

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Universidad de **Nariño**

**Caracterización de las imágenes de un sistema de lente
gravitacional mediante el análisis de los isocontornos de la
superficie de tiempo de atraso**

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de:

Físico

James Fernando Insandaré Tacán

San Juan de Pasto, Colombia
21 de agosto de 2025

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Caracterización de las imágenes de un sistema de lente
gravitacional mediante el análisis de los isocontornos de la
superficie de tiempo de atraso**

James Fernando Insandará Tacán

TRABAJO DE GRADO

Director:

Edwin Alexander Delgado Insuasty
Dr. en Ciencias-Física

San Juan de Pasto, Colombia
21 de agosto de 2025

©2025 - James Fernando Insandar Tacn

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de aceptación

Edwin Alexander Delgado Insuasty

Director

Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

Eduardo Rojas Peña

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto 2025

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos al Dr. Edwin Alexander Delgado, quien, gracias a su compromiso y experiencia, fue una guía fundamental tanto en mi proceso de formación académica como en el desarrollo de este proyecto, llevándome a dar lo mejor de mí como estudiante.

Asimismo, considero crucial agradecer al Departamento de Física en su conjunto por estar siempre presentes a lo largo de todos estos años de pregrado; en especial a los docentes Luis Andrés Santacruz, Germán Enrique Ramos y Eduardo Rojas, quienes, aparte de brindar palabras de aliento y motivación en los momentos más difíciles de la carrera, son también un ejemplo de profesionalismo y dedicación.

Por otro lado, mi profundo agradecimiento hacia mi familia, a quienes agradezco por confiar en mí durante todos estos años y estar siempre presentes a lo largo de este camino.

Finalmente, agradezco a mis amigos, tanto de ayer como de hoy, a quienes llevo conmigo con profundo cariño, así como a todas aquellas personas que, de una u otra manera, contribuyeron al desarrollo de este trabajo y a mi crecimiento académico y personal.

A mi familia, a mis amigos y a todas las personas que llevo dentro de mi corazón.
Este logro también es suyo.

Resumen

La formación de múltiples imágenes es una característica importante del fenómeno de lente gravitacional fuerte, y a partir de su clasificación es posible inferir las características generales de los sistemas de lente gravitacional. En este trabajo se pone a prueba la utilidad de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso como herramienta para clasificar las imágenes generadas por dicho fenómeno, y además se describe el papel de las líneas críticas en este contexto.

Para llevar a cabo dicha clasificación, se estudió de manera detallada la teoría básica de las lentes gravitacionales, en la que se definen las líneas críticas del sistema y se establece la clasificación de las imágenes según el punto crítico donde se forman, es decir, en los mínimos, máximos o puntos de silla de la superficie de tiempo de atraso.

Este análisis teórico se complementó con el estudio de diferentes modelos asociados al cuerpo deflector, donde no solo se realizó un tratamiento matemático y físico riguroso, sino que también se desarrollaron pasos intermedios que suelen omitirse en la literatura especializada. En particular, en el capítulo dedicado a los modelos de lente, se comenzó con la descripción de una masa puntual, seguido por el análisis del fenómeno en lentes esféricas sin núcleo (singular isothermal sphere, SIS) como con núcleo (nonsingular isothermal sphere, NIS). Posteriormente, se eliminó la simetría axial presente en los anteriores casos para dar paso al estudio de los modelos elípticos, tratados de forma análoga: sin núcleo (singular isothermal ellipsoid, SIE) y con núcleo (nonsingular isothermal ellipsoid, NIE). Finalmente, se consideró una distribución de masa esférica con un potencial elíptico asignado, el cual se analizó siguiendo la misma metodología.

A manera de cierre, se presentan los resultados obtenidos al modelar los sistemas PG1115 + 080, RX J1131 – 1231 y WFI J2026 – 4536, aplicando los conceptos y herramientas teóricas descritas anteriormente.

Palabras clave: lentes gravitacionales, topología de la superficie de tiempo de atraso, isocontornos, líneas críticas.

Abstract

The formation of multiple images is a crucial aspect of the strong gravitational lensing phenomenon, and their classification allows for the inference of general properties of gravitational lens systems. This work tests the usefulness of isocontours of the time delay surface as a tool for classifying the images produced by this phenomenon and further describes the role of critical curves within this framework.

To introduce this classification, the basic theory of gravitational lenses was studied in detail, including the definition of the system's critical curves and the classification of images according to the type of critical point at which they are formed, that is, at minima, maxima, or saddle points of the time delay surface.

This theoretical analysis was complemented by the study of different models associated with the deflecting mass, where not only was a mathematically and physically rigorous treatment carried out, but also intermediate steps that are often omitted in the specialized literature were developed. In particular, the chapter devoted to lens models begins with the description of a point mass, followed by the analysis of the phenomenon in spherical lenses both without a core (SIS) and with a core (NIS). Subsequently, the axial symmetry present in the previous cases was removed to study elliptical models, treated analogously: without a core (SIE) and with a core (NIE). Finally, a spherical mass distribution with an assigned elliptical potential was considered and analyzed using the same methodology.

As a conclusion, the results obtained from modeling the systems PG1115 + 080, RX, J1131 – 1231, and WFI, J2026 – 4536 are presented, applying the theoretical concepts and tools previously described.

Keywords: gravitational lensing, topology of the time-delay surface, isocontours, critical lines.

Contenido

Aceptación	II
Agradecimientos	III
Dedicatoria	IV
Resumen	V
Abstract	VI
Índices	IX
Índice de Tablas	IX
Índice de Figuras	X
Glosario	XIV
1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema	3
3. Objetivos	4
3.1. General	4
3.2. Objetivos Específicos.	4
4. Deflexión de la luz	5
4.1. Linealización de la métrica	6
4.2. Conexión con la teoría Newtoniana	11
4.3. Ecuaciones de movimiento y el principio de Fermat	13
4.4. Ángulo de deflexión debido a una masa puntual	15
4.4.1. Comparación numérica entre la solución exacta y la aproximación	22
4.5. Ángulo de deflexión debido a una distribución continua de masa	24
5. Fenómeno de lente gravitacional	27
5.1. Ecuación de la lente	27
5.2. Potencial gravitacional	31
5.2.1. Conexión con la densidad superficial y la densidad crítica	34
5.3. Superficie tiempo de atraso	36
5.3.1. Tiempo de atraso gravitacional	37
5.3.2. Tiempo de atraso geométrico	38

5.3.3.	Tiempo de atraso total	40
5.3.4.	Potencial de Fermat	41
5.4.	Magnificación y amplificación	43
5.5.	Convergencia y cizallamiento	46
5.5.1.	Distorsión de una fuente circular	50
5.5.2.	Líneas críticas y causticas	52
5.6.	Clasificación y configuración de múltiples imágenes	54
5.6.1.	Teoremas generales en el fenómeno de lente gravitacional	55
5.6.2.	Topología de la superficie tiempo de atraso	57
5.6.2.1.	Topología para tres imágenes	58
5.6.2.2.	Topología para cinco imágenes	60
5.6.3.	Imagen central	62
6.	Modelos de lentes	63
6.1.	Masa puntual	63
6.2.	Lentes axialmente simétricas (circulares)	69
6.2.1.	Esfera isoterma singular (SIS)	74
6.2.2.	Esfera isoterma no singular (NIS)	79
6.3.	Modelos Elípticos	85
6.3.1.	Elipsoide isoterma singular (SIE)	86
6.3.2.	Elipsoide isoterma no singular (NIE)	90
6.4.	Otros modelos	94
6.4.1.	Elipsoide isoterma pseudo-singular (pSIE)	95
6.4.2.	Elipsoide isoterma pseudo-no singular (pNIE)	97
7.	Resultados	99
7.1.	Sistema PG 1115+080	100
7.1.1.	Estudio de modelos esféricos en PG 1115+080	101
7.1.2.	Modelos SIE y pSIE	105
7.1.3.	Modelos NIE y pNIE	108
7.2.	Sistema RX J1131-1231	108
7.3.	Sistema WFI J2026-4536	111
7.4.	Resultados de referencia: Lenstronomy	114
8.	Conclusiones y recomendaciones	117
	Apéndices	119
A.	Herramientas para la relatividad general	120
A.1.	Transformación de calibre	120
A.2.	Equivalencia con la métrica de Schwarzschild	121
B.	Distancia de diámetro angular	124

C. Complementos de lentes gravitacionales	127
C.1. Diagonalización del tensor de cizalladura	127
C.2. Demostración de los teoremas generales	129
C.3. Deducción de línea crítica radial – NIS	132
C.4. Deducción del potencial gravitacional angular - SIE	133

Índice de tablas

7.0.1. Parámetros usados en este trabajo.	99
7.1.1. Coordenadas en arcosegundos de la fuente y de las imágenes respecto a la lente. Valores obtenidos de [1].	100
7.1.2. Distancias de diámetro angular para el sistema PG 1115 + 080.	101
7.1.3. Comparación de las masas y ángulos de Einstein para el sistema PG 1115 + 080. La DRP corresponde a la diferencia relativa porcentual respecto al valor usado en este trabajo.	102
7.1.4. Diferencia relativa porcentual de la velocidad de dispersión para el sistema PG 1115+ 080 con respecto al valor usado en este trabajo.	103
7.1.5. Tiempos de atraso entre imágenes para el sistema de lente gravitacional PG 1115+ 080 modelado con un perfil NIS.	105
7.1.6. Clasificación de imágenes del sistema PG 1115 + 080 en el SIE.	107
7.1.7. Diferencia relativa porcentual entre los parámetros usados en este trabajo y el mo- delo SIE/Pt de la referencia [2].	107
7.2.1. Coordenadas de la fuente e imágenes del sistema RX J1131 – 1231 con respecto a la lente G.	109
7.2.2. Distancias de diámetro angular para el sistema RX J1131 – 1231.	109
7.2.3. Clasificación de imágenes - SIE - RX J1131 – 1231.	111
7.3.1. Coordenadas de la fuente e imágenes del sistema WFI J2026 – 4536.	112
7.3.2. Distancias de diámetro angular para el sistema WFI J2026 – 4536.	112
7.3.3. Clasificación de imágenes del sistema WFI J2026 – 4536 en el SIE.	113
7.3.4. Diferencia relativa porcentual del ángulo de Einstein para el sistema WFI J2026 – 4536 con respecto al valor usado en este trabajo.	114

Índice de figuras

1.	Ilustración del principio variacional de Hamilton, donde cada línea representa una trayectoria distinta en el espacio de configuraciones. Se destaca en particular la línea negra, asociada a una acción estacionaria.	14
2.	Visualización de la deflexión de la luz como resultado del cambio en la componente perpendicular de la velocidad del rayo, en presencia de un campo gravitacional débil. Las proporciones han sido exageradas con fines didácticos.	19
3.	Descripción de la deflexión real de un haz de luz debida a una distribución de masa esférica, donde el ángulo de deflexión varía a lo largo de la trayectoria.	20
4.	Deflexión de un haz de luz bajo la aproximación de Born, donde el ángulo se mide por el cambio de dirección respecto al plano transversal a la trayectoria no perturbada.	20
5.	Ángulo de deflexión asociado a un agujero negro estático de 3 masas solares, mostrando la aproximación en el límite de campo débil y la solución numérica, en función del parámetro de impacto.	24
6.	Representación gráfica del diferencial del ángulo de deflexión, considerando la proyección sobre el plano de la lente de una distribución continua de masa con geometría arbitraria. Se ilustra el ángulo total de deflexión en función del vector originado en el centro de masa (CM).	25
7.	Configuración en una dimensión de un sistema lente gravitacional debido a una masa puntual.	28
8.	Ilustración del sistema de lente gravitacional en su configuración vectorial. La caracterización de ξ_0 y η_0 permite introducir la notación adimensional.	30
9.	Sistema para describir el tiempo de atraso geométrico.	38
10.	Superficie de tiempo de atraso para una distribución de masa esférica con núcleo, donde se visualiza la proyección de sus líneas de contorno sobre el plano de la lente. Las unidades son arbitrarias.	42
11.	Superficie de tiempo de atraso en 1D para una distribución de masa esférica con núcleo, con la fuente variando su posición. Las unidades son arbitrarias.	43
12.	Fenómeno de amplificación y magnificación sobre un elemento de una fuente. Las líneas azules caracterizan la imagen con paridad positiva, mientras que las rojas, invierten la orientación de la fuente resultando en una imagen con paridad negativa.	45
13.	Representación del efecto de la convergencia para distintos valores de κ , con líneas verdes que indican el contorno de la imagen generada.	47

14.	Ilustración del efecto de la cizalladura para distintos valores de γ_1 y γ_2 , donde las líneas verdes representan el contorno de la imagen deformada.	48
15.	Ilustración de la distorsión en la imagen de una fuente circular para valores específicos de convergencia y cizallamiento.	52
16.	Representación de la formación de imágenes (A y B) en función de la posición de la fuente (estrellas) en un sistema arbitrario, y su relación con las curvas críticas y cáusticas, así como con el potencial de Fermat correspondiente. Figuras obtenidas mediante <code>Lenstronomy</code>	53
17.	Ilustración de la formación de dos nuevas imágenes en un sistema arbitrario, como consecuencia de la interacción de la posición de la fuente con la cáustica del sistema. La aparición de estas nuevas imágenes se evidencia en los isocontornos del potencial de Fermat. Las visualizaciones fueron generadas con ayuda de <code>Lenstronomy</code>	54
18.	Representación didáctica de un punto de silla, caracterizando las regiones alrededor del mismo con los signos $+$ y $-$ de acuerdo a su comportamiento.	58
19.	Ilustración de las configuraciones teóricas de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, asociadas a la formación de tres imágenes en un sistema de lente gravitacional. Las regiones se identifican con las siglas en inglés para máximo (H), mínimo (L) y punto de silla (S).	59
20.	Ilustración de la formación de 5 imágenes considerando una curva de nivel exterior con la geometría de una lemniscata.	60
21.	Topología de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso en la formación de cinco imágenes con una geometría general de caracol de Pascal. El nuevo punto de silla se sitúa en el lóbulo exterior.	61
22.	Topología de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso en la formación de cinco imágenes con una geometría general de caracol de Pascal. El nuevo punto de silla se sitúa en el lóbulo interior.	61
23.	Solución de la ecuación de la lente mediante el método gráfico. Se consideraron diferentes posiciones de la fuente y , con el objetivo de visualizar el desplazamiento de los puntos de intersección (imágenes) entre $\alpha(x)$ y $f(x) = x - y$. Las líneas verticales $x = \pm 1$ representan la distancia radial del ángulo de Einstein en notación adimensional.	66
24.	Magnificación en función de la posición de las imágenes en notación adimensional.	68
25.	Solución por método gráfico de la ecuación de la lente en el SIS. Se consideraron diferentes valores de y , con el fin de visualizar la formación de imágenes en el modelo.	78
26.	Magnificación correspondiente al modelo SIS, descrita en función de la posición radial de las imágenes en notación adimensional.	79
27.	Resolución gráfica de la ecuación de la lente para el modelo NIS con $x_c = 0.2$. Al igual que en los casos anteriores, se consideran posiciones arbitrarias de la fuente para analizar los diferentes puntos de intersección (imágenes) entre $\alpha(x)$ y $f(x) = x - y$	83

28.	Magnitud de la magnificación del modelo NIS, descrita en función de la posición radial de las imágenes en notación adimensional.	85
29.	Líneas críticas tangenciales del modelo SIE. Se observa cómo la línea crítica evoluciona desde un anillo de Einstein ($f = 1$) hasta adoptar la forma de una elipse más pronunciada, dependiendo del valor del parámetro f	91
30.	Imagen del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 obtenida con NICMOS a bordo del telescopio espacial Hubble. El origen del sistema de coordenadas se encuentra situado en la imagen C. Fotografía tomada de la Figura 1 de [2].	100
31.	Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para una masa puntual.	101
32.	Grafica de los isocontornos de la función tiempo de atraso para los modelos SIS (ecuación 6.2.67) y NIS (ecuación 6.2.101) del sistema de lente gravitacional PG 1115+080. El núcleo considerado en el modelado fue escogido de manera arbitraria y corresponde a: $\theta_c = 0.01''$	103
33.	Ilustración modelos SIE (ecuación 6.2.67) y pSIE (ecuación 6.2.101) de los isocontornos de la función tiempo de atraso de PG 1115 + 080.	105
34.	Formación de las imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 en función de la evolución temporal de las líneas de contorno de la superficie de tiempo de atraso del modelo pSIE. Los isocontornos grises se forman para tiempos mayores, por lo cual su adición es únicamente estética.	106
35.	Ilustración modelos NIE (ecuación 6.3.48) y pNIE (ecuación 6.4.25) de los isocontornos de la función tiempo de atraso del sistema PG 1115 + 080.	108
36.	Sistema de lente gravitacional RX J1131 – 1231. Imagen obtenida de la Figura 1 en [3].	109
37.	Isocontornos de la función tiempo de atraso de RX J1131–1231 (ecuación 6.2.67). Los isocontornos obtenidos son coherentes con el modelado de lente gravitacional descrito en la Figura 3 de [4].	110
38.	Lente gravitacional WFI J2026 – 4536. Imagen obtenida de la Figura 3 en [5]. . .	111
39.	Isocontornos superficie tiempo de atraso del sistema WFI J2026 – 4536.	113
40.	Sistema PG 1115 + 080 en Lenstronomy.	115
41.	Sistema RX J1131 – 1231 en Lenstronomy.	115
42.	Sistema WFI J2026 – 4536 en Lenstronomy.	116
43.	Análisis grafico de la ecuación C.4.31, se visualiza en la última columna el comportamiento del factor asociado a término constante, el cual no modifica significativamente la función total.	137

Glosario

- Aberración gravitacional:** Fenómeno en el que la luz de un objeto es desviada debido a la presencia de un campo gravitacional intenso.
- Curvatura del espacio-tiempo:** Deformación del tejido del espacio-tiempo causada por la presencia de una masa, según la Relatividad General.
- Lente gravitacional:** Efecto en el que un objeto masivo curva la trayectoria de la luz proveniente de una fuente distante, generando imágenes distorsionadas o múltiples..
- Superficie de tiempo de atraso:** Representación matemática que describe el retardo temporal experimentado por la luz al viajar a través de un lente gravitacional.
- Isotrópico:** Un medio, material o sistema es isotrópico cuando su comportamiento físico no depende de la dirección en la que se mida una propiedad.
- Anisotrópico:** Propiedad de un material, medio o sistema que varía según la dirección en la que se mida.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, las lentes gravitacionales son relevantes dada su utilidad en campos de alto interés científico, como la astrofísica [6, 7] y la cosmología [8–10]. Un ejemplo es su función como “telescopios naturales”, que permiten el análisis de objetos distantes imposibles de estudiar con la sensibilidad actual en los instrumentos de medición [11, 12]. Además, tienen aplicabilidad como herramienta alternativa en la búsqueda de exoplanetas [13, 14] y estimación de los parámetros cosmológicos [15, 16].

Las lentes gravitacionales, especialmente en su manifestación de lensamiento fuerte, dan lugar a la formación de imágenes múltiples y distorsionadas de los objetos lejanos [17–19]. Este fenómeno no solo proporciona una herramienta poderosa para estudiar la distribución de masa en el universo, sino que también abre ventanas hacia la comprensión de la estructura y evolución del cosmos [20, 21]. En particular, muchos de los modelos teóricos de lentes gravitacionales han sido eficientes en la descripción de lentes gravitacionales reales; sin embargo, se han observado algunos sistemas que no se ajustan a lo descrito en la literatura, ya sea por el número de imágenes observadas, la dificultad para inferir la distribución de masa asociada a la lente, la luminosidad de la fuente u otros factores [22, 23].

Una forma de abordar estas inquietudes es mediante la caracterización cualitativa de las imágenes, como se realiza en el trabajo de Blandford y Narayan [24], en el cual, a través del estudio de la topología de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso, se describen las propiedades específicas de las imágenes y, a partir de estas, se infieren las características generales del sistema. En particular, este enfoque resulta muy útil en la estimación de parámetros cosmológicos, la determinación de la constante de Hubble, el estudio de la evolución del universo y la comprensión de la naturaleza de la materia oscura [25–28].

En este trabajo se aplica este concepto y, junto al análisis de las líneas críticas, se clasifica las imágenes de sistemas de lente gravitacional. Asimismo, se describe que el modelo más apropiado para simular la lente corresponde a una distribución de masa (y/o potencial gravitacional) elíptica. Este análisis se apoya en el software *Lenstronomy* como referencia para comparar los resultados de nuestras simulaciones de los sistemas.

Con el fin de garantizar la legibilidad de este trabajo, se presenta un desarrollo lineal y coherente de la descripción teórica asociada a las lentes gravitacionales. Se inicia en el Capítulo 4, donde se linealizan las ecuaciones de campo de Einstein y se determina el ángulo de deflexión para una masa puntual. A continuación, en el Capítulo 5, se desarrolla la base teórica de las lentes gravitacionales, en la que se definen las líneas críticas y se estudia la formación de imágenes a partir del potencial de Fermat. En el Capítulo 6, se realiza un análisis detallado de distintos modelos de lente gravitacional, lo que permite determinar el potencial gravitacional y las líneas críticas asociadas en cada caso. Por último, en el Capítulo 7, se ponen en práctica los conocimientos adquiridos para modelar los sistemas de lente gravitacional PG1115 + 080, RX, J1131–1231 y WFI, J2026–4536.

Por último, y con el propósito de mantener una línea coherente y uniforme, considerando la diversidad de ramas físicas que abordan este fenómeno, se adoptará la signatura $(+, -, -, -)$ para la métrica. Además, se utilizará el Sistema Internacional de Unidades (SI) a lo largo de todo el trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

A lo largo de la historia, el conocimiento científico ha surgido como resultado de un trabajo colectivo para responder a cuestiones fundamentales sobre la naturaleza del universo. El desarrollo de las ciencias naturales, particularmente de la física, ha estado estrechamente ligado a este esfuerzo, con disciplinas como la astrofísica y la cosmología jugando un papel central en la comprensión de fenómenos que trascienden nuestro entorno inmediato.

Entre estos fenómenos, las lentes gravitacionales destacan por su capacidad de manifestarse cuando una distribución considerable de masa, como una galaxia o un cúmulo de galaxias, curva la trayectoria de la luz proveniente de un objeto distante, permitiendo así la formación de imágenes del mismo. La comprensión de la distribución de masa del objeto deflector es crucial para el estudio de este fenómeno; en muchos casos ha sido posible describir con gran precisión estos sistemas simulando las lentes como una masa puntual, una esfera isoterma, un elipsoide isotérmico, entre otros. Sin embargo, existen sistemas que no son descritos adecuadamente por los modelos teóricos actuales, lo que señala la necesidad de profundizar en alternativas que, empleando lo ya conocido, permitan una descripción más precisa de estos sucesos. En este contexto, la clasificación de imágenes surge como una herramienta para la descripción de estos fenómenos, a través de la comprensión de la formación, ubicación, tamaño, luminosidad y otras propiedades asociadas a las mismas.

Con base en lo anterior, este proyecto busca estudiar, comprender, e implementar este método, mediante la **clasificación de la formación de imágenes en diversos sistemas de lente gravitacional, explorando su relación con los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso generada por la distribución de masa de la lente. Además, se busca entender cómo las líneas críticas se relacionan con la generación de estas imágenes y sus respectivas características.**

En resumen, este proyecto busca responder a la siguiente pregunta: *¿Cómo se caracterizan las imágenes de un sistema de lente gravitacional de acuerdo con la topología de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, y cuál es el papel de las líneas críticas en este fenómeno?*

Capítulo 3

Objetivos

3.1. General

Realizar un análisis de la formación de imágenes en diversos sistemas de lente gravitacional, mediante una categorización basada en el estudio de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, vinculada a la distribución de masa del objeto deflector a través del potencial gravitacional.

3.2. Objetivos Específicos.

- Estudiar la ecuación de las lentes gravitacionales delgadas, para comprender su aplicación en el análisis de formación de imágenes.
- Deducir las ecuaciones de tiempo de atraso y líneas críticas para diferentes modelos de potenciales gravitacionales, incluyendo lente puntual, esfera isotérmica singular, esfera isotérmica no singular, elipsoide isotérmico, entre otros.
- Desarrollar o adaptar un código en Python que calcule el tiempo de atraso entre las imágenes generadas, además de permitir la visualización tanto de los isocontornos como de las líneas críticas del sistema de lente gravitacional.
- Comparar los resultados obtenidos con el código desarrollado para diversas distribuciones de masa en sistemas reales de lente gravitacional, evaluando la consistencia de las predicciones.
- Analizar los datos obtenidos a lo largo del proyecto y desarrollar conclusiones que resuman los hallazgos del mismo.

Capítulo 4

Deflexión de la luz

Las lentes gravitacionales se caracterizan por ser un fenómeno multidisciplinario de la física, ya que su descripción teórica involucra ramas como la relatividad general, la astronomía, la cosmología y la óptica [29, 30]. En este capítulo, se presentará de manera formal la deducción del ángulo de deflexión en el contexto de la relatividad general linealizada.

Como punto de partida, se toman las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales, en su forma general describen la relación entre la materia (o cualquier manifestación de la energía y el momento) y la geometría del espacio-tiempo. Matemáticamente, son representadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (4.0.1)$$

tal que, en el lado izquierdo de la igualdad se encuentran los términos asociados a la geometría del espacio, como lo son: la métrica ($g_{\mu\nu}$), el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) y el escalar de curvatura (R). Mientras que, en el lado derecho se describe la distribución de energía y momento mediante el tensor energía-momento ($T_{\mu\nu}$).

La solución a estas ecuaciones, ésta dada por las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual describe la geometría del espacio-tiempo, permitiendo calcular distancias, ángulos y volúmenes sobre el mismo [31, 32].

La deflexión de la luz es una de las principales consecuencias físicas de las ecuaciones de campo de Einstein y, además, una herramienta clave en la astronomía observacional. No solo ha servido para probar la validez de la relatividad general, sino que también desempeña un papel fundamental en la detección de lentes gravitacionales y en la medición de los parámetros del modelo estándar de la cosmología, proporcionando información invaluable sobre la estructura y evolución del universo [30, 33, 34].

4.1. Linealización de la métrica

La teoría gravitacional de Einstein introdujo un cambio de paradigma al considerar espacio-tiempo como un único ente, abriendo las puertas de la comprensión a muchos fenómenos físicos, llevándola a ser una de las más comprobadas de la ciencia [35]. En esencia, la mayoría de la investigación experimental puede ser descrita desde el enfoque de la aproximación lineal, como, por ejemplo: el retraso temporal de la luz, la dilatación temporal gravitacional, el fenómeno de lente gravitacional, la radiación gravitacional y como se mencionó con anterioridad, el ángulo de deflexión [30]. Así, en esta sección se desarrolla la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein, describiendo los pasos intermedios de los capítulos 3 y 4 de la referencia [30] y del capítulo 21 de [36].

En primera instancia, con el objetivo de analizar efectos gravitacionales en el régimen de los campos débiles, se considera una distribución de masa tal que el campo asociado cumpla con esta condición, permitiendo así que el espacio-tiempo sea interpretado como una perturbación sobre la métrica de Minkowski. Si se caracteriza dicha alteración como $h_{\alpha\beta}$, y dado que se pretende ignorar los efectos gravitacionales de segundo orden o mayores, se establecen las siguientes condiciones: $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, $|\partial_\sigma h_{\alpha\beta}| \ll 1$. En consecuencia, la métrica asociada al espacio-tiempo descrito es

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} . \quad (4.1.1)$$

Así mismo, es relevante considerar la expresión contravariante de la métrica, tal que se define la misma como $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + k^{\alpha\beta}$. Para determinar la relación entre $h_{\alpha\beta}$ y $k^{\alpha\beta}$ se empleará la condición $g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta$, de modo que, al desarrollar los productos internos y simplificar, la expresión resultante es

$$\eta_{\alpha\mu}k^{\mu\beta} = -h_{\alpha\mu}\eta^{\mu\beta} , \quad (4.1.2)$$

de la cual es posible obtener la relación contravariante del término de perturbación, por medio de la introducción de $\eta^{\sigma\alpha}$ en la ecuación anterior. De modo que, al contraer los índices, se determina lo siguiente

$$k^{\sigma\beta} = -h^{\sigma\beta} . \quad (4.1.3)$$

Es decir, la representación contravariante de la métrica asociada a un campo gravitacional débil, es descrita mediante la expresión:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} . \quad (4.1.4)$$

Por otro lado, se conoce que las ecuaciones de campo de Einstein deben ser las mismas para todos los observadores, tal que por medio del jacobiano se describe la relación entre los mismos ($J_{\mu}^{\alpha'} = \partial x'^{\alpha} / \partial x^{\mu}$). De lo anterior, se tiene que al tender hacia una región distante al campo gravitacional, el jacobiano se aproxima a las ecuaciones de transformación de Lorentz, es decir, $J_{\mu}^{\alpha'} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\alpha'}$.

