

Determinación de la constante de Hubble mediante el análisis de la diferencia del tiempo de atraso entre las imágenes de un sistema lente gravitacional

Maderli Selena Toro Garcia

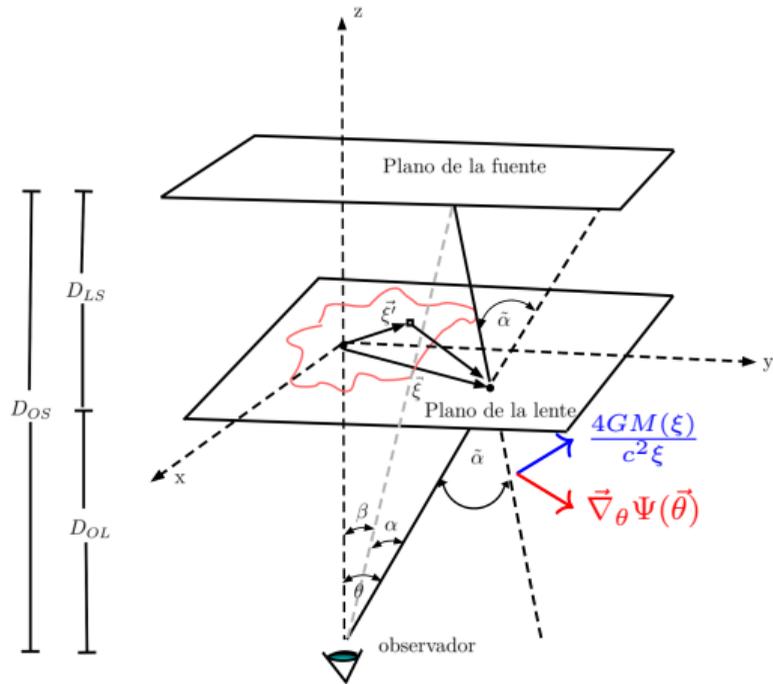
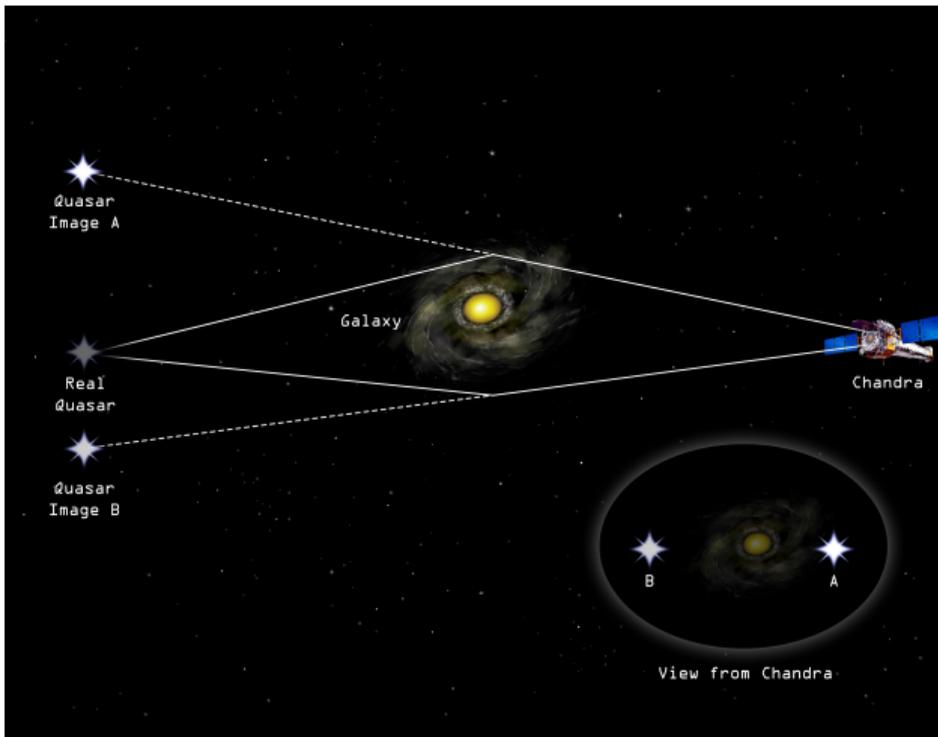
Director: Dr. Edwin Alexander Delgado Insuasty

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

13/08/2025



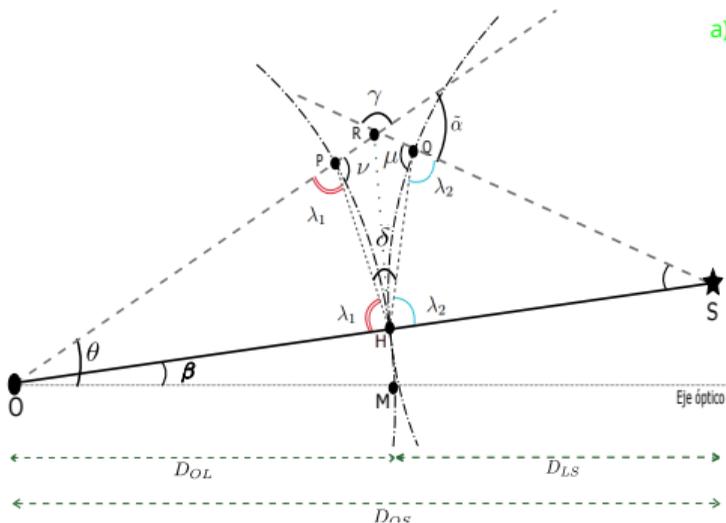
Sistema lente gravitacional



Tiempo de atraso total

Incremento en el tiempo de viaje de un rayo de luz debido a la presencia de un campo gravitacional en comparación al tiempo empleado en ausencia de dicho campo.

$$\delta t = \frac{D_{OS}D_{OL}(1+z_L)}{cD_{LS}} \left(\underbrace{\frac{(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2}{2}}_{\text{a) Geométrico}} - \underbrace{\Psi}_{\text{b) Gravitacional}} \right)$$



- a) La luz al desviarse por la presencia de M , recorre un camino más largo en comparación con el que seguiría en ausencia de la lente.
- b) La luz de S tarda más en llegar a un observador cuando pasa cerca de un campo gravitacional.

¿Se puede medir el tiempo de atraso total?

Observacionalmente no se puede medir el tiempo de atraso de cada imagen, sino solo la diferencia de tiempo de atraso entre dos imágenes de la misma fuente.

- La diferencia del tiempo de atraso depende del modelo de la lente (como lente puntual, SIS o NSIS).
- **Caso:** Sistemas con múltiples imágenes distribuidas simétricamente (o aproximadamente) $\rightarrow (\vec{\beta} = \vec{0})$ (lentes gravitacionales fuertes).

