ y } m \text{ impar,} \\ 0 & \text{para } n \text{ o } m \text{ par.} \end{cases} \quad (3.238)$$

Entonces, el potencial en el interior del tubo semi-infinito es:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\substack{n, m \\ \text{impar}}} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}z}. \quad (3.239)$$

La figura 3.15 muestra gráficamente la solución establecida por (3.239) para diferentes valores de z , donde se ha truncado las sumas en $N = 40$ (para n y m), con $V_0 = 10$, $a = 1$ y $b = 2$.

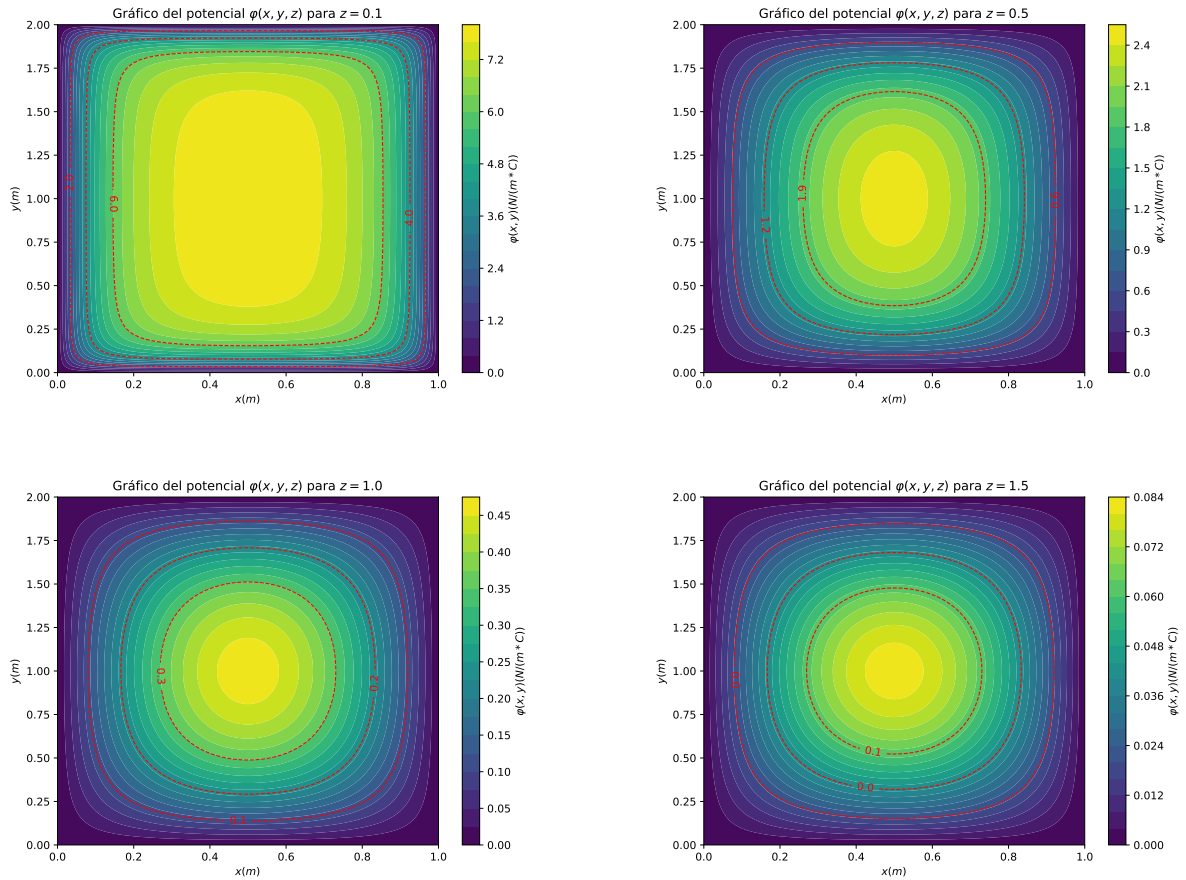


Figura 3.15: Representación gráfica de la solución (3.239) para diferentes valores de z , con $N = 40$ (límite truncado de la sumatoria para n y m), $V_0 = 10$, $a = 1$ y $b = 2$

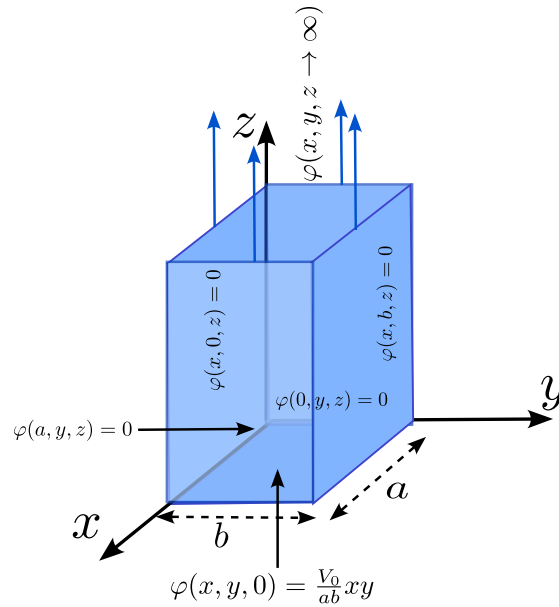


Figura 3.16: Ejercicio (3.8). Cascarón rectangular semi infinito con superficies a potencial cero con excepción de $z = 0$.

Ejercicio 3.8 Un tubo de metal rectangular infinitamente largo de lados a y b está aterrizado, pero uno de sus extremos, en $z = 0$, se mantiene a un potencial $\varphi(x, y, 0) = \frac{V_0}{ab}xy$, como se indica en la figura 3.16. Encontrar el potencial dentro del tubo.

Ejercicio 3.9 Una caja cúbica, de lado a , consiste de cinco placas de metal que están soldadas juntas y aterrizadas (ver figura 3.17). La parte superior de la caja está hecha de una hoja de metal, separada y aislada de las otras caras de la caja, y se mantiene a un potencial $V_0(x, y, a) = V_0 = \text{constante}$. Encontrar el potencial dentro de la caja.

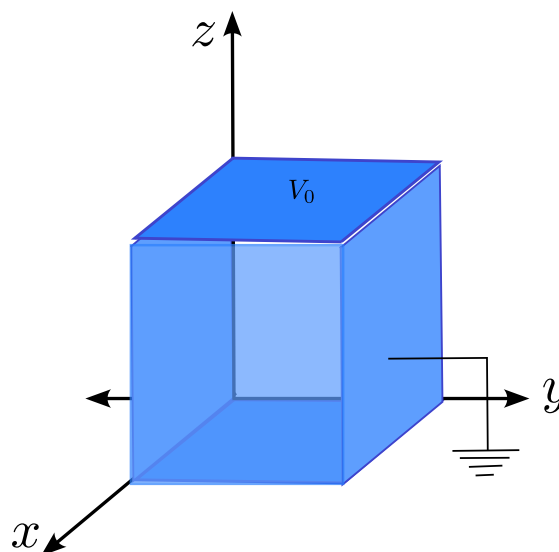


Figura 3.17: Ejercicio (3.9). Cascarón cúbico con superficies a potencial cero, con excepción de la superficie $z = a$.

3.4 Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas

Problemas en dos dimensiones

En el contexto bidimensional, las coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) se asumen como coordenadas polares $(\rho, \phi, z = 0)$. En este caso, la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\nabla^2 \varphi(\rho, \phi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \varphi(\rho, \phi)}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \phi)}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.240)$$

Al utilizar el método de separación de variables, la solución de (3.240) se considera de la forma:

$$\varphi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi). \quad (3.241)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.240), se obtiene:

$$\frac{\Phi(\phi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0, \quad (3.242)$$

lo cual implica:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2}. \quad (3.243)$$

Esta identidad debe ser verdadera para todo (ρ, ϕ) , llevando a que ambas expresiones sean iguales a una constante, que convenientemente se elige como v^2 , y por lo tanto:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] = v^2, \quad (3.244)$$

$$- \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = v^2. \quad (3.245)$$

Elegir la constante como v^2 da lugar a soluciones armónicas periódicas en la variable ϕ , lo cual se espera para una coordenada angular. De aquí se deduce:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] - \frac{v^2}{\rho} R(\rho) = 0, \quad (3.246)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + v^2 \Phi(\phi) = 0. \quad (3.247)$$

La ecuación (3.246) se transforma a:

$$\rho \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{v^2}{\rho} R(\rho) = 0. \quad (3.248)$$

La anterior expresión se puede reescribir en términos de una nueva variable μ , definida por

$$\rho = e^\mu \quad \text{ó} \quad \mu = \ln \rho, \quad (3.249)$$

para la cual

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{d\mu} \frac{1}{\rho}, \quad (3.250)$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dR}{d\mu} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 R}{d\mu^2}. \quad (3.251)$$

Entonces, en términos de μ , la ecuación (3.248) se convierte en:

$$\frac{d^2 R(\mu)}{d\mu^2} - \nu^2 R(\mu) = 0, \quad (3.252)$$

y presenta las siguientes soluciones:

$$R(\mu) = A_\nu e^{\nu\mu} + B_\nu e^{-\nu\mu} = A_\nu (e^\mu)^\nu + B_\nu (e^\mu)^{-\nu}. \quad (3.253)$$

que en términos de ρ , se puede escribir como:

$$R(\rho) = C_\nu \rho^\nu + D_\nu \rho^{-\nu}. \quad (3.254)$$

Por otra parte, la ecuación asociada a la variable ϕ es:

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (3.255)$$

cuyas soluciones son:

$$\Phi(\phi) = C_\nu \cos \nu\phi + B_\nu \sin \nu\phi. \quad (3.256)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas en dos dimensiones para $\nu \neq 0$ se expresa como:

$$\varphi(\rho, \phi) = (C_\nu \rho^\nu + D_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu \cos \nu\phi + B_\nu \sin \nu\phi). \quad (3.257)$$

Para cada valor de $\nu \neq 0$, se obtiene una solución del tipo descrito por (3.257). Por lo tanto, la solución más general debe comprender todos los valores posibles de ν , lo que exige aplicar condiciones de frontera para determinar los valores admisibles de ν .

Cuando $\nu = 0$, las ecuaciones (3.246) y (3.247) toman la forma:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] = 0, \quad (3.258)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0, \quad (3.259)$$

cuyas soluciones son:

$$R(\rho) = E'_1 \ln \rho + E'_0, \quad (3.260)$$

$$\Phi(\phi) = E_3 \phi + E_4, \quad (3.261)$$

por lo tanto, el potencial para $v = 0$, será:

$$\varphi(\rho, \phi) = (E'_1 \ln \rho + E'_0)(E_3 \phi + E_4), \quad (3.262)$$

sin embargo, una solución lineal en la variable ϕ , no cumple el requisito de periodicidad angular: $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$, por lo tanto e independiente de las condiciones de frontera de un problema en particular, se debe tomar $E_3 = 0$, tal que la solución para $v = 0$, se reduce a:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi) &= \underbrace{(E'_1 E_4 \ln \rho)}_{E_1} + \underbrace{(E'_0 E_4)}_{E_0} \\ &= (E_1 \ln \rho + E_0). \end{aligned} \quad (3.263)$$

Con lo cual, a partir de (3.257) y (3.263), se determina que el potencial en coordenadas polares está dado por:

$$\varphi(\rho, \phi) = (C_v \rho^v + D_v \rho^{-v}) (A_v \cos v\phi + B_v \sin v\phi) + (E_1 \ln \rho + E_0). \quad (3.264)$$

Nuevamente la solución mas general posible, se obtiene teniendo en cuenta todos los valores posibles para el parámetro v , que como se mostrará en el próximo ejemplo, deben ser valores enteros para cumplir el requisito de periodicidad sobre la variable ϕ .

Ejemplo 3.8

En este ejemplo, se analiza un cilindro infinito que tiene un potencial $V(\phi)$ en su superficie, ubicado en $\rho = R$. El objetivo es determinar el potencial eléctrico en el interior del cilindro, partiendo de la solución más general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones, usando coordenadas cilíndricas (polares), dada por:

$$\varphi(\rho, \phi) = (C_v \rho^v + D_v \rho^{-v}) (A_v \cos v\phi + B_v \sin v\phi) + (E_1 \ln \rho + E_0). \quad (3.265)$$

Solución: Dado que el potencial no varía con respecto a la coordenada z , es decir, presenta una simetría con relación a esta coordenada, el problema puede tratarse como bidimensional. La condición de frontera en este caso es: $\varphi(R, \phi) = V(\phi)$. Sin embargo, para obtener una solución finita y consistente en el interior del cilindro, se desea que el potencial sea finito cuando $\rho \rightarrow 0$. Por esta razón, se impone la condición $D_v = E_1 = 0$ en la solución general, ecuación (3.265), de tal forma que esta deberá expresarse como:

$$\varphi(\rho, \phi) = (\rho^v) \left(\underbrace{C_v A_v}_{A'_v} \cos v\phi + \underbrace{C_v B_v}_{B'_v} \sin v\phi \right) + E_0. \quad (3.266)$$

Simplificando, se obtiene:

$$\varphi(\rho, \phi) = \rho^v (A'_v \cos v\phi + B'_v \sin v\phi) + E_0. \quad (3.267)$$

La condición de simetría que debe satisfacer el potencial es: $\varphi(\rho, \phi) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi)$, lo cual implica:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi + 2\pi) &= \rho^v (A'_v \cos v(\phi + 2\pi) + B'_v \sin v(\phi + 2\pi)) + E_0 \\ &= \rho^v (A'_v \cos v\phi + B'_v \sin v\phi) + E_0. \end{aligned} \quad (3.268)$$

Esto significa que:

$$\begin{aligned} \cos v\phi &= \cos v(\phi + 2\pi) = \cos(v\phi + 2v\pi) \\ \sin v\phi &= \sin v(\phi + 2\pi) = \sin(v\phi + 2v\pi), \end{aligned} \quad (3.269)$$

por lo tanto,

$$\cos(2\pi v) = 1, \quad \sin(2\pi v) = 0. \quad (3.270)$$

Estos resultados establecen que las identidades se satisfacen simultáneamente si el parámetro v es un entero, es decir, $v = 1, 2, 3, \dots$. Así, la solución de la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{v=1}^{\infty} \rho^v [A'_v \cos(v\phi) + B'_v \sin(v\phi)] + E_0. \quad (3.271)$$

En este punto, se puede simplificar la expresión teniendo en cuenta que la constante E_0 se puede absorber en la constante que resulta en el primer término de (3.271) cuando v toma el valor de cero; es decir $A'_0 \rightarrow A'_0 + E_0$, con lo cual se tiene que:

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{v=0}^{\infty} \rho^v [A'_v \cos(v\phi) + B'_v \sin(v\phi)]. \quad (3.272)$$

Ahora, se aplicará la condición de frontera $\varphi(R, \phi) = V(\phi)$, tal que:

$$\varphi(R, \phi) = V(\phi) = \sum_{v=1}^{\infty} R^v [A'_v \cos(v\phi) + B'_v \sin(v\phi)]. \quad (3.273)$$

Utilizando las condiciones de ortogonalización de las funciones $\{\cos(v\phi)\}$ y $\{\sin(v\phi)\}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v\phi) \sin(v'\phi) &= \pi \delta_{vv'}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi \cos(v\phi) \cos(v'\phi) &= \pi \delta_{vv'}, \\ \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v\phi) \cos(v'\phi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.274)$$

se establece que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) \sin(v'\phi) &= \sum_{v=1}^{\infty} R^v \left[\underbrace{A'_v \int_0^{2\pi} d\phi \cos(v\phi) \sin(v'\phi)}_0 + B'_v \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin(v\phi) \sin(v'\phi)}_{\pi \delta_{vv'}} \right] \\ &= \pi \sum_{v=1}^{\infty} R^v B'_v \delta_{vv'} = \pi R^{v'} B'_{v'}, \end{aligned} \quad (3.275)$$

lo cual lleva a:

$$B'_v = \frac{1}{\pi R^v} \int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) \sin(v\phi). \quad (3.276)$$

Finalmente, si se multiplica (3.273) por $\cos(v'\phi)$ y se integra en ϕ , se encuentra que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) \cos(v'\phi) &= \sum_{v=1}^{\infty} R^v \left[\underbrace{A'_v \int_0^{2\pi} d\phi \cos(v\phi) \cos(v'\phi)}_{\pi \delta_{vv'}} + B'_v \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin(v\phi) \cos(v'\phi)}_0 \right] \\ &= \pi \sum_{v=1}^{\infty} R^v A'_v \delta_{vv'} = \pi R^{v'} A'_{v'}, \end{aligned} \quad (3.277)$$

por lo que:

$$A'_v = \frac{1}{\pi R^v} \int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) \cos(v\phi). \quad (3.278)$$

Reemplazando los valores obtenidos para A'_v y B'_v , se establece que la solución general es:

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho, \phi) &= \sum_{v=1}^{\infty} \rho^v \left\{ \left[\frac{1}{\pi R^v} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \cos(v\phi') \right] \cos(v\phi) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{\pi R^v} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \sin(v\phi') \right] \sin(v\phi) \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^v \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \left[\cos(v\phi') \cos(v\phi) + \sin(v\phi') \sin(v\phi) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^v \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \cos[v(\phi - \phi')]. \tag{3.279}
\end{aligned}$$

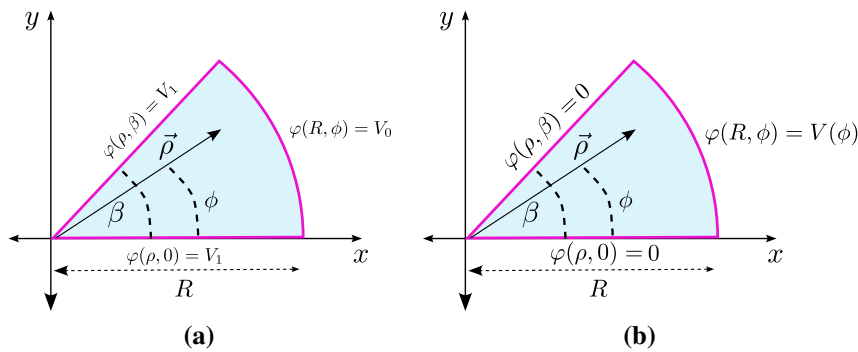


Figura 3.18: Ejercicio (3.11) y (3.12). Diagrama para calcular el potencial eléctrico de una cuña.

Ejercicio 3.10 Probar las relaciones (3.274).

Ejercicio 3.11 Calcular el potencial para la configuración geométrica indicado por la figura 3.18a, considerando las siguientes condiciones de frontera: $\varphi(\rho, 0) = V_1$, $\varphi(\rho, \beta) = V_1$ y $\varphi(R, \phi) = V_0$.

Ejercicio 3.12 Calcular el potencial en el interior de la cuña de la figura 3.18b.

Ejercicio 3.13 Evaluar el potencial entre un par de cascarones cilíndricos concéntricos infinitos de radios a y b , ($b > a$) y a potenciales 0 y $V_2(\phi)$ respectivamente. Analizar el caso $V_2(\phi) = V = cte$.

3.4.1 Problemas en Tres Dimensiones

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas en tres dimensiones se expresa como:

$$\nabla^2 \varphi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \varphi(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \phi, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \phi, z)}{\partial z^2} = 0. \tag{3.280}$$

Utilizando el método de separación de variables, se plantea una solución para el potencial en la forma:

$$\varphi(\rho, \phi, z) = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z). \tag{3.281}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (3.280), se obtiene:

$$\frac{\Phi(\phi) Z(z)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{R(\rho) Z(z)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + R(\rho) \Phi(\phi) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0, \tag{3.282}$$

la cual al dividirse entre $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ adquiere la forma:

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0, \quad (3.283)$$

y se puede expresar como:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{\rho^2}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2}. \quad (3.284)$$

La parte derecha de la igualdad dada por (3.284) depende exclusivamente de las variables (ρ, z) , mientras que la parte izquierda depende exclusivamente de la variable ϕ . Dado que la relación (3.284) debe ser válida para todo valor de (ρ, ϕ, z) , se determina que dicha expresión se cumple solo si ambas partes son iguales a una constante, la cual se llamará l :

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{\rho^2}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = l, \quad (3.285)$$

$$- \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = l. \quad (3.286)$$

Dado que ϕ es una variable angular, se requiere soluciones armónicas en la variable ϕ , lo que implica que la constante l debe ser positiva. Para enfatizar esta selección, se toma $l = \nu^2$. Así, las ecuaciones en (3.286) se reformulan como:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \frac{\rho^2}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \nu^2 = 0, \quad (3.287)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0. \quad (3.288)$$

Como se ha mencionado, la ecuación (3.288) conduce a soluciones armónicas en la parte angular, las cuales aseguran la continuidad del potencial satisfaciendo la condición $\varphi(\rho, \phi, z) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi, z)$. Así, las soluciones de la ecuación (3.288) se expresan como:

$$\begin{aligned} \Phi(\phi) &\sim e^{\pm i\nu\phi}, \text{ o} \\ \Phi(\phi) &\sim \sin(\nu\phi), \cos(\nu\phi). \end{aligned} \quad (3.289)$$

Si los ejemplos a tratar tienen una paridad definida en la variable ϕ , es recomendable tomar la solución como una combinación lineal de $\{\sin(\nu\phi), \cos(\nu\phi)\}$, siendo esta la opción adoptada en este libro.

Por otro lado, la ecuación (3.287) puede ser expresada como:

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] - \frac{\nu^2}{\rho^2} = - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}. \quad (3.290)$$

La identidad se mantiene para todo valor (ρ, z) cuando cada término se iguala a una constante, que puede ser positiva o negativa. Al definir esta constante como positiva (k^2), se obtiene una solución

armónica en z , pero si se define negativa ($-k^2$), la solución en z es hiperbólica, la cual inicialmente se considera aquí, dejando la solución armónica para una discusión posterior. Así, definiendo la constante como $-k^2$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] - \frac{\nu^2}{\rho^2} &= -k^2, \\ -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= -k^2,\end{aligned}\tag{3.291}$$

lo que da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) &= 0.\end{aligned}\tag{3.292}$$

En este contexto, las soluciones de la ecuación (3.292) se exponen como combinaciones lineales de funciones hiperbolicas; es decir

$$\begin{aligned}Z(z) &\sim e^{\pm kz} \text{ o,} \\ Z(z) &\sim (\cosh(kz), \sinh(kz)).\end{aligned}\tag{3.293}$$

Para resolver la ecuación (3.292), se plantea el cambio de variable $x = k\rho$, resultando en:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R(x) = 0,\tag{3.294}$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R(x) = 0.\tag{3.295}$$

La ecuación (3.295) es conocida como *ecuación de Bessel*, cuyas soluciones se determinan asumiendo una serie de potencias de la forma:

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}.\tag{3.296}$$

Al insertar la serie (3.296) en (3.295), se determina que $\alpha = \pm \nu$. Las soluciones que surgen de este análisis se conocen como *funciones de Bessel* de orden ν y $-\nu$, y se escriben como:

$$\begin{aligned}R_1(x) &\equiv J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j+\nu}, \\ R_2(x) &\equiv J_{-\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j-\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j-\nu},\end{aligned}\tag{3.297}$$

donde $\Gamma(z)$, es la función gamma, definida para un argumento complejo z con parte real positiva ($\text{Re}(z) > 0$) como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt \, t^{z-1} e^{-t}. \quad (3.298)$$

Las soluciones mencionadas en (3.297) poseen las siguientes características: si ν no es un entero, J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes, permitiendo que la solución general se exprese como una combinación lineal de estas funciones. Si ν es un entero, situación común en los ejemplos considerados, J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente dependientes, cumpliendo que:

$$J_\nu(x) = (-1)^\nu J_{-\nu}(x). \quad (3.299)$$

Por lo tanto, cuando se considera ν como un número entero, es necesario encontrar una segunda solución que sea linealmente independiente de J_ν . Esta segunda solución se conoce como la función de Bessel de segunda clase o *función de Neumann* y se define de la siguiente manera:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (3.300)$$

Por consiguiente, la solución más general para la variable x (donde $x = k\rho$) se expresará como una combinación lineal de las funciones de Bessel J_ν y de Neumann $N_\nu(x)$.

Antes de establecer la solución más general posible de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, es importante enunciar algunas propiedades de las funciones de Bessel y Neumann que son cruciales para hallar soluciones particulares, especialmente en lo que respecta a las condiciones de frontera.

3.4.2 Propiedades de las Funciones de Bessel

Raíces de las funciones de Bessel

Se define en este texto $x_{\nu,n}$ como las raíces de la función de Bessel de orden ν (ver Tabla 3.1); es decir, los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$J_\nu(x_{\nu,n}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.301)$$

Cuando ν es un número real, los ceros de esta función también son reales. Las funciones de Neumann también presentan raíces (ver Figura 3.19).

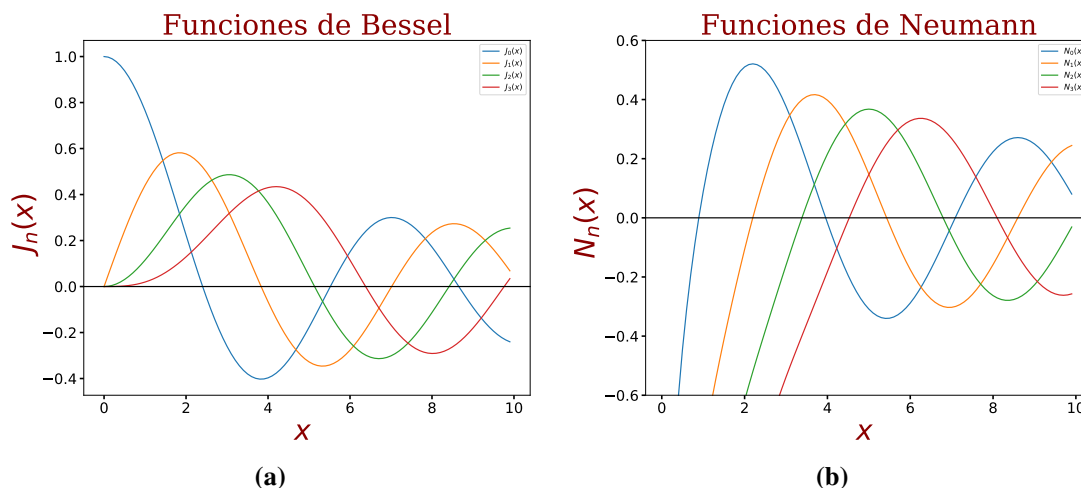


Figura 3.19: Primeras funciones de Bessel y Neumann de orden entero.

J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883
5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647
8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725
11.7915	13.3237	14.7959	16.2235	17.6160
14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269

Cuadro 3.1: Ceros de las funciones de Bessel.