Así, resulta de interés estudiar las reglas de transformación asociadas a la métrica en este contexto, de modo que, al realizar una transformación de coordenadas sobre la expresión 4.1.1¹, se deduce

¹Se destaca que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es un tensor covariante de segundo orden, por lo que su transformación bajo cambios de coordenadas está dada por la matriz Jacobiana inversa.

que transforma como un tensor de rango dos, como se demuestra a continuación:

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} g_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} \eta_{\alpha\beta} + \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta} . \quad (4.1.5)$$

En este punto, por definición, se espera que la transformación sea de la siguiente manera: $g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'}$. Es así que, al relacionar ambas expresiones bajo la aproximación de campo débil, se aprecia que el término $h_{\mu\nu}$ transforma como cualquier tensor sobre el espacio-tiempo plano, es decir

$$h_{\mu'\nu'} \equiv \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta} , \quad (4.1.6)$$

como consecuencia, el desarrollo matemático permite la implementación de las herramientas asociadas a la relatividad especial. En este punto, es importante destacar que, si bien la descripción se realiza en torno a la métrica de Minkowski y de su tratamiento matemático, el espacio-tiempo considerado es curvo [37].

Lo anterior es fundamental en el contexto de la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein, ya que cantidades matemáticas como los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, que describen las características geométricas del espacio-tiempo, están relacionadas con la métrica. Por lo tanto, la linealización de estas expresiones es necesaria en este marco.

En consecuencia, se aborda en primera instancia la linealización de los símbolos de Christoffel, los cuales son responsables de caracterizar el transporte paralelo² en el espacio-tiempo. Su expresión matemática general es:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) , \quad (4.1.7)$$

sobre la cual se aprecian términos relacionados con la derivada parcial de la métrica. Al analizar el cálculo mencionado, se determina fácilmente que $\partial_\rho g_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\rho h_{\mu\nu}$.

En consideración de lo anterior, al sustituir la métrica descrita en la ecuación 4.1.1 en la igualdad 4.1.7 y desarrollar los productos correspondientes, despreciando los términos de segundo orden en el término de perturbación, se obtienen los símbolos de Christoffel linealizados, representados por la expresión

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) . \quad (4.1.8)$$

Con la deducción de los coeficientes de conexión a fin en la teoría linealizada, se procede a la incorporación del tensor de Riemann en el análisis, también conocido como tensor de curvatura. El tensor de Riemann mide la curvatura del espacio-tiempo al analizar los cambios sufridos por un vector transportado paralelamente a lo largo de un camino cerrado. De manera general, éste tensor se define apartir del conmutador de las derivadas covariantes y es igual a:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\beta_{\sigma\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} . \quad (4.1.9)$$

²Es un concepto matemático empleado en la relatividad general, que describe como cambia un vector a medida que se desplaza a lo largo de una trayectoria en un espacio curvo, sin rotar, ni cambiar su magnitud en relación con la conexión del espacio-tiempo. El desarrollo de esta noción se trata en el capítulo 6 de [36].

En donde, al analizar los dos últimos términos en la derecha de la igualdad, se obtiene que deben ser nulos. Lo anterior se justifica al reemplazar la expresión 4.1.8 en la anterior relación matemática. Los términos discutidos evidencian una dependencia con respecto a la derivada parcial del factor de perturbación. Es así que, el producto entre estos dos, debido a las características de la linealización, es de orden dos con respecto a $|\partial_\sigma h_{\alpha\beta}|$, permitiendo así omitir todos sus términos.

A partir de lo concluido anteriormente, se obtiene que el tensor de Riemann se representa mediante la siguiente igualdad:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\sigma h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha h_{\nu\sigma}) \right] - \partial_\nu \left[\frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha h_{\mu\sigma}) \right] , \quad (4.1.10)$$

donde es posible simplificar los términos con las derivadas parciales $\partial_\mu \partial_\nu$, respectivamente. En consecuencia, se obtiene que el tensor de curvatura linealizado, es descrito por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} [\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma}] . \quad (4.1.11)$$

A partir de la ecuación anterior, es factible deducir el tensor de Ricci linealizado mediante la contracción en dos de sus índices, como se representa a continuación:

$$R_{\sigma\nu} = R^\mu{}_{\sigma\mu\nu} . \quad (4.1.12)$$

Al contraer los índices correspondientes de la relación 4.1.11, el término $\eta^{\mu\alpha}$ actúa sobre las expresiones dentro del corchete, dando lugar al siguiente tensor de rango dos

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu - \partial^\mu \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h^\mu{}_\mu + \partial_\nu \partial_\mu h^\mu{}_\sigma] . \quad (4.1.13)$$

En esencia, esta fórmula corresponde al tensor de Ricci linealizado. Sin embargo, la notación de los índices en el término de perturbación dificulta un desarrollo matemático manejable. Para simplificar, se introduce el operador d'Alembertiano, definido como

$$\square \equiv \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha , \quad (4.1.14)$$

y se define la traza del factor de perturbación mediante la siguiente relación

$$h = h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\mu} . \quad (4.1.15)$$

Al incorporar los conceptos anteriores en la ecuación 4.1.13, se obtiene una representación alternativa del tensor de Ricci en la teoría linealizada, la cual es

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \partial_\sigma h^\mu{}_\nu + \partial_\nu \partial_\mu h^\mu{}_\sigma - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h] . \quad (4.1.16)$$

A primera vista, la expresión obtenida no parece ser fácilmente manipulable; sin embargo, estas modificaciones permitirán establecer una conexión entre la descripción lineal de las ecuaciones de campo de Einstein y la teoría Newtoniana.

Por último, en cuanto al tratamiento matemático de los elementos que describen la geometría del espacio-tiempo, se introduce el escalar de curvatura, definido como

$$R = R^\nu{}_\nu = \eta^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} , \quad (4.1.17)$$

de modo que, al aplicar $\eta^{\sigma\nu}$ sobre la expresión 4.1.16, en los tres primeros términos, uno de los índices del factor de perturbación adopta una posición contravariante, mientras que en el último elemento el cambio se realizará en una derivada parcial, obteniendo así la siguiente expresión:

$$R = \frac{1}{2} [\partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\mu h^{\mu\nu} - \square h^\sigma{}_\sigma - \partial^\sigma \partial_\sigma h] . \quad (4.1.18)$$

Donde se evidencia, a partir de la contracción de sus índices, que tanto el primer término como el segundo son iguales, de la misma forma acontece con el tercero y el cuarto, al considerar la representación del operador d'Alembertiano. De este modo, se concluye fácilmente la expresión del escalar de curvatura en su forma linealizada es

$$R = \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h . \quad (4.1.19)$$

Ahora, al haber realizado la linealización de los anteriores términos, es posible expresar las ecuaciones de campo de Einstein en su aproximación lineal.

Para ello, inicialmente, se trabajará sobre el término $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ de 4.0.1, tal que, al reemplazar 4.1.19 en la anterior ecuación y despreciar los términos de segundo orden asociados al factor de perturbación, se obtiene la relación:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) . \quad (4.1.20)$$

Así, al reemplazar las ecuaciones 4.1.16 y 4.1.20 en la igualdad 4.0.1, se deduce que las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas toman la forma

$$\frac{1}{2}(\partial_\beta \partial_\mu h^\beta{}_\nu + \partial_\nu \partial_\beta h^\beta{}_\mu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (4.1.21)$$

que corresponde a la ecuación 21.13 de [36]. En este punto, el resultado aún no permite una manipulación clara desde el enfoque matemático. Por ello, se busca bajar la totalidad de los índices en el término de perturbación, por medio de la siguiente relación

$$\partial_\beta \partial_\mu h^\beta{}_\nu = \partial_\beta \partial_\mu [g^{\beta\sigma} h_{\sigma\nu}] , \quad (4.1.22)$$

$$= \partial_\beta \partial_\mu [(\eta^{\beta\sigma} - h^{\beta\sigma}) h_{\sigma\nu}] , \quad (4.1.23)$$

$$= \partial_\beta \partial_\mu [\eta^{\beta\sigma} h_{\sigma\nu}] , \quad (4.1.24)$$

$$= (\eta^{\beta\sigma} \partial_\beta) \partial_\mu h_{\sigma\nu} , \quad (4.1.25)$$

$$= \partial^\beta \partial_\mu h_{\beta\nu} . \quad (4.1.26)$$

Es así que, al aplicarlo en 4.1.21, se deduce la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}(\partial^\beta \partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial^\beta \partial_\nu h_{\mu\beta} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (4.1.27)$$

Donde el procedimiento anterior encuentra su utilidad al permitir la definición de una nueva cantidad, $\bar{h}_{\alpha\beta}$, denominada como tensor de perturbación con traza invertida, la cual se caracteriza como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (4.1.28)$$

Esta nueva definición, al igual que las anteriores, responde a la necesidad de simplificar la formulación matemática, facilitando una transición más natural hacia la teoría newtoniana [37].

A continuación, a partir de la relación 4.1.28, se despeja el término $h_{\mu\nu}$, y dicha expresión se reemplaza en la igualdad 4.1.27, de modo que se determina la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[\partial^\alpha \partial_\mu (\bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}h) + \partial^\alpha \partial_\nu (\bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}h) - \partial^\alpha \partial_\alpha (\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) \right. \\ & \left. - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta (\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h) - \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h \right]. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

En este punto, se manipula únicamente el lado derecho de la anterior, de modo que, al realizar los productos correspondientes y reagrupar los términos con respecto a $\bar{h}$ y h , se deriva el término

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \eta_{\alpha\nu} h \right. \\ \left. + \partial^\alpha \partial_\nu \eta_{\mu\alpha} h - \partial^\alpha \partial_\alpha \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\beta} h) - \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h \right], \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

sobre el cual, es de interés manipular las cantidades contenidas en el segundo paréntesis, tal que, al modificar los índices por la acción de la métrica de Minkowski, se deduce que

$$\rightarrow \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \eta_{\alpha\nu} h + \partial^\alpha \partial_\nu \eta_{\mu\alpha} h - \partial^\alpha \partial_\alpha \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\beta} h) \quad (4.1.31)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h) \quad (4.1.32)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h. \quad (4.1.33)$$

Tras el anterior procedimiento, al sustituir el último resultado sobre 4.1.30, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) \right. \\ \left. + (\partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h) - \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h \right], \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

del cual, es posible simplificar los últimos cuatro términos. Así, tras la última reducción, se deducen las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas, representadas en términos de $\bar{h}_{\alpha\nu}$, las cuales se expresan por la fórmula:

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \square \bar{h}_{\mu\nu} \right]. \quad (4.1.35)$$

Es importante destacar que, con respecto a ésta última relación, en tres de los cuatro sumandos se evidencia el factor $\partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha}$, el cual, en términos generales, puede introducir divergencias desde el punto de vista físico en las ecuaciones de campo de Einstein [37].

Para abordar esta problemática sin alterar la física subyacente, se busca una transformación adecuada que elimine dichas inconsistencias. Esto se logra mediante la introducción de las transformaciones de calibre [36, 37]. En el apéndice A.1 se desarrollan con mayor detalle las ideas asociadas a este tipo de transformación, permitiendo así establecer que $\partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} = 0$.

Por lo tanto, al implementar lo descrito anteriormente sobre la igualdad 4.1.35, se obtiene una nueva representación lineal de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales corresponden a

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} . \quad (4.1.36)$$

Esta última descripción permite analizar el régimen en el que las teorías gravitacionales de Newton y de Einstein coexisten.

4.2. Conexión con la teoría Newtoniana

Como se estableció anteriormente, la validez de la teoría de la gravitación linealizada depende, esencialmente, de que el campo gravitacional sea débil. Por otro lado, la teoría gravitacional clásica también requiere esta condición, pero además precisa que las velocidades sean bajas ($v \ll c$). Esta última restricción, innecesaria en la teoría de Einstein, permite describir partículas relativistas en campos gravitacionales débiles y dependientes del tiempo, lo que representa una ventaja sobre la teoría newtoniana [30].

Debido a lo anterior, comprender el marco en el que ambas teorías coexisten resulta de gran interés, especialmente en el estudio de fenómenos como la deflexión de la luz. El tratamiento físico detallado en esta sección está basado en 4.1 de [30] y [37], exponiendo los cálculos intermedios en dichas referencias.

Para comenzar, se despeja el término asociado a $\bar{h}$ de la ecuación 4.1.36, obteniendo la siguiente expresión

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (4.2.1)$$

la cual ha sido representada de esta manera con la intención de compararla con el cuadripotencial de la teoría electromagnética, el cual se representa por

$$\square A^\alpha = -4\pi J^\alpha . \quad (4.2.2)$$

Es evidente que la estructura matemática de las anteriores es la misma. Por este motivo, al conocer bien la solución particular asociada al cuadripotencial electromagnético, se propone que, por analogía, la solución de las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas posea las mismas características.

Dicha solución particular, implica que la fuente del campo gravitacional satisfaga las siguientes condiciones:

- Ser estática, es decir, la distribución de masa no cambia con el tiempo, lo que da lugar a un campo gravitacional estacionario, esta condición se representa como:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial t} = 0 . \quad (4.2.3)$$

- No ser relativista, de modo que las velocidades involucradas sean bajas en comparación con la velocidad de la luz y que las presiones sean pequeñas con respecto a la densidad de energía en reposo. Matemáticamente, corresponden a:

$$v \ll c , p \ll \rho c^2 . \quad (4.2.4)$$

En consecuencia, el modelado del cuerpo deflector es análogo al de un fluido perfecto en reposo con presiones despreciables³. Esto reduce, como primera aproximación, al tensor energía-momento a su componente temporal ($T_{00} \approx \rho c^2$ con $T_{ij} \approx 0$ y $T_{0i} = 0$), lo que da lugar a que la ecuación 4.2.1 tome la forma

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} \approx \frac{16\pi G}{c^4} (\rho c^2) . \quad (4.2.5)$$

En este punto, es importante recordar el potencial Newtoniano, el cual se describe mediante:

$$\nabla^2 \Phi_N = 4\pi G \rho . \quad (4.2.6)$$

De este modo, es posible comparar las ecuaciones 4.2.5 y 4.2.6, permitiendo derivar directamente la siguiente igualdad

$$\bar{h}_{00} = 4 \frac{\Phi_N}{c^2} . \quad (4.2.7)$$

Esta última relación destaca al solo considerar la contribución asociada a la componente temporal del tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$, evidenciando que, bajo las condiciones impuestas, el resto de sus componentes resultan ser nulas.

A partir de lo anterior, pueden calcularse todas las componentes del factor de perturbación. Para ello, se emplea la expresión 4.1.28, descrita en términos de la métrica de perturbación con traza invertida, es decir

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} . \quad (4.2.8)$$

Mientras que, al calcular la traza de $\bar{h}$, se obtiene:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{00} \bar{h}_{00} = 4 \frac{\Phi_N}{c^2} . \quad (4.2.9)$$

³Para un análisis detallado, véase la discusión sobre el límite Newtoniano en la sección 3.4 de [30] y el capítulo 2.10 de [38]

En consecuencia, para determinar h_{00} , se sustituye este último resultado en la ecuación 4.2.8, de manera tal que, la componente temporal del término de perturbación corresponde a:

$$h_{00} = 4\frac{\Phi_N}{c^2} - \frac{1}{2}\eta_{00}(4\frac{\Phi_N}{c^2}) = 2\frac{\Phi_N}{c^2}. \quad (4.2.10)$$

Ahora bien, ya que los términos fuera de la diagonal son nulos por la acción de la métrica de Minkowsky, las componentes sobre la diagonal adoptan la siguiente forma

$$h_{ii} = 0 - \frac{1}{2}\eta_{ii}(4\frac{\Phi_N}{c^2}) = 2\frac{\Phi_N}{c^2}. \quad (4.2.11)$$

Para concluir, es posible representar los últimos resultados por medio del elemento de línea. Así, al tomar la definición general, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ y reemplazar la igualdad 4.1.1 sobre la misma, se obtiene que

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu. \quad (4.2.12)$$

Al representar anterior expresión en coordenadas cartesianas y considerando lo determinado en las ecuaciones 4.2.10 y 4.2.11, se concluye que el elemento de línea asociado a un espacio-tiempo caracterizado por una perturbación infinitesimal se representa matemáticamente como:

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{\Phi_N}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\frac{\Phi_N}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.2.13)$$

Particularmente, es posible determinar la representación matricial del factor de perturbación a partir de 4.2.13. En donde, si se describe el potencial gravitacional newtoniano como $\Phi_N = -\frac{GM}{r}$, se obtiene finalmente que:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2GM}{rc^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2GM}{rc^2} \end{bmatrix}. \quad (4.2.14)$$

Las relaciones 4.2.13 y 4.2.14 corresponden respectivamente a 4.12 y 4.11 de la referencia [30].

Lo desarrollado a lo largo de esta sección es fundamental, ya que, al analizar el régimen común a ambas teorías gravitacionales, se dedujeron cada una de las componentes de la métrica que describe un espacio-tiempo perturbado. Esto proporciona la posibilidad de estudiar el comportamiento de los cuerpos a través de las ecuaciones de movimiento del sistema.

4.3. Ecuaciones de movimiento y el principio de Fermat

Una manera formal de determinar la ecuación de movimiento de una partícula libre en el contexto de la relatividad general, es mediante la aplicación del principio variacional de Hamilton en

la acción⁴ del sistema. Es decir, el movimiento entre dos puntos debe ser tal que la acción sea estacionaria [39].

Para introducir esta condición, es necesario implementar un número real que parametrize los puntos a lo largo de las líneas de mundo⁵. En el contexto relativista, la mejor opción es el tiempo propio. Sin embargo, detallar cada línea de mundo respecto a su tiempo propio impide describirlas todas dentro de un mismo conjunto de valores. Por este motivo, se recurre a la coordenada temporal ordinaria t [30, 40].

Con base en lo anterior, la condición variacional sobre la acción estacionaria es descrita matemáticamente por

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0, \quad (4.3.1)$$

permitiendo así, deducir las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales se representan como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dq/dt)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (4.3.2)$$

La Figura 1 ilustra el principio variacional de Hamilton, al considerar, cómo la coordenada generalizada q traza múltiples trayectorias en el espacio de configuraciones, a medida que el sistema evoluciona. La línea sólida de color negro corresponde a la trayectoria con una acción estacionaria ($dS=0$) [30].

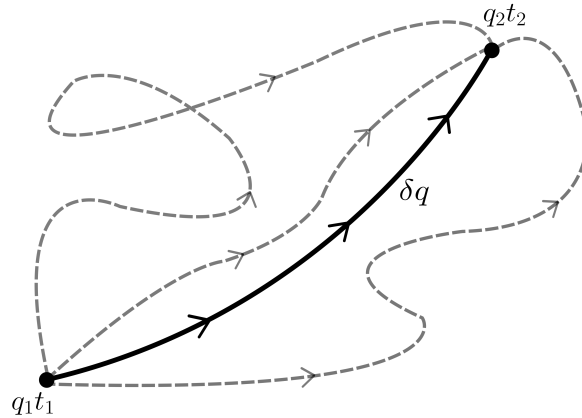


Figura 1: Ilustración del principio variacional de Hamilton, donde cada línea representa una trayectoria distinta en el espacio de configuraciones. Se destaca en particular la línea negra, asociada a una acción estacionaria.

Por otro lado, el principio de Fermat establece que la trayectoria que sigue la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado para recorrerla debe ser estacionario con respecto

⁴La acción es una funcional que se define como la integral en el tiempo de la lagrangiana del sistema, evaluada a lo largo de una trayectoria $q(t)$ específica [39].

⁵Una línea de mundo es la trayectoria que sigue un objeto en el espacio-tiempo.

a las posibles variaciones de la trayectoria. Este principio permite un enfoque alternativo en el estudio de las trayectorias de los rayos de luz al hacerlo desde el marco de la óptica geométrica [33].

Con el fin de introducir el concepto anterior en el contexto relativista, se considera que el elemento de línea del espacio-tiempo está dado por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, el cual describe la presencia de un campo gravitacional que se asume constante. Ahora bien, los rayos de luz se caracterizan por seguir una trayectoria nula en el espacio-tiempo, es decir, $ds^2 = 0$. Este resultado permite expresar la coordenada temporal como una función de las coordenadas espaciales [41,42], la cual, al integrarse a lo largo de la trayectoria, define la acción del sistema. Al extremarse dicha acción, se obtiene el principio de Fermat, cuya expresión en este contexto es:

$$\delta \int dx^0 = \delta \int (cdt) = 0. \quad (4.3.3)$$

Aunque físicamente se trata de dos conceptos distintos, el procedimiento anterior muestra una equivalencia matemática que permite interpretar la variación de x^0 de manera análoga a la variación de la acción en el principio de Hamilton [42]. Además, de acuerdo con [43], el principio de Fermat es aplicable en contextos más generales, como en métricas arbitrarias, estacionarias y no estacionarias.

Lo concluido en esta sección permitirá estudiar el ángulo de deflexión no solo desde la perspectiva relativista, sino también desde una más próxima a la óptica geométrica [33], brindando así al desarrollo teórico de las lentes gravitacionales un marco más general sobre el cual sustentarse.

4.4. Ángulo de deflexión debido a una masa puntual

El ángulo de deflexión es una manifestación física que resulta del cambio en la trayectoria de un haz de luz debido a la deformación del espacio-tiempo por la presencia de una distribución de masa [34]. En esta sección, dicha magnitud física será determinada desde una perspectiva simplificada, de modo que, la distribución de masa pueda aproximarse bajo ciertas condiciones por una masa puntual. Lo desarrollado aquí corresponde al desglose de los cálculos descritos en los capítulos 2.2 y 2.1 de las referencias [33,34], respectivamente.

Así pues, de lo concluido en la sección anterior, se realiza el análisis desde la perspectiva de la óptica geométrica, lo que lleva a interpretar la deflexión de la luz como un fenómeno de refracción. Para esto, se introduce un índice de refracción efectivo, definido como:

$$n_{\text{eff}} = \frac{c}{v_{\text{eff}}}, \quad (4.4.1)$$

donde v_{eff} es la velocidad coordenada de la luz medida por un observador situado en las lejanías del cuerpo deflector⁶. Se introduce la denominación “efectivo” porque, en este contexto, no hay un cambio real de medio. En su lugar, el anterior corresponde a una herramienta matemática útil

⁶La luz siempre viaja a c localmente; $v_{\text{eff}} \geq c$ es un efecto puramente coordinado debido a la distorsión del espacio-tiempo.

para describir cómo la gravedad modifica la trayectoria y la velocidad de la luz en presencia de un campo gravitacional.

Ahora bien, es posible escribir el diferencial en el principio de Fermat, en términos de n_{eff} , tal como se demuestra a continuación

$$dt = \frac{dl}{v_{\text{eff}}} = \frac{n_{\text{eff}}}{c} dl. \quad (4.4.2)$$

Así es factible describir el anterior principio bajo la igualdad

$$\delta \int n_{\text{eff}}(\vec{x}) dl = 0. \quad (4.4.3)$$

En este punto, se recuerda que el elemento de línea descrito corresponde a un espacio-tiempo plano perturbado. Sin embargo, la solución de Schwarzschild permite una interpretación análoga a grandes distancias. Al considerar un espacio-tiempo deformado únicamente por una distribución de masa esféricamente simétrica, estacionaria, sin carga ni momento angular; en el límite asintótico, el cuerpo deflector puede modelarse como una masa puntual con un campo gravitacional débil, de modo que puede interpretarse como una perturbación infinitesimal sobre la métrica de Minkowski. Lo descrito con anterioridad brinda la posibilidad de encontrar una equivalencia entre la métrica de Schwarzschild y la métrica linealizada. Este procedimiento se desarrolla en el apéndice A.2.

Así, para continuar, se tiene que el elemento de línea de Schwarzschild, en el límite asintótico, se describe aproximadamente como

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) (d\vec{x})^2. \quad (4.4.4)$$

Sin embargo, se estableció previamente que los rayos de luz satisfacen la condición $ds^2 = 0$. De este modo, es posible analizar cómo se ve afectada la luz al interactuar con el campo gravitacional mediante el término $|d\vec{x}|/dt$ en la igualdad 4.4.4. Con ello, se desarrolla el siguiente resultado

$$\frac{|d\vec{x}|}{dt} \equiv v_{\text{eff}} = c \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}}{1 - \frac{2\Phi_N}{c^2}}} \right) = c \left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4.5)$$

Dicho esto, al considerar que $\frac{2\Phi_N}{c^2} \ll 1$, es posible expandir los binomios de modo que al considerar términos solo de primer orden, se deduce que

$$v_{\text{eff}} \approx c \left(1 + \frac{\Phi_N}{c^2} \right) \left(1 + \frac{\Phi_N}{c^2} \right) \approx c \left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2} \right). \quad (4.4.6)$$

Lo que permite, por medio de la definición del índice de refracción, comparar las velocidades de la luz dentro y fuera de la influencia del campo gravitacional. De acuerdo con la ecuación 4.4.1, se obtiene que el índice de refracción efectivo es:

$$n_{\text{eff}} = \frac{c}{v_{\text{eff}}} \approx \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2} \right). \quad (4.4.7)$$

Ahora bien, este último es función de la trayectoria que sigue la luz, ya que está determinado por el campo gravitacional. Por lo tanto, el índice de refracción efectivo se puede denotar como $n_{\text{eff}}[\vec{x}(l)]$, lo que permite reescribir la ecuación 4.4.3 de la siguiente manera

$$\delta \int n_{\text{eff}}[\vec{x}(l)] dl = 0. \quad (4.4.8)$$

Considerando lo descrito sobre el principio variacional, el parámetro que minimiza la acción es la coordenada temporal t . Por lo tanto, la igualdad anterior puede parametrizarse respecto al tiempo, obteniendo la expresión

$$\delta \int n_{\text{eff}}[\vec{x}(t)] \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = 0, \quad (4.4.9)$$

de manera que, el argumento de la integral puede interpretarse como la lagrangiana del sistema. Por lo tanto, es posible deducir las ecuaciones de movimiento mediante la resolución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales, en este caso, corresponden a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\vec{x}/dt)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = 0. \quad (4.4.10)$$

Para determinar una solución analítica, en primera instancia, se desarrolla la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(n_{\text{eff}}[\vec{x}(t)] \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \right) = (\vec{\nabla} n_{\text{eff}}) \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|. \quad (4.4.11)$$

Así mismo, al analizar la derivada entre paréntesis, se deduce que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\vec{x}/dt)} = \frac{\partial}{\partial (d\vec{x}/dt)} \left(n_{\text{eff}}[\vec{x}(t)] \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \right) = n_{\text{eff}}[\vec{x}(t)] \left(\frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|} \right). \quad (4.4.12)$$

En consecuencia, al sustituir los dos últimos resultados en la relación 4.4.10, se determina que las ecuaciones de movimiento que gobiernan al sistema son:

$$\frac{d}{dt} \left[n_{\text{eff}}[\vec{x}(l)] \left(\frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|} \right) \right] - (\vec{\nabla} n_{\text{eff}}) \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = 0. \quad (4.4.13)$$

Para continuar, se impone la siguiente condición $|d\vec{x}/dt| \equiv c$ por facilidad en la notación. Con esto, la fórmula 4.4.13 puede describirse por

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(n_{\text{eff}} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = c \vec{\nabla} n_{\text{eff}}. \quad (4.4.14)$$

De manera que, al desarrollar la derivada temporal y aplicar la regla de la cadena sobre el índice de refracción efectivo, se determina que

$$\frac{d}{dt} \left(n_{\text{eff}} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = n_{\text{eff}} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{d\vec{x}}{dt} \left(\vec{\nabla} n_{\text{eff}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right), \quad (4.4.15)$$

la cual, al ser reemplazada en la expresión 4.4.14 y despejar $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}n_{\text{eff}}$, se obtiene la siguiente relación matemática

$$\frac{1}{c} \left[n_{\text{eff}} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{d\vec{x}}{dt} \left(\vec{\nabla} n_{\text{eff}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \right] = c \vec{\nabla} n_{\text{eff}} , \quad (4.4.16)$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} n_{\text{eff}} = c^2 (\vec{\nabla} n_{\text{eff}}) - \frac{d\vec{x}}{dt} \left(\vec{\nabla} n_{\text{eff}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) . \quad (4.4.17)$$

Donde el elemento entre paréntesis en el segundo término en el lado derecho de la igualdad representa la variación del índice de refracción a lo largo de la trayectoria del haz de luz⁷. Aunque este término no es necesariamente nulo a lo largo de la trayectoria completa, su contribución se cancela, ya que el cambio en la dirección del haz es generado únicamente por la influencia de las componentes perpendiculares a su desplazamiento.

