Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Determinación de la constante de Hubble mediante el análisis de la diferencia del tiempo de atraso entre las imágenes de un sistema lente gravitacional

Maderli Selena Toro Garcia
Director: Dr. Edwin Alexander Delgado Insuasty.

San Juan de Pasto, 26 mayo de 2025

©2025 - Maderli Selena Toro Garcia

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Dr. Edwin Alexander Delgado Insuasty
Director

Dr. Juan Carlos Salazar Montenegro
Jurado

Dr. Eduardo Rojas Peña
Jurado

San Juan de Pasto, de del 2025

Contenido

1. Introducción **16**

2. Planteamiento del Problema **18**

3. Objetivos **19**
3.1. Objetivo general 19
3.2. Objetivos específicos 19

4. Fundamentos de relatividad general **20**
4.1. Ecuaciones de campo de Einstein 21
4.2. Linealización de las ecuaciones de campo 22
4.3. Solución de Schwarzschild 26
4.4. Ecuación de la geodésica 30
4.5. Deflexión de la luz debido a una masa puntual 32
4.6. Deflexión de la luz debido a una distribución continua de masa 36

5. Modelo estándar de la cosmología relativista **39**
5.1. Expansión del universo 40
5.1.1. Ley de Hubble 42
5.1.2. Medida de H_0 a partir de medidas locales y del estudio del universo temprano. 43
5.1.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker 45
5.1.3.1. Propagación de la luz en un espacio-tiempo de FRW 48
5.1.4. Ecuaciones de Friedmann 50
5.1.5. Parámetros cosmológicos 54
5.2. Distancias cósmicas 56
5.2.1. Distancia comóvil 56
5.2.2. Distancia propia 56
5.2.3. Distancia de luminosidad 57
5.2.4. Distancia de diámetro angular 60
5.3. Cosmografía 62

6. Teoría de las lentes gravitacionales **70**
6.1. Ecuación de la lente . . . 70
6.2. Tiempo de atraso . . . 73
6.2.1. Tiempo de atraso gravitacional . . . 74
6.2.2. Tiempo de atraso geométrico . . . 74
6.3. Tiempo de atraso en el modelo de la lente puntual . . . 76
6.4. Tiempo de atraso en el modelo de la esfera isoterma sin núcleo (SIS) . . . 78
6.5. Tiempo de atraso en el modelo de la esfera isoterma con núcleo (NSIS) . . . 82

7. Resultados **86**
7.1. Sistema PG 1115+080 . . . 88
7.2. Sistema HE 0435-1223 . . . 90
7.3. Sistema SDSS J1004+4112 . . . 92
7.4. Sistema PKS 1830-211 . . . 98
7.5. Determinación de H_0 a partir de supernovas de tipo Ia. . . . 102
7.6. Contraste general . . . 104

8. Conclusiones **107**

A. Densidad de masa para una galaxia o un cúmulo **109**

B. Cálculo de posiciones **112**

Índice de figuras

4.1. Deflexión de la luz debido a un objeto de masa puntual M. La figura muestra la trayectoria de un rayo de luz que se aproxima paralelamente al eje z y pasa a una distancia ξ del objeto, obteniéndose una desviación descrita por el ángulo $\tilde{\alpha}$. 33

4.2. Esquema de la deflexión de la luz debido a una distribución de masa en la aproximación de lente delgada. Imagen modificada a partir del esquema presentado en la Referencia [1]. 36

5.1. Distancia de luminosidad vs corrimiento al rojo. Las distancias de luminosidad y sus respectivos errores se han obtenido a partir de los 229 datos recopilados en el articulo [2] correspondientes a $z < 1{,}2$. Además se puede notar la consistencia entre los datos y el modelo ΛCDM [3] denotado con una línea punteada roja. Como referencia se presenta la línea naranja con un modelo de universo dominado por materia. 60

5.2. Distancia de diámetro vs corrimiento al rojo. Las distancias de diamétro y sus respectivos errores se han obtenido a partir de los 229 datos recopilados en el articulo [2] correspondientes a $z < 1{,}2$ por medio de la relación (5.83). Se puede notar una tendencia de los datos al modelo ΛCDM [3] denotado con una línea punteada roja. Como referencia se presenta la línea naranja con un modelo de universo dominado por materia. 62

5.3. En la figura se presenta el ajuste del módulo de distancia μ en función del corrimiento al rojo z para un conjunto de 26 supernovas de tipo Ia observadas en el infrarrojo cercano en [4]. Se empleó el modelo ΛCDM en régimen de bajo corrimiento al rojo ($z \lesssim 0{,}046$), fijando los parámetros $q_0 = -0{,}55$, $j_0 = 1$ y $M_J = -18{,}524 \pm 0{,}021$ obtenidos por la Referencia [4]. La curva roja corresponde al ajuste teórico. En el recuadro se muestra el valor obtenido para la constante de Hubble, $H_0 = (73{,}0 \pm 0{,}2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 68

6.1. Geometría de un sistema lente gravitacional en el cual se aprecia la deflexión de la luz debido a una masa puntual M. Imagen modificada del esquema en la Referencia [5] 71

6.2. Esquema comparativo de las trayectorias que recorre la luz en presencia y ausencia un objeto deflector. Fuente: [5] 74

6.3. Superficie tiempo de atraso para una masa puntual, con el observador, lente y fuente alíneados. 77

6.4. Esquema ilustrativo utilizado para resolver la integral del potencial reescalado en una distribución continua de masa. En la Figura se muestra el parámetro de impacto $\vec{\xi}$, que indica la posición del rayo incidente en el plano de la lente, y el vector $\vec{\xi'}$, que representa la ubicación de un elemento infinitesimal de masa dentro del mismo plano. Imagen modificada del esquema presentado por [6]. 80

7.1. Campo de visión alrededor de PG 1115+080 con el telescopio ESO MPIA de 2.2 m en el Observatorio de La Silla, combinando 92 exposiciones (8.5 horas de exposición). Fuente: [7], Datos obtenidos con el telescopio ESO MPIA. ©ESO. 89

7.2. Imagen del sistema lente gravitacional HE $0435-1223$ observada con el instrumento NICMOS del Telescopio Espacial Hubble (HST, por sus siglas en inglés). Se distinguen claramente las cuatro imágenes del cuásar dispuestas de manera simétrica alrededor de la galaxia lente elíptica ubicada en el centro. Esta imagen corresponde al panel superior de la Figura 1 de [8] y ha sido utilizada aquí únicamente con fines académicos e ilustrativos. 91

7.3. Imagen del sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112 obtenida con HST/ACS, donde se observan cinco imágenes del cuásar (etiquetadas como A-E). La galaxia más brillante del cúmulo, identificada como G1, está superpuesta sobre la imagen E. Esta imagen corresponde al panel izquierdo de la Figura 1 de [9] y se ha reproducido con fines académicos a partir de la versión disponible en arXiv (arXiv:1005.3103). 93

7.4. Diferencia relativa en las estimaciones de H_0 entre los modelos NSIS y SIS para la lente G1 en el sistema SDSS J1004+4112, considerando una velocidad de dispersión fija de $\sigma = 352\ \mathrm{km/s}$. Se analiza la variación del parámetro de núcleo θ_c desde 0 hasta $\theta_{\mathrm{trunc}} = 3{,}2''$, observándose convergencia entre ambos modelos en el límite $\theta_c \to 0$ y diferencias crecientes para valores más grandes del núcleo ($\theta_c/\theta_{\mathrm{trunc}} > 0{,}2$). En este sistema, el valor observado del núcleo es $\theta_c = 0{,}1''$. 96

7.5. Imagen del entorno del cuásar PKS $1830-211$ obtenida por HST. Las imágenes múltiples del cuásar, marcadas con cruces magenta y etiquetadas como A, B y C, corresponden a distintas trayectorias de luz deflectadas por una lente gravitacional. Esta figura corresponde a la Figura A.1 del artículo de [10], publicado en Astronomy & Astrophysics, y se utiliza aquí con fines académicos. 99

7.6. Histograma de densidad de probabilidad de 1000 valores simulados de H_0, obtenidos mediante el método de Monte Carlo para el sistema PKS 1830−211 modelando la lente como una masa puntual. Se utilizaron como entradas: el tiempo de atraso observado $\Delta t_{AB} = (25 \pm 3)$ días [11] y un rango de masa para la lente de $(2-5) \times 10^{10}\, M_\odot$ [12]. El eje horizontal representa H_0 en $\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, y el eje vertical muestra la densidad de probabilidad normalizada. La curva roja muestra un ajuste gaussiano a los datos simulados, del cual se estimó la media y la desviación estándar, y por consiguiente el valor de la constante de Hubble $H_0 = (56 \pm 7)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 100

7.7. Histograma de densidad de probabilidad de 1000 valores simulados de H_0, obtenidos mediante el método de Monte Carlo para el sistema PKS 1830−211 modelando la lente como SIS. Se emplearon como entradas: el tiempo de atraso observado $\Delta t_{AB} = (25 \pm 3)$ días [11] y una velocidad de dispersión de $264\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ [13]. El eje horizontal representa H_0 en $\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, y el eje vertical muestra la densidad de probabilidad normalizada. La curva roja muestra un ajuste gaussiano a los datos simulados, del cual se estimó la media y la desviación estándar; por lo tanto, $H_0 = (79 \pm 12)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. . 101

7.8. Ajuste del módulo de distancia μ en función del corrimiento al rojo z, utilizando la función aproximada 5.115, originalmente propuesta para corrimientos al rojo pequeños. El ajuste se aplicó a un conjunto de 1244 supernovas de tipo Ia seleccionadas del catálogo publicado por el SDSS-II SN Survey en [14] (Tabla 11), en el rango $z < 0{,}6$, fijando los parámetros $q_0 = -0{,}55$, $j_0 = 1$ y $M_J = -18{,}524 \pm 0{,}021$ obtenidos por la Referencia [4], con el fin de evaluar el comportamiento de la función en ese dominio. 103

7.9. Comparación de diferentes estimaciones de la constante de Hubble H_0 bajo el modelo ΛCDM plano, incluyendo resultados del universo temprano (Planck 2018 [3]), distancias locales (SHOES [15], SNe Ia) y lentes gravitacionales (H0LiCOW [16], PG 1115+080, HE 0435−1223, PKS 1830−211, SDSS J1004+4112). Los valores obtenidos en este trabajo mediante SNe Ia y los sistemas HE 0435−1223 y PKS 1830−211 coinciden, dentro de los márgenes de error, con las mediciones locales (SHOES y HOLiCOW) . El sistema SDSS J1004+4112 arroja un valor 8σ más alto que HOLiCOW, mientras que PG 1115+080 y PKS 1830−211 se superponen con Planck; sin embargo, este valor alto y aparente concordancia, se atribuye al modelado simplificado de las lentes. Lo cual refuerza la persistencia de la tensión entre el universo temprano y local. Imagen adecuada a las necesidades de nuestro trabajo a partir de la Referencia [17]. 104

B.1. Imagen del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, capturada con la Cámara 2 del instrumento NICMOS del HST. En ella se muestran las cuatro imágenes del cuásar y la galaxia lente, orientada con el norte hacia arriba y el este a la izquierda. Tomada de la Figura 1 de [18] (publicada en The Astrophysical Journal y disponible en arXiv). Esta imagen se presenta únicamente con fines académicos. 114

Índice de Tablas

5.1. Comparación de espacios con diferentes curvaturas. 46
5.2. Valores de algunos parámetros cosmológicos obtenidos a partir del análisis de Planck 2018 [3]. 55

7.1. Datos observacionales utilizados para modelar los diferentes sistemas de lente gravitacional. Aquí, z_L y z_S corresponden a los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente, respectivamente. Las imágenes se etiquetan según su disposición en las Figuras 7.1, 7.2,7.3 y 7.5, y las coordenadas θ_x, θ_y se expresan respecto al centro de la galaxia lente. Los retardos temporales entre imágenes se indican como Δt_{ij}, donde i y j corresponden a las etiquetas de las imágenes involucradas ($A_1 = A_2$, ya que están próximas). Las referencias bajo el nombre de cada sistema contienen los datos observacionales empleados en este estudio. 87
7.2. Estimación de H_0 a partir del sistema PG 1115+080, modelado como una masa puntual de $M = 1{,}5 \times 10^{10}\, M_\odot$. Para evaluar la sensibilidad del resultado al parámetro de masa, el cálculo se repite con variaciones de hasta el $\pm 40\,\%$ del valor de la masa. Cada celda indica el valor de H_0 inferido para cada par de imágenes y el valor de masa indicado el la columna a la cual pertenece. En la última fila se presenta el promedio de estos valores; es fácil ver que el valor estimado para este modelo es $H_0 = (68 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 90
7.3. Estimación de H_0 a partir del sistema lente gravitacional HE 0435−1223, modelando la lente como una masa puntual con valor de referencia $M = 1 \times 10^{11}\, M_\odot$ [16]. Se considera una variación de esta masa de $\pm 40\,\%$ respecto a dicho valor para analizar su impacto en la estimación de H_0. Para cada valor de masa y cada retardo temporal observado, se calculó H_0, y se reportó el valor promedio en la última fila; el valor estimado es $H_0 = (74 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 91
7.4. Estimaciones de la constante de Hubble H_0 obtenidas a partir del sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112, considerando un modelo de lente puntual con masa $M = 1 \times 10^{12{,}2}\, M_\odot$ [19]. Se explora el efecto de la variación de masa, hasta un 40 % del valor de referencia, en la estimación de H_0. Para cada combinación de masa y retardo temporal observado, se determina un valor de H_0 cuyo promedio se muestra en la última fila. El valor estimado para este sistema es $H_0 = (136 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 92

7.5. Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelando su lente con un perfil SIS. La velocidad de dispersión de la galaxia lente se toma como $\sigma = (352 \pm 13)\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ [20]; se evalúan los valores extremos del rango de error ($\sigma = 339\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y $365\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) junto con el valor central. Para cada σ y cada retardo temporal observado entre imágenes, se calcula H_0. El valor estimado es $H_0 = (116 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 94

7.6. Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelado con un perfil NSIS con núcleo $\theta_c = 0{,}1''$. Se muestran los valores obtenidos a partir de los tiempos de retardo medidos entre las imágenes, considerando tres velocidades de dispersión de la lente: el valor central $\sigma = 352\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y los extremos del rango de incertidumbre $\sigma = 339\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y $365\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ [20]. La última fila presenta el promedio de H_0 para cada caso; el valor estimado es $H_0 = (117 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 95

7.7. Estimaciones H_0 para el sistema SDSS J1206+4332 modelando la lente como SIE. La velocidad de dispersión se varía a lo largo de las filas tomando los valores extremos dentro de su margen de error, $(352 \pm 13)\ \mathrm{km/s}$, mientras que la elipticidad ϵ se varía a lo largo de las columnas considerando los límites superior e inferior de su incertidumbre, $0{,}3 \pm 0{,}05$. Para cada combinación, H_0 se obtuvo a partir del promedio de las estimaciones calculadas con los diferentes tiempos de atraso observados en el sistema. El valor estimado es $H_0 = (95 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. 97

7.8. Estimaciones H_0 para el sistema de lente gravitacional PKS 1830−211, calculadas mediante un modelo de lente con perfil NSIS. Los valores de H_0 se obtienen para tres velocidades de dispersión $\sigma = 259, 264, 269$ km/s [13], y tres valores del parámetro de núcleo θ_c, equivalentes al 8 %, 30 % y 50 % del ángulo subtendido por el radio de corte $\theta_{trunc} = 0{,}34''$ [21]. Esta Tabla ilustra cómo la estimación de H_0 varía al modificar simultáneamente la velocidad de dispersión y la extensión del núcleo en el perfil de la lente. El valor estimado para este modelo fue $H_0 = (69 \pm 8)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ 102

B.1. Coordenadas ecuatoriales de las imágenes A y B del sistema lente gravitacional SDSS J1206+4332. Tomadas de: [22]. 112

B.2. Transformación de coordenadas para el sistema PG 1115+080. A la izquierda se muestran las posiciones originales reportadas por [23]. A la derecha, las posiciones tras la inversión del eje θ_x, de acuerdo con la convención adoptada en este trabajo. 116

Dedicatoria

A mi familia por su incondicional apoyo.

Resumen

La constante de Hubble H_0 es un parámetro fundamental en cosmología que cuantifica la tasa de expansión del universo. Sin embargo, persiste una discrepancia significativa entre los valores obtenidos localmente y aquellos derivados del fondo cósmico de microondas, conocida como la tensión de Hubble. Ante este conflicto, resulta necesario recurrir a métodos alternativos que permitan estimar H_0 de forma complementaria. En este trabajo se explora el efecto lente gravitacional como uno de estos métodos (método local), modelando la lente a través de modelos simplificados como lo son: la lente puntual, la esfera isoterma singular (SIS) y no singular (NSIS). Aunque el análisis realizado no alcanza el nivel de estudios especializados como HOLiCOW [17], los resultados muestran que incluso con modelos básicos es posible obtener estimaciones razonables y comprender la sensibilidad de H_0 a distintos parámetros físicos. Esto resalta el valor del efecto lente gravitacional como herramienta complementaria y motiva el desarrollo de estudios futuros más precisos y realistas.

Palabras clave: Efecto lente gravitacional, Constante de Hubble, Tiempo de atraso, Relatividad general.

Abstract

The Hubble constant H_0 is a essential parameter in cosmology that quantifies the expansion rate of the universe. However, a significant discrepancy remains between the values obtained from local measurements and those inferred from the cosmic microwave background, that is known as the Hubble tension. Considering this discrepancy, it is necessary to explore alternative methods that can provide complementary estimates of H_0. This work explores gravitational lensing as one such method (local methods), modeling the lens using simplified mass models such as the point mass lens, the singular isothermal sphere (SIS), and the non-singular isothermal sphere (NSIS). Although the analysis presented here does not reach the level of sophistication of specialized studies like HOLiCOW [17], the results show that even with basic models it is possible to obtain reasonable estimates and gain insight into the sensitivity of H_0 to different physical parameters. This highlights the value of gravitational lensing as a complementary tool and motivates the development of more precise and realistic future studies.

Keywords: Gravitational lensing, Hubble constant, Time delay, General relativity.

Glosario

CMB: Radiación de fondo de microondas(Cosmic Microwave Background), remanente del Big Bang, que proporciona información sobre el universo primitivo.

Tensión de Hubble: Discrepancia significativa entre los valores de H_0 obtenidos a partir de mediciones locales (como cefeidas y supernovas de tipo Ia) y aquellos derivados del CMB bajo el modelo ΛCDM.

ΛCDM: Modelo cosmológico estándar que incluye una constante cosmológica (Λ) asociada a la energía oscura y materia oscura fría (CDM, por Cold Dark Matter).

Efecto lente gravitacional: Proceso por el cual la luz de un objeto distante se curva debido a la presencia de un objeto masivo intermedio, deformando, ampliando o multiplicando la imagen observada. Es una herramienta fundamental para estudiar la distribución de materia en el universo.

Tiempo de atraso gravitacional: Diferencia temporal en la llegada de los rayos de luz que siguen trayectorias distintas alrededor de una lente gravitacional.

SIS/NSIS: Modelos de masa utilizados en el estudio de lentes. SIS (Esfera Isoterma Singular) supone una distribución de masa sin núcleo; NSIS (No Singular) introduce un núcleo para evitar divergencias físicas en el centro.

Capítulo 1

Introducción

La constante de Hubble, H_0, desempeña un papel fundamental en la cosmología, ya que permite cuantificar la tasa de expansión del universo. Por esta razón, los métodos para determinarla con precisión son objeto de un estudio constante y riguroso [24–26]. En los últimos años, ha surgido una discrepancia persistente entre los valores obtenidos a partir de mediciones locales, como aquellas basadas en cefeidas, supernovas de tipo Ia y lentes gravitacionales, y los valores inferidos a partir de la observación del fondo cósmico de microondas (CMB). Esta diferencia de 5.3 σ[1], conocida como la tensión de Hubble, ha motivado un intenso debate en la comunidad científica. Aunque se han propuesto múltiples explicaciones, incluyendo errores sistemáticos y posibles extensiones al modelo cosmológico estándar ΛCDM, no existe aún un consenso definitivo sobre su origen [25].

Recientemente, nuevos avances observacionales han renovado el interés por esta discusión. En particular, el equipo liderado por Wendy Freedman utilizó el Telescopio Espacial James Webb (JWST) para aplicar tres métodos independientes con el fin de estimar H_0: el primero, denominado rama asintótica de gigantes de la región J (JAGB), se basa en el uso de estrellas gigantes ricas en carbono para medir distancias, lo cual permitió obtener un valor de $(67.96 \pm 1.71)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. El segundo método, conocido como el pico de la rama de gigantes rojas (TRGB), consiste en identificar la luminosidad máxima alcanzada por las estrellas gigantes rojas al momento de iniciar la fusión de helio, arrojando un valor de $(69.85 \pm 1.75)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Finalmente, el tercer método se basa en las cefeidas, estrellas variables cuya relación periodo-luminosidad permite usarlas como candelas estándar para medir distancias extragalácticas, proporcionando un valor de $(72.05 \pm 1.86)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [28, 29]. Aunque los dos primeros métodos se acercan al valor estimado a partir del CMB, el tercero se alinea con las mediciones del equipo SH0ES liderado por Adam Riess, que desde 2005 ha reportado valores cercanos a $(73.04 \pm 1.04)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ utilizando supernovas de tipo Ia y cefeidas [30]. Estas diferencias, lejos de resolverse, se han visto aún más acentuadas con los recientes resultados del experimento DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument), que sugiere que la densidad de energía oscura podría no ser constante [31], como se asumía

[1] La combinación de la medida obtenida por métodos locales como la de SHOES y la colaboración HOLICOW es 5.3 σ más grande que la predicción mediante CMB del sátelite Planck [27].

en el modelo ΛCDM, sino que evolucionaría con el tiempo. De confirmarse, esta posibilidad abriría la puerta a un escenario cosmológico más complejo y, al mismo tiempo, agravaría la tensión existente en torno a la constante de Hubble.

En este contexto, el uso de lentes gravitacionales surge como un método alternativo e independiente para estimar H_0. Este fenómeno, predicho por la teoría general de la relatividad, permite estudiar cómo la presencia de una masa curva el espacio-tiempo a su alrededor y desvía la trayectoria de la luz proveniente de una fuente lejana. En particular, cuando una fuente distante, una lente masiva y un observador están bien alineados, se generan múltiples imágenes de la fuente, separadas angularmente y con tiempos de llegada distintos [5, 32]. La diferencia en estos tiempos, conocida como retardo de tiempo gravitacional, puede utilizarse para estimar H_0, siempre que se disponga de un modelo adecuado para la lente. Esta técnica fue propuesta por primera vez por Sjur Refsdal en 1964 y desde entonces ha evolucionado hasta convertirse en una herramienta valiosa en la cosmología observacional moderna [33].

Uno de los principales desafíos de este método radica en el modelamiento preciso de la masa de la lente gravitacional. Aunque actualmente es posible medir los retardos de tiempo con una precisión notable, la incertidumbre en la forma del potencial gravitacional afecta directamente la estimación de H_0 [34]. No obstante, colaboraciones como H0LiCOW y TDCOSMO [16, 35] han demostrado que, mediante un modelado cuidadoso de la lente y utilizando múltiples sistemas, es posible reducir significativamente estas incertidumbres y obtener resultados competitivos con otros métodos tradicionales. Este enfoque tiene la ventaja adicional de operar en escalas intermedias de corrimiento al rojo, lo cual le proporciona una sensibilidad complementaria entre las mediciones locales y las del fondo cósmico [36].

Motivado por la persistencia de la tensión de Hubble y por el potencial que ofrece el método de lentes gravitacionales, el presente trabajo se propone estudiar esta técnica, desde los conocimientos adquiridos en el pregrado de física, como una vía independiente para la estimación de H_0. Para ello, se revisan los aspectos teóricos fundamentales del efecto lente gravitacional y se deduce la ecuación del tiempo de atraso gravitacional para distintos modelos de masa, como la masa puntual, la esfera isoterma singular (SIS) y la esfera isoterma no singular (NSIS). Posteriormente, se aplican estos resultados a sistemas reales bien documentados en la literatura, tales como PG 1115+080, HE 0435−1223, SDSS J1004+4112 y PKS 1830−211, con el fin de calcular el valor de H_0 y analizar su sensibilidad frente al modelo adoptado para la lente.

Aunque este estudio no pretende competir en precisión con las grandes colaboraciones internacionales, sí busca establecer una estimación razonable de la constante de Hubble a partir de lentes gravitacionales, situándose dentro del rango aceptado en la literatura actual.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La determinación de la constante de Hubble (H_0) es de gran importancia en la cosmología debido a que está relacionada con la tasa de expansión del universo y su edad. En general existen dos métodos para su medición, uno en el que los valores de H_0 se obtienen a partir de la escala de distancia local y otro a partir de medidas indirectas hechas por medio de observaciones del universo primitivo mediante el Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés) [25]. En el presente trabajo se explorará la importancia del estudio de las lentes gravitacionales en la determinación de la constante de Hubble a partir del estudio de la función tiempo de atraso y su aplicación a distintos sistemas de lentes gravitacionales disponibles en la literatura; este enfoque pertenece al primer método mencionado.

Desde esta perspectiva, se pretende responder a la pregunta ¿Es posible determinar la constante de Hubble a partir del estudio de las lentes gravitacionales encontrando un valor aceptable en comparación a los disponibles en la literatura? Para cumplir con este propósito se hará la comparación del valor de H_0 con el valor obtenido a partir de medidas locales de distancia de supernovas de tipo Ia.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo general

Determinar la constante de Hubble mediante el estudio de la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes en un sistema lente gravitacional.

3.2. Objetivos específicos

- Hacer una revisión bibliográfica para explorar los aspectos teóricos más relevantes del tema.
- Deducir el ángulo de deflexión de la luz para una masa puntual desde la perspectiva de la teoría linealizada de campo gravitacional.
- Deducir la ecuación tiempo de atraso gravitacional para un sistema lente gravitacional modelado como una esfera isoterma con y sin núcleo.
- Determinar la constante de Hubble a partir de la ecuación tiempo de atraso para diferentes sistemas lente gravitacional disponibles en la literatura.
- Contrastar los resultados obtenidos a partir del método anterior con el valor de la constante de Hubble obtenida a partir de medidas locales de distancia de supernovas de tipo Ia.

Capítulo 4

Fundamentos de relatividad general

En 1907, Einstein enunció el principio de equivalencia, pilar fundamental de la teoría de la relatividad general. Este principio establece que no es posible distinguir entre los efectos de un campo gravitacional y los de un sistema de referencia acelerado en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo. Esto implica que, en tales condiciones, el movimiento de una partícula en un campo gravitacional es independiente de su masa o composición [37–39]. Guiado por esta idea, Einstein comprendió que debía abandonar la noción clásica de fuerza gravitacional y buscar una descripción geométrica de la gravedad. Inspirado además en el principio de Mach, según el cual la inercia de un cuerpo debe depender de la distribución de toda la materia en el universo, se propuso construir una teoría en la que la geometría del espacio-tiempo estuviera determinada por el contenido material. No obstante, en el desarrollo final de la relatividad general, culminado en 1915, Einstein no incorporó plenamente el principio de Mach, ya que sus ecuaciones permiten soluciones en el vacío, donde la estructura espacio-tiempo puede existir incluso en ausencia de materia. La teoría resultante interpreta la gravedad no como una fuerza convencional, sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo provocada por la presencia de materia y/o energía [40, 41].

Para asegurar la universalidad de las leyes físicas, Einstein impuso el principio de covarianza general, exigiendo que las ecuaciones conservaran su forma bajo cualquier transformación infinitesimal de coordenadas. Esto requiere expresar las leyes de la física en forma tensorial, usando para ello la geometría de Riemann[1] [32, 42]. Además, al formular las ecuaciones de campo, Einstein buscó que en el límite de campos gravitacionales débiles y velocidades pequeñas se recuperara la teoría newtoniana de la gravitación, asegurando así la compatibilidad con observaciones previas.

En este contexto, la gravedad en relatividad general se describe mediante la métrica, representada por un tensor simétrico $g_{\mu\nu}$, cuya variación de punto a punto refleja la influencia gravitacional de la distribución de materia y/o energía [32]. En ausencia de materia, esta

[1] La geometría de Riemann permite describir el espacio-tiempo como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal) que, aunque localmente puede parecer euclidiana, globalmente puede presentar curvatura.

se reduce a la métrica de Minkowski, la cual describe un espacio-tiempo sin curvatura. En coordenadas cartesianas es común escribirla como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

En esencia, la métrica juega un papel muy importante en el contexto de la relatividad general. Esta no solo describe la geometría del espacio-tiempo, sino que también permite definir el elemento de línea, una herramienta fundamental para medir distancias entre eventos. En coordenadas generales, $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, el elemento de línea se expresa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu{}^{2}, \tag{4.2}$$

el cual permanece invariante bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, proporcionando una descripción geométrica coherente (y general) de distancia y de la estructura causal del espacio-tiempo [5, 32]. Sin embargo, la métrica por sí sola no es suficiente para cuantificar la curvatura del espacio-tiempo, se necesitan otras herramientas matemáticas para describir este fenómeno. Para ello, se recurre al tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci [32, 39]. La relación precisa entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de materia y energía se formaliza a través de las ecuaciones de campo de Einstein, que constituyen el núcleo de la teoría de la relatividad general y que serán el objeto de estudio a continuación.

4.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein presentadas en 1915 durante una serie de conferencias en la Academia Prusiana de Ciencias [38], son la base de la relatividad general. Estas ecuaciones describen cómo la materia y/o la energía en el universo afectan la curvatura del espacio-tiempo y cómo esta curvatura, a su vez, influye en el movimiento de la materia y la luz [5, 32, 41]. Matemáticamente, estas ecuaciones se escriben como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

siendo $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento, G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y la curvatura escalar (traza del tensor de Ricci) R, se relacionan por medio del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas con el tensor de Riemann[3] de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}, \tag{4.4}$$

[2]Se adopta el convenio de suma de Einstein, en el cual se asume una suma implícita sobre los índices repetidos.

[3]El tensor de Riemann es la medida más fundamental de la curvatura del espacio-tiempo. Se puede pensar en él como una herramienta para cuantificar cómo las líneas se curvan en la presencia de materia [32, 43].

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

donde el tensor de Riemann

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}, \tag{4.6}$$

se define en términos de los símbolos de Christoffel que describen el transporte paralelo en un espacio-tiempo curvo. Estos símbolos en función de la métrica y sus derivadas se definen como:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\alpha} + g_{\lambda\alpha,\nu} - g_{\nu\alpha,\lambda} \right). \tag{4.7}$$

Energía y la materia, representadas por el tensor $T_{\mu\nu}$, se relacionan directamente con la geometría del espacio-tiempo, descrita por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, a través de las Ecuaciones (4.3), las cuales constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Esta no linealidad refleja el hecho de que la gravedad no solo actúa sobre la materia y la energía, sino también sobre sí misma, ya que el propio campo gravitacional contribuye a la curvatura del espacio-tiempo. Por esta razón, la relación entre la fuente y el campo no es simplemente proporcional, como ocurre en la gravedad newtoniana [41, 44]. No obstante, en el límite newtoniano las Ecuaciones de campo (4.3) recuperan la forma de la ecuación de Poisson, asegurando la consistencia con la teoría clásica.

Además de esta correspondencia con el régimen clásico, el tensor energía-momento satisface la condición $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que expresa la conservación de la energía y el momento [5, 32, 44]. Esta propiedad impone, a su vez, que el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein también tenga derivada covariante nula, lo que justifica la forma específica en que se construye el tensor $G_{\mu\nu}$.

Una vez establecida la estructura general de las ecuaciones de campo, resulta útil analizar su comportamiento en situaciones físicas específicas. Un caso relevante consiste en considerar pequeñas perturbaciones alrededor de un espacio-tiempo plano. Este enfoque, conocido como aproximación lineal, permite estudiar desviaciones respecto a la métrica de Minkowski y resulta particularmente útil en el análisis de campos gravitacionales débiles.

4.2. Linealización de las ecuaciones de campo

De hecho, cuando se consideran campos gravitacionales débiles, junto con las condiciones (4.9) y (4.10), es de esperar que se recupere la teoría de gravitación newtoniana de acuerdo con el principio de correspondencia [39, 42]. En este contexto, resulta conveniente analizar el límite newtoniano para establecer la conexión entre el potencial gravitacional de la teoría newtoniana, φ, y la métrica del espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$.

En el límite newtoniano, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\text{(I)} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad |\epsilon h_{\mu\nu}| \ll 1. \qquad \text{Campo gravitacional débil.} \tag{4.8}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0. \qquad \text{Campo gravitacional estacionario.} \tag{4.9}$$

$$\text{(III)} \quad \frac{dx^i}{dt} \ll c. \qquad \text{Movimiento no relativista.} \tag{4.10}$$

Además de imponer la condición de que el espacio-tiempo asintóticamente es plano [39], es decir

$$\lim_{r\to\infty} h_{\mu\nu} = 0, \tag{4.11}$$

siendo r un parámetro radial y $h_{\mu\nu}$ una pequeña perturbación que distorsiona el espacio-tiempo [32, 45]. Por tanto, se cumple $|\epsilon h_{\mu\nu}| \ll 1$, donde ϵ es un parámetro adimensional muy pequeño. Esto hace posible considerar solo términos lineales en ϵ e ignorar potencias mayores.

Las condiciones anteriores permiten obtener una descripción coherente del límite newtoniano desde relatividad general, mediante el estudio de la Ecuación de la geodésica[4] (4.4). Esta ecuación describe el movimiento de partículas en un campo gravitacional y depende explícitamente de los símbolos de Christoffel calculados a partir de la métrica perturbada. Su análisis, bajo las condiciones de campo débil, estaticidad y movimiento no relativista, permite establecer la forma explícita que debe tomar la componente h_{00} para reproducir el comportamiento gravitacional en el límite newtoniano. Con este objetivo, a continuación se calcularán los símbolos de Christoffel, comenzando por la obtención de la métrica inversa.
Bajo la primera condición (4.8), se puede analizar la forma que adopta la métrica inversa, suponiendo que también puede expresarse como una desviación respecto a la métrica de Minkowski [39]. Así, se propone que su inversa tenga la siguiente estructura:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \epsilon H^{\mu\nu}, \quad |\epsilon H^{\mu\nu}| \ll 1. \tag{4.12}$$

Para determinar $H^{\mu\nu}$, se parte de la definición fundamental de métrica inversa

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \tag{4.13}$$

$$(\eta^{\mu\alpha} + \epsilon H^{\mu\alpha})(\eta_{\alpha\nu} + \epsilon h_{\alpha\nu}) = \delta^\mu_\nu, \tag{4.14}$$

que al expandir, conservando solo términos lineales en ϵ, se encuentra que $H^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$. En consecuencia, la métrica inversa adopta la forma:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

Tiendo en cuenta la anterior expresión para hallar los símbolos de Christoffel (4.7)

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\phi} - \epsilon h^{\mu\phi})(\eta_{\phi\alpha,\nu} + \epsilon h_{\phi\alpha,\nu} + \eta_{\phi\nu,\alpha} + \epsilon h_{\phi\nu,\alpha} - \eta_{\nu\alpha,\phi} - \epsilon h_{\nu\alpha,\phi}), \tag{4.16}$$

[4] La ecuación de la geodésica se deduce y se estudia en la sección 4.4.

estos, bajo la aproximación de campo débil[5], pueden escribirse como

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{\mu\phi}(h_{\phi\alpha,\nu} + h_{\phi\nu,\alpha} - h_{\nu\alpha,\phi}). \tag{4.17}$$

En particular, la condición de campo estacionario (4.9) implica que las derivadas temporales de $h_{\mu\nu}$ sean nulas. Por lo tanto es necesario analizar los casos posibles para los índices de $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$:

Caso $\mu = 0$: para que no se anule directamente este símbolo, por la definición de la métrica de Minkowski, se requiere que $\phi = 0$. Una vez establecida esta condición, se examina las componentes restantes del símbolo de Christoffel, considerando las distintas combinaciones de los índices.

- $\nu = 0, \alpha = 0$:
$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{00}\left(h_{00,0} + h_{00,0} - h_{00,0}\right) = 0. \tag{4.18}$$
- $\nu = i, \alpha = j$: en este contexto, las componentes h_{0j} se anulan debido a la condición de estaticidad, la cual implica la ausencia de movimiento en las fuentes. Esto se traduce en que $T_{0j} = 0$, y dado que h_{0j} está asociado a los flujos de momento, también debe desaparecer en este límite [41, 45], por lo tanto
$$\Gamma^{0}_{ij} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{00}\left(h_{0j,i} + h_{i0,j} - h_{ij,0}\right) = 0. \tag{4.19}$$
- $\nu = 0, \alpha = i$: Tomando en cuenta la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel en ν y α, se tiene
$$\Gamma^{0}_{i0} = \Gamma^{0}_{0i} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{00}\left(h_{00,i} + h_{i0,0} - h_{i0,0}\right) = \frac{\epsilon}{2}h_{00,i}. \tag{4.20}$$

Caso $\mu = i$: debido a la estructura de la métrica de Minkowski, $\Gamma^{i}_{\mu\nu}$ se anula a menos que se fije explícitamente $\phi = i$. Lo que conlleva a[6]

- $\nu = 0, \alpha = 0$:
$$\Gamma^{i}_{00} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{ii}\left(h_{0i,0} + h_{i0,0} - h_{00,i}\right) = \frac{\epsilon}{2}h_{00,i}. \tag{4.21}$$
- $\nu = 0, \alpha = j$: tomando en cuenta la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel en ν y α y debido a que $h_{0j} = 0$, se tiene
$$\Gamma^{i}_{j0} = \Gamma^{i}_{0j} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{ii}\left(h_{ij,0} + h_{0i,j} - h_{0j,i}\right) = 0. \tag{4.22}$$

[5]En la aproximación de campo débil se emplea la primera condición de límite newtoniano y la aproximación lineal.

[6]En este caso no se aplica el convenio de suma de Einstein para η_{ii}.