Propiedades de recurrencia

Las principales formulas de recurrencia que satisfacen las funciones de Bessel son:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x), \quad (3.302)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 \frac{dJ_{\nu}(x)}{dx}, \quad (3.303)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x), \quad (3.304)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad (3.305)$$

$$\int dx x^{\nu} J_0(x) = x^{\nu} J_1(x) + (\nu-1)x^{\nu-1} J_0(x) - (\nu-1)^2 \int dx x^{\nu-2} J_0(x). \quad (3.306)$$

Formas Límite

Las funciones de Bessel poseen el siguiente comportamiento asintótico:

- En el caso $x \ll 1$:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \\ N_\nu(x) &\rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772 + \dots \right] & , \quad \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu & , \quad \nu \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

- Cuando $x \gg 1$:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.307)$$

- Para $\nu \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu, \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^{-\nu}. \end{aligned} \quad (3.308)$$

- Si $x = 0$,

$$J_\nu(0) = \delta_{\nu 0}. \quad (3.309)$$

Relaciones de Ortogonalidad y Completez

Para ν real y $\nu > -1$, las condiciones de ortogonalidad y completez de las funciones de Bessel se expresan en la forma:

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}\rho\right) = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nm}, \quad (3.310)$$

$$\frac{2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho'\right)}{[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2} = \delta(\rho - \rho'). \quad (3.311)$$

El conjunto $\left\{J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right)\right\}$ es completo para cualquier valor fijo de ν y $n = 1, 2, 3, \dots, etc.$ Cualquier función $f(\rho)$ definida en el intervalo $0 \leq \rho \leq a$ puede expandirse en términos de esta base como:

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_{\nu n} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right), \quad (3.312)$$

donde los coeficientes de expansión $A'_{\nu n}$ se pueden determinar considerando la relación (3.310), tal que:

$$A'_{\nu n} = \frac{2}{a^2} \frac{1}{[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2} \int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) f(\rho). \quad (3.313)$$

Ahora, si el intervalo de la variable ρ es infinito, es decir: $0 \leq \rho < \infty$, las condiciones de ortogonalidad y completez para ν real y $\nu > -1$ son:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) &= \frac{1}{k} \delta(k - k'), \\ \int_0^\infty dk k J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') &= \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho').\end{aligned}\quad (3.314)$$

Así, una función $f(\rho)$ definida entre $0 \leq \rho < \infty$ se puede expandir en la forma:

$$f(\rho) = \int_0^\infty dk A_\nu(k) J_\nu(k\rho), \quad (3.315)$$

y teniendo en cuenta la relación (3.314), se puede determinar que:

$$A_\nu(k) = k \int_0^\infty d\rho J_\nu(k\rho) f(\rho). \quad (3.316)$$

Solución general para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

En resumen, después de aplicar el método de separación de variables, se han determinado un conjunto de tres ecuaciones diferenciales asociadas a las variables (ρ, z, ϕ) y sus posibles soluciones.

Para la variable ϕ la ecuación diferencial correspondiente es:

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2\Phi(\phi) = 0. \quad (3.317)$$

Las posibles soluciones de (3.317) dependen del valor que tome la constante ν^2 , donde ya se ha establecido que $\nu^2 \geq 0$, para garantizar soluciones armónicas en la función Φ , y se determinó que:

- Para $\nu^2 > 0$, las soluciones son armónicas y su forma más general viene dada por una combinación lineal de las funciones linealmente independientes $\{e^{i\nu\phi}, e^{-i\nu\phi}\}$ o, equivalentemente, como combinación de las funciones $\{\sin \nu\phi, \cos \nu\phi\}$. La elección en este texto, será:

$$\Phi(\phi) = A_\nu \sin \nu\phi + B_\nu \cos \nu\phi. \quad (3.318)$$

- Cuando $\nu = 0$, la solución para $\Phi(\phi)$ es lineal en ϕ ; es decir,

$$\Phi(\phi) \sim \phi + \text{cte}. \quad (3.319)$$

Sin embargo, una solución lineal en ϕ no es periódica, por lo que no es físicamente aceptable.

La ecuación asociada a la variable z queda definida como:

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0, \quad (3.320)$$

cuyas soluciones son de la forma:

- Para $k^2 > 0$, las soluciones se expresan como una combinación lineal de las funciones linealmente independientes $\{e^{kz}, e^{-kz}\}$ o, equivalentemente, como una combinación lineal de $\{\sinh kz, \cosh kz\}$. En este texto la elección será:

$$Z(z) = F_k e^{kz} + G_k e^{-kz}. \quad (3.321)$$

- Cuando $k = 0$, la solución para $Z(z)$ es lineal en z :

$$Z(z) \sim z + \text{cte.} \quad (3.322)$$

Finalmente, la ecuación diferencial asociada a la variable ρ está dada por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (3.323)$$

la cual, tomando $x = k\rho$, se puede escribir como:

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R(x) = 0. \quad (3.324)$$

Las soluciones para la ecuación (3.324) son:

- Si $k \neq 0$ y $\nu \neq 0$ (ya sea ν entero o no), la solución más general en la variable ρ será una combinación lineal de las funciones de Bessel y Neumann: $J_\nu(k\rho)$ y $N_\nu(k\rho)$. Si ν no es entero, es posible escribir la solución general como una combinación lineal de $J_\nu(k\rho)$ y $J_{-\nu}(k\rho)$, pero también es posible en términos de $J_\nu(k\rho)$ y $N_\nu(k\rho)$.
- Si $k = 0$ y $\nu \neq 0$, la ecuación (3.323) se puede expresar en la forma:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} R(\rho) = 0, \quad (3.325)$$

esta ecuación tiene solución de la forma ρ^s , es decir,

$$R(\rho) = \rho^s, \quad (3.326)$$

que, al reemplazar en (3.325), se tiene que:

$$\begin{aligned} s(s-1)\rho^{s-2} + \frac{1}{\rho}s\rho^{s-1} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\rho^s &= 0 \\ s(s-1)\rho^{s-2} + s\rho^{s-2} - \nu^2\rho^{s-2} &= 0 \\ (s^2 - \nu^2)\rho^{s-2} &= 0 \\ (s+\nu)(s-\nu)\rho^{s-2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.327)$$

Lo que implica que la identidad se garantiza si:

$$s = \pm \nu. \quad (3.328)$$

Por tanto, las soluciones de (3.325) pueden expresarse como una combinación lineal de las funciones $\{\rho^\nu, \rho^{-\nu}\}$, es decir:

$$R(\rho) = C_\nu \rho^\nu + D_\nu \rho^{-\nu}. \quad (3.329)$$

- Si $k = 0$ y $\nu = 0$, la ecuación (3.323) tendrá la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] = 0, \quad (3.330)$$

lo cual es equivalente a

$$\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} = \text{cte}, \quad (3.331)$$

y, por lo tanto:

$$R(\rho) \sim \ln \rho + \text{cte}. \quad (3.332)$$

Todos los resultados presentados se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Si } k^2 > 0 \Rightarrow & \begin{cases} \text{Si } v = 0 \Rightarrow \begin{cases} R(\rho) = E_0 J_0(k_2 \rho) + E_1 N_0(k_2 \rho) \\ \Phi(\phi) = E_6 \phi + E_7 \\ Z(z) = F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z} \end{cases} \\ \text{Si } v \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R(\rho) = C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho) + D_{v_1} N_{v_1}(k_1 \rho) \\ \Phi(\phi) = A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi \\ Z(z) = F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Si } k = 0 \Rightarrow & \begin{cases} \text{Si } v = 0 \Rightarrow \begin{cases} R(\rho) = E_2 \ln \rho + E_3 \\ \Phi(\phi) = E_9 \phi + E_{10} \\ Z(z) = E_4 z + E_5 \end{cases} \\ \text{Si } v \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R(\rho) = C_{v_2} \rho^{v_2} + D_{v_2} \rho^{-v_2} \\ \Phi(\phi) = A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi \\ Z(z) = F_0 z + G_0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución más general resulta de una combinación de las soluciones establecidas para los diferentes valores de k y valores de v . Para que la solución sea físicamente aceptable la solución general no puede tener dependencia lineal en la variable ϕ y por tanto en el caso que $v = 0$, la solución para $\Phi(\phi)$ será simplemente una constante que en principio se puede absorber en las constantes asociadas a las funciones $R(\rho)$ y $Z(z)$, con lo cual la solución vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho) + D_{v_1} N_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + (C_{v_2} \rho^{v_2} + D_{v_2} \rho^{-v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho) + E_1 N_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + (E_2 \ln \rho + E_3) (E_4 z + E_5). \end{aligned} \quad (3.333)$$

Si existe una simetría bajo traslación en la coordenada z , la función $Z(z)$ es constante y, por tanto, $k = 0$, lo que conlleva a la solución en dos dimensiones definidas por las coordenadas polares. La solución (3.333) en realidad no expresa la solución más general posible, ya que dicha solución debe incluir todos los valores admisibles para las constantes v_1, v_2, k_1 y k_2 , que se determinan al imponer las condiciones de frontera en un problema específico. Por lo tanto, se tomará la solución (3.333) como una solución general preliminar y posteriormente se incluirán los posibles valores que puedan tomar v_1, v_2, k_1 y k_2 , una vez impuestas las condiciones de frontera en cada problema a resolver.

Solución alternativa para la ecuación de Laplace

En el procedimiento para encontrar la solución (3.333), se estableció en (3.291) que $k^2 > 0$. Dicha elección no es restrictiva para que la solución (3.333) sea válida ya que admite soluciones para las cuales $k^2 < 0$; es decir, para valores donde k sea imaginario puro. Que k sea real o imaginario quedará establecido por las condiciones de frontera y, de ser necesario considerar un valor imaginario para las constantes k , las funciones de Bessel J_ν y de Neumann N_ν tendrán argumentos imaginarios, lo que se denomina funciones de Bessel modificadas. Por todo lo anterior, es aconsejable definir cuál sería la forma que toma la solución (3.333) en términos de las funciones de Bessel modificadas cuando se debe considerar $k^2 < 0$.

Si en (3.291) se establece $k^2 < 0$, se puede reemplazar $-k^2 \rightarrow \kappa^2$, con lo cual (3.291) se escribe como:

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] - \frac{\nu^2}{\rho^2} = \kappa^2, \quad (3.334)$$

$$-\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \kappa^2, \quad (3.335)$$

que se pueden expresar como:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \left(\kappa^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (3.336)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \kappa^2 Z(z) = 0. \quad (3.337)$$

Las soluciones de la ecuación (3.337) son armónicas y se pueden escribir como combinación lineal de las funciones $\{e^{i\kappa z}, e^{-i\kappa z}\}$, o equivalentemente como combinación lineal de las funciones $\{\sin \kappa z, \cos \kappa z\}$. Por otro lado, si se realiza el cambio de variable $y = \kappa \rho$ en la ecuación (3.336), se obtiene:

$$\frac{d^2 R(y)}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR(y)}{dy} - \left(1 + \frac{\nu^2}{y^2} \right) R(y) = 0. \quad (3.338)$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma de la ecuación de Bessel si se cambia $y \rightarrow ix$, tal que:

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R(x) = 0, \quad (3.339)$$

Las soluciones a la ecuación (3.338) son también I_ν y N_ν se conocen como las ecuaciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$, que en términos de las funciones de Bessel y Neumann J_ν y N_ν se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix), \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)] = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \end{aligned} \quad (3.340)$$

Las formas límite de estas funciones son:

■ Si $x \rightarrow 0$:

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (3.341)$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772 + \dots\right] & , \quad \nu = 0, \\ \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & , \quad \nu \neq 0. \end{cases} \quad (3.342)$$

■ Si $x \gg 1$:

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad (3.343)$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (3.344)$$

Al tener en cuenta los diferentes valores que puedan tomar las variables ν y κ , se puede establecer que la solución general para el potencial es:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\rho, \phi, z) = & (C'_{\nu_1} I_{\nu_1}(k_1 \rho) + D'_{\nu_1} K_{\nu_1}(k_1 \rho)) (A'_{\nu_1} \cos \nu_1 \phi + B'_{\nu_1} \sin \nu_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + (C'_{\nu_2} \rho^{\nu_2} + D'_{\nu_2} \rho^{-\nu_2}) (A'_{\nu_2} \cos \nu_2 \phi + B'_{\nu_2} \sin \nu_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 J_0(k_2 \rho) + E'_1 N_0(k_2 \rho) (k_2 \rho)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + (E'_2 \ln \rho + E'_3) (E'_4 z + E'_5). \end{aligned} \quad (3.345)$$

Por lo tanto, se puede elegir como solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas las establecidas por (3.333) o (3.345). Sin embargo, dependiendo de las características de las condiciones de frontera y con el fin de llegar en forma más directa a la solución particular buscada, será preferible tomar como punto de partida una u otra de las soluciones mencionadas. Nuevamente se debe entender que la solución más general posible debe incluir todos los posibles valores de ν_i y κ_i permitidos por las condiciones de frontera.

Ejemplo 3.9

En este ejemplo se considera un cilindro de altura L y radio a cuyo eje es paralelo al eje z como se muestra en la figura 3.20. Para el problema planteado se encontrará el potencial eléctrico al interior del cilindro.

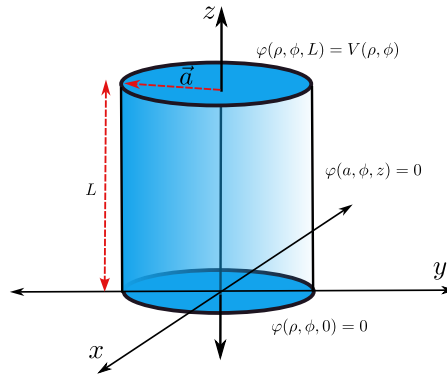


Figura 3.20: Ejemplo (3.9). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie circular en $z = L$.

Solución: Las condiciones de frontera del problema son:

- $\varphi(\rho, \phi, 0) = 0$ para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $\varphi(a, \phi, z) = 0$ para todo valor de (ϕ, z) .
- $\varphi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$ para todo valor de (ρ, ϕ) .

Inicialmente, se realizará el análisis con la solución $\varphi_A(\rho, \phi, z)$.

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho) + D_{v_1} N_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + (C_{v_2} \rho^{v_2} + D_{v_2} \rho^{-v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho) + E_1 N_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + (E_2 \ln \rho + E_3) (E_4 z + E_5). \end{aligned} \quad (3.346)$$

Siendo que el potencial debe ser evaluado en el interior del cilindro ($0 \leq \rho \leq a$), se debe garantizar que el potencial sea finito cuando $\rho = 0$. No obstante, los términos de la solución que contienen los elementos ρ^{-v} y $\ln \rho$, tornarían la solución divergente en este punto. Entonces, con el fin de garantizar que la solución sea finita en $\rho = 0$, se deberá descartar los términos que generan divergencias y por lo tanto se debe tomar $D_{v_2} = E_2 = 0$. Ahora, si se recuerda el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel (J_v, N_v) cuando $\rho \rightarrow 0$, se observa que:

$$\begin{aligned} J_v(k\rho) & \rightarrow \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^v, \\ N_v(k\rho) & \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{k\rho}{2} \right) + 0,5772 + \dots \right], & v = 0, \\ -\frac{\Gamma(v)}{\pi} \left(\frac{2}{k\rho} \right)^v, & v \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De manera que en el límite en consideración, las funciones de Neumann $N_v(k\rho) \rightarrow \infty$, por lo

tanto se deberá tomar: $D_{v_1} = E_1 = 0$. En consecuencia, la solución quedaría como:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\rho, \phi, z) = & (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + E_3 (E_4 z + E_5).\end{aligned}\quad (3.347)$$

Ahora, si se analiza la condición de continuidad del potencial, $\varphi(\rho, \phi, z) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi, z)$, se determina que el potencial $\varphi(\rho, \phi, z)$ debe tener periodo 2π en la variable ϕ , por lo tanto se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\cos v_i(\phi + 2\pi) &= \cos v_i \phi \quad (i = 1, 2), \\ \sin v_i(\phi + 2\pi) &= \sin v_i \phi \quad (i = 1, 2).\end{aligned}\quad (3.348)$$

las anteriores expresiones se cumplen solo si

$$\begin{aligned}\cos v_i 2\pi &= 1, \\ \sin v_i 2\pi &= 0,\end{aligned}\quad (3.349)$$

por lo cual se determina que $v_i = \text{entero}$. Con lo anterior se ha determinado que $v_i = 1, 2, 3, \dots$, y por lo tanto ya se puede incluir en la solución general una suma sobre todos los posibles valores de v_i . Entonces, la solución parcial del problema es:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) + \\ & + E_0 J_0(k_2 \rho) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + E_2 (E_4 z + E_5).\end{aligned}\quad (3.350)$$

Ahora, si se considera la condición de frontera: $\varphi(a, \phi, z) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_A(a, \phi, z) = & \sum_{v=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 a)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} a^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) + \\ & + E_0 J_0(k_2 a) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + E_2 (E_4 z + E_5) = 0.\end{aligned}\quad (3.351)$$

Dado que la condición anterior se debe cumplir para todo valor de (ϕ, z) , se debe garantizar que:

$$C_{v_1} J_{v_1}(k_1 a) = 0, \quad C_{v_2} a^v = 0, \quad E_0 J_0(k_2 a) = 0, \quad E_2 = 0, \quad (3.352)$$

por lo tanto se determina que $C_{v_2} = E_2 = 0$. Además, si no se considera la solución trivial (es decir, se toma $C_{v_1} \neq 0$ y $E_0 \neq 0$), se debe exigir que:

$$J_{v_1}(k_1 a) = 0, \quad \text{y} \quad J_0(k_2 a) = 0. \quad (3.353)$$

Las condiciones establecidas en (3.353) se cumplen para ciertos valores de x que corresponden a las raíces de las funciones de Bessel $J_v(x)$ ($J_v(x) = 0$), que se denotarán como x_{vn} , tal que:

$$J_{v_1}(k_1 a) = J_{v_1}(x_{v_1 n}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.354)$$

$$J_0(k_0 a) = J_0(x_{0n}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.355)$$

con lo cual:

$$k_1 a = x_{v_1 n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.356)$$

$$k_0 a = x_{0n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.357)$$

es decir:

$$k_1 \rightarrow k_{v_1 n} = \frac{x_{v_1 n}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (3.358)$$

$$k_0 \rightarrow k_{0n} = \frac{x_{0n}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (3.359)$$

Lo anterior establece los posibles valores de las constantes k_1 y k_0 , y todos sus posibles valores se deben incluir en la solución mas general, y por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_{v_1 n} \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) \left(F_n e^{k_{v_1 n} z} + G_n e^{-k_{v_1 n} z} \right) \\ & + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_{0n} \rho) \left(F_n e^{k_{0n} z} + G_m e^{-k_{0n} z} \right). \end{aligned} \quad (3.360)$$

Si reemplazamos $v_1 \rightarrow v$, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_v J_v(k_{v n} \rho)) (A_v \cos v \phi + B_v \sin v \phi) \left(F_n e^{k_{v n} z} + G_n e^{-k_{v n} z} \right) \\ & + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_{0n} \rho) \left(F_n e^{k_{0n} z} + G_m e^{-k_{0n} z} \right). \end{aligned} \quad (3.361)$$

Si se considera que $C_0 A_0 = E_0$, se puede incluir el segundo término en (3.361) en la sumatoria del primer término (haciendo que la sumatoria en v inicie en 0), tal que

$$\varphi_A(\rho, \phi, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_v J_v(k_{v n} \rho)) (A_v \cos v \phi + B_v \sin v \phi) \left(F_n e^{k_{v n} z} + G_n e^{-k_{v n} z} \right), \quad (3.362)$$

siendo $k_{vn} = \frac{x_{vn}}{a}$. Ahora, al considerar la condición de frontera: $\varphi(\rho, \phi, 0) = 0$, se tiene:

$$\varphi_A(\rho, \phi, 0) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_v J_v(k_{vn}\rho)) (A_v \cos v\phi + B_v \sin v\phi) (F_n + G_n) = 0, \quad (3.363)$$

la cual se debe garantizar para todo valor de (ρ, ϕ) y por lo tanto

$$F_n + G_n = 0, \quad (3.364)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_v J_v(k_{vn}\rho)) (A_v \cos v\phi + B_v \sin v\phi) (F_n e^{k_{vn}z} - F_n e^{-k_{vn}z}) \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_v(k_{vn}\rho)) \left(\underbrace{2C_v F_n A_v}_{A_{vn}} \cos v\phi + \underbrace{2C_v F_n B_v}_{B_{vn}} \sin v\phi \right) \left(\frac{e^{k_{vn}z} - e^{-k_{vn}z}}{2} \right) \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_v(k_{vn}\rho)) (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) \sinh(k_{vn}z), \end{aligned} \quad (3.365)$$

donde las constantes A_{vn} y B_{vn} están por determinar. Finalmente, si se tiene en cuenta la condición $\varphi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$, se obtiene que:

$$\varphi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right) (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) \sinh\left(\frac{x_{vn}}{a}L\right). \quad (3.366)$$

Utilizando la condición de ortonormalización de las funciones de Bessel:

$$\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right) J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm}, \quad (3.367)$$

se puede determinar que

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) V(\rho, \phi) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) \sinh\left(\frac{x_{vn}}{a}L\right) \\ &\quad \times \underbrace{\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right)}_{\frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm}} \\ &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) \sinh\left(\frac{x_{vn}}{a}L\right) \\ &\quad \times [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm} \\ &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} (A_{vm} \cos v\phi + B_{vm} \sin v\phi) \sinh\left(\frac{x_{vm}}{a}L\right) \\ &\quad \times [J_{v+1}(x_{vm})]^2, \end{aligned} \quad (3.368)$$

es decir

$$\int_0^a d\rho \rho J_v \left(\frac{x_{vm}}{a} \rho \right) V(\rho, \phi) = \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{vm})]^2 (A_{vm} \cos v\phi + B_{vm} \sin v\phi) \sinh \left(\frac{x_{vm}}{a} L \right). \quad (3.369)$$

Para encontrar los coeficientes B_{vm} , se utiliza las condiciones de ortonormalización de las funciones $\sin v\phi$:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin(v\phi) \sin(v'\phi) = \pi \delta_{vv'}, \quad (3.370)$$

Por lo tanto, al multiplicar la ecuación (3.369) por $\sin v'\phi$ e integrar entre 0 a 2π en la variable ϕ , el lado derecho (LD) y el lado izquierdo (LI) de la ecuación (3.369), resultan en:

$$LI = \int_0^a d\rho \rho J_v \left(\frac{x_{vm}}{a} \rho \right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, \phi) \quad (3.371)$$

$$\begin{aligned} LD &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{vm})]^2 \sinh \left(\frac{x_{vm}}{a} L \right) \left(\underbrace{A_{vm} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \cos v\phi}_0 + \underbrace{B_{vm} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \sin v\phi}_{\pi \delta_{vv'}} \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{v,m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{vm}}{a} L \right) B_{vm} \delta_{vv'} \\ &= \frac{\pi a^2}{2} [J_{v'+1}(x_{v',m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{v',m}}{a} L \right) B_{v'm}, \end{aligned} \quad (3.372)$$

por tanto

$$\int_0^a d\rho \rho J_v \left(\frac{x_{vm}}{a} \rho \right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, \phi) = \frac{\pi a^2}{2} [J_{v'+1}(x_{v',m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{v',m}}{a} L \right) B_{v'm}, \quad (3.373)$$

con lo cual

$$B_{vn} = \frac{2}{\pi a^2 [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \sinh \left(\frac{x_{vn}}{a} L \right)} \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_v \left(\frac{x_{vn}}{a} \rho \right) \sin(v\phi) V(\rho, \phi). \quad (3.374)$$

Para encontrar los valores de A_{vn} se realiza un procedimiento similar al anterior, pero esta vez utilizando la propiedad de ortonormalización

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos(v\phi) \cos(v'\phi) = \pi \delta_{vv'}. \quad (3.375)$$

Por lo tanto, al multiplicar la ecuación (3.369) por $\cos v'\phi$ e integrar en la variable ϕ , y tener en cuenta (3.375), se determina que:

$$A_{vn} = \frac{2}{\pi a^2 [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \sinh \left(\frac{x_{vn}}{a} L \right)} \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_v \left(\frac{x_{vn}}{a} \rho \right) \cos(v\phi) V(\rho, \phi). \quad (3.376)$$

Los valores de A_{v_n} y B_{v_n} determinan completamente la solución para el potencial eléctrico dado por (3.366), bajo las condiciones de frontera establecidas.

Ahora, se mostrará que la segunda solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas no es consistente para las condiciones de frontera del problema en consideración. La segunda solución es:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, z) = & (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho) + D'_{v_1} K_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + (C'_{v_2} \rho^{v_2} + D'_{v_2} \rho^{-v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 I_0 + E'_1 K_0) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + (E'_2 \ln \rho + E'_3) (E'_4 z + E'_5).\end{aligned}\quad (3.377)$$

Dado que el potencial debe ser finito para $\rho = 0$, se tiene que $D'_{v_2} = E'_2 = 0$. Ahora, al analizar el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel (I_v, K_v) cuando $\rho \rightarrow 0$ se observa que:

$$\begin{aligned}I_v(x) & \rightarrow \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^v, \\ K_v(x) & \rightarrow \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772 + \dots\right], & v = 0 \\ \frac{\Gamma(v)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^v, & v \neq 0 \end{cases},\end{aligned}$$

con lo cual $K_v(x \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, por tanto se deberá escoger $D'_{v_1} = D'_{v_2} = E'_1 = 0$, y la solución se expresará como:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, z) = & (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 I_0(\kappa_2 \rho)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + (E'_3) (E'_4 z + E'_5).\end{aligned}\quad (3.378)$$

Dado la condición de continuidad: $\varphi(\rho, \phi, z) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi, z)$, se establece que el parámetro v_i debe ser entero y la solución general incluirá una suma sobre todos los valores posibles de v_i , con lo cual la solución se deberá expresar en la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=0}^{\infty} (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=0}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 I_0(\kappa_2 \rho)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + E'_3 (E'_4 z + E'_5).\end{aligned}\quad (3.379)$$

Dada esta versión de la solución parcial de la ecuación de Laplace para el problema planteado, se procede a evaluar las condiciones de frontera características del mismo. La primera condición establece que:

$$\varphi(a, \phi, z) = 0, \quad (3.380)$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \varphi_B(a, \phi, z) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 a)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\
 &+ \sum_{v_2=0}^{\infty} (C'_{v_2} a^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\
 &+ (E'_0 I_0(\kappa_2 a)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\
 &+ E'_3 (E'_4 z + E'_5) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.381}$$

Dado que el resultado anterior debe ser válido para todo (ϕ, z) se debe garantizar que:

$$C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 a) = 0, \quad E'_0 I_0(\kappa_2 a) = 0, \quad C'_{v_2} a^{v_2} = 0, \quad \text{y } E'_3 = 0, \tag{3.382}$$

con lo cual se termina que $C'_{v_2} = 0$. Adicionalmente, si no se considera la solución trivial ($C'_{v_1} \neq 0$ y $E'_0 \neq 0$) se debe exigir que:

$$I_{v_1}(\kappa_1 a) = 0, \quad I_0(\kappa_2 a) = 0. \tag{3.383}$$

Sin embargo, esta condición de frontera no puede ser satisfecha, ya que la función de Bessel $I_v(\kappa \rho)$ no tiene raíces y por lo tanto se debería tomar $E'_0 = C'_{v_1} = 0$, que junto a las restantes condiciones establecidas para la solución, anula completamente el potencial $\varphi_B(\rho, \phi, z)$ y por lo tanto $\varphi_B(\rho, \phi, z)$ no conlleva a una solución aceptable para el potencial.