En consecuencia, se obtiene que n_{eff} describe cómo varía la velocidad de propagación en la dirección perpendicular a la trayectoria del rayo, dando lugar así a su curvatura. Por este motivo, se introduce la representación explícita de esta característica por medio de $\vec{\nabla}_{\perp} n_{\text{eff}}$. Así, tras lo discutido, se tiene que la ecuación 4.4.17 toma la forma

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = c^2 \frac{1}{n_{\text{eff}}} \vec{\nabla}_{\perp} n_{\text{eff}} , \quad (4.4.18)$$

la cual, puede simplificarse al considerar que $\vec{\nabla} \ln x = \frac{1}{x} \vec{\nabla} x$. En consecuencia, se deduce finalmente que las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = c^2 (\vec{\nabla}_{\perp} \ln n_{\text{eff}}) . \quad (4.4.19)$$

La deducción de las anteriores permite analizar el comportamiento de los rayos de luz en el espacio-tiempo de interés. Para esto, se considera el índice de refracción efectivo descrito en la ecuación 4.4.7, de manera que las ecuaciones de movimiento toman la siguiente forma

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx c^2 \vec{\nabla}_{\perp} \left[\ln \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2} \right) \right] , \quad (4.4.20)$$

sobre la cual, al expandir en series de Taylor el logaritmo natural, y dado que el campo gravitacional es débil ($|\frac{\Phi_N}{c^2}| \ll 1$), se consigue la aproximación descrita a continuación

$$\left[\ln \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2} \right) \right] \approx -\frac{2\Phi_N}{c^2} , \quad (4.4.21)$$

de manera que, al sustituir lo anterior en la relación 4.4.20, se deduce finalmente que las ecuaciones que describen el sistema físico están caracterizadas por

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx -2 \vec{\nabla}_{\perp} \Phi_N . \quad (4.4.22)$$

⁷Este término corresponde, matemáticamente, a una derivada direccional, la cual se determina para una función $f(x, y)$ en la dirección del vector unitario $\hat{u} = (u_1, u_2)$ en el punto (a, b) como: $D_u f(a, b) = \vec{\nabla} f(a, b) \cdot \hat{u}$.

En este punto, se evidencia la ventaja interpretativa brindada por la óptica geométrica. Al parametrizar el trayecto del haz de luz por $\vec{x}(t)$, se tiene, por definición, que $d\vec{x}/dt$ es tangente a su trayectoria. Es decir, es posible representar el ángulo de deflexión mediante la relación entre las componentes de la velocidad del haz de luz a lo largo de la trayectoria, como se muestra en la Figura 2.

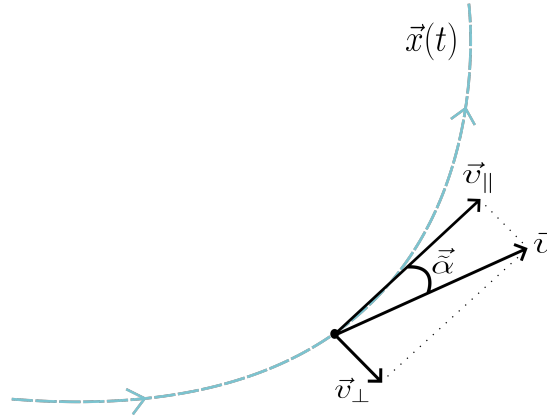


Figura 2: Visualización de la deflexión de la luz como resultado del cambio en la componente perpendicular de la velocidad del rayo, en presencia de un campo gravitacional débil. Las proporciones han sido exageradas con fines didácticos.

De este modo, para analizar el cambio en la velocidad del haz de luz que da lugar al ángulo de deflexión, se introduce la siguiente relación

$$\Delta\vec{v} = \int \vec{a} dt . \quad (4.4.23)$$

Ahora bien, es de interés describir la relación anterior a lo largo de la trayectoria del rayo de luz. Para ello, al considerar que este se propaga únicamente en la dirección z y dado que se satisface la condición $ds^2 = 0$, se deduce que $cdt = dz$. No obstante, para realizar esta modificación, es necesario introducir la aproximación de Born, la cual permite asumir que la contribución principal del potencial gravitacional proviene a lo largo de la trayectoria no perturbada. Esto se justifica en el caso de potenciales gravitacionales débiles, donde las diferencias entre las trayectorias reales y aproximadas son despreciables.

Con esto en mente, se tiene que la componente perpendicular del campo es la que induce la deflexión sobre la trayectoria no perturbada del haz de luz. De esta manera, el cambio de dirección puede ser analizado desde un plano transversal a la dirección de propagación del rayo incidente.

Las Figuras 3 y 4, ilustran de manera didáctica, en coordenadas cartesianas, la diferencia entre la deflexión real de un haz de luz y su aproximación con respecto al centro de masa (CM), considerando una distribución de masa acorde con la solución de Schwarzschild. Particularmente, la Figura 3 representa cómo el ángulo de deflexión varía a lo largo de la trayectoria, como resultado de la deformación del espacio-tiempo generada por una distribución de masa con geometría esférica. En contraste, la Figura 4 ilustra la deflexión desde un enfoque simplificado, es decir, el ángulo

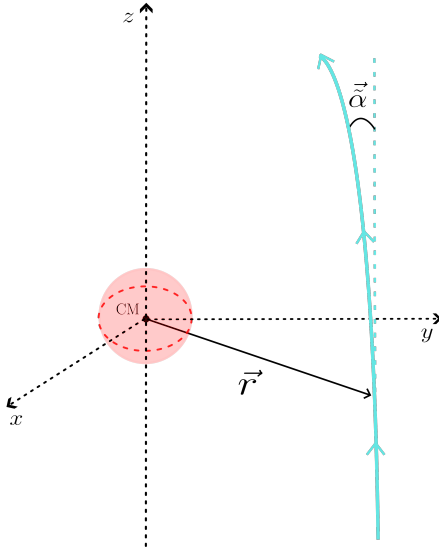


Figura 3: Descripción de la deflexión real de un haz de luz debido a una distribución de masa esférica, donde el ángulo de deflexión varía a lo largo de la trayectoria.

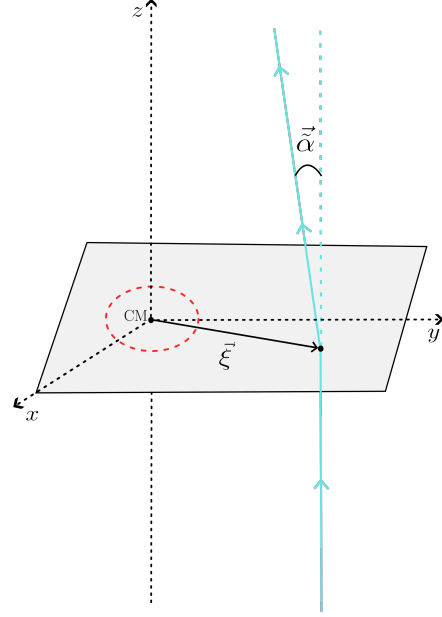


Figura 4: Deflexión de un haz de luz bajo la aproximación de Born, donde el ángulo se mide por el cambio de dirección respecto al plano transversal a la trayectoria no perturbada.

se mide a partir de un único punto sobre un plano transversal a la trayectoria no perturbada, y el cuerpo deflector también se representa sobre ese mismo plano.

De lo establecido, es posible representar la ecuación 4.4.23 como una integral sobre la coordenada espacial z , es decir

$$\Delta \vec{v} \approx \frac{1}{c} \int \vec{a} dz. \quad (4.4.24)$$

En donde, al describir la aceleración como $\vec{a} \equiv d^2 \vec{x} / dt^2$, es correcto introducir la relación 4.4.22 sobre la anterior igualdad, dando lugar a

$$\Delta \vec{v} \approx \frac{1}{c} \int (-2 \vec{\nabla}_{\perp} \Phi_N) dz. \quad (4.4.25)$$

Por otro lado, se caracteriza la velocidad del haz de luz que interactúa con el campo gravitacional como

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}, \quad (4.4.26)$$

en donde se asume que $|\vec{v}| \approx c$.

Ahora bien, del análisis sobre el índice de refracción efectivo, se tiene que el cambio en la velocidad se da en dirección perpendicular a la de propagación, es decir, $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{\perp}$, mientras que a lo largo de la trayectoria no existe una variación en la velocidad (aproximación de Born), esto es, $|\vec{v}_{\parallel}| = c$.

De este modo es posible realizar una equivalencia entre lo descrito y la expresión 4.4.26, como se representa a continuación

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad (4.4.27)$$

tal que, para satisfacer $|\vec{v}| \approx c$, se requiere que $|\vec{v}_{\perp}| \ll |\vec{v}_{\parallel}|$. En otras palabras, la desviación tangencial que experimenta el rayo debido a la presencia de un campo gravitacional débil es pequeña en comparación con su dirección de propagación, lo que resulta en una curvatura sutil que no altera significativamente la rapidez total del haz de luz.

Por su parte, el ángulo de deflexión, de acuerdo a la Figura 2 es definido de la siguiente manera:

$$\tan(|\vec{\alpha}|) = \left| \frac{\vec{v}_{\perp}}{\vec{v}_{\parallel}} \right|. \quad (4.4.28)$$

Sin embargo, al considerar lo discutido anteriormente, se concluye que la magnitud del ángulo en cuestión es muy pequeña, lo que permite introducir la aproximación de ángulo pequeño ($\tan x \approx x$). De este modo, el ángulo de deflexión, como vector, puede representarse mediante

$$\vec{\alpha} \approx \frac{\vec{v}_{\perp}}{\vec{v}_{\parallel}} \approx \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_{\perp} \Phi_N dz. \quad (4.4.29)$$

Para la determinación en el caso de un cuerpo deflector puntual, se tiene que, a grandes distancias y bajo las aproximaciones de campo débil, como la de Born, es posible considerar la distribución de masa descrita en la Figura 4 como puntual. Además, se introduce el parámetro de impacto (ξ), el cual representa, sobre el plano xy , la distancia a la que el haz de luz comienza a ser deflectado con respecto al centro gravitacional de la distribución de masa.

Así entonces, se considerará la forma del potencial newtoniano asociado a una masa puntual, dado por $\Phi_N = \frac{-GM}{r}$, donde la magnitud del vector de posición $\vec{r}$ se expresa en términos del parámetro de impacto y la coordenada axial como: $r = \sqrt{\xi^2 + z^2}$. Para determinar el ángulo de deflexión generado por una distribución de masa puntual, en primera instancia se desarrolla la representación del gradiente del potencial en coordenadas cilíndricas. Dada la simetría axial del cuerpo deflector, el gradiente se simplifica a:

$$\vec{\nabla}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{e}_{\xi}. \quad (4.4.30)$$

Por ende, el ángulo de deflexión resulta:

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{-GM}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} \right) \hat{e}_{\xi} dz. \quad (4.4.31)$$

Al desarrollar en primera instancia la derivada, se obtiene que esta operación es igual a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{-GM}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} \right) \hat{e}_{\xi} = -\frac{1}{2} \left[\frac{-GM}{(\xi^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] (2\xi) \hat{e}_{\xi} = \frac{GM\xi}{(\xi^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_{\xi}, \quad (4.4.32)$$

permitiendo así, que al sustituir el resultado anterior en la expresión 4.4.31 se obtenga la igualdad descrita a continuación

$$\vec{\alpha} = \frac{2GM\xi}{c^2} \hat{e}_\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz, \quad (4.4.33)$$

tal que, es posible resolver la integral mediante el cambio de variable $u = z/\xi$, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\xi^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\xi^2}. \quad (4.4.34)$$

Finalmente, al sustituir el valor de la integral sobre la ecuación 4.4.33 se determina que el ángulo de deflexión debido a una distribución de masa puntual está caracterizado por

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi} \hat{e}_\xi = \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{\xi}}{\xi^2}. \quad (4.4.35)$$

Esta última corresponde a la fórmula 2.41 de la referencia [33], más sin embargo es posible ser deducida desde otros enfoques, como lo describen las fuentes [30, 44]

Es necesario mencionar que, en general, la deducción del ángulo de deflexión mediante esta aproximación es correcta. Sin embargo, en casos específicos, como cuando la lente es muy compacta (estrella de neutrones o agujero negro), la solución deja de ser viable dado que los fotones interactúan con un campo gravitacional extremadamente fuerte. Es posible determinar un ángulo de deflexión para estos casos puntuales, pero la solución requiere de un enfoque numérico.

4.4.1. Comparación numérica entre la solución exacta y la aproximación

Con el objetivo de evaluar la validez del resultado anterior, se analiza numéricamente el movimiento de una partícula (o fotón) en caída libre dentro de un potencial gravitacional estático e isótropo. El elemento de línea que describe este sistema en su forma más general es:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.4.36)$$

La magnitud del ángulo de deflexión se determina estudiando las geodésicas del sistema. Ahora bien, dado que el cálculo de ésta cantidad es complejo y excede el alcance del presente trabajo, se recurre a los resultados reportados en [30, 33, 44, 45]. Así, el ángulo de deflexión se expresa como:

$$\tilde{\alpha} = 2 \left| \int_r^\infty [A(r)]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{r}{r_m} \right)^2 \left(\frac{B(r_m)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \right| - \pi, \quad (4.4.37)$$

donde r_m corresponde a la distancia mínima de aproximación del fotón al centro de la lente gravitacional.

De forma particular, sí se considera la solución de Schwarzschild, $B(r) = 1 - 2GM/rc^2$ y $A(r) = B(r)^{-1}$, y bajo la elección de coordenadas que confinan la trayectoria al plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), la integral tiene como solución exacta a:

$$\tilde{\alpha} = -\pi + \frac{4G}{c^2} \sqrt{\frac{r_m}{s}} F(\phi, m) . \quad (4.4.38)$$

En donde

$$s = \sqrt{(r_m - 2M)(r_m + 6M)} , \quad (4.4.39)$$

$$F(\phi, m) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} , \quad (4.4.40)$$

$$m = \frac{s - r_m + 6M}{2s} , \quad (4.4.41)$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3r_m - 6M + s}} . \quad (4.4.42)$$

siendo $F(\phi, m)$ una integral elíptica de primera clase.

Particularmente, ésta solución permite la deducción del ángulo de deflexión determinado por medio de la aproximación de campo débil, al considerar que la distancia mínima a la cual pasa el fotón es mucho mayor que el radio de Schwarzschild⁸ [45], es decir, si se tiene que $r \geq r_m \gg r_s$, la ecuación 4.4.37 es igual a:

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi} , \text{ con } \xi \approx r_m . \quad (4.4.43)$$

Una manera de evaluar la validez de la aproximación del ángulo de deflexión es considerar la relación de este respecto al parámetro de impacto. Al representar tanto la solución numérica como la obtenida desde la aproximación lineal, se observa que, al alejarse de la lente, ambas soluciones son congruentes, mientras que, al acercarse, las soluciones divergen completamente.

La Figura 5 está basada en el código de [33], el cual describe el comportamiento de ambas soluciones (bajo la influencia de un campo gravitacional fuerte) en función del parámetro de impacto ξ , el cual se encuentra descrito en relación al radio de Schwarzschild. Se aprecia el punto en el cual la solución numérica diverge, correspondiente a $\xi = 3\sqrt{3}GM/c^2$ (línea verde), representando físicamente el punto en el cual el fotón ya no logra escapar del campo gravitacional, manteniéndose así girando alrededor de la distribución de masa. Por otro lado, demuestra cómo ambas soluciones son congruentes a partir de $\sim 7r_s$ [33, 45].

⁸El radio de Schwarzschild describe el horizonte de eventos debido a un agujero negro estático, matemáticamente es descrito como $r_s = 2GM/c^2$.

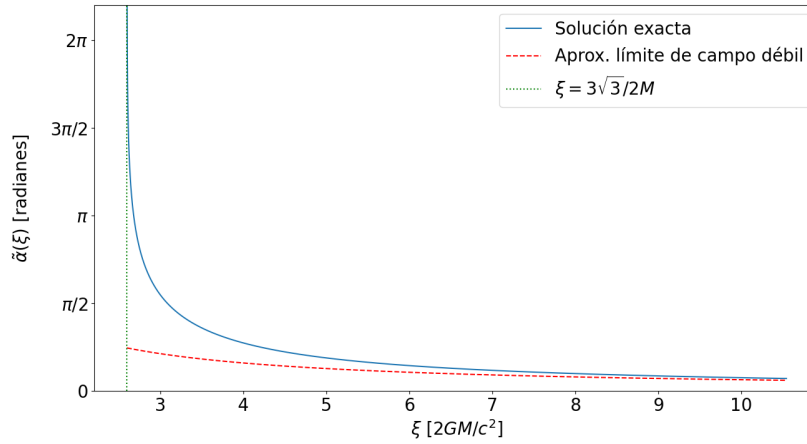


Figura 5: Ángulo de deflexión asociado a un agujero negro estático de 3 masas solares, mostrando la aproximación en el límite de campo débil y la solución numérica, en función del parámetro de impacto.

4.5. Ángulo de deflexión debido a una distribución continua de masa

El ángulo de deflexión determinado con antelación, si bien resulta una aproximación útil en el análisis teórico, es insuficiente para la investigación científica al describir un fenómeno físico a partir de una distribución de masa inexistente en la naturaleza. Por lo tanto, para analizar el ángulo de deflexión desde una perspectiva más realista, se considera modelar el cuerpo deflector como una distribución continua de masa. Los cálculos que se presentan a continuación se basan en las secciones 2.4 de [33], 2.1 de [29] y 2.2.1 de [34].

Anteriormente, se recurrió al marco de la óptica geométrica para analizar las trayectorias de los haces de luz. Sin embargo, dicho enfoque también permite considerar la aproximación de lente delgada, la cual se justifica en el hecho de que el tamaño físico de los objetos es insignificante en comparación con las distancias involucradas en el fenómeno de lente gravitacional [34, 46]. En consecuencia, los cuerpos deflectores se describen por la proyección de su distribución de masa sobre el plano tangente a la trayectoria no perturbada, y al ser esta proyección la responsable de la desviación de la luz, es correcto denominarles como “lentes”.

Para desarrollar esta idea, se describe la lente a través de su densidad volumétrica (ρ), desde la cual se introduce el concepto de densidad superficial de la lente (Σ), que corresponde a la cantidad de masa por unidad de área en el plano de la lente. Matemáticamente, se representa como:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz. \quad (4.5.1)$$

Ahora, dada la distribución del cuerpo deflector en el plano, es posible analizar el ángulo de deflexión a partir de los diferenciales superficiales asociados a la lente. Esto se representa en la Figura

6, donde se considera una fuente puntual que emite un haz de luz, el cual es deflactado por el elemento dM de la lente. La descripción de esta contribución se realiza en términos del vector $\vec{\xi}''$. Además, se especifica que CM representa el centro de masa de la proyección del cuerpo deflector.

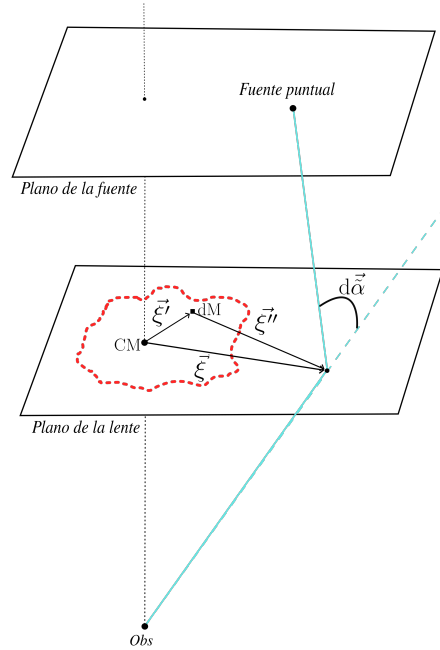


Figura 6: Representación gráfica del diferencial del ángulo de deflexión, considerando la proyección sobre el plano de la lente de una distribución continua de masa con geometría arbitraria. Se ilustra el ángulo total de deflexión en función del vector originado en el centro de masa (CM).

De acuerdo con lo anterior, la ecuación 4.4.35, toma la forma:

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G(dM)}{c^2} \frac{\vec{\xi}''}{\xi''^2}. \quad (4.5.2)$$

Ahora bien, al introducir la definición de densidad $\rho = dM/dV$ y sabiendo que es posible representar el diferencial de volumen de la lente⁹ como $dV = d\xi' dz$, se encuentra que el elemento diferencial de masa de la lente (dM) es igual a

$$dM = \rho d\xi' dz, \quad (4.5.3)$$

tal que al sustituir este resultado en la relación 4.5.2, se determina lo siguiente

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G(\rho d\xi' dz)}{c^2} \frac{\vec{\xi}''}{\xi''^2}. \quad (4.5.4)$$

⁹El vector $\vec{\xi}'$ caracteriza la posición del diferencial de masa de la lente con respecto al centro de masa de la misma.

Asimismo, se observa en la Figura 6 que es posible representar al vector $\vec{\xi}''$ en función de $\vec{\xi}'$. De este modo, el ángulo de deflexión infinitesimal se describe mediante:

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G(\rho d\xi' dz)}{c^2} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (4.5.5)$$

Para obtener el ángulo total de deflexión, se integra la expresión anterior sobre todo el espacio, distinguiendo así dos integrales: una a lo largo de trayectoria del haz en la dirección z , y otra sobre la proyección de la lente en el plano, tal que

$$\int d\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int_{\vec{\xi}'} \left(\int_z \rho dz \right) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d\vec{\xi}', \quad (4.5.6)$$

el término contenido entre paréntesis corresponde a la definición de la densidad superficial de la lente. Así, al sustituir la ecuación 4.5.1 en la anterior, se determina finalmente que:

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int_{\vec{\xi}'} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d\vec{\xi}'. \quad (4.5.7)$$

Dado que el procedimiento anterior se basa en lo establecido para una lente puntual, se considera que la ecuación 4.5.7 es válida siempre que el haz de luz deflectado permanezca cerca de la trayectoria original sin perturbaciones significativas. Aunque esta condición puede parecer restrictiva, en realidad se cumple en la mayoría de los casos, como por ejemplo para el ángulo de deflexión causado por una galaxia o por un cúmulo de galaxias [29].

Capítulo 5

Fenómeno de lente gravitacional

El efecto de lente gravitacional se refiere al fenómeno en el que la luz de un objeto distante se curva y se distorsiona debido a la existencia de un campo gravitacional, producido por la presencia de uno o múltiples cuerpos masivos. Dada la variedad de objetos celestes existentes, este fenómeno se caracteriza en tres subáreas: fuerte, débil y micro.

Algunas de sus aplicaciones incluyen la estimación de parámetros cosmológicos, su uso como telescopios naturales, por ejemplo, en la búsqueda de exoplanetas, y la medición de distribuciones de masa en el universo. Esta última es un área de gran interés en la investigación, dado que el fenómeno gravitacional es sensible a todo tipo de materia, tanto ordinaria como oscura [29, 30].

En el marco de este trabajo, el efecto de lente gravitacional fuerte es de especial interés, ya que describe una llamativa consecuencia de este fenómeno, la formación de múltiples imágenes. Estas surgen bajo ciertas condiciones, como una alineación casi perfecta entre observador, lente y fuente, además de que la densidad asociada al cuerpo deflector sea lo suficientemente alta para que algunos de los haces de luz deflectados converjan hacia el observador [33, 34].

El estudio de las imágenes formadas bajo el efecto de una lente gravitacional fuerte se perfila como una herramienta útil en la investigación contemporánea, ya que permite estudiar por ejemplo, la distribución de materia (ordinaria y oscura) en galaxias y cúmulos de galaxias [34, 47–51].

En el desarrollo de este capítulo se presentan de manera formal los conceptos necesarios para comprender la formación de imágenes en un sistema de lente gravitacional, respetando tanto las aproximaciones como el enfoque geométrico considerado en la deducción del ángulo de deflexión en el capítulo anterior.

5.1. Ecuación de la lente

Como punto de partida, es fundamental comprender los elementos que constituyen un sistema de lente gravitacional, la manera en que están relacionados y cómo de su análisis, se puede deducir la

ecuación que describe su interacción. Esta sección sigue y desarrolla los pasos intermedios de las referencias [33, 34, 44].

De manera general, un sistema de lente gravitacional considera la formación de una o varias imágenes (I) como consecuencia de la interacción entre la lente (L) y los rayos de luz provenientes de una fuente (S) con respecto al observador (O).

Dado que existen diversas configuraciones posibles para el cuerpo deflector, resulta oportuno tomar como punto de partida el caso más simple, es decir, cuando la lente corresponde a una distribución de masa puntual, como se muestra en la Figura 7.

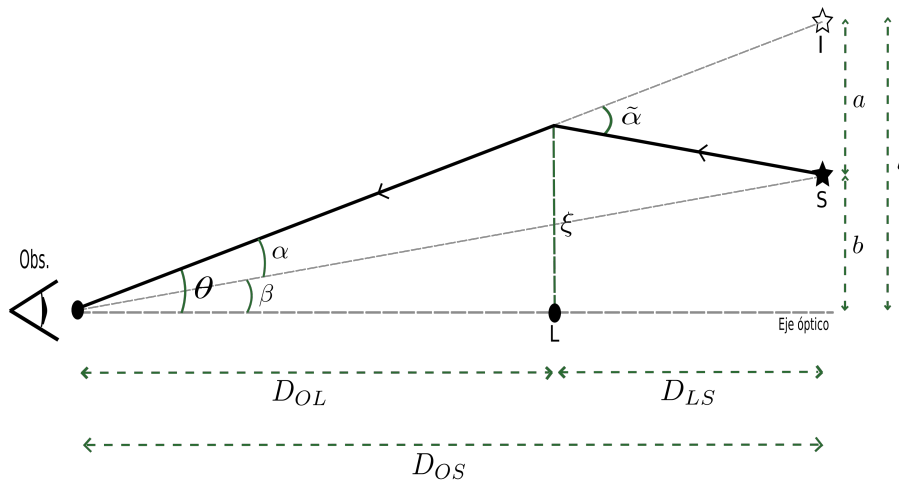


Figura 7: Configuración en una dimensión de un sistema lente gravitacional debido a una masa puntual.