- $\nu = j, \alpha = k$: esta componente se simplifica gracias a la simetría de los símbolos de Christoffel en sus índices covariantes y a la simetría del tensor $h_{\mu\nu}$, lo que da como resultado

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\epsilon}{2}\eta^{ii}\left(h_{ik,j} + h_{ji,k} - h_{jk,i}\right) = \frac{\epsilon}{2}\left(2h_{ji,k} - h_{jk,i}\right). \tag{4.23}$$

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel, es posible analizar la ecuación de la geodésica (4.4) en sus diferentes componentes; en particular, para el caso $\mu = i$, esta adquiere la siguiente forma

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0, \tag{4.24}$$

la cual puede simplificarse teniendo en cuenta la relación $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}$, junto con las condiciones (4.10) y (4.8). En este contexto el tercer término se aproxima a cero, lo cual permite reducir la ecuación a:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\epsilon c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \tag{4.25}$$

A partir de la relación anterior, se puede establecer una conexión entre el potencial newtoniano y h_{00}. En la teoría de Newton, el movimiento de una partícula de masa m, bajo la influencia exclusiva de un campo gravitacional, está descrito por la segunda ley (caída libre)

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \tag{4.26}$$

al igualar está ecuación con (4.25) se obtiene la siguiente relación

$$-\frac{\epsilon c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \tag{4.27}$$

Finalmente, al integrar esta última expresión, la conexión entre el campo gravitacional de Newton y la métrica está dada por

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{\epsilon c^2} + C, \tag{4.28}$$

donde C debe ser cero por la condición de frontera (4.11) y $\varphi = -GM/r$. Así

$$h_{00} = \frac{-2GM}{\epsilon c^2 r}. \tag{4.29}$$

Se puede concluir entonces, que la componente g_{00} puede ser escrita en términos de una pequeña perturbación $\epsilon h_{00} = -2GM/c^2r$ de la métrica de Minkowski ($g_{00} = \eta_{00} - 2GM/c^2r = 1 - 2GM/c^2r$).
Para estructurar las ecuaciones de campo en este contexto, es necesario calcular primero el

tensor de Riemann utilizando los símbolos de Christoffel linealizados (4.17). Las componentes de este tensor, expresadas en términos de la perturbación, se expresan mediante

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{2}(h^{\mu}_{\beta,\nu\alpha} + h_{\nu\alpha},^{\mu}_{\ \beta} - h^{\mu}_{\alpha,\nu\beta} - h_{\nu\beta},^{\mu}_{\ \alpha}). \tag{4.30}$$

Con el cálculo de estas componentes, se puede obtener, respectivamente, el tensor de Ricci y la curvatura escalar [32, 39]

$$R_{\mu\nu} = \frac{\epsilon}{2}(h^{\alpha}_{\ \nu,\mu\alpha} + h^{\alpha}_{\ \mu,\nu\alpha} - h_{,\mu\nu} - \Box h_{\mu\nu}) \tag{4.31}$$

$$R = \epsilon(h^{\alpha\beta}_{\ \ ,\alpha\beta} - \Box h), \tag{4.32}$$

donde h es la traza de $h_{\mu\nu}$ y $\Box$ es el operador d'Alembertiano. Finalmente, reemplazando (4.31) y (4.32) en (4.3), las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas toman la forma [32, 39, 43]

$$\epsilon\left(h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}_{\ \ ,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\Box h\right) = \frac{16\pi G}{c^4}. \tag{4.33}$$

Esta ecuación describe cómo las perturbaciones gravitacionales se propagan y responden a la presencia de materia y/o energía representadas por el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. En el caso del vacío, donde $T_{\mu\nu} = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación de ondas para la perturbación $h_{\mu\nu}$, describiendo así la propagación de ondas gravitacionales en un espacio-tiempo plano [39].

En el régimen de campo débil, esta aproximación, entre otras, permite modelar la curvatura del espacio-tiempo inducida por una masa con simetría esférica, proporcionando un marco útil para el estudio de lentes gravitacionales en cosmología. Sin embargo, una descripción más rigurosa de la trayectoria de la luz en presencia de materia requiere una solución exacta del campo gravitacional [5].

Una solución que cumple estos requerimientos es la solución de Schwarzschild que describe el espacio-tiempo curvado por una masa puntual. Bajo la condición de campo débil, esta solución exhibe la forma linealizada de las ecuaciones de campo de Einstein.

Para comprender esta solución en detalle, a continuación se presentarán las condiciones físicas y matemáticas que permiten obtenerla como una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío.

4.3. Solución de Schwarzschild

Las Ecuaciones (4.3) representan un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales acopladas, no lineales y en derivadas parciales, cuya solución son las componentes de la métrica. Dado su alto grado de complejidad, para obtener soluciones exactas o aproximadas suele ser necesario

imponer ciertas condiciones y restricciones sobre el sistema físico que se está estudiando, tales como: simetría del espacio-tiempo, condiciones de estaticidad sobre la métrica[7], campos gravitacionales débiles, entre otras [5].

La primera solución exacta de estas ecuaciones fue presentada en 1916 por Karl Schwarzschild [46], la cual describe el campo gravitacional exterior a un objeto esférico y no rotante como el Sol [5, 32, 47]. Estas propiedades permiten fijar la forma general del elemento de línea, cuya estructura refleja la simetría del sistema y constituye la métrica que resuelve las ecuaciones de campo en este contexto. Con el fin de analizar matemáticamente esta solución, y dado que la simetría del sistema esférico lo permite, resulta natural adoptar un sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). Las coordenadas angulares (θ, ϕ) están bien definidas localmente por la simetría del sistema, mientras que la coordenada radial r se introduce de manera que las esferas de radio constante tengan un área $4\pi r^2$. Sin embargo, tanto r como t requieren una interpretación cuidadosa, ya que su relación con cantidades físicas medibles por observadores depende de la métrica. [48].

En particular, para describir adecuadamente la parte espacial de la métrica en este sistema de coordenadas, se emplea el intervalo en coordenadas esféricas $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$, rdr y r, ya que son cantidades invariantes bajo rotaciones que cumplen con la condición de simetría. Por otro lado, la parte temporal debe cumplir la condición de estaticidad, lo que implica que los términos cruzados temporal-espacial no se tengan en cuenta para la solución, restringiendo la parte temporal del intervalo a dt^2 [48]. De este modo, el intervalo espacio-temporal adquiere la siguiente estructura general:

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{4.34}$$

Es conveniente que las funciones $A(r)$ y $B(r)$ se expresen mediante exponenciales con el fin de que la signatura de la métrica no cambie [45], así el elemento de línea se reduce a

$$ds^2 = e^{N(r,t)}c^2dt^2 - e^{L(r,t)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2, \tag{4.35}$$

lo que implica que la métrica pueda escribirse de forma matricial como se muestra a continuación:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{N(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{L(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Para determinar la forma de las funciones $N(r,t)$ y $L(r,t)$, se recurre a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \tag{4.37}$$

[7] Implica que el campo sea independiente del tiempo y simétrico en el tiempo (no cambia frente a inversiones temporales).

las cuales permiten establecer las condiciones que debe satisfacer la métrica para describir adecuadamente la geometría del espacio-tiempo en ausencia de materia. Tomando la traza de esta ecuación, se obtiene que el escalar de curvatura se anula, lo que reduce las ecuaciones de campo a la forma más sencilla $R_{\mu\nu} = 0$. Esta condición diferencial impone restricciones sobre las funciones $N(r,t)$ y $L(r,t)$. Para resolverlas, es necesario calcular explícitamente los símbolos de Christoffel asociados a la métrica dada en (4.36). Con este propósito, se emplea la librería *EinsteinPy* [49], a través de la cual se obtienen los símbolos de Christoffel no nulos:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{N}, && \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}N', && \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\dot{L}e^{L-N},\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}N'e^{N-L}, && \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\dot{L}, && \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}L',\\
&\Gamma^1_{22} = -re^{-L}, && \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-L}, && ,\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, &&\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, && \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta, &&
\end{aligned} \tag{4.38}$$

denotando las derivadas correspondientes de la siguiente forma: $N' = \frac{\partial N}{\partial r}$, $L' = \frac{\partial L}{\partial r}$; $\dot{N} = \frac{\partial N}{\partial t}$, $\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial t}$, las ecuaciones diferenciales que relacionan $N(r,t)$ y $L(r,t)$, finalmente son:

$$R_{00} = e^{N-L}\left(\frac{N''}{2} - \frac{L'N'}{4} + \frac{N'^2}{4} + \frac{N'}{r}\right) - \frac{\dot{L}}{2} - \frac{\dot{L}(\dot{L}-\dot{N})}{4} = 0, \tag{4.39}$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot{L}}{r} = 0, \tag{4.40}$$

$$R_{11} = -\frac{N''}{2} + \frac{L'N'}{4} - \frac{N'^2}{4} + \frac{L'}{r} - e^{L-N}\left(\frac{\ddot{L}}{2} + \frac{\dot{L}(\dot{L}-\dot{N})}{4}\right) = 0, \tag{4.41}$$

$$R_{22} = -e^{-L}\left[1 + \frac{1}{2}r(N'-L')\right] + 1 = 0, \tag{4.42}$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta\, e^{-L}\left[1 + \frac{1}{2}r(N'-L')\right] + \sin^2\theta = 0. \tag{4.43}$$

La Ecuación (4.40) indica que la función L es independiente de la coordenada temporal t. Como consecuencia, las Ecuaciones (4.39) y (4.41) pueden simplificarse, y al sumarlas en su forma reducida se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$L' + N' = 0, \tag{4.44}$$

cuya integración conduce a la siguiente relación

$$N = -L + g(t). \tag{4.45}$$

Al reemplazar (4.45) en (4.42), se obtiene la siguiente igualdad

$$e^{-L}\left(-rL' + 1\right) = 1. \tag{4.46}$$

Con el fin de resolver esta ecuación diferencial, se multiplica ambos lados de (4.46) por e^L y se reorganiza para despejar L'. Esto permite aplicar el método de separación de variables, consiguiendo la forma:

$$\frac{dL}{e^L - 1} = \frac{dr}{r}. \tag{4.47}$$

Para facilitar la integración de (4.47), se introduce el cambio de variable $f(r) = e^{-L}$, de modo que $L = -\ln f$,

$$\int \frac{df}{1-f} = \int \frac{dr}{r}, \tag{4.48}$$

cuya solución conduce a la expresión

$$\ln(1-f) = \ln(r) + C, \tag{4.49}$$

que al simplificar y sustituir de nuevo en términos de L, se logra obtener:

$$e^{L(r)} = \frac{1}{1 - C/r}. \tag{4.50}$$

Como condición de frontera, $r \to \infty$, se espera que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano, lo que significa que la métrica debe aproximarse a la de Minkowski en coordenadas esféricas. En este límite, tanto $L(r)$ como $N(r)$ tienden a cero, y la función $g(t)$ de la Ecuación (4.45) debe anularse. Por lo tanto, se concluye que $N(r) = -L(r)$, y así:

$$e^{N(r)} = 1 - C/r. \tag{4.51}$$

Con estos resultados la forma preliminar de la métrica de Schwarzschild es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{4.52}$$

La métrica de Schwarzschild en términos del potencial newtoniano φ, considerando la conexión en el límite newtoniano (4.29), se escribe como [5, 32, 47]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{4.53}$$

La métrica de Schwarzschild es una herramienta fundamental en el estudio de la relatividad general y en la comprensión de diversos fenómenos astrofísicos y cosmológicos. Uno de sus aspectos más relevantes para este trabajo es que permite describir la deflexión de la luz en las cercanías de objetos masivos, como estrellas o agujeros negros.

Para complementar el estudio de la deflexión de la luz es necesario considerar la ecuación de la geodésica. Esta ecuación describe cómo las partículas y los rayos de luz se mueven en un espacio-tiempo curvo, permitiendo obtener una forma de calcular el ángulo de deflexión causado por geometría del espacio-tiempo.

4.4. Ecuación de la geodésica

En mecánica clásica, las partículas libres se desplazan en trayectorias rectilíneas teniendo como marco de referencia un espacio euclidiano. En relatividad especial, estas trayectorias se generalizan como líneas rectas en el espacio-tiempo plano de Minkowski. En relatividad general, las trayectorias libres, denominadas geodésicas, son curvas determinadas por la métrica del espacio-tiempo, cuya curvatura está ligada a la distribución de masa y/o energía mediante las ecuaciones de Einstein.

Una forma de describir el movimiento de partículas libres en estos distintos marcos teóricos es a través del principio de mínima acción, el cual establece que, de todas las trayectorias posibles que podría seguir un sistema físico, la naturaleza selecciona aquella para la cual la acción S es estacionaria [8]. En el caso de una partícula libre de masa m, en ausencia de un campo gravitacional [50], la acción toma la forma

$$S = -mc \int ds. \tag{4.54}$$

donde ds es el elemento de línea del espacio-tiempo. En ausencia de gravedad, ds se reduce a la métrica de Minkowski. En un espacio-tiempo curvo, ds depende de la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu} \tag{4.55}$$

y las trayectorias que extremizan S (geodésicas) generalizan la noción de "línea recta" al incorporar la curvatura espacio-temporal. Estas geodésicas representan las rutas naturales de partículas libres bajo la influencia de la gravedad [5, 51].

Siguiendo el formalismo presentado en [51], para parametrizar todos los posibles caminos x^i recorridos por una partícula al desplazarse del punto A al punto B, se introduce un parámetro escalar λ, el cual varía monótonamente desde un valor inicial $\lambda(A)$ hasta un valor final $\lambda(B)$. Este parámetro permite describir la trayectoria de forma general y reescribir la acción como:

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda = \int L d\lambda, \tag{4.56}$$

donde L representa el lagrangiano del sistema, el cual se identifica por comparación como

$$L = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \tag{4.57}$$

siendo $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ representa la derivada de las coordenadas respecto al parámetro afín λ. A partir de este lagrangiano, es posible derivar las ecuaciones de movimiento mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange [50]

[8] La acción es una medida de la evolución de un sistema a lo largo del tiempo.

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0. \tag{4.58}$$

Al calcular las derivadas presentes en las ecuaciones de Euler-Lagrange con el lagrangiano (4.57), se obtiene como resultado

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{m^2c^2}{L} g_{\mu\rho}\dot{x}^\mu, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = \frac{m^2c^2}{2L}\partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \tag{4.59}$$

En el caso de una partícula masiva, resulta conveniente reemplazar la parametrización general λ por la longitud de arco s, relacionada con el tiempo propio por $ds = c\,d\tau$ [51]. Este cambio es permitido, ya que el tiempo propio representa el tiempo medido por un reloj que se mueve junto con la partícula, y constituye una parametrización natural de su trayectoria en el espacio-tiempo. Así, el cálculo del primer término de las Ecuaciones de (4.58) puede expresarse como

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{m^2c^2 g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu}{L}\right] = \frac{ds}{d\lambda}\frac{d}{ds}\left[\frac{m^2c^2 g_{\mu\nu}}{L}\frac{ds}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right]. \tag{4.60}$$

Dado que se cumple la relación $\frac{ds}{d\lambda} = -\frac{L}{mc}$ y considerando la identidad $\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$, las expresiones (4.59) y (4.60) se simplifican respectivamente a

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} = \frac{L}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}, \tag{4.61}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{m^2c^2 g_{\mu\rho}\dot{x}^\mu}{L}\right] = L\left[\frac{dg_{\mu\rho}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right], \tag{4.62}$$

lo que implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange tomen la siguiente forma

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \partial_\nu g_{\mu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} - \frac{1}{2}\partial_\rho g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{4.63}$$

Para facilitar la manipulación del segundo término en (4.63), es evidente que puede escribirse como $\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho})$, aprovechando la simetría en los índices μ y ν. Esta forma resulta útil para contraer la Ecuación (4.63) con la métrica inversa y renombrar los índices convenientemente. Como resultado, recordando (4.7), la ecuación de la geodésica adopta la siguiente forma:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds} = 0, \tag{4.64}$$

mientras que para una partícula masiva, esta ecuación adquiere la siguiente estructura

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0. \tag{4.65}$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden describe cómo una partícula masiva sigue una geodésica en un espacio-tiempo curvo, utilizando los símbolos de Christoffel para modelar la

evolución de su trayectoria.
Se puede suponer que el campo gravitacional que determina la trayectoria de la partícula es débil, lo que permite aplicar la aproximación lineal. Así, considerando el concepto de cuadrivelocidad ($u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$), la forma linealizada de los símbolos de Christoffel (4.65), y contrayendo con la métrica inversa, la Ecuación (4.4) se reduce a:

$$\frac{dx_\theta}{d\tau} + \frac{\epsilon}{2}(h_{\theta\alpha,\nu} + h_{\theta\nu,\alpha} - h_{\nu\alpha,\theta})u^\nu u^\mu = 0. \tag{4.66}$$

El segundo y tercer término de (4.66) se pueden reescribir como $\frac{\epsilon}{2}h_{\sigma\nu,\alpha}\, u^\alpha u^\nu + \frac{\epsilon}{2}h_{\sigma\nu,\alpha}\, u^\alpha u^\nu = \epsilon\, h_{\sigma\nu,\alpha}\, u^\alpha u^\nu$ debido a que sobre ν y α hay contracción simétrica, de manera que la estructura de la ecuación de la geodésica linealizada en términos de la cuadrivelocidad se presenta como

$$\frac{dx_\theta}{d\tau} + (\epsilon h_{\theta\alpha,\nu} - \frac{\epsilon}{2}h_{\nu\alpha,\theta})u^\nu u^\mu = 0. \tag{4.67}$$

A continuación, por medio del estudio de las geodésicas nulas se comprenderá cómo la curvatura del espacio-tiempo generado por un campo gravitacional debido a la presencia de una masa que puede ser considerada como puntual (con ciertas consideraciones), afecta el movimiento de los fotones.

4.5. Deflexión de la luz debido a una masa puntual

Según la relatividad general, materia y/o energía curvan la geometría del espacio-tiempo, haciendo que los objetos, incluida la luz, sigan trayectorias llamadas geodésicas [5, 41]. Un antecedente histórico de esta idea es el trabajo de Johann Georg von Soldner en 1801, quien, aplicando la teoría de gravitación de Newton, calculó que la luz se desvía 0.85 segundos de arco al pasar cerca del Sol [38, 52, 53]. En 1911, Albert Einstein abordó el mismo problema utilizando su teoría de la relatividad especial y llegó al mismo valor [54]. No obstante, en 1915, con la formulación de la relatividad general, predijo una deflexión de la luz dos veces mayor, ya que en esta teoría no solo la luz, sino el propio espacio-tiempo se ve afectado por la gravedad [55]. Esta predicción fue confirmada durante el eclipse solar de 1919 en Sobral Brasil, en un experimento liderado por Arthur Eddington y Frank Dyson, consolidando la relatividad general como la teoría más adecuada para describir la gravitación [56].

En este contexto, desde el punto de vista de la relatividad general, la deflexión de la luz es el fenómeno en el que la trayectoria de la luz se desvía al pasar cerca de un campo gravitacional debido a una distribución de masa [32, 55]. Para estudiar este fenómeno, se puede considerar a la luz como un conjunto de partículas llamadas fotones, lo que permite analizar su comportamiento a través de la ecuación relativista de movimiento para una partícula en un campo gravitacional, teniendo en cuenta que la masa en reposo del fotón es nula [32].

Dicha ecuación de movimiento corresponde a la ecuación de la geodésica (4.67). Esta expresión describe la trayectoria para una partícula masiva. Sin embargo, debido a que el tiempo propio no está bien definido para partículas sin masa como el fotón, dado que $ds^2 = 0$,

es necesario reescribir la ecuación en términos del cuadrimomento P^μ. Este satisface una geodésica nula, la cual se parametriza mediante el parámetro afín λ, que permite describir la evolución del fotón. De este modo, la ecuación de movimiento de un fotón en un espacio-tiempo ligeramente perturbado se expresa como:

$$dP_\mu + (\epsilon h_{\mu\alpha,\beta} P^\alpha - \frac{\epsilon}{2} h_{\alpha\beta,\mu} P^\alpha) dx^\beta = 0. \tag{4.68}$$

Esta ecuación describe cómo varía el cuadrimomento del fotón cuando se propaga en un espacio-tiempo débilmente perturbado. Además, permite estudiar el cambio en la dirección del rayo de luz debido a la presencia de un campo gravitacional débil, y constituye la base para el cálculo del ángulo de deflexión.

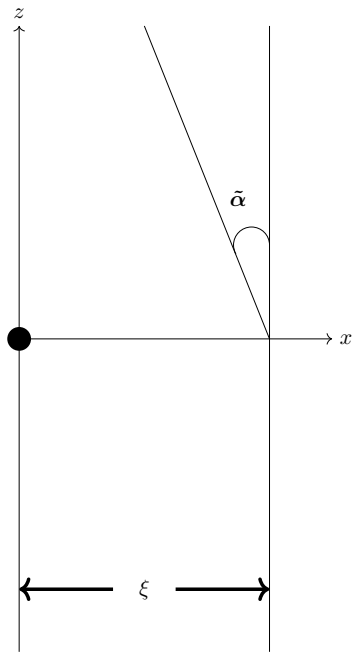

Figura 4.1: Deflexión de la luz debido a un objeto de masa puntual M. La figura muestra la trayectoria de un rayo de luz que se aproxima paralelamente al eje z y pasa a una distancia ξ del objeto, obteniéndose una desviación descrita por el ángulo $\tilde{\alpha}$.

Considerando el caso particular en que la masa deflectora M se encuentra ubicada sobre el eje z, y el rayo de luz incide paralelamente a dicho eje, a una distancia transversal ξ (parámetro de impacto), como se muestra en la Figura 4.1, el ángulo de deflexión puede determinarse a partir de la componente x del cambio en el cuadrimomento. En la aproximación de ángulos

pequeños, esta relación toma la forma[9]:

$$\tilde{\alpha} \approx \frac{\Delta P_x}{P_z} = \frac{\Delta P_1}{P^3}. \tag{4.69}$$

Para determinar el cambio en el cuadrimomento del fotón, se integra la ecuación de movimiento (4.68) a lo largo de la trayectoria seguida por el fotón. En el proceso de integración, se asume que P^α permanece constante, dado que la perturbación introducida por el campo gravitacional es débil, por lo que el cuadrimomento no varía significativamente en el trayecto [32]. Bajo esta consideración, se obtiene

$$\Delta P_\mu = -\epsilon P^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (h_{\mu\alpha,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu})\, dx^\beta, \tag{4.70}$$

donde el primer término se reduce por el teorema fundamental del cálculo, en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}\, dx^\beta = \lim_{\epsilon\to\infty} (h_{\mu\alpha}(\epsilon) - h_{\mu\alpha}(-\epsilon)). \tag{4.71}$$

Sin embargo, debido a la condición de que el espacio-tiempo es asintóticamente plano (4.11), este término se anula al calcular el límite, por lo que no contribuye a la integral. Adicionalmente, el desplazamiento, dx^α, a lo largo del camino recto y el momento, P^α, son respectivamente:

$$dx^\alpha \equiv (cdt, 0, 0, dz) = (dz, 0, 0, dz), \tag{4.72}$$

y

$$P^\alpha = (P^3, 0, 0, P^3), \tag{4.73}$$

siendo $P^3 = P^0$ la componente z del cuadrimomento y $dx^0 = dx^3 = dz$. Sustituyendo estos resultados en la Ecuación (4.70) para $\mu = 1$ y efectuando la suma sobre el índice α, se obtiene que la componente x del cambio en el cuadrimomento es

$$\Delta P_1 = \frac{\epsilon}{2} P^3 \int_{-\infty}^{\infty} (h_{00,1} + h_{30,1} + h_{03,1} + h_{33,1})\, dz. \tag{4.74}$$

Además, para un campo gravitacional simétricamente esférico se tiene que la métrica es la solución de Schwarzschild (4.53); sin embargo, hay que tener presente que la integración (4.74) está definida en coordenadas cartesianas.

Para expresar la métrica de Schwarzschild en coordenadas cartesianas, es conveniente primero reescribirla en forma isotrópica, es decir, en la que la parte espacial tenga un factor de escala común en todas las direcciones[10]. En su forma usual, la métrica de Schwarzschild no

[9] En relatividad general, la dirección de propagación de la luz está determinada por su cuadrimomento $P^\mu \propto \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. En la aproximación de ángulos pequeños, se cumple que $\tan\tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha} \approx \frac{\Delta P^x}{P^z}$, lo que permite estimar el ángulo de deflexión como el cociente entre la variación transversal y la componente longitudinal del cuadrimomento.

[10] En otras palabras, que se cumpla $ds^2_{\text{espacial}} = f(R)(dR^2 + R^2 d\Omega^2)$, donde $f(R)$ es el factor de escala común en todas las direcciones espaciales.

es isotrópica, ya que la escala en la dirección radial difiere de la de las direcciones angulares. Para lograr la isotropía espacial, se introduce una nueva coordenada radial R, relacionada con la coordenada radial estándar r mediante [5]

$$r = R\left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^2. \tag{4.75}$$

Luego, al realizar el cambio de coordenadas de esféricas a cartesianas, $x = R\sin\theta\cos\phi, \quad y = R\sin\theta\sin\phi, \quad z = R\cos\theta$, la parte espacial de la métrica adopta una forma isotrópica y en consecuencia la métrica de Schwarzschild (4.53), en coordenadas cartesianas, se escribe como:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{1 - GM/2Rc^2}{1 + GM/2Rc^2}\right)^2 c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^4 (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{4.76}$$

En el límite asintótico $\left|\frac{\varphi}{c^2}\right| \ll 1$, es posible simplificar la métrica utilizando aproximaciones de primer orden. Aplicando expansiones de Taylor a los coeficientes temporal y espacial, y recordando (4.29), se obtiene que estos adoptan las formas aproximadas: $1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ y $1 - \frac{2\varphi}{c^2}$, respectivamente. Esto conduce a la siguiente expresión simplificada de la métrica, válida en el régimen débil del campo gravitacional,

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{4.77}$$

A partir de este resultado, y teniendo en cuenta la simetría de los símbolos de Christoffel, se concluye que $h_{03} = h_{30} = 0$. Asimismo, de (4.77) se puede concluir que $\epsilon h_{00} = \epsilon h_{33} = \frac{-2GM}{c^2 r}$. Con lo anterior presente, y expresando la coordenada radial en función de coordenadas cartesianas, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la Ecuación (4.74) se convierte en

$$\Delta P_1 = \frac{\epsilon}{2c^2} P^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial(4GM/\epsilon\sqrt{x^2 + z^2})}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} \right) dz. \tag{4.78}$$

Solucionando la derivada parcial y evaluándola en el parámetro de impacto, la integral toma la forma

$$\Delta P_1 = \frac{2GMP^3}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{(\xi^2 + z^2)^{3/2}}\, dz. \tag{4.79}$$

que al solucionar por sustitución trigonométrica y reemplazar su resultado en la Ecuación (4.69), finalmente se obtiene en el régimen de campo débil, el ángulo de deflexión debido a una masa puntual:

$$\tilde{\alpha}(\xi) \approx \frac{4GM}{\xi c^2}. \tag{4.80}$$

Si la masa deflectante no fuera puntual, se debe considerar el caso más general de una distribución continua de masa, lo cual requiere un tratamiento más detallado del potencial gravitacional involucrado, como se verá a continuación.

4.6. Deflexión de la luz debido a una distribución continua de masa

Debido a la simetría esférica o axial que presentan algunas galaxias [57], es posible describir su distribución de masa en términos de una densidad superficial proyectada en el plano de la lente[11]. En este contexto, la aproximación de la lente delgada supone que la extensión de la lente a lo largo del eje óptico es pequeña en comparación con las distancias entre la fuente, la lente y el observador. Esta simplificación facilita el análisis de la deflexión de la luz al asumir que todos los rayos de luz se desvían en el plano de la lente en lugar de a lo largo de un volumen extenso. Por definición, la proyección de la densidad volumétrica $\rho(\vec{\xi}', z)$ se calcula a través de la integral [5, 53]:

$$\Sigma(\vec{\xi}') = \int \mathrm{d}z\, \rho(\vec{\xi}', z). \tag{4.81}$$

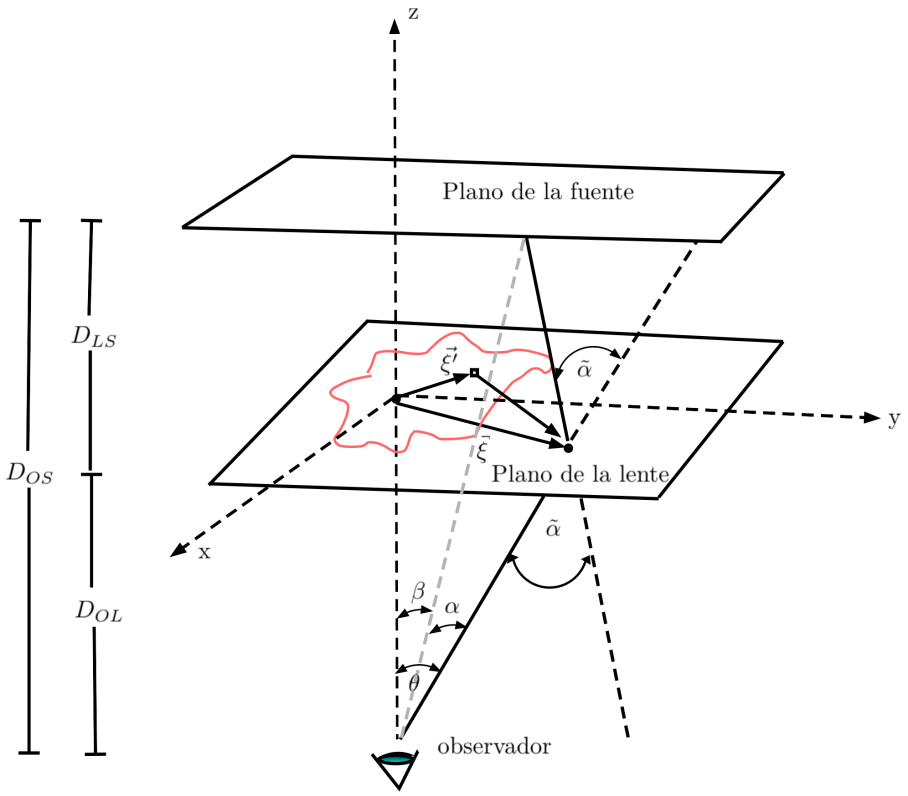

Figura 4.2: Esquema de la deflexión de la luz debido a una distribución de masa en la aproximación de lente delgada. Imagen modificada a partir del esquema presentado en la Referencia [1].

[11] El plano de la lente es el plano perpendicular al eje óptico que contiene la distribución de masa de la lente gravitacional.

La densidad de masa proyectada (4.81) es una función escalar que depende de la ubicación en el plano de la lente, donde el vector bidimensional $\vec{\xi}'$ indica la posición de cada elemento que constituye la lente y z la dirección del eje óptico como se puede ver en la Figura 4.2. En la aproximación de lente delgada, esta densidad superficial permite expresar el ángulo de deflexión total en términos de la masa proyectada, tal como se indica a continuación:

$$\vec{\tilde{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \mathrm{d}^2\xi' \; \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \tag{4.82}$$

donde el vector angular $\vec{\tilde{\alpha}}(\vec{\xi})$ representa la deflexión de la luz: su módulo corresponde al ángulo en que se desvía el rayo, y su dirección es la proyección, sobre el plano de la lente, de la dirección[12] hacia la cual se curva el rayo luminoso. Esta dirección se define de modo que el vector resultante apunte alejándose del deflector [5].

La expresión (4.80) se obtuvo en el régimen de campo débil, donde la gravedad puede aproximarse como una teoría lineal. En este límite, la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional es lineal en la densidad de masa, lo que implica que los efectos gravitacionales de una distribución de masa pueden superponerse. Así, cada elemento diferencial de masa contribuye con una pequeña deflexión, y la deflexión total de la luz se obtiene integrando todas estas contribuciones [5, 58]. Como consecuencia de esta aproximación, el campo gravitacional en las proximidades de la galaxia se puede describir mediante el potencial proyectado $\psi(\vec{\xi})$, una función escalar dependiente de las coordenadas[13] [58], definida como:

$$\psi(\vec{\xi}) \equiv \int \mathrm{d}z \, \varphi(\vec{\xi}, z), \tag{4.83}$$

donde el potencial gravitacional newtoniano $\varphi(\vec{\xi}, z)$, en un punto del espacio tridimensional, está relacionado con la aceleración gravitacional experimentada por una partícula de prueba debido a una densidad de masa $\rho(\vec{\xi}, z)$, y se obtiene resolviendo la ecuación de Poisson en tres dimensiones: $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$. El potencial bidimensional (4.83) describe la contribución acumulada de toda la masa a lo largo de la línea de visión y satisface la ecuación de Poisson en dos dimensiones,

$$\nabla^2_{\xi}\psi(\vec{\xi}) = 4\pi G\Sigma(\vec{\xi}). \tag{4.84}$$

Dado que la Ecuación (4.84) es de la forma $\nabla^2_{\xi}\psi(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi})$, donde $f(\vec{\xi}) = 4\pi G\Sigma(\vec{\xi})$, se puede utilizar el método de funciones de Green para obtener su solución. La función de Green asociada satisface $\nabla^2_{\xi}\mathcal{G}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \delta^2(\vec{\xi} - \vec{\xi}')$ y su solución tiene la forma $\mathcal{G}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \frac{\ln|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|}{2\pi}$ [59]. Por lo tanto la solución general como una integral está dada por

$$\psi(\vec{\xi}) = \int \mathrm{d}^2\xi' \mathcal{G}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') f(\vec{\xi}'), \tag{4.85}$$

[12] Por convención, para no afectar los signos en el análisis de la ecuación de la lente, se elige medir este ángulo desde el rayo que viene de la fuente a la línea punteada que se subtiende del rayo desviado.

[13] Esta dependencia de ψ de las coordenadas ξ_x, ξ_y y ξ_z se denota como $\psi(\vec{\xi})$.

lo que permite obtener la solución para el caso de la Ecuación (4.84),

$$\psi(\vec{\xi}) = 2G \int \mathrm{d}^2\xi' \, \Sigma(\vec{\xi'}) \ln|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|. \tag{4.86}$$

Para hacer explícita la relación entre el potencial y el ángulo de deflexión proyectados, resulta conveniente calcular el gradiente de la ecuación[14](4.86), lo que deja el siguiente resultado

$$\vec{\nabla}_\xi \psi(\vec{\xi}) = 2G \int \mathrm{d}^2\xi' \Sigma(\vec{\xi'}) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi'}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2}. \tag{4.87}$$

Al comparar esta expresión con la forma de la Ecuación (4.82), se pone de manifiesto la conexión entre el gradiente del potencial proyectado y el ángulo de deflexión,

$$\vec{\tilde{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_\xi \psi(\vec{\xi}), \tag{4.88}$$

lo que indica que la luz se desvía en la dirección donde el potencial cambia más rápidamente. Así, calculando la divergencia de esta relación y comparándola con (4.84), se cumple:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\alpha}} = \frac{8\pi G \Sigma(\vec{\xi})}{c^2}. \tag{4.89}$$

Para el caso particular en el que la distribución de masa de la lente posee simetría circular y se considera ξ como la coordenada radial, el ángulo de deflexión toma el mismo valor para todos los puntos a esta distancia del centro. En este contexto, la aplicación del teorema de Gauss [59] a la Ecuación (4.89),

$$\int_{S_\xi} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\alpha}} \, \mathrm{d}A = \oint_{C_\xi} \tilde{\alpha} \mathrm{d}\xi, \tag{4.90}$$

permite obtener una expresión más sencilla para el ángulo de deflexión

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2 \xi}, \tag{4.91}$$

donde la masa encerrada dentro de un círculo [15] de radio ξ, está definida por

$$M(\xi) = 2\pi \int_0^\xi \mathrm{d}\xi' \, \xi' \Sigma(\xi'). \tag{4.92}$$

[14]Teniendo en cuenta que $\frac{\partial|\vec{\xi}-\vec{\xi'}|}{\partial\vec{\xi}} = \frac{\vec{\xi}-\vec{\xi'}}{|\vec{\xi}-\vec{\xi'}|}$ y por lo tanto $\vec{\nabla}_\xi \ln|\vec{\xi}-\vec{\xi'}| = \frac{\vec{\xi}-\vec{\xi'}}{|\vec{\xi}-\vec{\xi'}|^2}$.

[15]Circulo que representa la proyección de la masa en el plano de la lente.

Capítulo 5

Modelo estándar de la cosmología relativista

La cosmología es la rama de la física que estudia el universo en su totalidad, abarcando su origen, estructura, evolución y eventual destino. A diferencia de los sistemas estudiados en laboratorio, el universo no es accesible a la experimentación directa, lo que obliga a una aproximación teórica y observacional [32, 60]. Un modelo que trató en su tiempo de explicar el universo con leyes a estas escalas fue el de Newton, quien propuso que las estrellas fijas estaban en equilibrio gravitacional, cancelando sus fuerzas mutuas debido a su distribución uniforme en el cielo. También asumió que su ley de la gravitación universal se aplicaba a distancias cósmicas [61].

Sin embargo, con el desarrollo de la relatividad general surgió una nueva forma de entender la estructura y evolución del universo. Esta teoría permitió por primera vez abordar el universo como un sistema físico global, sentando las bases para la cosmología moderna. Uno de los supuestos fundamentales en este nuevo enfoque es el principio cosmológico, que postula que, a escalas suficientemente grandes, el universo es homogéneo e isótropo; es decir, luce igual en todas las direcciones y desde cualquier punto [39].

Poco después, Hermann Weyl propuso una forma de modelar el contenido del universo en este marco relativista: propuso que el contenido del universo podía modelarse como un fluido perfecto, cuyas partículas (como las galaxias) se mueven siguiendo trayectorias geodésicas en el espacio-tiempo, sin colisionar entre sí. Bajo esta aproximación, aunque las galaxias puedan presentar movimientos individuales, su distribución general responde a una expansión global del universo, lo que refleja la evolución de su estructura a lo largo del tiempo [32, 39].

Estos principios se integran en el modelo estándar de la cosmología a través de las soluciones dinámicas propuestas por Alexander Friedmann de las ecuaciones de Einstein, que describen un universo en expansión regido por la densidad de materia, energía y la constante cosmológica. Este enfoque ha permitido explicar fenómenos observacionales, como la radiación cósmica de fondo y la evolución de estructuras a gran escala. Así, la cosmología

moderna se fundamenta en la combinación de la relatividad general, la teoría del Big Bang y la caracterización del universo como un fluido con una dinámica gobernada por los postulados de simetría y expansión [39, 51].

Sobre esta base se desarrolla el modelo estándar de la cosmología, conocido como ΛCDM, que representa la versión más refinada y empíricamente respaldada de dichas soluciones. Este modelo incorpora tres componentes esenciales para describir con precisión las observaciones actuales: materia bariónica ($\Omega_b \approx 0.04$), materia oscura fría ($\Omega_c \approx 0.26$) y energía oscura ($\Omega_\Lambda \approx 0.7$), esta última representada por la constante cosmológica Λ [3]. Bajo el supuesto de un universo espacialmente plano ($k = 0$), el modelo ΛCDM reproduce fenómenos observacionales como la expansión acelerada del cosmos, la anisotropía del Fondo Cósmico de Microondas (CMB), la distribución a gran escala de las galaxias y la abundancia de elementos ligeros [24, 39, 51]. Sin embargo, a pesar de su eficacia empírica, el modelo enfrenta importantes desafíos teóricos, especialmente en torno a la naturaleza desconocida de aproximadamente el 95 % de su contenido (materia oscura y energía oscura), así como la llamada tensión en la constante de Hubble H_0, que pone en cuestión su consistencia interna [25].
En la siguiente sección, se explorará con mayor detalle uno de los fenómenos que el modelo ΛCDM describe: la expansión del universo, elemento fundamental para entender tanto la evolución como la estructura a gran escala del cosmos.

5.1. Expansión del universo

Uno de los pilares del modelo cosmológico actual es la expansión del universo, fenómeno por el cual las galaxias se alejan unas de otras a escala cósmica. La primera evidencia observacional de este comportamiento provino de Vesto Slipher, quien entre 1912 y 1917 midió espectroscópicamente el corrimiento al rojo en varias nebulosas espirales, hoy identificadas como galaxias, y descubrió que la mayoría se alejaban de la Tierra [62]. Aunque en ese momento la interpretación de estos resultados era ambigua debido al desconocimiento de las distancias involucradas, sus datos ofrecieron un indicio temprano de un universo en expansión [63].

Paralelamente al desarrollo observacional en 1922, Alexander Friedmann, basándose en las ecuaciones de la Relatividad General, encontró soluciones que describían un universo dinámico [64]. Estas soluciones permitían la posibilidad de una expansión a escala global a lo largo del tiempo, aunque en su momento no recibieron suficiente atención [63]. Posteriormente, en 1927, Georges Lemaître, basándose en la Relatividad General, propuso un modelo matemático en el que el universo se expandía (concordando con Friedmann) y derivó la relación entre la velocidad de recesión [1] de las galaxias y su distancia [65]. Dos años más tarde, en 1929, Edwin Hubble confirmó esta relación observacionalmente al demostrar que la velocidad de recesión de las galaxias era proporcional a su distancia, formulando así la Ley de Hubble [66]. Estas evidencias llevaron a la comunidad científica a abandonar la idea de un

[1] Velocidad a la que las galaxias se alejan unas de otras debido a la expansión del universo.

universo estático, que había sido predominante hasta entonces[2]. Décadas después, en 1998, Saul Perlmutter, Brian Schmidt y Adam Riess descubrieron que la expansión del universo no solo continuaba, sino que se estaba acelerando, lo que llevó a la formulación del concepto de energía oscura [68, 69].