Ejemplo 3.10

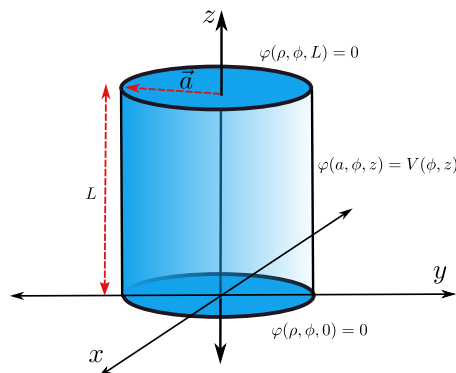


Figura 3.21: Ejemplo (3.10). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie lateral definida por $\rho = a$.

Calcular el potencial en el interior del cilindro mostrado en la figura 3.21, con las siguientes

condiciones de frontera:

- $\varphi(\rho, \phi, 0) = 0$ para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $\varphi(\rho, \phi, L) = 0$ para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $\varphi(a, \phi, z) = V(\phi, z)$ para todo valor de (ϕ, z) .

Solución: Para solucionar este problema, se parte de la solución $\varphi_B(\rho, \phi, z)$ (mas adelante se demostrará que la expresión φ_A no resuelve el problema), dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\rho, \phi, z) = & (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho) + D'_{v_1} K_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + (C'_{v_2} \rho^{v_2} + D'_{v_2} \rho^{-v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 I_0(\kappa_2 \rho) + E'_1 K_0(\kappa_2 \rho)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + (E'_2 \ln \rho + E'_3) (E'_4 z + E'_5). \end{aligned} \quad (3.384)$$

Ahora, teniendo en cuenta que se requiere una solución finita en $\rho \rightarrow 0$, se debe eliminar de la solución general, las funciones divergentes en $\rho = 0$, por lo tanto se debe tomar $D'_{v_1} = D'_{v_2} = E'_1 = E'_2 = 0$, con lo cual la solución se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\rho, \phi, z) = & (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (E'_0 I_0(\kappa_2 \rho)) (F'_{\kappa_2} e^{i\kappa_2 z} + G'_{\kappa_2} e^{-i\kappa_2 z}) \\ & + (E'_3) (E'_4 z + E'_5). \end{aligned} \quad (3.385)$$

Los valores de v_i deben ser enteros para garantizar la periodicidad requerida en la variable ϕ , de tal forma que:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (I_0(\kappa_2 \rho)) \left(\underbrace{E'_0 F'_{\kappa_2}}_{\frac{A'_{0\kappa_2}}{2}} e^{i\kappa_2 z} + \underbrace{E'_0 G'_{\kappa_2}}_{\frac{B'_{0\kappa_2}}{2}} e^{-i\kappa_2 z} \right) + \left(\underbrace{E'_3 E'_4 z + E'_3 E'_5}_{E''_4} \right). \end{aligned} \quad (3.386)$$

Entonces la solución toma la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_B(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z} + G'_{\kappa_1} e^{-i\kappa_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z + G'_0) \\ & + (I_0(\kappa_2 \rho)) \left(\frac{A'_{0\kappa_2}}{2} e^{i\kappa_2 z} + \frac{B'_{0\kappa_2}}{2} e^{-i\kappa_2 z} \right) + (E''_4 z + E''_5). \end{aligned}$$

Ahora, tomando la condición $\varphi_B(\rho, \phi, 0) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, 0) &= \sum_{v_1=1}^{\infty} (C'_{v_1} I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1} \sin v_1 \phi) (F'_{\kappa_1} + G'_{\kappa_1}) \\ &+ \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (G'_0) \\ &+ I_0(\kappa_2 \rho) \frac{(A'_{0\kappa_2} + B'_{0\kappa_2})}{2} + E''_5 = 0.\end{aligned}\quad (3.387)$$

Dado que la condición anterior se debe cumplir para todo valor de las variables (ρ, ϕ) , y de la independencia de las funciones implicadas, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}F'_{\kappa_1} + G'_{\kappa_1} &= 0, \\ G'_0 &= 0, \\ (A'_{0\kappa_2} + B'_{0\kappa_2}) &= 0, \\ E''_5 &= 0.\end{aligned}\quad (3.388)$$

Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, la solución general toma la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, z) &= \sum_{v_1=1}^{\infty} (I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) \left(\underbrace{2iA'_{v_1} F'_{\kappa_1} C'_{v_1}}_{A'_{v_1 x_1}} \cos v_1 \phi + \underbrace{2iB'_{v_1} F'_{\kappa_1} C'_{v_1}}_{B'_{v_1 x_1}} \sin v_1 \phi \right) \underbrace{\frac{(e^{i\kappa_1 z} - e^{-i\kappa_1 z})}{2i}}_{\sin \kappa_1 z} \\ &+ \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z) \\ &+ I_0(\kappa_2 \rho) \underbrace{iA'_{0\kappa_2}}_{A'_{0\kappa_2}} \underbrace{\frac{(e^{i\kappa_2 z} - e^{-i\kappa_2 z})}{2i}}_{\sin \kappa_2 z} + (E''_4 z).\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}\varphi_B(\rho, \phi, z) &= \sum_{v_1=1}^{\infty} (I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1 x_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1 x_1} \sin v_1 \phi) \sin \kappa_1 z \\ &+ \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 z) \\ &+ I_0(\kappa_2 \rho) A'_{0\kappa_2} \sin \kappa_2 z + (E''_4 z).\end{aligned}$$

Ahora, al aplicar la condición $\varphi_B(\rho, \phi, L) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi_B(\rho, \phi, L) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (I_{v_1}(\kappa_1 \rho)) (A'_{v_1 x_1} \cos v_1 \phi + B'_{v_1 x_1} \sin v_1 \phi) \sin \kappa_1 L \\
& + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C'_{v_2} \rho^{v_2}) (A'_{v_2} \cos v_2 \phi + B'_{v_2} \sin v_2 \phi) (F'_0 L) \\
& + I_0(\kappa_2 \rho) A'_{0 \kappa_2} \sin \kappa_2 L + (E''_4 L) = 0.
\end{aligned}$$

Dado que la condición anterior debe cumplirse para todo valor de (ρ, ϕ) , y considerando la independencia de las funciones asociadas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sin \kappa_1 L &= 0, \Rightarrow \kappa_1 L = n\pi, \\
F'_0 L &= 0 \Rightarrow F'_0 = 0, \\
\sin \kappa_2 L &= 0 \Rightarrow \kappa_2 L = n\pi, \\
(E''_4 L) &= 0 \Rightarrow E''_4 = 0.
\end{aligned} \tag{3.389}$$

Por lo tanto,

$$k_i L = n\pi, \tag{3.390}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$, etc, tal que,

$$k_i = \frac{n\pi}{L}, \tag{3.391}$$

con lo cual la solución más general implica una suma sobre todos los valores posibles de n y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi_B(\rho, \phi, z) = & \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(I_v \left(\frac{n\pi \rho}{L} \right) \right) (A'_{vn} \cos v \phi + B'_{vn} \sin v \phi) \sin \left(\frac{n\pi}{L} z \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} I_0 \left(\frac{n\pi \rho}{L} \right) A'_{0n} \sin \left(\frac{n\pi}{L} z \right).
\end{aligned}$$

En la última expresión se ha renombrado $v_1 \rightarrow v$, y se ha puesto la función en términos de n en lugar de κ_i . El segundo término en la última expresión se puede incluir en el primer término, agregando en la suma sobre v el término $v = 0$, por lo tanto:

$$\varphi_B(\rho, \phi, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(I_v \left(\frac{n\pi \rho}{L} \right) \right) (A'_{vn} \cos v \phi + B'_{vn} \sin v \phi) \sin \left(\frac{n\pi}{L} z \right). \tag{3.392}$$

Para la última condición de frontera, se tiene que:

$$\varphi(a, \phi, z) = V(\phi, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_v \left(\frac{n\pi a}{L} \right) [A'_{vn} \cos(v\phi) + B'_{vn} \sin(v\phi)] \sin \left(\frac{n\pi}{L} z \right). \tag{3.393}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right)$ e integrando en z resulta,

$$\begin{aligned}
 \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) V(\rho, z) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_v\left(\frac{n\pi}{L}a\right) [A'_{vn} \cos(v\phi) + B'_{vn} \sin(v\phi)] \\
 &\quad \underbrace{\int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{nm}} \\
 &= \frac{L}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_v\left(\frac{n\pi}{L}a\right) [A'_{vn} \cos(v\phi) + B'_{vn} \sin(v\phi)] \delta_{nm} \\
 &= \frac{L}{2} \sum_{v=0}^{\infty} I_v\left(\frac{m\pi}{L}a\right) [A'_{vm} \cos(v\phi) + B'_{vm} \sin(v\phi)], \quad (3.394)
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) V(\rho, z) = \sum_{v=0}^{\infty} I_v\left(\frac{m\pi}{L}a\right) [A'_{vm} \cos(v\phi) + B'_{vm} \sin(v\phi)]. \quad (3.395)$$

Ahora, para determinar los valores de las constantes B'_{vm} , se multiplica la expresión (3.395) por $\sin v'\phi$ y se integra en el ángulo ϕ , con lo cual, el lado derecho (LD) y el lado izquierdo (LI) de la expresión (3.395), se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 LI &= \frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, z) \quad (3.396) \\
 LD &= \sum_v I_v\left(\frac{m\pi}{L}a\right) \times \left[\underbrace{A'_{vm} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \cos(v\phi)}_0 + \underbrace{B'_{vm} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \sin(v\phi)}_{\pi \delta_{vv'}} \right] \\
 &= \pi \sum_v I_v\left(\frac{m\pi}{L}a\right) B'_{vm} \delta_{v,v'} \\
 &= \pi I_{v'}\left(\frac{m\pi}{L}a\right) B'_{v'm}, \quad (3.397)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, z) = \pi I_{v'}\left(\frac{m\pi}{L}a\right) B'_{v'm} \quad (3.398)$$

de manera que (reemplazando $v' \rightarrow v$),

$$B'_{vn} = \frac{2}{\pi L} \frac{1}{I_v\left(\frac{n\pi}{L}a\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\phi \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin(v\phi) V(\rho, z). \quad (3.399)$$

Para determinar los valores de las constantes A'_{vm} , se aplica un procedimiento similar al utilizado para encontrar B'_{vm} . En este caso se multiplica la expresión (3.395) por $\cos v'\phi$, se

integra en el ángulo ϕ y se utiliza la condición de ortogonalidad para las funciones $\cos v\phi$, con lo cual se puede verificar que:

$$A'_{vn} = \frac{2}{\pi L} \frac{1}{I_v\left(\frac{n\pi}{L}a\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\phi \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos(v\phi) V(\rho, z). \quad (3.400)$$

Las constantes A'_{vn} y B'_{vn} determinan completamente la solución (3.392).

Ahora se demostrará que la expresión $\varphi_A(\rho, \phi, z)$, no permite una solución bajo las condiciones de frontera planteadas en este ejemplo. En primer lugar se establece la solución mas general:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho) + D_{v_1} N_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + (C_{v_2} \rho^{v_2} + D_{v_2} \rho^{-v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho) + E_1 N_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + (E_2 \ln \rho + E_3) (E_4 z + E_5). \end{aligned} \quad (3.401)$$

Si se tiene en cuenta que: 1) La solución no debe depender N_v , ρ^{-v} y $\ln \rho$, para evitar singularidades del potencial en $\rho = 0$. 2) Los parámetros v_i deben ser enteros para garantizar la periodicidad requerida en la variable ϕ . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + E_3 (E_4 z + E_5). \end{aligned} \quad (3.402)$$

La condición de frontera, $\varphi(\rho, \phi, 0) = 0$, establece que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, 0) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} + G_{k_1}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} + G_{k_2}) + E_3 (E_5) \\ = & 0. \end{aligned} \quad (3.403)$$

Si la condición anterior se debe cumplir para todo valor de (ρ, ϕ) , se debe exigir que:

$$\begin{aligned} G_0 &= 0, \\ F_{k_1} + G_{k_1} &= 0, \\ F_{k_2} + G_{k_2} &= 0 \\ E_3 (E_5) &= 0. \end{aligned} \quad (3.404)$$

Asumiendo $E_3 \neq 0$, se tiene que $E_5 = 0$ y la solución bajo las condiciones establecidas toma la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1}^{\infty} (J_{v_1}(k_1 \rho)) \left(\underbrace{2iF_{k_1} C_{v_1} A_{v_1}}_{A'_{k_1 v_1}} \cos v_1 \phi + \underbrace{2iF_{k_1} C_{v_1} B_{v_1}}_{B'_{k_1 v_1}} \sin v_1 \phi \right) \frac{(e^{k_1 z} - e^{-k_1 z})}{2i \sinh k_1 z} \\ & + \sum_{v_1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (F_0 A_{v_2} \cos v_2 \phi + F_0 B_{v_2} \sin v_2 \phi) (z) \\ & + ((2F_{k_2} E_0) J_0(k_2 \rho)) \frac{(e^{k_2 z} - e^{-k_2 z})}{2 \sinh k_2 z} \\ & + E_3 (E_4 z). \end{aligned} \quad (3.405)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1}^{\infty} (J_{v_1}(k_1 \rho)) (A'_{k_1 v_1} \cos v_1 \phi + B'_{k_1 v_1} \sin v_1 \phi) \sinh k_1 z \\ & + \sum_{v_1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (F_0 A_{v_2} \cos v_2 \phi + F_0 B_{v_2} \sin v_2 \phi) (z) \\ & + ((2F_{k_2} E_0) J_0(k_2 \rho)) \sinh k_2 z + E_3 (E_4 z). \end{aligned} \quad (3.406)$$

Ahora, la condición de frontera: $\varphi(\rho, \phi, L) = 0$, implica que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, L) = & \sum_{v_1}^{\infty} (J_{v_1}(k_1 \rho)) (A'_{k_1 v_1} \cos v_1 \phi + B'_{k_1 v_1} \sin v_1 \phi) \sinh k_1 L \\ & + \sum_{v_1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 L) \\ & + ((2F_{k_2} E_0) J_0(k_2 \rho)) \sinh k_2 L + E_3 E_4 L \\ = & 0. \end{aligned} \quad (3.407)$$

Dado que la condición anterior se debe cumplir para todo valor de (ρ, ϕ) , y de la independencia de las funciones implicadas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sinh k_1 L &= 0 \Rightarrow k_1 = 0, \\ F_0 L &= 0 \Rightarrow F_0 = 0, \\ (2F_{k_2} E_0) \sinh k_2 L &= 0 \Rightarrow 2F_{k_2} E_0 = 0 \text{ o } k_2 = 0, \\ E_3 E_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.408)$$

Las condiciones anteriores, eliminan completamente la solución general $\varphi_A(\rho, \phi, z)$. Esto implica que la solución $\varphi_A(\rho, \phi, z)$, no resuelve el problema con las condiciones de frontera planteadas.

Ejercicio 3.14 A partir de (3.395), demostrar la expresión para A'_{vn} , dada por (3.400).

Ejemplo 3.11

Calcular el potencial en el interior de un cascaron cilíndrico semi-infinito, bajo las siguientes condiciones de frontera:

- $\varphi(a, \phi, z) = 0$ para todo valor de (ϕ, z) .
- $\varphi(\rho, \phi, z \rightarrow \infty) = 0$ para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $\varphi(\rho, \phi, 0) = V(\rho, \phi)$ para todo valor de (ρ, ϕ) .

Solución: La solución general es dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & (A_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho) + B_{v_1} N_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} \sin v_1 \phi) (F_{k_1} e^{k_1 z} + G_{k_1} e^{-k_1 z}) \\ & + (C_{v_2} \rho^{v_2} + D_{v_2} \rho^{-v_2}) (A_{v_2} \cos v_2 \phi + B_{v_2} \sin v_2 \phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho) + E_1 N_0(k_2 \rho)) (F_{k_2} e^{k_2 z} + G_{k_2} e^{-k_2 z}) \\ & + (E_2 \ln \rho + E_3) (E_4 z + E_5), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que,

- La solución no debe depender de las funciones N_v, N_0, ρ^{-v} y $\ln \rho$, para evitar singularidades del potencial en $\rho = 0$, y por lo tanto se debe tomar $B_{v_1} = D_{v_2} = E_1 = E_2 = 0$.
- Ya que el potencial debe mantenerse finito para $z \rightarrow \infty$, se debe tomar $F_{k_1} = F_0 = F_{k_2} = E_4 = 0$.
- Por periodicidad de la variable ϕ , los parámetros v_i deben ser enteros.

Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 \rho)) (A_{v_1} G_{k_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} G_{k_1} \sin v_1 \phi) (e^{-k_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} \rho^{v_2}) (A_{v_2} G_0 \cos v_2 \phi + B_{v_2} G_0 \sin v_2 \phi) \\ & + (E_0 J_0(k_2 \rho)) G_{k_2} e^{-k_2 z} + E_3 (E_5). \end{aligned} \quad (3.409)$$

Ahora, la condición de frontera: $\varphi(a, \phi, z) = 0$, implica que:

$$\begin{aligned} \varphi_A(a, \phi, z) = & \sum_{v_1=1}^{\infty} (C_{v_1} J_{v_1}(k_1 a)) (A_{v_1} G_{k_1} \cos v_1 \phi + B_{v_1} G_{k_1} \sin v_1 \phi) (e^{-k_1 z}) \\ & + \sum_{v_2=1}^{\infty} (C_{v_2} a^{v_2}) (A_{v_2} G_0 \cos v_2 \phi + B_{v_2} G_0 \sin v_2 \phi) \\ & + (E_0 J_0(k_2 a)) G_{k_2} e^{-k_2 z} + E_3 (E_5). \end{aligned} \quad (3.410)$$

Dado que la condición anterior se debe cumplir para todo valor de (ϕ, z) , se debe garantizar que:

$$C_{v_1} J_{v_1}(k_1 a) = 0, \quad C_{v_2} a^{v_2} = 0, \quad E_0 J_0(k_2 a) G_{k_2} = 0, \quad E_3 E_5 = 0, \quad (3.411)$$

por lo tanto se determina que $C_{v_2} = E_2 E_5 = 0$. Además, si no se considera la solución trivial (es decir, se toma $C_{v_1} \neq 0$ y $E_0 G_{k_2} \neq 0$), se debe exigir que:

$$J_{v_1}(k_1 a) = 0, \quad J_0(k_2 a) = 0. \quad (3.412)$$

Las condiciones establecidas en (3.412), da a entender que se deberán buscar los valores del argumento de la función de Bessel $J_v(x)$ que garanticen que $J_v(x) = J_0(x) = 0$; es decir, las raíces de la función de Bessel que se denominarán $x = x_{v_n}$, tal que:

$$\begin{aligned} J_{v_1}(x_{v_1 n}) &= 0, & n &= 1, 2, 3, \dots, \\ J_0(x_{0n}) &= 0, & n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.413)$$

de manera que se debe cumplir:

$$k_i a = x_{v_i n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.414)$$

es decir:

$$\begin{aligned} k_1 &\rightarrow k_{v_1 n} = \frac{x_{v_1 n}}{a}, & n &= 1, 2, 3, \dots, \\ k_2 &\rightarrow k_{0n} = \frac{x_{0n}}{a}, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.415)$$

Lo anterior establece los posibles valores de las constantes k_1 y k_2 , y todos sus posibles valores se deben incluir en la solución mas general, de forma que se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) &= \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_{v_1}(k_{v_1 n} \rho)) \left(\underbrace{C_{v_1} A_{v_1} G_n}_{A_{v_1 n}} e^{i v_1 \phi} + \underbrace{C_{v_1} B_{v_1} G_n}_{B_{v_1 n}} e^{-i v_1 \phi} \right) \left(e^{-k_{v_1 n} z} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_{0n} \rho) \left(\underbrace{E_0 G_n}_{A_{0n}} e^{-k_{0n} z} \right), \end{aligned} \quad (3.416)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\rho, \phi, z) &= \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_{v_1}(k_{v_1 n} \rho)) \left(A_{v_1 n} e^{i v_1 \phi} + B_{v_1 n} e^{-i v_1 \phi} \right) \left(e^{-k_{v_1 n} z} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_{0n} \rho) \left(A_{0n} e^{-k_{0n} z} \right). \end{aligned} \quad (3.417)$$

El segundo término en (3.417) se puede incluir en el primer término si se toma que la sumatoria en v_1 inicie en cero, de tal manera que se tiene que:

$$\varphi_A(\rho, \phi, z) = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{v_1}(k_{v_1 n} \rho) (A_{v_1 n} \cos v_1 \phi + A_{v_1 n} \sin v_1 \phi) \left(G_n e^{-k_{v_1 n} z} \right), \quad (3.418)$$

si se redefine $v_1 \rightarrow v$, se tiene

$$\varphi_A(\rho, \phi, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_v(k_{vn}\rho) (A_{vn} \cos v\phi + A_{vn} \sin v\phi) (G_n e^{-k_{vn}z}), \quad (3.419)$$

siendo $k_{vn} = \frac{x_{vn}}{a}$. Ahora, se considera la condición de frontera: $\varphi(\rho, \phi, 0) = V(\rho, \phi)$:

$$\varphi_A(\rho, \phi, 0) = V(\rho, \phi) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_v(k_{vn}\rho) (A_{vn} \cos v\phi + A_{vn} \sin v\phi). \quad (3.420)$$

Utilizando la condición de ortonormalización de las funciones de Bessel:

$$\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right) J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm}, \quad (3.421)$$

se determina,

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) V(\rho, \phi) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) \\ &\quad \underbrace{\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right)}_{\frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm}} \\ &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{vn} \cos v\phi + B_{vn} \sin v\phi) [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{nm} \\ &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} (A_{vm} \cos v\phi + B_{vm} \sin v\phi) [J_{v+1}(x_{vm})]^2, \end{aligned} \quad (3.422)$$

es decir

$$\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) V(\rho, \phi) = \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{vm})]^2 (A_{vm} \cos v\phi + B_{vm} \sin v\phi). \quad (3.423)$$

Ahora, para determinar los valores de las constantes B_{vm} , se multiplica la expresión (3.423) por $\sin v'\phi$ y se integra en el ángulo ϕ , con lo cual, el lado derecho (LD) y el lado izquierdo (LI) de la expresión (3.423), se pueden escribir como:

$$LI = \int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, \phi) \quad (3.424)$$

$$\begin{aligned} LD &= \frac{a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{v,m})]^2 \left[\underbrace{A_{vm} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \cos v\phi}_0 + B_{vm} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) \sin v\phi}_{\pi \delta_{vv'}} \right] \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} [J_{v+1}(x_{v,m})]^2 B_{vm} \delta_{vv'} \\ &= \frac{\pi a^2}{2} [J_{v'+1}(x_{v',m})]^2 B_{v'm}, \end{aligned} \quad (3.425)$$

de manera que

$$\int_0^a d\rho \rho J_v\left(\frac{x_{vm}}{a}\rho\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(v'\phi) V(\rho, \phi) = \frac{\pi a^2}{2} [J_{v'+1}(x_{v',m})]^2 B_{v'm}, \quad (3.426)$$

y por lo tanto

$$B_{vn} = \frac{2}{\pi a^2 [J_{v+1}(x_{vn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right) \sin(v\phi) V(\rho, \phi). \quad (3.427)$$

Para determinar los valores de las constantes A_{vm} , se aplica un procedimiento similar al utilizado en la determinación de B_{vm} . En este caso se multiplica la expresión (3.423) por $\cos v'\phi$, se integra en el ángulo ϕ y se utiliza la condición de ortogonalidad para las funciones $\cos v\phi$, con lo cual se puede verificar que:

$$A_{vn} = \frac{2}{\pi a^2 [J_{v+1}(x_{vn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_v\left(\frac{x_{vn}}{a}\rho\right) \cos(v\phi) V(\rho, \phi). \quad (3.428)$$

Las expresiones dadas por (3.428) y (3.427) determinan completamente la solución buscada y definida por (3.419).

3.5 Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

En esta sección se presenta un resumen del procedimiento para encontrar las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , la cual se expresa como:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.429)$$

A continuación, se procede a implementar el procedimiento correspondiente para alcanzar el objetivo planteado. Para ello, se considera que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi), \quad (3.430)$$

de manera que la ecuación de Laplace en estudio puede reescribirse como:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.431)$$

Aplicando el método de separación de variables, se considera una solución de la forma:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} Y(\theta, \phi). \quad (3.432)$$

De este modo, la ecuación (3.432) se presenta como:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{Y(\theta, \phi)}{r} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{U(r)}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{U(r)}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = 0.$$

Este resultado se puede reorganizar en la forma:

$$\frac{r^2}{U(r)} \frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2} = -\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi). \quad (3.433)$$

Ahora, el operador de rotación al cuadrado ($\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv |-\vec{r} \times \vec{\nabla}|^2$), en coordenadas esféricas, viene dado por:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (3.434)$$

Con lo cual la ecuación (3.433) se puede escribir como:

$$\frac{r^2}{U(r)} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} = \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \hat{\mathbf{L}}^2 Y(\theta, \phi). \quad (3.435)$$

La identidad anterior debe ser válida para todos los valores de (r, θ, ϕ) . Dado que el lado izquierdo de (3.435) depende únicamente de la coordenada r y el lado derecho de las coordenadas θ y ϕ , la igualdad se cumple solo si cada lado de la ecuación es igual a una constante, que por conveniencia se elige como $l(l+1)$. Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{U(r)} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} &= l(l+1), \\ \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \hat{\mathbf{L}}^2 Y(\theta, \phi) &= l(l+1), \end{aligned} \quad (3.436)$$

de tal manera que

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) = 0, \quad (3.437)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y(\theta, \phi) = l(l+1) Y(\theta, \phi). \quad (3.438)$$

La elección de la constante como $l(l+1)$ es conveniente para abordar problemas que presentan simetría esférica. Para resolver la ecuación radial, la cual es homogénea en r , se propone una solución de la forma:

$$U(r) = r^a. \quad (3.439)$$

De este modo, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) = a(a-1)r^{a-2} - \frac{l(l+1)}{r^2} r^a \\ &= [a(a-1) - l(l+1)] r^{a-2} = [a^2 - a - l(l+1)] r^{a-2} \\ &= (a+l)[a - (l+1)] r^{a-2}. \end{aligned} \quad (3.440)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$(a+l)[a - (l+1)] = 0. \quad (3.441)$$

Así, para $l \geq 0$, la solución de la ecuación radial es de la forma:

$$U(r) = Ar^{-l} + Br^{l+1}. \quad (3.442)$$

Ahora, la ecuación angular, dada por (3.438), se puede reescribir como:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) + l(l+1)Y(\theta, \phi) = 0. \quad (3.443)$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior, se considera una solución de la forma:

$$Y(\theta, \phi) = P(\theta)\Phi(\phi). \quad (3.444)$$

Así, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) + l(l+1)Y(\theta, \phi) \\ &= \frac{\Phi(\phi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{P(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + l(l+1)P(\theta)\Phi(\phi). \end{aligned} \quad (3.445)$$

Esto se puede reescribir como:

$$\frac{\sin \theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1)\sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2}. \quad (3.446)$$

La igualdad anterior solo puede cumplirse si cada lado de la ecuación es igual a una constante, que se elige como m^2 para garantizar una solución periódica en la coordenada ϕ (es decir, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$). Por lo tanto, se establece que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1)\sin^2 \theta &= m^2, \\ -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} &= m^2. \end{aligned} \quad (3.447)$$

La ecuación (3.447) presenta soluciones de la forma:

$$\Phi(\phi) \sim e^{\pm im\phi} \quad \text{si} \quad m \neq 0, \quad (3.448)$$

o

$$\Phi(\phi) = a\phi + b \quad \text{si} \quad m = 0. \quad (3.449)$$

Sin embargo, la solución (3.449) no es periódica en ϕ , por lo que solo tendría sentido físico si $a = 0$. Esto implica que $\Phi(\phi) = b = \text{constante}$; en otras palabras, si $m = 0$, la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es independiente de la coordenada ϕ .