- **Lente puntual**

$$\Delta t_{12} = (1+z_L) \underbrace{\frac{D_{OS}D_{OL}}{cD_{LS}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{a) Distancias angulares}}} \left\{ \frac{1}{2} (|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2) - \frac{4GM(D_{LS})}{c^2(D_{OS})(D_{OL})} \left[\ln |\vec{\theta}_1| - \ln |\vec{\theta}_2| \right] \right\}.$$

Masa de la lente 

Velocidad de dispersión



• SIS

$$\Delta t_{12} = (1 + z_L) \frac{D_{OS} D_{OL}}{c D_{LS}} \left[\frac{1}{2} (|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2) - \frac{4\pi G \sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} (|\vec{\theta}_1| - |\vec{\theta}_2|) \right].$$

• NSIS

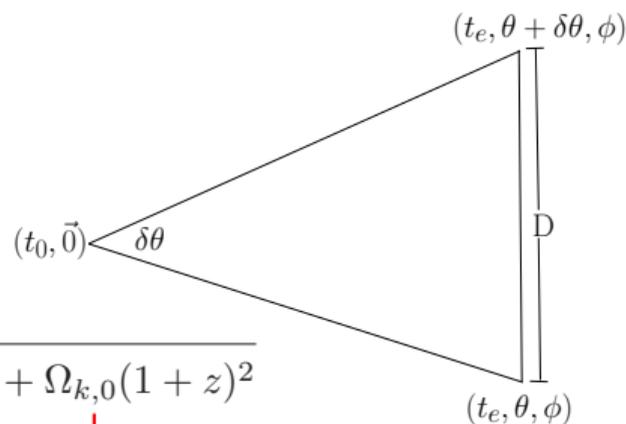
$$\Delta t_{12} = (1 + z_L) \frac{D_{OS} D_{OL}}{c D_{LS}} \left\{ \frac{1}{2} (|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2) - \frac{4\pi \sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \left[\sqrt{|\vec{\theta}_1|^2 + \theta_c^2} \longrightarrow \text{Radio angular del núcleo} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{|\vec{\theta}_2|^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln \left(\sqrt{|\vec{\theta}_1|^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right) + \theta_c \ln \left(\sqrt{|\vec{\theta}_2|^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right) \right] \right\}.$$

$$\rightarrow \Delta t_{12} \propto \frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \propto \frac{1}{H_0}$$

Distancias cosmológicas

- **Distancia de diámetro angular**

$$D_A = \frac{D}{\delta\theta} = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')}$$



$$H(z) = H_0 \sqrt{\underbrace{\Omega_{m,0}(1+z)^3}_{\downarrow 0.3} + \underbrace{\Omega_{r,0}(1+z)^4}_{\downarrow 0} + \underbrace{\Omega_{\Lambda,0}}_{\downarrow 0.7} + \underbrace{\Omega_{k,0}(1+z)^2}_{\downarrow 0}}$$

- **Distancia de luminosidad:** Basada en cómo el brillo aparente de la fuente se **atenúa** debido a la expansión del universo.

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')} = (1+z) \int_t^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')}$$

Determinación de H_0 a partir de supernovas de tipo Ia.

- Cosmografía: describe la **expansión del universo** sin asumir modelo cosmológico (Λ CDM).
- Relación entre $D_L(z)$ para $z < 1 \rightarrow$ Ajuste con datos observacionales de SN Ia.

$$1. a(t) = a(t_0) \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3(t-t_0)^3 + \mathcal{O}((t-t_0)^4) \right]$$


 $(\ddot{a}/a)_{t=t_0}$


 $-(\ddot{a}a/\dot{a}^2)_{t=t_0}$


 $\left(\frac{\ddot{a}/a}{(\dot{a}/a)^3} \right)_{t=t_0}$

$$2. \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \frac{c}{a(t_0)} \left[(t_0 - t) + \frac{1}{2}H_0(t-t_0)^2 - H_0^2(t-t_0)^3 \left(\frac{1}{6}q_0 + \frac{1}{3} \right) + \mathcal{O}((t-t_0)^4) \right]$$

$$3. \frac{1}{1+z} = a(t) \downarrow$$

$$1 - z + z^2 - z^3 + \mathcal{O}(z^4) = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3(t - t_0)^3 + \mathcal{O}((t - t_0)^4).$$

4. - **Aproximación de primer orden:**

$$z \approx -H_0(t - t_0) \Rightarrow (t - t_0) \approx -\frac{z}{H_0}.$$

- **Aproximación de segundo orden:**

$$(t - t_0) \approx \frac{1}{H_0} \left[-z + \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 \right].$$

- **Aproximación de tercer orden:**

$$(t - t_0) \approx -\frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \left(1 + q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{j_0}{6} \right) z^3 \right].$$

5. Expandingo hasta tercer orden en z

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = c H_0^{-1} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} q_0 + \frac{1}{2} q_0^2 - \frac{j_0}{6} \right) z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right].$$

6.

$$D_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z - \frac{1}{6} (1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right).$$

¿Cómo se mide D_L ?

$D_L(z)$ se mide mediante el **flujo luminoso** recibido de la fuente, el cual se relaciona con la **magnitud aparente** m .

- Comparación del brillo aparente de una estrella con su brillo real (**modulo de distancia**)

$$\mu = m - M = 25 + 5 \log(D_L(\text{Mpc}))$$

- Siguiendo la metodología presentada en [Wang and Cheng, 2012] para construir la curva teórica del módulo de distancia para $z < 1$:

$$\mu = 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10}(cz) + 5 \log_{10} \left[1 + \frac{1-q_0}{2} z - \frac{1-q_0-3q_0^2+j_0}{6} z^2 \right].$$

- Permite ajustar los parámetros H_0, q_0, j_0 .

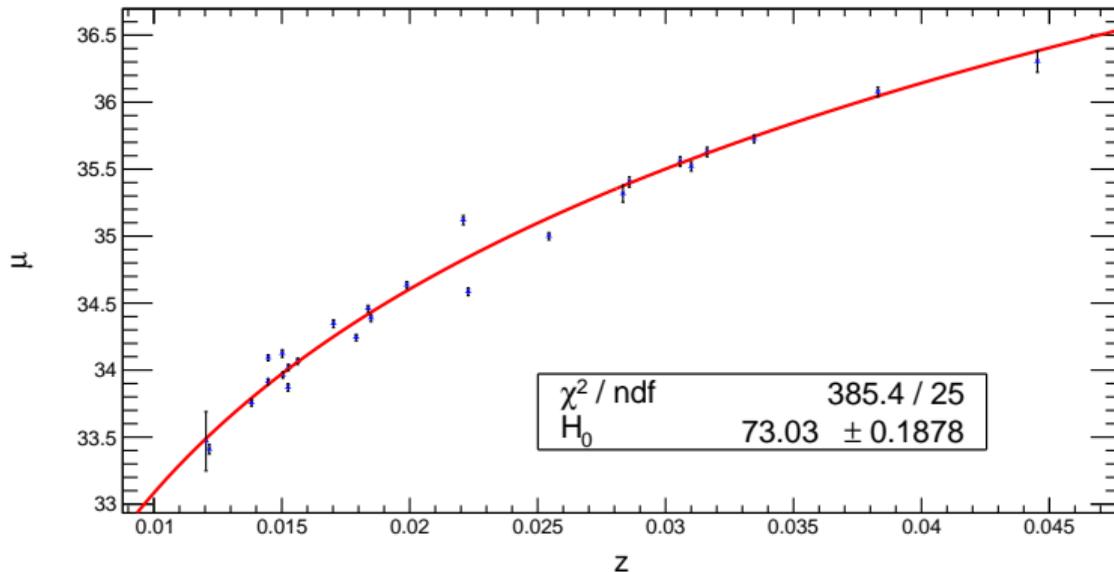


Figura 2: Ajuste de μ en función de z para un conjunto de **26 supernovas de tipo Ia** observadas en el infrarrojo cercano en [Dhawan et al., 2018]. Se empleó el modelo Λ CDM en régimen de bajo corrimiento al rojo ($z \lesssim 0.046$), fijando los parámetros $q_0 = -0.55$, $j_0 = 1$ y $M_J = -18.524 \pm 0.021$ de acuerdo a [Dhawan et al., 2018]. La curva roja corresponde al ajuste teórico donde se obtuvo $H_0 = (73.0 \pm 0.2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