Con respecto a la parte espacial, las distancias que caracterizan al sistema son: distancia entre observador y lente (D_{OL}), distancia entre observador y fuente (D_{OS}) y distancia entre lente y fuente (D_{LS}). La unidad de medida de las anteriores es el megapársec [Mpc]. La presentación teórica como la justificación de la adición de las mismas en el contexto de la cosmología se presentan en el Apéndice B.

Por otro lado, es posible expresar la posición de cada uno de los objetos mediante un ángulo respecto al eje óptico¹, denotándolos como: posición de la fuente (β), posición de la(s) imagen(es) (θ), posición de las imágenes respecto a la posición de la fuente (α) y finalmente el ángulo de deflexión ($\tilde{\alpha}$). La unidad correspondiente a estos ángulos es el arcosegundo [arcsec].

Ahora bien, dado que el orden de magnitud de las distancias que componen el sistema es significativo respecto al tamaño angular de los objetos, es sensato considerar la aproximación de ángulo pequeño ($\tan x \approx x$). En consecuencia, se obtiene:

$$\theta \approx \frac{l}{D_{OS}}, \quad \tilde{\alpha} \approx \frac{a}{D_{LS}}, \quad \beta \approx \frac{b}{D_{OS}}. \quad (5.1.1)$$

¹Por definición el eje óptico es la línea imaginaria que conecta el observador, con la lente gravitacional.

Ahora, al sustituir las expresiones previas en $l = a + b$, se deduce la ecuación

$$\theta D_{OS} \approx \beta D_{OS} + \tilde{\alpha} D_{LS} . \quad (5.1.2)$$

Con el objetivo de obtener una igualdad que relacione únicamente los términos angulares del sistema, se define al ángulo de deflexión reducido como

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} , \quad (5.1.3)$$

permitiendo así que, al reemplazar este resultado en 5.1.2, se obtenga la denominada ecuación de la lente para un sistema de lente gravitacional, siendo representada por la siguiente fórmula escalar:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) . \quad (5.1.4)$$

Se destaca que, en el capítulo anterior se determinó el ángulo de deflexión como una cantidad vectorial al ser representado en el plano de la lente, esto implica entonces, que la ecuación de la lente puede ser descrita también como una relación vectorial, es decir:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) . \quad (5.1.5)$$

Si bien la descripción angular permite estudiar el fenómeno de manera óptima en casos como el de una masa puntual, para configuraciones más complejas no resulta conveniente debido al tratamiento matemático requerido. Por este motivo, se busca introducir una notación adimensional. Cabe resaltar que dicha notación no solo facilita una descripción más práctica en los cálculos, sino que también corresponde a una de las convenciones más utilizadas en artículos dedicados al análisis de lentes gravitacionales.

Para ello, se considera una escala de longitud arbitraria ξ_0 en el plano de la lente, la cual, al ser proyectada sobre el plano de la fuente, tendrá asociada una magnitud η_0 , como se representa en la Figura 8. A partir de lo anterior, se deduce la expresión:

$$\eta_0 \equiv \xi_0 \frac{D_{OS}}{D_{OL}} . \quad (5.1.6)$$

De esta manera, es posible caracterizar dos vectores adimensionales: $\vec{x}$, que se encuentra en el plano de la lente e indica la posición de las imágenes, y $\vec{y}$, que se ubica en el plano de la fuente y señala la posición del cuerpo emisor. Así, se establece que:

$$\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} , \quad \vec{y} \equiv \frac{\vec{\eta}}{\eta_0} . \quad (5.1.7)$$

A su vez, de la configuración geométrica se resuelve:

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{\xi}}{D_{OL}} , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{\eta}}{D_{OS}} . \quad (5.1.8)$$

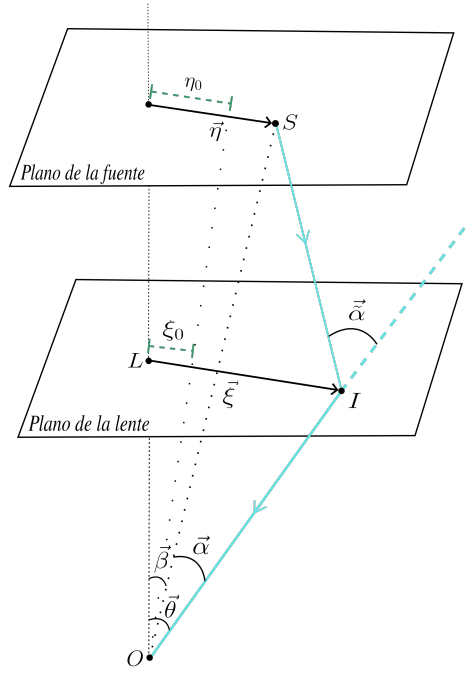


Figura 8: Ilustración del sistema de lente gravitacional en su configuración vectorial. La caracterización de ξ_0 y η_0 permite introducir la notación adimensional.

De modo que, al sustituir 5.1.8 en la igualdad 5.1.5 se obtiene

$$\frac{\vec{\eta}}{D_{OS}} = \frac{\vec{\xi}}{D_{OL}} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) , \quad (5.1.9)$$

en la cual, se introducen los vectores adimensionales, reformulando la expresión como:

$$\vec{y} \frac{\eta_0}{D_{OS}} = \vec{x} \frac{\xi_0}{D_{OL}} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) . \quad (5.1.10)$$

Ahora, al considerar la relación 5.1.6, y reorganizar los términos se deduce que la ecuación 5.1.10 toma la forma:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{D_{OL}}{\xi_0} \vec{\alpha}(\vec{\theta}) . \quad (5.1.11)$$

De esta última igualdad, se define el ángulo de deflexión reducido en términos de $\vec{x}$ como

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) \equiv \frac{D_{OL}}{\xi_0} \vec{\alpha}(\vec{\theta}) , \quad (5.1.12)$$

y al sustituir esta igualdad en 5.1.11, se tiene que la ecuación de la lente en notación adimensional es

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) . \quad (5.1.13)$$

Dadas las características bidimensionales de las lentes gravitacionales, una representación menos empleada, pero útil en el análisis de geometrías complejas, es la matricial. Esta permite expresar la ecuación de la lente en coordenadas cartesianas y en notación adimensional como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1(x_1, x_2) \\ \alpha_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \quad (5.1.14)$$

En esencia, la ecuación de la lente en un sistema de lente gravitacional describe, desde la perspectiva del observador, la relación entre la posición de una imagen observada y la posición real de la fuente, en coordenadas cartesianas, considerando el ángulo de deflexión inducido por la lente.

Aunque esta expresión es útil para el estudio de sistemas de lente gravitacional, en gran parte de la literatura la ecuación de la lente se expresa en función del potencial gravitacional, ya que esto permite una conexión más directa con la distribución de masa de la lente. A continuación, se analizará la relación entre estas cantidades.

5.2. Potencial gravitacional

Como se demostró anteriormente, en el límite de campo débil, el potencial gravitacional está asociado a la curvatura del espacio-tiempo, convirtiéndose en una herramienta fundamental para el estudio de la deflexión de la luz. Particularmente, en el marco de las lentes gravitacionales, es relevante comprender la relación entre las características del cuerpo deflector y la forma de su potencial, ya que la formación de imágenes y sus propiedades están directamente relacionadas con estas.

Esta sección toma como referencia los apartados 3.2 de [33], 2.2 de [29], 2.2.3 de [44] y 16.2 de [52]. Sin embargo, aquí se desarrollan los pasos intermedios que no se abordan en dichas fuentes.

En primera instancia, se analiza la relación entre la distribución de masa del cuerpo deflector y su potencial gravitacional. Esta relación se establece mediante la ecuación de Poisson², la cual se expresa matemáticamente como:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{\xi}) = 4\pi G \rho(\vec{\xi}). \quad (5.2.1)$$

Es de interés describir la anterior en dos dimensiones, de manera que sea coherente con la descripción sobre el plano de la lente. Así, al integrar 5.2.1 sobre la coordenada de propagación del haz de luz (eje z), se deduce que

$$\nabla^2 \psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi}). \quad (5.2.2)$$

La solución a la anterior ecuación diferencial, en este caso, se determina por medio de las funciones de Green. Así entonces, se busca determinar la función de Green que satisface la siguiente relación:

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \delta^{(2)}(\vec{\xi}, \vec{\xi}'), \quad (5.2.3)$$

donde $\delta^{(2)}$ caracteriza la delta de Dirac en dos dimensiones.

²El desarrollo de los cálculos se realiza en función del parámetro de impacto $\vec{\xi}$, definido en el capítulo anterior.

Por conveniencia, se asume que la fuente generadora del potencial gravitacional es una masa puntual. De esta manera, la función de Green depende únicamente de la coordenada radial,

$$G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = g(r) , \quad r = |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| . \quad (5.2.4)$$

En estas condiciones, el laplaciano puede expresarse en coordenadas polares como:

$$\nabla^2 g(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg(r)}{dr} \right) , \quad (5.2.5)$$

tal que para $r \neq 0$, la ecuación se integra dos veces, obteniéndose

$$g(r) = A \ln(r) + B . \quad (5.2.6)$$

Las constantes de integración se determinan aplicando la condición impuesta por la función delta de Dirac, lo que finalmente conduce a:

$$G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| . \quad (5.2.7)$$

Una vez determinada la función de Green, el potencial gravitacional que resuelve la ecuación 5.2.2 es de la forma

$$\psi(\vec{\xi}) = 2G \int d\vec{\xi}' \Sigma(\vec{\xi}') \ln(\vec{\xi} - \vec{\xi}') , \quad (5.2.8)$$

lo que describe el potencial gravitacional proyectado en función de la densidad superficial de masa de la lente, tal como se presenta en [29, 33, 44].

Como consecuencia del resultado anterior, es posible establecer una conexión con el ángulo de deflexión al aplicar a 5.2.8 el operador gradiente con respecto al parámetro de impacto, obteniendo

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \psi(\vec{\xi}) = 2G \int d\vec{\xi}' \Sigma(\vec{\xi}') \left[\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \ln(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \right] , \quad (5.2.9)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \psi(\vec{\xi}) = 2G \int d\vec{\xi}' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} . \quad (5.2.10)$$

Por otro lado, al considerar la ecuación 4.5.7 y ser reorganizada como

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{c^2} \left(2G \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d\vec{\xi}' \right) , \quad (5.2.11)$$

se observa que el termino entre paréntesis corresponde a la expresión 5.2.10, de modo que es posible describir el ángulo de deflexión por medio de

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \psi(\vec{\xi}) . \quad (5.2.12)$$

En este punto, es de interés expresar la ecuación anterior en notación angular para hacerla compatible con la ecuación de la lente. Para ello, se representa el potencial gravitacional proyectado como la integral sobre el eje z del mismo, descrito en tres dimensiones, como se muestra a continuación:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \left(\int \Phi(\vec{\xi}, z) dz \right). \quad (5.2.13)$$

Por otro lado, a partir de la relación 5.1.8 es posible aplicar la regla de la cadena sobre el operador $\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}$, es decir

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right), \text{ con } \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \quad (5.2.14)$$

de modo que, el operador gradiente en términos de $\vec{\theta}$, se expresa por

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} = \frac{1}{D_{OL}} \vec{\nabla}_{\vec{\theta}}. \quad (5.2.15)$$

Al sustituir ésta última sobre la relación 5.2.13 se determina que

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left[\frac{1}{D_{OL}} \int \Phi(\vec{\theta} D_{OL}, z) dz \right]. \quad (5.2.16)$$

Si bien en este punto ya se cuenta con una expresión del potencial gravitacional en notación angular, es de interés simplificarla. Para ello, se recurre a la definición del ángulo de deflexión reducido, lo que permite expresar la igualdad anterior en términos de todas las distancias del sistema y del potencial gravitacional de la siguiente manera

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left[\frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} \int \Phi(\vec{\theta} D_{OL}, z) dz \right], \quad (5.2.17)$$

dando lugar a la definición del potencial gravitacional reescalado (Ψ), el cual contiene la información necesaria para determinar el ángulo de deflexión descrito en la ecuación de la lente, facilitando el análisis a través de la proyección del cuerpo deflector. Matemáticamente, se representa como

$$\Psi(\vec{\theta}) \equiv \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} \int \Phi(\vec{\theta} D_{OL}, z) dz. \quad (5.2.18)$$

Con lo cual, se obtiene que el ángulo de deflexión reducido en notación angular es descrito por

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \Psi(\vec{\theta}), \quad (5.2.19)$$

lo que da lugar, en notación angular, a la ecuación de la lente en función del potencial gravitacional reescalado por medio de

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \Psi(\vec{\theta}). \quad (5.2.20)$$

De manera análoga al procedimiento de la sección anterior se busca introducir la notación adimensional. Para ello, se considera el procedimiento de 5.2.14, de modo que, al aplicarlo sobre la relación de $\vec{x}$ en 5.1.7, se obtiene lo siguiente

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} = \frac{1}{\xi_0} \vec{\nabla}_{\vec{x}}, \quad (5.2.21)$$

el cual al ser igualado con 5.2.15, permite expresar la relación del operador gradiente tanto en notación angular como en notación adimensional, por medio de

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} = \frac{D_{OL}}{\xi_0} \vec{\nabla}_{\vec{x}} . \quad (5.2.22)$$

A su vez, al sustituir lo anterior sobre la ecuación 5.2.19 y multiplicar ambos lados de la igualdad por D_{OL}/ξ_0 , se deduce

$$\frac{D_{OL}}{\xi_0} \vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left[\frac{D_{OL}^2}{\xi_0^2} \Psi(\vec{\theta}) \right] . \quad (5.2.23)$$

En este punto, se define al termino contenido entre corchetes como el potencial gravitacional reescalado en notación adimensional ($\hat{\Psi}$) como

$$\hat{\Psi}(\vec{x}) \equiv \frac{D_{OL}^2}{\xi_0^2} \Psi(\vec{\theta}) , \quad (5.2.24)$$

de tal manera que, tras la última definición y de acuerdo a la expresión 5.1.12, finalmente se describe la relación entre el ángulo y el potencial gravitacional proyectado en notación adimensional como

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \hat{\Psi}(\vec{x}) . \quad (5.2.25)$$

De este último resultado, se deduce, de manera similar a la descripción angular, la ecuación de la lente en notación adimensional por medio de

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\nabla}_{\vec{x}} \hat{\Psi}(\vec{x}) . \quad (5.2.26)$$

5.2.1. Conexión con la densidad superficial y la densidad crítica

Como se mencionó antes, una de las condiciones necesarias para la formación de múltiples imágenes es que el potencial gravitacional asociado a la lente genere una deflexión considerable sobre los rayos de luz. Esto hace necesaria la introducción de un parámetro de comparación, conocido como densidad superficial crítica. Con el fin de estudiar esta condición, se hará uso de los resultados de la sección anterior, de manera que se obtenga una expresión que relacione el potencial gravitacional reescalado con la distribución de masa de la lente de una forma más sencilla [52].

En primera instancia, se aplica el operador Laplaciano sobre 5.2.18, dando lugar a la siguiente expresión

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} \int \nabla_{\vec{\theta}}^2 \Phi(\vec{\theta} D_{OL}, z) dz . \quad (5.2.27)$$

Por otro lado, al determinar la divergencia del gradiente en la ecuación 5.2.15, se deduce que el Laplaciano es:

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 = D_{OL}^2 \nabla_{\vec{\xi}}^2 . \quad (5.2.28)$$

Dada la descripción del sistema de lente gravitacional, se conoce que la representación del operador Laplaciano en coordenadas cartesianas asociadas al vector $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ se escribe como

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad (5.2.29)$$

sin embargo, una representación alternativa es por medio de

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 \Phi = \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (5.2.30)$$

donde, al reemplazar la ecuación de Poisson descrita en 5.2.1 en la anterior, se obtiene

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 \Phi = 4\pi G \rho(\vec{\xi}) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (5.2.31)$$

de manera que, al sustituir este último resultado sobre 5.2.28 y lo deducido en 5.2.27, se deriva la siguiente igualdad

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \left[\int 4\pi G \rho(\vec{\xi}) dz - \int \frac{\partial^2 \Phi(\vec{\xi}, z)}{\partial z^2} dz \right]. \quad (5.2.32)$$

En particular, se tiene que, gracias a la aproximación de Born, se interpreta la deflexión del haz de luz como un fenómeno confinado al plano transversal de la lente (xy), donde el efecto gravitacional se proyecta de manera efectiva. En la práctica, esto implica que la contribución del potencial a lo largo de la dirección de propagación (z) puede omitirse, reduciendo el problema a un modelo bidimensional. Físicamente, esto equivale a asumir que la deflexión ocurre en un plano transversal a la trayectoria del haz, con $\frac{\partial^2 \Phi(\vec{\xi}, z)}{\partial z^2} \approx 0$, dado que las variaciones del potencial en z son despreciables frente a las del plano xy . Con lo cual, se determina que

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS} D_{OL} (4\pi G)}{D_{OS}} \int \rho(\vec{\xi}) dz, \quad (5.2.33)$$

$$= 2 \left(\frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \right) \Sigma(D_{OL} \vec{\theta}), \quad (5.2.34)$$

siendo que el inverso del término entre paréntesis en la última igualdad se define como la densidad superficial de masa crítica (Σ_{cri}), es decir

$$\Sigma_{\text{cri}} \equiv \left(\frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \right)^{-1}. \quad (5.2.35)$$

En otras palabras, es posible representar el Laplaciano del potencial gravitacional reescalado en términos de la densidad superficial de la lente y la densidad superficial crítica, por medio de

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}) = 2 \frac{\Sigma(D_{OL} \vec{\theta})}{\Sigma_{\text{cri}}}. \quad (5.2.36)$$

Esta última igualdad reitera la importancia de la densidad superficial crítica, ya que, al estar asociada con el potencial gravitacional, establece el umbral que determina si la distribución de masa del objeto deflector podrá actuar como una lente fuerte, dando lugar a la formación de múltiples imágenes.

Análogamente, al igual que en los casos previos, para representar ésta última igualdad en notación adimensional, se calcula el Laplaciano al evaluar la divergencia de 5.2.22, de tal manera que

$$\nabla_{\theta}^2 = \frac{D_{OL}^2}{\xi_0^2} \nabla_{\vec{x}}^2. \quad (5.2.37)$$

Además, al considerar la igualdad 5.2.24 se obtiene que la relación entre el Laplaciano del potencial gravitacional en notación angular y en notación adimensional es

$$\nabla_{\theta}^2 \Psi(\vec{\theta}) = \left[\frac{D_{OL}^2}{\xi_0^2} \nabla_{\vec{x}}^2 \right] \left[\frac{\xi_0^2}{D_{OL}^2} \hat{\Psi}(\vec{x}) \right], \quad (5.2.38)$$

$$= \nabla_{\vec{x}}^2 \hat{\Psi}(\vec{x}). \quad (5.2.39)$$

permitiendo así, representar a 5.2.36 en función de $\vec{x}$ por medio de

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \hat{\Psi}(\vec{x}) = 2 \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{\text{cri}}}. \quad (5.2.40)$$

Como se describió a lo largo de esta sección, una de las características del potencial gravitacional es la posibilidad de ser representado en diferentes coordenadas, lo que, en la práctica, resulta fundamental para elegir el sistema más adecuado en función de la geometría de la lente. La relación anterior será de gran utilidad para estudiar configuraciones elípticas o esféricas.

5.3. Superficie tiempo de atraso

Las imágenes son uno de los principales observables para el análisis de los sistemas de lente gravitacional, permitiendo estudiar entre otros, la geometría del sistema, las distancias de la fuente y la lente, la distribución de masa de la lente, los parámetros cosmológicos y el tiempo de atraso entre las imágenes. En específico, es de interés este último, ya que se origina como resultado de las diferentes posibles trayectorias generadas por la geometría del sistema (δt_{geo}) y los efectos gravitacionales asociados a la lente (δt_{grav}). Lo descrito anteriormente es la clave para entender el concepto de la superficie de tiempo de atraso, que describe por medio del principio de Fermat cómo varía el tiempo entre los haces de luz que dan lugar a las distintas imágenes.

Este fenómeno se analiza tomando como referencia las secciones 4.1.2 de [29], 2.2.2 y 3.5 de [44], 3.6.1 de [33] y 16.2 de [52], complementando con el desarrollo de los pasos intermedios que no se abordan en dichas fuentes.

A partir de lo descrito, como punto de partida se tiene que existe un tiempo de atraso debido tanto a una contribución gravitacional como a una geométrica. Por ello, el tiempo de atraso total en un sistema de lente gravitacional se define como la suma de ambas contribuciones, es decir

$$\delta t \equiv \delta t_{grav} + \delta t_{geom} , \quad (5.3.1)$$

donde el análisis de cada una de las anteriores se resolverá a continuación.

5.3.1. Tiempo de atraso gravitacional

También denominado tiempo de Shapiro, se relaciona con el fenómeno de dilatación temporal³ en el sentido de que, dada la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de un cuerpo masivo, un haz de luz que pasa cerca de dicha distribución de masa experimenta un retraso temporal adicional en su trayectoria. Este concepto desempeña un papel fundamental en la comprensión de la gravitación, ya que ofrece pruebas empíricas directas de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa [30].

Inicialmente, para analizar el comportamiento de los fotones se considera el elemento de línea de la métrica linealizada 4.2.13, en el cual por facilidad en los cálculos, se asumirá que los haces de luz describen una trayectoria solamente a lo largo de la coordenada z . Además, dado que satisfacen $ds^2 = 0$, se obtiene la siguiente relación

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 \approx \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dz^2 , \quad (5.3.2)$$

de tal manera que, al despejar el diferencial de tiempo, se deduce

$$dt = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz , \quad (5.3.3)$$

ahora bien, ya que el potencial gravitacional es débil, se expanden de acuerdo al teorema binomial los términos entre paréntesis hasta primer orden, dando lugar a:

$$dt \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) dz \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dz . \quad (5.3.4)$$

Al integrar la anterior relación, se determina que el tiempo medido por un observador distante a la lente, es de la forma

$$t = \frac{z}{c} - \frac{1}{c} \int \left(\frac{2\Phi}{c^2}\right) dz . \quad (5.3.5)$$

En donde, el primer término representa el tiempo que le tomaría al haz de luz viajar en el vacío desde la fuente hasta el observador sin considerar fenómenos gravitacionales ($z/c \equiv t_0$). El segundo término corresponde al retraso temporal (δt_{grav}), siendo descrito matemáticamente como

$$\delta t_{grav} \equiv -\frac{2}{c^3} \int \Phi(z) dz . \quad (5.3.6)$$

³La dilatación temporal es el efecto por el cual el tiempo transcurre más lentamente en presencia de un campo gravitacional.

Si bien la ecuación anterior ya permite determinar el tiempo de atraso gravitacional, es de interés describirla en términos del potencial gravitacional reescalado 5.2.18 como:

$$\delta t_{grav} = -\frac{1}{c} \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \Psi. \quad (5.3.7)$$

La expresión anterior puede reescribirse en notación adimensional al considerar la relación dada en 5.2.24, obteniéndose así

$$\delta t_{grav}(\vec{x}) = -\frac{\xi_0^2}{c} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}} \hat{\Psi}(\vec{x}). \quad (5.3.8)$$

5.3.2. Tiempo de atraso geométrico

El tiempo de atraso geométrico es consecuencia de la configuración geométrica del sistema de lente gravitacional. Debido a la presencia de la lente, los fotones emitidos por la fuente siguen trayectorias distintas, a pesar de interactuar con el mismo potencial gravitacional, generando así un retraso temporal relativo entre las imágenes observadas [33].

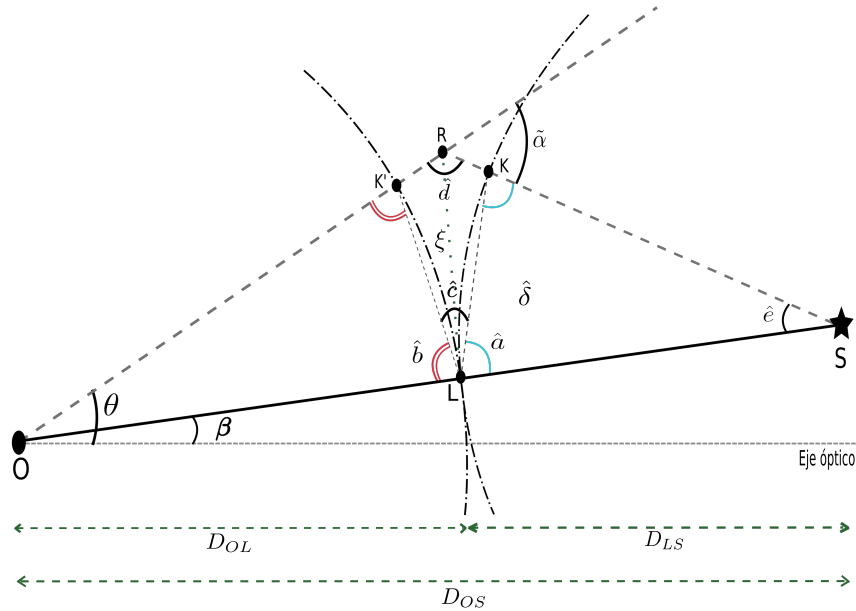


Figura 9: Sistema para describir el tiempo de atraso geométrico.

Con el fin de estudiar este fenómeno, se analiza el sistema representado en la Figura 9, en el cual se destacan dos trayectorias. La primera, denotada por la línea segmentada, representa un haz de luz que ha sido deflexado una cantidad $\tilde{\alpha}$ y llega hasta el observador; la segunda, caracterizada por la línea sólida, indica la trayectoria que tomaría la luz en ausencia de la lente. Así, para determinar el tiempo de atraso geométrico, se propone calcular la diferencia entre estas trayectorias.