A la luz de estos descubrimientos, resulta fundamental comprender las herramientas observacionales que permiten estudiar la expansión cósmica. Una de las más importantes es el corrimiento al rojo, un fenómeno en el que la luz de objetos lejanos se desplaza hacia el rojo del espectro electromagnético debido a la expansión del espacio, aumentando su longitud de onda. Aunque a veces se asocia con el efecto Doppler, el corrimiento al rojo en cosmología tiene un origen distinto: no es el resultado del movimiento relativo de los objetos a través del espacio, sino de la expansión del propio espacio que los separa [63]. Matemáticamente, el corrimiento al rojo se define como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \tag{5.1}$$

donde λ_0 es la longitud de onda observada y λ_e la longitud de onda emitida. Esta relación indica cuánto se ha .^estirado"la longitud de onda debido a la expansión del universo. Si $z > 0$, la luz ha sido desplazada hacia longitudes de onda más largas. Reescribiendo la cantidad (5.1) como

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}, \tag{5.2}$$

es más evidente que el corrimiento al rojo está directamente relacionado con la expansión del universo, como se verá en la sección 5.1.3.1, debido a que la longitud de onda de la radiación aumenta con la expansión. De hecho, para una galaxia con un corrimiento al rojo de $z = 1$, el universo se ha expandido en un factor de 2 desde el momento en que esa galaxia emitió su luz hasta el presente.

Es importante aclarar que, en el contexto cosmológico, las galaxias muy distantes con corrimientos al rojo de $z > 1.5$, pueden alejarse de la Tierra a velocidades mayores que la de la luz. Esto no contradice la relatividad especial, ya que dicha limitación solo se aplica al movimiento de objetos a través del espacio, no a la expansión del propio espacio, que es el responsable de este alejamiento aparente [32, 63].

Por otro lado, a bajas velocidades, el desplazamiento al rojo se comporta de manera similar al efecto Doppler[3], por lo que se puede interpretar como una velocidad de recesión cz.

[2] Albert Einstein, al desarrollar la Relatividad General en 1915, introdujo en 1917 la constante cosmológica para evitar que su modelo predijera un universo no estático [67]. Sin embargo, las observaciones posteriores demostraron que el universo no era estático, sino que estaba en constante expansión.

[3] El efecto Doppler a bajas velocidades describe el cambio en la longitud de onda de una onda debido al movimiento relativo entre la fuente y el observador. Si la fuente se aleja, la onda se estira (corrimiento al rojo), y si se acerca, la onda se comprime (corrimiento al azul). Matemáticamente, se expresa como $\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ donde λ_0 es la longitud de onda observada, λ la emitida, v la velocidad de la fuente y c la velocidad de la luz.

Sin embargo, a velocidades mayores, la relación ya no es lineal y se deben considerar modelos cosmológicos más completos para describir la expansión, como se podrá ver en la sección 5.3. Esta relación entre el corrimiento al rojo y la distancia de las galaxias es la base de la Ley de Hubble, que permite cuantificar la expansión del universo, como se verá a continuación.

5.1.1. Ley de Hubble

En 1929, Edwin Hubble presentó evidencia observacional de una relación de proporcionalidad entre la velocidad de recesión de las galaxias y su distancia. Para ello, combinó las velocidades radiales previamente medidas por Vesto Slipher con sus propias estimaciones de distancia, construyendo un diagrama que revelaba una clara tendencia lineal [62,66]. A partir de esta relación, Hubble estimó un valor para la constante de proporcionalidad de aproximadamente $500\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Sin embargo, Hubble no interpretó esta relación en términos de un universo en expansión, sino que se mantuvo cauteloso respecto a sus implicaciones cosmológicas. Aun así, su trabajo estableció un marco sólido para el estudio de la relación velocidad-distancia.

En los años siguientes, Hubble, en colaboración con Milton Humason, amplió y refinó las observaciones, extendiendo el rango de galaxias estudiadas y mejorando la calidad de los datos. En 1931, publicaron una versión revisada de esta relación con un valor ajustado para la constante, que estimaron en $538\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [70]. Esta relación empírica, que hoy se conoce como la ley de Hubble, se expresa en su forma general como:

$$v(t) = H(t)D(t), \tag{5.3}$$

donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble, constante en un instante dado, pero variable a lo largo de la evolución cósmica. En el presente, su valor se denota por H_0 y se conoce como la constante de Hubble. La cantidad $D(t)$ corresponde a la distancia entre galaxias en el instante t, es decir, la distancia que incorpora la expansión del espacio. Por su parte, $v(t)$ es la velocidad de recesión asociada a dicha distancia[4] [32].

Desde una perspectiva observacional, la ley de Hubble establece una relación lineal entre el corrimiento al rojo de la luz proveniente de una galaxia y su distancia [71]. Más allá de esta descripción empírica, su fundamento físico se entiende en el marco de la Relatividad General. Como se ha mencionado, las soluciones cosmológicas propuestas por Friedmann y Lemaître revelan que un universo homogéneo e isótropo puede evolucionar dinámicamente [64, 65]. Esta idea fue formalizada posteriormente mediante la denominada métrica de Robertson-Walker [72,73](abordada con detalle en la sección) 5.1.3, proporcionando un marco matemático riguroso para la evolución del cosmos.

Esta formulación relativista permite reinterpretar la ley de Hubble y el corrimiento al rojo

[4]Cabe destacar que la forma original de la ley propuesta por Hubble era estática, mientras que la expresión anterior refleja la comprensión moderna del universo en expansión.

cosmológico como manifestaciones de la expansión del espacio-tiempo. En este contexto, la expansión del universo no implica que las galaxias se desplacen a través del espacio debido a una velocidad propia, sino que la estructura misma del espacio-tiempo se dilata, aumentando la distancia entre los objetos cósmicos con el tiempo. Como resultado, la radiación emitida por una galaxia sufre un corrimiento hacia el rojo cuando es detectada desde otra, lo que da lugar a la formulación observacional de la ley de Hubble [63]. Dado que esta relación está directamente ligada al parámetro de Hubble en el presente, H_0, su determinación precisa es de gran relevancia para comprender no solo la velocidad actual de expansión, sino también para estimar la edad del universo y proyectar su destino final. Sin embargo, las discrepancias observadas entre distintos métodos para medir H_0 representan uno de los desafíos más importantes en la cosmología moderna [25, 32].

5.1.2. Medida de H_0 a partir de medidas locales y del estudio del universo temprano.

En general existen dos métodos para su medición, uno en el que los valores de H_0 se obtienen directamente de medidas del universo local[5] y otro a partir de medidas indirectas hechas por medio de observaciones del universo temprano mediante el Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés) o correlaciones entre grandes muestras de galaxias[6] [25]. El primer método utiliza objetos astrofísicos cuya luminosidad o tamaño intrínseco pueden determinarse, o cuya distancia puede medirse mediante métodos geométricos. Este primer método puede dividirse en dos métodos generales denominados métodos de distancia de un paso y métodos de escalera de distancias locales. A continuación se ampliará brevemente de qué trata cada método siguiendo la Referencia [76].

Métodos de distancia de un paso: Para medir H_0 este método utiliza objetos astrofísicos cuya distancia puede determinarse directamente, sin depender de una escalera cósmica (calibración secuencial de distancias basada en múltiples objetos). Este método se puede subdividir en:

- *Los megamáseres*[7]: Se usan para medir distancias cosmológicas hasta unos 50 Mpc. Estos megamáseres son nubes de gas que giran alrededor de agujeros negros supermasivos y emiten radiación de $\sim$ 22 GHz. Con interferometría VLBI se obtienen las velocidades y posiciones del gas; asumiendo que giran siguiendo las leyes de Kepler, se calcula la distancia a la galaxia y la masa del agujero negro. Un ejemplo clave es NGC

[5] Abarca la región donde se pueden realizar mediciones directas de la expansión cósmica sin depender del universo temprano. Generalmente abarca bajos redshifts ($z \lesssim 0.1 - 0.3$), pero en algunos estudios puede extenderse hasta $z \sim 2$ [74, 75].

[6] El universo temprano comprende las primeras fases tras el Big Bang. Cerca de 400.000 años después del inicio de la expansión, en $z \sim 1100$, la materia y la radiación dejaron de estar en equilibrio, lo que permitió que los fotones se desacoplaran y viajaran libremente, formando el fondo cósmico de microondas (CMB), la radiación residual de aquella era densa y caliente [63].

[7] Un megamaser es una región en una galaxia donde el gas amplifica radiación en microondas de forma coherente, similar a un láser en frecuencias de radio.

4258 (a $\sim$ 7 Mpc) [77–79], y proyectos como el Megamaser Cosmology Project [80] estudian galaxias más lejanas para afinar la medición del parámetro de Hubble H_0.

- *Lentes gravitacionales*[8]: La determinación de la constante de Hubble (H_0) mediante lentes gravitacionales se basa en la medición de los atrasos temporales entre múltiples imágenes de un quásar o supernova distante, cuya luz ha sido desviada por el campo gravitacional de una galaxia o cúmulo interviniente[9]. Este método, propuesto originalmente por Refsdal [33], se fundamenta en tres aspectos principales: (1) la geometría del sistema, que depende de las distancias angulares D_{OL}, D_{OS} y D_{LS} entre el observador, la lente y la fuente, y que está determinada por H_0 y otros parámetros cosmológicos; (2) el modelado preciso del potencial gravitacional de la lente, el cual introduce un atraso adicional debido al efecto Shapiro; y (3) la corrección por la influencia de la materia a lo largo de la linea de visión del observador, como galaxias o cúmulos cercanos, que puede alterar las mediciones [82]. Este método es empleado en colaboraciones como HOLICOW [16], quién estimó un valor de $(73.3^{+1.7}_{-1.8})\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

- *El efecto Sunyaev-Zel'dovich*: El efecto S-Z permite medir H_0 mediante la combinación de dos observaciones de cúmulos de galaxias. Por un lado, se analiza la emisión de rayos X del gas caliente intracumular; por otro, la distorsión que este gas produce en el fondo cósmico de microondas, observable como un decremento en radio. Asumiendo que el tamaño proyectado del cúmulo coincide con su profundidad, se calcula la distancia angular y, con el corrimiento al rojo, se obtiene H_0. Aunque es un método directo, tiene incertidumbres del 20-30 % por calibraciones, modelado del gas [83, 84] y selección de cúmulos [85].

- *Propagación de rayos Gamma*: Este método utiliza la atenuación de rayos gamma de alta energía (provenientes de un Núcleo Galáctico Activo distante) al interactuar con fotones del fondo de luz extragaláctica (EBL)[10] durante su propagación, generando pares electrón-positrón. La energía característica donde ocurre esta atenuación (detectada por el satélite *Fermi* [86]) depende del corrimiento al rojo y de H_0, ya que la probabilidad de interacción está ligada a la densidad de fotones (n_p) y a distancias cosmológicas.

Método de escalera de distancia[11]: Este método determina la constante de Hubble (H_0) mediante un proceso de calibración escalonada que combina diversas técnicas astronómicas. Comienza con mediciones precisas de paralaje estelar (obtenidas por satélites como Hipparcos y Gaia [87, 88]) para establecer distancias a estrellas cercanas con errores $< 1\,\%$. Estas estrellas, ubicadas en cúmulos abiertos como las Híades, permiten calibrar la relación entre

[8] Este método se analizará con mayor detalle en la sección 6 y 7.

[9] Las supernovas y cuásares son las fuentes más utilizadas en este método debido a su variabilidad intrínseca: sus cambios de brillo permiten medir los atrasos temporales entre imágenes. Los cuásares son más comunes por su variabilidad continua y su abundancia en el cielo [81].

[10] El fondo de luz extragaláctica (Extragalactic Background Light, EBL) está compuesto por la luz acumulada a lo largo del tiempo por la formación estelar y la emisión de galaxias, incluyendo tanto luz visible como infrarroja.

[11] En la sección 5.2 se explica más a detalle esta método.

color y luminosidad [89, 90], extendiendo las mediciones a las Nubes de Magallanes (∼50 kpc). Allí, variables periódicas como las Cefeidas (cuya luminosidad intrínseca se correlaciona con su período [91]) sirven como candelas estándar para alcanzar galaxias más distantes (hasta ∼30 Mpc) con ayuda del Hubble Space Telescope (HST). Las supernovas de tipo Ia (SNe Ia), que son explosiones termonucleares de enanas blancas al alcanzar la masa crítica de Chandrasekhar (∼1.4 $M_\odot$), se calibran mediante Cefeidas en galaxias cercanas [92, 93] y permiten medir distancias cosmológicas (100 Mpc–varios Gpc) gracias a su luminosidad consistente y su correlación entre el brillo máximo y la tasa de decaimiento (Δm_{15}). Proyectos como SHOES[12] aplican este método para obtener mediciones precisas de H_0 [25]. En 2022 obtuvieron un valor de $H_0 = (73.04 \pm 1.04)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [30]. El método enfrenta desafíos como errores sistemáticos acumulativos y dependencia de modelos astrofísicos. Después de hallar estas distancias, se puede usar la relación que tienen las distancias con el corrimiento al rojo a grandes o pequeñas distancias.

Método a partir de medidas del universo temprano: El fondo cósmico de microondas (CMB) ayuda a calcular la constante de Hubble (H_0) estudiando sus pequeños patrones de temperatura. Estos patrones se formaron cuando el universo era joven, y actúan como huellas que revelan las propiedades del cosmos primitivo. Los científicos analizan dos características clave: (1) el tamaño angular de los "picos acústicos" en el espectro, que indica que el universo es espacialmente plano ($\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\Lambda \simeq 1$), y (2) las amplitudes de estos picos, que dependen de cantidades como $\Omega_\mathrm{b} H_0^2$ (densidad de bariones) y $\Omega_\mathrm{m} H_0^2$ (materia total). Para determinar H_0 directamente, se asume un universo plano ($\Omega_k = 0$) con energía oscura constante ($w = -1$), lo que permite obtener datos del satélite *Planck* [3]. Sin embargo, estas mediciones presentan degeneraciones con otros parámetros cosmológicos, por lo que se combinan con observaciones de oscilaciones acústicas de bariones (BAO) [94] y supernovas de tipo Ia [95] para reducir incertidumbres. La misión Planck 2018 obtuvo un valor de $(67.4 \pm 0.5)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [3].

Las distintas estimaciones de H_0 reflejan cómo se expande el universo hoy. Para comprender su significado en un contexto cosmológico, es esencial introducir la métrica de Friedmann-Robertson–Walker, que describe un universo homogéneo e isótropo y permite vincular estas medidas con la dinámica del cosmos.

5.1.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Antes de abordar la estructura de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker se debe analizar las implicaciones de los principios de la cosmología inicialmente mencionados sobre la métrica y así poder tener en cuenta qué tipo de espacios se trabajan. En cosmología, la homogeneidad e isotropía del espacio imponen restricciones fundamentales en su geometría. Si un espacio cumple ambas condiciones, su curvatura no puede variar de un punto a otro ni depen-

[12] Supernova H_0 for the Equation of State (SHOES) es un programa dedicado a medir la constante de Hubble con alta precisión usando esta metodología escalonada.

der de la dirección en la que se mida. Esto significa que su curvatura debe ser constante[13] [51].

Los espacios con curvatura constante se presentan en la Tabla 5.1. En la tercera columna se muestra la parte espacial de los elementos de línea correspondientes a cada espacio, los cuales pueden expresarse de manera unificada en una sola ecuación. Para lograrlo, es necesario generalizar estos elementos de línea de manera adecuada teniendo en cuenta que el universo se está expandiendo, para lo cual es conveniente reescalar las coordenadas, $\boldsymbol{x} \to a\boldsymbol{x}$ y $u \to au$[14]. Así, la parte espacial de la métrica se generaliza presentando la siguiente estructura:

Espacio	**Descripción**	**Intervalo espacial**	**Restricción**
Plano	Espacio euclidiano tridimensional E^3.	$d\ell^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = d\boldsymbol{x}^2$	Ninguna
Curvatura positiva	Representado como una 3-esfera S^3 embebida en E^4.	$d\ell^2 = d\boldsymbol{x}^2 + du^2$	$\boldsymbol{x}^2 + u^2 = a^2$
Curvatura negativa	Representado como un hiperboloide H^3 embebido en $\mathbb{R}^{1,3}$.	$d\ell^2 = d\boldsymbol{x}^2 - du^2$	$\boldsymbol{x}^2 - u^2 = -a^2$

Tabla 5.1: Comparación de espacios con diferentes curvaturas.

$$d\ell^2 = a^2\left[d\boldsymbol{x}^2 + k du^2\right], \quad \boldsymbol{x}^2 + ku^2 = k, \tag{5.4}$$

donde $k = \pm 1, 0$.
Para que la anterior expresión esté en solo términos de $\boldsymbol{x}$, usando la restricción generalizada se obtiene el diferencial $du = \frac{\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}}{u}$, además por la definición de k es evidente que $u^2 = 1 - k\boldsymbol{x}^2$. Por lo tanto la parte espacial del elemento de línea toma la forma

$$d\ell^2 = a^2\left[d\boldsymbol{x}^2 + k\frac{(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^2}{1 - k\boldsymbol{x}^2}\right] \equiv a^2\gamma_{ij}dx^i dx^j, \tag{5.5}$$

que se expresa de manera siguiendo la convención de suma de Einstein, y se factoriza los diferenciales obteniendo

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + k\frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}, \tag{5.6}$$

con

$$k \equiv \begin{cases} 0 & \text{Euclidiano} \\ +1 & \text{Esférico} \\ -1 & \text{Hiperbólico.} \end{cases} \tag{5.7}$$

[13] Matemáticamente, esto se traduce en que el tensor de curvatura de Riemann se reduce a una forma dependiente de un único escalar.

[14] Donde $\boldsymbol{x}$ es un vector tridimensional.

La métrica espacial γ_{ij} depende de la elección de coordenadas. Con el fin de notar las simetrías del espacio es adecuado usar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), donde el elemento de línea viene dado por $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$ y además se cumple que $\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = r\,\mathrm{d}r$. Con lo anterior la parte espacial del elemento de linea en coordenadas esféricas adopta la siguiente estructura:

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right], \tag{5.8}$$

donde $\mathrm{d}\Omega^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$.
Este elemento de línea cumple con los principios de la cosmología, por lo tanto es útil para definir la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en coordenadas esféricas mediante

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right], \tag{5.9}$$

que usando el elemento de línea más general (5.5), puede escribirse como:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^idx^j. \tag{5.10}$$

Esta métrica, utilizada para describir un universo homogéneo e isótropo, está en términos de coordenadas comóviles. Este tipo de coordenadas se definen de manera que la separación entre dos puntos (distancia comóvil) permanece constante en el tiempo, independientemente de la expansión del universo y son elegidas para que sea evidente la simetría del espacio-tiempo [60]. No obstante, lo que varía con la expansión es la distancia física o propia. Esta se expresa mediante las llamadas coordenadas físicas, las cuales incorporan la expansión del universo. En particular, se definen como proporcionales a las coordenadas comóviles a través del factor de escala $a(t)$, de modo que reflejan cómo evoluciona la separación real entre objetos con el tiempo: este factor crece cuando, por ejemplo, dos galaxias se alejan, y disminuye si se acercan [51]. Teniendo en cuenta lo anterior, la relación entre las coordenadas comóviles y las coordenadas físicas viene dada por

$$x^i_{\text{física}} = a(t)x^i. \tag{5.11}$$

La velocidad física de un objeto se define como la derivada temporal de sus coordenadas físicas. Para un objeto en el universo descrito por la métrica FRW, esta velocidad se expresa como

$$v^i_{\text{física}} \equiv \frac{dx^i_{\text{física}}}{dt} = \dot{a}(t)x^i + a(t)\dot{x}^i, \tag{5.12}$$

donde el punto denota derivada respecto al tiempo t. Esta expresión puede separarse en dos contribuciones principales:

$$v^i_{\text{física}} = v^i_{\text{pec}} + H(t)x^i_{\text{física}}, \tag{5.13}$$

donde $v^i_{\text{pec}} \equiv a(t)\dot{x}^i$ es la velocidad peculiar, es decir, la velocidad con respecto al marco comóvil[15], y $H(t)x^i_{\text{física}} = \dot{a}(t)x^i$, representa la velocidad debida a la expansión del espacio-tiempo, conocida como flujo de Hubble. Por su parte, el parámetro de Hubble se define como:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{5.14}$$

y se relaciona con la ley de Hubble mostrada en la Ecuación (5.3). La ley de Hubble, que relaciona la velocidad de recesión de las galaxias con su distancia, evidencia cómo la expansión del universo afecta la luz que recibimos de ellas. Por ello, para comprender adecuadamente la propagación de la luz en el cosmos, es fundamental considerar la métrica FRW, la cual describe un universo en expansión.

5.1.3.1. Propagación de la luz en un espacio-tiempo de FRW

Para estudiar los efectos de la expansión del universo sobre la luz, se considera la siguiente situación, siguiendo el análisis de [44]: Un observador situado en $r = 0$ recibe una señal luminosa ($ds^2 = 0$) en el instante t_0, la cual fue emitida en t_e por una fuente puntual ubicada en r_e. Si la señal se propaga exclusivamente a lo largo de una geodésica radial, es decir, con $d\Omega = 0$, entonces la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (5.9) se reduce a la siguiente ecuación diferencial para la trayectoria de la luz:

$$c\,dt = a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{5.15}$$

Esta señal luminosa puede tratarse como una onda electromagnética. En este contexto, cada cresta de la onda corresponde a un instante de emisión de luz por la fuente. Si se consideran dos crestas consecutivas emitidas en los tiempos t_e y $t_e + \Delta t_e$, y recibidas por el observador en los tiempos t_0 y $t_0 + \Delta t_0$, entonces la relación correspondiente para la primera y segunda cresta, respectivamente, es

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \tag{5.16}$$

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{5.17}$$

Dado que ambas ondas recorren la misma distancia [16], se pueden igualar las expresiones, obteniendo lo siguiente:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{5.18}$$

[15] La velocidad peculiar v^i_{pec} corresponde a la velocidad medida por un observador comóvil, que se mueve con la expansión del universo.

[16] Esta distancia es comóvil, la cual es explicada en la sección 5.2.1

Dado que la integral definida de una función en un intervalo puede descomponerse en la suma de integrales sobre subintervalos adyacentes, se puede aplicar esta propiedad a la anterior expresión, resultando

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \tag{5.19}$$

de modo que se puede concluir

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{5.20}$$

Para intervalos de tiempo pequeños, se asume que la función de escala $a(t)$ varía de manera despreciable en el intervalo de integración. Esto implica que en el intervalo $[t_e, t_e + \Delta t_e]$, $a(t)$ puede aproximarse por su valor en t_e, es decir, $a(t) \approx a(t_e)$. De manera análoga, en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t_0]$, se toma $a(t) \approx a(t_0)$.
Bajo esta aproximación, las integrales pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} dt, \tag{5.21}$$

donde al evaluar las integrales elementales, se halla la relación

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}. \tag{5.22}$$

Esta relación muestra que un intervalo de tiempo medido por un observador comóvil en t_e se dilata cuando se compara con el mismo intervalo en t_0, debido a la expansión del universo y la evolución del factor de escala entre ambos tiempos. Como consecuencia directa, la luz emitida por galaxias lejanas también se ve afectada: su longitud de onda se alarga, produciendo un corrimiento al rojo. Este cambio en la longitud de onda está vinculado al factor de escala, por lo que para describirlo es necesario expresar cómo varía dicha longitud con la expansión.

Para lograr lo anterior, se considera una fuente que emite fotones sucesivamente, la distancia entre ellos, al viajar a la velocidad de la luz c, corresponde a la longitud de onda de la luz emitida

$$c\Delta t_e = \lambda_e, \tag{5.23}$$

por lo tanto la la longitud de onda observada vendrá dada por

$$c\Delta t_0 = \lambda_0. \tag{5.24}$$

Al dividir las expresiones anteriores y haciendo uso de la relación (5.22), se encuentra la razón entre la longitud de onda emitida y observada mediante

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \tag{5.25}$$

Recordando la Ecuación (5.2), se encuentra la relación del factor de escala con el corrimiento al rojo

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \tag{5.26}$$

Por convención se define el factor de escala en el presente en su máximo valor como $a(t_0) = 1$, por consiguiente para cualquier tiempo de emisión $t_e = t$, la Ecuación 5.26 se convierte en:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \tag{5.27}$$

La relación entre el corrimiento al rojo z y el factor de escala $a(t)$ permite interpretar cómo la expansión del universo afecta la observación de los objetos lejanos. Sin embargo, para comprender la evolución global del cosmos, es necesario derivar ecuaciones que describan la dinámica del factor de escala en función del contenido material del universo.

5.1.4. Ecuaciones de Friedmann

Para ello, se recurre a las ecuaciones de campo de Einstein, aplicadas a un universo homogéneo e isótropo descrito por la métrica de FRW. Para cumplir con las condiciones de isotropía y homogeneidad se considera que la materia y energía se puede modelar como un fluido perfecto[17] con densidad de energía ρ, presión P y 4-velocidad $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ para un observador comóvil con tensor energía-momento definido como [41, 51, 96]:

$$T^\mu_\nu = (c^2\rho + P)U^\mu U_\nu - P\delta^\mu_\nu; \tag{5.28}$$

de manera que con estas consideraciones se obtengan las ecuaciones fundamentales que rigen la expansión del universo denominadas las ecuaciones de Friedmann. Con el fin de hallar estas ecuaciones, debido a la forma de las Ecuaciones de campo (4.3), se parte con el cálculo de los símbolos de Christoffel para la métrica de FRW(5.10), obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} &\Gamma^\mu_{00} = \Gamma^0_{0\beta} = 0, \\ &\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{kl,j} + \gamma_{jl,k} - \gamma_{jk,l}). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Ahora, para calcular el tensor de Ricci y el escalar de Ricci mediante las Ecuaciones (4.4) y (4.5), es importante tener en cuenta que, debido a la isotropía del espacio-tiempo descrito por la métrica FRW, se cumple que $R_{i0} = R_{0i} = 0$. Esto se debe a que, de lo contrario, existiría una dirección espacial privilegiada, en contradicción con la simetría del modelo cosmológico[18] [51, 96]. Entonces las componentes del tensor de Ricci faltantes se calculan de la siguiente forma:

[17] Un fluido perfecto es un modelo idealizado de fluido en el que se asume que no tiene viscosidad ni conductividad térmica.

[18] La componente R_{0i} relaciona el cambio de curvatura en dirección de tiempo t con la dirección espacial x^i. Si esta componente fuera distinta de cero, estaría indicando una preferencia direccional en cómo evoluciona la curvatura del universo a lo largo del tiempo, rompiendo la isotropía.

- Caso $\mu = 0, \nu = 0$: debido a que los símbolos de Christoffel con dos índices temporales se anulan por (5.29), esta componente se reduce a

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^i_{0i} - \Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i}. \tag{5.30}$$

Además, reemplazando los símbolos no nulos de (5.29), se tiene que

$$R_{00} = -\frac{d}{dt}\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a}. \tag{5.31}$$

- Caso $\mu = i, \nu = j$: la componente del tensor de Ricci espacial se escribe como

$$R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{ij} - \Gamma^\rho_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{j\rho}. \tag{5.32}$$

Aunque este caso es más complejo, los cálculos pueden simplificarse aprovechando la homogeneidad del espacio, la cual garantiza que todos los puntos son equivalentes. Por lo tanto, es posible evaluar R_{ij} en $\mathbf{x} = 0$ sin pérdida de generalidad (teniendo precaución a la hora de evaluar las derivadas en cero). Además teniendo en cuenta que para este caso $\gamma_{ij}(x = 0) = \delta_{ij}$ y que la parte espacial de la métrica inversa de (5.10) es $\gamma^{ij} = \delta^{ij} - kx^i x^j$ [51], para cada término de (5.32) se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij}\big|_{x=0} &= \left[(\dot{a})^2 + a\ddot{a} + 3k\right]\delta_{ij}, & \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda}\big|_{x=0} &= k\delta_{ij}, \\ \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{ij}\big|_{x=0} &= 3\dot{a}^2\delta_{ij}, & \Gamma^\rho_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{j\rho}\big|_{x=0} &= 2\dot{a}^2\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Por lo tanto al reemplazar en (5.32), y tomando en cuenta el concepto de homogeneidad se tiene que

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{ij}. \tag{5.34}$$

Con los anteriores resultados se puede calcular el escalar de Ricci, que al expandir y tomar en cuenta sus componentes nulas se reduce a:

$$R = R_{00} + g^{ij}R_{ij}, \tag{5.35}$$

donde al reemplazar las componentes del tensor de Ricci dadas por (5.31) y (5.34) y simplificar, se llega al siguiente resultado

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \tag{5.36}$$

Por razones de simplicidad y conveniencia se toma la forma mixta de las Ecuaciones de campo de Einstein (4.3), es decir,

$$G^\mu_{\ \nu} = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}R\delta^\mu_{\ \nu} = \frac{8\pi G T^\mu_{\ \nu}}{c^4}. \tag{5.37}$$

Al tomar la componente temporal y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en (5.36) y (5.31), esta componente toma la siguiente forma

$$G^0{}_0 = g^{0\lambda}R_{\lambda 0} - \frac{1}{2}R\delta^0{}_0 = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \tag{5.38}$$

además, por otro lado, se tiene esta igualdad

$$G^0{}_0 = \frac{8\pi G T^0_0}{c^4}. \tag{5.39}$$

Al comparar las dos ecuaciones anteriores y simplificar, tomando en cuenta la componente temporal del tensor energía-momento dada en (5.28), y despejando $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$, se obtiene que la primera ecuación de Friedmann adopta la siguiente estructura:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{c^2 k}{a^2}, \tag{5.40}$$

que en términos del parámetro de Hubble, adquiere la siguiente forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{c^2 k}{a^2}. \tag{5.41}$$

De manera similar se calcula la segunda ecuación de Friedmann. Primero teniendo en cuenta (5.34) y (5.36), se llega a

$$G^i_j = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\delta^i_j, \tag{5.42}$$

luego de

$$G^i{}_j = \frac{8\pi G T^i_j}{c^4}, \tag{5.43}$$

y teniendo en cuenta la forma espacial del tensor momento-energía sugerido (5.28) y la primera ecuación de Friedmann, se puede hallar la segunda ecuación de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3P}{c^2}). \tag{5.44}$$

Por otro lado, si se analiza la evolución temporal de la densidad de energía y la presión, en un universo en expansión, mediante la ley de conservación covariante del tensor energía-momento $\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu_\lambda = 0$, entonces se puede obtener la ecuación de continuidad al considerar $\nu = 0$ y los símbolos de Christoffel calculados en (5.29)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{P}{c^2}) = 0. \tag{5.45}$$

La densidad de energía y la presión se relacionan mediante la ecuación de estado para un fluido perfecto, debido a diferentes fuentes que contribuyen a la presión, de la siguiente forma

[96–98] :

$$P = wc^2\rho, \quad w = \begin{cases} 0 & \text{Materia} \\ \frac{1}{3} & \text{Radiación} \\ -1 & \text{Vacío} \end{cases}, \tag{5.46}$$

donde se denomina materia a todas aquellas formas de energía para las cuales la presión es significativamente menor que la densidad de energía, es decir, $P \ll \rho$. En este régimen, la presión P es despreciable en comparación con ρ. Este comportamiento caracteriza tanto a la materia oscura[19] como a la materia bariónica[20].

Por otro lado, la radicación se caracteriza por la ecuación de estado descrita en (5.46). Un ejemplo es un gas compuesto por partículas relativistas, en el cual la densidad de energía está principalmente determinada por la energía cinética, es decir, el momento es mucho mayor que la masa. Además, en el estudio de la evolución dinámica del universo, la ecuación de estado con presión negativa juega un papel clave en la descripción de la expansión acelerada. Un caso particular es la energía del vacío, que en relatividad general se modela mediante la constante cosmológica Λ y suele denominarse energía oscura [32, 51, 96, 97].

Ahora bien, si se reemplaza (5.46) en (5.45) y se lleva a cabo el método de separación de variables para integrar desde valores de densidad y factor de escala en el pasado hasta valores del presente, entonces se obtiene la relación entre densidad de energía y factor de escala en términos del corrimiento al rojo (5.26) para cualquier w, dada por

$$\rho = \rho_0(1+z)^{3(1+\omega)}. \tag{5.47}$$

Con lo anterior es posible reescribir la primera ecuación de Friedmann (5.41) en función de la densidad de energía crítica

$$H^2 = \frac{H_0^2\,\rho}{\rho_{crit,0}} - \frac{c^2 k}{a^2}, \tag{5.48}$$

definiendo la densidad de energía crítica $\rho_{crit,0}$ como la densidad de energía total del universo necesaria para que tenga una geometría espacial plana ($k = 0$) en el presente t_0, es decir

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2c^2}{8\pi G}. \tag{5.49}$$

Con el fin de hallar la relación del parámetro de Hubble con el corrimiento al rojo es necesario aclarar que la densidad de energía ρ es la contribución total de las diferentes fuentes [51] es decir

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_m + \rho_\Lambda, \tag{5.50}$$

[19] La mayor parte de la materia en el universo corresponde a materia oscura, una entidad invisible cuya composición aún es desconocida. Se presume que está formada por partículas masivas aún no identificadas [51].

[20] La materia bariónica está constituida principalmente por bariones, como protones y neutrones, que integran los núcleos atómicos. Aunque los electrones forman parte de los átomos, al ser leptones y tener una masa despreciable en comparación con la de los núcleos, en cosmología la materia ordinaria se clasifica bajo la denominación de "materia bariónica" [51].

donde ρ_γ, ρ_m y ρ_Λ son la densidad de energía debido a la radiación, materia y energía oscura, respectivamente. Así, se puede reescribir la Ecuación (5.48) como:

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{1}{\rho_{\text{crit},0}} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2} \frac{1}{a^2} \right]. \tag{5.51}$$

Para finalmente expresar la anterior ecuación en términos del corrimiento al rojo se hace uso de la relación (5.47) y las definiciones

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit},0}} \therefore i = \begin{cases} r & \text{radiación}, \quad w = \frac{1}{3} \\ m & \text{materia}, \quad w = 0 \\ k & \text{curvatura}, \quad w = -\frac{1}{3} \\ \Lambda & \text{vacío}, \quad w = -1, \end{cases} \tag{5.52}$$

donde se define, a su vez, el parámetro de densidad de curvatura como $\Omega_{k,0} \equiv -k/(a_0 H_0)^2$. Así, la ecuación de Friedmann finalmente se puede escribir como:

$$H(z) = H_0 E(z), \tag{5.53}$$

siendo $E(z)$ la siguiente función,

$$E^2(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2. \tag{5.54}$$

Esta relación permite conectar la dinámica de la expansión con las observaciones astronómicas, proporcionando una herramienta clave para determinar parámetros cosmológicos como la densidad de materia Ω_m, la densidad de radiación Ω_r y la constante cosmológica Ω_Λ. Si se analiza la Ecuación (5.53) en el presente, entonces se podrá encontrar la siguiente relación entre densidades

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1. \tag{5.55}$$

5.1.5. Parámetros cosmológicos

Del análisis de las ecuaciones de Friedmann se obtuvieron parámetros fundamentales que describen la estructura, composición y evolución del universo. Estos parámetros permiten caracterizar su dinámica y comparar modelos teóricos con observaciones. Actualmente, incluyen la tasa de expansión, la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de sus componentes principales: bariones, fotones, neutrinos, materia oscura y energía oscura. A través de estos valores, es posible describir el universo a gran escala utilizando entre cinco y diez parámetros clave [24]. En este trabajo se analizaran los parámetros más comunes tal como se describe continuación.

Como parámetro relevante en la cosmología se encuentra la tasa de expansión del universo que se mide mediante el parámetro de Hubble para cualquier instante de tiempo. Este parámetro definido en términos del tiempo por la Ecuación (5.14), describe qué fracción del

tamaño actual del universo se está expandiendo por unidad de tiempo y por lo tanto está relacionado con la edad del universo [96,99,100]. En la actualidad, este parámetro es la constante de Hubble que frecuentemente se escribe como

$$H_0 = 100h\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}, \tag{5.56}$$

donde h es la constante de Hubble dividida por cien. Dicha constante es importante de para definir las densidades $\Omega_{i,0}$, esto se debe a que la densidad crítica actual (5.49) está en términos de H_0, de manera que en términos de h se puede escribir como

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2c^2}{8\pi G} \simeq 1.05 \times 10^4 h^2\,\mathrm{eV/cm^3}. \tag{5.57}$$

Así entonces, se podrá analizar cada parámetro de densidad $\Omega_{i,0}$. Inicialmente si se calcula la densidad de energía radiación en el universo teniendo en cuenta que esta proviene principalmente de los fotones del CMB, los cuales están distribuidos homogéneamente y siguen una distribución de cuerpo negro con alta precisión [24]. En termodinámica, la densidad de energía de un gas de radiación con esta distribución se obtiene integrando la energía espectral en todas las frecuencias [98, 101], de manera que si se tiene en cuenta que la temperatura del CMB es de $T = (2.7255 \pm 0.0006)K$ según el experimento FIRAS del satélite COBE [102], entonces la densidad de energía de radiación actual es

$$\rho_{r,0} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4 = 0.2602 \pm 0.0002\,\mathrm{eV/cm^3}. \tag{5.58}$$

Con esta densidad se puede calcular el parámetro de densidad de radiación actual por medio de la relación (5.52), que es de

$$\Omega_{r,0} \simeq 2.478 \times 10^{-5} h^{-2}, \tag{5.59}$$

lo cual indica que, según el valor de H_0 de la Tabla 5.2, $\Omega_{r,0}$ es muy pequeño y se puede aproximar a cero.

Los demás parámetros cosmológicos considerados en este trabajo provienen del análisis de los datos de Planck 2018 indicados en la Tabla 1 y 4 de la Referencia [3].

Parámetro	Valor
H_0 (km s^{-1} Mpc^{-1})	67.4 ± 0.5
Ω_m	0.315 ± 0.007
Ω_Λ	0.685 ± 0.007
Ω_k	0.001 ± 0.002

Tabla 5.2: Valores de algunos parámetros cosmológicos obtenidos a partir del análisis de Planck 2018 [3].

En esta Tabla se puede apreciar que para el parámetro de densidad de curvatura se encontró un valor muy pequeño que puede considerarse nulo, lo cual concuerda con un modelo plano del universo y el modelo ΛCDM [3, 24]. Este resultado permite asumir una geometría espacial plana en los cálculos cosmológicos, lo cual es fundamental para determinar con precisión diversas distancias que surgen en el estudio del universo.

5.2. Distancias cósmicas

En cosmología las distancias menores a $100Mpc$ son consideradas pequeñas ya que a esa escala no aplicaría el principio de homogeneidad e isotropía mencionado al principio de este capítulo [32]. Para medir distancias a grandes escalas se necesita del conocimiento de medición de distancias menores a $100Mpc$. Como se mencionó brevemente en la sección 5.1.2, los astrónomos miden distancias cósmicas mediante una jerarquía de métodos llamada escalera de distancias, que comienza con el paralaje trigonométrico (preciso hasta $\sim$1 kpc para estrellas cercanas) y se extiende a escalas extragalácticas usando candelas estándar[21]. Las variables Cefeidas, con su relación período-luminosidad descubierta por Leavitt en 1908 [103], permiten medir distancias hasta $\sim$20 Mpc, pero el peldaño más poderoso lo proporcionan las supernovas de tipo Ia. Estas supernovas, cuya curva de luz correlaciona con su brillo intrínseco, son visibles hasta $\sim$5000 Mpc, cerca del límite del universo observable [32, 63].