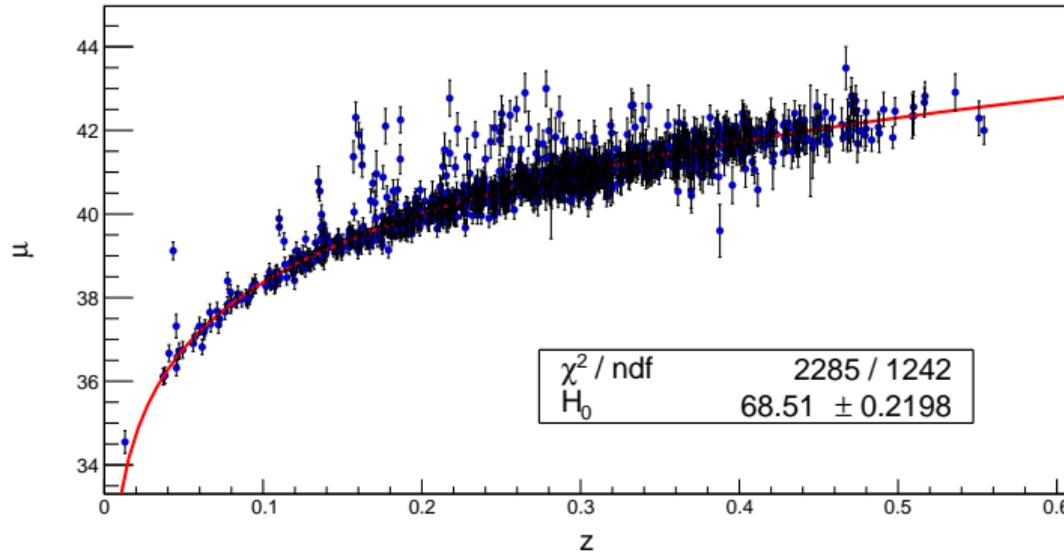


Figura 3: Ajuste del módulo de distancia μ en función del corrimiento al rojo z . El ajuste se aplicó a un conjunto de 1244 supernovas de tipo Ia confirmadas mediante espectroscopía y fotometría seleccionadas del catálogo publicado por el **SDSS-II SN Survey** en [Sako et al., 2018] (Tabla 11), en el rango $z < 0.6$, fijando los parámetros $q_0 = -0.55$, $j_0 = 1$ y $M_I = -18.524 \pm 0.021$ de [Dhawan et al., 2018], encontrando un valor de $H_0 = (68.5 \pm 0.2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Determinación de la constante de Hubble a partir de Δt_{12}

- Se aprovecha $\Delta t_{12} \propto \frac{1}{H_0}$ para estimar H_0 para cada sistema lente gravitacional.

seleccionados a partir de casos documentados en la literatura.
- Se utilizó **uno o más** de los modelos de lente estudiados → se eligió aquel que se consideró más adecuado

más usado en la literatura

mejor aproxima las características de la lente a modelar

Sistema	z_l	z_s	Imagen	$\theta_x (")$	$\theta_y (")$	Δt (días)
PG 1115+080 [Impey et al., 1998, Morgan et al., 2008, Tonry, 1998] [Bonvin et al., 2018, Weymann et al., 1980]	0.311	1.722	A_1	-0.947	-0.690	$\Delta t_{AB} = 10.4 \pm 2.3$
			A_2	-1.096	-0.232	$\Delta t_{AC} = 13.1 \pm 1.8$
			B	0.722	-0.617	$\Delta t_{BC} = 23.5 \pm 2.6$
			C	0.381	1.344	
HE0435-1223 [Sluse et al., 2012, Kochanek et al., 2006] [Bonvin et al., 2017]	0.454	1.693	A	-1.165	0.573	$\Delta t_{AB} = 8.8 \pm 0.8$
			B	0.311	1.126	$\Delta t_{AD} = 13.8 \pm 0.9$
			C	1.302	-0.030	$\Delta t_{CD} = 12.7 \pm 0.9$
			D	-0.226	-1.041	
SDSS J1004+4112 [Inada et al., 2005, Inada et al., 2003] [Muñoz et al., 2022]	0.680	1.734	A	-7.114	-4.409	$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$
			B	-8.431	-0.877	$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$
			C	3.925	-8.901	$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$
			D	1.285	5.298	
			E	0.083	0.194	
PKS 1830-211 [Lidman et al., 1999, Muller et al., 2023] [Muller et al., 2020]	0.885	2.507	A	-0.489	0.444	
			B	0.153	-0.284	$\Delta t_{AB} = 25 \pm 3$
			C	0.011	-0.016	

Tabla 1: Datos observacionales utilizados para modelar los diferentes sistemas de lente gravitacional (seleccionados de [Paraficz and Hjorth, 2010]).

Sistema PG 1115+080

- Recibe su nombre de la fuente, **un cuásar** (QSO), cuya luz es desviada por una **galaxia elíptica** que actúa como lente gravitacional [Weymann et al., 1980, Treu and Koopmans, 2002].
- En el presente trabajo, se optó por modelar la lente del sistema PG 1115+080 como una **lente puntual** de $M = 1.5 \times 10^{10} M_{\odot}$.

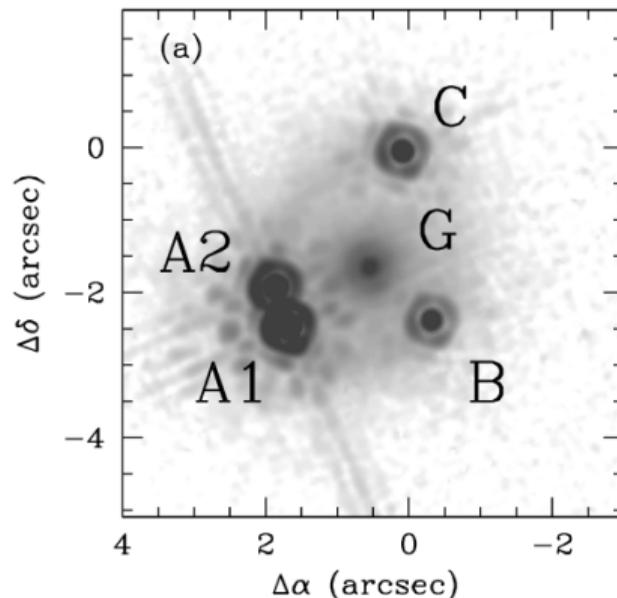


Figura 4: Sistema lente gravitacional PG 1115+080, capturada por HST. En ella se muestran las cuatro imágenes del cuásar (A_1, A_2, B y C) y la galaxia lente (G). La imagen corresponde a un recorte de la subfigura (a) de la Figura 1 de [Impey et al., 1998].

* **Expresión para la constante de Hubble en el modelo de lente puntual:**

$$H_0 = \frac{(1 + z_L)(\tilde{D}_{OS})(\tilde{D}_{OL})}{2c(\tilde{D}_{LS})} \left\{ \frac{(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2)}{\Delta t_{12} + (4GM)(1 + z_L)(\ln |\vec{\theta}_1| - \ln |\vec{\theta}_2|)/c^3} \right\},$$

donde,

$$\tilde{D}_{OL} = \frac{c}{(1 + z_L)} \int_0^{z_L} \frac{1}{E(z)} dz,$$

$$\tilde{D}_{OS} = \frac{c}{(1 + z_S)} \int_0^{z_S} \frac{1}{E(z)} dz,$$

$$\tilde{D}_{LS} = \frac{c}{(1 + z_S)} \int_{z_L}^{z_S} \frac{1}{E(z)} dz.$$

- Estas integrales **fueron resueltas numéricamente** utilizando la librería SciPy de Python [Virtanen et al., 2020], haciendo uso de los corrimientos al rojo indicados en la Tabla 1.