Para resolver la ecuación (3.447), se realiza el cambio de variable $x = \cos \theta$, lo que permite expresar la ecuación (3.447) como:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0. \quad (3.450)$$

La expresión (3.450) se conoce como la *ecuación asociada de Legendre*. A partir de ella, se deduce la *ecuación de Legendre* cuando $m = 0$, que se presenta de la siguiente manera:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + l(l+1)P(x) = 0. \quad (3.451)$$

La solución de la ecuación (3.451), proveniente del método de Frobenius, establece lo siguiente:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}. \quad (3.452)$$

Al sustituir (3.452) en la ecuación diferencial (3.451), es posible demostrar que α solo puede tomar dos valores: 0 y 1. En ambos casos, la serie converge para $x^2 < 1$ y diverge si $x = \pm 1$. Para garantizar la convergencia en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, la solución obtenida mediante el método de Frobenius debe truncarse, convirtiéndose así en un polinomio para $l = 0$ o $l \in \mathbb{Z}$. Los polinomios resultantes se normalizan a uno en $x = 1$ y se conocen como *polinomios de Legendre*. Estos se expresan de forma compacta mediante la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (3.453)$$

Los polinomios de Legendre $\{P_l(x)\}$ constituyen un conjunto ortogonal y completo en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, satisfaciendo las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) &= \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}, \\ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) P_l(x') &= \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (3.454)$$

Siendo que $x = \cos \theta$, la condición de ortogonalidad de los polinomios se expresa de la siguiente manera:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}. \quad (3.455)$$

Los polinomios de Legendre constituyen un conjunto completo en el intervalo $(-1, 1)$, por tanto, cualquier función regular $f(x)$ en este intervalo puede expandirse en términos de la base $\{P_l(x)\}$, de tal manera que:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x), \quad (3.456)$$

donde

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) P_l(x). \quad (3.457)$$

La solución de la ecuación de Laplace en el caso $m = 0$, es independiente de la variable ϕ y se expresa como:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} Y(\theta) = \frac{U(r)}{r} P(\theta), \quad (3.458)$$

es decir:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{1}{r} (Ar^{-l} + Br^{l+1}) P_l(x) \\ &= (Ar^{-l-1} + Br^l) P_l(x). \end{aligned} \quad (3.459)$$

Por lo tanto, para cada valor de l se obtiene una solución, lo que implica que la solución más general es:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(x). \quad (3.460)$$

Este tipo de soluciones caracterizará problemas que poseen simetría azimutal, es decir, aquellos que no dependen de la variable ϕ . Las constantes (A_l, B_l) serán determinadas por las condiciones de frontera que caracterizan cada problema particular.

Ejercicio 3.15 Probar la relación (3.434).

Ejercicio 3.16 Probar que con el cambio de variable $x = \cos \theta$, la expresión (3.447) toma la forma de (3.450).

Ejercicio 3.17 Utilizando la relación de ortonormalización de los polinomios de Legendre (3.454), mostrar la relación (3.457). Deducir la relación de completud de los polinomios de Legendre (3.454).

Ejemplo 3.12

Se considera una esfera de radio R sometida a un potencial V_0 en su superficie. El objetivo es calcular el potencial dentro y fuera de esta esfera.

Solución: Este problema presenta una clara simetría esférica, por lo que se utilizará la solución descrita por la ecuación (3.460):

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \quad (3.461)$$

Inicialmente, se analiza el caso cuando $r < R$, es decir, en el interior de la esfera. Debido a que el punto $r = 0$ forma parte del dominio de la solución, el potencial presentará una divergencia en $r = 0$, lo que no es permitido. Por lo tanto, se concluye que los coeficientes A_l deben ser cero para garantizar un potencial finito. Así, la solución en el interior de la esfera se simplifica a:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (3.462)$$

La condición de frontera en $r = R$ implica que:

$$\varphi(R, \theta) = V_0 = \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l P_l(\cos \theta). \quad (3.463)$$

Utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, dada por:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}, \quad (3.464)$$

es posible determinar el valor de la constante B_l , tal que:

$$\begin{aligned} V_0 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \\ &= B_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1}. \end{aligned} \quad (3.465)$$

De esta manera se obtiene que:

$$B_l = \frac{(2l+1)V_0}{2R^l} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta). \quad (3.466)$$

Teniendo en cuenta que el primer polinomio de Legendre es:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad (3.467)$$

se puede establecer que:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{(2l+1)V_0}{2R^l} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{0,l}} \\ &= \frac{V_0}{R^l} \delta_{0,l} = \frac{V_0}{R^0} \delta_{0,l} \\ &= V_0 \delta_{0,l}. \end{aligned} \quad (3.468)$$

Por lo tanto, el potencial dentro de la esfera, considerando la condición de frontera, se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (V_0 \delta_{0,l}) r^l P_l(\cos \theta) \\
 &= V_0 \sum_{l=0}^{\infty} \delta_{0,l} r^l P_l(\cos \theta) \\
 &= V_0 r^0 \underbrace{P_0(\cos \theta)}_1.
 \end{aligned} \tag{3.469}$$

Es decir,

$$\varphi(r, \theta) = V_0. \tag{3.470}$$

Ahora, como el campo eléctrico es el gradiente del potencial, el campo eléctrico dentro de la esfera es nulo.

A continuación, se analiza el potencial fuera de la esfera ($r > R$). La solución se expresa como:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \tag{3.471}$$

Esta solución incluye el límite cuando $r \rightarrow \infty$. En este caso, si se desea un comportamiento adecuado del potencial en $r \rightarrow \infty$, es necesario que $B_l = 0$. Por lo tanto, la solución toma la forma:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \tag{3.472}$$

Nuevamente, las constantes A_l se determinan a partir de la condición de frontera:

$$\varphi(R, \theta) = V_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta). \tag{3.473}$$

Haciendo uso de la condición de ortonormalización de los polinomios de Legendre, resulta que:

$$\begin{aligned}
 V_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{R^{l+1}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{R^{l+1}} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \\
 &= \frac{A_{l'}}{R^{l'+1}} \frac{2}{2l'+1}.
 \end{aligned} \tag{3.474}$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 A_l &= \frac{(2l+1)R^{l+1}V_0}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) \\
 &= \frac{(2l+1)R^{l+1}V_0}{2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{l,0}} \\
 &= \frac{(2l+1)R^{l+1}V_0}{2} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,0} = RV_0 \delta_{l,0}.
 \end{aligned} \tag{3.475}$$

Con lo cual el potencial fuera de la esfera es de la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} (RV_0 \delta_{l,0}) P_l(\cos \theta) \\
 &= RV_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \delta_{l,0} P_l(\cos \theta) \\
 &= RV_0 \frac{1}{r} \underbrace{P_0(\cos \theta)}_1,
 \end{aligned} \tag{3.476}$$

es decir,

$$\varphi(r, \theta) = \frac{RV_0}{r}, \tag{3.477}$$

que es equivalente al potencial generado por una carga puntual localizada en el origen. Se debe interpretar $RV_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$, donde q es la carga almacenada en la superficie del cascarón de radio R .

Ejemplo 3.13

En este ejemplo se evalúa el potencial eléctrico tanto en el interior como en el exterior de una esfera de radio a , teniendo en cuenta que $\varphi(a, \theta, \phi) = V(\theta)$.

Solución: La condición de frontera establecida sugiere una solución con simetría azimutal, lo que implica que la solución será de la forma $\varphi(r, \theta)$. Al analizar la región interior de la esfera, y para evitar que el potencial presente un comportamiento divergente cuando $r \rightarrow 0$ en la ecuación (3.460), se debe tomar $A_l = 0$. Por lo tanto, la expresión para el potencial en el interior es:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (3.478)$$

Las constantes B_l se determinan a partir de la condición de frontera, tal que:

$$\varphi(a, \theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^l P_l(\cos \theta). \quad (3.479)$$

Utilizando la condición de normalización de los polinomios de Legendre (3.455), se tiene:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}. \quad (3.480)$$

Por lo tanto, al aplicar la condición de ortogonalidad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) V(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^l \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^l \left(\frac{2}{2l+1} \right) \delta_{l,l'} \\ &= B_{l'} a^{l'} \left(\frac{2}{2l'+1} \right). \end{aligned} \quad (3.481)$$

De esto se deduce que:

$$B_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta). \quad (3.482)$$

Así, el potencial en el interior de la esfera se expresa como:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta) \left[\frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' P_l(\cos \theta') V(\theta') \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{r}{a} \right)^l \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') V(\theta'). \end{aligned} \quad (3.483)$$

Ahora, si se considera el potencial fuera de la esfera, se debe escoger $B_l = 0$ en la solución. Esto garantiza que $\varphi(r, \theta)$ sea finito cuando $r \rightarrow \infty$; así, fuera de la esfera, el potencial debe ser de la forma:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (3.484)$$

La constante A_l se determina nuevamente a partir de la condición de frontera:

$$\varphi(a, \theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (3.485)$$

Aplicando la condición de ortogonalidad para los polinomios de Legendre, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) V(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{a^{l+1}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{a^{l+1}} \left(\frac{2}{2l+1} \right) \delta_{l,l'} \\ &= \frac{A_{l'}}{a^{l'+1}} \left(\frac{2}{2l'+1} \right). \end{aligned} \quad (3.486)$$

Por lo tanto, se establece que:

$$A_l = \left(\frac{2l+1}{2} \right) a^{l+1} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta). \quad (3.487)$$

Entonces, el potencial fuera de la esfera se expresa como:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \left[\left(\frac{2l+1}{2} \right) a^{l+1} \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' P_l(\cos \theta') V(\theta') \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' P_l(\cos \theta') V(\theta'). \end{aligned} \quad (3.488)$$

Como caso particular, se considera el potencial $V(\theta)$ definido como:

$$V(\theta) = \begin{cases} V & \text{si } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (3.489)$$

La solución del potencial en el interior se establece al encontrar los valores para B_l , que en este caso están dados por:

$$\begin{aligned}
B_l &= \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta) \\
&= \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) (V) + \frac{2l+1}{2a^l} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) (-V) \\
&= \frac{2l+1}{2a^l} V \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) - \frac{2l+1}{2a^l} V \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta). \quad (3.490)
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $x = \cos \theta$, se puede expresar la relación para B_l en la forma:

$$\begin{aligned}
B_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \int_1^0 (-dx) P_l(x) - \frac{2l+1}{2a^l} V \int_0^{-1} (-dx) P_l(x) \\
&= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[\int_0^1 dx P_l(x) - \int_{-1}^0 dx P_l(x) \right]. \quad (3.491)
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad (3.492)$$

es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
P_l(-x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(-x)^l} [(-x)^2 - 1]^l = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \\
&= (-1)^l P_l(x), \quad (3.493)
\end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
B_l &= \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left[\int_0^1 dx P_l(x) - \underbrace{\int_{-1}^0 dx P_l(x)}_{x \rightarrow -x} \right] \\
&= \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left[\int_0^1 dx P_l(x) - \int_1^0 (-dx) P_l(-x) \right] \\
&= \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left[\int_0^1 dx P_l(x) - \int_0^1 dx \underbrace{P_l(-x)}_{(-1)^l P_l(x)} \right] \\
&= \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left[\int_0^1 dx P_l(x) - (-1)^l \int_0^1 dx P_l(x) \right] \\
&= \frac{(2l+1)V}{2a^l} [1 - (-1)^l] \int_0^1 dx P_l(x). \quad (3.494)
\end{aligned}$$

Esta relación indica que:

$$\begin{aligned} B_l &= 0 \quad \text{si } l = \text{par}, \\ B_l &= \frac{(2l+1)V}{a^l} \int_0^1 dx P_l(x) \quad \text{si } l = \text{impar}. \end{aligned} \quad (3.495)$$

Para evaluar la integral, se utiliza la siguiente fórmula de recurrencia de los polinomios de Legendre:

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} - (2l+1)P_l(x) = 0, \quad (3.496)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{(2l+1)} \left[\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} \right] \\ &= \frac{1}{(2l+1)} \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]. \end{aligned} \quad (3.497)$$

Entonces, para valores de l impares, se cumple que:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{(2l+1)V}{a^l} \int_0^1 dx P_l(x) \\ &= \frac{(2l+1)V}{a^l} \int_0^1 dx \frac{1}{(2l+1)} \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] \\ &= \frac{V}{a^l} \int_0^1 dx \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] \\ &= \frac{V}{a^l} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1 \\ &= \frac{V}{a^l} \{ [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1)] - [P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)] \}. \end{aligned} \quad (3.498)$$

Una de las propiedades de los polinomios de Legendre establece que:

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l, \quad (3.499)$$

con lo cual: $P_{l\pm 1}(1) = (1)^{l\pm 1}$, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{V}{a^l} \{ -[P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)] \} \\ &= \frac{V}{a^l} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]. \end{aligned} \quad (3.500)$$

Así, el potencial en el interior de la esfera se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, \theta) &= \sum_{\substack{l=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) \\
 &= \sum_{\substack{l=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} r^l P_l(x) \left[\frac{V}{a^l} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \right] \\
 &= V \sum_{\substack{l=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^l P_l(x) [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)].
 \end{aligned} \tag{3.501}$$

Ejemplo 3.14

En este ejemplo se considera un cascarón esférico de radio R , el cual posee una densidad de carga superficial $\sigma(\theta)$. El objetivo es calcular el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera.

Solución: Ya que la condición de frontera no depende de la coordenada ϕ , la solución será independiente de dicha coordenada y, por lo tanto, la solución más general será:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \tag{3.502}$$

Entonces, el potencial en el interior y exterior se expresa de la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{in}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta), \\
 \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_l}{r^{l+1}} + D_l r^l \right) P_l(\cos \theta).
 \end{aligned} \tag{3.503}$$

Para garantizar un potencial finito en $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$, se deben tomar $A_l = 0$ y $D_l = 0$, con lo cual,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{in}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta), \\
 \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).
 \end{aligned} \tag{3.504}$$

Las condiciones de frontera en $r = R$ establecen la continuidad del potencial, con lo cual se debe cumplir que:

$$\varphi_{in}(R, \theta) = \varphi_{out}(R, \theta), \tag{3.505}$$

es decir,

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (3.506)$$

entonces,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[B_l R^l - \frac{C_l}{R^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta) = 0. \quad (3.507)$$

Siendo los polinomios de Legendre linealmente independientes, se tiene que:

$$B_l R^l - \frac{C_l}{R^{l+1}} = 0. \quad (3.508)$$

Con lo cual se puede deducir,

$$B_l = \frac{C_l}{R^{2l+1}}. \quad (3.509)$$

Así, el potencial dentro y fuera de la esfera se expresa como,

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{R^{2l+1}} r^l P_l(\cos \theta), \\ \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.510)$$

Otra condición de frontera implica que:

$$[\mathbf{E}_2(\vec{r}) - \mathbf{E}_1(\vec{r})]_S \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.511)$$

Ahora, como $\mathbf{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$, la anterior relación se puede expresar como,

$$\left\{ -[\vec{\nabla} \varphi_2(\vec{r})] - [-\vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r})] \right\}_S \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (3.512)$$

es decir,

$$[\vec{\nabla} \varphi_2(\vec{r})]_S \cdot \hat{n} - [\vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r})]_S \cdot \hat{n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (3.513)$$

donde $\hat{n}$ se entiende como un vector normal a la superficie. Siendo la frontera una esfera, se tiene que $\hat{n} = \hat{r}$. Identificando $\varphi_2 = \varphi_{out}$ y $\varphi_1 = \varphi_{in}$, resulta,

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} &= [\vec{\nabla} \varphi_2(\vec{r})]_S \cdot \hat{n} - [\vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r})]_S \cdot \hat{n} \\ &= [\vec{\nabla} \varphi_2(\vec{r})]_S \cdot \hat{r} - [\vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r})]_S \cdot \hat{r} \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_{out}(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{in}(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=R}. \end{aligned} \quad (3.514)$$

donde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{in}(r, \theta)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{R^{2l+1}} r^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l C_l}{R^{2l+1}} r^{l-1} P_l(\cos \theta), \\ \frac{\partial \varphi_{out}(r, \theta)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{C_l}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta),\end{aligned}\quad (3.515)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= -\epsilon_0 \left[\frac{\partial \varphi_{out}(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{in}(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=R} \\ &= -\epsilon_0 \left[- \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{C_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l C_l}{R^{2l+1}} R^{l-1} P_l(\cos \theta) \right] \\ &= \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(l+1)}{R^{l+2}} + \frac{l}{R^{2l+1}} R^{l-1} \right] C_l P_l(\cos \theta) \\ &= \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1) + l] \frac{C_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta),\end{aligned}\quad (3.516)$$

es decir,

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{C_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta). \quad (3.517)$$

Utilizando la condición de ortonormalización de los polinomios de Legendre,

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}, \quad (3.518)$$

se determina que,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) \sigma(\theta) &= \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{C_l}{R^{l+2}} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \\ &= \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{C_l}{R^{l+2}} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \\ &= \epsilon_0 (2l') \frac{C_{l'}}{R^{l'+2}} \frac{2}{2l'+1} \\ &= 2\epsilon_0 \frac{C_{l'}}{R^{l'+2}},\end{aligned}\quad (3.519)$$

por lo tanto,

$$C_l = \frac{R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) \sigma(\theta). \quad (3.520)$$

Como caso particular, se considera una densidad superficial de carga dada por:

$$\sigma(\theta) = \kappa \cos \theta, \quad (3.521)$$

donde κ es una constante. Utilizando la representación de los polinomios de Legendre se determina,

$$\sigma(\theta) = \kappa \cos \theta = \kappa P_1(\cos \theta), \quad (3.522)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) \kappa P_1(\cos \theta) \\ &= \frac{\kappa R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_1(\cos \theta) \\ &= \frac{\kappa R^{l+2}}{2\epsilon_0} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,1} \\ &= \frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} \delta_{l,1}. \end{aligned} \quad (3.523)$$

Entonces, el potencial dentro y fuera de la esfera será:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{R^{2l+1}} r^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{2l+1}} r^l P_l(\cos \theta) \left[\frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} \delta_{l,1} \right] \\ &= \frac{1}{R^3} r P_1(\cos \theta) \frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} = \frac{\kappa}{3\epsilon_0} r \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.524)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \left[\frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} \delta_{l,1} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} = \frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.525)$$

En conclusión:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(r, \theta) &= \frac{\kappa}{3\epsilon_0} r \cos \theta, \\ \varphi_{out}(r, \theta) &= \frac{\kappa R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.526)$$

Ejercicio 3.18 Considerar la configuración del ejemplo (3.13) y calcular el potencial en el exterior de la esfera.

Ejercicio 3.19 Encontrar el potencial en el interior de un par de cascarones esféricos concéntricos de radios a y b ($a < b$), tales que el sistema satisface las siguientes condiciones de frontera:

- En el cascarón exterior se cumple: $\varphi(b, \theta) = V_0$
- En el cascarón interior: $\varphi(a, \theta) = V$

3.5.1 Armónicos Esféricos

A continuación, se analiza la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para el caso $m \neq 0$. En este contexto, es necesario considerar la ecuación asociada de Legendre,

$$(1-x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0, \quad (3.527)$$

donde la solución, conocida como *función asociada de Legendre* $P_l^m(x)$, se puede expresar en términos de las funciones de Legendre $P_l(x)$ mediante la siguiente expresión:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (3.528)$$

la cual posee la siguiente propiedad de simetría:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (3.529)$$

Las funciones $P_l^m(x)$ constituyen un conjunto ortonormal y completo en el índice l para el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. La condición de ortogonalización se define mediante la relación:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}. \quad (3.530)$$

La solución de la ecuación diferencial asociada a ϕ ,

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (3.531)$$

para el caso $m \neq 0$, es de la forma:

$$\Phi(\phi) \sim e^{\pm im\phi}, \quad (3.532)$$

la cual constituye un conjunto ortogonal en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Es posible combinar las funciones P_l^m y $e^{im\phi}$ para $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, etc, y $m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l$, y formar la función:

$$Y(\theta, \phi) = P(\theta) \Phi(\phi) \rightarrow Y_{l,m}(\theta, \phi) = A_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (3.533)$$

donde las constantes $A_{l,m}$ son constantes de normalización. Las funciones $Y_{l,m}$ se denominan *armónicos esféricos* y son solución de la ecuación diferencial

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) + l(l+1) Y(\theta, \phi) = 0. \quad (3.534)$$

Las funciones $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ constituyan un conjunto ortonormal que satisface la relación:

$$\int d\Omega Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (3.535)$$

Se puede demostrar que bajo la normalización dada por (3.535), el conjunto de funciones ortonormales $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ se expresa como:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (3.536)$$

La relación de completitud asociada a esta base se expresa como:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi'). \quad (3.537)$$

Dado que el conjunto $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ es completo, una función arbitraria $f(\theta, \phi)$ se puede expandir en términos de armónicos esféricos como:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (3.538)$$

donde los coeficientes de expansión $B_{l,m}$ son dados por,

$$B_{l,m} = \int d\Omega f(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta, \phi). \quad (3.539)$$

En términos de los armónicos esféricos, la solución de la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{r^{l+1}} + B_{l,m} r^l \right) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.540)$$

Las constantes $A_{l,m}$ y $B_{l,m}$ se derivan de las condiciones de frontera para cada problema en particular, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.15

En este ejemplo se evaluará el potencial entre un par de cascarones esféricos concéntricos de radios a y b con $a < b$ y a potenciales $V_1(\theta, \phi)$ y $V_2(\theta, \phi)$, respectivamente. Adicionalmente, se analizará el caso en el cual $V_1(\theta, \phi) = -V_0$ y $V_2(\theta, \phi) = V_0$.

Solución: En este escenario, se parte de la solución inicial:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{r^{l+1}} + B_{l,m} r^l \right) Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (3.541)$$

donde las condiciones de frontera determinarán los valores de las constantes $A_{l,m}$ y $B_{l,m}$ de

la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\varphi(a, \theta, \phi) &= V_1(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{a^{l+1}} + B_{l,m} a^l \right) Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ \varphi(b, \theta, \phi) &= V_2(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{b^{l+1}} + B_{l,m} b^l \right) Y_{l,m}(\theta, \phi).\end{aligned}\quad (3.542)$$

Aplicando las condiciones de completitud:

$$\int d\Omega Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (3.543)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\int d\Omega Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{a^{l+1}} + B_{l,m} a^l \right) \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = \frac{A_{l',m'}}{a^{l'+1}} + B_{l',m'} a^{l'}, \\ \int d\Omega Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) V_2(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{b^{l+1}} + B_{l,m} b^l \right) \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = \frac{A_{l',m'}}{b^{l'+1}} + B_{l',m'} b^{l'}.\end{aligned}\quad (3.544)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi) &= \frac{A_{l,m}}{a^{l+1}} + B_{l,m} a^l, \\ \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_2(\theta, \phi) &= \frac{A_{l,m}}{b^{l+1}} + B_{l,m} b^l.\end{aligned}\quad (3.545)$$

De la primera relación se deduce que:

$$B_{l,m} = \frac{1}{a^l} \left[\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi) - \frac{A_{l,m}}{a^{l+1}} \right], \quad (3.546)$$

que en la segunda ecuación implica:

$$\begin{aligned}\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_2(\theta, \phi) &= \frac{A_{l,m}}{b^{l+1}} + B_{l,m} b^l \\ &= \frac{A_{l,m}}{b^{l+1}} + \frac{1}{a^l} \left[\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi) - \frac{A_{l,m}}{a^{l+1}} \right] b^l \\ &= \left(\frac{1}{b^{l+1}} - \frac{b^l}{a^{2l+1}} \right) A_{l,m} + \frac{b^l}{a^l} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi).\end{aligned}\quad (3.547)$$

Entonces:

$$b^l \left(\frac{1}{b^{2l+1}} - \frac{1}{a^{2l+1}} \right) A_{l,m} = \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[V_2(\theta, \phi) - \frac{b^l}{a^l} V_1(\theta, \phi) \right]. \quad (3.548)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_{l,m} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{b^{2l+1}} - \frac{1}{a^{2l+1}}\right)} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[\frac{1}{b^l} V_2(\theta, \phi) - \frac{1}{a^l} V_1(\theta, \phi) \right] \\ &= \frac{(ab)^{2l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[\frac{1}{a^l} V_1(\theta, \phi) - \frac{1}{b^l} V_2(\theta, \phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.549)$$

Reemplazando el valor obtenido de $A_{l,m}$ en (3.546), se tiene que:

$$\begin{aligned} B_{l,m} &= \frac{1}{a^l} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) V_1(\theta, \phi) - \frac{A_{l,m}}{a^{2l+1}} \\ &= \frac{1}{a^l} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[V_1(\theta, \phi) - \frac{b^{2l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \left(V_1(\theta, \phi) + \frac{a^l}{b^l} V_2(\theta, \phi) \right) \right] \\ &= \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left(\frac{b^{l+1} V_2(\theta, \phi) - a^{l+1} V_1(\theta, \phi)}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \right). \end{aligned} \quad (3.550)$$

Para el caso particular en el cual

$$V_1(\theta, \phi) = -V_0, \quad y \quad (3.551)$$

$$V_2(\theta, \phi) = V_0, \quad (3.552)$$

resulta:

$$\begin{aligned} A_{l,m} &= \frac{(ab)^{2l+1}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[\frac{-V_0}{a^l} - \frac{V_0}{b^l} \right] \\ &= \frac{(ab)^{2l+1} V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \left(-\frac{1}{a^l} - \frac{1}{b^l} \right) \left[\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) 1 \right] \\ &= -\sqrt{4\pi} \frac{(ab)^{2l+1} V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \left(\frac{1}{a^l} + \frac{1}{b^l} \right) \delta_{l,0} \delta_{m,0}. \end{aligned} \quad (3.553)$$

Esto significa que:

$$A_{l,m} = -2\sqrt{4\pi} \frac{abV_0}{b-a} \delta_{l,0} \delta_{m,0}. \quad (3.554)$$