Como punto de partida, se trazan dos círculos centrados en O y S , respectivamente, imponiendo que sean tangentes a L . Por otro lado, se caracterizan los triángulos isósceles $\triangle OLK'$ y $\triangle SLK$ a partir de la trayectoria del haz de luz deflectado. De este modo, bajo el régimen de campo débil, la aproximación Born y la aproximación de lente delgada, la diferencia en las trayectorias (infinitesimal) corresponde a

$$\delta l \approx \xi \hat{c}, \quad (5.3.9)$$

mientras que, con respecto a la geometría se deduce, las siguientes relaciones

$$\hat{d} + \tilde{\alpha} = \pi, \quad (5.3.10)$$

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi. \quad (5.3.11)$$

Por otro lado, al analizar los triángulos se establece lo siguiente

$$\triangle OLK' \rightarrow \pi - 2\hat{b} = \theta - \beta, \quad (5.3.12)$$

$$\triangle SLK \rightarrow \hat{e} = \pi - 2\hat{a}, \quad (5.3.13)$$

$$\triangle SRO \rightarrow \hat{e} + (\theta - \beta) + \hat{d} = \pi. \quad (5.3.14)$$

El conjunto de ecuaciones descrito hasta el momento es de interés, ya que permitirá caracterizar la diferencia entre las trayectorias en función del ángulo de deflexión. De esta manera, al sustituir los resultados de las igualdades 5.3.12 y 5.3.13 en 5.3.14 y reorganizar, se obtiene

$$\pi + \hat{d} = 2\hat{a} + 2\hat{b}, \quad (5.3.15)$$

sobre la cual, al sustituir π de la expresión 5.3.11 y simplificar los términos correspondientes, se deduce

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d}. \quad (5.3.16)$$

Asimismo, al despejar $\hat{a} + \hat{b}$ de 5.3.11 e igualar dicho resultado con la expresión anterior, se establece que

$$2\hat{c} = \pi - \hat{d}, \quad (5.3.17)$$

de modo que, al sustituir $\pi - \hat{d}$ de 5.3.10 se concluye

$$\hat{c} = \frac{\tilde{\alpha}}{2}. \quad (5.3.18)$$

Es decir, a partir de la igualdad anterior, se encuentra que la diferencia entre las trayectorias es directamente proporcional al ángulo de deflexión y al parámetro de impacto. Considerando la naturaleza vectorial de las cantidades involucradas, dicha relación se representa mediante

$$\delta l \approx \frac{\vec{\xi} \cdot \vec{\tilde{\alpha}}}{2}. \quad (5.3.19)$$

La relación anterior se puede expresar en términos de la posición de la fuente y de las imágenes a partir de la relación trigonométrica mostrada en la Figura 9, donde vectorialmente se tiene que

$\vec{\xi} = (\vec{\theta} - \vec{\beta})D_{OL}$. Además, al considerar tanto la definición del ángulo de deflexión reducido dada en 5.1.3, como la ecuación de la lente 5.1.5, se tiene que la diferencia en las trayectorias es

$$\delta l = \frac{1}{2} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2. \quad (5.3.20)$$

Finalmente, para determinar el tiempo asociado a la diferencia entre las trayectorias, se considera que este está dado por $\delta t_{geom} = \frac{\delta l}{c}$. En consecuencia, el tiempo geométrico se expresa como:

$$\delta t_{geom} = \frac{1}{2c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2. \quad (5.3.21)$$

De manera análoga al caso anterior, esta puede expresarse en notación adimensional al considerar la relación dada en 5.1.12 y representar a $\vec{\xi} = \frac{\xi_0}{D_{OL}}(\vec{x} - \vec{y})$, de modo que la diferencia entre las trayectorias es

$$dl(\vec{x}) = \frac{\xi_0^2}{2} \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}} |\vec{x} - \vec{y}|^2, \quad (5.3.22)$$

y, en consecuencia, el tiempo de atraso geométrico en notación adimensional es descrito matemáticamente por:

$$\delta t_{geom}(\vec{x}) = \frac{\xi_0^2}{2c} \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}} |\vec{x} - \vec{y}|^2. \quad (5.3.23)$$

5.3.3. Tiempo de atraso total

La deducción de los tiempos de atraso previamente obtenidos se ha realizado bajo la consideración de un universo estático. No obstante, es bien conocido que el universo se encuentra en expansión, por lo que, para describir de manera adecuada el tiempo de atraso asociado al fenómeno de lente gravitacional, es necesario incorporar dicho efecto. De este modo, las ecuaciones 5.3.7 y 5.3.21 toman la forma

$$\delta t_{grav} = -\frac{(1+z_L)}{c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} \Psi, \quad (5.3.24)$$

$$\delta t_{geom} = \frac{(1+z_L)}{2c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2. \quad (5.3.25)$$

Es importante destacar que el factor de expansión que corrige el tiempo de atraso es el corrimiento al rojo de la lente z_L , ya que es en este punto donde los rayos de luz cambian su trayectoria debido a la presencia del potencial gravitacional. La inclusión de este término no solo refleja dicho cambio de trayectoria, sino que también incorpora la naturaleza del fenómeno de dilatación temporal en los haces de luz, consecuencia tanto de la distorsión del espacio-tiempo inducida por la lente como de su posición en un universo en expansión, tal como se establece en la literatura. [29, 33, 44, 53].

Así, tras la última consideración, el tiempo de atraso total se expresa como una relación que involucra las distancias angulares características del sistema, las posiciones de las imágenes, la posición

de la fuente, corrimiento al rojo de la fuente y, finalmente, el potencial gravitacional reescalado, a través de la siguiente ecuación:

$$\delta t = \frac{(1 + z_L)}{c} \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \left(\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi \right). \quad (5.3.26)$$

La cual, en su representación adimensional se escribe como:

$$\delta t(\vec{x}) = (1 + z_L) \frac{\xi_0^2}{c} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}} \left(\frac{1}{2} |\vec{x} - \vec{y}|^2 - \hat{\Psi}(\vec{x}) \right). \quad (5.3.27)$$

5.3.4. Potencial de Fermat

Ahora, con el fin de relacionar el tiempo de atraso total con la formación de imágenes en un sistema de lente gravitacional, se considera la ecuación de la lente en notación angular. De esta manera, al interpretar la posición de la fuente como un parámetro adicional, se obtiene lo siguiente:

$$\vec{\theta} - \vec{\beta} - \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \Psi(\vec{\theta}) = 0. \quad (5.3.28)$$

Sobre esta última, al factorizar el operador gradiente se determina una función escalar definida en el plano de la lente. Esta función depende tanto de la posición de las imágenes, como de la posición de la fuente y recibe el nombre de potencial de Fermat $\tau(\vec{\theta}, \vec{\beta})$, siendo representada matemáticamente como:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} [\tau(\vec{\theta}; \vec{\beta})] \equiv \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi(\vec{\theta}) \right] = 0. \quad (5.3.29)$$

Esta relación introduce el principio de Fermat, dado que, la formación de imágenes ocurre cuando la trayectoria seguida por la luz es tal que el tiempo de viaje es un extremal. Sin embargo, se tiene que el potencial de Fermat es proporcional al tiempo de atraso total en 5.3.26, permitiendo así describir el principio de Fermat por medio de

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \delta t = \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left[\frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \left(\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi \right) \right] = 0. \quad (5.3.30)$$

Por facilidad en la notación, se realiza dos consideraciones: la primera introduce la distancia de tiempo de atraso de la siguiente manera

$$D_{t.a} \equiv (1 + z_L) \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}}, \quad (5.3.31)$$

y la segunda es para evitar ambigüedades por la notación, ya que en cálculos posteriores se determina la derivada de la función tiempo de atraso, con lo cual $\mathcal{T} \equiv \delta t$. Así entonces, se deduce finalmente que

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \mathcal{T} = \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left[\frac{D_{t.a}}{c} \left(\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi \right) \right] = 0. \quad (5.3.32)$$

La anterior igualdad define una superficie bidimensional parametrizada por las coordenadas de las imágenes $\vec{\theta}$, cuyo nombre es superficie tiempo de atraso. Particularmente, se tiene que el objeto principal de estudio de este proyecto es la proyección de los contornos de nivel de esta superficie sobre el plano de la lente, permitiendo, desde los mismos, analizar la formación de imágenes como se representa en la Figura 10.

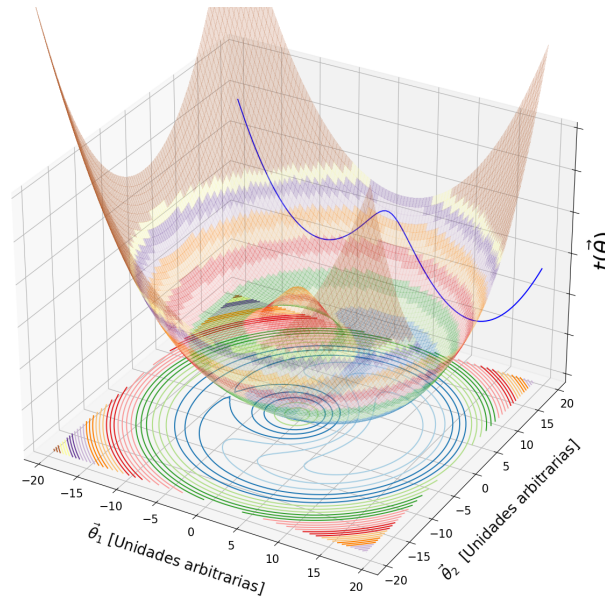


Figura 10: uperficie de tiempo de atraso para una distribución de masa esférica con núcleo, donde se visualiza la proyección de sus líneas de contorno sobre el plano de la lente. Las unidades son arbitrarias.

Se destaca que la forma del paraboloide varía de acuerdo con la contribución de cada uno de los términos del tiempo de atraso. La contribución geométrica describe un paraboloide centrado en la posición de la fuente, mientras que la gravitacional aporta características adicionales a dicha superficie [44].

Una perspectiva unidimensional permite comprender mejor la relación entre estas contribuciones, como se representa en la Figura 11, la cual ilustra de manera conceptual la contribución de cada uno de los retardos temporales y como éstos dan lugar a la formación de imágenes en las los puntos donde el tiempo de atraso total es estacionario.

En la Figura 11, se observa que, conforme la lente se desplaza con respecto al eje óptico, la posición de las imágenes se modifica. En el caso de $\beta = 0$, dos de las imágenes se encuentran a la misma distancia respecto a la fuente, mientras que la tercera está superpuesta a su posición. Para $\beta = 4$, aún se resuelven tres imágenes: dos de ellas están más próximas entre sí, mientras que la más prominente se ubica más alejada. Finalmente, para $\beta = 10$, aunque el efecto de lente gravitacional aún está presente, la fuente se encuentra tan alejada del eje óptico definido por el observador y la lente que únicamente se resuelve una imagen. Es pertinente mencionar que el código utilizado para el desarrollo de las Figuras 10 y 11 corresponde a la referencia [33].

Finalmente, el potencial de Fermat brinda información sobre las regiones en las cuales habrá for-

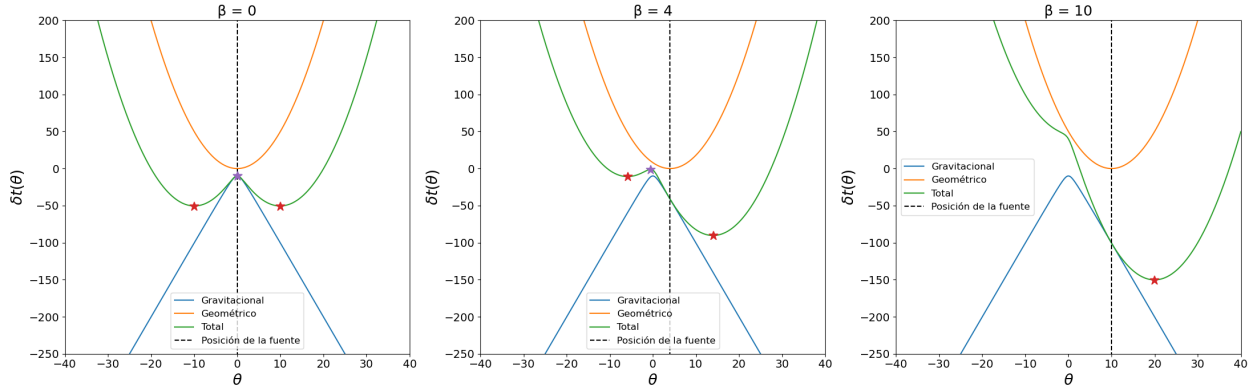


Figura 11: Superficie de tiempo de atraso en 1D para una distribución de masa esférica con núcleo, con la fuente variando su posición. Las unidades son arbitrarias.

mación de imágenes, más aún, las mismas pueden ser estudiadas a mayor profundidad. En este contexto, surgen dos conceptos clave: la amplificación y la magnificación. Estos efectos describen características físicas distintas de las imágenes, pero complementarias entre sí.

5.4. Magnificación y amplificación

Esta sección se desarrolló considerando el contenido relacionado con magnificación y amplificación presente en las siguientes referencias [34, 44, 52, 53]. En particular, se presenta de manera explícita los pasos intermedios.

Se define la magnificación como el fenómeno en el cual la deflexión de múltiples rayos de luz, configura imágenes deformadas de la fuente en relación con su tamaño original. Es decir, la magnificación es una medida de cuánto aumenta el tamaño angular de una imagen de una fuente distante debido al efecto de lente gravitacional. Matemáticamente se define como:

$$\mu \equiv \frac{\text{Área de la imagen}}{\text{Área de la fuente}}. \quad (5.4.1)$$

Dicha deformación puede describirse a través del jacobiano de la transformación entre las coordenadas del plano de la lente y las del plano de la fuente. En consecuencia, se introduce el tensor de magnificación por medio de

$$\mu_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j}. \quad (5.4.2)$$

El cambio total en el tamaño de una imagen con respecto al tamaño de la fuente es especificado por el determinante de la anterior, dando lugar así al parámetro de magnificación, caracterizado por

$$\mu \equiv |\mu_{ij}| = \left| \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j} \right|. \quad (5.4.3)$$

Una característica importante del término de magnificación es que para ciertos valores de $\vec{\beta}$, μ diverge; en estos puntos, desde la perspectiva matemática, se tiene una magnificación infinita y se denominan puntos críticos. Tal divergencia indica que, cerca de los puntos críticos, la aproximación de la óptica geométrica falla y debe aplicarse la óptica física [53].

Por otro lado, la amplificación se interpreta como el aumento aparente⁴ del brillo de un objeto distante, resultado de la distorsión y concentración de los rayos de luz inducida por un sistema de lente gravitacional. Su definición formal establece que el flujo percibido por el observador desde una superficie corresponde al producto de su brillo superficial con el ángulo sólido que abarca. Es importante destacar que, si bien el brillo superficial se conserva, la luminosidad de la fuente se verá amplificada, dado que la desviación de los rayos de luz modifica la forma y el ángulo sólido de la fuente [44]. Matemáticamente, la amplificación se representa como

$$A = \frac{d\Omega}{d\Omega_0}, \quad (5.4.4)$$

siendo, $d\Omega$ el ángulo sólido observado y $d\Omega_0$ el ángulo sólido subtendido por la fuente en ausencia de la lente.

En particular, como ejemplo, consideraremos una configuración en la cual la lente posee simetría axial⁵; específicamente, el caso de una lente puntual. Este tipo de lente, como se analizará más adelante, da lugar a la formación de dos imágenes, de modo que el ángulo sólido cubierto por cada una de ellas está representado por dS_+ y dS_- , correspondientes a la proyección del ángulo sólido de la fuente en su respectivo plano, tal y como se muestra en la Figura 12.

De lo establecido, se tiene que, dada la posición de la fuente, una de las imágenes tendrá una amplificación positiva y la otra una amplificación negativa. Esto da lugar a la formación de dos imágenes: una con la misma orientación que la lente y otra que aparece invertida. En la literatura, estas características se denominan, respectivamente, paridad positiva y paridad negativa.

Ahora, al considerar la definición de ángulo sólido, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, y aplicar la aproximación de ángulos pequeños tanto para la fuente como para las imágenes, se deducen las siguientes relaciones:

$$d\Omega_0 \approx \beta d\beta d\phi, \quad (5.4.5)$$

$$d\Omega_{\pm} \approx \theta_{\pm} d\theta_{\pm} d\phi. \quad (5.4.6)$$

De este, se obtiene que la amplificación para cada una de las imágenes es:

$$A_+ = \frac{\theta_+}{\beta} \frac{d\theta_+}{d\beta}, \quad A_- = \frac{\theta_-}{\beta} \frac{d\theta_-}{d\beta}. \quad (5.4.7)$$

A partir del ejemplo anterior, es posible generalizar la expresión de la amplificación para cualquier imagen formada en un sistema de lente gravitacional con simetría axial, concluyendo así que, la

⁴Se especifica que el cambio no es real, dado que existe la conservación de brillo superficial de la fuente. Este concepto se desarrolla en profundidad en las referencias [29, 44, 53].

⁵La simetría axial implica que las propiedades del lente no dependen del ángulo alrededor del eje óptico, es decir $\Phi(\vec{\theta}) = \Phi(\theta)$.

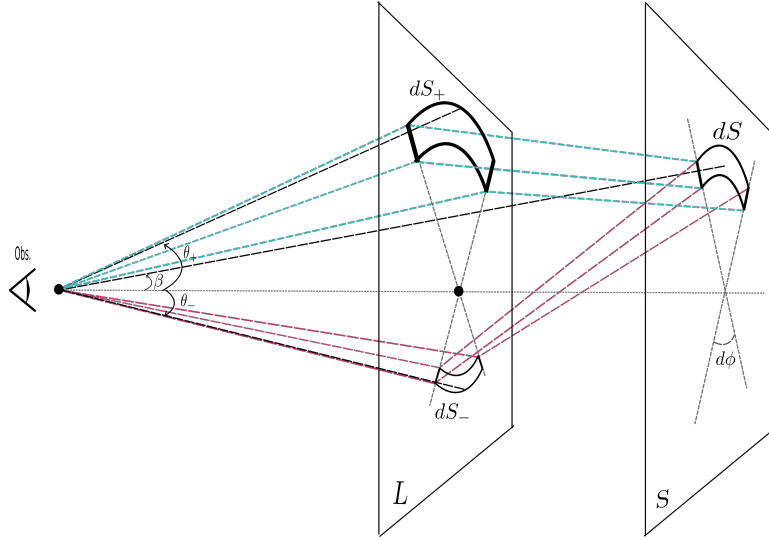


Figura 12: Fenómeno de amplificación y magnificación sobre un elemento de una fuente. Las líneas azules caracterizan la imagen con paridad positiva, mientras que las rojas, invierten la orientación de la fuente resultando en una imagen con paridad negativa.

amplificación de la imagen i es

$$A_i = \frac{\theta_i}{\beta} \frac{d\theta_i}{d\beta} . \quad (5.4.8)$$

Conviene destacar que, si bien el análisis anterior ofrece resultados interesantes, en la naturaleza existen muchas más configuraciones posibles. En un contexto más general, la amplificación se describe como el inverso del determinante del jacobiano asociado a la transformación de las coordenadas de la fuente con respecto a las de las imágenes, es decir

$$A \equiv \left| \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \right|^{-1} . \quad (5.4.9)$$

Esta última descripción, da lugar a establecer una relación entre la magnificación y la amplificación.

En esencia, ambos fenómenos físicos están relacionados gracias a la conservación del brillo superficial. Esto implica que, en el caso de que la lente gravitacional genere múltiples imágenes de una misma fuente, la razón entre los términos de magnificación de cada una de las imágenes es igual a la razón de los flujos observados en dichas imágenes [34, 44, 52, 53].

A partir de lo anterior, se establece que, matemáticamente la magnificación y la amplificación son equivalentes. Por esta razón, en los cálculos posteriores se utilizará, siguiendo la convención adoptada en la literatura, únicamente el término magnificación. De manera análoga, en las mismas fuentes se expresan ambos conceptos mediante la siguiente relación:

$$\mu = A = \left| \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \right|^{-1} . \quad (5.4.10)$$

Es importante destacar que, hasta este punto, solo se ha descrito la relación entre la deformación en el tamaño de las imágenes y el cambio aparente en su brillo respecto a la fuente original. No obstante, aún no se han abordado las causas físicas de estos efectos, las cuales están asociadas a cantidades fundamentales como el cizallamiento y la convergencia, que se describen a continuación.

5.5. Convergencia y cizallamiento

La deformación visualizada en el tamaño y forma de las imágenes con respecto a la fuente es consecuencia de los cambios (infinitesimales) que experimentan los haces de luz al ser deflectados por la lente. Estas deformaciones se hacen evidentes cuando, por ejemplo, se analiza una fuente espacialmente extendida, como lo es una galaxia.

En un caso ideal, es posible determinar la forma de las imágenes resolviendo la ecuación de la lente para cada uno de los puntos que componen la fuente. Ahora bien, dada la complejidad matemática y física de tratar con una fuente real, es prudente recurrir a una aproximación en aras de analizar la forma de las imágenes. La presente sección retoma lo previamente deducido y desarrolla los pasos intermedios siguiendo las referencias [33, 52, 53].

En particular, cuando el efecto del lente gravitacional es suave⁶, es posible aproximar la relación entre las posiciones de la fuente y de las imágenes mediante una transformación lineal, es así como, se introduce la matriz jacobiana de la lente, $\mathcal{A}_{ij}$, definida por

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j}. \quad (5.5.1)$$

Para dar inicio al estudio de la formación de imágenes, es fundamental relacionar lo anterior con el potencial gravitacional de lente. Para ello, al sustituir la ecuación de la lente en notación angular, la matriz jacobiana toma la forma

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\partial(\theta_i - \partial_i \Psi)}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}. \quad (5.5.2)$$

Asimismo, una representación habitual de la matriz jacobiana es mediante su forma matricial, en donde se evidencia que ésta es simétrica y posee únicamente tres componentes independientes, como se representa a continuación:

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & 1 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}. \quad (5.5.3)$$

⁶Ocurre cuando la escala angular de la fuente es mucho menor que la escala angular sobre la cual varían las deflexiones inducidas por el potencial gravitacional.

En este punto se introduce la convergencia (κ), la cual está asociada al cambio isotrópico en el tamaño de la imagen. Es decir, actúa como un factor de ampliación o contracción uniforme, producido por la masa proyectada a lo largo de la línea de visión.

En la Figura 13 se ilustra este efecto sobre las imágenes (líneas verdes) en comparación con el tamaño original de una fuente circular (naranja). Se observa claramente que, para valores positivos de la convergencia, el tamaño de la imagen es mayor que el de la fuente, mientras que, para valores negativos este disminuye.

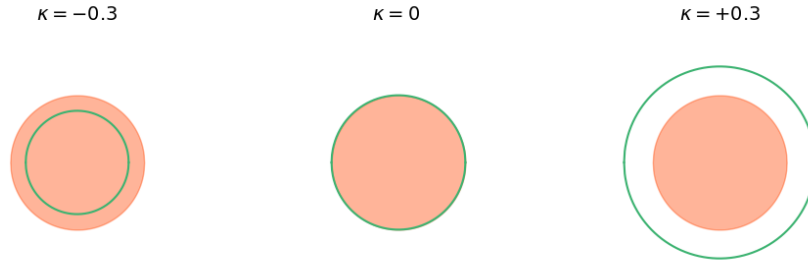


Figura 13: Representación del efecto de la convergencia para distintos valores de κ , con líneas verdes que indican el contorno de la imagen generada.

Matemáticamente, se define la convergencia en función de las segundas derivadas del potencial gravitacional de la siguiente manera:

$$2\kappa \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} = \nabla^2 \Psi . \quad (5.5.4)$$

Al considerar la relación 5.2.36, se evidencia que la convergencia está directamente relacionada con la densidad superficial de masa de la lente y la densidad crítica, es decir:

$$2\kappa = \frac{\Sigma(D_{OL}\vec{\theta})}{\Sigma_{\text{crit}}} . \quad (5.5.5)$$

En particular, la formación de múltiples imágenes ocurre en el régimen de lente gravitacional fuerte. Esta condición es representada matemáticamente como $\kappa > 1$.

Por su parte, el cizallamiento describe las distorsiones anisotrópicas de las imágenes, generando estiramientos diferenciales que modifican su forma sin alterar su área. Para introducir este concepto, se define el tensor de cizalladura Γ mediante

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} , \quad (5.5.6)$$

en donde, los términos de cizalladura (γ_i) son responsables de las distorsiones en la forma de las imágenes.

Estos se representan matemáticamente mediante la combinación de las segundas derivadas del potencial gravitacional reescalado con respecto a la posición de las imágenes, de la siguiente manera

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right), \quad \gamma_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (5.5.7)$$

Asimismo, el tensor de cizalladura corresponde a un tensor simétrico y de traza nula, el cual cuantifica la proyección del campo de marea⁷, responsable de las distorsiones en las fuentes de fondo [33]. La Figura 14 muestra cómo cada componente de la cizalladura modifica de forma independiente la imagen de una fuente circular. En particular, γ_1 distorsiona la imagen mediante estiramientos en las direcciones vertical u horizontal, mientras que γ_2 introduce deformaciones diagonales (45°).

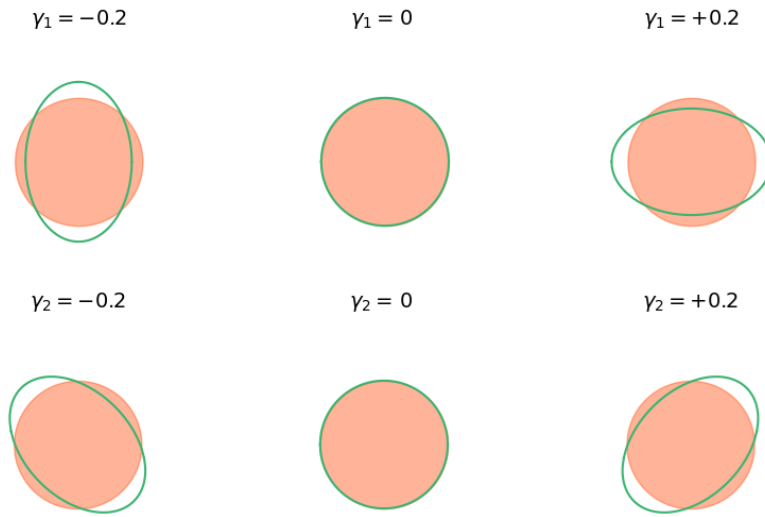


Figura 14: Ilustración del efecto de la cizalladura para distintos valores de γ_1 y γ_2 , donde las líneas verdes representan el contorno de la imagen deformada.

Ahora bien, para estudiar el efecto del cizallamiento, es de interés determinar los valores propios asociados al tensor. De esta manera, se tiene que

$$\det[\Gamma - \gamma I] = 0, \quad (5.5.8)$$

$$(\gamma_1 - \gamma)(\gamma_1 + \gamma) - \gamma_2^2 = 0, \quad (5.5.9)$$

$$(\gamma_1^2 - \gamma^2) - \gamma_2^2 = 0. \quad (5.5.10)$$

Concluyendo, los valores propios están caracterizados por la siguiente relación:

$$\pm\gamma = \pm\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \quad (5.5.11)$$

⁷Un campo de marea describe las diferencias en la interacción gravitacional que experimenta un objeto debido a la presencia de un campo masivo cercano. Estas diferencias causan distorsiones o deformaciones del objeto, como consecuencia de la variación del campo gravitacional a lo largo de su extensión.

Con el fin de simplificar los cálculos, resulta conveniente representar el tensor de cizalladura como un tensor diagonal. Para ello, se introduce una rotación ortogonal sobre dicho tensor, procedimiento que se describe en detalle en el Apéndice C.1. Como resultado, se obtiene que el tensor de cizalladura puede escribirse como

$$\Gamma = \gamma \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (5.5.12)$$

donde, para satisfacer la relación 5.5.11, se define $\gamma_1 = \gamma \cos 2\phi$ y $\gamma_2 = \gamma \sin 2\phi$.

En este punto, tras la descripción tanto de la convergencia como del cizallamiento, es posible expresar la matriz jacobiana de la lente en función de estas cantidades. tal que, al analizar $1 - \kappa - \gamma_1$, se obtiene:

$$1 - \kappa - \gamma_1 = 1 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right) \right]. \quad (5.5.13)$$

Al simplificar los términos correspondientes, la expresión anterior equivale a la componente $\mathcal{A}_{11}$ de la matriz jacobiana de la lente, es decir:

$$1 - \kappa - \gamma_1 = 1 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} = \mathcal{A}_{11}. \quad (5.5.14)$$

Asimismo, al desarrollar $1 - \kappa + \gamma_1$, se deduce que esta asociada a la componente $\mathcal{A}_{22}$, tal que

$$1 - \kappa + \gamma_1 = 1 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} = \mathcal{A}_{22}, \quad (5.5.15)$$

y por último, la descripción de las componentes fuera de la diagonal de la matriz jacobiana está referida a

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} = -\gamma_2. \quad (5.5.16)$$

En consecuencia, al sustituir las expresiones de cada una las componentes de la matriz $\mathcal{A}$, se llega a la siguiente representación matricial:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{bmatrix}. \quad (5.5.17)$$

Una ventaja de la anterior, es que permite simplificar el análisis por medio de una sustracción entre dos matrices distintas: una asociada con la convergencia y la otra con las componentes del tensor de cizalladura. Esto se representa como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{bmatrix}. \quad (5.5.18)$$

Al haber descrito la matriz jacobiana de la lente en términos de la convergencia y el cizallamiento, es posible relacionar estas cantidades con el factor de magnificación, tal que, es necesario calcular el determinante de la matriz anterior, esto es:

$$\det(\mathcal{A}) = (1 - \kappa - \gamma_1)(1 - \kappa + \gamma_1) - \gamma_2^2, \quad (5.5.19)$$

$$= (1 - \kappa)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2, \quad (5.5.20)$$

$$= (1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2. \quad (5.5.21)$$

Con este resultado en mente, y de acuerdo a relación 5.4.10, la magnificación se caracteriza en términos de la convergencia y la cizalladura en el caso más general como

$$\mu = \frac{1}{|\det(\mathcal{A})|} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2}. \quad (5.5.22)$$

Cabe destacar que, en el estudio de lentes gravitacionales simples, es posible orientar convenientemente la matriz jacobiana $\mathcal{A}$ con los autovectores del tensor de cizalladura Γ , esta representación resulta ser una alternativa más práctica desde el punto de vista matemático. Este enfoque es particularmente útil al analizar la deformación de imágenes provenientes de fuentes con geometría aproximadamente esférica.