- Variación de $M \rightarrow H_0$ varia $\sim 3\%$
- H_0 difiere $\sim 2\sigma$ respecto a H0LiCOW, $73.3_{-1.8}^{+1.7}$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$ [Wong et al., 2020]

Δt_{12} (días)	H_0 (km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$) para diferentes $M(10^{10} M_{\odot})$.				
	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$\Delta t_{AC} = 13.1 \pm 1.8$	69	69	68	68	67
$\Delta t_{AB} = 10.4 \pm 2.3$	70	69	68	67	67
$\Delta t_{BC} = 23.5 \pm 2.6$	69	69	68	68	67
	69 ± 2	69 ± 2	68 ± 2	68 ± 2	67 ± 2

Tabla 2: Estimación de H_0 a partir del sistema PG 1115+080, modelado como una masa puntual de $M = 1.5 \times 10^{10} M_{\odot}$. Para evaluar la sensibilidad del resultado al parámetro de masa, el cálculo se repite con variaciones de hasta el $\pm 40\%$ del valor de la masa. Cada celda indica el valor de H_0 inferido para cada par de imágenes y el valor de masa indicado en la columna a la cual pertenece. En la última fila se presenta el promedio de estos valores; es fácil ver que el valor estimado para este modelo es $H_0 = (68 \pm 2)$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$.

Sistema HE 0435-1223

- En este sistema la luz del **cuásar fuente** es desviada por una **galaxia elíptica**, produciendo cuatro imágenes simétricas del cuásar alrededor de la lente.
- La fuente forma parte de un **grupo cercano de galaxias**.
- En este estudio, se modeló la lente de este sistema como una **lente puntual** de $M = 1 \times 10^{11} M_{\odot}$ [Bonvin et al., 2017].

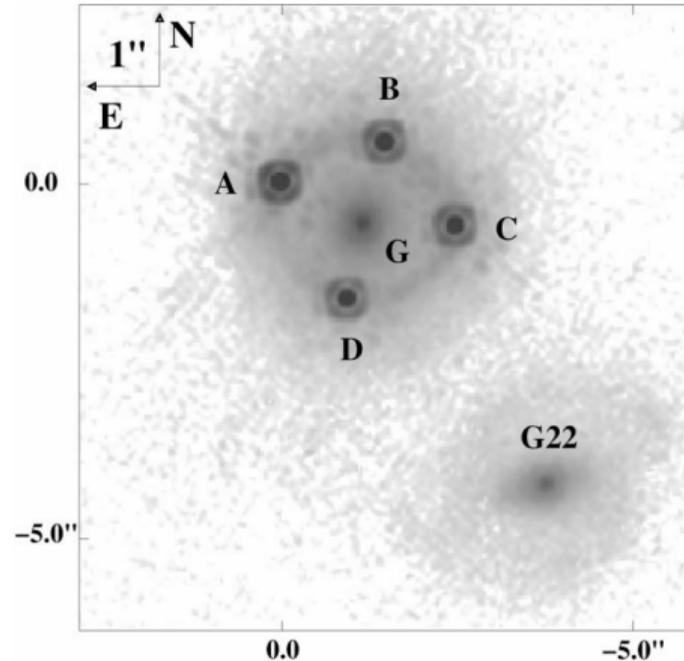


Figura 5: Sistema lente gravitacional HE 0435—1223 observado por HST. Se distinguen claramente las cuatro imágenes del cuásar dispuestas de manera simétrica alrededor de la galaxia lente elíptica ubicada en el centro. Esta imagen corresponde al panel superior de la Figura 1 de [Kochanek et al., 2006].

- Variación de $M \rightarrow H_0$ varia $\sim 26\%$.
- Dependencia $>$ en PG 1115+080.
- Consistente con H0LiCOW ($\sim 0.3\sigma$).

Δt_{12} (días)	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$) para diferentes $M(10^{11} M_{\odot})$.				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\Delta t_{AB} = 8.8 \pm 0.8$	80	75	73	67	63
$\Delta t_{AD} = 13.8 \pm 0.9$	84	78	70	69	65
$\Delta t_{CD} = 12.7 \pm 0.9$	91	84	78	73	69
	85 ± 2	79 ± 2	74 ± 2	70 ± 2	66 ± 2

Tabla 3: Estimación de H_0 a partir del sistema lente gravitacional HE 0435–1223, modelando la lente como una masa puntual con valor de referencia $M = 1 \times 10^{11} M_{\odot}$ [Bonvin et al., 2017]. Se considera una variación de esta masa de $\pm 40\%$ respecto a dicho valor para analizar su impacto en la estimación de H_0 . Para cada valor de masa y cada retardo temporal observado, se calculó H_0 , y se reportó el valor promedio en la última fila; el valor estimado es $H_0 = (74 \pm 2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Sistema SDSS J1004+4112

- En este sistema un **cúmulo de galaxias** que distorsiona la luz de un **cuásar** ubicado tras él.
- En este trabajo, la lente fue **modelada de cuatro formas distintas** con el objetivo de analizar **cómo varía H_0** al modificar el modelo adoptado.

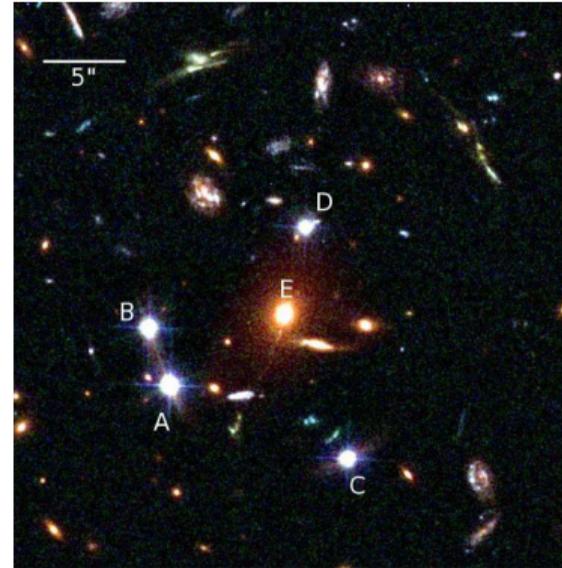


Figura 6: Sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112 capturado con HST/ACS, donde se observan cinco imágenes del cuásar (etiquetadas como A-E). La galaxia más brillante del cúmulo, identificada como G1, está superpuesta sobre la imagen E. Esta imagen corresponde al panel izquierdo de la Figura 1 de [Oguri, 2010].