La constante $B_{l,m}$ será:

$$\begin{aligned} B_{l,m} &= \frac{1}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \left[\underbrace{b^{l+1} V_2(\theta, \phi)}_{V_0} - a^{l+1} \underbrace{V_1(\theta, \phi)}_{-V_0} \right] \\ &= \frac{V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) (b^{l+1} + a^{l+1}). \end{aligned} \quad (3.555)$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{4\pi}Y_{0,0}(\theta, \phi) = 1$, la relación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 B_{l,m} &= \frac{V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} (b^{l+1} + a^{l+1}) \left[\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \underbrace{1}_{\sqrt{4\pi}Y_{0,0}(\theta, \phi)} \right] \\
 &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} (b^{l+1} + a^{l+1}) \left[\underbrace{\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{0,0}(\theta, \phi)}_{\delta_{l,0}\delta_{m,0}} \right] \\
 &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} (b^{l+1} + a^{l+1}) \delta_{l,0}\delta_{m,0} \\
 &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b-a} (b+a) \delta_{l,0}\delta_{m,0}.
 \end{aligned} \tag{3.556}$$

De manera que el potencial entre los cascarones es:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{A_{l,m}}{r^{l+1}} + B_{l,m} r^l \right) Y_{l,m}(\theta, \phi) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \left[\frac{1}{r^{l+1}} \left(-2\sqrt{4\pi} \frac{abV_0}{b-a} \right) + \left(\sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b-a} (b+a) \right) r^l \right] \delta_{l,0}\delta_{m,0} \\
 &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b-a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[-2ab \frac{1}{r^{l+1}} + (b+a) r^l \right] Y_{l,m}(\theta, \phi) \delta_{l,0}\delta_{m,0} \\
 &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b-a} \left[-2ab \frac{1}{r} + (b+a) r^0 \right] Y_{0,0}(\theta, \phi).
 \end{aligned} \tag{3.557}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 \varphi(r, \theta, \phi) &= \sqrt{4\pi} \frac{V_0}{b-a} \left[-2ab \frac{1}{r} + (b+a) \right] \underbrace{Y_{0,0}(\theta, \phi)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} \\
 &= \frac{V_0}{b-a} \left[-2ab \frac{1}{r} + (b+a) \right].
 \end{aligned} \tag{3.558}$$

Por lo tanto, el potencial entre el par de cascarones es:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{V_0}{b-a} \left(-2ab \frac{1}{r} + b+a \right). \tag{3.559}$$

Una manera de corroborar este resultado es partir del hecho de que el campo eléctrico entre el par de cascarones es dado por:

$$\mathbf{E}(r) = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \tag{3.560}$$

el cual se puede derivar a partir de la ley de Gauss, y donde se asume que Q es la carga almacenada en el cascarón interior. La diferencia de potencial entre dos puntos dentro del cascarón es:

$$\begin{aligned}\varphi_B - \varphi_A &= - \int_A^B \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_A^B \left[k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right] \cdot d\mathbf{l} = -kQ \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -kQ \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = kQ \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right),\end{aligned}\quad (3.561)$$

entonces,

$$\varphi_B - \varphi_A = kQ \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (3.562)$$

Si $r_A = a$ y $r_B = r$ es un punto entre los cascarones y $\varphi_A = -V_0$, se deduce que:

$$\varphi(r) + V_0 = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (3.563)$$

es decir,

$$\varphi(r) = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - V_0. \quad (3.564)$$

Con el fin de calcular la carga Q , se tiene en cuenta que $\varphi(b) = V_0$, de manera que:

$$\varphi(b) = V_0 = kQ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) - V_0, \quad (3.565)$$

con lo cual

$$Q = \frac{2V_0}{k} \frac{1}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{2V_0}{k} \frac{ab}{(a-b)}, \quad (3.566)$$

por tanto,

$$\begin{aligned}V(r) &= k \left[\frac{2V_0}{k} \frac{ab}{(a-b)} \right] \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - V_0 \\ &= \frac{V_0}{(a-b)} \left[2ab \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - (a-b) \right] \\ &= -\frac{V_0}{(b-a)} \left(\frac{2ab}{r} - 2b - a + b \right) \\ &= \frac{V_0}{(b-a)} \left(-\frac{2ab}{r} + b + a \right),\end{aligned}\quad (3.567)$$

lo que comprueba el resultado derivado a partir de la ecuación de Laplace.

Ejercicio 3.20 Evaluar el potencial electrostático en el interior y exterior de un cascarón esférico de radio R a potencial $V(\theta, \phi)$. Mostrar que en el caso particular $V(\theta, \phi) = V_0 = cte$ se cumple:

- En el interior del cascarón:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = V_0. \quad (3.568)$$

- En el exterior:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{V_0 R}{r}. \quad (3.569)$$

4 — Campo eléctrico en materiales

La materia está constituida de átomos, que en general, poseen igual cantidad de cargas positivas y negativas. De acuerdo a sus propiedades eléctricas, la materia se puede considerar conductora o no conductora: los materiales conductores se distinguen por tener cargas libres que se mueven bajo la influencia de un campo eléctrico. Los materiales que no son buenos conductores se denominan materiales dieléctricos y no poseen cargas libres que puedan moverse fácilmente por el material. Sin embargo, estos también son afectados por la presencia de un campo eléctrico.

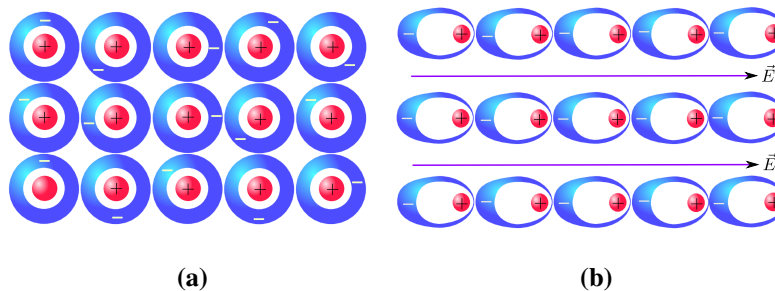


Figura 4.1: a) Material dieléctrico en ausencia de campo eléctrico. b) Material dieléctrico en presencia de campo eléctrico.

En ausencia de campo eléctrico, las moléculas asociadas a materiales dieléctricos presentan una distribución simétrica de su carga negativa alrededor del núcleo cargado positivamente (ver figura 4.1a), lo que implica un momento dipolar nulo en la molécula. Al someter el material a un campo eléctrico, se genera una fuerza sobre cada partícula cargada. Las cargas positivas tienden a moverse en la dirección del campo, mientras que las cargas negativas se desplazan en sentido opuesto, alejándose de su posición de equilibrio. Las fuerzas internas de la molécula generan una nueva configuración de equilibrio, en la cual la distribución de carga molecular resultante difiere de su forma original simétrica. En otras palabras, los centros de las cargas positivas y negativas se desplazan entre sí, como se muestra en la figura 4.1b. Una vez alcanzada esta disposición, la

molécula adquiere un momento dipolar no nulo, inducido por el campo eléctrico. En esta situación, se dice que el material dieléctrico se ha *polarizado*.

Existen materiales cuya estructura interna hace que sus moléculas tengan una distribución de cargas positivas y negativas no simétrica; es decir, en cada molécula, las cargas positivas y negativas no comparten un mismo centro de carga, resultando así en un momento dipolar intrínseco. Estas moléculas, conocidas como *moléculas polares*, presentan un momento dipolar permanente. El agua es un ejemplo de una molécula polar, donde las cargas negativas tienden a agruparse alrededor del oxígeno, dejando al hidrógeno con carga positiva (ver figura 4.2). En ausencia de un campo eléctrico, estos momentos dipolares se orientan de manera aleatoria, de modo que el momento dipolar total del material es nulo (ver figura 4.3a).

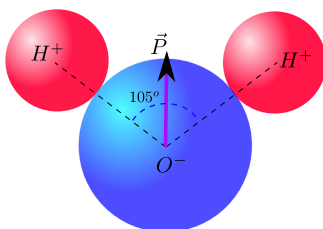


Figura 4.2: Molécula de agua.

Cuando se aplica un campo eléctrico externo a un material no polar, se ejerce un torque sobre los dipolos, lo que tiende a orientarlos en la dirección del campo (ver figura 4.3b). Sin embargo, este alineamiento puede verse afectado por efectos térmicos. A pesar de ello, una vez alcanzado el equilibrio, los dipolos permanentes, en promedio, mostrarán un cierto grado de alineación con la dirección del campo eléctrico aplicado. Como resultado, el material adquiere un momento dipolar neto en la dirección del campo, lo que indica que ha sido polarizado.

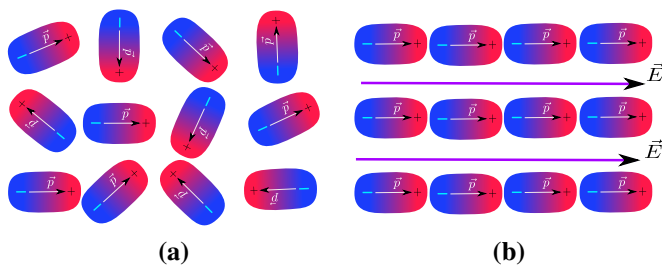


Figura 4.3: Material polar bajo la acción de un campo externo.

4.1 Polarización

Como ya se mencionó, cuando un campo eléctrico externo actúa sobre un material dieléctrico no polar, se inducen dipolos que se orientan en la dirección del campo. De manera similar, al aplicar un campo eléctrico sobre un material polar, los dipolos intrínsecos se alinean en la dirección del campo externo. En ambos casos, se dice que el material dieléctrico está polarizado, y esta polarización contribuye al campo eléctrico total dentro del medio dieléctrico.

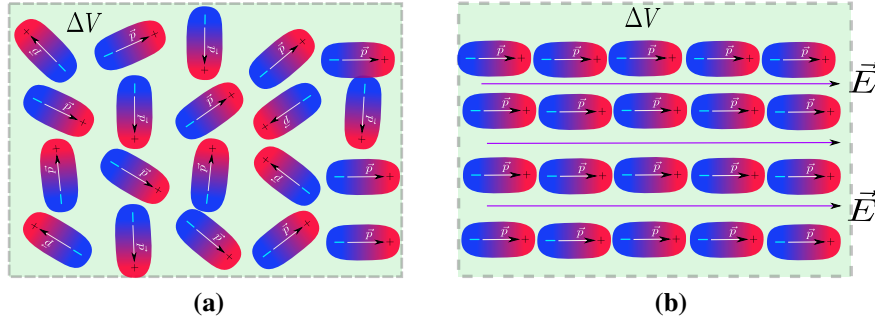


Figura 4.4: a) Volumen ΔV de material polar en ausencia de campo eléctrico. b) Volumen ΔV de material polar en presencia de campo eléctrico.

Un material dieléctrico polarizado puede ser caracterizado a través de sus momentos dipolares microscópicos, los cuales están asociados a un dipolo eléctrico $\vec{p}$. Para ello, se considera un volumen ΔV dentro del material, suficientemente pequeño como para ser considerado infinitesimal, pero suficientemente grande para contener varios momentos de dipolo microscópicos (ver figura 4.4a). Este volumen tendrá un dipolo eléctrico resultante dado por la suma de los dipolos microscópicos contenidos en el, tal que:

$$\Delta \vec{p} = \sum \Delta \vec{p}_i. \quad (4.1)$$

Sin embargo, el momento dipolar eléctrico $\Delta \vec{p}$ dependerá de la dimensión del volumen ΔV . Por tanto, para obtener una cantidad física independiente del volumen, se divide $\Delta \vec{p}$ entre ΔV y se define el vector de polarización eléctrica $\vec{P}$ en la forma:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dV}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si se considera que antes de aplicar el campo eléctrico, los dipolos eléctricos estaban orientados de manera aleatoria o no se habían inducido, entonces $\vec{P} = 0$ (material no polarizado, como se observa en la figura 4.4a). Sin embargo, cuando el campo eléctrico es aplicado, los dipolos se inducen (en caso de ser no polar) y se alinean, lo que implica que el material se polariza, es decir $\vec{P} \neq 0$ (ver figuras (4.4b)). Las unidades del vector de polarización son $\frac{C}{m^2}$. Además, se debe tener en cuenta que el límite $\Delta V \rightarrow 0$, conlleva a que el volumen se pueda caracterizar por un punto en el material, de manera que el vector de polarización será función de $\vec{r}$; es decir, $\vec{P}(\vec{r})$.

4.2 Potencial y campo eléctrico asociado a un material dieléctrico

Para calcular el potencial eléctrico generado por un material polarizado, se parte de la expresión para el potencial eléctrico asociado a un dipolo eléctrico puntual, el cual está dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.3)$$

En cada punto de un material dieléctrico, se puede establecer un momento dipolar $d\vec{p}(\vec{r}')$ asociado a un volumen dV' (ver figura 4.5). Por lo tanto, el potencial eléctrico $d\phi(\vec{r})$ evaluado en un punto del espacio definido por el vector $\vec{r}$, y generado por el momento dipolar $d\vec{p}(\vec{r}')$, estará dado por:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.4)$$

Así, el potencial total será entonces:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.5)$$

Ahora, de la ecuación (4.2), se puede establecer que:

$$d\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') dV', \quad (4.6)$$

y por lo tanto:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.7)$$

La ecuación anterior permite encontrar el potencial eléctrico de un material dieléctrico si se conoce su función de polarización $\vec{P}(\vec{r}')$.

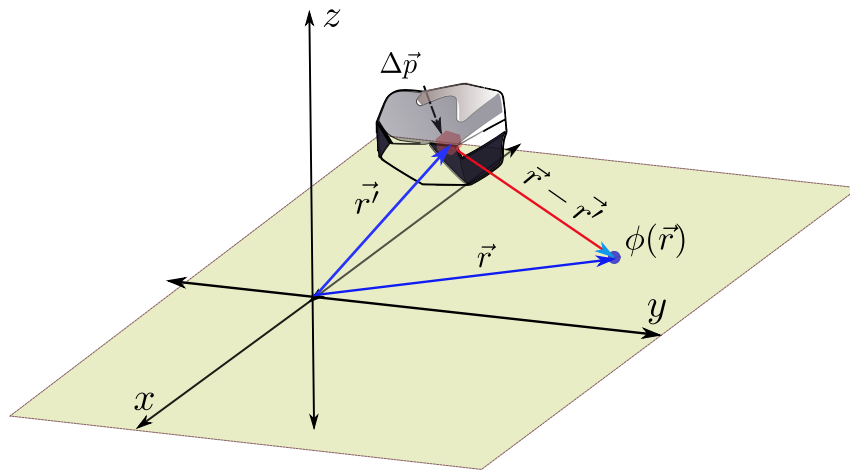


Figura 4.5: Potencial eléctrico $d\phi(\vec{r})$ asociado a dipolos eléctricos contenidos en $\Delta\vec{p}$.

La expresión (4.7) se puede reescribir para considerar una contribución al potencial eléctrico exclusivamente de la superficie del material y una contribución asociada a la polarización en el interior del material dieléctrico. Para ello, se considera la siguiente identidad:

$$\vec{\nabla}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.8)$$

Con lo anterior, es posible expresar la ecuación (4.7) en la forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (4.9)$$

Utilizando identidades de operadores vectoriales, el integrando en la expresión anterior, se puede escribir como:

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \left[\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.10)$$

con lo cual, el potencial eléctrico toma la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \left\{ \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{[-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando el teorema de Gauss, es posible transformar una de las integrales de volumen en una integral de superficie, con lo cual:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{[-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.12)$$

donde S es la superficie que limita el volumen V y $\hat{n}$ es el vector unitario normal a dicha superficie en cada punto. Con el fin de interpretar el resultado obtenido, se introduce la siguiente notación:

$$\sigma_P(\vec{r}) \equiv \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad , \quad \rho_P(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}), \quad (4.13)$$

donde $\sigma_P(\vec{r})$ y $\rho_P(\vec{r})$ tienen unidades de carga por unidad de área y carga por unidad de volumen, respectivamente. De manera que,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.14)$$

Al comparar la expresión (2.126) deducida para el potencial en el capítulo (2) con la expresión (4.14), es posible establecer que el potencial generado por un material polarizado es equivalente

al generado por una distribución de carga superficial $\sigma_P = \hat{n} \cdot \vec{P}$ más la contribución de una carga volumétrica $\rho_P(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$. Por esta razón, a σ_P y ρ_P se les denomina densidades de carga de polarización volumétrica y superficial, respectivamente. A pesar de que la interpretación de estas cantidades es el resultado de una comparación del potencial producido por un material dieléctrico polarizado con una forma de potencial general, es posible entender el origen de dichas densidades en una manera física más clara bajo las siguientes consideraciones: Si se toma un pedazo de material uniformemente polarizado, el vector de polarización $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}$, es independiente del punto. Así, se establecerán dipolos de la misma magnitud, todos alineados en la misma dirección como se muestra en la Figura 4.6. La cabeza de la flecha indica la carga positiva y la cola la carga negativa. En un pequeño volumen dentro del material (que se indica con la línea punteada) se tendrá en promedio el mismo número de cargas positivas y negativas de manera que $\rho_P(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) = 0$.

Sin embargo, esta cancelación no se dará en las superficies del material, por lo que se producirá una densidad superficial de carga del signo indicado en la Figura 4.6. Siendo que $\vec{P}$ tiene la misma orientación de los momentos dipolares eléctricos asociados a los dipolos, $\sigma_P = \hat{n} \cdot \vec{P} = +P_n$ en la cara derecha y, $\sigma_P = \hat{n} \cdot \vec{P} = -P_n$ en la cara izquierda del material.

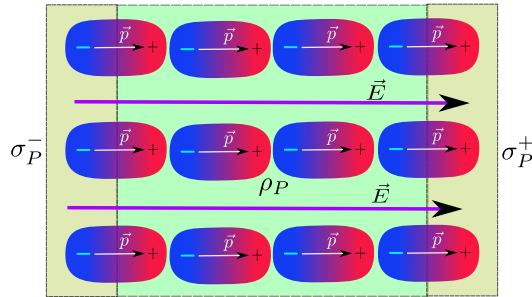


Figura 4.6: Origen de cargas superficiales de polarización en un dieléctrico polarizado uniformemente.

Ahora, si la polarización del material no es uniforme, la distribución de los dipolos se asemeja a lo indicado en la Figura 4.7. Al considerar un volumen fijo dentro del material (región sombreada)

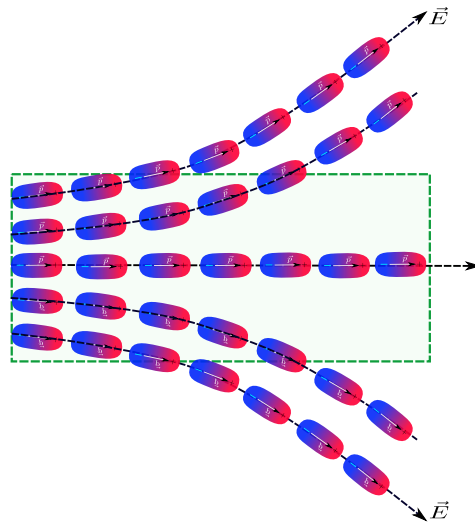


Figura 4.7: Origen de cargas volumétricas de polarización en un dieléctrico no uniformemente polarizado.

en verde), antes de que el material se polarice, este volumen contendrá muchas moléculas neutras, así que $\rho_P(\vec{r}) = 0$. Una vez que el material se polarice, algunas de las cargas habrán salido del material en cuanto otras habrán ingresado. Si la polarización no es uniforme, puede ocurrir que en el volumen termine con más cargas de un signo que del otro, por lo que habría una densidad de carga de polarización asociada a él, es decir, $\rho_P(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \neq 0$.

La polarización de un material inicialmente neutro no puede generar una carga neta en el material, por lo cual su carga neta debe seguir siendo cero a pesar de la aparición de cargas de polarización. Esto se demuestra al calcular la carga total dentro del material, tal que:

$$\begin{aligned} Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) + \int_V d^3x [-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})] \\ &= \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

ahora, utilizando el teorema de Gauss en la integral de volumen se obtiene,

$$Q_P = \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) - \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = 0. \quad (4.16)$$

Lo anterior pone en evidencia que el proceso de polarización no crea cargas de la nada, apenas ocurre la formación u orientación de dipolos microscópicos.

Para calcular el campo eléctrico, se puede hacer uso de

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \quad (4.17)$$

con lo cual se tiene que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\sigma_P(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.18)$$

Ejercicio 4.1 Probar la relación (4.18), a partir de (4.14).

Ejemplo 4.1

En este ejemplo, se considera una varilla delgada de material dieléctrico de sección transversal A , que se extiende sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$ (ver figura 4.8). La polarización de la varilla está orientada a lo largo de su longitud y se describe mediante la expresión:

$$\vec{P}(\vec{r}) = (ax^2 + b)\hat{i}. \quad (4.19)$$

A continuación, se determinará la densidad de carga de polarización asociada y se mostrará que la carga total de polarización se anula.

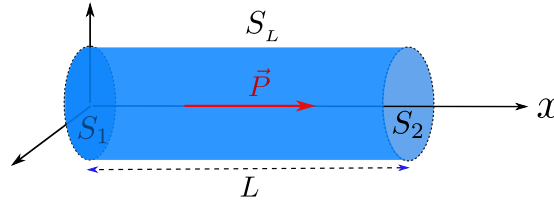


Figura 4.8: Varilla dieléctrica de longitud L y sección transversal A , con polarización $\vec{P}(\vec{r}) = (ax^2 + b)\hat{i}$.

Solución: La densidad volumétrica de polarización asociada a la varilla se calcula de la siguiente manera:

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + b) = -2ax. \quad (4.20)$$

Ahora, las densidades de polarización superficial asociadas a las superficies S_1 , S_2 y la superficie lateral S_L se determinan como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}) &= \hat{n}_1 \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_1} = (-\hat{i}) \cdot (ax^2 + b)\hat{i} \Big|_{x=0} = -b, \\ \sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}) &= \hat{n}_2 \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_2} = \hat{i} \cdot (ax^2 + b)\hat{i} \Big|_{x=L} = aL^2 + b, \\ \sigma_{P_{S_L}}(\vec{r}) &= \hat{n}_L \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_L} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A continuación, la carga total de polarización se calcula como:

$$\begin{aligned} Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_{S_1} da' \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}') + \int_{S_2} da \sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}') + \int_{S_L} da \sigma_{P_{S_L}}(\vec{r}') \\ &\quad + \int_V d^3x' \rho_P(\vec{r}') \\ &= \int da' (-b) + \int da' (aL^2 + b) + \int_V d^3x (-2ax) \\ &= -b \underbrace{\int da'}_A + (aL^2 + b) \underbrace{\int da'}_A - 2a \int_0^L dx' x' \underbrace{\int da'}_A \\ &= -bA + (aL^2 + b)A - 2a \frac{L^2}{2} A \\ &= [-b + aL^2 + b - aL^2] A \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De esta manera, se ha demostrado que la carga total de polarización es cero.

Ejemplo 4.2

En este ejemplo, se considera una barra de sección rectangular con lados a , b y longitud L , como se muestra en la figura 4.9. Esta barra está hecha de un material dieléctrico con una permitividad ϵ y presenta una polarización dada por:

$$\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \hat{k}, \quad (4.23)$$

donde $P_0 > 0$. El objetivo es encontrar la densidad de carga de polarización y la carga total de polarización.

Solución: La densidad volumétrica de polarización de la barra se determina mediante la expresión:

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial z}(P_0 z) = -P_0. \quad (4.24)$$

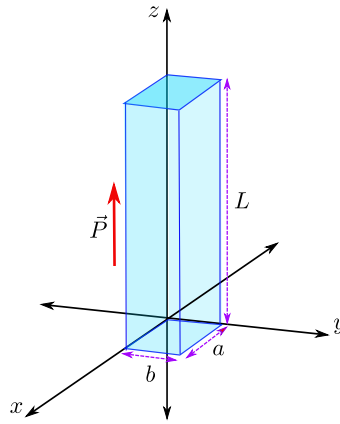


Figura 4.9: Barra rectangular con polarización $\vec{P} = P_0 \hat{k}$.

Las densidades de polarización superficial correspondientes a las superficies S_1 (superior), S_2 (inferior) y lateral S_L son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}) &= \hat{n}_1 \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_1} = \hat{k} \cdot (P_0 z \hat{k}) \Big|_{z=L} = P_0 L, \\ \sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}) &= \hat{n}_2 \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_2} = -\hat{k} \cdot (P_0 z \hat{k}) \Big|_{z=0} = 0, \\ \sigma_{P_{S_L}}(\vec{r}) &= \hat{n}_L \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_L} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Entonces, la carga total de polarización se calcula como:

$$\begin{aligned}
Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\
&= \int_{S_1} da' \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}') + \int_{S_2} da \sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}') + \int_{S_L} da \sigma_{P_{S_L}}(\vec{r}') \\
&\quad + \int_V d^3x' \rho_P(\vec{r}') \\
&= \int da' (P_0 L) + \int_V d^3x' (-P_0) \\
&= P_0 L \underbrace{\int da'}_{ab} - P_0 \int_0^L dz' \underbrace{\int da'}_{ab} \\
&= P_0 Lab - P_0 Lab \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Así, se ha determinado que la carga total de polarización es igual a cero.

Ejemplo 4.3

En este ejemplo, se considera una esfera dieléctrica descargada de radio R y permitividad ϵ , que presenta una polarización uniforme orientada en el sentido positivo del eje z , como se muestra en la figura 4.10. Se buscará calcular el campo eléctrico tanto dentro como fuera de la esfera a lo largo del eje z .

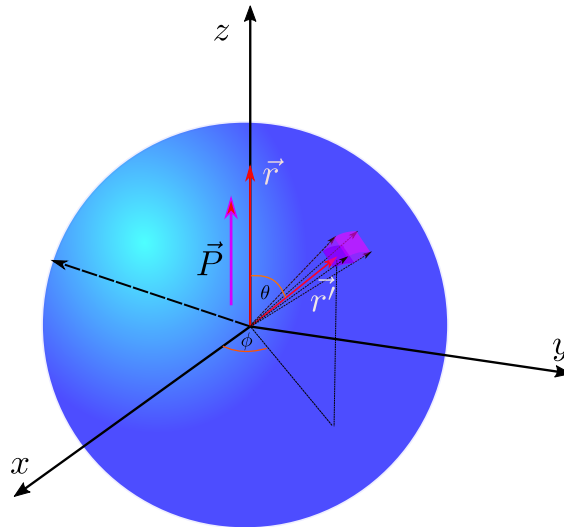


Figura 4.10: Esfera dieléctrica de permitividad ϵ y polarización $\vec{P}(\vec{r}) = P\hat{k}$.