El anterior procedimiento permite medir la distancia de luminosidad (D_L). Por otro lado, a diferencia de D_L, la distancia cómovil (D_c) y la distancia propia no son medibles directamente. Otro tipo de distancia es la distancia de diámetro angular, la cual se puede medir experimentalmente aunque por su definición tiene un uso limitado, ya que requiere conocer el tamaño físico de objetos lejanos y es difícil encontrar tamaños estándares como en el caso de la luminosidad [63]. Para comprender mejor las distancias anteriormente mencionadas, se aborda cada una de ellas en las siguientes secciones.

5.2.1. Distancia comóvil

La distancia comóvil representa la separación invariante entre dos puntos en el espacio cuando se eliminan los efectos de la expansión cósmica. Se define haciendo las mismas consideraciones para una señal luminosa que se hicieron en la sección 5.1.3.1 e integrando la expresión (5.15) desde el tiempo de emisión t hasta el tiempo presente t_0. Por lo que la distancia comóvil adopta la siguiente estructura

$$D_c = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{5.60}$$

Esta expresión muestra que la distancia comóvil corresponde a la distancia recorrida por la luz si la expansión del universo estuviera "congelada" en un instante dado.

5.2.2. Distancia propia

La distancia propia o distancia física es la separación entre dos puntos en un instante dado, teniendo en cuenta la expansión del universo. A diferencia de la distancia comóvil, la distancia propia varía con el tiempo debido al cambio en el factor de escala $a(t)$ [41], como es evidente en la siguiente relación

[21] son objetos astronómicos con propiedades físicas conocidas que permiten determinar distancias cósmicas al comparar su luminosidad intrínseca con su brillo observado.

$$D_p(t) = a(t)\, D_c. \tag{5.61}$$

5.2.3. Distancia de luminosidad

La distancia de luminosidad es la medida de la separación entre un objeto astronómico y el observador, basada en cómo su brillo aparente se atenúa debido a la expansión del universo. Tiene en cuenta tanto el aumento en la distancia que la luz debe recorrer como el efecto del corrimiento al rojo, que reduce la energía de los fotones [104]. Para obtener la expresión matemática para la distancia de luminosidad, primero hay que remitirse al caso más sencillo. La información que se obtiene de una fuente lejana depende de ciertas observables, como el flujo incidente f (energía por segundo por área receptora). Esta medida depende, a su vez, de la luminosidad intrínseca L definida como energía emitida por segundo proveniente de una fuente, $L = \frac{dE}{dt}$. Si se considera una fuente a una distancia comóvil D_c, en el caso de un universo plano y estático, entonces el flujo incidente medido desde la Tierra es

$$f = \frac{L}{4\pi D_c^2}. \tag{5.62}$$

Esto se define por la ley del inverso cuadrado del flujo, que surge de la geometría del espacio. A medida que la distancia a la fuente aumenta, la energía emitida se dispersa sobre una superficie esférica cuya área crece como $4\pi D_c^2$, lo que provoca que el flujo disminuya con el cuadrado de la distancia [51].

El problema de la Ecuación (5.62) es que no considera la expansión del universo. Para incluir este efecto, es necesario analizar cómo escalan la distancia y el flujo. En primer lugar, la distancia que incorpora la expansión del universo es la distancia propia. Dado que la distancia comóvil se mantiene constante en un universo en expansión, la distancia propia escala con el factor de escala $a(t)$. En segunda instancia, como el flujo depende de la luminosidad, es necesario determinar el factor de escala que afecta los diferenciales de tiempo y energía, debido a la expansión del universo. Para el tiempo se puede hacer el siguiente análisis partiendo de la relación (5.22). Al reescribir esta relación de la siguiente forma

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e}, \tag{5.63}$$

y elegir intervalos de tiempo suficientemente pequeños, se puede tomar el límite cuando $\Delta t_e \to 0$. Dado que $a(t_0)/a(t_e)$ no depende de Δt_e, el límite se conserva y se obtiene la expresión diferencial:

$$\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \tag{5.64}$$

Por lo tanto, al transformar una derivada respecto al tiempo en la época de emisión (t_e) a una derivada respecto al tiempo en la época actual (t_0), se obtiene

$$\frac{d}{dt_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}\frac{d}{dt_e}, \tag{5.65}$$

que mediante la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo z dada por (5.27), se concluye que la transformación de la derivada temporal queda expresada como

$$\frac{d}{dt_0} = \frac{1}{1+z}\frac{d}{dt_e}. \tag{5.66}$$

Ahora, para hallar el factor de reescalamiento para la energía, se parte del hecho de que la energía del fotón en términos de su longitud de onda es,

$$E = \frac{h}{\lambda}, \tag{5.67}$$

donde h es la constante de Planck. Esta relación fue establecida por Max Planck en 1900 al desarrollar la teoría cuántica de la radiación [105], y posteriormente confirmada por Albert Einstein en 1905 con su explicación del efecto fotoeléctrico [106]. La ecuación expresa que la energía de un fotón es inversamente proporcional a su longitud de onda, lo que significa que fotones de mayor frecuencia (menor λ) transportan más energía. Teniendo en cuenta la anterior relación, el cociente de la energía observada con respecto a la emitida es,

$$\frac{E_0}{E_e} = \frac{h}{\lambda_0}\frac{\lambda_e}{h} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0}, \tag{5.68}$$

lo que indica que la relación entre las energías depende directamente de la variación de la longitud de onda debido a la expansión del universo. En términos del factor de escala,

$$\frac{E_0}{E_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} = a(t_e), \tag{5.69}$$

considerando que la longitud de onda se escala proporcionalmente al factor de expansión $a(t)$ debido a la relación (5.25). La anterior ecuación se puede reescribir, debido a la relación (5.27), de la siguiente forma

$$E_0 = \frac{1}{(1+z)}E_e, \tag{5.70}$$

lo que refleja que la energía del fotón disminuye a medida que el universo se expande. Bajo el formalismo anteriormente desarrollado, la luminosidad observada en términos de la emitida es,

$$L_0 = \frac{1}{(1+z)^2}\frac{dE_e}{dt_e} = \frac{1}{(1+z)^2}L, \tag{5.71}$$

y el flujo de luminosidad por unidad de área (esfera) observado se escribe como

$$f = \frac{L_0}{4\pi a^2(t_0) D_c^2}, \tag{5.72}$$

en términos de la luminosidad emitida o luminosidad intrínseca,

$$f = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 D_c^2}, \tag{5.73}$$

luego, el factor al cuadrado es definida como la distancia de luminosidad, por lo tanto

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \tag{5.74}$$

donde la distancia de luminosidad por definición es

$$D_L = D_c(1+z) = (1+z)\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \tag{5.75}$$

Como la distancia de luminosidad es una cantidad que se mide experimentalmente, debe escribirse en función de cantidades medibles. La integral temporal se puede relacionar con el corrimiento al rojo teóricamente por las relaciones (5.27) y (5.53). Si se toma el diferencial de (5.27), se obtiene

$$dz = -\frac{1}{a(t)^2}\dot{a}(t)dt, \tag{5.76}$$

que al reordenar de la siguiente manera

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{a(t)}{\dot{a}}dz = -\frac{dz}{H(z)}, \tag{5.77}$$

debido a que el parámetro de Hubble (5.14) depende de la evolución del factor de escala $a(t)$, pero en cosmología observacional es más conveniente describir la evolución del universo en términos de z en lugar de t, ya que el tiempo cósmico no es directamente medible, mientras que z sí. Al integrar la expresión (5.77), teniendo en cuenta el límite superior dado por $a_0 \equiv 1$ (en el presente es el máximo valor)

$$1 + z_0 = \frac{1}{a(t_0)} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0 \tag{5.78}$$

y el signo que invierte los límites de la integral, la distancia comóvil en términos del corrimiento al rojo se puede escribir como

$$D_L(z) = (1+z)\int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}. \tag{5.79}$$

La Figura 5.1 muestra la distancia de luminosidad $D_L(z)$ en función del corrimiento al rojo z, con datos experimentales[22] (puntos grises con barras de error) y distintas predicciones

[22]Las distancias de luminosidad y su respectivo error se obtuvieron a partir de la Tabla 15 del articulo [2] de la columna $log(D_L H_0)$ correspondientes a un corrimiento al rojo. Estos datos son una recopilación que combina datos de las principales encuestas de supernovas (HZT y SCP), estudios históricos (Calán/Tololo), y observaciones individuales publicadas en la literatura, estas referencias se encuentran citadas en el articulo guía [2].

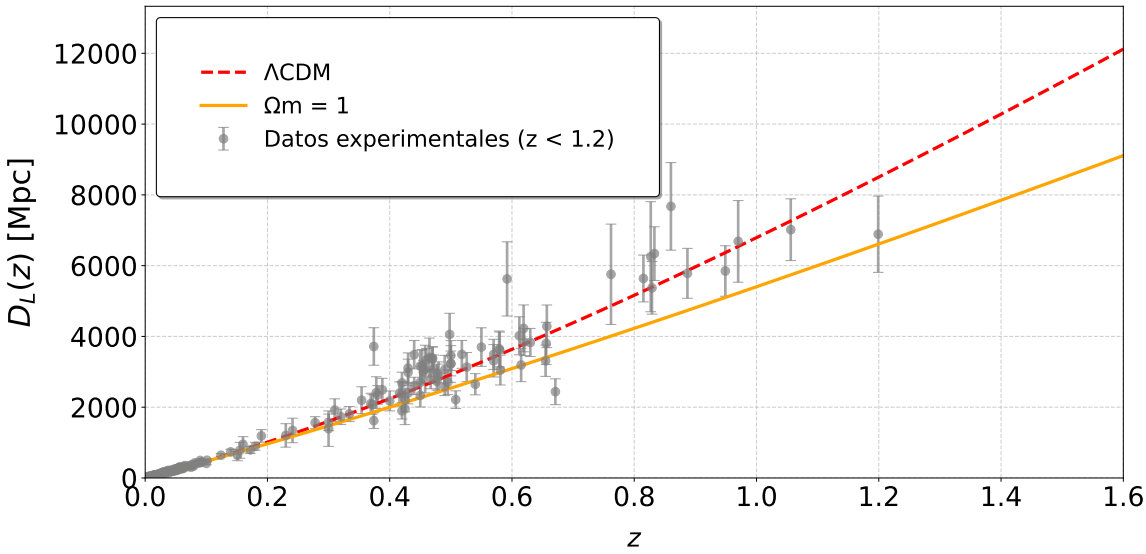

Figura 5.1: Distancia de luminosidad vs corrimiento al rojo. Las distancias de luminosidad y sus respectivos errores se han obtenido a partir de los 229 datos recopilados en el articulo [2] correspondientes a $z < 1.2$. Además se puede notar la consistencia entre los datos y el modelo ΛCDM [3] denotado con una línea punteada roja. Como referencia se presenta la línea naranja con un modelo de universo dominado por materia.

teóricas. La curva roja discontinua representa el modelo ΛCDM, que incluye constante cosmológica y materia oscura, mientras que la curva naranja corresponde a un universo con $\Omega_m = 1$ (solo materia, sin energía oscura). Además, se muestra un ajuste cuadrático en azul, basado en los datos experimentales para $z < 1.2$. Se observa que a bajos valores de z, los datos concuerdan bien con ambos modelos, pero a medida que aumenta z, la curva de ΛCDM predice mayores distancias de luminosidad en comparación con el modelo puramente de materia. Esto refleja la influencia de la aceleración cósmica: en un universo dominado por energía oscura, la expansión es más rápida y los objetos aparecen más distantes de lo que un modelo sin energía oscura predeciría.

5.2.4. Distancia de diámetro angular

En un universo plano en expansión, la distancia de diámetro angular es la separación propia del emisor en el instante de emisión, lo que permite conservar información sobre su distancia en ese momento. Esta distancia se mantiene inalterada por el movimiento posterior del emisor, ya que los rayos de luz emitidos desde sus extremos opuestos conservan su separación angular al propagarse. No obstante, emisiones posteriores reflejarán una mayor distancia D_A debido a la expansión del universo [32]. Matemáticamente la distancia de diámetro angular se define en términos del cociente entre el posible diámetro de una fuente y la variación angular

al realizar la observación,

$$D_A = \frac{D}{\delta\theta}, \tag{5.80}$$

siendo la longitud de arco de la que proviene el diámetro,

$$D = a(t_e) D_c \delta\theta, \tag{5.81}$$

luego,

$$D_A = \frac{a(t_e) D_c \delta\theta}{\delta\theta} = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')}, \tag{5.82}$$

usando la relación del factor de escala con el corrimiento al rojo (5.27), la distancia de diámetro angular puede escribirse como

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}. \tag{5.83}$$

A continuación se puede apreciar la gráfica que relaciona la distancia de diámetro angular $D_A(z)$ en función del corrimiento al rojo z, con datos experimentales para $z < 1.2$ y dos modelos teóricos: ΛCDM (línea punteada roja) y un universo dominado por materia con $\Omega_m = 1$ (línea naranja). Se observa que $D_A(z)$ crece en el rango $z \lesssim 1.5$, alcanzando un máximo y luego decreciendo para $z > 1.5$. Este comportamiento se debe a que, a bajos z, los objetos más lejanos subtienden un menor ángulo aparente conforme aumenta la distancia comóvil, pero a altos z, la expansión del universo domina y la distancia comóvil deja de crecer tan rápido, haciendo que los objetos comiencen a parecer más grandes angularmente. En particular, en un universo con energía oscura, el máximo de $D_A(z)$ ocurre a valores de z más altos en comparación con un universo sin constante cosmológica, debido a la aceleración tardía de la expansión. La diferencia entre los modelos resalta el efecto de la energía oscura en la evolución de la distancia angular y la estructura a gran escala del universo.

En el caso de un universo plano $k = 0$, al medir las distancias en un sistema de referencia cómovil mediante la métrica de FRW, las distancias de diámetro angular se suman ya que este espacio sigue la geometría euclidiana [107]. Es decir, si se observan dos objetos, uno con un corrimiento al rojo z_1 y otro más lejano con corrimiento al rojo z_2, entonces las distancias se relacionan de la siguiente manera

$$D_{A1} = D_{A2} + D_{A12}, \tag{5.84}$$

siendo D_{A1} y D_{A2} la distancias de diámetro angular medidas por el observador de los objetos con corrimientos al rojo z_1 y z_2, respectivamente, y D_{A12} la distancia de diámetro angular entre ambos objetos. La distancia D_{A12}, teniendo en cuenta la relación (5.82), se puede escribir como

$$D_{A12} = \frac{1}{(1+z_2)} \left(\int_0^{z_2} \frac{c\, dz'}{H(z')} - \int_0^{z_1} \frac{c\, dz'}{H(z')} \right). \tag{5.85}$$

El factor de escala $\frac{1}{1+z_2}$ se evalúa en la época en que la luz fue emitida desde el objeto más lejano. Esto se debe a que la distancia física entre los dos objetos en ese instante es la que

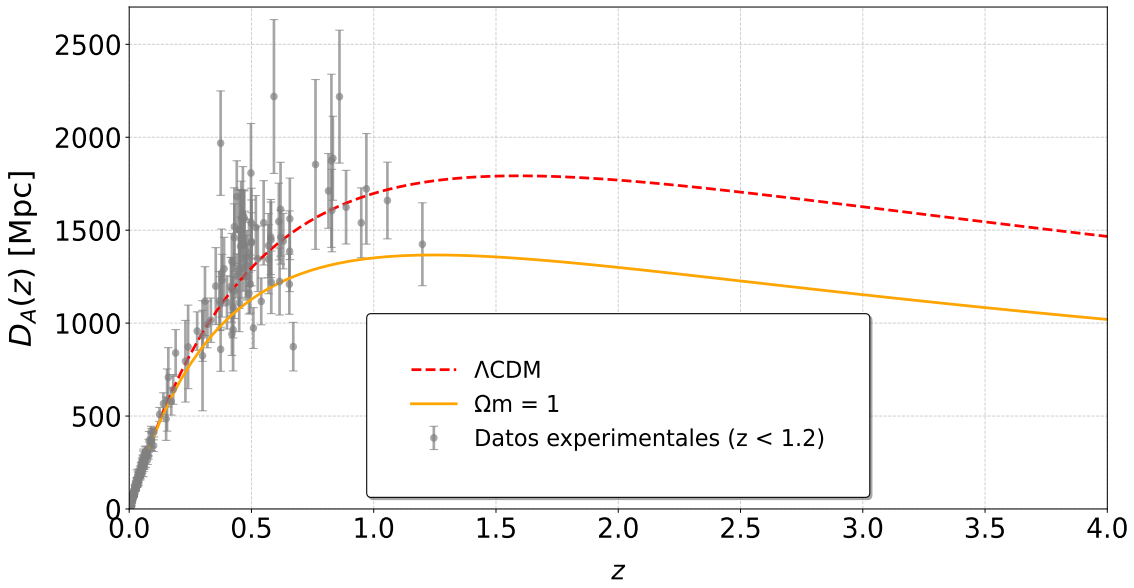

Figura 5.2: Distancia de diámetro vs corrimiento al rojo. Las distancias de diamétro y sus respectivos errores se han obtenido a partir de los 229 datos recopilados en el articulo [2] correspondientes a $z < 1.2$ por medio de la relación (5.83). Se puede notar una tendencia de los datos al modelo ΛCDM [3] denotado con una línea punteada roja. Como referencia se presenta la línea naranja con un modelo de universo dominado por materia.

determina su separación angular observada en la actualidad. Como la luz viaja desde el objeto más distante hasta el observador, la separación relevante entre los objetos debe considerarse en la escala espacial de la época en que la luz fue emitida, es decir, en z_2 [108–111]. Finalmente, la anterior expresión puede ser reescrita como

$$D_{A12} = \frac{1}{(1+z_2)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{c\, dz'}{H(z')}. \tag{5.86}$$

5.3. Cosmografía

Para obtener la constante de Hubble a partir de datos de supernovas de tipo Ia para valores de corrimiento al rojo $z < 1$, inicialmente se debe encontrar la relación entre el corrimiento al rojo y la distancia de luminosidad mediante la expansión en series de Taylor en el rango de corrimientos al rojo mencionado; es decir, para intervalos de tiempo pequeños. Así, el factor de escala se expande alrededor de t_0 (tiempo presente) de la siguiente manera

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n a(t)}{dt^n}\bigg|_{t=t_0} (t-t_0)^n, \tag{5.87}$$

Desarrollando explícitamente los primeros términos

$$a(t) = a(t_0) + \left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3a(t)}{dt^3}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4)), \tag{5.88}$$

dividiendo lo anterior por el factor de escala evaluado en el presente

$$a(t) = a(t_0)\left[1 + \frac{1}{a(t_0)}\left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{a(t_0)}\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{a(t_0)}\left.\frac{d^3a(t)}{dt^3}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\right]. \tag{5.89}$$

Además, teniendo en cuenta la forma de la constante de Hubble y que por definición se tiene que

$$q_0 = -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}\right)_{t=t_0}, \quad j_0 = \left(\frac{\dddot{a}/a}{(\dot{a}/a)^3}\right)_{t=t_0}, \tag{5.90}$$

donde q_0 es el parámetro de desaceleración, el cual mide la tasa de cambio de la velocidad de expansión del universo y se relaciona con la ecuación de estado de materia mediante el uso de las ecuaciones de Friedmann $q_0 = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_i(1+3w_i)$, de manera que en el modelo ΛCDM $q_0 = \frac{3}{2}\Omega_m - 1 \approx -0.55$. Si $q_0 < 0$, la expansión se está acelerando, como en un universo dominado por energía oscura ya que $\Omega_m < 2/3$ [112] en el caso contrario la expansión se desacelera [113]. Además, el segundo parámetro, j_0 conocido como "parámetro de jerk"describe la evolución de la aceleración del universo. El valor de j_0 para el modelo ΛCDM es 1. Este valor revela que la evolución de la aceleración cósmica está completamente determinada por la constante cosmológica Λ. Este resultado confirma que, dentro del modelo ΛCDM, el comportamiento futuro de la aceleración está gobernado de manera predominante por Λ, relegando a un papel secundario las contribuciones de materia (Ω_m) y radiación (Ω_r) en épocas tardías [114].

Para poder reescribir la Ecuación (5.89) en términos de las anteriores constantes, es importante conocer las siguientes relaciones

$$\left(\frac{\dddot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = H_0^3 j_0, \quad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = -H_0^2 q_0, \tag{5.91}$$

con las cuales el factor de escala adquiere la siguiente estructura

$$a(t) = a(t_0)\left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\right]. \tag{5.92}$$

Ahora bien, la distancia de luminosidad (5.79) se puede reescribir de la siguiente manera, teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.60) y (5.61) en el caso de un universo plano y en el presente (con $a(t_0) = 1$)

$$D_L = r_e\,(1+z), \tag{5.93}$$

donde, por la relación (5.60), r_e es

$$r_e = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')}. \tag{5.94}$$

En el caso de valores pequeños de z, gracias a (5.92), r_e se puede hallar de la siguiente manera

$$r_e = \int_t^{t_0} \frac{c\,dt'}{a(t_0)\left[1 + H_0(t'-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t'-t_0)^2 + \frac{7}{3!}j_0H_0^3(t'-t_0)^3 + \mathcal{O}((t'-t_0)^4)\right]}. \tag{5.95}$$

Para resolver esta integral, se hace uso de la expansión en serie de Taylor de $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, debido a que x se define como

$$x = H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t'-t_0)^4), \tag{5.96}$$

donde $x < 1$ porque depende de pequeños intervalos de tiempo. Así entonces

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} = 1 &- H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 - \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t-t_0)^3 \\ &+ \left[H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\right]^2 \\ &+ \left[H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\right]^3 + \ldots\end{aligned} \tag{5.97}$$

Al reemplazar en la integral (5.95)

$$\begin{aligned}\int_t^{t_0} \frac{c}{a(t_0)}\Bigg[&1 - H_0(t'-t_0) + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t'-t_0)^2 - \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t'-t_0)^3 \\ &+ H_0^2(t'-t_0)^2 - H_0^3q_0(t'-t_0)^3 - H_0^3(t'-t_0)^3 + \mathcal{O}((t'-t_0)^4)\Bigg]dt' \\ &= \frac{1}{a(t_0)}\Bigg[(t_0-t) + \frac{1}{2}H_0(t-t_0)^2 - \frac{1}{6}q_0H_0^2(t-t_0)^3 \\ &+ \frac{1}{6}j_0H_0^3(t-t_0)^4 - \frac{H_0^2(t-t_0)^3}{3} + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.98}$$

Así, se obtiene

$$r_e = \frac{c}{a(t_0)}\left[(t_0-t) + \frac{1}{2}H_0(t-t_0)^2 - H_0^2(t-t_0)^3\left(\frac{1}{6}q_0 + \frac{1}{3}\right) + \mathcal{O}((t-t_0)^4)\right]. \tag{5.99}$$

Por otro lado se debe encontrar la relación entre el corrimiento al rojo y los intervalos de tiempo. Para lograr este objetivo se emplea el método de aproximaciones sucesivas partiendo de la relación (5.27) y (5.92)

$$\frac{1}{(1+z)} = 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3}j_0H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4). \quad (5.100)$$

Utilizando la expansión en serie de Taylor de $(1+x)^{-1}$, la expresión en términos del corrimiento al rojo toma la forma

$$1 - z + z^2 - z^3 + \mathcal{O}(z^4) = 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4). \quad (5.101)$$

Al comparar ambos lados de la anterior ecuación, se obtiene una expansión en órdenes sucesivos de z, lo que permite mejorar la aproximación de manera iterativa:

- Aproximación de primer orden: Para una primera aproximación, se despeja $H_0(t-t_0)$ en términos de z de (5.101), solo a primer orden:

$$z \approx -H_0(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad (t-t_0) \approx -\frac{z}{H_0}. \quad (5.102)$$

- Aproximación de segundo orden: En este caso se compara ambos lado de la Ecuación (5.101) hasta segundo orden

$$H_0(t-t_0) \approx -z + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2, \quad (5.103)$$

y luego, teniendo en cuenta la primera aproximación (5.102), el intervalo temporal se halla de la siguiente forma:

$$H_0(t-t_0) \approx -z + z^2 + \frac{1}{2}q_0z^2. \quad (5.104)$$

Por lo tanto, la corrección hasta este orden es

$$(t-t_0) \approx \frac{1}{H_0}\left[-z + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)z^2\right]. \quad (5.105)$$

- Aproximación de tercer orden: Finalmente, siguiendo un proceso similar al anterior pero a tercer orden

$$H_0(t-t_0) \approx -z + z^2 - z^3 + \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 - \frac{1}{3}j_0H_0^3(t-t_0)^3, \quad (5.106)$$

y reemplazando el intervalo (5.105) en (5.106), teniendo encuentra solo términos hasta tercer orden, resulta

$$(t-t_0) \approx -\frac{1}{H_0}\left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)z^2 + \left(1 + q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6}\right)z^3\right]. \quad (5.107)$$

Con la aproximación a tercer orden, se puede expresar r_e en términos del corrimiento al rojo, reemplazando (5.107) en (5.99), es decir

$$\begin{aligned} r_e \approx c\, H_0^{-1} \Bigg\{ & \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \left(1 + q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6}\right) z^3 \right] \\ & + \frac{1}{2}\left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \left(1 + q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6}\right) z^3 \right]^2 \\ & + \left(\frac{q_0}{6} + \frac{1}{3}\right) \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \left(1 + q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6}\right) z^3 \right]^3 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.108}$$

y además al expandir lo anterior teniendo en cuenta hasta términos de tercer orden, se obtiene:

$$r_e = c\, H_0^{-1} \left[z - \frac{1}{2}\left(1 + q_0\right) z^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6}\right) z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right]. \tag{5.109}$$

Debido a la relación de r_e con el corrimiento al rojo, se puede hallar a la vez la relación entre la distancia de luminosidad y en corrimiento al rojo mediante (5.93), de manera que distribuyendo el factor $(1 + z)$ y solo considerando términos hasta orden tres, dicha relación adquiere la siguiente estructura

$$D_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z - \frac{1}{6}(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right). \tag{5.110}$$

Dado que la distancia de luminosidad es una cantidad fundamental en estudios observacionales, resulta conveniente expresar esta relación en términos del módulo de distancia, el cual permite conectar directamente los cálculos teóricos con las mediciones de magnitudes aparentes de supernovas de tipo Ia. En particular, esta estrategia ha sido utilizada en el estudio de Wang y Cheng [113], donde a partir de la relación entre $D_L(z)$ y el módulo de distancia, se propone un método para estimar la constante de Hubble utilizando datos experimentales. Esta conexión será explorada a continuación en detalle.

Para comprender cómo se mide la luminosidad de una estrella y cómo esta se relaciona con su distancia, es fundamental conocer el concepto de módulo de distancia. Este parámetro permite comparar el brillo aparente de una estrella con su brillo real, proporcionando una forma de estimar su distancia en el universo. El brillo con el que se percibe una estrella desde la Tierra depende de la cantidad de luz que llega de ella, lo que se conoce como brillo aparente. Sin embargo, la intensidad con la que se percibe la luz no es proporcional a la cantidad real de energía emitida, pues el ojo humano no capta los cambios de brillo de manera líneal. Para representar de forma sistemática estas diferencias de luminosidad, los astrónomos han desarrollado una escala de clasificación denominada magnitud aparente, denotada por m.

Esta escala fue introducida por Hiparco (c. 190 a.C - 120 a.C), quien clasificó las estrellas en seis categorías según su brillo. En su sistema, las estrellas más brillantes fueron asignadas a la primera magnitud ($m = 1$), mientras que las más débiles visibles a simple vista recibieron

la magnitud seis ($m = 6$) [115]. Posteriormente en 1856, Norman Pogson (1829-1891) formalizó esta escala y estableció que una estrella de magnitud 1 es 100 veces más brillante que una de magnitud 6. De esto se deduce que una diferencia de una unidad de magnitud equivale a un factor de brillo de $2.512 = (100)^{1/5}$ [115]. Dado que el ojo humano percibe el brillo de manera logarítmica, Pogson definió la relación entre las magnitudes m_1 y m_2 de dos estrellas con flujos f_1 y f_2 como $\frac{f_1}{f_2} = 2.512^{-(m_1-m_2)} = 10^{-0.4(m_1-m_2)}$ o escrito de otra forma

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{f_1}{f_2}\right). \tag{5.111}$$

El signo se debe a que si $m_2 > m_1$, significa que la estrella 1 es más brillante que la estrella 2, es decir, $f_1 > f_2$. Dado que el brillo aparente de una estrella no solo depende de su luminosidad intrínseca, sino también de la distancia a la que se encuentra, se introduce la magnitud absoluta, denotada por M. Esta representa la magnitud aparente que tendría una estrella con un flujo aparente (definido por(5.74))

$$f_{10} = \frac{L}{4\pi(10\,pc)^2}, \tag{5.112}$$

si se ubicara a una distancia de luminosidad estándar de 10 pc. Al considerar (5.112) y $m_2 = M$ se puede definir la distancia modular como

$$\mu = m - M = 5 \log\left(\frac{D_L}{10\,pc}\right). \tag{5.113}$$

Como en el caso de la cosmología se trabaja a distancias grandes es conveniente expresar la distancia de luminosidad en Mpc por lo que

$$\mu = m - M = 5\log(10^5\, D_L(Mpc)) = 25 + 5\log(D_L(Mpc)). \tag{5.114}$$

Con esta ecuación se puede encontrar la relación entre la distancia modular y el corrimiento al rojo con la ayuda de la Ecuación(5.110), por lo que la expresión (5.114), mediante propiedades de logaritmos, se reduce en

$$\mu = 25 - 5\log_{10} H_0 + 5\log_{10}(cz) + 5\log_{10}\left[1 + \frac{1-q_0}{2}z - \frac{1-q_0-3q_0^2+j_0}{6}z^2\right]. \tag{5.115}$$

Una vez obtenida la expresión de la distancia modular, válida para corrimientos al rojo bajos, se procedió a ajustarla a datos observacionales con el fin de estimar la constante de Hubble H_0, empleando la metodología de [113]. Para ello se utilizó el conjunto de supernovas de tipo Ia reportadas en la Tabla 2 de la referencia [4]. Dichos datos fueron recopilados por colaboraciones como el Carnegie Supernova Project (CSP) [116, 117], el Center for Astrophysics (CfA) [118, 119] y el Palomar Transient Factory (PTF) [120, 121]. Cada supernova incluida en este conjunto cuenta con su correspondiente corrimiento al rojo $z < 0.046$, así como

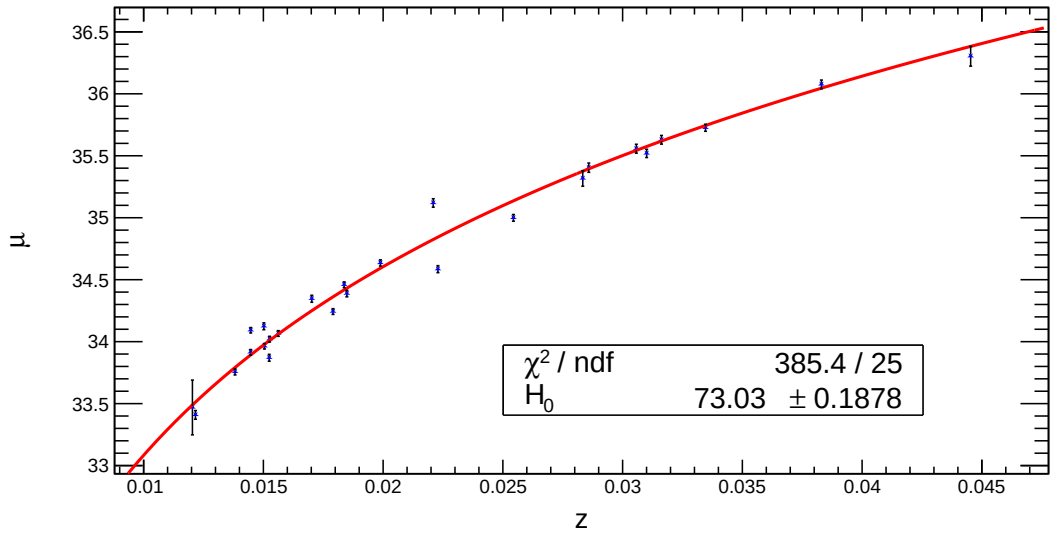

Figura 5.3: En la figura se presenta el ajuste del módulo de distancia μ en función del corrimiento al rojo z para un conjunto de 26 supernovas de tipo Ia observadas en el infrarrojo cercano en [4]. Se empleó el modelo ΛCDM en régimen de bajo corrimiento al rojo ($z \lesssim 0.046$), fijando los parámetros $q_0 = -0.55$, $j_0 = 1$ y $M_J = -18.524 \pm 0.021$ obtenidos por la Referencia [4]. La curva roja corresponde al ajuste teórico. En el recuadro se muestra el valor obtenido para la constante de Hubble, $H_0 = (73.0 \pm 0.2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

con la magnitud aparente, previamente corregida por extinción galáctica y K-corrección[23]. La magnitud absoluta utilizada, $M_J = -18.524 \pm 0.021$, fue determinada a partir de un subconjunto de nueve supernovas calibradas mediante distancias obtenidas por Cefeidas. A partir de estos valores se calculó la distancia modular para cada supernova, como $\mu = m_J - M_J$, y se contrastaron con el modelo teórico (5.115).

Siguiendo los criterios de calidad establecidos en el trabajo original, se seleccionaron 26 supernovas del flujo de Hubble[24]. Tres objetos fueron descartados por presentar deficiencias técnicas en la medición, y se excluyó además el dato con mayor corrimiento al rojo por encontrarse significativamente alejado del resto de la muestra, con el fin de mantener la validez de la aproximación teórica utilizada. El ajuste fue realizado utilizando la herramienta ROOT[25], fijando los parámetros cinemáticos $q_0 = -0.55$ y $j_0 = 1$, consistentes con el

[23] La extinción galáctica corrige la atenuación de la luz por polvo interestelar en la Vía Láctea y La K-corrección ajusta las magnitudes observadas debido al corrimiento al rojo, permitiendo comparar fuentes a distintas distancias.

[24] Se refiere al movimiento de recesión de las galaxias debido a la expansión del universo. Este flujo representa el comportamiento promedio del universo a gran escala, excluyendo movimientos peculiares locales causados por interacciones gravitacionales.

[25] ROOT es un framework desarrollado por el CERN para el análisis eficiente de datos científicos a gran escala.

modelo cosmológico ΛCDM, de modo que la constante de Hubble H_0 quedó como único parámetro libre del ajuste. Este procedimiento permitió estimar el valor de H_0 en una región de corrimiento al rojo donde los efectos no lineales son mínimos. El ajuste resultó en un valor de $H_0 = (73.0 \pm 0.2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Capítulo 6

Teoría de las lentes gravitacionales

La deflexión de la luz fue una de las predicciones más importantes de Einstein [55], y su confirmación en 1919 generó la aceptación de la teoría de la relatividad general [56]. Fritz Zwicky, en la década de 1930, propuso que las galaxias podrían actuar como lentes gravitacionales [122] lo que haría posible la observación de objetos muy distantes, es decir, se tendría una lente natural. El fenómeno que ocurre cuando un cuerpo masivo desvía la luz y provoca un atraso temporal en las señales luminosas al pasar a través de su campo gravitacional es denominado lente gravitacional. Este fenómeno puede generar múltiples imágenes del objeto que emite la luz, distorsionar su forma o amplificar su brillo. Una de las funciones más destacadas de las lentes gravitacionales es permitir la observación de objetos distantes, que de otra manera no serían visibles, ya que la lente amplifica su imagen [32].

En el estudio de lentes gravitacionales, es de gran importancia la ecuación de la lente debido a que esta ecuación relaciona la posición real y aparente de la fuente en términos del ángulo de deflexión de la luz que se relaciona a su vez con la distribución de masa de la lente, permitiendo así la predicción de la posición real de las imágenes de los objetos distantes [5, 38]. La caracterización de la masa de la lente es de gran relevancia al analizar las imágenes como datos observacionales, ya que según el modelo de masa al cual se ajusten mejor los datos se puede obtener información acerca del objeto emisor de luz (fuente) [5, 32].

6.1. Ecuación de la lente

El modelo de lente más simple que se puede tratar para un primer análisis es la lente puntual. A pesar de su simplicidad, permite capturar las características esenciales del fenómeno de lente gravitacional. Este modelo se puede ver como una simplificación de una distribución de masa [123] que deflecta la luz justo como se abordó en la sección 4.5. Por lo tanto inicialmente se considera el caso de un sistema lente gravitacional en el que se caracteriza la masa de la lente como una masa puntual M.

La configuración del sistema se basa en la Figura 4.2 vista desde otra perspectiva. En la

Figura 6.1, se puede observar que la lente se ubica a una distancia D_{OL} del observador O, a lo largo del eje óptico. Esta lente desvía en un ángulo $\tilde{\alpha}$ la trayectoria de un rayo de luz que proviene de una fuente S, localizada a una distancia D_{OS} del observador. Los ángulos β y θ describen la posición real de la fuente (caso en el que la luz radiada de la fuente no es desviada) y la posición aparente de las imágenes (la luz se desvía debido a la fuente), respectivamente [5, 124].