* **Lente puntual**

- Variación de $M \rightarrow H_0$ cambia en $\sim 8\%$.
- $\sim 23\sigma$ respecto a H0LiCOW.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$) para diferentes $M(10^{12.2} M_\odot)$.				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	194	190	186	182	179
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	115	113	111	108	107
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	117	115	113	111	109
	142 ± 2	139 ± 2	136 ± 2	134 ± 2	131 ± 2

Tabla 4: Estimaciones de la constante de Hubble H_0 obtenidas a partir del sistema de lente gravitacional SDSS J1004+4112, considerando un modelo de lente puntual con masa $M = 1 \times 10^{12.2} M_\odot$ [Perera et al., 2024]. Se explora el efecto de la variación de masa, hasta un 40% del valor de referencia, en la estimación de H_0 . Para cada combinación de masa y retardo temporal observado, se determina un valor de H_0 cuyo promedio se muestra en la última fila. El valor estimado para este sistema es $H_0 = (136 \pm 2) \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

* Expresión para la constante de Hubble en el modelo de la Esfera isoterma singular

$$H_0 = \frac{(1 + z_L)}{\Delta t_{12} c} \left[\frac{\tilde{D}_{OS} \tilde{D}_{OL}}{2 \tilde{D}_{LS}} \left(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2 \right) - \frac{4\pi\sigma^2 \tilde{D}_{OL}}{c^2} \left(|\vec{\theta}_1| - |\vec{\theta}_2| \right) \right].$$

Δt_{12} (días)	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	167	164	161
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	93	91	89
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	95	93	91
Promedio	119 ± 2	116 ± 2	114 ± 2

Tabla 5: Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelando su lente con un perfil SIS. La velocidad de dispersión de la galaxia lente se toma como $\sigma = (352 \pm 13)$ km s⁻¹ [Inada et al., 2008]; se evalúan los valores extremos del rango de error ($\sigma = 339$ km s⁻¹ y 365 km s⁻¹) junto con el valor central. Para cada σ y cada retardo temporal observado entre imágenes, se calcula H_0 . El valor estimado es $H_0 = (116 \pm 2)$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

- Variación de σ dentro de su incertidumbre experimental, H_0 cambia $\sim 4.3\%$.
- H_0 difiere en $\sim 16\sigma$ respecto a H0LiCOW.
- Diferencia $<$ al obtenido con modelo de masa puntual.

✳ Expresión para la constante de Hubble en el modelo de la Esfera isoterma no singular

$$H_0 = (1 + z_L) \frac{\tilde{D}_{OS} \tilde{D}_{OL}}{c \tilde{D}_{LS} \Delta t_{12}} \left\{ \frac{1}{2} \left(|\vec{\theta}_1|^2 - |\vec{\theta}_2|^2 \right) - \frac{4\pi\sigma^2 \tilde{D}_{LS}}{c^2 \tilde{D}_{OS}} \cdot \left[\sqrt{|\vec{\theta}_1|^2 + \theta_c^2} - \sqrt{|\vec{\theta}_2|^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln \left(\sqrt{|\vec{\theta}_1|^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right) + \theta_c \ln \left(\sqrt{|\vec{\theta}_2|^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right) \right] \right\}.$$

- Variación de $\sigma \rightarrow$ variación de H_0 de $\sim 4\%$.
- H_0 difiere en $\sim 16\sigma$ respecto a H0LiCOW, similar al modelo SIS.

Δt_{12} (días)	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\theta_c = 0.1''$			
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	168	165	162
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	94	92	89
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	96	94	91
	119 ± 2	117 ± 2	114 ± 2

Tabla 6: Estimaciones de H_0 para el sistema lente gravitacional SDSS J1004+4112, modelado con un perfil NSIS con núcleo $\theta_c = 0.1''$ [Inada et al., 2008]. Se muestran los valores obtenidos a partir de los tiempos de retardo medidos entre las imágenes, considerando tres velocidades de dispersión de la lente: el valor central $\sigma = 352 \text{ km s}^{-1}$ y los extremos del rango de incertidumbre $\sigma = 339 \text{ km s}^{-1}$ y 365 km s^{-1} [Inada et al., 2008]. La última fila presenta el promedio de H_0 para cada caso; el valor estimado es $H_0 = (117 \pm 2) \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

- Influencia del núcleo en H_0 : un núcleo del 3 % de θ_{trunc} varía $H_0 < 2$ %. Incluso con un núcleo extremo (50 %), la diferencia es < 6 %. \Rightarrow Influencia moderada de θ_c .

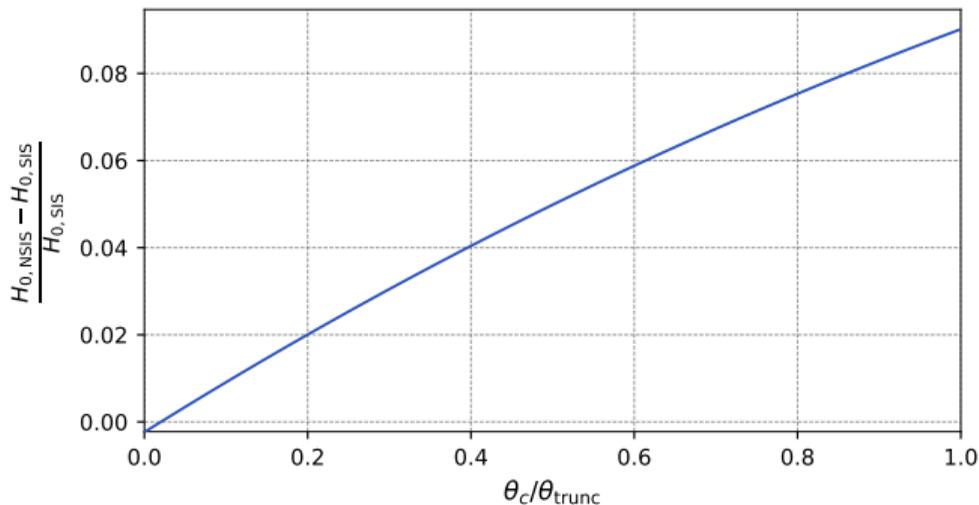


Figura 7: Diferencia relativa en las estimaciones de H_0 entre los modelos NSIS y SIS para la lente G1 en el sistema SDSS J1004+4112, considerando una velocidad de dispersión fija de $\sigma = 352$ km/s. Se analiza la variación del parámetro de núcleo θ_c desde 0 hasta $\theta_{\text{trunc}} = 3.2''$, observándose convergencia entre ambos modelos en el límite $\theta_c \rightarrow 0$ y diferencias crecientes para valores más grandes del núcleo ($\theta_c / \theta_{\text{trunc}} > 0.2$). En este sistema, el valor observado del núcleo es $\theta_c = 0.1''$.

- Con fines comparativos se obtiene una expresión para H_0 a partir del modelo de elipsoide isoterma singular (SIE) [Kormann et al., 1994] → [Oguri, 2010] (realista).

$$H_0 = \frac{(1+z_l) D_{OS} D_{OL}}{c D_{LS} \Delta t_{12}} \left[\frac{1}{2} (\theta_1^2 - \theta_2^2) - \frac{\sqrt{q}}{q'} \theta_1' \theta_E \left(|\sin \varphi_1| \cos^{-1}(\Delta_1) \right. \right. \\ \left. \left. + |\cos \varphi_1| \cosh^{-1} \left(\frac{\Delta_1}{q} \right) \right) + \frac{\sqrt{q}}{q'} \theta_2' \theta_E \left(|\sin \varphi_2| \cos^{-1}(\Delta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + |\cos \varphi_2| \cosh^{-1} \left(\frac{\Delta_2}{q} \right) \right) \right],$$

donde se define:

$$\theta' = \sqrt{\theta_x^2 + q^2 \theta_y^2},$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{q \theta_y}{\theta_x} \right),$$

$$\Delta = \sqrt{\cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi}$$

$$q' = \sqrt{1 - q^2}$$

q : razón entre el eje menor y mayor de la elipse proyectada en el plano de la lente. Relacionada con la elipticidad ϵ de la galaxia mediante $q = 1 - \epsilon$.