5.5.1. Distorsión de una fuente circular

En esta sección se discute un aspecto omitido hasta ahora: la geometría de la fuente. De acuerdo con la literatura, en el contexto del fenómeno de lente gravitacional fuerte, las fuentes pueden modelarse aproximadamente como puntuales o esféricas en la mayoría de los casos. No obstante, para análisis más detallados, como el estudio de estructuras internas o características particulares de la fuente, se requiere un tratamiento que considere al objeto como un cuerpo extendido y estructurado [53].

A partir de lo anterior, se analizará analíticamente la deformación de las imágenes producidas por una fuente con simetría esférica. Por conveniencia matemática, se adopta la representación diagonal de la matriz de cizalladura presentada en la ecuación 5.5.12. Además, dadas estas especificaciones, es posible considerar que la matriz jacobiana de la lente está alineada con la matriz de cizalladura. De esta manera, se deriva la siguiente matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{bmatrix}. \quad (5.5.23)$$

Lo anterior permite la introducción de dos nuevos conceptos: la línea crítica tangencial, λ_{tan} , y la línea crítica radial, λ_{rad} .

Estas cantidades corresponden a los autovalores de la matriz $\mathcal{A}$ y están directamente relacionadas con la convergencia y el término general de cizalladura. En particular, λ_{tan} caracteriza las distorsiones de tipo tangencial, mientras que λ_{rad} describe las distorsiones de tipo radial. En otras palabras, los autovalores indican cómo varían las imágenes de una fuente distante debido a las distorsiones en los rayos de luz inducidas por la lente. Matemáticamente, se tiene que estos autovalores están caracterizados por

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - \kappa - \gamma, \quad (5.5.24)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 - \kappa + \gamma. \quad (5.5.25)$$

En este momento, para el análisis sobre la fuente en su respectivo plano, se asume que ésta se encuentra centrada en $\vec{\beta}_0$ y tiene un radio r . Ahora bien, si se caracteriza a los puntos ubicados

sobre el contorno de la circunferencia con el vector $\vec{\beta}$, se tiene que $(\vec{\beta} - \vec{\beta}_0)$ satisface la ecuación general de una circunferencia, es decir

$$\vec{\beta} - \vec{\beta}_0 \rightarrow (\beta_1 - \beta_{0,1})^2 + (\beta_2 - \beta_{0,2})^2 = r^2. \quad (5.5.26)$$

De modo que, es posible relacionar el tamaño de la imagen con el de la fuente, especificando que, aunque la fuente es extendida, es lo suficientemente pequeña como para describir aproximadamente la relación angular entre la fuente y las imágenes mediante una relación lineal a través del jacobiano de la lente. En otras palabras, la proyección angular de la fuente sobre el plano de la lente puede ser descrita por una relación lineal, debido a que el fenómeno de deflexión de los haces de luz es suave.

Tras lo anterior, por simplicidad se establece un sistema de referencia centrado en la fuente, el cual es común para todas las imágenes, permitiendo describir las alteraciones de cada imagen respecto a la fuente debido al efecto de lente gravitacional. Asimismo, se establece que el origen de la fuente y el de cada imagen coinciden con el origen del sistema de referencia, es decir, $\vec{\beta}_0 = \vec{\theta}_0 = (0, 0)$. De este modo, la relación lineal que describe la distorsión de la fuente para cada imagen se especifica como:

$$\beta_i \equiv \sum_j \mathcal{A}_{ij} \theta_j = \sum_j \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \theta_j. \quad (5.5.27)$$

La relación anterior brinda una representación alternativa de cada una de las componentes de la fuente, de modo que, al considerar los elementos de $\mathcal{A}$ y sustituir en 5.5.26, se determina la siguiente igualdad

$$r^2 = (1 - \kappa - \gamma)^2 \theta_1^2 + (1 - \kappa + \gamma)^2 \theta_2^2, \quad (5.5.28)$$

evidenciando así que las deformaciones en las imágenes, debido a la convergencia y al cizallamiento, son descritas a través de la ecuación de una elipse sobre el plano de la lente. En consecuencia, se caracteriza el eje menor de la elipse como a , mientras que el eje mayor se denota por b , de tal manera que, matemáticamente, corresponden a

$$a = \frac{r}{1 - \kappa - \gamma}, \quad b = \frac{r}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (5.5.29)$$

La excentricidad, en este contexto, se describe mediante la relación

$$\epsilon = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\gamma}{1 - \kappa}. \quad (5.5.30)$$

A manera de ejemplo, en la Figura 15 se representa la forma que tendría la imagen a partir de la visualización de su línea de contorno (línea verde). En particular, en esta figura se han modificado simultáneamente la convergencia y el cizallamiento, con el fin de visualizar claramente su efecto en conjunto. Ésta ilustración, al igual que las Figuras 13 y 14 están basadas en el código de [52].

Por otro lado, es posible relacionar la magnificación con los autovalores de la matriz jacobiana de la lente, por medio de

$$\mu = \frac{1}{|\det(\mathcal{A})|} = \frac{1}{|\lambda_{\tan} \lambda_{\text{rad}}|}, \quad (5.5.31)$$

$$\kappa = +0.2, \gamma_1 = +0.1, \gamma_2 = +0.1$$

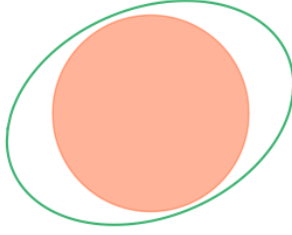


Figura 15: Ilustración de la distorsión en la imagen de una fuente circular para valores específicos de convergencia y cizallamiento.

en donde, las regiones en las que dicha expresión diverge se denominan líneas críticas.

La caracterización de estas líneas, da entrada a la magnificación asociada a cada una de las mismas, es así que se definen las cantidades magnificación tangencial y magnificación radial como:

$$\mu_{\text{tan}} = \frac{1}{\lambda_{\text{tan}}}, \mu_{\text{rad}} = \frac{1}{\lambda_{\text{rad}}}. \quad (5.5.32)$$

5.5.2. Líneas críticas y causticas

Como se mencionó anteriormente, en el marco del fenómeno de lente gravitacional fuerte es posible la formación de múltiples imágenes, las cuales se ubican en zonas específicas del plano de la lente. Para un sistema de lente gravitacional arbitrario, es posible caracterizar el lugar donde ocurre este fenómeno mediante curvas delimitantes. Estas representan, sobre el plano del plano de la lente, todos los puntos en los que la amplificación tiende a divergir⁸. En particular, dichas líneas se conocen como “líneas críticas”. Es pertinente mencionar que, al trasladar al plano de la fuente los puntos en los que la magnificación diverge, se obtienen otras curvas denominadas “líneas caústicas” [52].

Estas se determinan a partir de los valores propios de la matriz de magnificación, representada en la ecuación 5.5.31, de modo que dicha magnificación se vuelve infinita en dos casos. El primero ocurre cuando $\lambda_{\text{rad}} = 0$, lo que da lugar a la **línea crítica radial**; el segundo, cuando $\lambda_{\text{tan}} = 0$, lo que genera una **línea crítica tangencial**. Cabe destacar que las líneas críticas dependen en gran medida de la forma de las geometrías específicas del sistema de lente gravitacional.

Es posible analizar la formación de múltiples imágenes mediante la interacción de la posición de la fuente con las líneas caústicas del sistema (se profundizará en la siguiente sección). Las

⁸En sistemas de lente gravitacional reales, se tiene que cuando la fuente cruza a través de una caustica, la magnificación no diverge. Esto es consecuencia de la naturaleza con la que se describen las fuentes extendidas, en donde la magnificación es determinada por un promedio, tal que se obtiene una cantidad finita, sin embargo para el modelo de masa puntual la magnificación sí diverge [44].

imágenes que se generan en las proximidades de una línea crítica son el resultado de que la fuente se aproxima o cruza una cáustica. Dado que estas regiones están asociadas a una alta magnificación, el potencial gravitacional deflecta los haces de luz de tal forma que da lugar a la formación de nuevas imágenes. Esta transición queda reflejada en los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso⁹ [44, 52, 53].

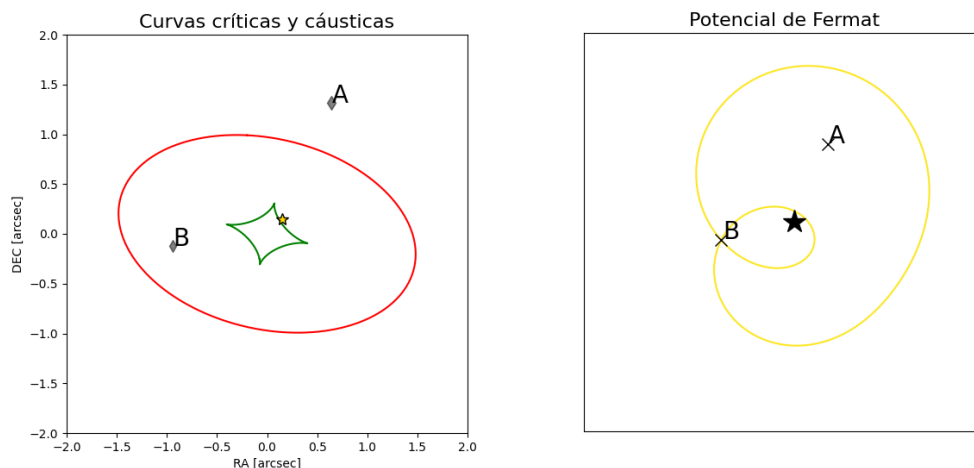


Figura 16: Representación de la formación de imágenes (A y B) en función de la posición de la fuente (estrellas) en un sistema arbitrario, y su relación con las curvas críticas y cáusticas, así como con el potencial de Fermat correspondiente. Figuras obtenidas mediante `Lenstronomy`.

A modo de ejemplo, en las Figuras 16 y 17 se ilustra la formación de nuevas imágenes en un sistema de lente gravitacional ficticio, modelado mediante una distribución de masa elíptica. Las líneas verdes corresponden a la cáustica del sistema, mientras que la línea roja describe la línea crítica asociada. En la Figura 16 se observa que, aunque la fuente se encuentra cerca de la cáustica, el sistema da lugar únicamente a la formación de dos imágenes, como se corrobora con el potencial de Fermat. Sin embargo, en la Figura 17, la fuente ha cruzado la cáustica del sistema, lo que da lugar a la formación de nuevas imágenes, como se comprueba mediante los isopotenciales correspondientes. Las figuras del potencial de Fermat se encuentran en unidades arbitrarias.

Particularmente, el análisis de la formación de imágenes en función de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso es relevante, dado que constituye una alternativa que permite describir sistemas de lente gravitacional existentes en la naturaleza que desde la perspectiva teórica no son justificables [24, 52].

Las gráficas de las curvas críticas, cáusticas y el potencial de Fermat fueron obtenidas utilizando el software `Lenstronomy` [54, 55], disponible en: <https://github.com/lenstronomy/lenstronomy>.

⁹Por defecto `Lenstronomy` representa el potencial de Fermat sin escalas.

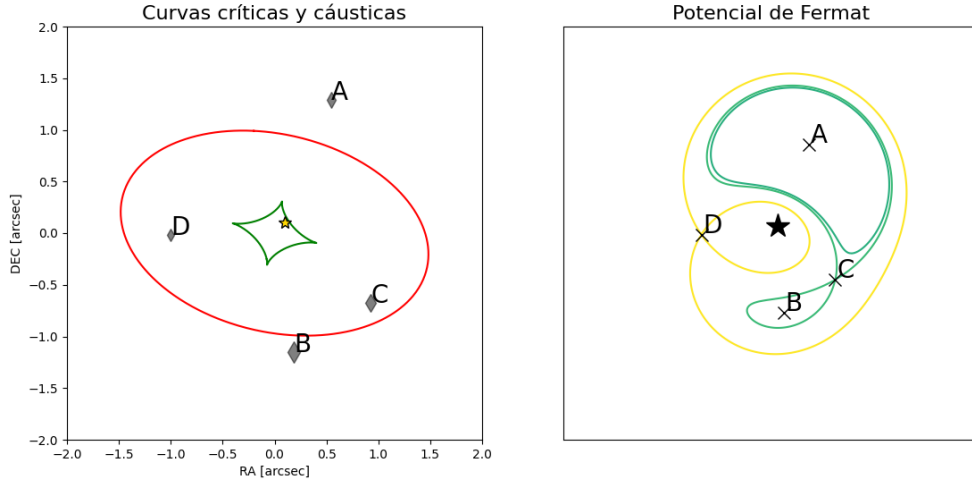


Figura 17: Ilustración de la formación de dos nuevas imágenes en un sistema arbitrario, como consecuencia de la interacción de la posición de la fuente con la cáustica del sistema. La aparición de estas nuevas imágenes se evidencia en los isocontornos del potencial de Fermat. Las visualizaciones fueron generadas con ayuda de `Lenstronomy`.

5.6. Clasificación y configuración de múltiples imágenes

A lo largo de las secciones previas se ha discutido la formación de imágenes, su geometría y su posición en el plano de la lente; sin embargo, aún no se ha tratado ni su clasificación ni tampoco sus características. El análisis descrito en esta sección desarrolla los pasos intermedios de las referencias [24, 44, 52, 53].

Como punto de partida, se busca introducir la matriz Hessiana¹⁰ de un sistema de lente gravitacional, la cual permitirá identificar los puntos críticos y clasificar las imágenes, a través del análisis de la curvatura de la superficie de tiempo de atraso. Así entonces, al calcular la segunda derivada del potencial de Fermat $\tau(\vec{\theta}; \vec{\beta})$, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad (5.6.1)$$

en donde se aprecia que el término de la derecha corresponde justamente a la matriz jacobiana de la lente en 5.5.2. Es decir, al calcular la matriz Hessiana de la función tiempo de atraso $\mathcal{T}$, se observa que es proporcional a $\mathcal{A}_{ij}$, como se describe a continuación:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 (\mathcal{T})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \propto \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = \mathcal{A}_{ij}. \quad (5.6.2)$$

Lo anterior evidencia una relación inversamente proporcional entre la magnificación de las imágenes y la curvatura de la superficie de tiempo de atraso. En esencia, una magnificación infinita se

¹⁰La matriz Hessiana es una matriz cuadrada de segundas derivadas parciales de una función.

asocia con una geometría plana en la superficie, mientras que una magnificación muy pequeña está relacionada con una curvatura pronunciada.

Asimismo, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso en una dirección específica, es posible obtener pistas sobre las características de cada imagen. De esta manera, se distinguen tres tipos de imágenes¹¹, las cuales son:

- o **Tipo I:** Imágenes que se forman en los mínimos locales de la superficie de tiempo de atraso, donde ambos valores propios de la matriz Hessiana son positivos. Matemáticamente, se caracterizan por satisfacer $\det(\mathcal{A}) > 0$ y $\text{tr}(\mathcal{A}) > 0$. En este tipo de imagen, la paridad es positiva.
- o **Tipo II:** Imágenes que se forman en puntos de silla. Se identifican por tener valores propios de signos opuestos, es decir, $\det(\mathcal{A}) < 0$. La paridad asociada es negativa.
- o **Tipo III:** Imágenes que se forman en los máximos locales de la superficie de tiempo de atraso. Ambos valores propios de la matriz Hessiana son negativos, por lo que $\det(\mathcal{A}) > 0$, pero $\text{tr}(\mathcal{A}) < 0$. Al igual que en el caso Tipo I, la paridad es positiva.

Dada la relación entre las líneas críticas y las cáusticas, la formación de imágenes se puede analizar precisamente desde estas últimas. En esencia, las cáusticas representan regiones críticas donde la proyección del haz de luz en el plano de la fuente cambia drásticamente su comportamiento, usualmente debido a una densidad de masa sobre crítica en la lente.

Cuando un haz de luz no ha atravesado ninguna de estas regiones, se forma una imagen de tipo I, la cual se observa con poca distorsión. Para que se forme una imagen de tipo II, el haz de luz debe haber atravesado la cáustica¹² una única vez. Este tipo de imagen puede estar distorsionada y presentar una magnificación considerable. Finalmente, las imágenes de tipo III se originan cuando el rayo ha atravesado ambas cáusticas. Estas últimas pueden experimentar una magnificación extrema, dando lugar a imágenes altamente distorsionadas [53].

El hecho de que el haz de luz pueda atravesar como máximo dos veces una región de sobredensidad crítica está relacionado con la estructura de la matriz jacobiana de la transformación lente. Las cáusticas se localizan en las regiones del plano de la fuente donde el determinante de dicha matriz se anula, es decir $\det(\mathcal{A}) = 0$, lo cual indica que al menos uno de sus autovalores es nulo.

5.6.1. Teoremas generales en el fenómeno de lente gravitacional

Particularmente, en el marco de este trabajo, se describe el fenómeno de lente gravitacional para el caso de un único cuerpo deflector; en otras palabras, se considera únicamente un solo plano de la lente. Para analizar cómo se produce la formación de imágenes en este contexto, se introducirán

¹¹El análisis de los puntos mínimos, máximos y de silla descritos mediante este método es de carácter local.

¹²Físicamente, el haz de luz no interactúa con la cáustica; más bien, esto hace referencia a que su trayectoria en el plano de la imagen intercepta una línea crítica, lo cual, al proyectarse en el plano de la fuente, se traduce en el cruce de una cáustica

específicas características sobre el objeto deflector, tal que se permita la resolución de múltiples imágenes y que éstas sean coherentes con lo establecido hasta el momento [53].

Así, como punto de partida, se considera que la lente es geoméricamente delgada y transparente¹³, de modo que puede caracterizarse por una densidad de masa superficial suave $\Sigma(\vec{x})$. Además, se asume que dicha densidad decrece más rápido que $|x|^{-2}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

La consideración anterior es coherente con el comportamiento natural del fenómeno, ya que describe la distribución de masa como finita, lo cual implica que el ángulo de deflexión se encuentra acotado, es decir que $|\vec{\alpha}(\vec{x})| \rightarrow 0$ cuando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.

Se denotará al número total de imágenes generadas por la distribución de masa con n , el cual es descrito como la suma de las imágenes de cada tipo, es decir:

$$n = n_I + n_{II} + n_{III}. \quad (5.6.3)$$

Existen dos teoremas que permiten estudiar la formación de imágenes independientemente de su complejidad. Si bien se derivan a partir del análisis de la lente descrita previamente, es posible generalizar sus resultados. La demostración de estos teoremas se realiza en torno al teorema del índice, aplicado al contexto de las lentes gravitacionales [53]. Este procedimiento se aborda en el apéndice C.2. A continuación, se describen ambos teoremas.

Teorema 1 *Si el cuerpo deflector satisface las condiciones descritas, y la posición de la fuente ($\vec{y}$) no se encuentra sobre una caustica, se establece que:*

1. *Siempre habrá al menos una imagen directa de la fuente: $n_I \geq 1$.*
2. *El número de imágenes generadas es finito: $n < \infty$.*
3. *Cada vez que aparezca un nuevo punto de silla, se generarán respectivamente un mínimo o un máximo local, satisfaciendo la relación: $n_I + n_{III} = 1 + n_{II}$.*
4. *Si y solo si $|\vec{y}|$ es muy grande, se forma una única imagen.*

A partir de lo establecido en el Teorema 1, se deduce que, para un sistema de lente gravitacional, el número total de imágenes puede expresarse como: $n = 1 + 2n_{II}$. Es decir, será mayor que 1 e impar siempre que existan puntos silla en la superficie de tiempo de atraso. Asimismo, se observa que el número de imágenes con paridad par siempre será mayor que el de aquellas con paridad impar.

Teorema 2 *Si se mantienen las condiciones sobre la lente, la primera imagen en llegar al observador es de tipo I, y aparenta mayor o igual brillo que la fuente. En otras palabras, el mínimo global siempre debe existir, por lo que existirá en el sistema una imagen con mayor flujo que el de la fuente en ausencia de la lente; esto demuestra que, para el observador, el efecto de lente gravitacional aumenta el flujo total recibido desde el objeto emisor.*

¹³Una lente transparente, en el contexto gravitacional, es una distribución de masa que curva la luz sin absorberla ni emitirla, afectando solo su trayectoria mediante el campo gravitacional.

Como consecuencia de los dos teoremas, se deducen las siguientes generalidades respecto a la formación de imágenes. Cuando se forma una única, esta corresponde a un mínimo (L), con paridad total y parcial positiva. Es decir, tiene un tamaño y un flujo mayores que los de la fuente. Este caso se asocia a una densidad superficial de masa muy baja, la cual impide la formación de imágenes adicionales.

En el caso de tres imágenes, una de ellas debe ser un mínimo (L), otra corresponde a un punto de silla (S) y la tercera puede ser un segundo mínimo o un máximo (H). El contorno alrededor del punto de silla puede presentar diferentes topologías.

De forma análoga, en el caso de cinco imágenes, a partir del escenario anterior, uno de los máximos o mínimos “se divide”, dando lugar a la formación de dos imágenes adicionales. Al igual que el caso anterior, se presentan topologías características de cada sistema gravitacional (estas se estudiarán en la sección correspondiente). Por último, aunque es posible la existencia de configuraciones con más de cinco imágenes, estas resultan ser excepcionales en la naturaleza, ya que requieren distribuciones de masa poco comunes.

En el universo existen sistemas de lente gravitacional, como PG 1115 + 080, que no pueden ser descritos completamente mediante estos teoremas; sin embargo, esto no implica que carezcan de utilidad para su estudio. Particularmente en este sistema, se observa la presencia de múltiples imágenes muy próximas entre sí, las cuales tienden a presentar una mayor magnificación. Esto sugiere, de manera cualitativa, una curvatura casi nula en la superficie de tiempo de atraso entre dichas imágenes. Matemáticamente, esto se traduce en una singularidad: cuando dos imágenes se fusionan, el potencial de Fermat se torna plano entre ellas, provocando que la magnificación tienda a infinito.

De esta manera, entonces, se ha descrito las características de las imágenes en función de su paridad, sin embargo en la naturaleza se presenta un obstáculo; al ser inviable la visualización directa de la fuente (eliminando la lente), resulta imposible dilucidar la paridad en cada una de ellas. Es así que se recurre a determinar la paridad relativa de todas las imágenes, de tal manera que, al conocer el tiempo de atraso, es posible determinar el mínimo global y, por ende, establecer la paridad absoluta en todas las imágenes [24].

5.6.2. Topología de la superficie tiempo de atraso

En esencia, el estudio de la topología de la superficie de tiempo de atraso permite analizar sistemas de lente gravitacional, ya que, como se ha descrito a lo largo del trabajo, hace posible la identificación de regiones donde se forman las imágenes, dado que a partir de su configuración, es posible su clasificación; como se evidencia en las Figuras 16 y 17.

De acuerdo con la teoría, los isocontornos del potencial de Fermat siguen geometrías específicas asociadas a la formación de imágenes, las cuales se analizarán a continuación.

5.6.2.1. Topología para tres imágenes

Para entender la formación de imágenes, es necesario comprender el papel que desempeñan los puntos de silla. Por este motivo, se analiza el comportamiento de la función tiempo de atraso en las proximidades de cada uno de ellos, los cuales se caracterizan matemáticamente por la condición $\vec{\nabla}\mathcal{T} = 0$. Así, al considerar por conveniencia matemática que la matriz Hessiana es diagonal y expandir la función en series de Taylor hasta términos de segundo orden, se obtiene:

$$\mathcal{T}(\vec{x}, \vec{y}) \approx \mathcal{T}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_1^2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_2^2} x_2^2. \quad (5.6.4)$$

donde es posible describir localmente las líneas de nivel mediante una ecuación cuadrática de tipo cónica, como se representa en la siguiente igualdad

$$\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_1^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_2^2} x_2^2 = C. \quad (5.6.5)$$

Al igualar a cero la anterior, es posible estudiar el comportamiento de las regiones alrededor del punto de silla, ya que la dirección de las asíntotas alrededor de $\mathcal{T}_0$ es descrita por la relación:

$$x_1 = \pm \sqrt{-\frac{(\partial^2 \mathcal{T} / \partial x_2^2)}{(\partial^2 \mathcal{T} / \partial x_1^2)}} x_2, \quad (5.6.6)$$

tal que, permite cuantificar la geometría local alrededor del punto de silla.

Lo anterior da lugar a describir las regiones próximas a estos puntos mediante una ilustración que considera dos líneas rectas y los signos $+$ y $-$, los cuales representan el comportamiento de la superficie tiempo de atraso alrededor del punto de interés, como se ilustra en la Figura 18

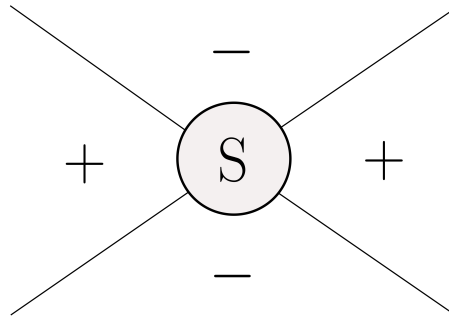


Figura 18: Representación didáctica de un punto de silla, caracterizando las regiones alrededor del mismo con los signos $+$ y $-$ de acuerdo a su comportamiento.

Por otro lado, dado que los isocontornos corresponden a un valor constante de la función tiempo de atraso, al graficarse en el plano de la lente forman líneas cerradas debido a la geometría parabólica de la función. Es decir, estas líneas no terminan abruptamente y solo se interceptan en otros puntos críticos, como puntos de silla.

En consecuencia, se derivan cuatro formas posibles en las que las curvas pueden cerrarse. Dos de ellas están asociadas a una lemniscata¹⁴, mientras que las otras dos siguen la geometría de un caracol de Pascal¹⁵, como se representa en la Figura 19.

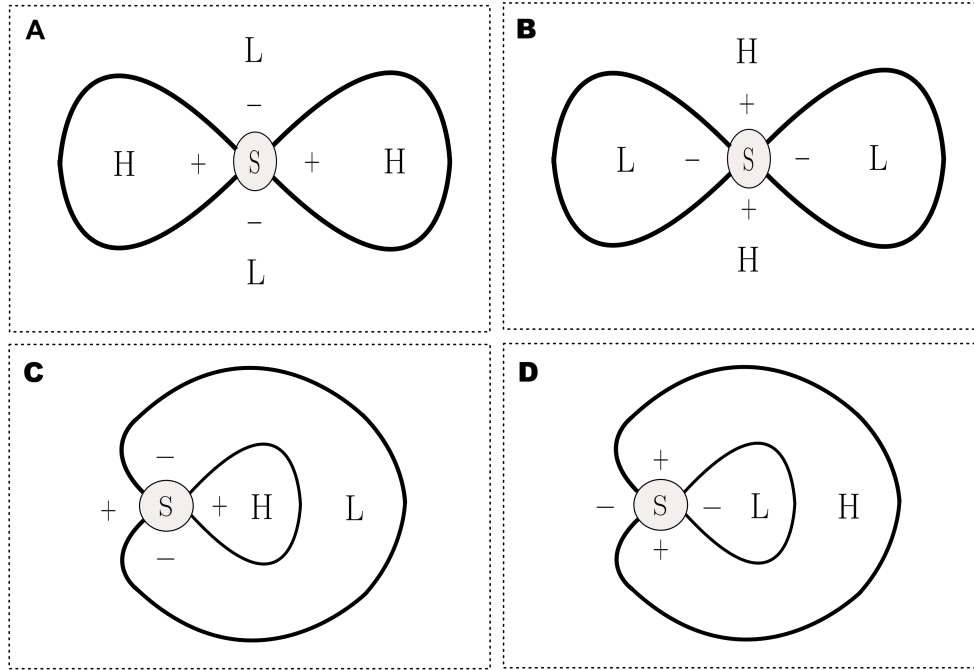


Figura 19: Ilustración de las configuraciones teóricas de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, asociadas a la formación de tres imágenes en un sistema de lente gravitacional. Las regiones se identifican con las siglas en inglés para máximo (H), mínimo (L) y punto de silla (S).