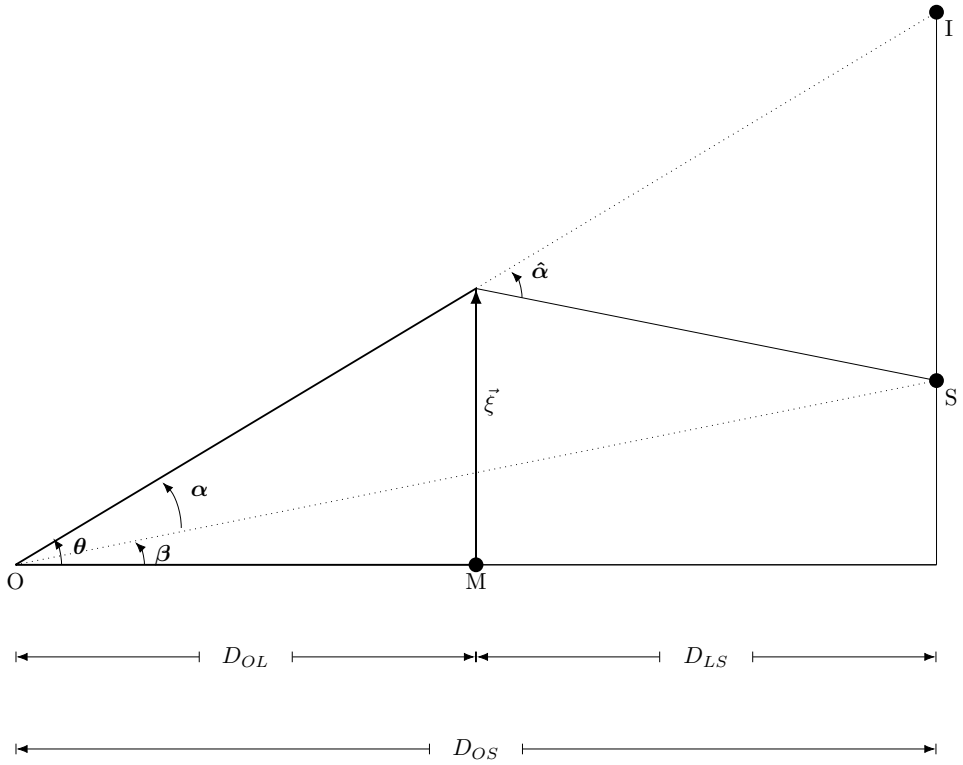

Figura 6.1: Geometría de un sistema lente gravitacional en el cual se aprecia la deflexión de la luz debido a una masa puntual M. Imagen modificada del esquema en la Referencia [5]

Estas posiciones descritas por medio de ángulos se pueden representar como vectores bidimensionales en el plano de la lente tal como se hizo para el ángulo de deflexión en el caso de una distribución de masa. Esto sucede, por la geometría del sistema 6.1, del cual es posible deducir que

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\tilde{\alpha}, \tag{6.1}$$

debido a que las distancias D_{OS} y D_{LS} son muy grandes comparadas con el tamaño característico de la lente (aproximación de la lente delgada) y por aproximación de ángulo pequeño. Este ángulo en la literatura se conoce con el nombre de ángulo de deflexión reducido y determina la posición angular de las imágenes relativa a la posición de la fuente [5, 38]. Esta posición angular se relaciona con θ y β, de acuerdo con la Figura 6.1, por medio de la

ecuación de la lente

$$\beta = \theta - \alpha. \tag{6.2}$$

Esta ecuación se puede escribir de manera vectorial[1] debido al análisis que se indicó en la Sección 4.6, de manera que $\vec{\theta}$ y $\vec{\beta}$ tienen la misma dirección que el vector angular reducido, proyectados en el plano de la lente, pero con módulos θ y β, respectivamente [123]. Otra característica del hecho de que estas distancias sean mucho mayores que el tamaño de la lente es que los ángulos involucrados en el problema son pequeños; esto se conoce como aproximación de ángulo pequeño. Bajo tal aproximación el parámetro de impacto de los rayos de luz que pasan cerca de la lente puede ser escrito de forma aproximada como $\xi = D_{OL}\theta$ [38]. Con este resultado y teniendo en cuenta las Ecuaciones (4.91) y (6.1), el ángulo de deflexión reducido se expresa como

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\frac{4GM}{c^2\theta}. \tag{6.3}$$

Por consiguiente, la ecuación de la lente puede reescribirse en términos del ángulo de Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GMD_{LS}}{c^2 D_{OS}D_{OL}}}, \tag{6.4}$$

es decir:

$$\theta^2 - \beta\theta - {\theta_E}^2 = 0. \tag{6.5}$$

Si se resuelve la anterior ecuación para una posición particular de la fuente (β fijo), se encuentra la posición angular para cada una de las imágenes formadas,

$$\theta_\pm = \frac{\beta}{2} \pm \theta_E\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4{\theta_E}^2}}. \tag{6.6}$$

Cuando la lente y la fuente están perfectamente alineadas $(\beta = 0)$ debido a la simetría esférica de la configuración de la lente, la imagen generada es una anillo de radio angular θ_E conocido como anillo de Einstein [5, 38]. El ángulo de Einstein establece una escala angular relevante en sistemas lente gravitacional, ya que determina tanto la separación típica entre imágenes múltiples como el grado de amplificación de la fuente. Cuando una fuente se encuentra a una distancia angular menor o comparable a θ_E, el efecto de lente es considerable y se pueden formar imágenes notablemente amplificadas. Por el contrario, si la fuente está ubicada mucho más lejos de esa escala angular, la amplificación es débil y generalmente sólo se forma una imagen. Así, θ_E sirve como un umbral natural entre configuraciones de lente fuerte y lente débil [124].

Lo anteriormente planteado para una masa puntual se puede generalizar para una distribución de masa, esto debido a que la lente puntual solo es un caso particular de una distribución

[1] Sin embargo se ha presentado la ecuación de la lente en su forma escalar con el fin de que sean más visibles los cálculos trigonométricos.

de masa con simetría circular. En el caso de cualquier otra distribución de masa, el ángulo de deflexión depende del potencial proyectado. Sin embargo, con el fin de simplificar los cálculos y obtener una expresión simple para la ecuación de la lente es útil definir el siguiente potencial, llamado potencial proyectado reescalado,

$$\Psi \equiv \frac{2}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\psi. \tag{6.7}$$

En términos de este potencial la estructura más general de la ecuación de la lente (forma vectorial), debido a (4.88), para cualquier distribución de masa es

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_\theta \Psi(\vec{\theta}), \tag{6.8}$$

siendo

$$\vec{\nabla}_\theta \Psi(\vec{\theta}) = \frac{2\vec{\nabla}_\theta \psi(\vec{\theta})}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}. \tag{6.9}$$

La solución para la ecuación de la lente ya no es trivial en este caso. La ecuación de lente nos dice cómo se relaciona la posición real de la fuente con la posición aparente de sus imágenes en el cielo, considerando cómo la masa de la lente curva la luz. Debido a que esta relación no es lineal, una misma fuente puede dar lugar a varias soluciones para la posición de las imágenes. Es decir, la luz puede tomar distintos caminos alrededor de la lente y llegar al observador desde varias direcciones, formando múltiples imágenes de un solo objeto [38]. Como consecuencia del efecto de lente gravitacional debido a cualquier distribución, los rayos de luz sufren un atraso en su tiempo de llegada desde la perspectiva del observador [124], esto se tratará con más profundidad en la siguiente sección.

6.2. Tiempo de atraso

Cuando se estudia el fenómeno de deflexión debido a una distribución de masa se debe considerar que el rayo de luz además de sufrir una desviación de su trayectoria, sufre también un atraso en el tiempo de viaje respecto al tiempo que emplearía el rayo de luz en llegar al observador en ausencia de la masa de la lente [5, 32, 38]. A este tiempo se le llama tiempo de atraso y tiene dos tipos de contribuciones [125]:

1. Retardo gravitacional (o efecto Shapiro) δt_{grav}: es el fenómeno en el que la luz de un objeto distante tarda más en llegar a un observador cuando pasa cerca de un campo gravitacional.

2. Retardo geométrico δt_{geom}: ocurre porque la luz, al desviarse por la presencia de la masa, recorre un camino más largo en comparación con el que seguiría en ausencia de la lente.

6.2.1. Tiempo de atraso gravitacional

Si se considera un rayo de luz ($ds = 0$) que se propaga en una trayectoria de un punto A a un punto B (a lo largo del eje z) en presencia de un campo gravitacional, entonces es posible calcular el tiempo de llegada por medio del elemento de línea (4.77) y obtener el siguiente resultado con base en lo explicado en la sección 4.5

$$t_B - t_A \simeq \frac{1}{c}\int_{z_A}^{z_B}\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\mathrm{d}z. \tag{6.10}$$

Al distribuir el factor de la velocidad de la luz, el segundo término sería el tiempo adicional que le toma al rayo de luz en viajar cerca de un campo gravitacional es decir

$$\delta t_{grav} = -\frac{2}{c^3}\int_{z_A}^{z_B}\varphi(z)\,\mathrm{d}z. \tag{6.11}$$

Considerando (4.83), el tiempo de atraso gravitacional se puede escribir como

$$\delta t_{grav} = -\frac{2}{c^3}\psi(\vec{\xi}). \tag{6.12}$$

6.2.2. Tiempo de atraso geométrico

Para analizar el tiempo de atraso geométrico de acuerdo a la definición presentada en el inicio de esta sección, es factible analizar la trayectoria de la luz deflectada en contraste con una trayectoria de luz en ausencia de la lente. Lo anterior se hace por medio de la siguiente ayuda visual para hacer evidentes algunas relaciones trigonométricas.

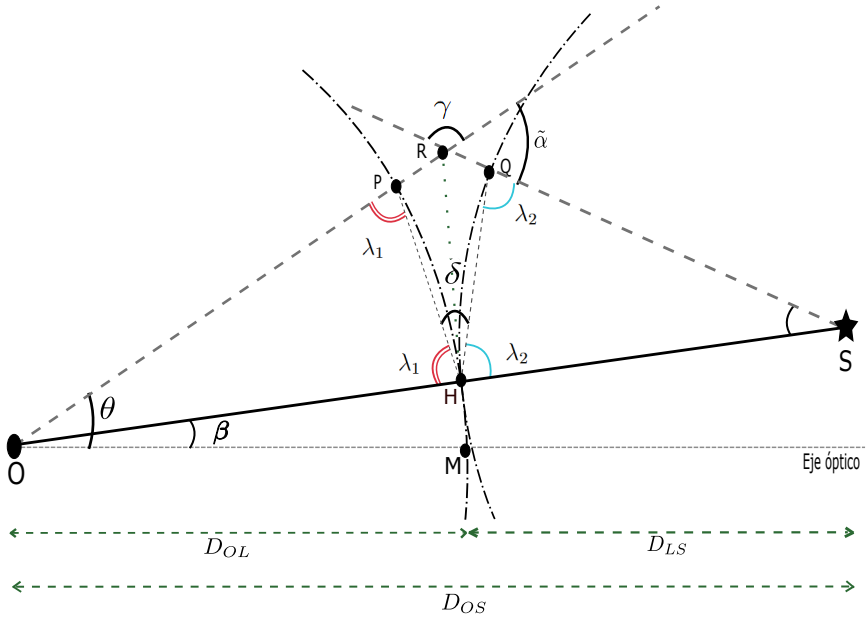

Figura 6.2: Esquema comparativo de las trayectorias que recorre la luz en presencia y ausencia un objeto deflector. Fuente: [5]

Esta figura está construida de tal manera que los triángulos ΔQSH y ΔPOH sean isósceles[2], con el fin de ver cuál es la diferencia de longitud recorrida por el rayo de luz debido a la presencia de la masa ($\overline{OS}+\overline{PQ}$) en comparación a la longitud que recorrería en ausencia de ella ($\overline{OS}$). Teniendo en cuenta que $\overline{PQ}$ es ínfimo porque las distancias (D_{OL}, D_{OS}, D_{LS}) son grandes y bajo el uso de la aproximación de ángulo pequeño [111, 126] es fácil ver que:

$$\tan(\theta-\beta)\approx\frac{\overline{RH}}{D_{OL}}\rightarrow\overline{RH}\approx D_{OL}(\theta-\beta), \tag{6.13}$$

$$\gamma+\tilde{\alpha}=180, \tag{6.14}$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\delta=180, \tag{6.15}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=\gamma+\delta. \tag{6.16}$$

si se reemplaza (6.16) en (6.15) e iguala este resultado con (6.14) se puede concluir que

$$\delta=\frac{\tilde{\alpha}}{2}. \tag{6.17}$$

Usando (6.13), la longitud de arco recorrida ($\sim\widehat{PQ}$) se puede describir como

$$\widehat{PQ}\approx D_{OL}(\theta-\beta)\delta. \tag{6.18}$$

Debido a que el fotón es el que recorre dicha longitud entonces el tiempo geométrico preliminarmente puede expresarse como

$$\delta_{geom}=\frac{D_{OL}(\theta-\beta)\delta}{c}, \tag{6.19}$$

mas por la ecuación de la lente y la definición de sus parámetros, se cumple que $\tilde{\alpha}=D_{OS}(\theta-\beta)/D_{LS}$. De manera que el tiempo de atraso geométrico toma la siguiente forma

$$\delta_{geom}=\frac{D_{OL}D_{OS}(\theta-\beta)^2}{2cD_{LS}}. \tag{6.20}$$

Finalmente, el tiempo de atraso total δt se determina si se tiene en cuenta que ambas contribuciones (gravitacional y geométrica) se producen en las vecindades de la lente, por consiguiente se debe tener en cuenta que si el observador se encuentra a una distancia considerablemente grande de la lente, la expansión del universo juega un papel importante durante el viaje del fotón; para considerar esto se añade el factor de expansión del universo de (1+z_L) [5, 38], así el tiempo de atraso total medido por un observador en Tierra es

$$\delta t=\frac{D_{OS}D_{OL}(1+z_L)}{cD_{LS}}\left(\frac{(\vec{\theta}-\vec{\beta})^2}{2}-\Psi\right) \tag{6.21}$$

[2]Los triángulos ΔQSH y ΔPOH se construyen mediante la elaboración de dos círculos centrados en S y O tangentes a M, respectivamente, cumpliendo con el objetivo de que sean isósceles.

Por la forma en la que se expresó la ecuación de la lente en (6.23), se obtiene la siguiente conclusión

$$\vec{\nabla}_\theta(\delta t) = \vec{0}, \tag{6.22}$$

que demuestra que el principio de Fermat[3] se cumple, es decir, para una posición definida de la fuente $\vec{\beta}$ las imágenes solo aparecerán en aquellas direcciones $\vec{\theta}$ en las cuales el retardo de tiempo sea un extremo [5].

Se puede hacer un análisis sobre el tiempo de atraso desde la perspectiva del principio de Fermat [5, 110], reescribiendo la ecuación de la lente general (6.8) de la siguiente forma

$$\vec{\theta} - \vec{\beta} - \vec{\nabla}_\theta \Psi = \vec{\nabla}_\theta \left(\frac{1}{2}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi \right) = \vec{0}. \tag{6.23}$$

De acuerdo a la Ecuación (6.12), el segundo término en el paréntesis de (6.23) es proporcional al tiempo de atraso gravitacional y por lo tanto el primer término corresponde a la contribución del tiempo geométrico [110] lo cual concuerda con la anterior deducción (6.20). Adicionalmente, la función tiempo de atraso define una superficie bidimensional parametrizada por las coordenadas de la imagen [5, 38]. Esta superficie generalmente toma forma de un paraboloide centrado en la posición de la fuente debido al tiempo de atraso geométrico. Por otra parte, el aporte del potencial gravitacional puede generar un desplazamiento en los mínimos o aportar otros extremos en la superficie [5].

6.3. Tiempo de atraso en el modelo de la lente puntual

Como se puede ver en (6.21) el tiempo de atraso total depende del potencial proyectado que caracteriza la masa de la lente. Si se obtiene el potencial que describe una lente puntual, entonces es posible definir la función tiempo de atraso asociada a este modelo de lente. Para el caso de la lente puntual se hará uso del análisis que se mostró en la sección 4.6 para una distribución de masa con simetría circular. Así, utilizando la definición del ángulo de Einstein, se puede expresar el ángulo de deflexión reducido de manera vectorial como

$$\vec{\alpha} = \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\vec{\theta}. \tag{6.24}$$

Esta expresión se relaciona con el potencial proyectado reescalado (6.9) por medio de (4.88), de manera que para hallar el potencial proyectado se debe solucionar la ecuación

$$\vec{\nabla}_\theta \Psi = \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\vec{\theta}, \tag{6.25}$$

[3] el cual establece que la trayectoria seguida por la luz entre una fuente y un observador es tal que el tiempo de llegada es estacionario frente a pequeñas variaciones de la trayectoria dentro del conjunto de curvas nulas posibles [53, 125].

teniendo en cuenta que $\vec{\theta}$ está definido a lo largo de la dirección radial. Por lo tanto, la solución general para el potencial de una masa puntual es

$$\begin{cases} \Psi(\theta) = \theta_E^2 \ln(|\vec{\theta}|) + C \text{ si } \theta \neq 0, \\ 0 \text{ si } \theta = 0. \end{cases} \tag{6.26}$$

De la Ecuación (6.25) se puede deducir que el ángulo de deflexión no depende de la constante de integración, por lo que el potencial para una masa puntual es descrito por

$$\begin{cases} \Psi(\theta) = \theta_E^2 \ln(|\frac{\vec{\theta}}{\theta_E}|), \text{ si } \theta \neq 0 \\ 0 \text{ si } \theta = 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

Finalmente, el tiempo de atraso para una lente gravitacional puntual de acuerdo con (6.21) es

$$\delta t = \frac{D_{OS} D_{OL}(1+z_L)}{c D_{LS}} \left[\frac{(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2}{2} - \theta_E^2 \ln \left| \frac{\vec{\theta}}{\theta_E} \right| \right]. \tag{6.28}$$

La superficie tiempo de atraso para una masa puntual con la fuente alineada ($\vec{\beta} = 0$), tiene la forma indicada en la Figura 6.3.

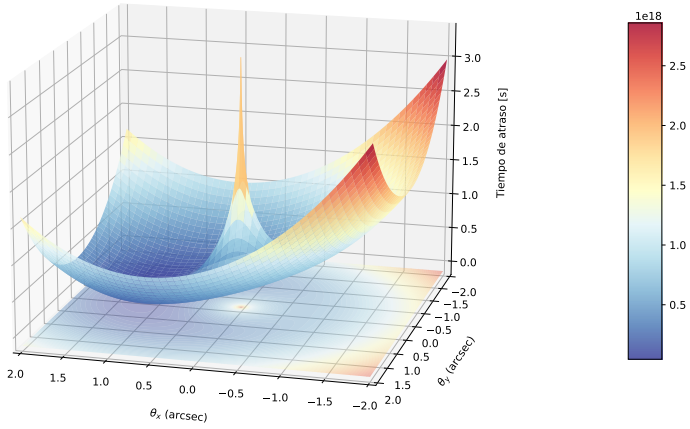

Figura 6.3: Superficie tiempo de atraso para una masa puntual, con el observador, lente y fuente alíneados.

Por otro lado, desde el punto de vista observacional, las cantidades que se obtienen directamente en un sistema de lente gravitacional son las posiciones angulares de las imágenes múltiples y diferencias de tiempo de atraso entre pares de imágenes ubicadas en las direcciones $\vec{\theta}_1$ y $\vec{\theta}_2$ en el plano de la lente como se puede ver en la Tabla 7.1. Esta información es

accesible gracias a que la luz proveniente de una misma fuente puede tomar caminos distintos al ser desviada por el potencial gravitacional de la lente, generando trayectorias con tiempos de viaje diferentes. Sin embargo, el tiempo de atraso de cada imagen individual no puede ser medido, sino únicamente la diferencia entre ellos [81]. De manera que es útil hacer uso de la Ecuación (6.28) para definir la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes en el caso de un sistema con una lente modelada como masa puntual

$$\Delta t_{12} = \frac{(1+z_L)(D_{OS})(D_{OL})}{c(D_{LS})}\left\{\frac{1}{2}\left[(\vec{\theta_1}-\vec{\beta_1})^2-(\vec{\theta_2}-\vec{\beta_2})^2\right] - \frac{4GM(D_{LS})}{c^2(D_{OS})(D_{OL})}\left[\ln|\vec{\theta_1}|-\ln|\vec{\theta_2}|\right]\right\}, \tag{6.29}$$

donde $\vec{\theta_1} = \theta_{1x}\hat{\imath} + \theta_{1y}\hat{\jmath}$ y $\vec{\theta_2} = \theta_{2x}\hat{\imath} + \theta_{2y}\hat{\jmath}$ se miden respecto al plano de la lente. En el caso de que la fuente esté alineada con la lente y el observador se tiene que

$$\Delta t_{12} = \frac{(1+z_L)(D_{OS})(D_{OL})}{c(D_{LS})}\left\{\frac{1}{2}(|\vec{\theta_1}|^2-|\vec{\theta_2}|^2) - \frac{4GM(D_{LS})}{c^2(D_{OS})(D_{OL})}\left[\ln|\vec{\theta_1}|-\ln|\vec{\theta_2}|\right]\right\}. \tag{6.30}$$

6.4. Tiempo de atraso en el modelo de la esfera isoterma sin núcleo (SIS)

Para el caso de objetos que no pueden ser representados como una masa puntual tales como una galaxia o un cúmulo se investiga la naturaleza de la extensión de la distribución de masa. Se propone que los constituyentes de este tipo de objetos celestes no colisionan y además se comportan como un gas ideal que está en equilibrio térmico, confinado debido a un potencial gravitacional simétricamente esférico[4], es decir con una densidad de masa de la forma [5, 38, 124]

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}, \tag{6.31}$$

denotando por σ la dispersión de velocidades de las partículas que componen el gas ideal autogravitante. La coordenada radial, medida desde el centro de masa de la lente a cualquier punto de la distribución se expresa como $r = \sqrt{\xi^2+z^2}$, donde ξ representa la distancia al centro de la lente en el plano de la lente y z la coordenada a lo largo de la línea de visión[5] [38].

Ya que el modelo de lente SIS es una distribución, se puede traer a mención el concepto

[4]Esta densidad de masa se explica con más detalles en el Apéndice A.

[5]La linea de visión se define como la dirección que une la fuente con el observador, de acuerdo a la Figura 4.2.

de densidad de masa superficial descrito por la Ecuación (4.81), con el fin de proyectar la densidad tridimensional dada por (6.31) sobre el plano de la lente. Notando que esta densidad es una función par, resulta que la densidad de masa superficial se obtiene mediante

$$\Sigma(\xi) = 2\int_0^\infty \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}\, dz = \frac{\sigma^2}{\pi G}\int_0^\infty \frac{1}{\xi^2 + z^2}\, dz. \tag{6.32}$$

Este tipo de integral se puede resolver mediante sustitución trigonométrica. En particular, se considera el cambio de variable $z = \xi \tan\theta$, lo cual implica que $dz = \xi \sec^2\theta\, d\theta$ y el límite superior de integración cambia a $\pi/2$. Con esta sustitución, el denominador de la integral se transforma de la siguiente manera: $\xi^2 + z^2 = \xi^2 \sec^2\theta$. Ademas, si la masa de la lente está encerrada en un circulo de radio angular θ, entonces $\xi = D_{OL}\theta$ [5] y por tanto

$$\Sigma(\theta) = \frac{\sigma^2}{2GD_{OL}\theta}, \tag{6.33}$$

lo que muestra que la densidad superficial diverge cuando $\theta \to 0$. Es decir, el modelo presenta una singularidad en el centro de la lente, ya que al acercarse al eje óptico ($\xi = 0$), la densidad superficial tiende a infinito [38].

Con la densidad superficial de masa se puede obtener el ángulo de deflexión de la luz que pasa por esta distribución. Como el ángulo de deflexión debido a una distribución de masa se relaciona con la masa de la lente mediante (4.91), a partir de la densidad de masa superficial se calcula $M(\theta)$ con la expresión (4.92), resultando en

$$M(\xi) = \frac{\pi\sigma^2}{G}\int_0^\xi \mathrm{d}\xi'. \tag{6.34}$$

Así, la masa en términos de θ adquiere la siguiente forma:

$$M(\theta) = \pi\sigma^2 D_{OL}\theta/G, \tag{6.35}$$

en consecuencia el ángulo de deflexión para una distribución de masa SIS se expresa como

$$\hat{\alpha}(\theta) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}. \tag{6.36}$$

Por otro lado, recordando que el ángulo de Einstein se define mediante la ecuación (6.4), y considerando que para el modelo SIS la masa depende del ángulo θ, es decir $M = M(\theta)$, al evaluar esta expresión en θ_E y usar la Ecuación (6.3), se obtiene que el ángulo de Einstein toma siguiente forma [124]:

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} = \alpha(\theta). \tag{6.37}$$

Una vez aclarados estos detalles, y utilizando la definición de $\vec{\alpha}$ implícita en las Ecuaciones (6.24) y (6.25), la ecuación de la lente (6.8) para una distribución de masa SIS, se puede reducir a:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta}\left(1 - \frac{\theta_E}{\theta}\right). \tag{6.38}$$

Por otro lado, para hallar el tiempo de atraso entre las imágenes debido a este tipo de lente, se debe considerar su efecto gravitacional. Para este fin es adecuado utilizar el potencial gravitacional dado por la Ecuación (4.86) que en la práctica se expresa mediante un potencial proyectado reescalado definido en (6.7), es decir

$$\Psi(\xi) = \frac{4GD_{LS}}{c^2 D_S D_L} \int \Sigma(\xi') \ln|\vec{\xi} - \vec{\xi'}| d^2\xi'. \tag{6.39}$$

La resolución de la anterior integral se realiza con ayuda de la Figura 6.4 inspirada de la Referencia [6], donde es claro que $\vec{\xi}$ es el parámetro de impacto y que $\vec{\xi'}$ es la posición de un elemento infinitesimal de masa ubicado sobre el plano de la lente.

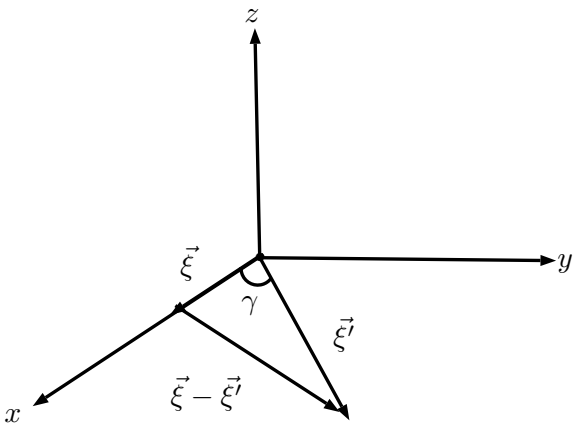

Figura 6.4: Esquema ilustrativo utilizado para resolver la integral del potencial reescalado en una distribución continua de masa. En la Figura se muestra el parámetro de impacto $\vec{\xi}$, que indica la posición del rayo incidente en el plano de la lente, y el vector $\vec{\xi'}$, que representa la ubicación de un elemento infinitesimal de masa dentro del mismo plano. Imagen modificada del esquema presentado por [6].

A partir de la Figura, se observa que el vector diferencia entre la posición del rayo incidente $\vec{\xi}$ y un elemento infinitesimal de masa en el plano de la lente $\vec{\xi'}$ se puede expresar como

$$\vec{\xi} - \vec{\xi'} \equiv (\xi - \xi' \cos\phi,\ -\xi' \sin\phi), \tag{6.40}$$

lo cual conduce a la siguiente forma para el módulo de dicho vector:

$$|\vec{\xi} - \vec{\xi'}| = \sqrt{\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos(\gamma)}. \tag{6.41}$$

Dado que $\vec{\xi}$ se extiende sobre todo el plano de la lente, los rangos de integración son $0 \leq \xi' < \infty$ y $0 \leq \gamma < 2\pi$. Esto permite expresar el elemento de área en coordenadas polares como $d^2\xi' = \xi'\, d\xi'\, d\gamma$. Finalmente, al aplicar propiedades de los logaritmos, el potencial proyectado reescalado puede simplificarse a:

$$\Psi(\xi) = \frac{2GD_{LS}}{c^2 D_L D_S} \int_0^{\xi} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \int_0^{2\pi} \ln(\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi'\xi\cos\gamma)\, d\gamma. \tag{6.42}$$

La segunda integral de la Ecuación (6.42) se puede resolver[6] de manera sencilla si se separa la integral en dos partes

$$\Psi(\xi) = \frac{2GD_{LS}}{c^2 D_L D_S} \int_0^{\xi} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \int_0^{2\pi} \ln(\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi'\xi\cos\gamma)\, d\gamma + \frac{2GD_{LS}}{c^2 D_L D_S} \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \int_0^{2\pi} \ln(\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi'\xi\cos\gamma)\, d\gamma, \tag{6.43}$$

de manera que se puede hacer uso de la Ecuación 4.224.14 de la Tabla de integrales de la Referencia [128]

$$\int_0^{n\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2) dx = 2\pi \ln[\text{máx}(|a|, |b|)]. \tag{6.44}$$

Al establecer una analogía de 6.44 con las integrales angulares de 6.4, se puede identificar que, dependiendo del intervalo de integración de la integral radial, se tienen dos situaciones: en el primer término se cumple que $\xi > \xi'$, mientras que en el segundo ocurre lo contrario, $\xi < \xi'$. Esta distinción permite aplicar adecuadamente la fórmula, separando la integral en dos regiones según la relación entre ξ y ξ', y así expresar finalmente el potencial proyectado reescalado como:

$$\Psi(\xi) = \frac{8\pi GD_{LS}}{c^2 D_L D_S} \left\{ \int_0^{\xi} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln|\xi| + \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln|\xi'| \right\}. \tag{6.45}$$

Con el fin de simplificar el resultado, se añade una constante[7] (tercer término de 6.46) debido a que el ángulo de deflexión de la lente es independiente de los términos constantes en el potencial:

$$\Psi(\xi) = \frac{8\pi GD_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}} \left\{ \int_0^{\xi} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln|\xi| + \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln|\xi'| - \int_0^{\infty} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln|\xi'| \right\}. \tag{6.46}$$

En consecuencia, al descomponer la última integral de la Ecuación (6.46) en los intervalos $[0, \xi]$ y $[\xi, \infty)$, el potencial reescalado para una distribución con simetría esférica se expresa de la siguiente manera:

$$\Psi(\xi) = \frac{8\pi GD_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}} \int_0^{\xi} d\xi' \xi' \Sigma(\xi') \ln\left|\frac{\xi}{\xi'}\right|. \tag{6.47}$$

En el caso de una distribución de masa SIS dada por (6.33), la integral se reduce a

$$\Psi(\xi) = \frac{4\pi\sigma^2 GD_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}} \int_0^{\xi} d\xi' \ln\left|\frac{\xi}{\xi'}\right|. \tag{6.48}$$

[6] Los cálculos se han realizado tomando como guía [127].

[7] Esta integral añadida es una constante independiente de ξ, ya que su valor no varía con el punto de evaluación del potencial.

La integral resultante se simplifica al aplicar propiedades de los logaritmos, separándola en dos integrales: una de una función constante y otra que involucra un logaritmo. Al resolver ambas integrales, se obtiene el siguiente resultado:

$$\Psi(\xi) = \frac{4\pi\sigma^2 D_{LS}\xi}{c^2 D_{OS} D_{OL}}, \tag{6.49}$$

en términos del ángulo de Einstein y θ el potencial proyectado reescalado para una esfera isoterma es

$$\Psi(\theta) = \theta_E|\vec{\theta}|. \tag{6.50}$$

Finalmente de la expresión (6.21) se logra deducir la ecuación para el tiempo de atraso debido a una SIS

$$\delta t = (1+z_L)\frac{D_{OS}D_{OL}}{cD_{LS}}\left(\frac{1}{2}(\vec{\theta}-\vec{\beta})^2 - \theta_E|\vec{\theta}|\right). \tag{6.51}$$

Por lo tanto la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes ubicadas en el plano de la lente en $\vec{\theta_1}$ y $\vec{\theta_2}$ es:

$$\begin{aligned}\Delta t_{12} = (1+z_L)\,\frac{D_{OS}D_{OL}}{c\,D_{LS}}\Bigg[&\frac{1}{2}\Big((\vec{\theta}_1-\vec{\beta}_1)^2 - (\vec{\theta}_2-\vec{\beta}_2)^2\Big)\\ &- \frac{4\pi G\,\sigma^2\,D_{LS}}{c^2\,D_{OS}}\Big(|\vec{\theta}_1| - |\vec{\theta}_2|\Big)\Bigg].\end{aligned} \tag{6.52}$$

Así, en el caso de una fuente alineada con el observador y la lente se tiene

$$\Delta t_{12} = (1+z_L)\frac{D_{OS}D_{OL}}{c\,D_{LS}}\left[\frac{1}{2}(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2) - \frac{4\pi G\,\sigma^2\,D_{LS}}{c^2\,D_{OS}}\left(|\vec{\theta}_1| - |\vec{\theta}_2|\right)\right]. \tag{6.53}$$

6.5. Tiempo de atraso en el modelo de la esfera isoterma con núcleo (NSIS)

En la sección anterior se analizaron modelos de lentes gravitacionales cuya distribución superficial de materia presenta una singularidad en el centro. A continuación, el enfoque se dirige hacia un modelo que evita esta característica mediante la introducción de una región central de radio r_c con densidad finita [129, 130]. Esta modificación del modelo de Esfera Isoterma Singular da lugar a la denominada Esfera Isoterma No Singular (NSIS), que suaviza el comportamiento en la región central. Esta versión mejorada permite representar con mayor fidelidad ciertos sistemas astrofísicos, como cúmulos de galaxias, reproduciendo adecuadamente su estructura tanto en las regiones internas como a grandes distancias del núcleo [5,38]. Por lo tanto, este modelo se caracteriza por una densidad de masa dada por

$$\rho(\xi) = \frac{\sigma^2}{2\pi G(r^2 + {r_c}^2)}, \tag{6.54}$$

donde los demás parámetros se describen de la misma forma que en el modelo SIS. Al integrar (6.54) a lo largo de la línea de visión (eje z),

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G}\int_0^\infty \frac{dz}{\xi^2 + z^2 + {r_c}^2}, \tag{6.55}$$

y solucionar mediante sustitución trigonométrica, se encuentra la densidad de masa superficial para el modelo NSIS:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2G\sqrt{\xi^2 + {r_c}^2}}. \tag{6.56}$$

Como la masa del núcleo está encerrada dentro de un círculo de radio angular $r_c = \theta_c D_{OL}$, entonces la densidad superficial en función de θ y θ_c viene dada por

$$\Sigma(\theta) = \frac{\sigma^2}{2GD_{OL}}\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + {\theta_c}^2}}. \tag{6.57}$$

Utilizando la expresión (4.92) para hallar la masa encerrada en un círculo de radio θ y $\xi(\theta)$, se encuentra que

$$M(\theta) = \frac{\sigma^2 \pi {D_{OL}}^2}{GD_{OL}}\int_0^\theta \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2}}\, d\theta', \tag{6.58}$$

que al desarrollarla por medio de la sustitución $u = \theta^2 + \theta_c^2$ se obtiene:

$$M(\theta) = \frac{\sigma^2 \pi D_{OL}}{G}(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c). \tag{6.59}$$

El potencial proyectado reescalado asociado a la masa $M(\theta)$ se obtiene empleando la expresión (6.47), junto con la densidad superficial de masa correspondiente al modelo NSIS dada en (6.56), lo que conlleva a la siguiente expresión:

$$\Psi(\xi) = \frac{4\pi D_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}}\left\{\int_0^\xi d\xi' \frac{\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + r_c^2}}\ln|\xi| - \int_0^\xi d\xi' \frac{\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + r_c^2}}\ln|\xi'|\right\}. \tag{6.60}$$

Para obtener una expresión analítica del potencial proyectado reescalado[8], se observa que este está compuesto por dos integrales. La primera integral se resuelve mediante sustitución de manera similar a como se hizo para (6.58), por lo tanto la integral indefinida da como resultado $\sqrt{\xi'^2 + r_c^2}\ln|\xi|$. La segunda integral se desarrolla de manera indefinida por partes mediante la sustitución $u = \ln|\xi'|$ y $dv = \xi' d\xi'/\sqrt{\xi'^2 + r_c^2}$ [9] resultando $\sqrt{\xi'^2 + r_c^2} - r_c \ln(r_c + \sqrt{\xi'^2 + r_c^2}) + r_c ln(\xi')$, de manera que el potencial adquiere la siguiente forma simplificada

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) = \frac{\theta_0}{D_{OL}}\Bigg[&\sqrt{\xi'^2 + r_c^2}\,(\ln\xi + 1) - (\sqrt{\xi'^2 + r_c^2} - r_c)\ln\xi' \\ &- r_c \ln\left(r_c + \sqrt{\xi'^2 + r_c^2}\right)\Bigg]_0^\xi,\end{aligned} \tag{6.61}$$

[8] Los cálculos se han realizado siguiendo como Referencia [127].

[9] De este proceso surge otra integral que se resuelve por sustitución hiperbólica $\xi' = r_c \sinh(\theta)$.

donde se define $\theta_0 = \frac{4\pi D_{LS}}{c^2 D_{OS}}$. Cuando se evalúa el comportamiento del segundo término de (6.61) en el límite $\xi' \to 0$, es importante analizar con cuidado cómo se comportan sus factores. La raíz cuadrada puede expandirse en serie de Taylor alrededor de $\xi' = 0$, de modo que el segundo término se convierte en

$$\left(\sqrt{\xi'^2 + r_c^2} - r_c\right) \ln|\xi'| \approx \left(\frac{\xi'^2}{2r_c}\right) \ln|\xi'|. \tag{6.62}$$

A simple vista, podría parecer que este término diverge debido al logaritmo. Sin embargo, el factor ξ'^2 tiende a cero mucho más rápido que $\ln|\xi'|$ tiende a infinito[10]. Por esta razón, en el cálculo del potencial, se puede descartar la contribución de este término en dicho límite, de manera que al simplificar se obtiene

$$\Psi(\xi) = \frac{\theta_0}{D_{OL}} \left[\sqrt{\xi^2 + r_c^2} - r_c \ln(r_c + \sqrt{\xi^2 + r_c^2}) + r_c \ln(2r_c) - 1\right], \tag{6.63}$$

donde la constante $r_c[\ln(2r_c) - 1]$ puede omitirse porque el ángulo de deflexión no se ve afectado por una cantidad constante. Así, finalmente el potencial para una distribución NSIS adquiere la siguiente estructura:

$$\Psi(\theta) = \theta_0[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c)]. \tag{6.64}$$

Considerando que $\vec{\alpha} = \vec{\nabla}_\theta \Psi$ y aplicando esta relación al potencial dado en (6.64), al racionalizar el resultado utilizando el factor $(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c)$, se obtiene:

$$\vec{\alpha}(\theta) = \frac{\theta_0}{\theta}(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c)\vec{\theta}, \tag{6.65}$$

expresión mediante la cual es posible hallar la ecuación de la lente teniendo en cuenta (6.8),

$$\vec{\beta} = \vec{\theta}\left[1 - \frac{\theta_0}{\theta^2}(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c)\right]. \tag{6.66}$$

Para encontrar el ángulo de Einstein correspondiente a este tipo de lente, se debe considerar el caso en el que el observador, la lente y la fuente estén alineados ($\beta = 0$). En este caso (6.66) se evalúa en $\theta = \theta_E$, que al simplificar se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$\theta_E^2 + 2\theta_c\theta_0 - \theta_0^2 = 0, \tag{6.67}$$

cuya solución para el ángulo de Einstein es

$$\theta_E = \theta_0\sqrt{1 - \frac{2\theta_c}{\theta_0}}. \tag{6.68}$$

Finalmente mediante el potencial proyectado reescalado del modelo de lente NSIS (6.64) se puede hallar el tiempo de atraso gracias a (6.21),

$$\delta t = \frac{D_{OS}D_{OL}}{cD_{LS}}\left\{\frac{1}{2}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \theta_0\left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln(\theta_c + \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2})\right]\right\}. \tag{6.69}$$

[10]Esto se debe a que $\lim_{\xi' \to 0} \xi'^a \ln|\xi'| = 0, \quad$ para todo $a > 0$.

De manera que la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes ubicadas en el plano de la lente en $\vec{\theta_1}$ y $\vec{\theta_2}$, para el modelo de lente NSIS es

$$\Delta t_{12} = (1+z_L)\frac{D_{OS}D_{OL}}{c\,D_{LS}}\left\{\frac{1}{2}\left((\vec{\theta_1}-\vec{\beta_1})^{\,2}-(\vec{\theta_2}-\vec{\beta_2})^2\right)-\frac{4\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}}\left[\sqrt{|\vec{\theta_1}|^{\,2}+\theta_c^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{|\vec{\theta_2}|^{\,2}+\theta_c^2}-\theta_c\ln\left(\sqrt{|\vec{\theta_1}|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right)+\theta_c\ln\left(\sqrt{|\vec{\theta_2}|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right)\right]\right\}. \tag{6.70}$$

Para el caso de una fuente alineada si tiene lo siguiente

$$\Delta t_{12} = (1+z_L)\frac{D_{OS}D_{OL}}{c\,D_{LS}}\left\{\frac{1}{2}\left(|\vec{\theta_1}|^{\,2}-|\vec{\theta_2}|^2\right)-\frac{4\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}}\left[\sqrt{|\vec{\theta_1}|^{\,2}+\theta_c^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{|\vec{\theta}_2|^{\,2}+\theta_c^2}-\theta_c\ln\left(\sqrt{|\vec{\theta_1}|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right)+\theta_c\ln\left(\sqrt{|\vec{\theta_2}|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right)\right]\right\}. \tag{6.71}$$

Capítulo 7

Resultados

En el presente capítulo se implementa la formulación de la teoría de lentes gravitacionales establecida en los capítulos anteriores para analizar varios sistemas de lente gravitacional documentados en la literatura (ver Tabla 7.1). A partir de la diferencia de tiempo de atraso entre las diferentes imágenes de estos sistemas lente gravitacional, se obtiene el valor de la constante de Hubble[1], H_0, cuyo resultado es independiente de los obtenidos a partir de métodos tradicionales, tales como: el análisis de CMB [105], el estudio de supernovas de tipo Ia [30, 93] y cefeidas [91]. Además, con el fin de contrastar estos resultados, se estimó la constante de Hubble a partir del análisis de los datos de supernovas de tipo Ia proporcionados por las colaboraciones: Carnegie Supernova Project (CSP) [116,117], el Center for Astrophysics (CfA) [118, 119] y el Palomar Transient Factory (PTF) [120, 121], como se indica en la sección 5.3.