Δt_{12} (días)	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)		
	339 km/s	352 km/s	365 km/s
$\epsilon = 0.25$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	82	79	76
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	73	95	118
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	78	75	71
	78 ± 2	83 ± 2	88 ± 2
$\epsilon = 0.30$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	80	77	73
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	112	136	162
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	75	71	67
	89 ± 2	95 ± 2	101 ± 2
$\epsilon = 0.35$			
$\Delta t_{DA} = 1633.23 \pm 0.97$	78	74	71
$\Delta t_{AB} = 43.01 \pm 0.27$	147	175	203
$\Delta t_{DB} = 1676.26 \pm 0.97$	72	68	64
	99 ± 2	106 ± 2	112 ± 2

Tabla 7: Estimaciones H_0 para el sistema SDSS J1206+4332 modelando la lente como SIE. La velocidad de dispersión se varía a lo largo de las filas mientras que la elipticidad ϵ se varía a lo largo de las columnas 0.3 ± 0.05 [Oguri, 2010]. El valor estimado es $H_0 = (95 \pm 2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

- Sensibilidad de H_0 en el modelo SIE: Variación de $H_0 \sim 24\%$ con variaciones de ϵ , y $\sim 12\%$ con variaciones de $\sigma = 352 \text{ km/s}$. $\Rightarrow H_0$ es más sensible a ϵ .
- El valor de H_0 difiere en $\sim 8\sigma$ respecto a H0LiCOW.
- **Diferencias < con respecto a H0LiCOW** que las obtenidas al modelar la lente como una **masa puntual, SIS o NSIS**.
- **Dependencia** del modelo de la lente en la determinación de H_0

Sistema PKS 1830-211

- En este sistema, la **fente es un cuásar**. La lente es una **galaxia espiral** [Wiklind and Combes, 1996, Winn et al., 2002].
- En el presente trabajo se modeló la lente como una **masa puntual** y como una **esfera isoterma con y sin núcleo**.

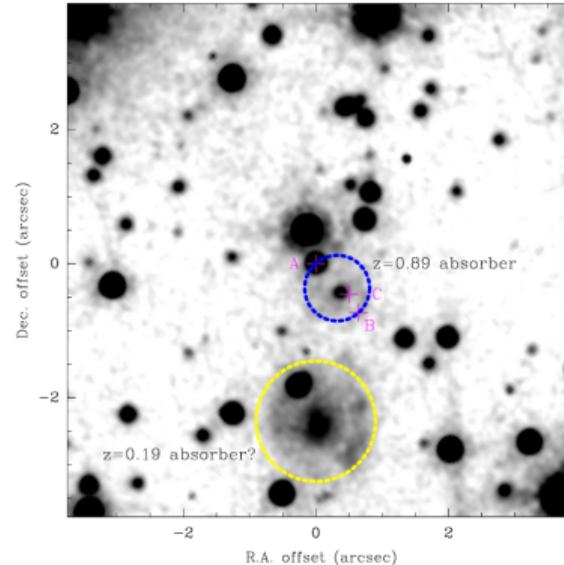


Figura 8: Imagen del entorno del cuásar PKS 1830–211 obtenida por HST. Las imágenes múltiples del cuásar, marcadas con cruces magenta y etiquetadas como A, B y C, corresponden a distintas trayectorias de luz deflectadas por una lente gravitacional. La imagen corresponde a la Figura A.1 de [Muller et al., 2020].

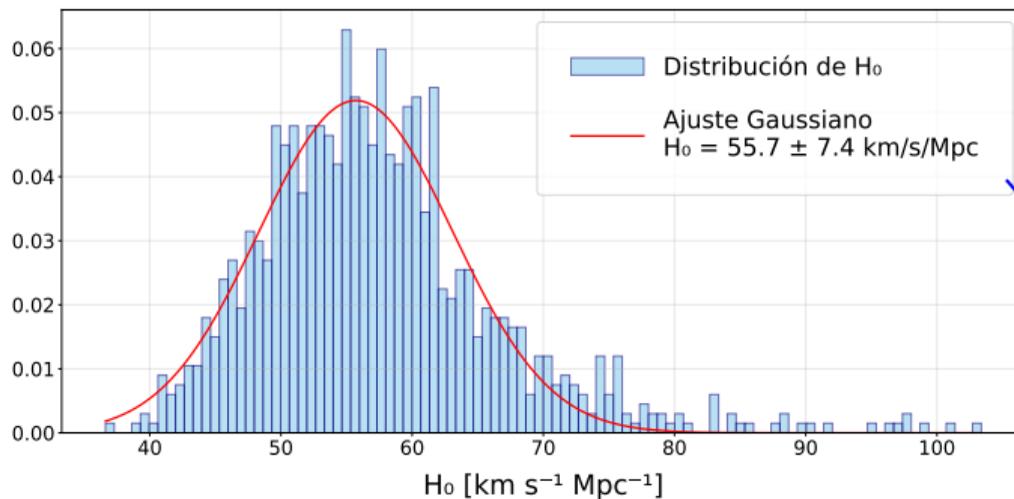
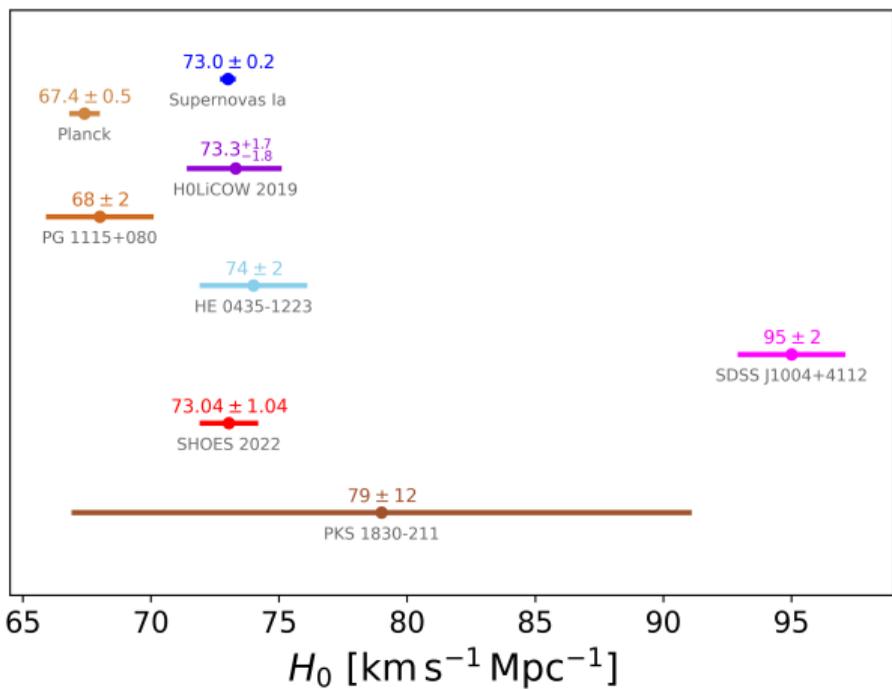


Figura 9: Histograma de densidad de probabilidad de **1000** valores simulados de H_0 , obtenidos mediante el método de Monte Carlo para el sistema PKS 1830–211 modelando la lente como una **masa puntual**. Entradas: tiempo de atraso observado $\Delta t_{AB} = (25 \pm 3)$ días [Muller et al., 2023] y un rango de masa para la lente de $(2-5) \times 10^{10} M_\odot$ [Lidman et al., 1999] (media $3.5 \times 10^{10} M_\odot$ y dispersión $1.5 \times 10^{10} M_\odot$). El eje horizontal representa H_0 en km s⁻¹ Mpc⁻¹, y el eje vertical muestra la densidad de probabilidad normalizada. La curva roja muestra un ajuste gaussiano a los datos simulados. Se estimó $H_0 = (56 \pm 7)$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

Contraste general

- L.G con HOLiCOW:
 - PG 1115+080: $\sim 2\sigma$ (elíptica parte de un grupo \rightarrow masa puntual)
 - HE 0435-1223: $\sim 0.3\sigma$
 - PKS 1830-211: $\sim 0.5\sigma$ (espiral \rightarrow SIS)
 - SDSS J1004+4112: $\sim 8\sigma$ (Cúmulo galáctico \rightarrow SIE)
- El ajuste con supernovas de tipo Ia es consistente con
 - SHOES (~ 0.04) [Riess et al., 2022].
 - HOLiCOW ($\sim 0.2\sigma$), HE 0435-1223 ($\sim 0.5\sigma$) y PKS 1830-211 ($\sim 0.5\sigma$).