Solución: El vector de polarización para este problema se expresa como:

$$\vec{P}(\vec{r}) = P\hat{k}. \quad (4.27)$$

A partir de esto, se puede deducir fácilmente que la densidad de carga de polarización volumétrica es cero:

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = 0. \quad (4.28)$$

Por lo tanto, la contribución al campo eléctrico proviene exclusivamente de la densidad superficial de carga de polarización, que se calcula como:

$$\sigma_{P_S}(\vec{r}') = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_S = \hat{r} \cdot P\hat{k} \Big|_{r=R} = P\hat{r} \cdot \hat{k}. \quad (4.29)$$

Utilizando la relación

$$\hat{r} \cdot \hat{k} = \cos \theta', \quad (4.30)$$

resulta que:

$$\sigma_{P_S}(\vec{r}') = P \cos \theta'. \quad (4.31)$$

La carga total de polarización es:

$$\begin{aligned} Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' (P \cos \theta') \\ &= P (2\pi R^2) \int_0^\pi -d(\cos \theta') \sin \theta' \\ &= -P (2\pi R^2) \int_0^\pi d(\cos \theta') \cos \theta' \\ &= -P (2\pi R^2) \frac{1}{2} \cos^2 \theta' \Big|_0^\pi \\ &= -P (2\pi R^2) \frac{1}{2} (\cos^2 \pi - \cos^2 0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ahora, el potencial debido al material dieléctrico se calcula como:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\vec{r}' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.33)$$

donde, dado que $\rho_P = 0$, se simplifica a:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.34)$$

Orientando el sistema de coordenadas de acuerdo con la figura 4.10, se establece que:

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad y \quad \vec{r}' = R\hat{r}'. \quad (4.35)$$

En términos de las coordenadas cartesianas, el vector $\hat{r}$ se expresa como:

$$\hat{r}' = \sin\theta' \cos\phi' \hat{i} + \sin\theta' \sin\phi' \hat{j} + \cos\theta' \hat{k}. \quad (4.36)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= z\hat{k} - R\hat{r}' \\ &= z\hat{k} - R(\sin\theta' \cos\phi' \hat{i} + \sin\theta' \sin\phi' \hat{j} + \cos\theta' \hat{k}) \\ &= -R\sin\theta' \cos\phi' \hat{i} - R\sin\theta' \sin\phi' \hat{j} + (z - R\cos\theta') \hat{k}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

De aquí se deduce que:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 \sin^2\theta' \cos^2\phi' + R^2 \sin^2\theta' \sin^2\phi' + (z - R\cos\theta')^2} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2\theta' + z^2 + R^2 \cos^2\theta' - 2zR\cos\theta'} \\ &= \sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta'}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente, el diferencial de área se expresa como:

$$da' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'. \quad (4.39)$$

Entonces, el potencial eléctrico se escribe como:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \frac{P \cos\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta'}} \\ &= \frac{P(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta'}} \\ &= \frac{PR^2}{2\epsilon_0} \underbrace{\int_0^\pi d\theta' \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta'}}}_I, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde se ha definido la integral I como:

$$I = \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta'}}, \quad (4.41)$$

de tal manera que el potencial vendrá dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{PR^2}{2\epsilon_0} I. \quad (4.42)$$

Para realizar la integral definida como I en la expresión (4.41), se procede a realizar el siguiente cambio de variable:

$$\mu = R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta', \quad (4.43)$$

donde se tiene que

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{R^2 + z^2 - \mu}{2zR}, \\ d\mu &= 2zR \sin \theta' d\theta' \Rightarrow \sin \theta' d\theta' = \frac{1}{2zR} d\mu. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Bajo este cambio de variable, los límites de integración son:

■ Cuando $\theta' = 0$:

$$\mu = R^2 + z^2 - 2zR = (z - R)^2, \quad (4.45)$$

■ Cuando $\theta' = \pi$:

$$\mu = R^2 + z^2 + 2zR = (z + R)^2. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, la integral I se expresa como:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} \frac{d\mu}{2zR} \left(\frac{R^2 + z^2 - \mu}{2zR} \right) \mu^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4z^2R^2} \int_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} d\mu (R^2 + z^2 - \mu) \mu^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4z^2R^2} \int_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} d\mu \left[(R^2 + z^2) \mu^{-\frac{1}{2}} - \mu^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

y evaluando la integral, resulta:

$$I = \frac{1}{4z^2R^2} \left\{ (R^2 + z^2) \left[2\mu^{\frac{1}{2}} \right] \Big|_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} - \frac{2}{3} \left[\mu^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{(z-R)^2}^{(z+R)^2} \right\}. \quad (4.48)$$

Finalmente, la integral I viene dada por:

$$I = \frac{1}{2z^2R^2} \left\{ (R^2 + z^2) ((z+R) - |z-R|) - \frac{1}{3} ((z+R)^3 - |z-R|^3) \right\}, \quad (4.49)$$

donde

$$|z-R| = \begin{cases} z-R & \text{si } z-R > 0 \Rightarrow z > R \text{ (fuera)} \\ -(z-R) & \text{si } z-R < 0 \Rightarrow z < R \text{ (dentro)} \end{cases}.$$

Entonces, para puntos donde $z > R$ se tiene que:

$$I = \frac{1}{2z^2R^2} \left\{ (R^2 + z^2) [(z+R) - (z-R)] - \frac{1}{3} [(z+R)^3 - (z-R)^3] \right\}. \quad (4.50)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} (z+R)^3 - (z-R)^3 &= z^3 + 3z^2R + 3zR^2 + R^3 - (z^3 - 3z^2R + 3zR^2 - R^3) \\ &= z^3 + 3z^2R + 3zR^2 + R^3 - z^3 + 3z^2R - 3zR^2 + R^3 \\ &= 6z^2R + 2R^3 \\ &= 2R(3z^2 + R^2), \end{aligned} \quad (4.51)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2z^2R^2} \left[(R^2 + z^2) (2R) - \frac{2}{3} R (3z^2 + R^2) \right] \\ &= \frac{1}{z^2R} \left[(R^2 + z^2) - \frac{1}{3} (3z^2 + R^2) \right] \\ &= \frac{1}{z^2R} \left(R^2 + z^2 - z^2 - \frac{1}{3} R^2 \right) \\ &= \frac{1}{z^2R} \left(\frac{2}{3} R^2 \right) \\ &= \frac{2R}{3z^2}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ahora, para puntos donde $z < R$, la integral I toma la forma:

$$I = \frac{1}{2z^2R^2} \left\{ (R^2 + z^2) [(z+R) + (z-R)] - \frac{1}{3} [(z+R)^3 + (z-R)^3] \right\}. \quad (4.53)$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 (z+R) + (z-R) &= 2z, \\
 (z+R)^3 + (z-R)^3 &= z^3 + 3z^2R + 3zR^2 + R^3 + (z^3 - 3z^2R + 3zR^2 - R^3) \\
 &= 2z^3 + 6zR^2 \\
 &= 2z(z^2 + 3R^2),
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2z^2R^2} \left\{ (R^2 + z^2)(2z) - \frac{1}{3} [2z(z^2 + 3R^2)] \right\} \\
 &= \frac{1}{zR^2} \left[(R^2 + z^2) - \frac{1}{3} (z^2 + 3R^2) \right] \\
 &= \frac{1}{zR^2} \left(R^2 + z^2 - \frac{1}{3}z^2 - R^2 \right) \\
 &= \frac{1}{zR^2} \left(\frac{2}{3}z^2 \right) \\
 &= \frac{2z}{3R^2}.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Los resultados obtenidos para la integral I , se resumen en:

$$I = \begin{cases} \frac{2R}{3z^2} & \text{Para } z > R \\ \frac{2z}{3R^2} & \text{Para } z < R \end{cases}. \tag{4.56}$$

Reemplazando los resultados establecidos en (4.56), el potencial eléctrico descrito por la ecuación (4.42), vendrá dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{PR^3}{3\epsilon_0 z^2} & \text{Para } z > R \\ \frac{Pz}{3\epsilon_0} & \text{Para } z < R \end{cases}. \tag{4.57}$$

Ahora, el potencial asociado a un dipolo está dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p|\vec{r} - \vec{r}'| \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}. \tag{4.58}$$

De la expresión (4.58) se observa que si el punto donde se calcula el campo está orientado en la misma dirección del momento dipolar eléctrico $\vec{P}$, entonces $\theta' = 0$, y adicionalmente si se toma $|\vec{r} - \vec{r}'| = z$, entonces se tiene que

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^2}. \tag{4.59}$$

Ahora, es posible reescribir el resultado para el potencial establecido en (4.57) para $z > R$, como:

$$\varphi(\vec{r}) = \left(P \frac{4\pi R^2}{3} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 z^2}, \quad (4.60)$$

donde $\frac{4}{3}\pi R^3$ corresponde al volumen de la esfera y se ha interpretado a $P\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ como el momento dipolar eléctrico asociado a la esfera polarizada. Por lo tanto, al comparar las expresiones (4.59) y (4.60), se establece que fuera de la esfera el potencial generado por esta es equivalente al de un dipolo eléctrico de momento dipolar $P\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$.

Por otra parte, el campo eléctrico fuera de la esfera será:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\hat{k} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} = -\frac{\hat{k}}{4\epsilon_0 \pi} \left[P \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \right] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z^2} \right) \\ &= -\frac{\hat{k}}{4\epsilon_0 \pi} \left[P \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \right] \left(-\frac{2}{z^3} \right) \\ &= -\frac{\hat{k}}{2\epsilon_0 \pi} \left[P \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \right] \frac{1}{z^3}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De igual forma el campo eléctrico dentro de la esfera polarizada será:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\hat{k} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} = -\hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Pz}{3\epsilon_0} \right) \\ &= -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{k} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Así, el campo eléctrico en el interior de la esfera a lo largo del eje z es proporcional a la polarización $\vec{P}$ y sentido opuesto al de este.

Ejercicio 4.2 Un cubo dieléctrico de lado a , centrado en el origen, posee una polarización $\vec{P}(\vec{r}) = k\vec{r}$, donde k es una constante. Encontrar las densidades de carga de polarización y mostrar que la carga total de polarización es nula.

Ejercicio 4.3 Una varilla de material dieléctrico tiene forma de un cilindro recto de longitud L y radio R y se encuentra polarizada en la dirección de su longitud. Si la polarización es uniforme y de magnitud P , calcular el campo eléctrico resultante de esta polarización en un punto a lo largo el eje de la varilla.

Ejemplo 4.4

Demostrar la relación entre el vector de polarización $\vec{P}$ y las densidades de carga de polarización en un dieléctrico de volumen V , limitado por una superficie S .

Solución: teniendo en cuenta que:

$$\int_V d^3x \vec{P}(\vec{r}) = \int_V d^3x \vec{r} \rho_{P_S}(\vec{r}) + \oint_S da \vec{r} \sigma_{P_S}(\vec{r}), \quad (4.63)$$

para alcanzar el objetivo propuesto, se plantea la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [x_i \vec{P}(\vec{r})] &= \partial_j [x_i P_j(\vec{r})] = \underbrace{(\partial_j x_i)}_{\delta_{ij}} P_j(\vec{r}) + x_i (\partial_j P_j(\vec{r})) \\ &= P_i(\vec{r}) + x_i [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

A partir de lo anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$P_i(\vec{r}) = -x_i [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})] + \vec{\nabla} \cdot [x_i \vec{P}(\vec{r})]. \quad (4.65)$$

Al integrar esta igualdad sobre el volumen V , se obtiene:

$$\int_V d^3x P_i(\vec{r}) = - \int_V d^3x x_i [\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})] + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot [x_i \vec{P}(\vec{r})]. \quad (4.66)$$

Aplicando la divergencia, se tiene que:

$$= \int_V d^3x x_i [-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})] + \oint_S da \hat{n} \cdot [x_i \vec{P}(\vec{r})]. \quad (4.67)$$

Donde la última integral es resultado del teorema de Gauss. Por lo tanto, se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x P_i(\vec{r}) &= \int_V d^3x x_i [-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})] + \oint_S da \hat{n} \cdot [x_i \vec{P}(\vec{r})] \\ &= \int_V d^3x x_i \rho_{P_S}(\vec{r}) + \oint_S da x_i \sigma_{P_S}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Multiplicando la expresión anterior por el vector unitario $\hat{e}_i$, se establece que:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \int_V d^3x P_i(\vec{r}) &= \int_V d^3x \hat{e}_i P_i(\vec{r}) = \int_V d^3x \vec{P}(\vec{r}) \\ &= \hat{e}_i \int_V d^3x x_i \rho_{P_S}(\vec{r}) + \hat{e}_i \oint_S da x_i \sigma_{P_S}(\vec{r}) \\ &= \int_V d^3x (\hat{e}_i x_i) \rho_{P_S}(\vec{r}) + \oint_S da (\hat{e}_i x_i) \sigma_{P_S}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Finalmente, se deduce que:

$$\int_V d^3x \vec{P}(\vec{r}) = \int_V d^3x \vec{r} \rho_{P_S}(\vec{r}) + \oint_S da \vec{r} \sigma_{P_S}(\vec{r}). \quad (4.70)$$

4.3 Ley de Gauss para un Dieléctrico

Se considera un espacio completamente ocupado por un material dieléctrico, en el cual se encuentra una distribución de carga real (libre) descrita por la densidad $\rho(\vec{r})$. Esta carga libre puede consistir en electrones sobre conductores, iones inmersos en el material dieléctrico, o cualquier otra carga que no resulte de la polarización. Teniendo en cuenta la contribución de la carga libre al potencial eléctrico, este se expresa de la siguiente manera:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S da' \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.71)$$

Dado que el material dieléctrico ocupa todo el espacio, se puede extender su superficie hacia el infinito, lo que permite desestimar la contribución del potencial asociada a esta superficie. Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{[\rho(\vec{r}') + \rho_P(\vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

En este punto se puede introducir el concepto de *densidad de carga efectiva*, definida como:

$$\rho_{eff}(\vec{r}') \equiv \rho(\vec{r}') + \rho_P(\vec{r}'). \quad (4.73)$$

Con esta definición, el potencial toma la forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_{eff}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.74)$$

La expresión (4.74) en forma es equivalente al potencial asociado a una densidad de carga ρ , el cual viene dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.75)$$

de aquí, se puede deducir que el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_{eff}(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.76)$$

Un análisis similar al realizado para el campo eléctrico en el vacío permite determinar que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{eff}(\vec{r}). \quad (4.77)$$

Ejercicio 4.4 Probar la relación (4.77) a partir de (4.76).

Utilizando la definición de la densidad de carga efectiva, la ecuación (4.77) puede reescribirse como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho(\vec{r}) + \rho_P(\vec{r})] = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})]. \quad (4.78)$$

De este modo,

$$\vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})] = \rho(\vec{r}). \quad (4.79)$$

La expresión anterior se puede simplificar si se introduce un nuevo campo vectorial denominado *vector de desplazamiento eléctrico*, definido como:

$$\vec{D}(\vec{r}) \equiv \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}). \quad (4.80)$$

Por lo tanto, la relación (4.79) se escribe:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}). \quad (4.81)$$

La expresión anterior representa *la primera ley de Maxwell* en presencia de medios materiales, o, de manera equivalente, *la ley de Gauss en forma diferencial* para medios materiales. En el vacío, donde $\vec{P}(\vec{r}) = 0$, se determina que:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}), \quad (4.82)$$

y la ecuación (4.79) adopta su forma conocida para el espacio libre. La versión integral de la ley de Gauss resulta de integrar la ecuación (4.81) sobre un volumen V , tal que:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int_V d^3x \rho(\vec{r}). \quad (4.83)$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.83) puede transformarse, a través del teorema de Gauss, en una integral de superficie, mientras que el lado derecho se interpreta como la carga libre Q contenida en el volumen V , por tanto:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = Q, \quad (4.84)$$

lo que indica que el flujo del campo de desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{r})$ a través de la superficie gaussiana S es igual a la carga libre contenida en el volumen V limitado por dicha superficie.

4.4 Susceptibilidad Eléctrica

Teniendo en cuenta la definición de la polarización, se puede intuir una relación funcional entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y la polarización $\vec{P}$; es decir, $\vec{P}(\vec{E})$. La teoría macroscópica descriptiva no permite predecir la forma de esta función, pero sí la admite como información que debe ser determinada experimentalmente. Sin embargo, a partir de la mecánica estadística y la física del estado sólido, es posible establecer relaciones teóricas entre estas cantidades, considerando las propiedades microscópicas de la materia. Dependiendo de las relaciones establecidas, se pueden caracterizar los materiales, como se resumirá a continuación.

Un material dieléctrico se denomina *lineal* si la polarización $\vec{P}$ está relacionada linealmente con el campo eléctrico $\vec{E}$ que la produce. Las componentes P_i resultan de una combinación lineal del campo eléctrico polarizador E_j , tal que:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j, \quad (4.85)$$

donde los factores de proporcionalidad χ_{ij} reciben el nombre de componentes del *tensor de susceptibilidad eléctrica*. El factor ϵ_0 se introduce para garantizar que χ_{ij} no tenga dimensiones. Estas componentes, en general, no necesitan ser constantes y pueden ser funciones de la posición dentro del material, lo que es común en los cristales.

El dieléctrico se considera *isotrópico lineal* si $\vec{P}$ es paralelo a $\vec{E}$. En este caso, se cumple que:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (4.86)$$

donde χ_e se conoce como *susceptibilidad eléctrica*. Para este tipo de materiales, la relación entre el campo eléctrico y el vector de desplazamiento eléctrico es:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Introduciendo el concepto de *constante dieléctrica*:

$$\kappa \equiv 1 + \chi_e, \quad (4.88)$$

junto con la noción de permitividad del material:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e), \quad (4.89)$$

se puede expresar la relación entre los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ como:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}). \quad (4.90)$$

Las cantidades $(\chi_e, \kappa, \epsilon)$ caracterizan las propiedades eléctricas del material y se derivan a partir de observaciones experimentales, de manera que existen tablas que identifican sus valores. La relación (4.90) se conoce como *ecuación constitutiva*.

Un dieléctrico *isotrópico homogéneo lineal* se caracteriza porque las propiedades eléctricas son independientes de la posición dentro del material. Para este tipo de materiales, los parámetros $(\chi_e, \kappa, \epsilon)$ son constantes, que caracterizan el material. En general, los gases, líquidos y muchos sólidos se encuentran en esta categoría. Para estos materiales, se puede deducir que la ley de Gauss se expresa como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [\epsilon \vec{E}(\vec{r})] = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \quad (4.91)$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}), \quad (4.92)$$

que en forma integral se expresa:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} Q. \quad (4.93)$$

Dado que el campo electrostático es irrotacional ($\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$), es posible escribir la expresión (4.92) como:

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}), \quad (4.94)$$

que es la ecuación de Poisson. Cuando no hay cargas libres en el volumen V , es decir, $\rho(\vec{r}) = 0$, la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = 0, \quad (4.95)$$

de tal manera que los resultados derivados en el vacío son equivalentes a aquellos que se obtendrían en el caso de un medio dieléctrico infinito que ocupa todo el espacio, simplemente substituyendo la permitividad eléctrica del vacío ϵ_0 por la permitividad del dieléctrico ϵ .

Ejemplo 4.5

Un cascarón esférico con radio interior a y radio exterior b está compuesto de material dieléctrico y presenta una polarización descrita por el vector:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\kappa}{r} \hat{r}, \quad (4.96)$$

siendo κ una constante y r la distancia radial medida desde el centro del cascarón (ver figura 4.11). Para el sistema planteado se encontrará el campo eléctrico para todo valor de r .

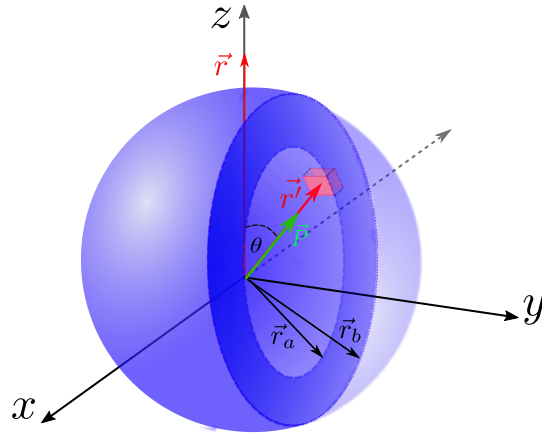


Figura 4.11: Cascarón dieléctrico esférico con polarización en dirección radial.

Solución: Se utilizarán dos métodos equivalentes para evaluar el campo eléctrico. Primero, a partir de la ley de Gauss para medios materiales, expresada en términos del vector de desplazamiento eléctrico:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = Q_{\text{free}}. \quad (4.97)$$

En este caso, el lado derecho de esta ecuación depende de la carga libre encerrada por cualquier superficie gaussiana S . Sin embargo, dado que $Q_{\text{free}} = 0$ para este problema, se determina que:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0, \quad (4.98)$$

lo que implica que $\vec{D}(\vec{r}) = 0$. Por la definición del vector de desplazamiento eléctrico, se obtiene:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) = 0. \quad (4.99)$$

De aquí, se puede deducir que el campo eléctrico debido al material polarizado es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r}. \quad (4.100)$$

Este resultado se interpreta como el campo eléctrico dentro del material dieléctrico, ya que la polarización solo prevalece en su interior.

El segundo método consiste en partir de la ley de Gauss en su forma original:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (4.101)$$

siendo que la carga total Q incluye la carga libre Q_{free} más la carga de polarización Q_P :

$$Q = Q_{free} + Q_P. \quad (4.102)$$

Por lo tanto, la ley de Gauss en presencia de medios materiales también se puede expresar como:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{free} + Q_P). \quad (4.103)$$

Dado que $Q_{free} = 0$ en este problema, resulta que:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_P. \quad (4.104)$$

Se considera ahora una superficie gaussiana comprendida entre los cascarones. La figura 4.12 indica una sección transversal de la configuración esférica en estudio, donde la línea punteada roja está asociada a la esfera sobre la cual se aplicará la ley de Gauss.

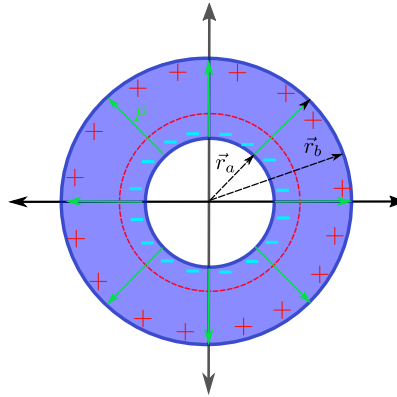


Figura 4.12: Sección trasversal de un cascarón dieléctrico con polarización radial.

Dada la simetría del problema, se puede determinar que:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = (4\pi r^2) E. \quad (4.105)$$

Para calcular la carga de polarización, primero es necesario determinar las densidades de carga de polarización. Partiendo con la densidad volumétrica:

$$\begin{aligned}\rho_P(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\kappa}{r} \hat{r} \right] \\ &= -\kappa \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r} \right) \\ &= -\kappa \frac{1}{r^2}.\end{aligned}\quad (4.106)$$

La densidad de carga superficial correspondiente a S_1 que identifica la esfera de radio r_a es:

$$\sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_1} = (-\hat{r}) \cdot \left(\frac{\kappa}{r} \hat{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{\kappa}{a}, \quad (4.107)$$

en tanto que la densidad de carga superficial correspondiente a S_2 que corresponde a la esfera de radio r_b es:

$$\sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \Big|_{S_2} = \hat{r} \cdot \left(\frac{\kappa}{r} \hat{r} \right) \Big|_{r=b} = \frac{\kappa}{b}. \quad (4.108)$$

La carga de polarización encerrada por la superficie gaussiana esférica S de radio r es:

$$\begin{aligned}Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_{S_1} da \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \left(-\frac{\kappa}{a} \right) + \int_a^r d^3x \left(-\frac{\kappa}{r'^2} \right) \\ &= \left(-\frac{\kappa}{a} \right) a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' d\phi' - \kappa \int_a^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \left(\frac{1}{r'^2} \right) \\ &= -\kappa a(4\pi) - \kappa(4\pi)(r-a) \\ &= -4\pi\kappa r.\end{aligned}\quad (4.109)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico dentro del material dieléctrico es:

$$\begin{aligned}\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_P \\ &\downarrow \\ (4\pi r^2) E &= -\frac{1}{\epsilon_0} 4\pi\kappa r,\end{aligned}\quad (4.110)$$

y se tiene que

$$E = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\kappa}{r}. \quad (4.111)$$

Es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r}. \quad (4.112)$$

Ahora, se considera que la superficie gaussiana se encuentra fuera de la esfera. En este caso, la carga de polarización encerrada será:

$$\begin{aligned} Q_P &= \oint_S da \sigma_P(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_{S_1} da \sigma_{P_{S_1}}(\vec{r}) + \int_{S_2} da \sigma_{P_{S_2}}(\vec{r}) + \int_V d^3x \rho_P(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \left(-\frac{\kappa}{a}\right) + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi b^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \left(\frac{\kappa}{b}\right) \\ &\quad + \int_a^b d^3x \left(-\frac{\kappa}{r'^2}\right) \\ &= \left(-\frac{\kappa}{a}\right) a^2 (4\pi) + \left(\frac{\kappa}{b}\right) b^2 (4\pi) - \kappa (4\pi) (b-a) \\ &= -\kappa a (4\pi) + \kappa b (4\pi) - \kappa (4\pi) (b-a) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Esto es consistente con la expectativa, ya que se está evaluando la carga total de polarización. De la ley de Gauss se obtiene que

$$\begin{aligned} \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_P \\ (4\pi r^2) E &= 0, \end{aligned} \quad (4.114)$$

y por lo tanto $E = 0$, lo que garantiza que el campo eléctrico es nulo, confirmando los resultados derivados inicialmente.

Ejemplo 4.6

Se considera una esfera metálica de radio a con una carga Q , que se encuentra rodeada por un material dieléctrico de permitividad ϵ y radio b (ver figura 4.13). El objetivo es determinar el potencial al interior de la esfera metálica en relación al infinito.

Solución: Para comenzar, se calculará el campo eléctrico en tres regiones distintas: fuera del dieléctrico, $\vec{E}_1(\vec{r})$, en el material dieléctrico, $\vec{E}_2(\vec{r})$, y dentro de la esfera metálica, $\vec{E}_3(\vec{r})$.

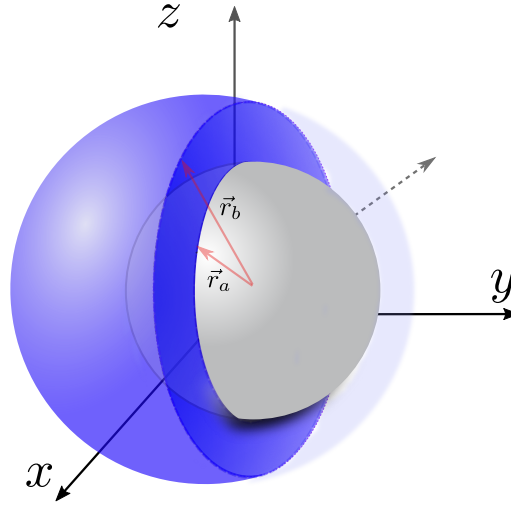


Figura 4.13: Esfera metálica de carga Q , rodeada esféricamente de material dieléctrico con permitividad ϵ .