Particularmente, las configuraciones **A** y **D** no son físicamente viables en sistemas que producen tres imágenes. Esto se debe a la forma de paraboloide de la superficie de tiempo de atraso, la cual impide que, fuera de las líneas de contorno, el valor de la función tiempo de atraso sea menor que el valor establecido en el punto de silla. En esencia, las configuraciones posibles para la formación de tres imágenes en un sistema de lente gravitacional corresponden a las representadas en **B** y **C**, ya que en estas la función tiempo de atraso toma un valor positivo fuera del punto de silla.

En específico, estas geometrías permiten inferir el orden temporal en el que se observan las variaciones en las imágenes. En el caso de que la fuente varíe, para la geometría asociada al caracol de Pascal, la primera imagen en modificarse será la representada en el mínimo (L), seguida por la del punto de silla (S) y, finalmente, la ubicada en el máximo (H). De forma análoga, en la geometría de la lemniscata, primero se observará una variación en uno de los dos mínimos (cualquiera de los dos), luego la variación se dará en el otro, de modo que la última imagen en modificarse es la ubicada en el punto de silla [53].

¹⁴Figura plana que se asemeja a un ocho o símbolo de infinito.

¹⁵Curva plana que se caracteriza por tener una forma circular con una protuberancia.

5.6.2.2. Topología para cinco imágenes

El siguiente caso de análisis corresponde a la formación de cinco imágenes en un sistema de lente gravitacional. En este contexto, tal como lo describen los teoremas correspondientes, existirán dos puntos de silla, los cuales estarán relacionados entre sí. Para evitar degeneraciones en la formación de imágenes, se establece que ambos puntos de silla deben estar ubicados en posiciones distintas.

Tomando como punto de partida el caso anterior (tres imágenes), la creación de dos imágenes adicionales se da a partir de las geometrías previas, donde, el primer punto de silla delimita el isocontorno general o exterior, mientras que el segundo punto de silla se forma a partir de un máximo o un mínimo contenido dentro del isocontorno general.

La existencia del segundo punto de silla permite la descripción de una curva de nivel adicional. Así, las geometrías que representan la formación de cinco imágenes pueden clasificarse según la forma de la curva de nivel exterior. En el caso de que esta sea una lemniscata, el segundo punto de silla puede ubicarse en cualquiera de los dos lóbulos, y la geometría del isocontorno asociado a este punto puede adoptar la forma de otra lemniscata o de un caracol de Pascal, como se ilustra en la Figura 20. De manera arbitraria se ha ubicado el segundo punto de silla en el lóbulo derecho.

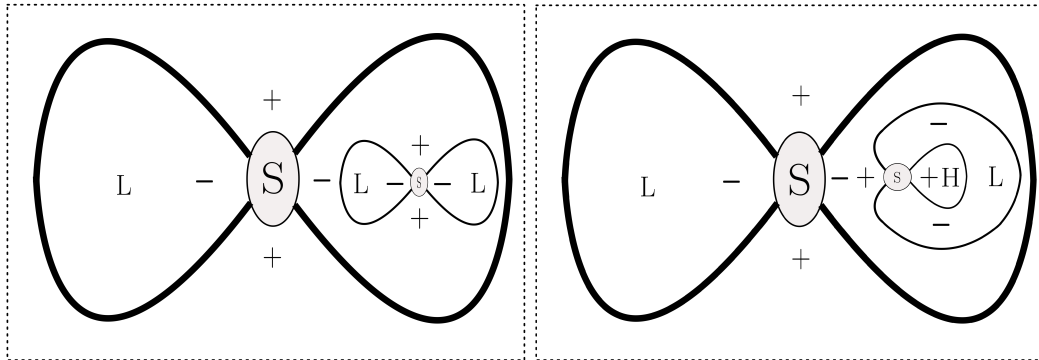


Figura 20: Ilustración de la formación de 5 imágenes considerando una curva de nivel exterior con la geometría de una lemniscata.

De manera análoga, para una línea exterior con geometría de caracol de Pascal, se presentan diferentes combinaciones posibles, las cuales dependen de si la posición del segundo punto de silla está dentro o fuera del lóbulo más pequeño.

Como primer caso, se describen las geometrías asociadas al punto de silla ubicado por fuera del lóbulo interior. En este contexto, y siguiendo lo establecido en la formación de tres imágenes, la región correspondiente se caracteriza por el signo menos ($-$), de modo que el segundo punto de silla puede dar lugar a dos configuraciones distintas: La primera, donde se originan un mínimo adicional (L), representada por una curva de nivel en forma de lemniscata, como se visualiza en la Figura 21a. La segunda, donde se crea un máximo local (H), dando lugar a un isocontorno con geometría de caracol de Pascal, como se ilustra en la Figura 21b.

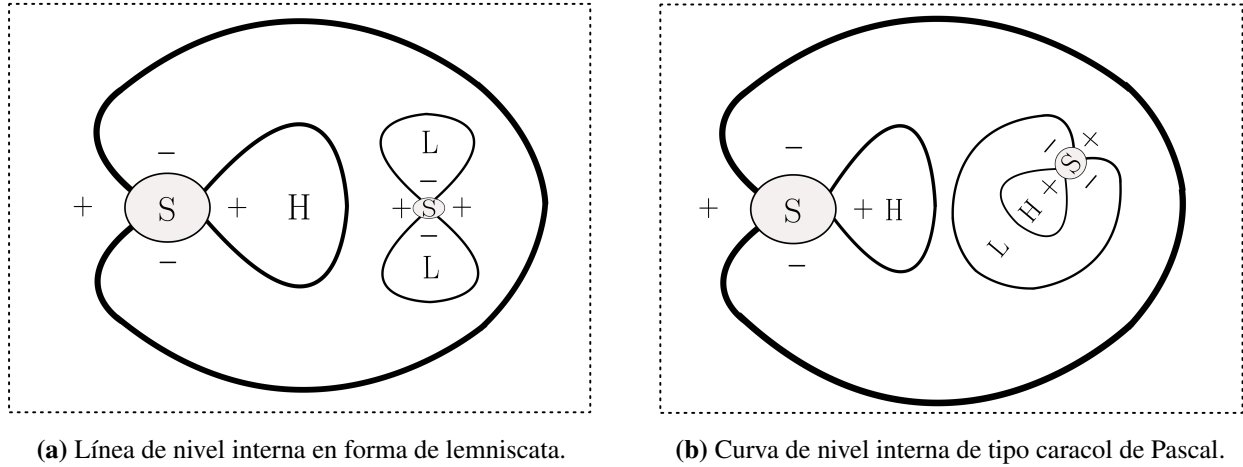


Figura 21: Topología de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso en la formación de cinco imágenes con una geometría general de caracol de Pascal. El nuevo punto de silla se sitúa en el lóbulo exterior.

El segundo caso corresponde a la situación en la que el nuevo punto de silla se encuentra dentro del lóbulo interior, siendo esta una región caracterizada por el signo más (+). Debido a esta característica particular, las geometrías consideradas son aquellas que no eran viables en la formación de tres imágenes (configuraciones **A** y **D**), es decir, aquellas topologías con signo menos (−) en el exterior. Así entonces, se contempla que sí el punto de silla da origen a otro máximo local (H), la curva de nivel resultante tiene la forma de una lemniscata, como se muestra en la Figura 22a. Mientras que, si el mismo da lugar a la formación de un mínimo local (L), se obtiene una curva de nivel de un caracol de Pascal, como es representado en la Figura 22b.

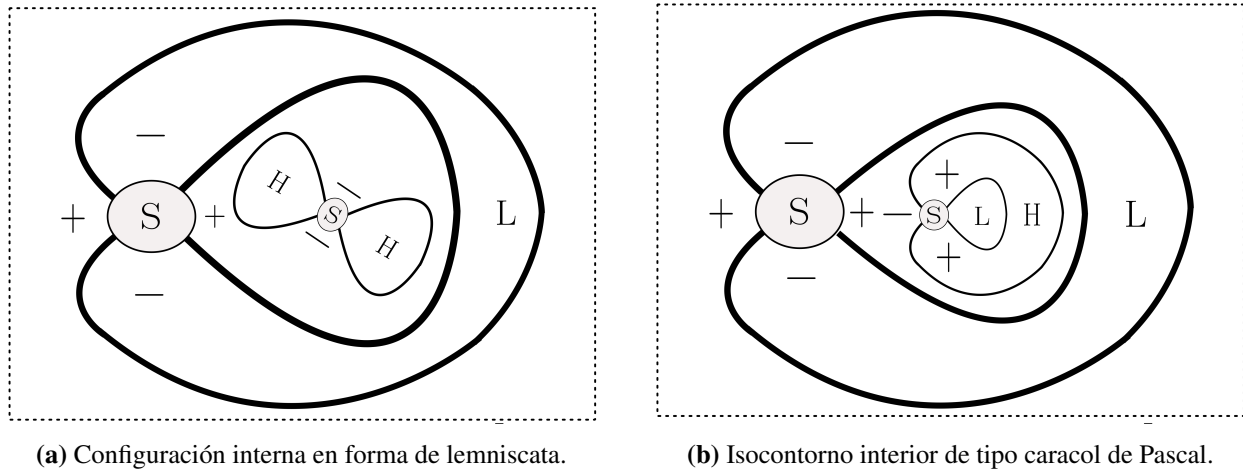


Figura 22: Topología de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso en la formación de cinco imágenes con una geometría general de caracol de Pascal. El nuevo punto de silla se sitúa en el lóbulo interior.

Por último, se menciona que, si bien existen expresiones matemáticas definidas tanto para la lem-

niscata como para el caracol de Pascal, las líneas de isocontornos no obedecen estrictamente a dichas ecuaciones, por lo que, las curvas de nivel corresponden estrictamente a pseudo-lemniscatas y pseudo-caracoles de Pascal. Ahora bien, dado que presentan una forma geometría semejante, se les atribuye esos nombres de manera didáctica.

5.6.3. Imagen central

Del análisis de los teoremas, así como de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, se concluye que teóricamente existirá una imagen sobre o en las proximidades de la lente, la cual se denomina como “imagen central” [24, 29, 53].

Lo relevante de esta imagen es que, a partir de las observaciones de sistemas de lente gravitacional en la naturaleza, no es posible observar directamente la imagen central del sistema. En la literatura se establece que, para galaxias elípticas, las imágenes centrales son indetectables con observaciones ordinarias, debido a que estas son desmagnificadas¹⁶ por los agujeros negros supermasivos que se encuentran en el centro de las galaxias que actúan como lentes gravitacionales. Es decir, la desmagnificación hace que la imagen central sea muy tenue y casi imperceptible con la tecnología actual en longitudes de onda ópticas. Por lo tanto, para la detección de estas imágenes se requiere observaciones en otras longitudes de onda, donde la interferencia por el brillo de la galaxia lente sea menor.

Hasta la fecha de realización de este trabajo, se tiene completa certeza de la formación de una imagen central en un sistema de lente gravitacional, específicamente en el sistema PMN J1632–0033, la cual fue identificada mediante observaciones de radio. Para mayor información sobre la detección de esta imagen central, así como de candidatos de sistemas de lente gravitacional en los que sería posible detectarla, véase la referencia [56].

¹⁶Relativo al efecto inverso de la magnificación de una imagen.

Capítulo 6

Modelos de lentes

Los objetos existentes en el cosmos presentan configuraciones complejas y diversas, lo cual también se refleja en el fenómeno de lente gravitacional. En general, los rayos de luz emitidos por la fuente pueden sufrir múltiples deflexiones antes de llegar al observador, debido a la presencia de distintos cuerpos celestes a lo largo de la trayectoria del haz [53]. No obstante, para los fines de este capítulo, se considera que el objeto deflector corresponde a un único ente, como por ejemplo una galaxia [29].

Bajo este enfoque, se analizan diversos modelos de lente, entre los cuales se encuentran el de lente puntual, de esfera isoterma (con o sin núcleo) y el elipsoide isotérmico (con o sin núcleo). En todos los casos mencionados, la densidad volumétrica o superficial de masa se emplea como parámetro descriptivo de la distribución de masa del cuerpo deflector, a partir del cual se derivan relaciones y magnitudes clave para el estudio de sistemas de lente gravitacional, tales como la ecuación de la lente, el ángulo de deflexión, el potencial gravitacional, las líneas críticas, entre otras [33].

A continuación, se profundizará en el análisis de cada uno de estos modelos, describiendo sus características principales, las suposiciones que los sustentan y cómo contribuyen a la comprensión general del fenómeno de las lentes gravitacionales en diferentes contextos.

6.1. Masa puntual

El modelo de masa puntual constituye el modelo introductorio al análisis de lentes gravitacionales, ya que al concentrar la distribución de masa de la lente en un único punto, permite derivar de forma simple las expresiones fundamentales asociadas a este fenómeno. Si bien no ofrece una descripción completamente realista, permite obtener buenas estimaciones del tiempo de atraso entre las imágenes, la posición de las mismas, los factores de amplificación, entre otros [53]. Este apartado se fundamenta en las secciones 3.1.1 de [44], 4.1 de [33] y 2.3.1 de [29], desarrollando además los pasos intermedios omitidos en dichas referencias.

Como punto de partida, se recurre a la función delta de Dirac como herramienta matemática para

describir la distribución de masa de la lente concentrada en un único punto del plano correspondiente. En consecuencia, para este modelo, la densidad superficial se define como:

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv M\delta(\vec{\xi}). \quad (6.1.1)$$

Al contar ya con una expresión para la distribución de masa del modelo, el siguiente paso natural consiste en determinar el ángulo de deflexión. Para ello, se sustituye el resultado anterior en la ecuación 4.5.7, lo que da lugar a la siguiente igualdad

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_0^\infty [M\delta(\vec{\xi}')] \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d\vec{\xi}'^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{\xi}}{\xi^2}, \quad (6.1.2)$$

la cual, en notación angular ($\vec{\xi} = \vec{\theta} D_{OL}$), adopta la forma:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{\theta}}{\theta^2} = \frac{1}{D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\hat{e}_\theta}{\theta}. \quad (6.1.3)$$

A partir del resultado anterior, el ángulo de deflexión reducido puede calcularse mediante la relación 5.1.3, es decir:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\hat{e}_\theta}{\theta}, \quad (6.1.4)$$

lo que conduce a la ecuación de lente gravitacional para el modelo de masa puntual, dada por:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\hat{e}_\theta}{\theta}. \quad (6.1.5)$$

El siguiente paso de interés consiste en determinar la forma del potencial gravitacional. Para ello, se recurre a la relación del mismo con el ángulo de deflexión reducido, ecuación 5.2.19. Así, para el modelo de masa puntual, el gradiente del potencial gravitacional reescalado es:

$$\vec{\nabla}\Psi(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\hat{e}_\theta}{\theta}. \quad (6.1.6)$$

De la expresión anterior, es posible determinar el potencial gravitacional, ya que al integrar sobre el plano de la lente y considerando las características de la distribución de masa, la integración se realiza únicamente a lo largo de la dirección radial. En otras palabras, se cumple que $d\vec{\theta}' \equiv \hat{e}_{\theta'} d\theta'$, y, en consecuencia, se obtiene

$$\Psi(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \int_{\theta_E}^\theta \frac{\hat{e}_{\theta'} \cdot d\vec{\theta}'}{\theta'}, \quad (6.1.7)$$

$$= \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \int_{\theta_E}^\theta \frac{d\theta'}{\theta'}, \quad (6.1.8)$$

$$= \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2} \ln\left(\frac{\theta}{\theta_E}\right). \quad (6.1.9)$$

En el cálculo antecedente se introdujo un ángulo de referencia θ_E , el cual recibe el nombre de *ángulo de Einstein*. La relevancia física de este se describirá más adelante. Así entonces, para el modelo de masa puntual, el ángulo de Einstein se define siendo igual a

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2}}, \quad (6.1.10)$$

permitiendo representar al potencial gravitacional reescalado en notación angular, como:

$$\Psi(\theta) = \theta_E^2 \ln \left(\frac{\theta}{\theta_E} \right), \quad (6.1.11)$$

y finalmente, aprovechando la simetría radial del sistema, es posible reescribir la ecuación de lente en términos del ángulo de Einstein, obteniendo la siguiente expresión:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (6.1.12)$$

Ahora bien, utilizando lo anterior y el potencial gravitacional, es posible representar la función de tiempo de atraso total asociada al modelo de masa puntual de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} = \frac{1+z_L}{c} \frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\theta - \beta|^2 - \theta_E^2 \ln \left(\frac{\theta}{\theta_E} \right) \right]. \quad (6.1.13)$$

Análogamente, con el fin de estudiar la formación de imágenes y demás características del modelo, se introduce la notación adimensional, de tal manera que se define la magnitud de los vectores adimensionales (x y y) como:

$$y = \frac{\beta}{\theta_E}, \quad x = \frac{\theta}{\theta_E}. \quad (6.1.14)$$

De este modo, la ecuación de la lente 6.1.12 puede reescribirse en función de los anteriores, dando lugar a la siguiente relación:

$$y = x - \frac{1}{x}. \quad (6.1.15)$$

Para determinar, por ejemplo, el número de imágenes que puede generar una lente modelada como masa puntual, se iguala a cero la ecuación de la lente, es decir:

$$x^2 - xy - 1 = 0. \quad (6.1.16)$$

En donde se obtendrán únicamente dos imágenes, cuya posición radial se determina al resolver la ecuación anterior, y cuya solución se presenta a continuación:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right]. \quad (6.1.17)$$

Al analizar la igualdad anterior, se encuentra que la posición de las imágenes dependerá linealmente de la ubicación de la fuente. En cuanto al signo, este indica si la posición de la imagen se encuentra por encima o por debajo del eje óptico.

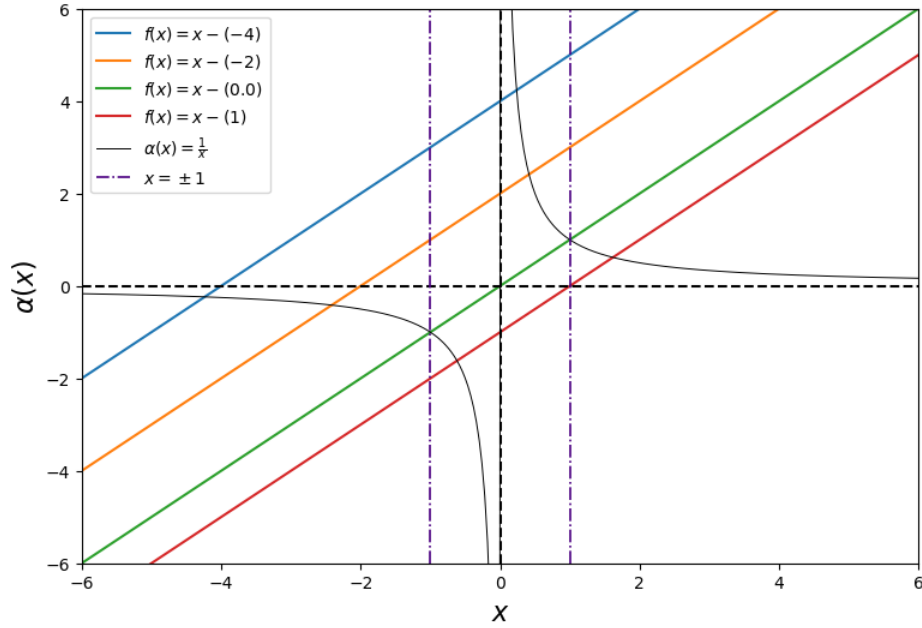


Figura 23: Solución de la ecuación de la lente mediante el método gráfico. Se consideraron diferentes posiciones de la fuente y , con el objetivo de visualizar el desplazamiento de los puntos de intersección (imágenes) entre $\alpha(x)$ y $f(x) = x - y$. Las líneas verticales $x = \pm 1$ representan la distancia radial del ángulo de Einstein en notación adimensional.

Una alternativa para analizar el número de imágenes obtenidas en un sistema de lente gravitacional es mediante el análisis gráfico unidimensional [24], donde se buscan los puntos de intersección entre el ángulo de deflexión en función del parámetro de impacto $\alpha(x)$ y la recta $f(x) = x - y$, como se muestra en la Figura 23.

En el caso hipotético en que la fuente se encuentre a una distancia angular mucho mayor a la del ángulo de Einstein ($y \gg 1$), esta no se ve afectada significativamente por el efecto de lente gravitacional. Si bien teóricamente existen dos imágenes, una próxima a la lente y otra cercana a la posición de la fuente, la imagen que se forma en las cercanías de la lente presenta una magnificación nula, como se demostrará a continuación. Físicamente, esto significa que dicha imagen no puede ser observada o resulta extremadamente tenue en contextos reales [33]. Además, una consecuencia relevante de la posición opuesta de las imágenes en el plano, es que la superficie de tiempo de atraso no se deforma de manera continua, limitando así la formación de nuevas imágenes.

Por otro lado, en el caso específico $y = 0$, la lente y fuente se encuentran perfectamente alineadas, de modo que, la ecuación de la lente toma la forma:

$$x = \pm 1. \quad (6.1.18)$$

Es decir, las dos imágenes generadas se ubican exactamente a la misma distancia radial. Al extra-polar este resultado en el plano, y dada la simetría de la lente, se obtiene la formación de un anillo, el cual se denomina *anillo de Einstein*. En este contexto, el ángulo de Einstein caracteriza el radio

angular de dicho anillo en el plano de la lente. En la Figura 23 se representa este caso mediante la línea punto-guion de color morado.

Ahora, en cuanto a la convergencia del modelo, se tiene que, dada la definición de la densidad superficial, esta resulta ser nula en todos los puntos del plano, a excepción del punto en el que se sitúa la lente. En dicho punto, la convergencia no está definida y se considera como una limitante del modelo.

Con respecto a la magnificación, se toma la relación 5.4.8, siendo que, para este marco corresponde a

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} \right|^{-1}, \quad (6.1.19)$$

en el cual, se tiene que $\mu = 1/|\lambda_{\text{tan}} \lambda_{\text{rad}}|$. Como resultado de lo anterior, se determina que las líneas críticas son:

$$\lambda_{\text{tan}} = \frac{y}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad (6.1.20)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = \frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right). \quad (6.1.21)$$

De manera específica, se tiene que la línea crítica tangencial es la única que puede anularse, y lo hace en $x = 1$. En otras palabras, solo existe una línea crítica, y ésta corresponde al anillo de Einstein del sistema. Análogamente, se obtiene que la magnificación en términos x es:

$$\mu = \left| 1 - \frac{1}{x^4} \right|^{-1}. \quad (6.1.22)$$

La Figura 24 muestra cómo varía la magnificación en función de la posición radial de la imagen. Se observa que, para el modelo de masa puntual, la magnificación aumenta significativamente a medida que la imagen se aproxima al anillo de Einstein, mientras que cuando se aleja del eje óptico, toma un valor cercano a 1. Por último, si la imagen se acerca a la posición de la lente, la magnificación tiende a cero.

Un enfoque alternativo para estudiar la magnificación consiste en analizarla en función de la posición de la fuente. Para ello, se examinan sus componentes fundamentales: la magnificación tangencial y radial, de modo que, en notación adimensional, la primera corresponde a

$$\mu_{\text{tan}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{y} \left[\frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right) \right], \quad (6.1.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \right]. \quad (6.1.24)$$

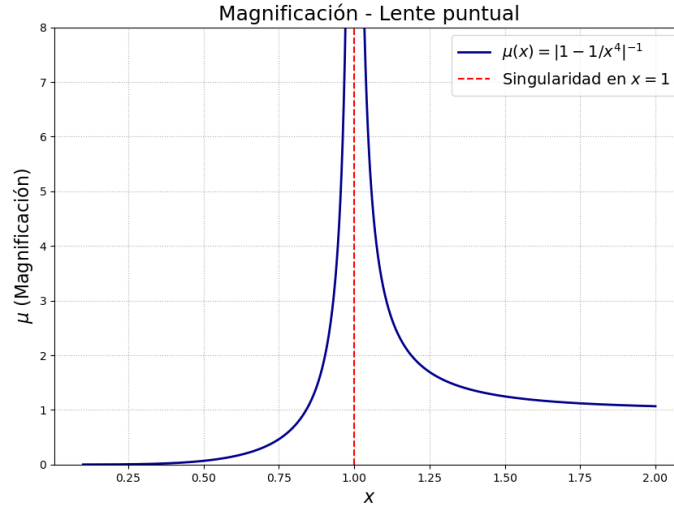


Figura 24: Magnificación en función de la posición de las imágenes en notación adimensional.

Asimismo, la magnificación radial μ_{rad} es caracterizada por

$$\mu_{\text{rad}} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left[y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right], \quad (6.1.25)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right]. \quad (6.1.26)$$

En consecuencia, se tiene que la magnificación de la fuente con respecto a cada una de las imágenes corresponde a $\mu_{\pm} = \mu_{\text{rad}} \cdot \mu_{\text{tan}}$. Así entonces, se determina

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \left[1 \pm \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \right] \left[1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right], \quad (6.1.27)$$

$$= \frac{1}{4} \left[2 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \pm \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \right], \quad (6.1.28)$$

$$= \frac{1}{4} \left[2 \pm \left(\frac{2y^2 + 4}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right) \right], \quad (6.1.29)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right]. \quad (6.1.30)$$

Particularmente, se observa que cuando $y > 0$, $\mu_{+} > 0$ mientras que $\mu_{-} < 0$. En otras palabras, una de las imágenes siempre tendrá paridad negativa y, como se analizó en la topología de la superficie de tiempo de atraso, estará asociada a un punto de silla.

Ahora la magnificación total de la fuente corresponde a la suma de las dos anteriores, tal que

$$\mu_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right] + \left| \frac{1}{2} \left[1 - \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right] \right|, \quad (6.1.31)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right] + \left(-\frac{1}{2} \left[1 - \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \right] \right), \quad (6.1.32)$$

$$= \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}. \quad (6.1.33)$$

En específico, al analizar el caso en el que la fuente se encuentra alejada respecto al eje óptico desde la perspectiva de la magnificación (donde $y \gg 1$), la magnificación total tiende a 1.

Por otro lado, la relación de la magnificación entre las imágenes se analiza desde la siguiente expresión

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \frac{y^2 + 2 + \sqrt{y^2 + 4}}{y^2 + 2 - \sqrt{y^2 + 4}}. \quad (6.1.34)$$

En este momento, con el fin de simplificar la anterior, se consideran las siguiente relaciones matemáticas

$$\frac{1}{2} \left(y + \sqrt{y^2 + 4} \right)^2 = y^2 + y\sqrt{y^2 + 4} + 2, \quad (6.1.35)$$

$$\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{y^2 + 4} \right)^2 = y^2 - y\sqrt{y^2 + 4} + 2, \quad (6.1.36)$$

tal que permiten describir el valor absoluto de 6.1.34 en términos de las posiciones de las imágenes $x_{\pm}$, por medio de

$$\left| \frac{\mu_+}{\mu_-} \right| = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{y - \sqrt{y^2 + 4}} \right)^2 = \left(\frac{x_+}{x_-} \right)^2. \quad (6.1.37)$$

De este último resultado, se tiene que en el límite $y \rightarrow \infty$, la magnificación de la imagen x_+ es $\mu_+ \rightarrow 1$, mientras que para la imagen x_- , $\mu_- \rightarrow 0$. Es decir, como se mencionó con anterioridad, x_- no podrá ser visible físicamente.