\nearrow tensión HE 0435-1223 y SDSS J1004+4112: $\sim 3.2\sigma$ y $\sim 13\sigma$



Conclusiones

- * Se observó sensibilidad de H_0 al modificar parámetros clave del modelo:
 - Masa de la lente, velocidad de dispersión, elipticidad, radio del núcleo.
- * La estimación de H_0 es altamente sensible a:
 - La calidad de las mediciones observacionales.
 - La elección del modelo de distribución de masa.
- * Dos valores coinciden con H0LiCOW dentro de 1σ (compatibles SH0ES, supernovas de tipo Ia), otros difieren hasta 8σ , atribuibles a modelos simplificados.
- * Las coincidencias con Planck no implican ausencia de tensión de Hubble, sino limitaciones en el modelado.
- * El ajuste con supernovas tipo Ia valida la función utilizada en el régimen $z \ll 1$, con buenos resultados hasta $z < 1$.

➔ Las lentes gravitacionales son una herramienta poderosa para estimar H_0 , pero su efectividad depende del uso de modelos realistas y métodos estadísticos robustos.

Referencias I

-  **Bonvin, V. et al. (2017).**
H0LiCOW – V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435—1223: H_0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat Λ CDM model.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 465(4):4914–4930.

-  **Bonvin, V. et al. (2018).**
COSMOGRAIL XVII: Time Delays for the Quadruply Imaged Quasar PG 1115+080.
Astron. Astrophys., 616:A183.

-  **Dhawan, S., Jha, S. W., and Leibundgut, B. (2018).**
Measuring the Hubble constant with Type Ia supernovae as near-infrared standard candles.
Astron. Astrophys., 609:A72.

-  **H0LiCOW Collaboration (2025).**
H0LiCOW: H0 Lenses in COSMOGRAIL’s Wellspring.
<https://shsuyu.github.io/H0LiCOW/site/>.
Accessed: 2025-06-26.

-  **Impey, C. D., Falco, E. E., Kochanek, C. S., Lehar, J., McLeod, B. A., Rix, H. W., Peng, C. Y., and Keeton, C. R. (1998).**
An Infrared Einstein ring in the gravitational lens PG 1115+080.
Astrophys. J., 509:551.

Referencias II



Inada, N. et al. (2003).

A Gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds.

Nature, 426:810–812.



Inada, N., Oguri, M., and et al. (2005).

Discovery of a Fifth Image of the Large Separation Gravitationally Lensed Quasar SDSS J1004+4112.

Publications of the Astronomical Society of Japan, 57:L7–L10.



Inada, N., Oguri, M., Falco, E. E., Broadhurst, T. J., Ofek, E. O., Kochanek, C. S., Sharon, K., and Smith, G. P. (2008).

Spectroscopic Confirmation of the Fifth Image of SDSS J1004+4112 and Implications for the $M_{BH} - \sigma_*$ Relation at $z = 0.68$.

Publ. Astron. Soc. Jap., 60:L27–L30.



Kochanek, C. S., Morgan, N. D., Falco, E. E., McLeod, B. A., Winn, J. N., Dembicky, J., and Ketzeback, B. (2006).

The Time Delays of Gravitational Lens HE 0435-1223: An Early-Type Galaxy with a Rising Rotation Curve.

The Astrophysical Journal, 640(1):47–61.



Kormann, R., Schneider, P., and Bartelmann, M. (1994).

Isothermal elliptical gravitational lens models.

Astronomy and Astrophysics, 284:285–299.



Lidman, C., Courbin, F., Meylan, G., Broadhurst, T. J., Frye, B., and Welch, W. J. W. (1999).

The redshift of the gravitationally lensed radio source pks1830-211.

Astrophys. J. Lett., 514:L57.

Referencias III

-  Morgan, C. W., Kochanek, C. S., Dai, X., Morgan, N. D., and Falco, E. E. (2008). X-Ray and Optical Microlensing in the Lensed Quasar PG 1115+080. *Astrophys. J.*, 689:755.
-  Muller, S., Jaswanth, S., Horellou, C., and Marti-Vidal, I. (2020). All good things come in threes: the third image of the lensed quasar PKS 1830—211. *Astron. Astrophys.*, 641:L2.
-  Muller, S., Martí-Vidal, I., Combes, F., Gérin, M., Beelen, A., Horellou, C., Guélin, M., Aalto, S., Black, J. H., and van Kampen, E. (2023). Cosmo-tomography toward pks 1830-211: Variability of the quasar and of its foreground molecular absorption monitored with alma. *Astronomy and Astrophysics*, 674:A101.
-  Muñoz, J. A., Kochanek, C. S., Fohlmeister, J., Wambsganss, J., Falco, E., and Forés-Toribio, R. (2022). The longest delay: A 14.5 yr campaign to determine the third time delay in the lensing cluster sdss j1004+4112. *The Astrophysical Journal*, 937(1):34.
-  Nair, S., Narasimha, D., and Rao, A. P. (1993). PKS 1830-211 as a Gravitationally Lensed System. *The Astrophysical Journal*, 407:46.

Referencias IV



Oguri, M. (2010).
The mass distribution of sdss j1004+4112 revisited.
Publications of the Astronomical Society of Japan, 62(4):1017–1024.



Oguri, M. (2010).
The Mass Distribution of SDSS J1004+4112 Revisited.
Publications of the Astronomical Society of Japan, 62:1017.



Paraficz, D. and Hjorth, J. (2010).
The Hubble Constant Inferred from 18 Time-delay Lenses.
The Astrophysical Journal, 712(2):1378–1384.



Perera, D., Williams, L. L. R., Liesenborgs, J., Ghosh, A., and Saha, P. (2024).
Free-form and hybrid lens models for SDSS J1004+4112: substructure and central image time delay constraints.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 527(2):2639–2651.



Riess, A. G. et al. (2022).
A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ mpc}^{-1}$ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team.
The Astrophysical Journal Letters, 934(1):L7.