Para derivar el campo eléctrico en la región exterior, se considerará una superficie gaussiana de radio $r > b$. De la ley de Gauss se tiene que:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{free} + Q_P), \quad (4.115)$$

y dada la simetría del problema, la integral de superficie se reduce a

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}_1(\vec{r}) = (4\pi r^2) E_1. \quad (4.116)$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana, es únicamente la carga libre $Q_{free} = Q$, ya que la carga de polarización es nula. Por lo tanto, se concluye que:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.117)$$

Ahora para evaluar el campo eléctrico en el material dieléctrico, se utiliza la ley de Gauss en la versión

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = Q_{free}. \quad (4.118)$$

Siendo que el material dieléctrico se caracteriza por una permitividad ϵ , la relación entre el campo de desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico se expresa como:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}), \quad (4.119)$$

lo que permite reescribir la ley de Gauss de la siguiente manera:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} Q. \quad (4.120)$$

Si la superficie gaussiana S dentro del material dieléctrico es una esfera de radio r ($a < r < b$), se determina que:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) = (4\pi r^2) E_2 = \frac{1}{\epsilon} Q, \quad (4.121)$$

de donde se deduce que:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}. \quad (4.122)$$

El campo eléctrico $\vec{E}_3(\vec{r})$ dentro de la esfera es nulo, dado que no existe carga en esta región. La información obtenida hasta el momento permite establecer que el potencial eléctrico en un punto c al interior de la esfera metálica, está dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_c - \underbrace{\varphi_\infty}_0 &= \varphi_c \\ &= - \int_\infty^c \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_\infty^b \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - \underbrace{\int_a^c \vec{E}_3(\vec{r}) \cdot d\vec{l}}_0 \\ &= - \int_\infty^b \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Por lo tanto, el potencial eléctrico se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= - \int_\infty^b \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_\infty^b \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right] \cdot d\vec{l} - \int_b^a \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \right] \cdot d\vec{l} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^b \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_b^a \frac{dr}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

lo cual conlleva a

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^b - \frac{Q}{4\pi\epsilon} - \frac{1}{r} \Big|_b^a \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.125)$$

lo que implica que el potencial al interior de la esfera es:

$$\varphi_c = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{a\epsilon} - \frac{1}{b\epsilon} \right), \quad (4.126)$$

resultando en un valor constante.

Ejercicio 4.5 A partir de los resultados obtenidos de campo eléctrico y potencial en el ejemplo (4.6), encontrar las densidades de carga de polarización correspondientes.

Ejercicio 4.6 Una carga q está sumergida en el centro de una esfera de material dieléctrico lineal con susceptibilidad ξ_e y radio R . Para el problema planteado, encontrar el campo eléctrico, la polarización, las densidades de carga de polarización y la carga superficial total en la superficie de la esfera.

4.5 Condiciones de Frontera

En esta sección se analizará el comportamiento del campo eléctrico y del vector de desplazamiento eléctrico cuando estos atraviesan una frontera que separa dos medios dieléctricos de permitividades eléctricas ϵ_1 y ϵ_2 . Se considerará que la frontera posee una distribución de carga caracterizada por $\sigma(\vec{r})$.

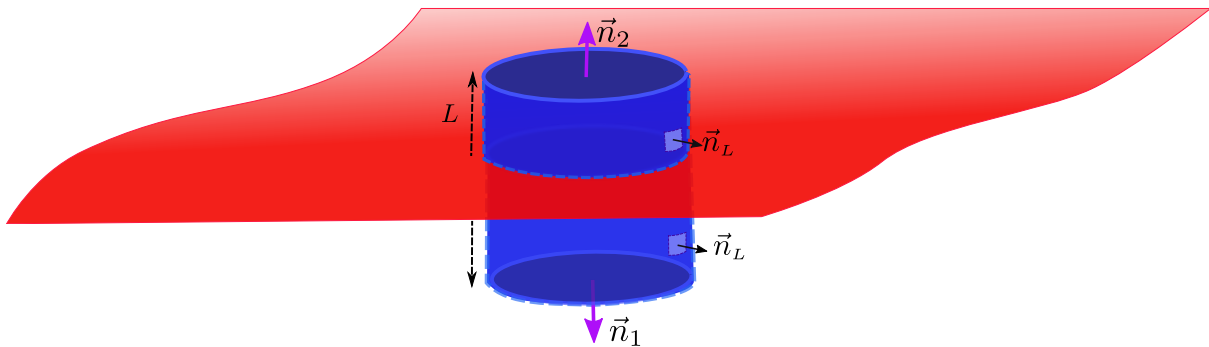


Figura 4.14: Superficie cilíndrica usada en la integración de la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico.

La primera condición de contorno involucra el campo de desplazamiento eléctrico y para ello se empleará la ley de Gauss en forma integral:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = Q_{\text{free}}. \quad (4.127)$$

El medio 1 está caracterizado por un vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}_1(\vec{r})$, mientras que el medio 2 se identifica por $\vec{D}_2(\vec{r})$. Se considera una superficie gaussiana en forma de cilindro de altura L y sección transversal A situada en la frontera de los dos medios, como se muestra en la figura 4.14. Para esta superficie gaussiana cilíndrica se cumple:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int_{S_1} da \hat{n}_1 \cdot \vec{D}_1(\vec{r}) + \int_{S_2} da \hat{n}_2 \cdot \vec{D}_2(\vec{r}) + \int_{S_L} da \hat{n}_L \cdot \vec{D}(\vec{r}), \quad (4.128)$$

donde S_1 y S_2 son las bases circulares del cilindro en los medios 1 y 2 respectivamente, en tanto que S_L es la superficie lateral curva del cilindro. Cada una de las integrales mide el flujo del campo de desplazamiento a través de las superficies en consideración. Ahora, al considerar el límite cuando $L \rightarrow 0$, el flujo a través de la superficie lateral tiende a cero y las superficies S_1 y S_2 se aproximan a la frontera que separa los medios. Por lo tanto, el flujo del campo de desplazamiento eléctrico se expresa como:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int_{S_1} da \hat{n}_1 \cdot \vec{D}_1(\vec{r}) + \int_{S_2} da \hat{n}_2 \cdot \vec{D}_2(\vec{r}). \quad (4.129)$$

Se considera que el área A es lo suficientemente pequeña, tal que los campos $\vec{D}_1(\vec{r})$ y $\vec{D}_2(\vec{r})$ en cada punto de A sean aproximadamente uniformes, de manera que:

$$\begin{aligned} \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &\simeq \vec{D}_1(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1 \underbrace{\int_{S_1} da}_A + \vec{D}_2(\vec{r}) \cdot \hat{n}_2 \underbrace{\int_{S_2} da}_A \\ &= [\vec{D}_1(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2(\vec{r}) \cdot \hat{n}_2] A. \end{aligned} \quad (4.130)$$

El vector unitario $\hat{n}_1$ es el vector normal a la superficie S_1 , $\hat{n}_2$ es normal a la superficie S_2 , y en el límite $L \rightarrow 0$ se deduce que $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$. En el límite en consideración $\hat{n}_2 = \hat{n}$, siendo este último un vector normal a la frontera en estudio, de manera que:

$$\begin{aligned} \oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= [\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r})] \cdot \hat{n} A \\ &= [\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r})] \cdot \hat{n} A. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Ahora, la carga libre Q_{free} encerrada por la superficie gaussiana S se puede expresar en términos de la densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r})$ distribuida en la superficie de la frontera que separa los dos medios, de manera que:

$$Q_{\text{free}} = \int da \sigma(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \int da = \sigma(\vec{r})A, \quad (4.132)$$

donde se ha utilizado nuevamente el hecho de que A se considera lo suficientemente pequeña como para asumir que $\sigma(\vec{r})$ es constante sobre el área A . Entonces, de la ley de Gauss se obtiene:

$$\oint_S da \hat{n} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = Q_{\text{free}},$$

$$\left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} A = \sigma(\vec{r})A, \quad (4.133)$$

es decir:

$$\left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} = \sigma(\vec{r}). \quad (4.134)$$

Lo que significa que la componente normal del vector de campo de desplazamiento eléctrico no es en general continua a través de la frontera que separa los dos medios dieléctricos, estando la discontinuidad asociada a la densidad superficial de carga real que existe en la interface y no a la de polarización. En el caso de que la frontera no posea carga libre, se cumple que:

$$\vec{D}_2(\vec{r}) \cdot \hat{n} = \vec{D}_1(\vec{r}) \cdot \hat{n}, \quad (4.135)$$

es decir, la componente normal del campo de desplazamiento eléctrico es continua. Como forma de verificar las relaciones anteriores, se considera el caso de una frontera entre un conductor (medio 1) y el vacío (medio 2). En el vacío y en un conductor perfecto se cumple que $\vec{P} = 0$. Se sabe que dentro del conductor el campo eléctrico es nulo, con lo cual el vector de desplazamiento eléctrico también es nulo ($D_1 = 0$). Ahora, en el vacío, se determina que $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_1$, con lo cual:

$$\left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} = \sigma(\vec{r}),$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \sigma(\vec{r}), \quad (4.136)$$

que es una relación entre la componente normal del campo eléctrico en la vecindad del conductor y la densidad superficial de carga. Resultado que se había derivado anteriormente con la ley de Gauss. La ecuación (4.135) se puede expresar en la forma:

$$\epsilon_2 \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \hat{n} = \epsilon_1 \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \hat{n}, \quad (4.137)$$

donde se relacionan los campos eléctricos y las permitividades eléctricas de cada medio material.

Una segunda condición de contorno resulta del carácter irrotacional del campo electrostático (consecuencia de que $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$). Esto se puede expresar en forma integral como:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4.138)$$

donde C es una trayectoria cerrada. En una frontera que divide dos medios, se puede establecer una trayectoria cerrada como se indica en la figura 4.15, que consiste en un circuito rectangular de lados $ABCD$ orientado en el sentido antihorario. Para esta trayectoria se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_{C_{AB}} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} + \int_{C_{BC}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \\ &+ \int_{C_{CD}} \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} + \int_{C_{DA}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \end{aligned} \quad (4.139)$$

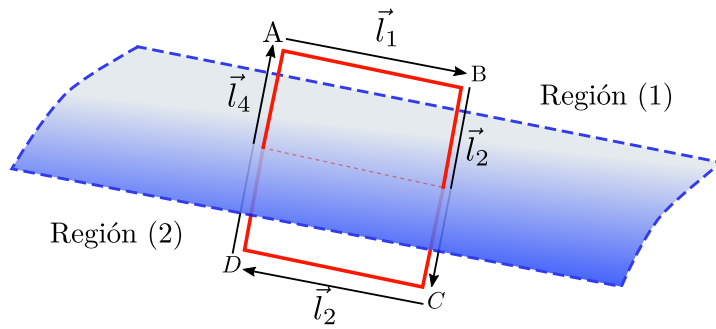


Figura 4.15: Circuito cerrado aplicado a la integración del rotacional del campo eléctrico.

Las integrales asociadas a los tramos DA y BC que son longitud ϵ ($l_4 = l_2 = L$) se anulan en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Las integrales restantes se calcularán a lo largo de trayectorias próximas a la frontera que separa los medios dieléctricos, de modo que:

$$0 = \int_{C_{AB}} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} + \int_{C_{CD}} \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (4.140)$$

Considerando las trayectorias C_{AB} y C_{CD} lo suficientemente pequeñas como para asumir que los campos $\vec{E}_1(\vec{r})$ y $\vec{E}_2(\vec{r})$ son aproximadamente uniformes, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\simeq \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \int_{C_{AB}} d\vec{l} + \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \int_{C_{CD}} d\vec{l} \\ &= \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l}_1 + \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l}_2, \end{aligned} \quad (4.141)$$

sin embargo, se puede ver fácilmente que:

$$\vec{l}_2 = -\vec{l}_1 \equiv \vec{l}, \quad (4.142)$$

con lo cual:

$$0 = \left(\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r}) \right) \cdot \vec{l}, \quad (4.143)$$

que se puede relacionar como

$$\vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l} = \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l}. \quad (4.144)$$

En el límite bajo consideración ($L \rightarrow 0$ para las trayectorias DA y BC), la componente del campo eléctrico definida por $\vec{E} \cdot \vec{l}$, corresponde a la componente tangencial del vector de campo eléctrico sobre la superficie que define la frontera. Por lo tanto, la ecuación (4.144) toma la forma:

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}, \quad (4.145)$$

La relación anterior indica que la componente tangencial del campo eléctrico a la frontera que separa los dos medios materiales dieléctricos es continua. Como ejemplo, se considera nuevamente el caso del conductor (medio 1) y el vacío (medio 2). La condición de frontera asociada a la componente tangencial en este caso será:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l} = \underbrace{\vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l}}_{=0} = 0. \quad (4.146)$$

Es decir, el campo eléctrico en la vecindad del conductor no puede tener componente tangencial, por lo cual las líneas de campo eléctrico son siempre perpendiculares a la superficie del conductor en sus proximidades.

Ejemplo 4.7

Dos medios dieléctricos con constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 están separados por una superficie plana sin carga libre. El objetivo es encontrar la relación entre los ángulos θ'_1 y θ'_2 formados por los vectores de desplazamiento eléctrico de cada medio con la normal a la superficie (ver figura 4.16).

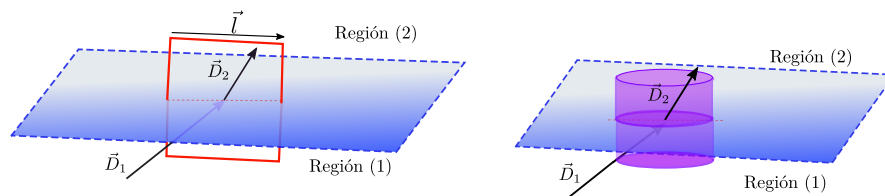


Figura 4.16: Interfaz entre dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 .

Solución: Las condiciones de frontera se traducen en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} &= \sigma(\vec{r}), \\ \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l} &= \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

En este caso no existe carga en la interfase que separa los dos medios y se ajusta de tal manera que el vector normal a la superficie es $\hat{n} = \hat{k}$. Las componentes tangenciales de los campos eléctricos se encuentran en el plano xy , por lo que el vector tangente $\vec{l}$ puede representarse en términos de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j})$. De aquí se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{k} &= 0 \implies D_{2,z} - D_{1,z} = 0, \\ \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l} &= \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l} \implies E_{2,t} - E_{1,t} = 0, \end{aligned} \quad (4.148)$$

donde el subíndice t indica la componente tangencial de los campos eléctricos. De la figura 4.16 se observa que:

$$\begin{aligned} D_{2,z} &= D_2 \cos \theta'_2, & D_{1,z} &= D_1 \cos \theta'_1, \\ E_{2,t} &= E_2 \sin \theta'_2, & E_{1,t} &= E_1 \sin \theta'_1. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Además, dada la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, se tiene que:

$$D_{2,z} = \epsilon_2 E_2 \cos \theta'_2, \quad D_{1,z} = \epsilon_1 E_1 \cos \theta'_1. \quad (4.150)$$

De esta forma, las ecuaciones correspondientes a las condiciones de frontera se expresan como:

$$\begin{aligned} E_{2,t} &= E_{1,t} \implies E_2 \sin \theta'_2 = E_1 \sin \theta'_1, \\ D_{2,z} &= D_{1,z} \implies \epsilon_2 E_2 \cos \theta'_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \theta'_1. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\frac{E_2 \sin \theta'_2}{\epsilon_2 E_2 \cos \theta'_2} = \frac{E_1 \sin \theta'_1}{\epsilon_1 E_1 \cos \theta'_1}, \quad (4.152)$$

es decir,

$$\frac{1}{\epsilon_2} \tan \theta'_2 = \frac{1}{\epsilon_1} \tan \theta'_1. \quad (4.153)$$

La constante dieléctrica se define como:

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \implies \epsilon = \epsilon_0 \kappa, \quad (4.154)$$

de manera que:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \kappa_2} \tan \theta'_2 = \frac{1}{\epsilon_0 \kappa_1} \tan \theta'_1. \quad (4.155)$$

Finalmente, se deduce que la relación entre los ángulos es:

$$\tan \theta'_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \tan \theta'_1. \quad (4.156)$$

Ejemplo 4.8

Una plancha plana de material dieléctrico con constante dieléctrica κ_1 está limitada por ambos lados por otro material dieléctrico caracterizado por una constante dieléctrica κ_2 . En el medio 2, el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a la interface. El objetivo es encontrar el campo eléctrico en el medio 1.

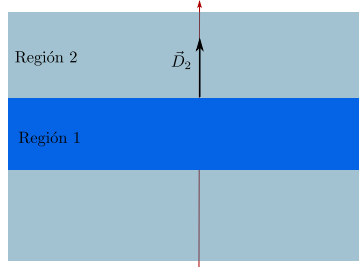


Figura 4.17: Plancha dieléctrica con constante dieléctrica κ_1 limitada por material dieléctrico de constante dieléctrica κ_2 .

Solución: El campo eléctrico en el medio 2 se identifica como $\vec{E}_2$, orientado según se indica en la figura 4.17. Se escoge el eje z como la normal a la interface que separa los planos. Inicialmente, se considera que el campo eléctrico $\vec{E}_1$ en el medio 1 tiene una dirección arbitraria.

Dado que no existe carga libre en la interface que separa los medios, las condiciones de frontera se expresan como:

$$\begin{aligned} [\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r})] \cdot \hat{k} &= 0 \implies D_{2,z} - D_{1,z} = 0, \\ \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{l} &= \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{l} \implies E_{2,t} - E_{1,t} = 0. \end{aligned} \quad (4.157)$$

El problema se caracteriza por el hecho de que el campo eléctrico en el medio 2 es únicamente normal, con lo cual su componente tangencial es nula, es decir, $E_{2,t} = 0$. Esto implica, por la condición de frontera, que:

$$E_{1,t} = 0, \quad (4.158)$$

es decir, el campo eléctrico en el medio 1 solo posee componente normal. Como $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ y $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$, la condición de frontera asociada a las componentes normales del campo eléctrico se expresa como:

$$\begin{aligned} D_{2,z} &= D_{1,z}, \\ \epsilon_1 E_1 &= \epsilon_2 E_2, \end{aligned} \quad (4.159)$$

de manera que:

$$E_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_2}{\epsilon_0 \kappa_1} E_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} E_2. \quad (4.160)$$

Ejercicio 4.7 A partir de los resultados obtenidos en el ejemplo (4.8), encontrar la polarización y

las densidades de polarización del medio uno.

4.6 Energía Electroestática de un Sistema en Presencia de un Dieléctrico

Se ha demostrado que en el vacío, la energía necesaria para reunir un sistema estacionario de N cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ en las posiciones caracterizadas por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$, está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\vec{r}_i). \quad (4.161)$$

Este resultado se deriva de un proceso en el cual las cargas se trasladan sucesivamente desde el infinito hasta conformar la configuración requerida.

Si el mismo proceso se realiza en presencia de un material dieléctrico, se debe considerar que se requiere trabajo no solo para trasladar las cargas libres, sino también para polarizar el material. Al interpretar la ecuación (4.161) para constituir el sistema de cargas dentro del material dieléctrico, es necesario entender que $\varphi(\vec{r}_i)$ será el potencial establecido en la posición $\vec{r}_i$, donde se encuentra la carga q_i , debido al resto de las cargas puntuales y al potencial debido al material polarizado. Para comprender mejor este resultado, se considera la ecuación (4.161) en el caso de una distribución continua de cargas:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \quad (4.162)$$

Recordando la ecuación de Maxwell en la presencia de medios materiales:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \quad (4.163)$$

se puede escribir:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \varphi(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) \right]. \quad (4.164)$$

Ahora, teniendo en cuenta propiedades de operadores vectoriales, se deduce que:

$$\varphi(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) \right] - \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}), \quad (4.165)$$

a partir de lo cual, la energía potencial se expresa en la forma:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) \right] - \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) \right] - \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \oint_S dA \hat{n} \cdot \left[\varphi(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) \right] - \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (4.166)$$

donde se ha utilizado el teorema de Gauss para transformar la integral sobre un volumen V en una integral sobre la superficie cerrada S , que es la frontera de dicho volumen.

Si la superficie S que limita el volumen V se extiende al infinito, la primera integral considera evaluar los campos en puntos de la frontera que están en el infinito. Para una distribución de carga libre localizada, se cumple que:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r}, \quad y \quad D(\vec{r}) \propto E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2}, \quad (4.167)$$

de manera que el integrando en la integral de superficie es de la forma:

$$dA \varphi(\vec{r}) D(\vec{r}) \sim (r^2 dr) \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r^2} \right) \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0, \quad (4.168)$$

por lo que la integral de superficie desaparece. Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión para la energía electrostática de un sistema de cargas en presencia de un dieléctrico:

$$U = -\frac{1}{2} \int_V d^3x \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \cdot \vec{D}(\vec{r}). \quad (4.169)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$, la energía total electrostática es:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}). \quad (4.170)$$

Así, es posible definir una densidad de energía potencial electrostática como:

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}). \quad (4.171)$$

En el caso de un medio material dieléctrico, lineal e isotrópico, para el cual $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$, la densidad de energía se expresa como:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon E^2(\vec{r}). \quad (4.172)$$

Ahora, de la relación:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad (4.173)$$

donde se determina que $\epsilon > \epsilon_0$, se deduce que en un material dieléctrico se almacena más energía que en el vacío.

Ejemplo 4.9

En este ejemplo se considera una esfera dieléctrica de radio R y permitividad ϵ , con una densidad volumétrica de carga homogénea ρ_0 . El objetivo es calcular la energía electrostática del sistema.

Solución: En primer lugar, se utilizará la relación:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}). \quad (4.174)$$

La integral se extiende sobre toda la región donde existe campo, que en este caso será fuera y dentro de la esfera, de modo que la ecuación anterior se expresará como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_{out}} d^3x \vec{E}_{out}(\vec{r}) \cdot \vec{D}_{out}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int_{V_{in}} d^3x \vec{E}_{in}(\vec{r}) \cdot \vec{D}_{in}(\vec{r}). \quad (4.175)$$

Donde se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{out}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{E}_{out}(\vec{r}), \\ \vec{D}_{in}(\vec{r}) &= \epsilon \vec{E}_{in}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (4.176)$$

siendo que $\vec{E}_{in}(\vec{r})$ y $\vec{E}_{out}(\vec{r})$ identifican los campos eléctricos dentro y fuera de la esfera, respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{V_{out}} d^3x \vec{E}_{out}(\vec{r}) \cdot \epsilon_0 \vec{E}_{out}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int_{V_{in}} d^3x \vec{E}_{in}(\vec{r}) \cdot \epsilon \vec{E}_{in}(\vec{r}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{out}} d^3x E_{out}^2(\vec{r}) + \frac{\epsilon}{2} \int_{V_{in}} d^3x E_{in}^2(\vec{r}), \end{aligned} \quad (4.177)$$

Utilizando la ley de Gauss, se puede demostrar que:

$$\vec{E}_{out} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r^2} \frac{1}{3} R^3 \hat{r}, \quad \text{para } r \geq R \quad (4.178)$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{\rho_0}{3\epsilon} r \hat{r}, \quad \text{para } r < R \quad (4.179)$$

A partir de los resultados anteriores, se determina que la energía electrostática es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{out}} d^3x \left[\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \right]^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{V_{in}} d^3x \left[\frac{\rho_0}{3\epsilon} r \hat{r} \right]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \right]^2 \int_R^\infty \frac{dr'}{r'^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi + \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{\rho_0}{3\epsilon} \right]^2 \int_0^R r'^4 dr' \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= (2\pi) \left[\frac{\rho_0}{3} \right]^2 \left[\frac{1}{\epsilon_0} R^6 \left(-\frac{1}{r'} \right)_R^\infty + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{r'^5}{5} \right)_0^R \right], \end{aligned} \quad (4.180)$$

es decir, la energía electrostática del sistema es:

$$U = \frac{2\pi R^5 \rho_0^2}{9} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right). \quad (4.181)$$

Una manera alternativa de calcular la energía electrostática es utilizando la relación:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}). \quad (4.182)$$

Aquí, la integral de volumen se extiende sobre la región que contiene la carga, es decir, en el volumen de la esfera para la cual $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, de modo que:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_0 \varphi_{in}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2} \int d^3x \varphi_{in}(\vec{r}), \quad (4.183)$$

siendo $\varphi_{in}(\vec{r})$ el potencial electrostático dentro de la esfera, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} \rightarrow \infty) &= \varphi_{in}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= - \int_{\infty}^{\vec{R}} \vec{E}_{out}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{E}_{in}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \end{aligned} \quad (4.184)$$

con lo cual se tiene que:

$$\varphi_{in}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3} \left[\left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 - \frac{1}{2\epsilon} r^2 \right]. \quad (4.185)$$

Entonces, la energía electrostática del sistema es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_0}{2} \int d^3x \varphi_{in}(\vec{r}) \\ &= \frac{\rho_0}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \frac{\rho_0}{3} \left[-\frac{1}{2\epsilon} r^2 + \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 \right] \\ &= \frac{\rho_0^2}{6} (4\pi) \int_0^R r^2 dr \left[-\frac{1}{2\epsilon} r^2 + \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 \right] \\ &= \frac{\rho_0^2}{6} (4\pi) \left[-\frac{1}{2\epsilon} \int_0^R r^4 dr + \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 \int_0^R r^2 dr \right] \\ &= \frac{\rho_0^2}{6} (4\pi) \left[-\frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^R + \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^R \right] \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2}{3} \left[-\frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{R^5}{5} \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \right) R^2 \left(\frac{R^3}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi R^5 \rho_0^2}{3} \left(-\frac{1}{10\epsilon} + \frac{1}{3\epsilon_0} + \frac{1}{6\epsilon} \right) \\ &= \frac{2\pi R^5 \rho_0^2}{3} \left(\frac{1}{15\epsilon} + \frac{1}{3\epsilon_0} \right), \end{aligned} \quad (4.186)$$

es decir,

$$U = \frac{2\pi R^5 \rho_0^2}{9} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right). \quad (4.187)$$

Este resultado concuerda con la expresión derivada en (4.181).

Ejercicio 4.8 Demostrar los resultados para el campo eléctrico expresados en (4.178) y (4.179).

Ejercicio 4.9 Demostrar el resultado para el potencial eléctrico expresado en (4.185)

Ejemplo 4.10

En este ejemplo se considera una esfera metálica de radio a y carga Q rodeada por un material dieléctrico de susceptibilidad χ_e y radio exterior b , como se indica en la figura 4.18. El objetivo es encontrar la energía de esta configuración.