Para cada sistema de lente gravitacional que se estudió, se utilizó uno o más de los modelos de lente descritos en el Capítulo 6. Aunque no se puede afirmar que estos modelos sean la mejor opción para cada sistema, se eligió aquel que se consideró más adecuado, bien sea porque es el más usado en la literatura o porque es el que mejor (entre nuestros modelos) aproxima las características de la lente que se intenta modelar. En todos los casos, se asumió que la fuente está alineada con el eje óptico ($\vec{\beta} = 0$), debido a que las configuraciones observadas presentan múltiples imágenes distribuidas de manera aproximadamente simétrica alrededor de la lente, característica propia de sistemas lente gravitacional fuertes con un alto grado de alineación [132].

La Tabla 7.1 resume las principales características observacionales de los sistemas de lente gravitacional considerados en este trabajo. En ella se presentan los valores del corrimiento al rojo tanto de la lente (z_l) como de la fuente (z_s), las posiciones angulares relativas de cada imagen respecto al centro de la lente, medidas en segundos de arco, y las etiquetas asignadas a cada imagen. Además, las diferencias de tiempo de atraso medidas entre pares de imáge-

[1] El error asociado a la constante de Hubble para los tres primeros sistemas se evaluó suponiendo que los datos siguen una distribución de Poisson, hipótesis razonable cuando el número de mediciones es reducido [131]. Para el último sistema se utiliza una metodología distinta explicada a detalle en su correspondiente sección.

nes, que se indican mediante subíndices en la notación Δt_{ij}, donde i y j corresponden a las etiquetas de las imágenes involucradas.

Es importante señalar que, en general, las posiciones angulares reportadas en la literatura están medidas con respecto al objeto más brillante del sistema, el cual suele coincidir con una de las imágenes observadas. En consecuencia, resulta necesario realizar un cambio de coordenadas que permita expresar todas las posiciones relativas al centro de la lente, lo cual facilita su comparación con los datos contenidos en la Tabla 2 de la Referencia [133]. Este procedimiento se detalla en el Apéndice B, donde además se explica cómo se establece, en el plano de la lente, el sistema de coordenadas cartesianas que se usa para representar las posiciones de las imágenes.

Sistema	z_l	z_s	Imagen	θ_x ($''$)	θ_y ($''$)	Δt (días)
PG 1115+080	0.311	1.722	A_1	-0.947	-0.690	$\Delta t_{AB} = 10.4 \pm 2.3$
[7, 18, 23, 134, 135]			A_2	-1.096	-0.232	$\Delta t_{AC} = 13.1 \pm 1.8$
			B	0.722	-0.617	$\Delta t_{BC} = 23.5 \pm 2.6$
			C	0.381	1.344	
HE0435-1223	0.454	1.693	A	-1.165	0.573	$\Delta t_{AB} = 8.8 \pm 0.8$
[8, 16, 136]			B	0.311	1.126	$\Delta t_{AD} = 13.8 \pm 0.9$
			C	1.302	-0.030	$\Delta t_{CD} = 12.7 \pm 0.9$
			D	-0.226	-1.041	
SDSS J1004+4112	0.680	1.734	A	-7.114	-4.409	$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$
[137–139]			B	-8.431	-0.877	$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$
			C	3.925	-8.901	$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$
			D	1.285	5.298	
			E	0.083	0.194	
PKS 1830-211	0.885	2.507	A	-0.489	0.444	
[10–12]			B	0.153	-0.284	$\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$
			C	0.011	-0.016	

Tabla 7.1: Datos observacionales utilizados para modelar los diferentes sistemas de lente gravitacional. Aquí, z_L y z_S corresponden a los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente, respectivamente. Las imágenes se etiquetan según su disposición en las Figuras 7.1, 7.2,7.3 y 7.5, y las coordenadas θ_x, θ_y se expresan respecto al centro de la galaxia lente. Los retardos temporales entre imágenes se indican como Δt_{ij}, donde i y j corresponden a las etiquetas de las imágenes involucradas ($A_1 = A_2$, ya que están próximas). Las referencias bajo el nombre de cada sistema contienen los datos observacionales empleados en este estudio.

Partiendo de lo anterior, en las siguientes secciones se determina la constante de Hubble para cada uno de los sistemas listados en la Tabla 7.1. Esta estimación se obtiene al despejar la constante en la expresión correspondiente a la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes. Además, se presenta un breve análisis individual de los resultados obtenidos en

cada caso, con el propósito de evaluar su consistencia y detectar posibles fuentes de incertidumbre.

En la parte final del capítulo, se comparan los valores obtenidos con la estimación reportada por la colaboración H0LiCOW [17], la cual también utiliza sistemas de lente gravitacional para determinar H_0. Asimismo, se contrastan estos resultados con los obtenidos en la sección 5.3 y con los valores publicados por la colaboración SHOES. Además, también se muestra una comparación con los resultados de CMB, permitiendo así destacar las principales diferencias entre los métodos de medida locales y del estudio del universo temprano.

7.1. Sistema PG 1115+080

El sistema lente gravitacional PG 1115+080 recibe su nombre de la fuente, un cuásar[2] (QSO, por sus siglas en inglés), cuya luz es desviada por una galaxia elíptica que actúa como lente gravitacional [135, 141, 142]. Este sistema, descubierto por Weymann en 1980, permitió la observación del QSO, siendo uno de los primeros cuásares vistos gracias a una lente gravitacional [7]. Además, es uno de los objetos más estudiados y de interés en astronomía debido a su utilidad para investigar la materia oscura y determinar la constante de Hubble a través de mediciones de diferencias de atrasos temporales entre las imágenes (Δt) [133, 143, 144].

En la Tabla 7.1, se puede observar que el sistema lente gravitacional PG 1115+080 incluye cuatro imágenes del cuásar (A_1, A_2, B y C). Este QSO posee un desplazamiento al rojo $z = 1.722$ [135], medido por su descubridor, mientras que la lente que produce las cuatro imágenes es una galaxia con $z = 0.311$, medido independientemente por Tonry [134]. De las cuatro imágenes, dos de ellas (A_1 y A_2) están muy cercanas, como se puede apreciar en la Figura 7.1. Por tanto, la diferencia de tiempo de atraso entre ellas es cero y se considera ($A_1 = A_2 = A$). Las diferencias de tiempo de atraso restantes listadas en la Tabla 7.1 fueron tomadas del tercer análisis presentado en la Figura 3 de la Referencia [7]. En el presente trabajo, se optó por modelar la lente del sistema PG 1115+080 como una masa[3] puntual de $M = 1.5 \times 10^{10}\, M_\odot$. En consecuencia, para determinar la constante de Hubble, se parte de la ecuación que describe la diferencia de tiempo de atraso para este tipo de lente, dada por la expresión (6.30). Dado que las distancias angulares[4] D_{OS}, D_{OL} y D_{LS} dependen inversamente de H_0, es posible determinar esta constante reordenando dicha expresión. Así, se obtiene:

$$H_0 = \frac{(1+z_L)(\tilde{D}_{OS})(\tilde{D}_{OL})}{2c(\tilde{D}_{LS})} \left\{ \frac{(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2)}{\Delta t_{12} + (4GM)(1+z_L)(\ln|\vec{\theta_1}| - \ln|\vec{\theta_2}|)/c^3} \right\}, \tag{7.1}$$

[2] Es un tipo de núcleo galáctico activo extremadamente luminoso, alimentado por un agujero negro supermasivo en el centro de una galaxia [140].

[3] Se adoptó este valor porque permite reproducir de manera consistente las diferencias de tiempo de atraso reportadas por COSMOGRAIL XVII [7], suponiendo un valor de $H_0 = 73.3 \ \ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Sin embargo, en [18] se estima una masa del orden de $\sim 10^{11}\, M_\odot$.

[4] Las distancias se determinan asumiendo el modelo cosmológico ΛCDM, sin que ello implique una dependencia explícita del valor de H_0.

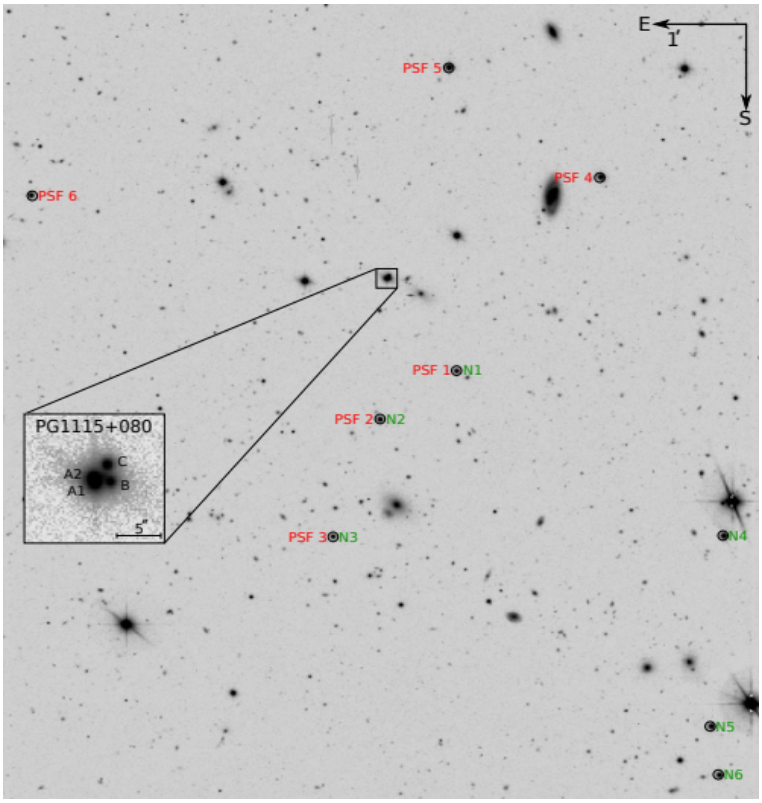

Figura 7.1: Campo de visión alrededor de PG 1115+080 con el telescopio ESO MPIA de 2.2 m en el Observatorio de La Silla, combinando 92 exposiciones (8.5 horas de exposición). Fuente: [7], Datos obtenidos con el telescopio ESO MPIA. ©ESO.

donde,

$$\tilde{D}_{OL} = \frac{c}{(1+z_L)} \int_0^{z_L} \frac{1}{E(z)}\,\mathrm{d}z, \tag{7.2}$$

$$\tilde{D}_{OS} = \frac{c}{(1+z_S)} \int_0^{z_S} \frac{1}{E(z)}\,\mathrm{d}z, \tag{7.3}$$

$$\tilde{D}_{LS} = \frac{c}{(1+z_S)} \int_{z_L}^{z_S} \frac{1}{E(z)}\,\mathrm{d}z. \tag{7.4}$$

Estas integrales fueron resueltas numéricamente utilizando la librería SciPy de Python[5] [145], haciendo uso de los corrimientos al rojo indicados en la Tabla 7.1. Los resultados obtenidos en este proceso se muestran en la Tabla 7.2; Aquí se presenta las estimaciones de H_0 obtenidas a partir de las diferencias de tiempo de atraso entre las imágenes. Para cada par de imágenes se calculó la constante de Hubble con la masa que se indicó lineas atrás, así como también para variaciones de hasta un $40\,\%$ de este valor, esto con el objetivo de analizar la sensibilidad de los resultados ante posibles incertidumbres asociadas a la medida de masa del

[5]La misma herramienta se emplea en las estimaciones posteriores de H_0.

objeto deflector. La última fila de la Tabla muestra el promedio de H_0 para cada valor de masa considerado. Se observa una variación relativa de aproximadamente un $3\,\%$ con respecto al valor de $M = 1.5\times10^{10}\,M_\odot$, lo que indica una leve sensibilidad del valor de H_0 frente a cambios moderados en la masa de la lente. En particular, para el sistema PG 1115+080 modelado como una lente puntual, se obtiene un valor de $H_0 = (68 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, el cual difiere en un $\sim 2\sigma$ del valor reportado por la colaboración H0LiCOW, $73.3^{+1.7}_{-1.8}\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [17].

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$) para diferentes $M(10^{10}\,M_\odot)$.				
	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$\Delta t_{AC} = 13.1 \pm 1.8$	69	69	68	68	67
$\Delta t_{AB} = 10.4 \pm 2.3$	70	69	68	67	67
$\Delta t_{BC} = 23.5 \pm 2.6$	69	69	68	68	67
	69±2	69±2	68±2	68±2	67±2

Tabla 7.2: Estimación de H_0 a partir del sistema PG 1115+080, modelado como una masa puntual de $M = 1.5 \times 10^{10}\,M_\odot$. Para evaluar la sensibilidad del resultado al parámetro de masa, el cálculo se repite con variaciones de hasta el $\pm 40\,\%$ del valor de la masa. Cada celda indica el valor de H_0 inferido para cada par de imágenes y el valor de masa indicado el la columna a la cual pertenece. En la última fila se presenta el promedio de estos valores; es fácil ver que el valor estimado para este modelo es $H_0 = (68 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

7.2. Sistema HE 0435-1223

El sistema conocido como HE 0435−1223 recibe su nombre del cuásar de fondo involucrado, descubierto en 2002 por Wisotzki y colaboradores en el marco del proyecto Hamburg/ESO, cuyo objetivo era identificar cuásares brillantes en grandes áreas del cielo [146]. En este sistema, la luz del cuásar que se encuentra a un corrimiento al rojo de $z_s = 1.693$ [136], es desviada por una galaxia elíptica situada a $z_l = 0.454$ [147], produciendo cuatro imágenes simétricas del cuásar alrededor de la lente, como se observa en la Figura 7.2. Cabe destacar que esta galaxia no está aislada, sino que forma parte de un grupo cercano de galaxias, lo que introduce complejidades adicionales en el perfil del potencial gravitacional involucrado [148].

Las imágenes producidas por la lente, denominadas A, B, C y D, presentan diferencias de tiempo de atraso medidas que se pueden ver en la Tabla 7.1. Estas diferencias fueron tomadas del segundo análisis de la figura 3 de la Referencia [16]. En este estudio, se modeló la lente de este sistema como una masa puntual de $M = 1 \times 10^{11}\,M_\odot$, según lo reportado en [16]. Con este modelo como base, se emplea la Ecuación (7.1) con el fin de calcular H_0 para cada par de imágenes, variando la masa en un rango de $\pm 40\,\%$ el valor de referencia, obteniendo los resultados que se indican en la Tabla 7.3.

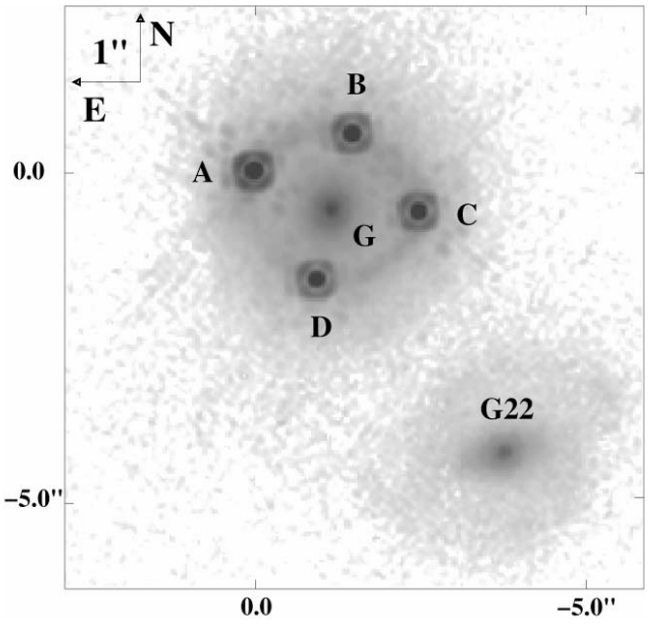

Figura 7.2: Imagen del sistema lente gravitacional HE 0435−1223 observada con el instrumento NICMOS del Telescopio Espacial Hubble (HST, por sus siglas en inglés). Se distinguen claramente las cuatro imágenes del cuásar dispuestas de manera simétrica alrededor de la galaxia lente elíptica ubicada en el centro. Esta imagen corresponde al panel superior de la Figura 1 de [8] y ha sido utilizada aquí únicamente con fines académicos e ilustrativos.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$) para diferentes $M(10^{11}\,M_\odot)$.				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\Delta t_{AB} = 8.8 \pm 0.8$	80	75	73	67	63
$\Delta t_{AD} = 13.8 \pm 0.9$	84	78	70	69	65
$\Delta t_{CD} = 12.7 \pm 0.9$	91	84	78	73	69
	85±2	79±2	74±2	70±2	66±2

Tabla 7.3: Estimación de H_0 a partir del sistema lente gravitacional HE 0435−1223, modelando la lente como una masa puntual con valor de referencia $M = 1 \times 10^{11}\,M_\odot$ [16]. Se considera una variación de esta masa de $\pm 40\,\%$ respecto a dicho valor para analizar su impacto en la estimación de H_0. Para cada valor de masa y cada retardo temporal observado, se calculó H_0, y se reportó el valor promedio en la última fila; el valor estimado es $H_0 = (74 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

La última fila de la Tabla 7.3 muestra que los valores estimados de H_0 presentan una variación relativa de aproximadamente un $26\,\%$ al modificar la masa de la lente, lo que evidencia una sensibilidad considerable de la constante de Hubble frente a este parámetro en el modelo adoptado. Esta dependencia es mayor que la observada en el sistema PG 1115+080, lo que sugiere que, en el caso de HE 0435−1223, la determinación del valor de la masa es crucial en la

determinación de H_0. A pesar de estas limitaciones, el valor $H_0 = (74 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ obtenido en este trabajo resulta consistente con el reportado por la colaboración H0LiCOW [17].

7.3. Sistema SDSS J1004+4112

El sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112 es un cúmulo de galaxias que distorsiona la luz de un cuásar ubicado tras él. Este sistema, descubierto por Inada [138], fue el primer ejemplo de un cuásar lensado por un cúmulo galáctico [149], con la fuente a un corrimiento al rojo $z_s = 1.734$ y la lente a $z_l = 0.68$ [138]. Este sistema también alberga siete galaxias de fondo lensadas a tres desplazamientos al rojo distintos ($z = 1.73$, 2.74, y 3.33), proporcionando restricciones adicionales para el modelo de lente [9, 137, 150, 151].

En la Figura 7.3 se detallan las cuatro imágenes principales del cuásar (A, B, C, D) y una imagen central tenue (E). Los atrasos temporales medidos presentados en esta Tabla 7.1, fueron tomados del segundo modelo de la Tabla 2 de la Referencia [139]. En este caso, la lente gravitacional del sistema fue modelada de cuatro formas distintas con el objetivo de analizar cómo varía la estimación de H_0 al modificar el modelo adoptado. Primero se modeló la lente como una masa puntual de masa $M \sim 1 \times 10^{12.2}\,M_\odot$, valor que se estimó en la Referencia [19] para la galaxia lente principal que es la más brillante. Además, se varió esta masa en un rango de $\pm 40\,\%$ el valor de referencia, con el fin de analizar cómo se comporta el valor de la constante de Hubble ante incertidumbres en la determinación de la masa de la lente. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 7.4.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$) para diferentes $M(10^{12.2}\,M_\odot)$.				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	194	190	186	182	179
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	115	113	111	108	107
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	117	115	113	111	109
	142 ± 2	139 ± 2	136 ± 2	134 ± 2	131 ± 2

Tabla 7.4: Estimaciones de la constante de Hubble H_0 obtenidas a partir del sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112, considerando un modelo de lente puntual con masa $M = 1 \times 10^{12.2}\,M_\odot$ [19]. Se explora el efecto de la variación de masa, hasta un 40 % del valor de referencia, en la estimación de H_0. Para cada combinación de masa y retardo temporal observado, se determina un valor de H_0 cuyo promedio se muestra en la última fila. El valor estimado para este sistema es $H_0 = (136 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

La última fila de la Tabla 7.4 presenta, para cada valor considerado de masa, el valor promedio de las estimaciones de H_0 junto con su correspondiente error. Se observa que la variación relativa de H_0 con respecto al valor obtenido para la masa central es del orden del $8\,\%$, lo cual sugiere una dependencia moderada de la constante de Hubble frente a variaciones en la masa de la lente. Además, en la Tabla 7.3 se observa que el valor obtenido para este sistema bajo

el supuesto de una lente modelada como una masa puntual, $H_0 = (136 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, difiere considerablemente de los valores comúnmente aceptados. En particular, presenta una discrepancia cercana al 94 % con respecto al valor de $70\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ utilizado como referencia para la estimación de la masa en [19,152], y del 81 % en relación con el valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17].

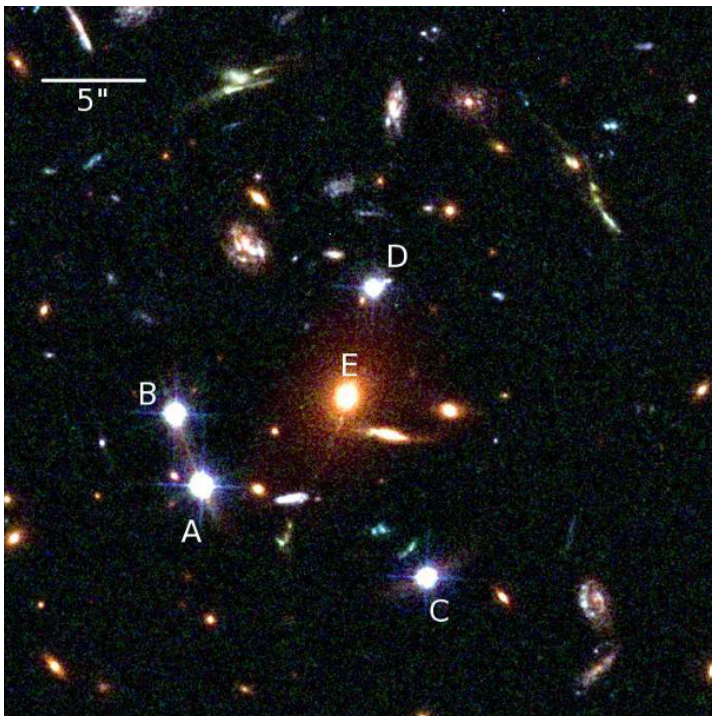

Figura 7.3: Imagen del sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112 obtenida con HST/ACS, donde se observan cinco imágenes del cuásar (etiquetadas como A-E). La galaxia más brillante del cúmulo, identificada como G1, está superpuesta sobre la imagen E. Esta imagen corresponde al panel izquierdo de la Figura 1 de [9] y se ha reproducido con fines académicos a partir de la versión disponible en arXiv (arXiv:1005.3103).

En segunda instancia, se modeló la lente del sistema como una SIS. En este modelo, un parámetro relevante es la velocidad de dispersión de la galaxia lente, que para este sistema tiene un valor de (352 ± 13) km/s [20]. Dada la importancia de este parámetro en la estimación de la constante de Hubble, se decidió explorar el efecto de su incertidumbre variando la velocidad de dispersión dentro del rango de error reportado. Para cada diferencia de tiempo de atraso entre imágenes, se calcula el valor correspondiente de H_0 utilizando la siguiente expresión[6],

$$H_0 = \frac{(1+z_L)}{\Delta t_{12} c}\left[\frac{\tilde{D}_{OS}\tilde{D}_{OL}}{2\tilde{D}_{LS}}\left(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2\right) - \frac{4\pi\sigma^2\tilde{D}_{OL}}{c^2}\left(|\vec{\theta}_1| - |\vec{\theta}_2|\right)\right], \tag{7.5}$$

[6]Esta expresión se obtiene de manera análoga al caso del modelo de masa puntual, considerando la relación de proporcionalidad inversa entre H_0 y el tiempo de atraso para un perfil de tipo SIS con la fuente alineada; véase la Ecuación (6.53).

lo que da como resultado la Tabla 7.5.

La última fila de la Tabla 7.5 presenta, para cada valor de la velocidad de dispersión σ, el promedio de las estimaciones de H_0 y su error asociado. Se observa que, al modificar σ dentro del intervalo de incertidumbre experimental ($\pm 13\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ respecto del valor central de $352\,\mathrm{km\,s^{-1}}$), las estimaciones promedio de H_0 presentan una variación porcentual de aproximadamente $4.3\,\%$, la cual indica que el impacto que tiene σ en la determinación de la constante de Hubble no es tan significativa en este caso. Esto puede deberse a la alta precisión($4\,\%$) de la medida de la velocidad de dispersión. Por otro lado, el valor estimado en este modelo, $(116 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, difiere en $\sim 58\,\%$ del valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17], lo cual representa una discrepancia menor en comparación con la obtenida al utilizar el modelo de masa puntual. Esta diferencia resalta la sensibilidad de la estimación de H_0 al modelo adoptado para la lente gravitacional, lo cual subraya la importancia de considerar cuidadosamente la elección del modelo al derivar H_0 a partir de sistemas de lente gravitacional.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	167	164	161
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	93	91	89
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	95	93	91
Promedio	119 ± 2	116 ± 2	114 ± 2

Tabla 7.5: Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelando su lente con un perfil SIS. La velocidad de dispersión de la galaxia lente se toma como $\sigma = (352 \pm 13)\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ [20]; se evalúan los valores extremos del rango de error ($\sigma = 339\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y $365\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) junto con el valor central. Para cada σ y cada retardo temporal observado entre imágenes, se calcula H_0. El valor estimado es $H_0 = (116 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Un tercer modelo que se aplicó a este sistema, similar al anterior, fue el NSIS. En este caso, el parámetro relevante es θ_c, que representa el ángulo subtendido por el radio del núcleo de la galaxia lente, r_c. Según la literatura, el mejor ajuste para este parámetro, en este sistema, es $\theta_c = 0.1''$ modelando la lente como un elipsoide isotermo con núcleo [20], por lo tanto, se adoptó este valor como una estimación inicial en el modelo NSIS. Con este valor se obtuvo H_0 para diferentes velocidades mediante la Ecuación[7] (7.6), como se puede ver en la Tabla 7.6.

$$H_0 = (1+z_L)\frac{\tilde{D}_{OS}\tilde{D}_{OL}}{c\,\tilde{D}_{LS}\Delta t_{12}}\left\{\frac{1}{2}\left(|\vec{\theta}_1|^{\,2} - |\vec{\theta}_2|^2\right) - \frac{4\pi\sigma^2\tilde{D}_{LS}}{c^2\tilde{D}_{OS}}\cdot\left[\sqrt{|\vec{\theta}_1|^{\,2}+\theta_c^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{|\vec{\theta}_2|^{\,2}+\theta_c^2} - \theta_c \ln\left(\sqrt{|\vec{\theta}_1|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right) + \theta_c \ln\left(\sqrt{|\vec{\theta}_2|^{\,2}+\theta_c^2}+\theta_c\right)\right]\right\}. \tag{7.6}$$

[7] Esta expresión fue derivada a partir de (6.71) análogamente a como se hizo con modelos previos.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\theta_c = 0.1''$			
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	168	165	162
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	94	92	89
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	96	94	91
	119 ± 2	117 ± 2	114 ± 2

Tabla 7.6: Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelado con un perfil NSIS con núcleo $\theta_c = 0.1''$. Se muestran los valores obtenidos a partir de los tiempos de retardo medidos entre las imágenes, considerando tres velocidades de dispersión de la lente: el valor central $\sigma = 352\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y los extremos del rango de incertidumbre $\sigma = 339\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y $365\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ [20]. La última fila presenta el promedio de H_0 para cada caso; el valor estimado es $H_0 = (117 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

En la última fila de la Tabla 7.6 se observa que las estimaciones del parámetro de Hubble H_0 presentan una variación porcentual de aproximadamente un $4\,\%$ con respecto al valor central $(117 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Esto indica que, dentro del rango considerado de velocidades de dispersión, la estimación de H_0 permanece relativamente estable, mostrando una dependencia moderada frente a dicha variación. Sin embargo, el valor obtenido para este modelo difiere del valor de la colaboración H0LiCOW [17] en un $59\,\%$, similar al modelo SIS.

Por otro lado, en [20] se señala que el parámetro θ_c se encuentra dentro del radio de corte $\theta_{\text{trunc}} = 3.2''$, el cual representa el límite físico a partir del cual la contribución de densidad de masa de la galaxia G1 como lente gravitacional se considera despreciable. Por lo tanto, es razonable permitir que θ_c varíe dentro de ese intervalo con fines académicos, para analizar cómo se ve afectada la estimación de la constante de Hubble al considerar un perfil con núcleo (NSIS) en comparación con el modelo sin núcleo (SIS).

La Figura 7.4 muestra la variación de la diferencia relativa entre las estimaciones de H_0 obtenidas con el modelo NSIS, tomando como referencia el valor calculado con el modelo SIS, en función del parámetro de núcleo normalizado $\theta_c/\theta_{\text{trunc}}$ de la lente principal G1. Para este análisis se considera únicamente el valor central de la dispersión de velocidades, $\sigma = 352\,\mathrm{km/s}$, dado que, como se indica en la Tabla 7.6, las variaciones en H_0 debidas a la incertidumbre en σ son del orden del 4 %, lo que no afecta de manera significativa la comparación entre modelos.

Adicionalmente, en esta gráfica se observa que, para valores pequeños de θ_c, la diferencia relativa en las estimaciones de H_0 tiende a cero, lo que confirma que el modelo NSIS recupera al modelo SIS en el límite $\theta_c \to 0$, como es de esperarse. En particular, el valor del núcleo de SDSS J1004+4112, según la gráfica, corresponde al 3 % de θ_{trunc}, lo que se traduce en una variación menor al 2 % en la estimación de H_0, indicando que dicho valor puede considerarse pequeño en este contexto. Incluso al considerar un núcleo más extremo, que represente el 50 % de θ_{trunc}, la diferencia relativa respecto al modelo SIS sigue siendo inferior al 6 %,

lo que sugiere que la influencia del parámetro θ_c sobre la estimación de H_0 es moderada en este sistema dentro del rango analizado. Esta tendencia también se refleja en la Tabla 7.6, donde los resultados obtenidos con el modelo NSIS no presentan diferencias apreciables en comparación con las estimaciones de H_0 reportadas en la Tabla 7.5 para el modelo SIS.

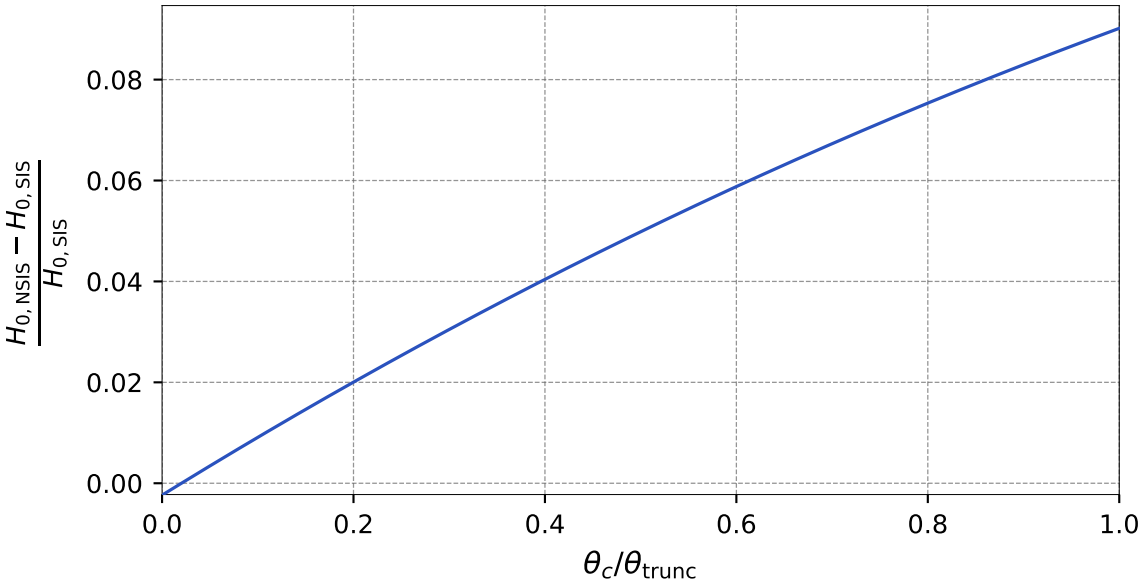

Figura 7.4: Diferencia relativa en las estimaciones de H_0 entre los modelos NSIS y SIS para la lente G1 en el sistema SDSS J1004+4112, considerando una velocidad de dispersión fija de $\sigma = 352\,\mathrm{km/s}$. Se analiza la variación del parámetro de núcleo θ_c desde 0 hasta $\theta_{\mathrm{trunc}} = 3.2''$, observándose convergencia entre ambos modelos en el límite $\theta_c \to 0$ y diferencias crecientes para valores más grandes del núcleo ($\theta_c/\theta_{\mathrm{trunc}} > 0.2$). En este sistema, el valor observado del núcleo es $\theta_c = 0.1''$.

Por último, dado que en la literatura la lente principal suele modelarse como un elipsoide isotermo singular con un término de cizallamiento externo [138, 153], en este trabajo se empleó, para fines comparativos, el elipsoide isotermo singular (SIE). Para obtener la expresión que permite calcular la constante de Hubble con este modelo, se sigue el mismo procedimiento aplicado a los demás modelos estudiados en este trabajo, utilizando el potencial correspondiente al modelo SIE, tomado de [154]. De este modo, se obtiene una expresión análoga para estimar la constante de Hubble

$$H_0 = \frac{(1+z_l)\,D_{OS}D_{OL}}{c\,D_{LS}\Delta t_{12}}\left[\frac{1}{2}\left(\theta_1^2-\theta_2^2\right) - \frac{\sqrt{q}}{q'}\,\theta_1'\theta_E\left(\,|\sin\varphi_1|\,\cos^{-1}\left(\Delta_1\right)\right.\right.$$
$$+\,|\cos\varphi_1|\,\cosh^{-1}\left(\frac{\Delta_1}{q}\right)\Bigg) + \frac{\sqrt{q}}{q'}\,\theta_2'\theta_E\left(\,|\sin\varphi_2|\,\cos^{-1}\left(\Delta_2\right)\right.$$
$$\left.\left.+\,|\cos\varphi_2|\,\cosh^{-1}\left(\frac{\Delta_2}{q}\right)\right)\right], \tag{7.7}$$

donde se define lo siguiente:

$$\theta' = \sqrt{\theta_x^2 + q^2\theta_y^2}, \tag{7.8}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{q\,\theta_y}{\theta_x}\right), \tag{7.9}$$

$$\Delta = \sqrt{\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi}, \tag{7.10}$$

$$q' = \sqrt{1-q^2}, \tag{7.11}$$

siendo q la razón entre el eje menor y mayor de la elipse proyectada en el plano de la lente, la cual se relaciona con la elipticidad ϵ de la galaxia mediante $q = 1 - \epsilon$. Por lo tanto, en este modelo el parámetro relevante es q. Para el sistema SDSS J1004+4112, se ha adoptado de la literatura un valor de elipticidad de $\epsilon = 0.3 \pm 0.05$ [153]. A partir de este valor, y considerando variaciones tanto en la velocidad de dispersión como en la elipticidad dentro de su rango de incertidumbre, se obtuvieron distintas estimaciones de la constante de Hubble, las cuales se presentan en la Tabla 7.7, donde se destacan dos aspectos importantes.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\epsilon = 0.25$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	82	79	76
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	73	95	118
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	78	75	71
	78±2	83±2	88±2
$\epsilon = 0.30$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	80	77	73
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	112	136	162
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	75	71	67
	89±2	95±2	101±2
$\epsilon = 0.35$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	78	74	71
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	147	175	203
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	72	68	64
	99±2	106±2	112±2

Tabla 7.7: Estimaciones H_0 para el sistema SDSS J1206+4332 modelando la lente como SIE. La velocidad de dispersión se varía a lo largo de las filas tomando los valores extremos dentro de su margen de error, $(352 \pm 13)\,\mathrm{km/s}$, mientras que la elipticidad ϵ se varía a lo largo de las columnas considerando los límites superior e inferior de su incertidumbre, 0.3 ± 0.05. Para cada combinación, H_0 se obtuvo a partir del promedio de las estimaciones calculadas con los diferentes tiempos de atraso observados en el sistema. El valor estimado es $H_0 = (95 \pm 2)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

En primer lugar, las estimaciones de H_0 muestran una variación relativa de aproximadamente un 24 % respecto al valor central correspondiente a $\epsilon = 0.30$ (ver variación por columnas).

Esto indica una alta sensibilidad del valor de H_0 frente a cambios en el parámetro ϵ, lo cual contribuye de manera significativa a la incertidumbre sistemática en su determinación. En segundo lugar, la variación inducida por cambios en la velocidad de dispersión de la lente alrededor del valor central de $352\,\mathrm{km/s}$ es de aproximadamente un 12 % (ver variación por filas). Por lo tanto, el cálculo de H_0 es más sensible a ϵ que a σ, lo que resalta la relevancia del parámetro ϵ en el modelo SIE.

Finalmente, en la celda resaltada en amarillo de la Tabla 7.7, correspondiente a los valores observacionales de elipticidad $\epsilon = 0.30$ y velocidad de dispersión $352\,\mathrm{km/s}$, se encuentra la estimación de $H_0 = (95 \pm 2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ obtenida bajo el modelo SIE. Este valor difiere en aproximadamente un $32\,\%$ respecto al valor de $72\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ utilizado por [153] para inferir ϵ, y en un $30\,\%$ con respecto al valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17]. Es decir, aunque esta estimación sigue siendo mayor, las diferencias porcentuales con respecto a H0LiCOW son considerablemente menores que las obtenidas al modelar la lente como una masa puntual, SIS o NSIS, en los que las discrepancias con H0LiCOW superan el $30\,\%$. Esto sugiere que el modelo tiene una influencia significativa para este sistema en la determinación de H_0.

7.4. Sistema PKS 1830-211

En este sistema, la fuente corresponde a un cuásar ubicado a un corrimiento al rojo de $z = 2.507$ [12]. La lente es una galaxia situada a $z = 0.885$, clasificada como espiral y orientada casi de forma frontal respecto al observador[8] [13, 155]. Existe también una segunda galaxia ubicada a lo largo de la línea de visión, a un redshift de $z = 0.19$, sin embargo estudios previos indican que su influencia en el efecto de lente es despreciable [13].

Las imágenes observadas del cuásar son dos componentes altamente magnificadas, conocidas como imágenes A y B, las cuales están separadas $\sim 1''$. Estas imágenes forman parte de un anillo de Einstein completo [21] y tienen una diferencia de tiempo de atraso (25 ± 3) días, recientemente medida por [11]. También se ha reportado la presencia de una tercera imagen etiquetada como C, ubicada cerca de la imagen B, según lo observado por [10, 21].