Referencias V

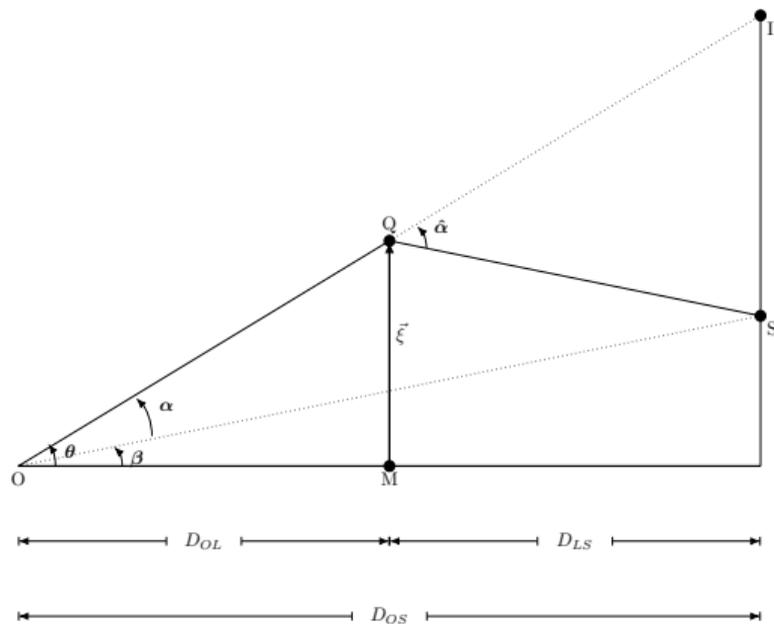
-  **Sako, M., Bassett, B., Becker, A. C., et al. (2018).**
The data release of the sloan digital sky survey-ii supernova survey.
Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 130(988):064002.
-  **Sluse, D., Hutsemékers, D., Courbin, F., Meylan, G., and Wambsganss, J. (2012).**
Microlensing of the broad line region in 17 lensed quasars.
Astronomy and Astrophysics, 544:A62.
-  **Tonry, J. L. (1998).**
Redshifts of the gravitational lenses b1422+231 and pg1115+080.
Astron. J., 115:1.
-  **Treu, T. and Koopmans, L. V. E. (2002).**
The internal structure of the lens pg1115+080: breaking degeneracies in the value of the hubble constant.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 337:L6.
-  **Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., and et al. (2020).**
SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python.
Nature Methods, 17:261–272.
-  **Wang, M. and Cheng, B. (2012).**
Determining h_0 and q_0 from supernova data.
In *19th Particles and Nuclei International Conference (PANIC11)*, pages 503–505. American Institute of Physics.

Referencias VI

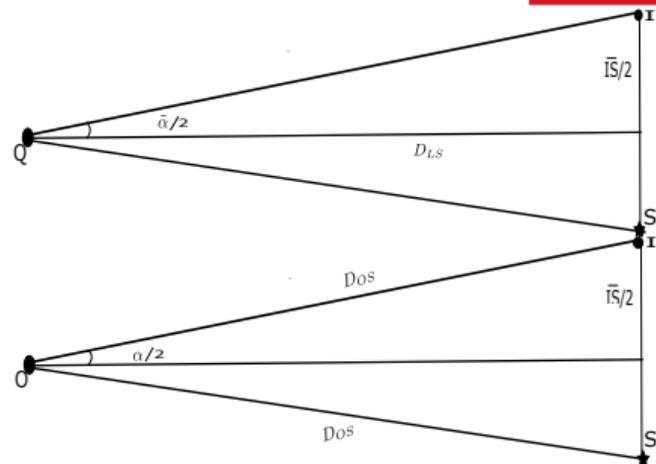
-  Weymann, R. J., Latham, D., Angel, J. R. P., Green, R. F., Liebert, J. W., Turnshek, D. A., Turnshek, D. E., and Tyson, J. A. (1980).
The triple QSO PG1115 + 08: another probable gravitational lens.
Nature, 285(5767):641–643.
-  Wiklind, T. and Combes, F. (1996).
The redshift of the gravitational lens of PKS1830-211 determined from molecular absorption lines.
Nature, 379(6561):139–141.
-  Winn, J. N., Kochanek, C. S., McLeod, B. A., Falco, E. E., Impey, C. D., and Rix, H.-W. (2002).
Pks 1830-211: a face-on spiral galaxy lens.
Astrophys. J., 575:103.
-  Wong, K. C. et al. (2020).
H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 498(1):1420–1439.

*Gracias
por su
atención*

Anexo 1



$$\beta = \theta - \alpha.$$

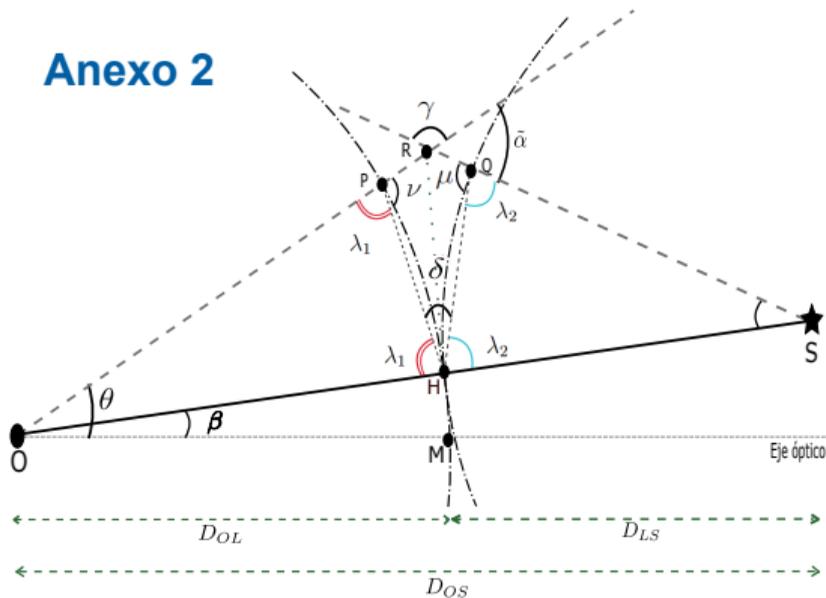


$$\sin(\alpha/2) \approx \frac{\bar{I}S/2}{D_{OS}} \rightarrow \alpha \approx \bar{I}S/D_{OS}$$

$$\tan(\tilde{\alpha}/2) \approx \frac{\bar{I}S/2}{D_{LS}} \rightarrow \tilde{\alpha} \approx \bar{I}/D_{LS}$$

$$\alpha = \frac{D_{LS}\tilde{\alpha}}{D_{OS}} \rightarrow \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{4GM(\theta)}{c^2 D_{OL}\theta}$$

Anexo 2



$$\gamma + \tilde{\alpha} = 180 \tag{1}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \delta = 180 \tag{2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \gamma + \delta \tag{3}$$

al reemplazar (3) en (2) e igualar este resultado con (1)

$$\delta = \frac{\tilde{\alpha}}{2}. \tag{4}$$

$$\tan(\theta - \beta) \approx \frac{RH}{D_{OL}} \rightarrow RH \approx D_{OL}(\theta - \beta), \tag{5}$$

$$\widehat{PQ} \approx D_{OL}(\theta - \beta)\delta. \tag{6}$$

$$\delta_{geom} = \frac{D_{OL}(\theta - \beta)\delta}{c}, \tag{7}$$

$$\delta_{geom} = \frac{D_{OL}D_{OS}(\theta - \beta)^2}{2cD_{LS}}. \tag{8}$$

Anexo 3

1. Colaboraciones como HZT (High-Z Supernova Search Team) y SCP (Supernova Cosmology Project) detectan supernovas mediante telescopios como CFHT (Canada-France-Hawaii Telescope) y CTIO (Cerro Tololo Inter-American Observatory).
 - Búsqueda de variabilidad de brillo en el tiempo (fotometría).
 - Se toman imágenes en una época (octubre) luego un mes después (en noviembre).
 - Se aplica la técnica de la diferencia: se restan imágenes y los objetos que aparecen nuevos o con aumento de brillo son candidatos a supernovas.
 - Su tipo se define por espectroscopia. (SNIa \rightarrow Si II, sin H).
2. Se mide z mediante espectroscopia usando como plantilla supernovas conocidas.
3. Se determina D_L
 - Mediante curvas de luz (brillo, o flujo luminoso vs tiempo) se observa la variabilidad del brillo.
 - Se ajustan estas curvas a curvas conocidas de supernovas.
 - Mediante este ajuste se determina m y por ende μ
 -

$$\mu = m - M = 25 + 5 \log(D_L(\text{Mpc}))$$