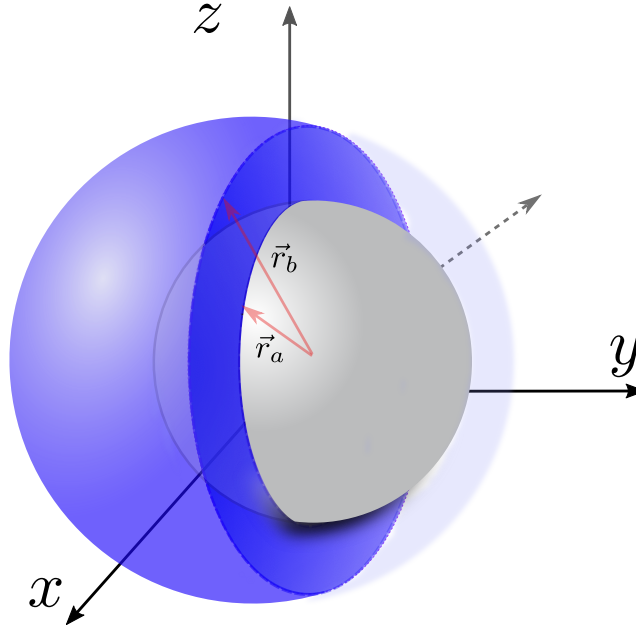


Figura 4.18: Esfera metálica de carga Q , rodeada esféricamente por material dieléctrico de susceptibilidad χ_e .

Solución: En el ejemplo (4.6) se mostró que los campos eléctricos para $r > b$ (fuera del material dieléctrico) y para $a < r < b$ (dentro del material dieléctrico), están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad r > b, \\ \vec{E}_2(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad a < r < b.\end{aligned}\tag{4.188}$$

Adicionalmente, $\vec{E} = 0$ dentro de la esfera metálica. La energía eléctrica del sistema se calcula a partir de:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{D}_2(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{D}_1(\vec{r}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int d^3x \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{E}_1(\vec{r}).\end{aligned}\tag{4.189}$$

Reemplazando las expresiones para los campos eléctricos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\epsilon}{2} \int d^3x \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon} \right)^2 \left[\frac{\epsilon}{2} \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \frac{1}{r^4} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_b^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \frac{1}{r^4} \right] \\
 &= \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon} \right)^2 (4\pi) \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (4\pi) \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b + \frac{1}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_b^\infty \right] \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) \right]. \tag{4.190}
 \end{aligned}$$

Ahora, de la definición de la permitividad del material, $\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{Q^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{b} \right] \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 + \chi_e)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \right] \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 + \chi_e)} \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{(1 + \chi_e)} \right) \frac{1}{b} \right] \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 + \chi_e)} \frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{(1 + \chi_e)} \frac{1}{b} \right]. \tag{4.191}
 \end{aligned}$$

Es decir, la energía electrostática del sistema en consideración es:

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \chi_e)} \left(\frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{b} \right). \tag{4.192}$$

Ejemplo 4.11

Se tiene un campo eléctrico uniforme en la dirección z dado por $\vec{E} = E\hat{k}$ en el vacío. En este campo eléctrico se coloca una esfera dieléctrica de radio R y permitividad ϵ , descargada y aislada (el dieléctrico es lineal, isotrópico y homogéneo). La esfera perturba el campo en la región próxima a ella, pero esta perturbación es muy pequeña como para alterar el campo en las regiones distantes. El objetivo es obtener el campo eléctrico y la polarización en la región exterior a la esfera.

Solución: Para resolver este problema, se utilizarán las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, que son aplicables dentro y fuera de la esfera; por tratarse de un material descargado, lineal, homogéneo e isotrópico.

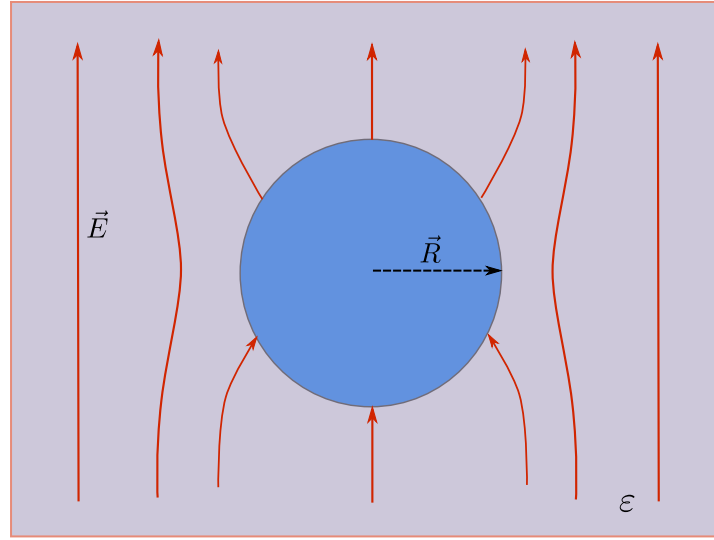


Figura 4.19: Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme.

Teniendo en cuenta que el problema presenta simetría azimutal, la solución vendrá dada por:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \quad (4.193)$$

Las soluciones fuera y dentro de la esfera deberán ser de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta), \\ \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_l}{r^{l+1}} + D_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.194)$$

Dado que la esfera no perturba el campo eléctrico en las regiones distantes, en estos sectores se debe cumplir que $\vec{E} = E\hat{k}$. Para encontrar el potencial en regiones distantes se parte de:

$$\begin{aligned} \varphi_E(z) - \varphi(z_0) &= - \int_{z_0}^z \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{z_0}^z E\hat{k} \cdot (dz'\hat{k}) \\ &= - \int_{z_0}^z E dz' = -E(z - z_0), \end{aligned} \quad (4.195)$$

a partir de lo cual se deduce que

$$\varphi_E(z) = -Ez + \underbrace{(Ez_0 + \phi(z_0))}_{V_0}. \quad (4.196)$$

Los valores z_0 y $\phi(z_0)$ son constantes que se pueden elegir convenientemente, que en este caso se han tomado de tal forma que $(Ez_0 + \phi(z_0)) = V_0$, con lo cual se tiene que:

$$\varphi_E(z) = -Ez + V_0, \quad \text{para } z \gg R \quad (4.197)$$

Dada la orientación de las coordenadas indicadas en la figura 4.19, se puede expresar el potencial anterior como:

$$\varphi_E = -Er \cos \theta + V_0 = -ErP_1(\cos \theta) + V_0P_0(\cos \theta), \quad (4.198)$$

donde se ha utilizado la representación de los primeros polinomios de Legendre.

Ahora, como se mostró en el ejemplo (4.3), el potencial eléctrico de la esfera en el exterior al ser polarizada, es equivalente al de un dipolo eléctrico, es decir,

$$\varphi_{esf} = \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{pP_1(\cos \theta)}{r^2}, \quad (4.199)$$

donde p será el momento dipolar eléctrico asociado a la esfera polarizada. Así, es posible afirmar que el potencial eléctrico fuera de la esfera deberá ser:

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(r, \theta) &= \varphi_E + \varphi_{esf} \\ &= -ErP_1(\cos \theta) + V_0P_0(\cos \theta) + \frac{pP_1(\cos \theta)}{r^2} \\ &= \frac{pP_1(\cos \theta)}{r^2} + V_0P_0(\cos \theta) - ErP_1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.200)$$

La cual deberá ser igual a la solución considerada anteriormente:

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_l}{r^{l+1}} + D_l r^l \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \left(\frac{C_0}{r} + D_0 \right) P_0(\cos \theta) + \left(\frac{C_1}{r^2} + D_1 r \right) P_1(\cos \theta) + \left(\frac{C_2}{r^3} + D_2 r^2 \right) P_2(\cos \theta) \\ &\quad + \left(\frac{C_3}{r^4} + D_3 r^3 \right) P_3(\cos \theta) + \dots \\ &= \frac{C_0 P_0(\cos \theta)}{r} + D_0 P_0(\cos \theta) + \frac{C_1 P_1(\cos \theta)}{r^2} + D_1 r P_1(\cos \theta) \\ &\quad + \frac{C_2 P_2(\cos \theta)}{r^3} + D_2 r^2 P_2(\cos \theta) + \frac{C_3 P_3(\cos \theta)}{r^4} + D_3 r^3 P_3(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (4.201)$$

Igualando términos del mismo orden en potencias de r en las ecuaciones (4.200) y (4.201), se determina que:

$$\begin{aligned} pP_1(\cos \theta) &= C_1 P_1(\cos \theta) \implies p = C_1, \\ V_0 P_0(\cos \theta) &= D_0 P_0(\cos \theta) \implies V_0 = D_0, \\ -E P_1(\cos \theta) &= D_1 P_1(\cos \theta) \implies -E = D_1, \\ C_0 &= 0, \\ C_l &= 0 \quad \text{para } l = 2, 3, 4, \dots, \\ D_l &= 0 \quad \text{para } l = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (4.202)$$

Así, el potencial fuera de la esfera deberá ser de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_{out}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_l}{r^{l+1}} + D_l r^l \right) P_l(\cos \theta) \\ &= V_0 P_0(\cos \theta) + \left(\frac{P}{r^2} - Er \right) P_1(\cos \theta).\end{aligned}\quad (4.203)$$

Con esto se concluye la solución para el potencial eléctrico fuera de la esfera. La siguiente parte del problema implica encontrar la expresión correspondiente para el potencial y el campo eléctrico dentro de la esfera, así como determinar la polarización en términos de los parámetros dados.

Ahora, el potencial dentro de la esfera se considera como:

$$\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta). \quad (4.204)$$

Para garantizar que este sea finito cuando $r \rightarrow 0$, se debe exigir que $A_l = 0$. De esta manera, el potencial dentro de la esfera se expresa en la forma:

$$\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (4.205)$$

La condición de continuidad del potencial implica que en la superficie de la esfera se debe cumplir:

$$\varphi_{in}(R, \theta) = \varphi_{out}(R, \theta), \quad (4.206)$$

es decir,

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0 P_0(\cos \theta) + \left(\frac{P}{R^2} - ER \right) P_1(\cos \theta). \quad (4.207)$$

Utilizando la condición de ortonormalización de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l' + 1} \delta_{l,l'}, \quad (4.208)$$

resulta que,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) &= V_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \\ &+ \left(\frac{P}{R^2} - ER \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_1(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta).\end{aligned}\quad (4.209)$$

De donde se obtiene:

$$B_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} = 2V_0 \delta_{0,l'} + \frac{2}{3} \left(\frac{P}{R^2} - ER \right) \delta_{1,l'}. \quad (4.210)$$

Entonces, se determina que:

$$\begin{aligned} \text{Para } l' = 0: \quad 2B_0 &= 2V_0 \implies B_0 = V_0, \\ \text{Para } l' = 1: \quad B_1 R &= \frac{P}{R^2} - ER, \\ \text{Para } l' = 2, 3, 4, \dots: \quad B_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} &= 0 \implies B_{l'} = 0. \end{aligned} \quad (4.211)$$

El valor de la constante de integración V_0 está indeterminado y se escoge igual a cero por conveniencia, de manera que: $B_0 = 0$. Por tanto, el potencial dentro de la esfera se puede expresar como:

$$\varphi_{in}(r, \theta) = B_1 r P_1(\cos \theta). \quad (4.212)$$

Hasta este punto, los potenciales dentro y fuera de la esfera se expresan como:

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(r, \theta) &= \left(\frac{P}{r^2} - Er \right) P_1(\cos \theta), \\ \varphi_{in}(r, \theta) &= B_1 r P_1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.213)$$

Todavía existen dos constantes por determinar, p y B_1 , y la ecuación que las relaciona es:

$$B_1 R = \frac{P}{R^2} - ER. \quad (4.214)$$

Se necesita una condición adicional para fijar estos valores. La siguiente condición se obtiene de la ecuación de continuidad de los vectores de desplazamiento eléctrico:

$$\left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} = \sigma(\vec{r}), \quad (4.215)$$

donde $\sigma(\vec{r})$ es la densidad superficial de carga libre en la superficie de la esfera dieléctrica. Dado que no hay carga libre, se tiene:

$$\vec{D}_2(\vec{r}) \cdot \hat{n} \Big|_S = \vec{D}_1(\vec{r}) \cdot \hat{n} \Big|_S. \quad (4.216)$$

Se identifica con el índice 1 el interior de la esfera de permitividad ϵ , y con el índice 2 la región fuera de la esfera (vacío), entonces: $\vec{D}_1(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}_{in}(\vec{r})$ y $\vec{D}_2(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}_{out}(\vec{r})$. El campo eléctrico $\vec{E}_{in}(\vec{r})$ dentro de la esfera se encuentra utilizando:

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{in}(r, \theta). \quad (4.217)$$

Para el campo eléctrico fuera de la esfera se tiene:

$$\vec{E}_{out}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{out}(r, \theta). \quad (4.218)$$

La condición de continuidad del vector de desplazamiento eléctrico se expresa entonces como:

$$\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_{out}(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon \frac{\partial \varphi_{in}(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (4.219)$$

Con esto, se obtiene:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \varphi_{out}(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=R} &= \left.\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{r^2} - Er\right) P_1(\cos \theta)\right|_{r=R} = \left(-\frac{2p}{R^3} - E\right) P_1(\cos \theta), \\ \left.\frac{\partial \varphi_{in}(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=R} &= \left.\frac{\partial}{\partial r} B_1 r P_1(\cos \theta)\right|_{r=R} = B_1 P_1(\cos \theta).\end{aligned}\quad (4.220)$$

De modo que:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \left(-\frac{2p}{R^3} - E\right) P_1(\cos \theta) &= \epsilon B_1 P_1(\cos \theta), \\ \epsilon_0 \left(-\frac{2p}{R^3} - E\right) &= \epsilon B_1,\end{aligned}\quad (4.221)$$

es decir,

$$B_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left(-\frac{2p}{R^3} - E\right). \quad (4.222)$$

Comparando las relaciones (4.214) y (4.222) se determina que:

$$\begin{aligned}B_1 R &= \frac{p}{R^2} - ER, \\ \frac{p}{R^3} - E &= -\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{2p}{R^3} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E, \\ \frac{p}{R^3} \left(1 + \frac{2\epsilon_0}{\epsilon}\right) &= E \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right), \\ p &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) R^3 E.\end{aligned}\quad (4.223)$$

Por lo tanto, la constante B_1 se expresa como:

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{p}{R^3} - E = \frac{1}{R^3} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) R^3 E - E \\ &= \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0 - (\epsilon + 2\epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) E \\ &= -\left(\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) E.\end{aligned}\quad (4.224)$$

De manera que el potencial fuera y dentro de la esfera está dado por:

$$\begin{aligned}\varphi_{out}(r, \theta) &= \left(\frac{p}{r^2} - Er\right) P_1(\cos \theta) = E \left[\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) \frac{R^3}{r^2} - r\right] P_1(\cos \theta) \\ &= E \left[\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) \frac{R^3}{r^2} - r\right] \cos \theta, \\ \varphi_{in}(r, \theta) &= B_1 r P_1(\cos \theta) = -\left(\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) Er P_1(\cos \theta) \\ &= -\left(\frac{3E\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) r \cos \theta.\end{aligned}\quad (4.225)$$

Finalmente, la polarización $\vec{P}$ de la esfera se puede calcular utilizando:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{in}(\vec{r}), \quad (4.226)$$

donde $\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$.

Con esto, se completa la descripción del campo eléctrico y la polarización dentro y fuera de la esfera dieléctrica en el campo eléctrico uniforme.

Ejercicio 4.10 Calcular los campos eléctricos externos e internos del problema anterior.

Ejercicio 4.11 Deducir la polarización de la esfera y las cargas de polarización asociadas. Mostrar que la carga total de polarización es nula.

Índice de figuras

2.1	Fuerza eléctrica F_{21} entre dos cargas puntuales q_1 y q_2	48
2.2	Vectores de fuerza debido a la interacción de cuatro cargas puntuales.	49
2.3	Fuerza ejercida por un elemento infinitesimal de carga dq' sobre una carga puntual q	55
2.4	Líneas de campo eléctrico (a) carga puntual positiva. (b) Carga puntual negativa. (c) Dos cargas puntuales con $q_1 = -q_2 > 0$. (d) Dos cargas puntuales con $q_1 = q_2 > 0$	57
2.5	Campo eléctrico de un elemento diferencial de carga dq' de una esfera hueca cargada.	58
2.6	Campo eléctrico debido a un elemento de carga dq' sobre una esfera con densidad de carga ρ	63
2.7	Campo eléctrico generado por un elemento de carga dq' de un anillo uniformemente cargado.	66
2.8	Campo eléctrico $d\vec{E}$, debido a una carga dq' sobre un disco de carga Q	68
2.9	Campo eléctrico generado por un anillo cargado en función de la distancia z , para una carga $Q = 1C$ y $R = 1m$	70
2.10	Representación de un circuito cuadrado de lado a , ubicado en el plano xy , con densidad de carga λ (Ejercicio (2.12).)	71
2.11	Ley de Gauss. Volumen V que rodea una densidad de carga ρ distribuida en el volumen V'	77
2.12	Representación gráfica de una trayectoria cerrada.	87
2.13	Cancelación de la fuerza eléctrica por una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ en el movimiento cuasiestático.	88
2.14	Configuración de 4 cargas puntuales en el espacio.	89
2.15	(a) Trabajo para desplazar la carga q_2 a la posición $\vec{r}_1$. (b) Trabajo para desplazar la carga q_3 a $\vec{r}_3$. (c) Trabajo para desplazar la carga q_4 a $\vec{r}_4$	90
2.16	Configuración de un sistema de tres cargas puntuales localizadas en las esquinas de cuadrado de la lado a ; una carga $+q$ se ubicará en el cuarto vértice.	93
2.17	Configuración de dos cascarones esféricos concéntricos con radios a y b , con cargas q y $-q$, respectivamente	99

2.18	Dipolo Eléctrico. (a) Diagrama para calcular el potencial y campo eléctrico en $\vec{r}$. (b) Líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico.	101
2.19	Definición de coordenadas $\vec{r}_+''$ y $\vec{r}_+''$ en el dipolo eléctrico.	102
2.20	Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo.	105
2.21	Diagrama para calcular potencial y campo eléctrico de una distribución de carga caracterizada por una densidad $\rho(\vec{r}')$	109
2.22	Representación de una carga puntual localizada en $z = a$	112
2.23	Distribución de cargas en un cuadrado con cargas $+q$ y $-q$ alternadas en los vértices.	114
2.24	Condiciones de frontera para el campo eléctrico a partir de la Ley de Gauss.	114
2.25	Condiciones de frontera a partir de la condición de irrotacionalidad del campo eléctrico.	117
2.26	Continuidad del potencial a través de una frontera.	117
3.1	Ejemplo (3.1). Región donde se calculará el potencial eléctrico $\phi(x,y)$ en un dominio rectangular.	127
3.2	Representación gráfica de la solución (3.66), con $L = 1m$ y $V = 5(N/m * C)$, acotando la suma a 20 términos.	130
3.3	Ejemplo (3.2). Configuración de placas metálicas para encontrar el potencial en la región dentro del tubo rectangular.	131
3.4	Solución ejemplo (3.2). Potencial $\phi(x,y)$, para $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$	134
3.5	Ejemplo (3.3). Configuración de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, acopladas a dos placas a potencial constante V_0	135
3.6	Ejemplo (3.4). Configuración de dos placas metálicas infinitas a potencial cero, acopladas a dos placas con potenciales definidos.	141
3.7	Solución ejemplo (3.4). Potencial $\phi(x,y)$, para $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$	145
3.8	Condiciones de frontera para el Ejercicio (3.4).	145
3.9	Condiciones de frontera: a) Ejercicio (3.5).	146
3.10	Condiciones de frontera: a) Ejercicio (3.6).	146
3.11	Ejemplo (3.5). Configuración de dos placas metálicas paralelas separadas por una distancia L	147
3.12	Ejercicio (3.7). Configuración de dos placas paralelas separadas por una distancia L , con potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$	150
3.13	Ejemplo (3.6). Cascarón rectangular, con superficies a potencial cero con excepción de la superficie $z = c$	153
3.14	Ejemplo (3.7). Tubo de metal semi-infinito de sección transversal rectangular de lados a y b	158
3.15	Representación gráfica de la solución (3.239) para diferentes valores de z , con $N = 40$ (límite truncado de la sumatoria para n y m), $V_0 = 10$, $a = 1$ y $b = 2$	162
3.16	Ejercicio (3.8). Cascarón rectangular semi infinito con superficies a potencial cero con excepción de $z = 0$	163
3.17	Ejercicio (3.9). Cascarón cúbico con superficies a potencial cero, con excepción de la superficie $z = a$	163
3.18	Ejercicio (3.11) y (3.12). Diagrama para calcular el potencial eléctrico de una cuña.	169
3.19	Primeras funciones de Bessel y Neumann de orden entero.	173
3.20	Ejemplo (3.9). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie circular en $z = L$	180

3.21	Ejemplo (3.10). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie lateral definida por $\rho = a$	186
4.1	a) Material dieléctrico en ausencia de campo eléctrico. b) Material dieléctrico en presencia de campo eléctrico.	219
4.2	Molécula de agua.	220
4.3	Material polar bajo la acción de un campo externo.	220
4.4	a) Volumen ΔV de material polar en ausencia de campo eléctrico. b) Volumen ΔV de material polar en presencia de campo eléctrico.	221
4.5	Potencial eléctrico $d\phi(\vec{r})$ asociado a dipolos eléctricos contenidos en $\Delta\vec{p}$	222
4.6	Origen de cargas superficiales de polarización en un dieléctrico polarizado uniformemente.	224
4.7	Origen de cargas volumétricas de polarización en un dieléctrico no uniformemente polarizado.	224
4.8	Varilla dieléctrica de longitud L y sección transversal A , con polarización $\vec{P}(\vec{r}) = (ax^2 + b)\hat{i}$	226
4.9	Barra rectangular con polarización $\vec{P} = P_0\hat{k}$	227
4.10	Esfera dieléctrica de permitividad ϵ y polarización $\vec{P}(\vec{r}) = P\hat{k}$	228
4.11	Cascarón dieléctrico esférico con polarización en dirección radial.	240
4.12	Sección trasversal de un cascaron dieléctrico con polarización radial.	241
4.13	Esfera metálica de carga Q , rodeada esféricamente de material dieléctrico con permitividad ϵ	244
4.14	Superficie cilíndrica usada en la integración de la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico.	246
4.15	Circuito cerrado aplicado a la integración del rotacional del campo eléctrico.	249
4.16	Interfaz entre dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas κ_1 y κ_2	250
4.17	Plancha dieléctrica con constante dieléctrica κ_1 limitada por material dieléctrico de constante dieléctrica κ_2	252
4.18	Esfera metálica de carga Q , rodeada esféricamente por material dieléctrico de susceptibilidad χ_e	257
4.19	Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme.	259

Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Métodos matemáticos*. Universidad de los Andes, 2022.
- [2] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc., 1985.
- [3] E. Butkov, *Mathematical physics*. Addison-Wesley Publ., 1973.
- [4] J. A. Edminister, *Theory and Problems of Electromagnetism*. McGraw-Hill, 1995.
- [5] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter*. Basic Books, 2011.
- [6] W. Greiner, *Classical Electrodynamics*. Springer, 1991.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 4th ed*. Pearson, 2013.
- [8] S. Hassani, *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. Springer New York, 2000.
- [9] M. Heald y J. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*. Dover Publications, Incorporated, 2012.
- [10] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd ed. Wiley, 1999.
- [11] A. F. Kip, *Fundamentals of electricity and magnetism*. McGraw-Hill, 1962.
- [12] D. A. Kraus J. D. y Fleish, *Electromagnetismo con Aplicaciones*. McGraw-Hill, 2000.
- [13] P. Lorrain, D. R. Corson y J. A. Vallés Abarca, *Campos y ondas electromagnéticos*. Selecciones Científicas, 1972.
- [14] K. D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo, Vol. I*. UEPG, 2000.
- [15] M. Panofsky W. K. y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, 1955.
- [16] J. Reitz, F. Milford, R. Christy y C. Avila, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Pearson Educación, 1996.
- [17] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, 1961.

German Enrique Ramos Zambrano

Realizó sus estudios de maestría y doctorado en el Instituto de Física Teórica de la Universidad Estadual Paulista en Sao Paulo, Brasil.

Actualmente es docente en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño y en el programa de Maestría en Física de la misma universidad. Forma parte del grupo de Altas Energías, y sus principales líneas de investigación incluyen la teoría clásica y cuántica de campos, así como en didáctica de la enseñanza de la física.

Juan Carlos Salazar Montenegro

Es físico egresado de la Universidad de Nariño, con una maestría en Física de la Universidad de Antioquia y doctorado en Ciencias Físicas de la Universidad de los Andes. Actualmente es docente de tiempo completo en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño.

Integra el grupo de Altas Energías y su investigación se centra en modelos más allá del Modelo Estándar en física de partículas y en didáctica de la enseñanza en física, enfocándose en el desarrollando de herramientas didácticas.

Ángela Viviana Gómez Azuero

Es licenciada en Física, con maestría y doctorado en Ciencias-Física.

Ha trabajado como docente en la Universidad de los Andes y en la Universidad Mariana, donde actualmente es la directora del programa de Ingeniería Civil. Ha participado en grupos de investigación enfocados en Física, Matemáticas, Materia Condensada y Ciencias Básicas aplicadas a la Ingeniería. Con amplia experiencia en programación, su especialización se centra en simulaciones complejas y en la analítica de datos. También investiga la didáctica de la enseñanza en Física, desarrollando metodologías innovadoras para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos físicos a nivel universitario.

èditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

"Electrodinámica, teoría y problemas, volumen I" se presenta como una herramienta robusta para aquellos interesados en profundizar en los fundamentos y aplicaciones de la electricidad en el vacío y en medios materiales. Estructurado de forma lógica y accesible, el texto aborda temas complejos con claridad y rigor académico, convirtiéndose en un recurso valioso tanto para estudiantes de educación superior como para docentes que buscan un texto guía.

El libro comienza con una introducción a la notación indicial, estableciendo las bases matemáticas necesarias para la manipulación de vectores y tensores. Este enfoque prepara al lector para un análisis profundo de las coordenadas curvilíneas, crucial para comprender la geometría de los campos eléctricos en diversos contextos. La explicación clara de estos conceptos iniciales asegura que los estudiantes adquieran una comprensión sólida antes de avanzar a temas más complejos.

También se profundiza en métodos matemáticos aplicados a problemas electrostáticos, incluyendo la solución de la ecuación de Laplace en diferentes sistemas de coordenadas. La sección dedicada a los campos eléctricos en los materiales es especialmente relevante, abordando las interacciones entre electricidad y materiales, una temática crucial en la física moderna.

Un aspecto destacado de este libro es su enfoque en la resolución de ejercicios complejos. Cada capítulo incluye ejemplos resueltos que guían al lector a través del proceso de resolución, permitiendo una práctica efectiva y la aplicación de la teoría. Esto no solo facilita el aprendizaje, sino que también prepara a los estudiantes para los desafíos de sus estudios e investigaciones futuras.

En resumen, este libro de electrodinámica es una contribución significativa al aprendizaje de la física, combinando una teoría rigurosa con un enfoque práctico en la resolución de problemas. Es altamente recomendable para quienes desean comprender los principios de la electrodinámica. Con su claridad, organización y atención al detalle, se espera que este texto se convierta en un referente en la formación de futuros físicos. La promesa de una segunda parte, centrada en el magnetismo y las ondas electromagnéticas, anticipa con entusiasmo la continuación de este viaje educativo.