Mediante las anteriores características del sistema, en el presente trabajo se modeló la lente como una masa puntual y como una esfera isoterma con y sin núcleo. En primer lugar, para el modelo de masa puntual se adoptó el rango de masa de $(2-5) \times 10^{10}\,M_\odot$, deducido por [12] a partir de la referencia [21]. Con el fin de estimar H_0 para este modelo y propagar correctamente las incertidumbres asociadas, se utilizó el método de Monte Carlo, implementado con las librerías: SciPy [145] y NumPy [156]. Dicho método genera un gran número de combinaciones aleatorias de las variables de entrada según sus distribuciones de error y, al evaluar para cada combinación la Ecuación (7.1), reconstruye la distribución estadística de H_0 [131]. Esta estrategia es especialmente ventajosa cuando la relación funcional es no lineal, como

[8] Significa que la galaxia espiral lente es vista de frente respecto a HST.

sucede en este caso, y el número de entradas es reducido; aquí se dispone únicamente de la diferencia del tiempo de atraso entre las imágenes, con su incertidumbre y de la masa de la lente en el rango mencionado [9].

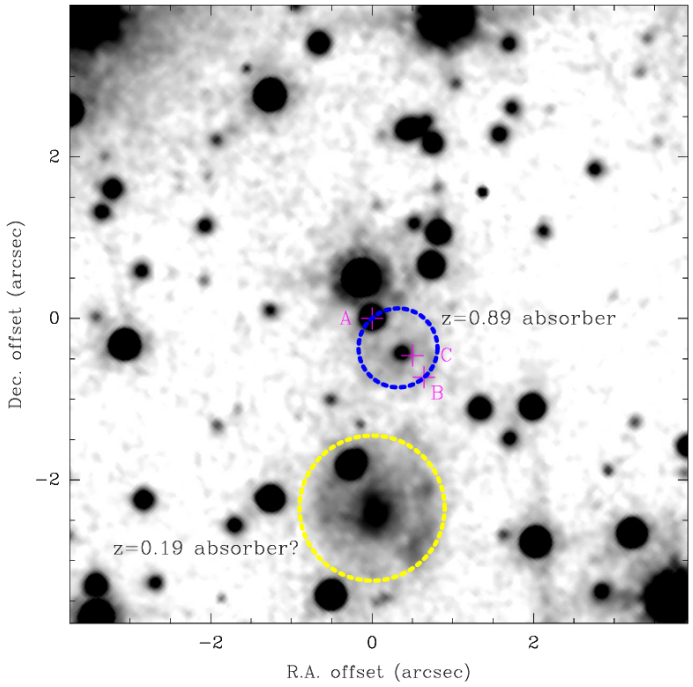

Figura 7.5: Imagen del entorno del cuásar PKS 1830−211 obtenida por HST. Las imágenes múltiples del cuásar, marcadas con cruces magenta y etiquetadas como A, B y C, corresponden a distintas trayectorias de luz deflectadas por una lente gravitacional. Esta figura corresponde a la Figura A.1 del artículo de [10], publicado en Astronomy & Astrophysics, y se utiliza aquí con fines académicos.

Suponiendo que las dos entradas siguen una distribución gaussiana, donde el error asociado es la desviación estándar: para cada muestra se extrae al azar un valor de Δt_{AB} de la distribución centrada en 25 días con desviación estándar de 3 días y un valor de M truncado al intervalo $(2\text{–}5) \times 10^{10}\, M_\odot$, con media $3.5 \times 10^{10}\, M_\odot$ y dispersión $1.5 \times 10^{10}\, M_\odot$. A partir de dichas distribuciones se generaron 1000 valores de Δt_{AB} y M; cada pareja $\left(\Delta t_{AB}^{(i)}, M^{(i)}\right)$ se introdujo en (7.1), produciendo un conjunto de muestras $\{H_0^{(i)}\}_{i=1}^{1000}$. El histograma normalizado de estos resultados —Figura 7.6 (eje horizontal: H_0 en km s^{-1} Mpc^{-1}; eje vertical: densidad de probabilidad)— se construyó graficando la densidad relativa de ocurrencia de los valores de H_0 para cada bin, en lugar de frecuencias absolutas. Sobre dicho histograma se ajustó una curva gaussiana que permitió estimar la media y la desviación estándar de H_0 a

[9] La función (7.1) es una expresión analítica de la forma $H_0(\Delta t_{AB}, M)$. Esta expresión depende además de las posiciones de las imágenes y de distancias angulares entre los planos lente–fuente–observador; dichas cantidades se tratan como constantes, pues no se dispone de incertidumbres significativas asociadas a ellas.

partir de la distribución de valores obtenida.Por lo tanto el valor estimado modelando la lente del sistema PKS1830−211 como masa puntual fue de (56 ± 7) km s^{-1} Mpc^{-1}, que comparado con el valor obtenido por la colaboración H0LiCOW [17] difiere aproximadamente en 2σ.

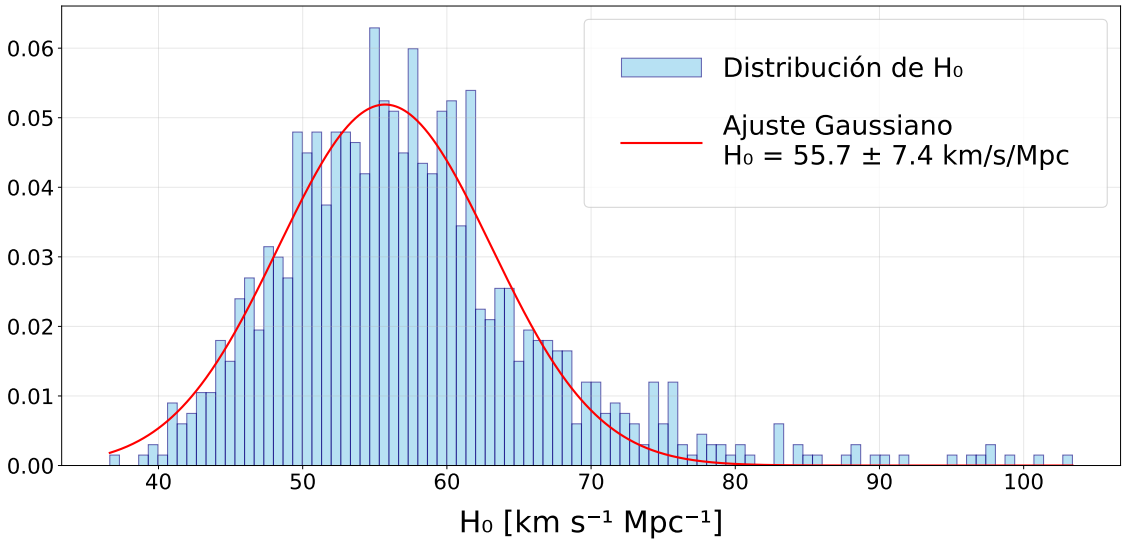

Figura 7.6: Histograma de densidad de probabilidad de 1000 valores simulados de H_0, obtenidos mediante el método de Monte Carlo para el sistema PKS 1830−211 modelando la lente como una masa puntual. Se utilizaron como entradas: el tiempo de atraso observado $\Delta t_{AB} = (25 \pm 3)$ días [11] y un rango de masa para la lente de $(2-5) \times 10^{10}\, M_\odot$ [12]. El eje horizontal representa H_0 en km s^{-1} Mpc^{-1}, y el eje vertical muestra la densidad de probabilidad normalizada. La curva roja muestra un ajuste gaussiano a los datos simulados, del cual se estimó la media y la desviación estándar, y por consiguiente el valor de la constante de Hubble $H_0 = (56 \pm 7)$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

En segunda instancia, la lente se describió mediante un perfil SIS. Para este modelo se adoptó la velocidad de dispersión $\sigma = 264$ km s^{-1} reportada por [13], valor que se encuentra dentro del límite $\sigma < 350$ km s^{-1} mencionado por [10]. La determinación de H_0 siguió el mismo método de Monte Carlo aplicado al caso puntual, pero ahora la ecuación evaluada es (7.5) y las únicas variables aleatorias son: la velocidad de dispersión, modelada como una gaussiana centrada en 264 km s^{-1} con una incertidumbre[10] de 5 km s^{-1}, y el tiempo de atraso $\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$ días. Los mil pares $\left(\sigma^{(i)}, \Delta t_{AB}^{(i)}\right)$ generados de estas distribuciones se evaluaron en (7.5), proporcionando la distribución de probabilidad para H_0 mostrado de la Figura 7.7. Mediante este ajuste se obtuvo un valor de $H_0 = (79 \pm 12)$ km s^{-1} Mpc^{-1}, que representa una diferencia de $\sim 0.5\sigma$ respecto al valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17].

[10]Como esta velocidad no posee incertidumbre en el articulo encontrado, se optó por variar finamente la velocidad en este rango.

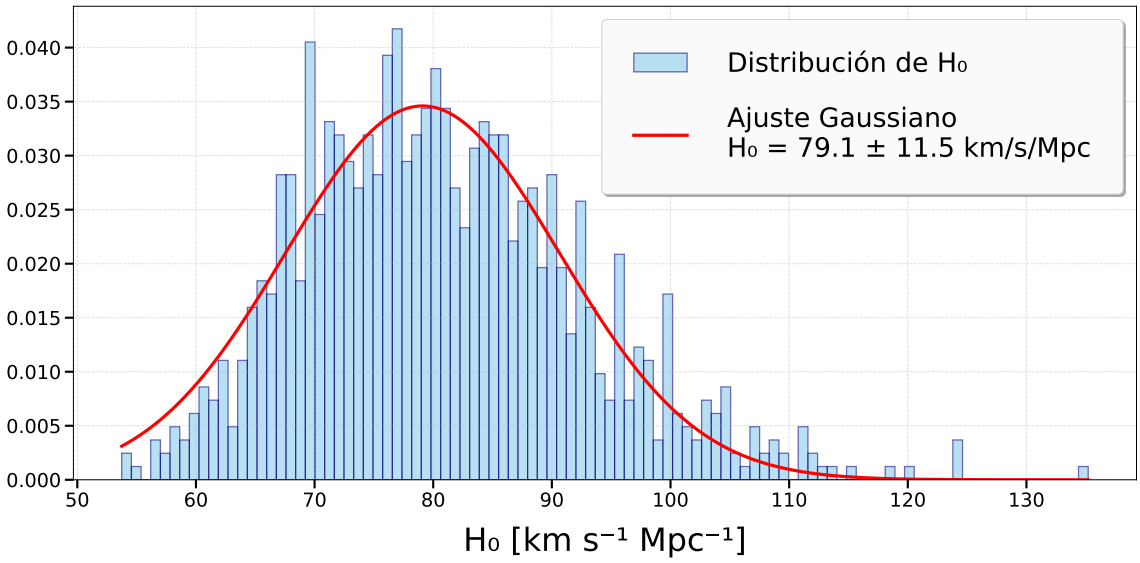

Figura 7.7: Histograma de densidad de probabilidad de 1000 valores simulados de H_0, obtenidos mediante el método de Monte Carlo para el sistema PKS 1830−211 modelando la lente como SIS. Se emplearon como entradas: el tiempo de atraso observado $\Delta t_{AB} = (25 \pm 3)$ días [11] y una velocidad de dispersión de 264 km s^{-1} [13]. El eje horizontal representa H_0 en km s^{-1} Mpc^{-1}, y el eje vertical muestra la densidad de probabilidad normalizada. La curva roja muestra un ajuste gaussiano a los datos simulados, del cual se estimó la media y la desviación estándar; por lo tanto, $H_0 = (79 \pm 12)$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

Por último, se modeló la lente de PKS 1830−211 mediante un perfil NSIS. Como radio angular del núcleo se adoptó $\theta_c = 0.03''$, valor que representa $\sim 8\,\%$ del radio truncado $\theta_{\rm trunc} = 0.34''$, ambos estimados por [21]. Para explorar la sensibilidad de la constante de Hubble a la estructura interna de la lente, θ_c se incrementó $8\,\%$, $30\,\%$ y $50\,\%$. En cada caso se calculó H_0 con la Ecuación (7.6), variando simultáneamente la velocidad de dispersión dentro del intervalo analizado en la sección SIS. La incertidumbre en H_0 se propagó únicamente a partir del error del tiempo de atraso, empleando propagación de errores en (7.6) [131]. Los valores resultantes de H_0 para cada combinación $\{\sigma, \theta_c\}$ se resumen en la Tabla 7.8, lo que permite evaluar de manera directa la influencia del tamaño del núcleo sobre el valor de la constante de Hubble.

En la Tabla 7.8 se observa que la estimación de H_0 puede variar hasta en un 56 % al modificar el parámetro de núcleo θ_c desde 0.03, mientras que la variación de la velocidad de dispersión σ_v produce un cambio de hasta un 25 %. Estos resultados indican que la estimación de H_0 es más sensible a las variaciones en el radio angular del núcleo que a las fluctuaciones en la velocidad de dispersión. Finalmente, para el sistema PKS 1830−211 se obtuvo un valor de $H_0 = (69 \pm 8)$ km s^{-1} Mpc^{-1}, el cual presenta una diferencia de $\sim 0.5\sigma$ con respecto al valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17]. A lo largo del análisis para distintos sistemas, se evidencia que la estimación de la constante de Hubble es altamente sensible tanto

al modelo de lente adoptado para describir cada sistema como a los parámetros específicos involucrados en dicho modelo.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)		
	259 km/s	264 km/s	269 km/s
$8\,\%\theta_{trunc} \rightarrow \theta_c = 0.03$			
$\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$	64±8	69±8	75±9
$30\,\%\theta_{trunc} \rightarrow \theta_c = 0.102$			
$\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$	44±5	48± 5	53±6
$50\,\%\theta_{trunc} \rightarrow \theta_c = 0.17$			
$\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$	28±3	32±4	36±4

Tabla 7.8: Estimaciones H_0 para el sistema de lente gravitacional PKS 1830−211, calculadas mediante un modelo de lente con perfil NSIS. Los valores de H_0 se obtienen para tres velocidades de dispersión $\sigma = 259, 264, 269$ km/s [13], y tres valores del parámetro de núcleo θ_c, equivalentes al 8 %, 30 % y 50 % del ángulo subtendido por el radio de corte $\theta_{trunc} = 0.34''$ [21]. Esta Tabla ilustra cómo la estimación de H_0 varía al modificar simultáneamente la velocidad de dispersión y la extensión del núcleo en el perfil de la lente. El valor estimado para este modelo fue $H_0 = (69 \pm 8)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

7.5. Determinación de H_0 a partir de supernovas de tipo Ia.

Con el fin de contrastar los valores de H_0 obtenidos a partir de sistemas de lente gravitacional con los resultados obtenidos por otros métodos de medida local, en la Sección 5.3 se aplicó la metodología propuesta por Wang [113] a los datos observacionales de supernovas de tipo Ia recopilados por Dhawan [4]. Esta metodología utiliza la función de ajuste presentada en la Ecuación (5.115), adecuada para el régimen $|z| \ll 1$. El ajuste realizado, mostrado en la Figura 5.3, permitió obtener un valor de $H_0 = (73.0 \pm 0.2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, consistente con el reporte de la colaboración H0LiCOW [17] y con los valores obtenidos por los sistemas lente gravitacional HE 0435-1223 y PKS 1830-211. Además, difiere en un 7 % con el valor obtenido mediante el sistema PG 1115+080.

Por otro lado, con fines académicos, se utilizó la aproximación del módulo de distancia 5.115 para corrimientos al rojo $z < 0.6$ para ver si la función se ajustaba a los datos de manera aceptable. Los datos utilizados para este fin provienen del Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Survey (SDSS-II SN Survey)[11], que entre 2005 y 2007 detectó más de 10000 fuentes variables y transitorias como supernovas. Por medio de fotometría construyeron curvas de luz[12], y apoyándose en espectros de eventos o de sus galaxias anfitrionas, identificaron las

[11] Sloan Digital Sky Survey (SDSS) es un cartografiado fotométrico y espectroscópico de gran escala iniciado en 2000. Opera con un telescopio de 2.5 m en el Observatorio de Apache Point (Nuevo México, EE. UU.) y ha mapeado millones de objetos celestes.

[12] Muestra cómo varía el brillo (magnitud aparente) de un objeto astronómico a lo largo del tiempo.

supernovas de tipo Ia en mención. A estas se les ajustó el modelo SALT2[13] para derivar su módulo de distancia [14].

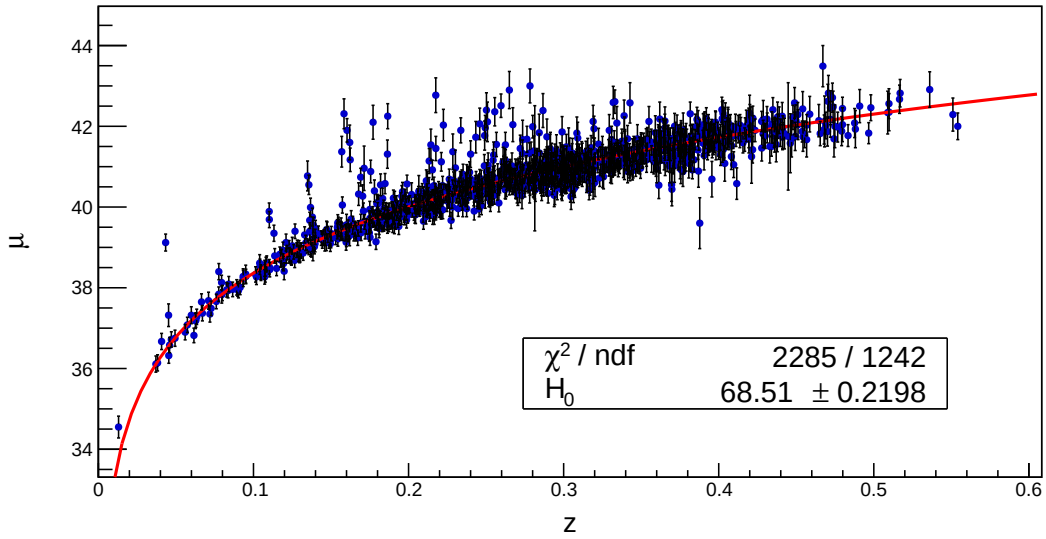

Figura 7.8: Ajuste del módulo de distancia μ en función del corrimiento al rojo z, utilizando la función aproximada 5.115, originalmente propuesta para corrimientos al rojo pequeños. El ajuste se aplicó a un conjunto de 1244 supernovas de tipo Ia seleccionadas del catálogo publicado por el SDSS-II SN Survey en [14] (Tabla 11), en el rango $z < 0.6$, fijando los parámetros $q_0 = -0.55$, $j_0 = 1$ y $M_J = -18.524 \pm 0.021$ obtenidos por la Referencia [4], con el fin de evaluar el comportamiento de la función en ese dominio.

En este trabajo se emplearon los datos de la Tabla 11 de [14]. En esta Tabla se encuentran SN Ia confirmadas espectroscópicamente (SN Ia) y aquellas clasificadas fotométricamente usando el corrimiento al rojo espectroscópico de la galaxia huésped (zSN Ia). En [14] inicialmente se contaron 1364 SN Ia y 624 zSN Ia; sin embargo, solo 1244 SN Ia pasaron los criterios de calidad.

El ajuste de la función aproximada a los datos experimentales se muestra en la Figura 7.8. En dicha figura, se observa que la curva roja reproduce adecuadamente el comportamiento de los datos, a pesar de que esta función no es recomendable para valores "grandes" del corrimiento al rojo. A partir de este ajuste, se obtuvo un valor para la constante de Hubble de $H_0 = (68.5 \pm 0.2)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, el cual es $\sim 2.6\sigma$ menor que el valor reportado por el proyecto H0LiCOW [17].

[13] SALT2 (Spectral Adaptive Light-curve Template 2) es un modelo empírico que ajusta simultáneamente la evolución espectral y fotométrica de una SN Ia, permitiendo estimar parámetros como el módulo de distancia, el estiramiento y el color [157].

7.6. Contraste general

Con el fin de realizar una comparación integral de los valores de H_0 obtenidos en las secciones anteriores, se comenzó por comparar las estimaciones derivadas de los sistemas de lentes gravitacionales listados en la Tabla 7.1 con la determinación reportada por la colaboración H0LiCOW [17], la cual también emplea lentes gravitacionales para obtener la constante de Hubble, $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, mediante un método más robusto. La discrepancia entre ambos conjuntos de resultados, expresada en términos de desviaciones estándar combinadas, es aproximadamente 2σ para PG 1115+080, 0.3σ para HE 0435-1223 y 0.5σ para PKS 1830-211, lo que indica una consistencia estadística con la estimación de H0LiCOW para los últimos dos sistemas.

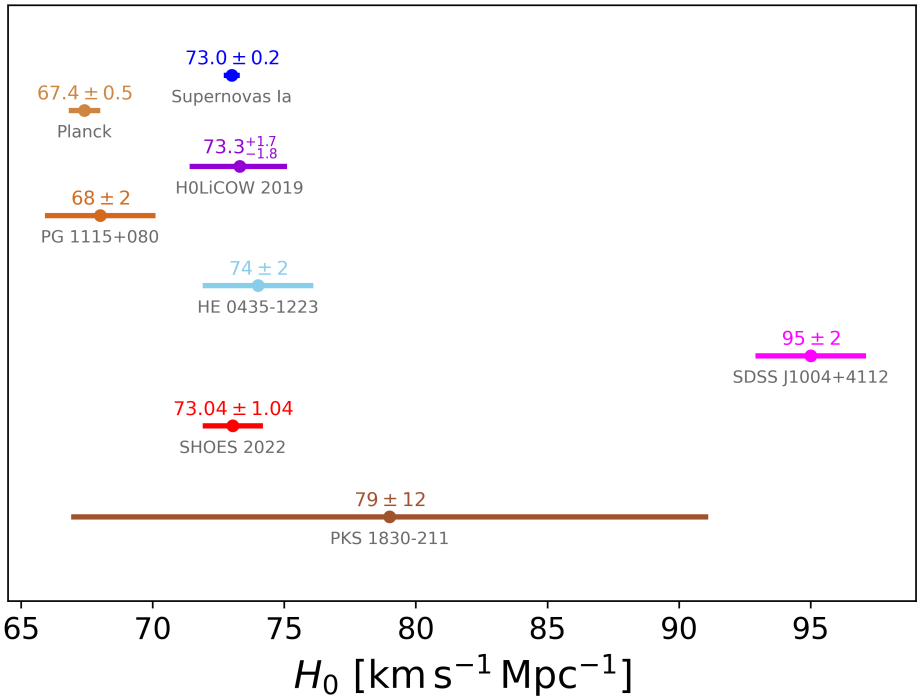

Figura 7.9: Comparación de diferentes estimaciones de la constante de Hubble H_0 bajo el modelo ΛCDM plano, incluyendo resultados del universo temprano (Planck 2018 [3]), distancias locales (SHOES [15], SNe Ia) y lentes gravitacionales (H0LiCOW [16], PG 1115+080, HE 0435−1223, PKS 1830−211, SDSS J1004+4112). Los valores obtenidos en este trabajo mediante SNe Ia y los sistemas HE 0435−1223 y PKS 1830−211 coinciden, dentro de los márgenes de error, con las mediciones locales (SHOES y HOLiCOW) . El sistema SDSS J1004+4112 arroja un valor 8σ más alto que HOLiCOW, mientras que PG 1115+080 y PKS 1830−211 se superponen con Planck; sin embargo, este valor alto y aparente concordancia, se atribuye al modelado simplificado de las lentes. Lo cual refuerza la persistencia de la tensión entre el universo temprano y local. Imagen adecuada a las necesidades de nuestro trabajo a partir de la Referencia [17].

Por su parte, el sistema SDSS J1004+4112 exhibe una desviación significativa, cercana a 8σ. Esta discrepancia se atribuye principalmente a las limitaciones inherentes a los modelos aplicados, ya que el deflector en este caso corresponde a un cúmulo galáctico complejo y no a una galaxia aislada. La distribución de masa en dicho cúmulo, no es adecuadamente descrita por los modelos simplificados empleados en este análisis. Por tanto, la diferencia observada refleja más una insuficiencia en el modelado del sistema que una tensión real en comparación con los resultados obtenidos para los otros cuatro sistemas estudiados.

Por otro lado, el valor de H_0 obtenido en este trabajo a partir de datos de supernovas de tipo Ia puede compararse con estimaciones hechas en la literatura a partir del método de escalera de distancias. En particular, el proyecto SHOES 2022 [15], reporta un valor de $H_0 = (73.04 \pm 1.04)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. La diferencia entre ambos resultados corresponde a una discrepancia de $\sim 0.04\sigma$, lo cual indica una consistencia estadística entre estos datos.

La Figura 7.9 reúne los resultados obtenidos en este trabajo para cada uno de los sistemas de lentes gravitacionales analizados, junto con diversas estimaciones de H_0 discutidas a lo largo del documento. Esta representación permite comparar de manera global las diferentes determinaciones, incluyendo las estimaciones reportadas por el satélite Planck en 2018, representativas del universo temprano, así como las mediciones locales basadas en distancias, como las realizadas por la colaboración SHOES y aquellas obtenidas mediante lentes gravitacionales por el proyecto H0LiCOW.

Como puede observarse en dicha figura, los valores obtenidos en este trabajo a partir de supernovas de tipo Ia, así como los correspondientes a los sistemas de lentes gravitacionales HE 0435−1223 y PKS 1830−211, resultan consistentes, dentro de los márgenes de error, con las estimaciones reportadas por las colaboraciones H0LiCOW y SHOES. Esta coincidencia refuerza la conocida discrepancia entre las mediciones locales y aquellas basadas en observaciones del universo temprano, comúnmente denominada “tensión de Hubble”. Por otro lado, aunque el valor estimado para el sistema SDSS J1004+4112 no concuerda, dentro de los errores, con las determinaciones de H0LiCOW y SHOES, sigue ubicándose dentro del contexto de dicha tensión.

En contraste, al comparar el valor de H_0 obtenido por Planck 2018, se observa que las estimaciones obtenidas a partir de los sistemas PG 1115+080 y PKS 1830−211 se solapan con dicho valor dentro de los márgenes de error, lo cual podría sugerir la ausencia de tensión en estos casos particulares. Sin embargo, esta aparente coincidencia no implica una resolución del problema, ya que en ambos casos se emplearon modelos simplificados de lente que no representan adecuadamente la distribución real de masa. En particular, PKS 1830−211 es una galaxia espiral modelada aquí como una esfera isoterma singular (SIS), mientras que PG 1115+080, cuya galaxia lente es elíptica y forma parte de un grupo, fue aproximada como una masa puntual.

Por estas razones, no puede afirmarse que no exista tensión entre las mediciones del universo

local y las del universo temprano [25]. Más bien, los resultados presentados aquí aportan a la discusión desde una perspectiva crítica: muestran cómo la estimación de H_0 a partir de lentes gravitacionales depende fuertemente de la calidad del modelado de la lente, así como del tratamiento estadístico empleado.

Capítulo 8

Conclusiones

El método para estimar la constante de Hubble a partir del retardo temporal entre imágenes de un sistema lente gravitacional, implementado en este trabajo, es un método simplificado que parte del estudio de la teoría de lentes gravitacionales como una aplicación de la teoría linealizada de relatividad general. A diferencia de los enfoques empleados por grandes colaboraciones científicas, que incluyen modelados detallados de las lentes y procedimientos estadísticos complejos, este estudio utilizó modelos básicos: masa puntual, esfera isoterma singular (SIS), esfera isoterma con núcleo (NSIS) y, como referencia comparativa, el elipsoide isotermo singular (SIE). El propósito del proceso de estimación fue comprender cómo influyen los parámetros observacionales más relevantes de cada modelo en la determinación de H_0, no con el objetivo de obtener un valor altamente preciso, sino de evidenciar la sensibilidad del resultado frente a pequeñas variaciones en dichos parámetros.

En este proceso, la determinación de H_0 depende esencialmente de uno o dos parámetros observacionales que describen la distribución de masa del objeto que actúa como lente. En el modelo de masa puntual, el parámetro dominante es la masa de la lente (ver Ecuación (7.1)); en los modelos SIS y NSIS, lo es la velocidad de dispersión, Ecuaciones (7.5) y (7.6); mientras que en el modelo NSIS también influye de manera significativa el radio del núcleo. Por su parte, en el modelo SIE, el parámetro más influyente resultó ser la elipticidad del sistema y como dependencia secundaria la velocidad de dispersión, la Ecuación (7.7). En todos los casos, como se muestra en las Tablas 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 y 7.8, se observó una sensibilidad considerable en la estimación de la constante de Hubble cuando dichos parámetros se variaron en el rango indicado en las respectivas Tablas. Estos resultados refuerzan la idea de que una estimación confiable de la constante de Hubble depende críticamente en la calidad de las mediciones de estos parámetros y de la elección del modelo de la distribución de masa del objeto que actúa como lente.

Al comparar los resultados obtenidos con los reportados en la literatura para la determinación de la constante de Hubble a partir de medidas locales (ver Figura 7.9), se encuentra que el valor de H_0 determinado a partir de los sistemas HE $0435-1223$ y PKS $1830-211$ está a una distancia menor de 1σ del valor reportado por la colaboración H0LiCOW [17], y se

mantiene compatible con las incertidumbres asociadas a las mediciones de SH0ES y supernovas de tipo Ia (ver Sección 5.3). En contraste, el valor de H_0 obtenido mediante el sistema SDSS J1004+4112 se encuentra a $\sim 8\sigma$ del valor reportado por la colaboración HOLiCOW, incluso al utilizar un modelo SIE y evaluar distintas configuraciones. Este caso ilustra cómo una modelización inadecuada de la lente puede producir cambios sustanciales en la determinación de la constante de Hubble.

Adicionalmente, la Figura 7.9 pone de manifiesto que las estimaciones de H_0 derivadas de los sistemas PG 1115+080 y PKS 1830-211 se sitúan dentro del rango de error del valor de la contante de Hubble inferido por el satélite Planck (estudio del universo temprano). Esta coincidencia no sugiere la desaparición de la llamada "tensión de Hubble", sino que refleja las limitaciones del modelo simplificado adoptado, en este trabajo, para dichos sistemas. Además, los resultados obtenidos a partir de SDSS J1004+4112 sugieren la necesidad de emplear modelos de lente gravitacional más detallados, a fin de evitar errores sistemáticos que puedan atenuar o amplificar dicha discrepancia.

A pesar de que sólo con uno de los sistemas analizados se estimó un valor de la constante de Hubble H_0 plenamente consistente con las determinaciones recientes, mientras que los demás presentaron discrepancias[1] atribuibles a la simplicidad de los modelos de lente y/o a la poca precisión de las medidas de los parámetros relevantes, estos hallazgos respaldan la utilidad de las lentes gravitacionales como herramienta para estimar la constante de Hubble. Nuestros resultados evidencian tanto la sensibilidad de esta constante a los parámetros físicos involucrados como el potencial de la técnica para complementar otras mediciones y mitigar la tensión de Hubble. En consecuencia, este trabajo refuerza la importancia de refinar los modelos de masa, incluir cizallas externas y aplicar métodos numéricos más precisos; tales mejoras permitirán reducir la incertidumbre asociada a H_0 y aprovechar plenamente la capacidad de las lentes gravitacionales para esclarecer esta constante cosmológica fundamental.

Finalmente, el ajuste de la Ecuación (5.115) a los datos de supernovas de tipo Ia recopilados por [4] y [14], mostrados en las Figuras 5.3 y 7.8, respectivamente, permite concluir que para valores de corrimiento al rojo mucho menores que uno, el modelo proporciona un excelente ajuste, ya que la constante de Hubble estimada es consistente con el valor reportado por el programa SHOES. Para valores de corrimiento al rojo menores, pero cercanos a uno, el ajuste sigue siendo razonable, aunque la constante obtenida difiere en $\sim 3\sigma$ del valor de referencia. Esto sugiere que, incluso en este rango, la aproximación sigue siendo válida dentro de un margen aceptable.

[1] Discrepancias que oscilan entre un mínimo de 2σ y un máximo de 8σ, aunque los valores obtenidos se mantienen dentro del orden de magnitud de H_0 reportado en la literatura.

Apéndice A

Densidad de masa para una galaxia o un cúmulo

La derivación de la expresión (6.31) se realiza siguiendo el procedimiento expuesto en la Referencia [124]. En este enfoque, se modela a los constituyentes de una galaxia o cúmulo como partículas que conforman un gas ideal en equilibrio térmico, los cuales se mantienen cohesionados por la acción conjunta de su propia gravedad, generada por una distribución de masa aproximadamente esférica alrededor del centro del sistema[1]. Por lo tanto, la ecuación de estado para las partículas [159] en este caso es:

$$p = \frac{N}{V} k_B T, \tag{A.1}$$

donde p (presión), representa el efecto colectivo del movimiento aleatorio de las partículas [2], N el número total de partículas, V el volumen del sistema, k_B la constante de Boltzmann, y T la temperatura (constante). La masa total del sistema es $M = Nm$, siendo m la masa promedio de una partícula. Por lo tanto, la densidad de masa se define como:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V}. \tag{A.2}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación de estado, se obtiene:

$$p = \frac{N}{V} k_B T = \frac{\rho}{m} k_B T = \rho \left(\frac{k_B T}{m} \right). \tag{A.3}$$

Según el teorema de equipartición de la energía, en equilibrio térmico cada grado de libertad cuadrático contribuye con una energía promedio de $\frac{1}{2} k_B T$ [159]. Si se considera únicamente una dirección espacial, por ejemplo, la componente radial del movimiento en un sistema

[1] Esto parece contradictorio porque un gas ideal usualmente supone partículas que no interactúan. Sin embargo, en este contexto, la gravedad no se trata como interacciones directas entre partículas, sino como un campo promedio generado por toda la masa del sistema. Este modelo es válido para sistemas como galaxias, donde las partículas rara vez chocan, pero su movimiento colectivo está dominado por la gravedad total [158].

[2] Es lo que mantiene al sistema expandido frente a su propio colapso gravitacional.

esférico e isotrópico, esta energía se puede asociar a la energía cinética promedio de una partícula de masa m en esa dirección. Dado que la isotropía implica que las velocidades están distribuidas de la misma forma en todas las direcciones, es válido identificar la dispersión cuadrática de velocidades σ_v^2 con el valor esperado del cuadrado de la velocidad en una dirección. Así, se cumple que

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\sigma_v^2 = \frac{1}{2}k_B T, \tag{A.4}$$

de donde se deduce directamente la relación

$$\sigma_v^2 = \frac{k_B T}{m}. \tag{A.5}$$

Se asume que el gas se encuentra en un estado isotermo a lo largo de toda la dirección radial, lo que implica que la dispersión de velocidades σ_v es constante en r. Además, si el sistema está en equilibrio hidrostático, se requiere considerar el balance entre el gradiente de presión y la fuerza gravitacional. En un sistema autogravitante con simetría esférica, la aceleración gravitacional en un punto a una distancia r del centro está dirigida radialmente hacia dicho centro, y su magnitud está determinada por la ley de gravitación de Newton:

$$a(r) = \frac{GM(r)}{r^2}, \tag{A.6}$$

donde $M(r)$ es la masa total contenida dentro de un radio r. Esta masa se define como

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'. \tag{A.7}$$

Derivando esta expresión con respecto a r, se obtiene

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \Rightarrow \quad M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{A.8}$$

Esta aceleración actúa hacia el centro del sistema, tendiendo a colapsar la materia en esa dirección. Para que el sistema permanezca en equilibrio, debe existir un gradiente de presión que disminuya con el radio, de modo que genere una fuerza que contrarreste la atracción gravitacional. Esta relación se expresa formalmente mediante la ecuación de equilibrio hidrostático [160]:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)\, a(r) = -\rho(r)\, \frac{GM(r)}{r^2}. \tag{A.9}$$

El signo negativo indica que la presión debe decrecer con el radio para compensar la atracción gravitacional que tiende a atraer la materia hacia el centro del sistema. En estas condiciones, se hace uso de la ecuación de estado para un gas ideal isotermo (A.1) en función de la velocidad de dispersión (A.5), es decir

$$p(r) = \rho(r)\, \sigma_v^2, \tag{A.10}$$

esto con el fin de sustituirla en la condición de equilibrio hidrostático (A.9). De lo anterior se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM(r)}{\sigma_v^2\, r^2}. \tag{A.11}$$

Para resolver esta ecuación, se propone una solución particular [124] del tipo

$$\rho(r) = \frac{A}{r^2}, \tag{A.12}$$

donde A es una constante a determinar. Al sustituir esta solución en la definición de masa contenida dentro de un radio r, dada por (A.7), se tiene

$$M(r) = \int_0^r 4\pi A\, dr' = 4\pi A r, \tag{A.13}$$

por lo tanto la ecuación diferencial obtenida previamente se reduce a:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\pi G A}{\sigma_v^2 r}. \tag{A.14}$$

Evaluando el lado izquierdo usando la forma propuesta para $\rho(r)$ y expresándolo en términos del logaritmo natural, se obtiene

$$\frac{d}{dr}\ln\rho = \frac{d}{dr}\ln\left(\frac{A}{r^2}\right) = -\frac{2}{r}, \tag{A.15}$$

de manera que al comparar con la Ecuación (A.14) se llega a la siguiente igualdad

$$A = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}. \tag{A.16}$$

Finalmente, al sustituir este valor en expresión (A.12), la densidad de masa está dada por

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}. \tag{A.17}$$

Esta es la solución particular que satisface la ecuación de equilibrio hidrostático para un gas esférico, isotermo y autogravitante. Físicamente, esta solución indica que la densidad decrece con el cuadrado de la distancia al centro, lo cual refleja un sistema cuya masa se acumula lentamente hacia regiones más externas. Este perfil es ampliamente utilizado en astrofísica para modelar halos de materia oscura o las regiones exteriores de cúmulos estelares y galaxias, donde la dispersión de velocidades se mantiene aproximadamente constante y el sistema está en equilibrio gravitacional [124].

Apéndice B

Cálculo de posiciones

En la literatura, las posiciones de las imágenes en sistemas de lentes gravitacionales se suelen reportar en coordenadas ecuatoriales, específicamente en términos de ascensión recta y declinación. Para ilustrar este procedimiento, se toma como ejemplo el sistema de lente gravitacional SDSS J1206+4332, que presenta dos imágenes, denominadas A y B. La posición de la imagen B se establece con respecto a la imagen A según lo reportado en la Referencia [22]. De acuerdo con dicha fuente, las posiciones de las imágenes en coordenadas ecuatoriales son las siguientes:

Imagen	**R.A (h m s)**	**DEC (° ’ ”)**
A	12 06 29.65	43 32 17.6
B	12 06 29.65	43 32 20.6

Tabla B.1: Coordenadas ecuatoriales de las imágenes A y B del sistema lente gravitacional SDSS J1206+4332. Tomadas de: [22].

Para determinar las posiciones relativas de la imagen B con respecto a la imagen A en un sistema de coordenadas cartesianas expresadas en unidades de arcosegundos, como se presenta en la Tabla 2 de [22], es fundamental aplicar las conversiones apropiadas desde las coordenadas ecuatoriales. En primer lugar, la ascensión recta (R.A.) expresada en horas se convierte a grados utilizando la relación

$$\text{R.A}(^\circ) = \frac{360^\circ}{24h} \times \text{R.A}(h) = 15(^\circ/h) \times \text{R.A}(h). \tag{B.1}$$

Para realizar esta conversión, es necesario transformar primero los minutos y segundos de tiempo en fracciones de horas, y posteriormente aplicar la conversión a grados conforme a la ecuación anterior, como se muestra a continuación

$$\text{R.A}(^\circ)_A = \text{R.A}(^\circ)_B = 15(^\circ/h) \times \left(12h + \frac{6h}{60} + \frac{29.65h}{3600}\right) = 181.623542^\circ. \tag{B.2}$$

En cuanto a la declinación (DEC), para este caso particular basta con convertir los minutos y segundos de arco directamente a grados, obteniendo

$$\text{DEC}(^\circ)_A = 43^\circ + \frac{32\text{'}}{60} + \frac{17.6\text{"}}{3600} = 43.5382222^\circ, \tag{B.3}$$

$$\text{DEC}(^\circ)_B = 43^\circ + \frac{32\text{'}}{60} + \frac{20.6\text{"}}{3600} = 43.5390556^\circ. \tag{B.4}$$

Finalmente, para expresar la posición de un objeto (por ejemplo, una imagen, la fuente o la lente) con respecto a un punto de referencia arbitrario del sistema (por ejemplo, otra imagen, el centro de la lente, etc.), se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas (θ'_x, θ'_y) en unidades de arcosegundos. Este sistema está centrado en el punto de referencia elegido. A partir de las coordenadas ecuatoriales del objeto y del punto de referencia, ambas expresadas en grados, se calcula su diferencia y se convierte a arcosegundos mediante la relación $1^\circ = 3600''$. Así, la posición relativa del objeto se determina como:

$$\theta'_x = (\text{R.A}(^\circ) - \text{R.A}(^\circ)_{\text{ref}}) \times 3600, \tag{B.5}$$

$$\theta'_y = (\text{DEC}(^\circ) - \text{DEC}(^\circ)_{\text{ref}}) \times 3600, \tag{B.6}$$

donde:

- θ'_x y θ'_y son las componentes de la posición del objeto en un sistema cartesiano centrado en el objeto de referencia; su valor numérico indica el desplazamiento angular (en arcosegundos) respecto a ese punto.

- R.A(°) y DEC(°) son las coordenadas ecuatoriales (en grados) del objeto cuya posición se desea expresar en términos del objeto referencia.

- R.A$(^\circ)_{\text{ref}}$ y DEC$(^\circ)_{\text{ref}}$ son las coordenadas ecuatoriales (en grados) del objeto de referencia; el subíndice "ref" señala que estas coordenadas fijan el origen del sistema (θ'_x, θ'_y).

Este enfoque es completamente general y permite calcular la posición relativa de cualquier componente del sistema con respecto a cualquier otro, simplemente cambiando el punto de referencia. En el caso que se venia tratando, al tomar como referencia la imagen A y aplicar el procedimiento a la imagen B, se obtiene:

$$\theta'_x = 0, \quad \theta'_y = 3.0, \tag{B.7}$$

lo cual coincide aproximadamente con los valores reportados en la Referencia [22], con diferencias menores atribuibles a métodos observacionales más precisos utilizados en dicho estudio a través del análisis directo de las imágenes. En este trabajo se obtuvieron las posiciones de las imágenes respecto a la lente. Para lograr esto, después de conseguir las pociones en coordenadas cartesianas en unidades de arcosegundos respecto a cualquier imagen, se tiene en cuenta lo siguiente: inicialmente, fue necesario verificar la orientación de las imágenes

capturadas de los sistemas lente gravitacional que se presentan en la literatura [1], ya que de dicha orientación depende la dirección que se asigna a los ejes θ_x y θ_y en el plano de la lente.

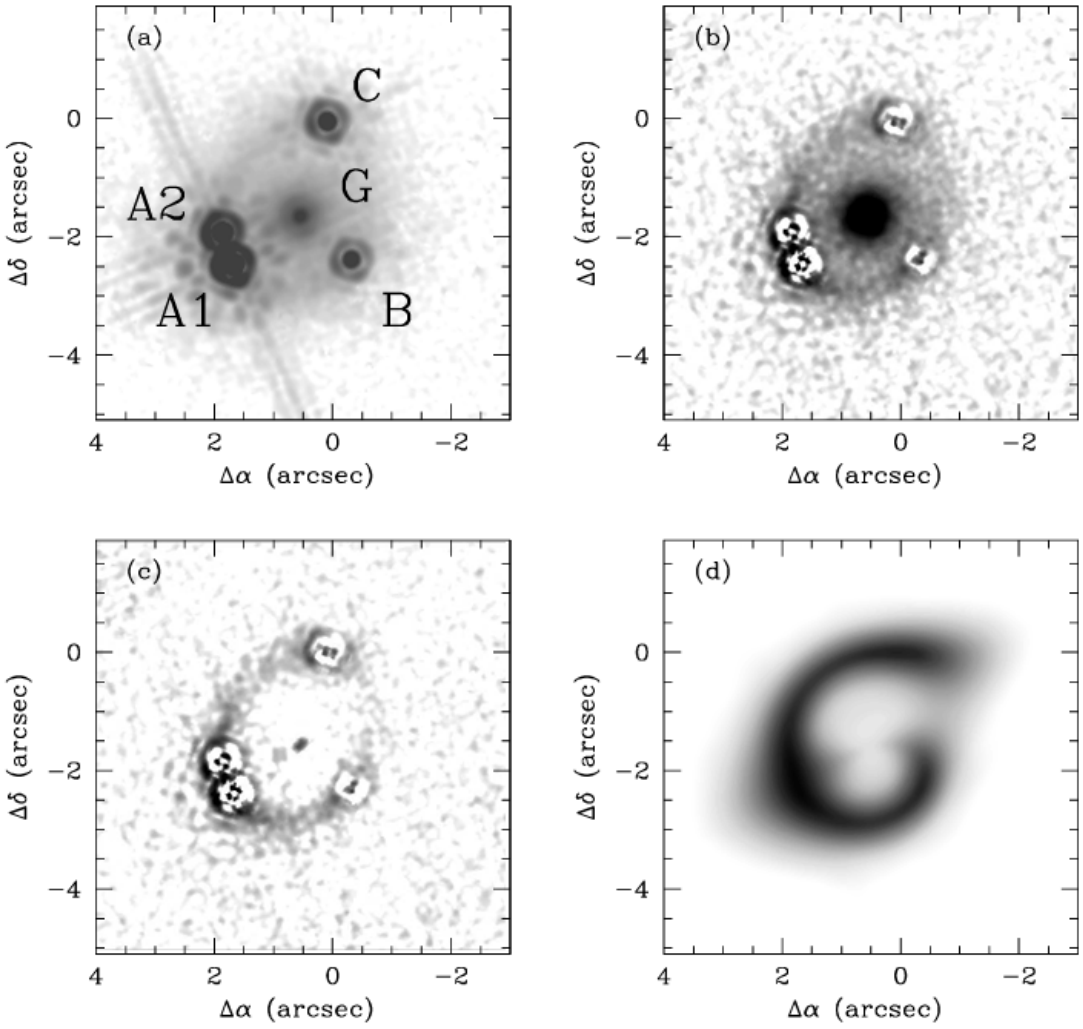

Figura B.1: Imagen del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, capturada con la Cámara 2 del instrumento NICMOS del HST. En ella se muestran las cuatro imágenes del cuásar y la galaxia lente, orientada con el norte hacia arriba y el este a la izquierda. Tomada de la Figura 1 de [18] (publicada en The Astrophysical Journal y disponible en arXiv). Esta imagen se presenta únicamente con fines académicos.

Dado que cada artículo puede adoptar una convención distinta para la orientación de estas imágenes, la cual suele indicarse en la descripción de las figuras, se contrastaron varias referencias para cada sistema, con el fin de unificar criterios. Como resultado, se adoptó la

[1] No debe confundirse con las imágenes generadas por la lente; aquí se hace referencia a la imagen capturada del sistema completo, es decir, la representación visual del sistema lente gravitacional.

convención en la que el eje θ_x positivo apunta hacia el oeste (derecha) y el eje θ_y hacia el norte. Cabe destacar que, en las imágenes astronómicas, el oeste aparece a la derecha y el este a la izquierda, por lo que, bajo esta convención, el eje θ_x positivo apunta hacia la derecha, y el negativo hacia la izquierda. Asimismo, el norte aparece orientado hacia arriba, lo que coincide con la dirección positiva del eje θ_y, mientras que el sur apunta hacia abajo, correspondiendo al eje θ_y negativo.

Por esta razón, en los casos en que las posiciones reportadas en la literatura ya siguen esta orientación, los datos se utilizaron directamente. Sin embargo, si la convención era opuesta (es decir, si el eje θ_x positivo apuntaba hacia el este), entonces fue necesario invertir el signo de las coordenadas θ_x (multiplicándolas por -1) para ajustarlas a la convención adoptada en este trabajo. Para transformar las posiciones de las imágenes generadas por la lente a un sistema de referencia centrado en la galaxia lente, se aplicó el siguiente cambio de coordenadas:

$$\theta'_x = \theta_{x\text{imagen}} - \theta_{xG}, \qquad \theta'_y = \theta_{y\text{imagen}} - \theta_{yG}\,, \tag{B.8}$$

donde x' y y' representan las coordenadas relativas al centro de la galaxia lente, mientras que $\theta_{x\text{imagen}}$ y $\theta_{y\text{imagen}}$ son las coordenadas de las imágenes en el sistema de referencia adoptado en la literatura, el cual usualmente toma como origen la imagen más brillante. Por su parte, θ_{xG} y θ_{yG} corresponden a las coordenadas de la galaxia lente en ese mismo sistema.

Como ejemplo, se considera el sistema PG 1115+080. Las posiciones de las imágenes para este sistema se tomaron de la Tabla 1 de la Referencia [23]. No obstante, al contrastar esos datos con la Figura 1 y la Tabla 1 de [18] (ver Figura B.1), se observó que la convención utilizada en dicha fuente no seguía el criterio de orientación esperado, donde el eje θ_x crece hacia el este. En consecuencia, fue necesario invertir las coordenadas del eje θ_x (esto es, multiplicarlas por -1), como se muestra en la siguiente Tabla B.2.

En la Tabla B.2 se presentan, a la izquierda, los datos originales reportados por [23], expresados como desplazamientos relativos respecto a la imagen más brillante. A la derecha, se muestran las mismas posiciones tras invertir el eje θ_x, de acuerdo con la convención adoptada en este trabajo. Esta transformación permite aplicar directamente la Ecuación (B.8) para obtener las coordenadas relativas al centro de la lente. Como ilustración, el cálculo para la imagen A1 se realiza de la siguiente manera:

$$\theta_{x'\mathrm{A1}} = \theta_{x\mathrm{A1}} - \theta_{xG} = -1.328 - (-0.381) = -0.947, \tag{B.9}$$
$$\theta_{y'\mathrm{A1}} = \theta_{y_{\mathrm{A1}}} - \theta_{yG} = -2.034 - (-1.344) = -0.690. \tag{B.10}$$

Estos valores pueden verificarse en la Tabla 7.1, donde se presentan las coordenadas relativas al centro de la lente. El mismo criterio se aplicó para el resto de las imágenes del sistema.

	θ_x ($''$)	θ_y ($''$)
A1	1.328 ± 0.003	-2.034 ± 0.003
A2	1.477 ± 0.004	-1.576 ± 0.003
B	-0.341 ± 0.003	-1.961 ± 0.003
C	0	0
G	0.381 ± 0.003	-1.344 ± 0.003

$\Rightarrow$

	θ_x ($''$) (invertido)	θ_y ($''$)
A1	-1.328 ± 0.003	-2.034 ± 0.003
A2	-1.477 ± 0.004	-1.576 ± 0.003
B	0.341 ± 0.003	-1.961 ± 0.003
C	0	0
G	-0.381 ± 0.003	-1.344 ± 0.003

Tabla B.2: Transformación de coordenadas para el sistema PG 1115+080. A la izquierda se muestran las posiciones originales reportadas por [23]. A la derecha, las posiciones tras la inversión del eje θ_x, de acuerdo con la convención adoptada en este trabajo.

Este enfoque se utilizó también para los demás sistemas listados en la Tabla 7.1. Los resultados obtenidos son consistentes con los reportados en [133], donde igualmente se toman como referencia las coordenadas relativas al centro de la galaxia lente.

Bibliografía

[1] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss, *Gravitational lensing: Strong, weak and micro*, vol. 33 of *Saas-Fee Advanced Course*. Springer, 2005.

[2] J. L. Tonry *et al.*, "Cosmological results from high-z supernovae," *Astrophys. J.*, vol. 594, pp. 1–24, 2003.

[3] N. Aghanim *et al.*, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astron. Astrophys.*, vol. 641, p. A6, 2020. [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)].

[4] S. Dhawan, S. W. Jha, and B. Leibundgut, "Measuring the Hubble constant with Type Ia supernovae as near-infrared standard candles," *Astron. Astrophys.*, vol. 609, p. A72, 2018.

[5] S. Mollerach and E. Roulet, *Gravitational Lensing and Microlensing*. Cambridge University Press, 2002.

[6] M. Meneghetti, "Introduction to gravitational lensing: Lecture scripts." https://www2.mpia-hd.mpg.de/homes/meneghetti/Lensing/Lensing_notes.pdf, n.d. Lecture notes.

[7] V. Bonvin *et al.*, "COSMOGRAIL XVII: Time Delays for the Quadruply Imaged Quasar PG 1115+080," *Astron. Astrophys.*, vol. 616, p. A183, 2018.

[8] C. S. Kochanek, N. D. Morgan, E. E. Falco, B. A. McLeod, J. N. Winn, J. Dembicky, and B. Ketzeback, "The Time Delays of Gravitational Lens HE 0435-1223: An Early-Type Galaxy with a Rising Rotation Curve," *The Astrophysical Journal*, vol. 640, pp. 47–61, Mar. 2006.

[9] M. Oguri, "The mass distribution of sdss j1004+4112 revisited," *Publications of the Astronomical Society of Japan*, vol. 62, pp. 1017–1024, 08 2010.

[10] S. Muller, S. Jaswanth, C. Horellou, and I. Marti-Vidal, "All good things come in threes: the third image of the lensed quasar PKS 1830−211," *Astron. Astrophys.*, vol. 641, p. L2, 2020.

[11] S. Muller, I. Martí-Vidal, F. Combes, M. Gérin, A. Beelen, C. Horellou, M. Guélin, S. Aalto, J. H. Black, and E. van Kampen, "Cosmo-tomography toward pks 1830-211:

Variability of the quasar and of its foreground molecular absorption monitored with alma," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 674, p. A101, June 2023.

[12] C. Lidman, F. Courbin, G. Meylan, T. J. Broadhurst, B. Frye, and W. J. W. Welch, "The redshift of the gravitationally lensed radio source pks1830-211," *Astrophys. J. Lett.*, vol. 514, p. L57, 1999.

[13] J. N. Winn, C. S. Kochanek, B. A. McLeod, E. E. Falco, C. D. Impey, and H.-W. Rix, "Pks 1830-211: a face-on spiral galaxy lens," *Astrophys. J.*, vol. 575, p. 103, 2002.

[14] M. Sako, B. Bassett, A. C. Becker, *et al.*, "The data release of the sloan digital sky survey-ii supernova survey," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 130, p. 064002, may 2018.

[15] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, "Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1 % Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond ΛCDM," *Astrophys. J.*, vol. 876, no. 1, p. 85, 2019.

[16] V. Bonvin *et al.*, "H0LiCOW – V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435−1223: H_0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat ΛCDM model," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 465, no. 4, pp. 4914–4930, 2017.

[17] K. C. Wong *et al.*, "H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early- and late-Universe probes," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 498, no. 1, pp. 1420–1439, 2020.

[18] C. D. Impey, E. E. Falco, C. S. Kochanek, J. Lehar, B. A. McLeod, H. W. Rix, C. Y. Peng, and C. R. Keeton, "An Infrared Einstein ring in the gravitational lens PG 1115+080," *Astrophys. J.*, vol. 509, p. 551, 1998.

[19] D. Perera, L. L. R. Williams, J. Liesenborgs, A. Ghosh, and P. Saha, "Free-form and hybrid lens models for SDSS J1004+4112: substructure and central image time delay constraints," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 527, pp. 2639–2651, Jan. 2024.

[20] N. Inada, M. Oguri, E. E. Falco, T. J. Broadhurst, E. O. Ofek, C. S. Kochanek, K. Sharon, and G. P. Smith, "Spectroscopic Confirmation of the Fifth Image of SDSS J1004+4112 and Implications for the $M_{BH} - \sigma_*$ Relation at z = 0.68," *Publ. Astron. Soc. Jap.*, vol. 60, pp. L27–L30, 2008.

[21] S. Nair, D. Narasimha, and A. P. Rao, "PKS 1830-211 as a Gravitationally Lensed System," *The Astrophysical Journal*, vol. 407, p. 46, Apr. 1993.

[22] M. Oguri *et al.*, "Discovery of two gravitationally lensed quasars with image separations of 3" from the sloan digital sky survey," *The Astrophysical Journal*, vol. 622, pp. 106–115, Mar. 2005.

[23] C. W. Morgan, C. S. Kochanek, X. Dai, N. D. Morgan, and E. E. Falco, "X-Ray and Optical Microlensing in the Lensed Quasar PG 1115+080," *Astrophys. J.*, vol. 689, p. 755, 2008.

[24] O. Lahav and A. R. Liddle, "The Cosmological Parameters (2023)," *arXiv e-prints*, p. arXiv:2403.15526, Mar. 2024.

[25] J.-P. Hu and F.-Y. Wang, "Hubble Tension: The Evidence of New Physics," *Universe*, vol. 9, no. 2, p. 94, 2023.

[26] R. B. Tully, "The Hubble Constant: A Historical Review," May 2023. Preprint.

[27] H0LiCOW Collaboration, "H0LiCOW: H0 Lenses in COSMOGRAIL's Wellspring." https://shsuyu.github.io/H0LiCOW/site/, 2025. Accessed: 2025-06-26.

[28] W. L. Freedman, B. F. Madore, I. S. Jang, T. J. Hoyt, A. J. Lee, and K. A. Owens, "Status Report on the Chicago-Carnegie Hubble Program (CCHP): Three Independent Astrophysical Determinations of the Hubble Constant Using the James Webb Space Telescope," *arXiv preprint*, 8 2024.

[29] A. J. Lee, W. L. Freedman, B. F. Madore, I. S. Jang, K. A. Owens, and T. J. Hoyt, "The Chicago-Carnegie Hubble Program: The JWST J-region Asymptotic Giant Branch (JAGB) Extragalactic Distance Scale," *arXiv preprint*, 8 2024.

[30] A. G. Riess *et al.*, "A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s^{-1} mpc^{-1} uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team," *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 934, p. L7, jul 2022.

[31] M. Abdul Karim *et al.*, "DESI DR2 Results II: Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints," Mar. 2025. Submitted to a journal.

[32] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*. Cambridge University Press, 3rd ed., 2013.

[33] S. Refsdal, "On the possibility of determining hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 128, no. 4, pp. 307–310, 1964.

[34] C. S. Kochanek and P. L. Schechter, "The hubble constant from gravitational lens time delays," in *Carnegie Observatories Centennial Symposium. 2. Measuring and Modeling the Universe*, pp. 117–137, 6 2003.

[35] K. C. Wong *et al.*, "TDCOSMO. XVI. Measurement of the Hubble Constant from the Lensed Quasar WGD 2038−4008," *arXiv preprint*, 6 2024.

[36] E. V. Linder, "Lensing time delays and cosmological complementarity," *Physical Review D*, vol. 84, p. 123529, Dec. 2011.

[37] A. Einstein, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen," *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, vol. 4, pp. 411–462, Jan. 1908.

[38] M. Meneghetti(auth.), *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Lecture Notes in Physics №956, Springer, 1st ed ed., 2021.

[39] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.

[40] A. Einstein, "Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie," *Annalen der Physik*, vol. 354, no. 7, pp. 769–822, 1916.

[41] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. John Wiley y Sons, Inc., first edition ed., 1972.

[42] C. Bambi, *General Relativity*, pp. 107–122. Singapore: Springer Singapore, 2018.

[43] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd ed., 2009.

[44] A. S. S., *Elementos de Relatividad General*. Medellín, Colombia: Instituto de Física, Universidad de Antioquia, 2015. Revisado en noviembre de 2015.

[45] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, 2003.

[46] K. Schwarzschild, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 189–196, Jan. 1916.

[47] M. Baroni, "Einstein's Field Equations: Derivations and Solutions," Master's thesis, Politecnico di Milano, Department of Mathematics, Milano, Italy, 2020. M.Sc. Thesis, Supervisor: Prof. Giovanni Catino.

[48] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*. New York: W. W. Norton and Company, 1976.

[49] S. Bapat *et al.*, "Einsteinpy: A community python package for general relativity," 2020.

[50] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*. San Francisco: Addison-Wesley, 3 ed., 2002.

[51] D. Baumann, *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022.

[52] J. G. v. Soldner, "Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht," *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, pp. 161–172, 1801.

[53] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, *Gravitational Lenses*. Astronomy and Astrophysics Library, Springer, 1999.

[54] A. Einstein, "On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light," *Annalen Phys.*, vol. 35, pp. 898–908, 1911.

[55] A. Einstein, "The Field Equations of Gravitation," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, pp. 844–847, 1915.

[56] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919," *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 220, pp. 291–333, 1920.

[57] A. Fraknoi, D. Morrison, and S. C. Wolff, *Astronomy*. Houston, TX: OpenStax, Rice University, 1 ed., 2016. Disponible gratuitamente bajo licencia Creative Commons CC BY 4.0.

[58] N. Tessore, *GRAVITATIONAL LENSING AS A TOOL ON GALACTIC AND COSMOLOGICAL SCALES*. PhD thesis, Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Bologna, Italy, 2015. Supervisors: Prof. Lauro Moscardini, Dott. Robert Benton Metcalf, Dott. Fabio Bellagamba.

[59] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, "Chapter 10 - green's functions," in *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)* (G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, eds.), pp. 447–467, Boston: Academic Press, seventh edition ed., 2013.

[60] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics: Volume 3, Galaxies and Cosmology*. Cambridge University Press, 2002.

[61] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 2nd ed., 1713.

[62] V. M. Slipher, "Nebulae," *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 56, pp. 403–409, Jan. 1917.

[63] M. Tafalla, "La expansión acelerada del universo," *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*, vol. 1, pp. 403–442, 2014.

[64] A. Friedmann, "Über die Krümmung des Raumes," *Zeitschrift fur Physik*, vol. 10, pp. 377–386, Jan. 1922.

[65] G. Lemaître, "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques," *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, vol. 47, pp. 49–59, Jan. 1927.

[66] E. Hubble, "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae," *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 15, pp. 168–173, Mar. 1929.

[67] A. Einstein, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 142–152, Jan. 1917.

[68] A. G. Riess, A. V. Filippenko, and et al., "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant," *The Astronomical Journal*, vol. 116, pp. 1009–1038, Sept. 1998.

[69] S. Perlmutter, G. Aldering, and et al., "Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae," *The Astrophysical Journal*, vol. 517, pp. 565–586, June 1999.

[70] E. Hubble and M. L. Humason, "The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae," *The Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 43, July 1931.

[71] N. Jackson, "The Hubble Constant," *Living Reviews in Relativity*, vol. 18, p. 2, Dec. 2015.

[72] H. P. Robertson, "Kinematics and World-Structure," *The Astrophysical Journal*, vol. 82, p. 284, Nov. 1935.

[73] A. G. Walker, "On Milne's Theory of World-Structure," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 42, pp. 90–127, Jan. 1937.

[74] D. Brout, D. Scolnic, and et al., "The pantheon+ analysis: Cosmological constraints," *The Astrophysical Journal*, vol. 938, p. 110, oct 2022.

[75] D. M. Scolnic, D. O. Jones, and et al., "The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample," *The Astrophysical Journal*, vol. 859, p. 101, may 2018.

[76] N. Jackson, "The Hubble Constant," *Living Reviews in Relativity*, vol. 18, p. 2, Dec. 2015.

[77] J. R. Herrnstein, J. M. Moran, L. J. Greenhill, P. J. Diamond, M. Inoue, N. Nakai, M. Miyoshi, C. Henkel, and A. Riess, "A geometric distance to the galaxy NGC4258 from orbital motions in a nuclear gas disk," *Nature*, vol. 400, pp. 539–541, Aug. 1999.

[78] E. M. L. Humphreys, A. L. Argon, L. J. Greenhill, J. M. Moran, and M. J. Reid, "Recent Progress on a New Distance to NGC 4258," in *Future Directions in High Resolution Astronomy* (J. Romney and M. Reid, eds.), vol. 340 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 466, Dec. 2005.

[79] E. M. L. Humphreys, M. J. Reid, J. M. Moran, L. J. Greenhill, and A. L. Argon, "Toward a New Geometric Distance to the Active Galaxy NGC 4258. III. Final Results and the Hubble Constant," *Astrophys. J.*, vol. 775, p. 13, 2013.

[80] M. J. Reid, J. A. Braatz, J. J. Condon, L. J. Greenhill, C. Henkel, and K. Y. Lo, "The Megamaser Cosmology Project: I. VLBI observations of UGC 3789," *Astrophys. J.*, vol. 695, pp. 287–291, 2009.

[81] T. Treu and P. J. Marshall, "Time Delay Cosmography," *Astron. Astrophys. Rev.*, vol. 24, no. 1, p. 11, 2016.

[82] Z. S. Greene *et al.*, "Improving the precision of time-delay cosmography with observations of galaxies along the line of sight," *Astrophys. J.*, vol. 768, p. 39, 2013.

[83] R. W. Schmidt, S. W. Allen, and A. C. Fabian, "An improved approach to measuring H_0 using X-ray and SZ observations of galaxy clusters," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 352, pp. 1413–1420, Aug. 2004.

[84] M. Bonamente, M. K. Joy, S. J. LaRoque, J. E. Carlstrom, E. D. Reese, and K. S. Dawson, "Determination of the Cosmic Distance Scale from Sunyaev-Zel'dovich Effect and Chandra X-Ray Measurements of High-Redshift Galaxy Clusters," *The Astrophysical Journal*, vol. 647, pp. 25–54, Aug. 2006.

[85] E. D. Reese, J. E. Carlstrom, M. Joy, J. J. Mohr, L. Grego, and W. L. Holzapfel, "Determining the Cosmic Distance Scale from Interferometric Measurements of the Sunyaev-Zeldovich Effect," *The Astrophysical Journal*, vol. 581, pp. 53–85, Dec. 2002.

[86] M. Ackermann, M. Ajello, and et al., "The Imprint of the Extragalactic Background Light in the Gamma-Ray Spectra of Blazars," *Science*, vol. 338, p. 1190, November 2012.

[87] Feast, M. W. and Catchpole, R. M., "The Cepheid period-luminosity zero-point from HIPPARCOS trigonometrical parallaxes," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 286, pp. L1–L5, mar 1997.

[88] Turon, Catherine and Luri, Xavier and Masana, Eduard, "Building the cosmic distance scale: from Hipparcos to Gaia," *Astrophysics and Space Science*, vol. 341, pp. 15–29, sep 2012.

[89] L. Anderson, E. Aubourg, and et al., "The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Release 9 spectroscopic galaxy sample," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 427, pp. 3435–3467, Dec. 2012.

[90] Perryman, M. A. C. and Brown, A. G. A. and Lebreton, Y. and Gomez, A. and Turon, C. and Cayrel de Strobel, G. and Mermilliod, J. C. and Robichon, N. and Kovalevsky, J. and Crifo, F., "The Hyades: distance, structure, dynamics, and age," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 331, pp. 81–120, mar 1998.

[91] M. Rowan-Robinson, *The Cosmological Distance Ladder: Distance and Time in the Universe*. New York: W.H. Freeman, 1985.

[92] M. M. Phillips, "The Absolute Magnitudes of Type IA Supernovae," *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 413, p. L105, Aug. 1993.

[93] M. Hamuy, M. M. Phillips, N. B. Suntzeff, R. A. Schommer, J. Maza, R. C. Smith, P. Lira, and R. Aviles, "The Morphology of Type IA Supernovae Light Curves," *The Astronomical Journal*, vol. 112, p. 2438, Dec. 1996.

[94] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, and et al., "Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies," *The Astrophysical Journal*, vol. 633, pp. 560–574, November 2005. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

[95] S. Perlmutter, S. Gabi, and et al., "Measurements of the Cosmological Parameters Ω and Λ from the First Seven Supernovae at z ¿= 0.35," *The Astrophysical Journal*, vol. 483, pp. 565–581, July 1997. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

[96] D. Bailin and A. Love, *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*. Bristol; Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2004.

[97] A. Guarnizo, "Cosmological Models in Modified f(R) Gravity Theories," *arXiv e-prints*, p. arXiv:1211.2444, Nov. 2012.

[98] M. P. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. New York: Cambridge University Press, 2006.

[99] R. B. Tully, "The Hubble Constant: A Historical Review," *arXiv e-prints*, p. arXiv:2305.11950, May 2023.

[100] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003.

[101] G. J. Williams, "Part 5: The bose-einstein distribution," 2018. Accedido: 29 de marzo de 2025.

[102] D. J. Fixsen, "The Temperature of the Cosmic Microwave Background," *The Astrophysical Journal*, vol. 707, pp. 916–920, Dec. 2009.

[103] H. S. Leavitt, "1777 variables in the Magellanic Clouds," *Annals of Harvard College Observatory*, vol. 60, pp. 87–108.3, Jan. 1907.

[104] S. M. Carroll, "Lecture Notes on General Relativity," 1997.

[105] M. Planck, "Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normalspectrum," *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, vol. 2, pp. 237–245, 1900.

[106] A. Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt," *Annalen der Physik*, vol. 322, pp. 132–148, Jan. 1905.

[107] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.

[108] D. W. Hogg, "Distance measures in cosmology," *arXiv e-prints*, pp. astro–ph/9905116, May 1999.

[109] S. H. Suyu, T.-C. Chang, F. Courbin, and T. Okumura, "Cosmological distance indicators," *Space Science Reviews*, vol. 214, p. 91, 07 2018.

[110] S. Birrer, M. Millon, D. Sluse, A. J. Shajib, F. Courbin, S. Erickson, L. V. E. Koopmans, S. H. Suyu, and T. Treu, "Time-Delay Cosmography: Measuring the Hubble Constant and Other Cosmological Parameters with Strong Gravitational Lensing," *Space Sci. Rev.*, vol. 220, no. 5, p. 48, 2024.

[111] P. Saha, D. Sluse, J. Wagner, and L. L. R. Williams, "Essentials of Strong Gravitational Lensing," *Space Sci. Rev.*, vol. 220, no. 1, p. 12, 2024.

[112] V. Sahni and A. A. Starobinsky, "The Case for a positive cosmological Lambda term," *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 9, pp. 373–444, 2000.

[113] M. Wang and B. Cheng, "Determining h0 and q0 from supernova data," in *19th Particles and Nuclei International Conference (PANIC11)*, pp. 503–505, American Institute of Physics, 2012.

[114] Z.-X. Zhai, M.-J. Zhang, Z.-S. Zhang, X.-M. Liu, and T.-J. Zhang, "Reconstruction and constraining of the jerk parameter from OHD and SNe Ia observations," *Phys. Lett. B*, vol. 727, pp. 8–20, 2013.

[115] K. R. Lang, *Essential Astrophysics*. Undergraduate Lecture Notes in Physics, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[116] C. e. a. Contreras, "The carnegie supernova project: First photometry data release of low-redshift type ia supernovae," *The Astronomical Journal*, vol. 139, pp. 519–539, Feb. 2010.

[117] M. D. e. a. Stritzinger, "The carnegie supernova project: Second photometry data release of low-redshift type ia supernovae," *The Astronomical Journal*, vol. 142, p. 156, Nov. 2011.

[118] W. M. e. a. Wood-Vasey, "Type ia supernovae are good standard candles in the near infrared: Evidence from pairitel," *The Astrophysical Journal*, vol. 689, pp. 377–390, Dec. 2008.

[119] A. S. e. a. Friedman, "Cfair2: Near-infrared light curves of 94 type ia supernovae," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 220, p. 9, Sept. 2015.

[120] R. L. e. a. Barone-Nugent, "Near-infrared observations of type ia supernovae: the best known standard candle for cosmology," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 425, pp. 1007–1012, Sept. 2012.

[121] R. L. e. a. Barone-Nugent, "Erratum: Near-infrared observations of type ia supernovae: The best known standard candle for cosmology," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 432, pp. L90–L91, May 2013.

[122] F. Zwicky, "Nebulae as gravitational lenses," *Phys. Rev.*, vol. 51, p. 290, 1937.

[123] M. Sasaki, "Cosmological gravitational lens equation: Its validity and limitation," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 90, pp. 753–781, 09 1993.

[124] R. Narayan and M. Bartelmann, "Lectures on gravitational lensing," in *13th Jerusalem Winter School in Theoretical Physics: Formation of Structure in the Universe*, 6 1996.

[125] P. Schneider, "A new formulation of gravitational lens theory, time-delay, and Fermat's principle," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 143, pp. 413–420, Feb. 1985.

[126] G. C. Orozco, "Lentes gravitacionales de janis-newman-winicour," Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2010. Tesis de maestría, Magister en Ciencias - Astronomía.

[127] H. A. M. García, "Estudio del efecto de lente gravitacional asociado a una distribución de masa con simetría esférica." Trabajo de grado, Universidad de Nariño, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, Dec. 2015. Para optar al título de Físico.

[128] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. New York: Elsevier / Academic Press, 7 ed., 2007.

[129] R. Hurtado, L. Castaneda, and J. M. Tejeiro, "Gravitational Lensing by Spherical Lenses," *Int. J. Adv. Astron.*, vol. 4, no. 2, pp. 340–352, 2014.

[130] E. Santiago-Leandro, A. Mora-Chaverri, and F. Frutos-Alfaro, "Transparent Spheres as Gravitational Lens," *arXiv e-prints*, 5 2024.

[131] H. J. C. Berendsen, *A Student's Guide to Data and Error Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[132] J. Wambsganss, "Gravitational Lensing in Astronomy," *Living Reviews in Relativity*, vol. 1, p. 12, Dec. 1998.

[133] D. Paraficz and J. Hjorth, "The Hubble Constant Inferred from 18 Time-delay Lenses," *The Astrophysical Journal*, vol. 712, pp. 1378–1384, Apr. 2010.

[134] J. L. Tonry, "Redshifts of the gravitational lenses b1422+231 and pg1115+080," *Astron. J.*, vol. 115, p. 1, 1998.

[135] R. J. Weymann, D. Latham, J. R. P. Angel, R. F. Green, J. W. Liebert, D. A. Turnshek, D. E. Turnshek, and J. A. Tyson, "The triple QSO PG1115 + 08: another probable gravitational lens," *Nature*, vol. 285, pp. 641–643, June 1980.

[136] D. Sluse, D. Hutsemékers, F. Courbin, G. Meylan, and J. Wambsganss, "Microlensing of the broad line region in 17 lensed quasars," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 544, p. A62, Aug. 2012.

[137] N. Inada, M. Oguri, and et al., "Discovery of a Fifth Image of the Large Separation Gravitationally Lensed Quasar SDSS J1004+4112," *Publications of the Astronomical Society of Japan*, vol. 57, pp. L7–L10, June 2005.

[138] N. Inada *et al.*, "A Gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds," *Nature*, vol. 426, pp. 810–812, 2003.

[139] J. A. Muñoz, C. S. Kochanek, J. Fohlmeister, J. Wambsganss, E. Falco, and R. Forés-Toribio, "The longest delay: A 14.5 yr campaign to determine the third time delay in the lensing cluster sdss j1004+4112," *The Astrophysical Journal*, vol. 937, p. 34, Sept. 2022.

[140] D. Dultzin, "Cuasares y núcleos activos de galaxias," *Ciencias*, pp. 54–61, 2009. Número 95.

[141] J. Kristian, E. J. Groth, and et al., "Imaging of the Gravitational Lens System PG 1115+080 With the Hubble Space Telescope," *Astronomical Journal*, vol. 106, p. 1330, Oct. 1993.

[142] T. Treu and L. V. E. Koopmans, "The internal structure of the lens pg1115+080: breaking degeneracies in the value of the hubble constant," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 337, p. L6, 2002.

[143] C. R. Keeton and C. S. Kochanek, "Determining the Hubble constant from the gravitational lens PG-1115+080," *Astrophys. J.*, vol. 487, p. 42, 1997.

[144] P. Awad, J. H. H. Chan, M. Millon, F. Courbin, and E. Paic, "Probing compact dark matter objects with microlensing in gravitationally lensed quasars," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 673, p. A88, May 2023.

[145] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, and et al., "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.

[146] L. Wisotzki, P. L. Schechter, H. V. Bradt, J. Heinmüller, and D. Reimers, "He 0435-1223: A wide separation quadruple qso and gravitational lens," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 395, pp. 17–23, November 2002.

[147] N. D. Morgan, C. S. Kochanek, O. Pevunova, and P. L. Schechter, "The lens redshift and galaxy environment for he 04351223*," *The Astronomical Journal*, vol. 129, p. 2531, jun 2005.

[148] K. C. Wong, C. R. Keeton, K. A. Williams, I. G. Momcheva, and A. I. Zabludoff, "The Effect of Environment on Shear in Strong Gravitational Lenses," *The Astrophysical Journal*, vol. 726, p. 84, Jan. 2011.

[149] R. Forés-Toribio, J. A. Muñoz, C. S. Kochanek, and E. Mediavilla, "A mass model for the lensing cluster sdss j1004+4112: Constraints from the third time delay," *The Astrophysical Journal*, vol. 937, p. 35, sep 2022.

[150] K. Sharon, E. O. Ofek, G. P. Smith, T. Broadhurst, D. Maoz, C. S. Kochanek, M. Oguri, Y. Suto, N. Inada, and E. E. Falco, "Discovery of Multiply Imaged Galaxies behind the Cluster and Lensed Quasar SDSS J1004+4112," *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 629, pp. L73–L76, Aug. 2005.

[151] J. Liesenborgs, S. De Rijcke, H. Dejonghe, and P. Bekaert, "Non-parametric strong lens inversion of sdss j1004+4112," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 397, pp. 341–349, 07 2009.

[152] I. Jorgensen and K. Chiboucas, "Stellar populations and evolution of early-type cluster galaxies: Constraints from optical imaging and spectroscopy of z=0.5-0.9 galaxy clusters," *Astronomical Journal*, vol. 145, p. 77, 2013.

[153] M. Oguri, "The Mass Distribution of SDSS J1004+4112 Revisited," *Publications of the Astronomical Society of Japan*, vol. 62, p. 1017, Aug. 2010.

[154] R. Kormann, P. Schneider, and M. Bartelmann, "Isothermal elliptical gravitational lens models," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 284, pp. 285–299, 03 1994.

[155] T. Wiklind and F. Combes, "The redshift of the gravitational lens of PKS1830-211 determined from molecular absorption lines," *Nature*, vol. 379, pp. 139–141, Jan. 1996.

[156] C. R. Harris and et al., "Array programming with numpy," *Nature*, vol. 585, no. 7825, pp. 357–362, 2020.

[157] J. Guy, P. Astier, S. Nobili, N. Regnault, and R. Pain, "SALT: A Spectral adaptive Light curve Template for Type Ia supernovae," *Astron. Astrophys.*, vol. 443, pp. 781–791, 2005.

[158] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.

[159] D. A. McQuarrie, *Statistical Mechanics*. New York, Evanston, San Francisco, London: Harper and Row, 1996. Originally published under the title *Statistical Thermodynamics*, copyright © 1973 by Donald A. McQuarrie.

[160] S. G. Ryan and A. J. Norton, *Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.