6.2. Lentes axialmente simétricas (circulares)

Estos modelos de lente se caracterizan por tener un potencial gravitacional escalar. Si el sistema de referencia se ubica en el centro de la lente, las ecuaciones pueden describirse desde un enfoque escalar, ya que dependen únicamente de la distancia radial, como por ejemplo, el potencial de la lente puntual. Esta sección está basada en la Sección 5.1 de [33], detallando los pasos intermedios.

$$\Psi(\vec{\theta}) \rightarrow \Psi(\theta). \quad (6.2.1)$$

Como punto de partida se analiza la relación entre el potencial gravitacional reescalado y la convergencia en 5.5.4, de modo que, al describir el sistema en coordenadas esféricas, se determina lo siguiente

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\theta) = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta} \right) = 2\kappa. \quad (6.2.2)$$

Ahora bien, en este contexto, el ángulo de deflexión reducido se describe como $\alpha(\theta) = \partial \Psi(\theta) / \partial \theta$, lo que permite reescribir la relación anterior como

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta \alpha(\theta)] = 2\kappa. \quad (6.2.3)$$

De esta última igualdad, es posible determinar el ángulo de deflexión para lentes axiales, tal que

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty 2\kappa(\theta') \theta' d\theta'. \quad (6.2.4)$$

A partir de lo anterior, al reemplazar la convergencia mediante su relación con las densidades superficiales, se deduce lo siguiente

$$\alpha(\theta) = \frac{2}{\theta} \frac{1}{\Sigma_{\text{crit}}} \int_0^\infty \Sigma(\theta') \theta' d\theta'. \quad (6.2.5)$$

En este punto, es necesario determinar la densidad superficial crítica asociada a este tipo de lentes. De este modo, la masa contenida en una lente axialmente simétrica puede representarse matemáticamente mediante

$$M(\theta) \equiv 2\pi \int_0^\theta \Sigma(\theta') \theta' d\theta'. \quad (6.2.6)$$

De manera análoga, del análisis de la lente puntual se tiene que la masa contenida dentro del ángulo de Einstein corresponde a

$$M_E = \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \frac{c^2}{4G} \theta_E^2, \quad (6.2.7)$$

la cual se busca relacionar con la densidad de masa superficial crítica Σ_{crit} , ya que, como se mencionó con anterioridad, permite describir los efectos de una lente gravitacional fuerte. Es así que, para una lente axialmente simétrica, el área que contiene la masa de la lente puede describirse mediante un círculo de radio θ_E , lo que permite expresar Σ_{crit} , a partir de su definición, como

$$\Sigma_{\text{cri}} = \frac{\frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \frac{c^2}{4G} \theta_E^2}{\pi \theta_E^2}, \quad (6.2.8)$$

$$= \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \frac{c^2}{4G\pi}, \quad (6.2.9)$$

permitiendo así reescribir la ecuación 6.2.5 tras una reorganización de términos, de la siguiente manera

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} \frac{4G}{c^2} \left(2\pi \int_0^\theta \Sigma(\theta') \theta' d\theta' \right), \quad (6.2.10)$$

donde el término entre paréntesis corresponde a 6.2.6. En otras palabras, el ángulo de deflexión reducido de una lente axial en función de la masa de la lente es

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4G}{c^2} \frac{M(\theta)}{\theta}. \quad (6.2.11)$$

Particularmente, al ser representada en notación adimensional, la anterior permitirá un análisis más práctico de la convergencia y el cizallamiento desde un punto de vista matemático en este tipo de lentes. Así, se introduce el ángulo de deflexión reducido de una lente axial como

$$\alpha(x) = \frac{1}{\xi_0^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4G}{c^2} \frac{M(x)}{x}, \quad (6.2.12)$$

el cual puede ser descrito en función de la densidad superficial crítica, es decir

$$\alpha(x) = \frac{M(x)}{\xi_0^2 \pi \Sigma_{\text{cri}}} \frac{1}{x}, \quad (6.2.13)$$

en consecuencia, se introduce un nuevo parámetro, $m(x)$, el cual corresponde a la masa adimensional contenida en la lente axial. En notación adimensional, esta se expresa como

$$m(x) \equiv \frac{M(x)}{\xi_0^2 \pi \Sigma_{\text{cri}}}. \quad (6.2.14)$$

Por ende, la ecuación 6.2.13 toma la forma

$$\alpha(x) = \frac{m(x)}{x}. \quad (6.2.15)$$

En este punto, se considera la expresión 6.2.4, de modo que, al realizar el mismo procedimiento para deducirla, ahora en notación adimensional, se deduce que

$$\alpha(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 2\kappa(x')x' dx', \quad (6.2.16)$$

La cual, al ser comparada con 6.2.15, permite determinar que la masa adimensional es igual a

$$m(x) = 2 \int_0^x \kappa(x')x' dx'. \quad (6.2.17)$$

Como resultado, se deduce que, para lentes axiales, la ecuación de la lente en notación adimensional y en función de $m(x)$ toma la siguiente forma

$$y = x - \frac{m(x)}{x}. \quad (6.2.18)$$

Por otra parte, es posible deducir la convergencia a partir de la ecuación 6.2.3 en notación adimensional, de manera que

$$\kappa(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha(x)}{x} + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right]. \quad (6.2.19)$$

Ahora bien, al calcular la derivada del ángulo de deflexión reducido considerando 6.2.15, se encuentra lo siguiente

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial m(x)}{\partial x} - \frac{m(x)}{x^2}. \quad (6.2.20)$$

De este modo, al sustituir la anterior en 6.2.19, se obtiene que la convergencia de una lente axial corresponde a

$$\kappa(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{m(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial m(x)}{\partial x} - \frac{m(x)}{x^2} \right], \quad (6.2.21)$$

$$= \frac{1}{2x} \frac{\partial m(x)}{\partial x}. \quad (6.2.22)$$

En este momento del desarrollo, se destaca que, si bien el punto de partida fue la descripción de la masa de la lente en coordenadas esféricas, a partir de ahora resulta útil describir el fenómeno en el plano de la lente; por ello, se recurre a representar al sistema en coordenadas polares. Así, se introducen las componentes del ángulo de deflexión como

$$\alpha_1(x) = \alpha(x) \cos \phi, \quad (6.2.23)$$

$$\alpha_2(x) = \alpha(x) \sin \phi. \quad (6.2.24)$$

Análogamente, se tiene la introducción de las respectivas derivadas de las componentes, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{x} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos \phi}{x} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (6.2.26)$$

Este cambio permite facilitar el análisis matemático del cizallamiento, dado que posibilita su estudio a partir de sus componentes. Así, considerando la descripción de estas en función del potencial, como se presenta en 5.5.7, pero ahora expresada en notación adimensional, se tiene que γ_1 es

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_2(x) \right], \quad (6.2.27)$$

en el cual se describen las segundas derivadas del potencial adimensional como $\hat{\Psi}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j$.

Así entonces, al sustituir 6.2.24 sobre la expresión de γ_1 , se obtiene

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\cos^2 \phi \alpha'(x) + \frac{\sin^2 \phi \alpha(x)}{x} \right) - \left(\sin^2 \phi \alpha'(x) + \frac{\cos^2 \phi \alpha(x)}{x} \right) \right], \quad (6.2.28)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \alpha'(x) - (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \frac{\alpha(x)}{x} \right], \quad (6.2.29)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \left(\alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right) \right], \quad (6.2.30)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos 2\phi \left(\alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right) \right]. \quad (6.2.31)$$

Asimismo, para γ_2

$$\gamma_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_1(x), \quad (6.2.32)$$

$$= \sin \phi \cos \phi \alpha'(x) - \sin \phi \cos \phi \frac{\alpha(x)}{x}, \quad (6.2.33)$$

$$= \sin \phi \cos \phi \left(\alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right), \quad (6.2.34)$$

$$= \frac{\sin 2\phi}{2} \left(\alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right). \quad (6.2.35)$$

Con la determinación de las componentes del cizallamiento, es posible determinar el módulo del tensor, tal que

$$|\gamma| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (6.2.36)$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)}{4} \left(\alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right)^2}, \quad (6.2.37)$$

$$= \frac{1}{2} \left| \alpha'(x) - \frac{\alpha(x)}{x} \right|. \quad (6.2.38)$$

La anterior, puede ser descrita en función de $m(x)$, tal que 6.2.38 toma la forma

$$\gamma = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m(x)}{x} \right) - \frac{m(x)}{x^2} \right|, \quad (6.2.39)$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{m'(x)}{x} - 2 \frac{m(x)}{x^2} \right|. \quad (6.2.40)$$

Al tomar el resultado de la ecuación 6.2.22, se determina que el módulo de cizalladura es proporcional a la convergencia del sistema, es decir

$$\gamma = \left| \kappa(x) - \frac{m(x)}{x^2} \right|. \quad (6.2.41)$$

De este último resultado, se da lugar a la definición de *convergencia media*, denotada por $\bar{\kappa}(x)$, la cual representa el promedio de la convergencia κ en un círculo de radio x (o radio angular θ) centrado en el eje de simetría. Matemáticamente, $\bar{\kappa}(x)$ es expresa como

$$\bar{\kappa}(x) \equiv \frac{m(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2} \int_0^x \kappa(x') x' dx', \quad (6.2.42)$$

demostrando así que, finalmente que el módulo de cizallamiento de una lente axial corresponde a

$$\gamma = |\kappa(x) - \bar{\kappa}(x)|. \quad (6.2.43)$$

Ahora, con el fin de analizar las líneas críticas del sistema, se expresa la matriz jacobiana en términos de κ y γ (véase la ecuación 5.5.18), de manera que la matriz, en el contexto de las lentes axiales, es

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left| \frac{m'(x)}{x} - 2 \frac{m(x)}{x^2} \right| \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (6.2.44)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left| 2\kappa(x) - 2\bar{\kappa}(x) \right| \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (6.2.45)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}. \quad (6.2.46)$$

y su determinante

$$\det(\mathcal{A}) = (1 - \kappa - \gamma \cos 2\phi)(1 - \kappa + \gamma \cos 2\phi) - (\gamma \sin 2\phi)^2, \quad (6.2.47)$$

$$= (1 - \kappa)^2 - (\gamma \cos 2\phi)^2 - (\gamma \sin 2\phi)^2, \quad (6.2.48)$$

$$= (1 - \kappa) - \gamma^2, \quad (6.2.49)$$

$$= [1 - \kappa(x) - \gamma(x)][1 - \kappa(x) + \gamma(x)]. \quad (6.2.50)$$

Es bien conocido que la magnificación es $\mu(x) = \det(\mathcal{A})^{-1}$, lo que permite determinar la línea crítica radial y la tangencial, como se demostró en la ecuación 5.5.31. De manera explícita, en el caso de lentes axiales —al igual que en el caso de una masa puntual— las líneas críticas están caracterizadas por

$$\lambda_{\text{tan}} = \frac{y}{x}, \quad \lambda_{\text{rad}} = \frac{dy}{dx}. \quad (6.2.51)$$

6.2.1. Esfera isoterma singular (SIS)

El modelo de esfera isoterma singular (SIS, por sus siglas en inglés) es uno de los más utilizados en lentes gravitacionales, ya que, gracias a su simplicidad, permite analizar de manera coherente múltiples sistemas de lente presentes en la naturaleza [57, 58].

Este modelo se construye físicamente al considerar una galaxia (la lente) como una esfera de gas en equilibrio hidrostático, en la cual la densidad volumétrica se describe en función de una velocidad de dispersión constante σ_v , que representa la velocidad promedio de las partículas que conforman el gas. Este enfoque es detallado con mayor detalle en [29]. Esta sección se basa y desarrolla los pasos omitidos en la sección 5.2.3 de [33], 2.3 de [29] y [59].

Como punto de partida, se toma el perfil de densidad de la esfera en equilibrio hidrostático, el cual es

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G |\vec{r}|^2}, \quad (6.2.52)$$

siendo que $|\vec{r}|$ caracteriza la distancia con respecto al centro de la lente.

Dada la descripción volumétrica, es posible expresar r en función del parámetro de impacto, de la siguiente manera

$$r = \sqrt{\xi^2 + z^2} , \quad (6.2.53)$$

lo que permite derivar el perfil de densidad superficial (ecuación 4.5.1), tal que

$$\Sigma(\xi) = 2 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) dz , \quad (6.2.54)$$

$$= 2 \left(\frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \right) \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} . \quad (6.2.55)$$

Para resolver la integral, se propone el siguiente cambio de variable: $z = \xi \tan \omega$. De esta manera, se deduce

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} = \frac{1}{\xi} \int \frac{\sec^2 \omega d\omega}{1 + \tan^2 \omega} = \frac{1}{\xi} \omega = \frac{1}{\xi} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\xi} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\xi} , \quad (6.2.56)$$

de modo que, al reemplazar en la ecuación 6.2.55, se deduce que la densidad superficial de la lente en el SIS es:

$$\Sigma(\xi)_{\text{sis}} = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\xi} . \quad (6.2.57)$$

De manera específica, se distingue a este perfil de masa con el subíndice “sis”, ya que será útil en cálculos de otros modelos. En particular, al analizar la ecuación 6.2.57, se observa una singularidad conforme el parámetro de impacto se aproxima a cero. Al tratarse de una idealización, no tiene una interpretación física asociada, lo que resulta en que el modelo no es válido en las proximidades del centro de la lente.

Ahora bien, con el fin de determinar el ángulo de deflexión de éste modelo, es preciso determinar la masa asociada a la lente; es así que al considerar 6.2.6, se tiene que

$$M(\xi) = 2\pi \left(\frac{\sigma_v^2}{2G} \right) \int_0^\xi \frac{\xi'}{\xi'} d\xi' = \frac{\pi \sigma_v^2}{G} \xi . \quad (6.2.58)$$

Al considerar la ecuación 6.2.11, se deriva el ángulo de deflexión reducido como

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{4G}{c^2} \left(\frac{\pi \sigma_v^2}{G} \xi \right) \frac{\hat{e}_\xi}{\xi} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{4\pi \sigma_v^2}{c^2} \hat{e}_\xi , \quad (6.2.59)$$

el cual, al ser representado en notación angular toma la forma

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4\pi \sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{e}_\theta . \quad (6.2.60)$$

En este momento, se pretende determinar el potencial gravitacional reescalado, siendo que, es posible determinarlo de la misma manera que en el marco de una lente puntual. Así entonces,

dadas las características simétricas de la lente, se desarrolla lo siguiente

$$\Psi(\theta) = \int \alpha(\theta') d\theta' , \quad (6.2.61)$$

$$= \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \int_0^\theta d\theta' , \quad (6.2.62)$$

$$= \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \theta . \quad (6.2.63)$$

La anterior igualdad, introduce del ángulo de Einstein del modelo SIS al definir θ_{E-sis} como

$$\theta_{E-sis} \equiv \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} , \quad (6.2.64)$$

de manera tal, que el potencial corresponde a

$$\Psi(\theta) = \theta_{E-sis} \theta , \quad (6.2.65)$$

y se mantiene como una cantidad adimensional, al igual que en el modelo de masa puntual.

A partir de lo desarrollado, se obtiene que la ecuación de la lente, en notación angular, es detallada por la siguiente ecuación:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{E-sis} \hat{\theta} . \quad (6.2.66)$$

Asimismo, la función tiempo del modelo SIS se representa mediante:

$$\mathcal{T} = \frac{1+z_L}{c} \frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \theta_{E-sis} |\vec{\theta}| \right] . \quad (6.2.67)$$

Con el objetivo de profundizar en el análisis del sistema, es de interés determinar la convergencia y el módulo del tensor de cizalladura. Por facilidad, se introduce la notación adimensional por medio del radio de Einstein sobre el plano de la lente, de la siguiente manera

$$\xi_E = D_{OL} \theta_{E-sis} = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}} , \quad (6.2.68)$$

de modo que, la densidad superficial en notación adimensional ($\xi = \xi_E x$) se representa por medio de:

$$\Sigma(x) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi_E} \frac{1}{x} . \quad (6.2.69)$$

Ahora bien, se pretende expresar la convergencia únicamente en términos de x . Así, se define la densidad superficial crítica del modelo SIS como

$$\Sigma_{crit} \equiv \frac{\sigma_v^2}{G\xi_E} , \quad (6.2.70)$$

y por ende, la convergencia es descrita con la siguiente relación:

$$\kappa(x) = \frac{\Sigma(x)}{\Sigma_{crit}} = \frac{1}{2x} . \quad (6.2.71)$$

Por otro lado, es de interés estudiar la región en la cual se generan múltiples imágenes; por lo tanto, para estar dentro del régimen del fenómeno de lente gravitacional fuerte, se debe satisfacer la siguiente condición: $x < \frac{1}{2}$.

De manera análoga, a partir del análisis de la convergencia en una lente axial en la ecuación 6.2.22, se obtiene que $\frac{\partial}{\partial x}m(x) = 1$. Es decir, el parámetro de masa adimensional del SIS es

$$m(x) = x, \quad (6.2.72)$$

de manera tal, que el ángulo de deflexión reducido en notación adimensional corresponde a

$$\alpha(x) = \frac{m(x)}{x} = 1. \quad (6.2.73)$$

En consecuencia, la ecuación vectorial de la lente es descrita por la siguiente igualdad

$$\vec{y} = \vec{x} - \hat{e}_x = \vec{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right). \quad (6.2.74)$$

Al representarla en su forma escalar, se puede analizar la formación de imágenes en el modelo, tal que

$$y = x - \frac{x}{|x|}, \quad (6.2.75)$$

Cuando la fuente se encuentra dentro del radio de Einstein ($y < 1$), se forman dos imágenes, las cuales se caracterizan, al igual que en el caso de una masa puntual, una por estar por debajo del eje óptico y la otra por estar sobre el mismo, es decir

$$x_- = y - 1, \quad (6.2.76)$$

$$x_+ = y + 1. \quad (6.2.77)$$

En otras palabras, la posición de las imágenes formadas por el modelo SIS en notación angular es

$$\theta_{\pm} = \beta \pm \theta_E, \quad (6.2.78)$$

donde la separación entre las ellas es $2\theta_E$.

La formación de únicamente dos imágenes en el modelo SIS también puede observarse mediante el análisis gráfico. En la Figura 25 se distinguen dos regiones específicas: la primera caracterizada por $y \leq 1$, donde se forman dos imágenes; la segunda, $y > 1$, donde solo existirá un punto de intersección. Particularmente, al igual que en el modelo anterior, si $y = 0$ se formará en el plano de la lente un anillo de Einstein. Al considerar el caso en que la fuente se encuentra en $y > 1$, se obtiene una única solución física; es decir, se forma solo una imagen, análoga al caso del modelo de lente puntual.

En esencia, la circunferencia de radio 1 separa, en el plano de la lente, las regiones en las que existe formación de múltiples imágenes. Aunque se comporta como una cáustica, en realidad no lo es, ya que no corresponde a una región donde el ángulo de deflexión diverge. Por este motivo, se le denomina pseudo-cáustica o línea de corte.

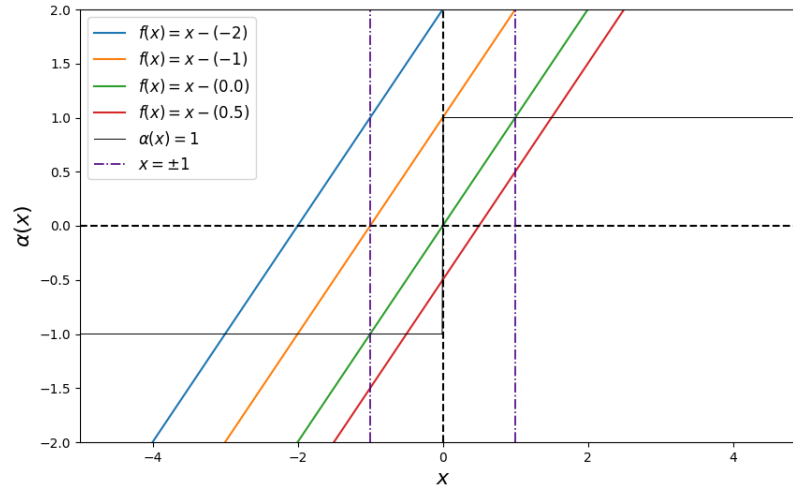


Figura 25: Solución por método gráfico de la ecuación de la lente en el SIS. Se consideraron diferentes valores de y , con el fin de visualizar la formación de imágenes en el modelo.

De manera análoga, a partir del análisis de lentes axialmente simétricas, se obtiene que la magnitud del tensor de cizalladura es

$$\gamma = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} - 2 \frac{x}{x^2} \right| = \frac{1}{2x}. \quad (6.2.79)$$

La igualdad anterior indica que las distorsiones en las imágenes aumentan a medida que estas se aproximan a la lente (ubicada en el origen), y dichas distorsiones son simétricas con respecto al centro del cuerpo deflector.

Por otro lado, dada la simetría del sistema, es posible considerar la definición de las líneas críticas expresadas en 5.5.24 y 5.5.25. Así, la línea crítica tangencial del SIS es

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - \kappa - \gamma = 1 - \frac{1}{|x|}, \quad (6.2.80)$$

mientras que la línea crítica radial

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 - \kappa + \gamma = 1. \quad (6.2.81)$$

Es decir, en el modelo SIS, al igual que en el modelo de masa puntual, solo existe la línea crítica tangencial, la cual se ubica en los puntos del plano que satisfacen $|x| = 1$, es decir, en los puntos que describen el anillo de Einstein.

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene que el factor de magnificación del SIS es:

$$\mu = \frac{|x|}{|x| - 1}. \quad (6.2.82)$$

En la Figura 26 se muestra gráficamente la magnificación del modelo de esfera isoterma singular, evidenciando una gran similitud con el comportamiento del modelo de masa puntual. No obstante, en este caso la magnificación varía de manera más suave y progresiva, debido a que la distribución continua de masa de la lente suaviza las variaciones del modelo anterior.

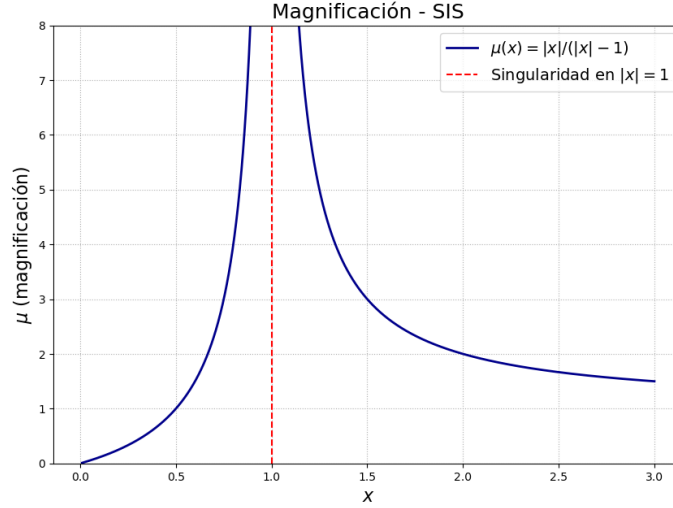


Figura 26: Magnificación correspondiente al modelo SIS, descrita en función de la posición radial de las imágenes en notación adimensional.

Por su parte, es posible analizar la magnificación de cada una de las imágenes, de tal manera que, al sustituir $x_{\pm}$ en la expresión anterior, se deduce

$$\mu_{+} = \left(\frac{|y_{+} + 1|}{|y_{+} + 1| - 1} \right) = 1 + \frac{1}{y_{+}}, \quad (6.2.83)$$

$$\mu_{-} = \left(\frac{|y_{-} - 1|}{|y_{-} - 1| - 1} \right) = 1 - \frac{1}{y_{-}}. \quad (6.2.84)$$

La imagen x_{+} siempre será más grande que la fuente y se caracteriza por tener una paridad positiva (mínimo), mientras que x_{-} es más pequeña que la fuente y tiene paridad negativa (punto de silla). Como se ha demostrado, el análisis de las imágenes es análogo al modelo de lente puntual, lo que, en el caso límite de grandes distancias entre observador, lente y fuente, es congruente físicamente.

6.2.2. Esfera isoterma no singular (NIS)

El modelo anterior, si bien representa una distribución de masa más próxima a la realidad, presenta una limitación física en las cercanías del centro de la lente. En este contexto, para evitar dicha singularidad, se introduce un núcleo sólido que suaviza el perfil de densidad, evitando así el punto $x = 0$ [33].

Al igual que el modelo SIS, el NIS (esfera isoterma no singular), toma su nombre de las siglas en inglés que describen este perfil. El desarrollo matemático descrito en esta sección se basa y expone los pasos intermedios omitidos de 3.6 de [44] 5.3 de [33], 2.3.3 de [29] y [59].

Este núcleo se introduce directamente en la densidad superficial y se le asigna un radio característico ξ_c , definiendo así, en el modelo NIS, lo siguiente:

$$\Sigma(\xi) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \xi_c^2}} . \quad (6.2.85)$$

Siguiendo los pasos del modelo anterior, se establece que la masa de la lente es

$$M(\xi) = \pi \left(\frac{\sigma_v^2}{2G} \right) \int_0^\xi \frac{2\xi' d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + \xi_c^2}} , \quad (6.2.86)$$

donde la integral se resuelve por el método de sustitución al considerar $a = \xi^2 + \xi_c^2$. Es decir, la integral toma la siguiente forma:

$$\int \frac{2\xi' d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + \xi_c^2}} \rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu^{\frac{1}{2}}} = 2\mu . \quad (6.2.87)$$

Al evaluar los límites de integración, se deduce que la masa de la lente es:

$$M(\xi) = \frac{\pi\sigma_v^2}{G} \left[\sqrt{\xi^2 + \xi_c^2} - \xi_c \right] . \quad (6.2.88)$$

En consecuencia, al sustituir la expresión anterior en el ángulo de deflexión reducido y reorganizar los términos, se obtiene que este último se caracteriza por

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \xi_c^2}}{\xi} - \frac{\xi_c}{\xi} \right) \hat{e}_\xi , \quad (6.2.89)$$

el cual es proporcional ángulo de Einstein del SIS. Ahora bien, al representar la igualdad 6.2.89 en notación angular, se establece que

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \theta_{E-sis} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}}{\theta} - \frac{\theta_c}{\theta} \right) \hat{e}_\theta . \quad (6.2.90)$$

Por otro lado, para determinar el potencial gravitacional reescalado del modelo NIS, se recurre a integrar sobre el plano de la lente, tal como se hizo en los modelos anteriores. De esta manera, se obtiene la siguiente expresión

$$\Psi(\theta) = \theta_{E-sis} \left[\int_0^\theta \frac{\sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2}}{\theta'} d\theta' - \theta_c \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\theta'} \right] , \quad (6.2.91)$$

La primera integral, se resuelve al considerar el siguiente cambio de variable, $\mu \equiv \theta_c/\theta'$, es decir

$$\int \frac{\sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2}}{\theta'} d\theta' \rightarrow -\theta_c \int \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu^2} d\mu, \quad (6.2.92)$$

la cual, al ser solucionada por partes, resulta en

$$\int \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu^2} d\mu = \sqrt{1 + \mu^2} \left(-\frac{1}{\mu} \right) + \int \frac{d\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad (6.2.93)$$

$$= -\frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} + \ln \left| \sqrt{1 + \mu^2} + \mu \right|. \quad (6.2.94)$$

Al deshacer el cambio de variable, se deduce que la primera integral es

$$\int_0^\theta \frac{\sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2}}{\theta'} d\theta' = -\theta_c \left[-\frac{\sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2}}{\theta_c} \Big|_0^\theta + \left(\ln \left| \sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right) \Big|_0^\theta - \ln |\theta'| \Big|_0^\theta \right], \quad (6.2.95)$$

$$= \sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2} \Big|_0^\theta - \theta_c \left(\ln \left| \sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right) \Big|_0^\theta + \theta_c \ln |\theta'| \Big|_0^\theta. \quad (6.2.96)$$

Por otro lado, la segunda integral se soluciona de manera directa

$$\theta_c \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\theta'} = \theta_c \ln |\theta'| \Big|_0^\theta. \quad (6.2.97)$$

En función de lo anterior, se tiene que al operar las soluciones de las dos integrales se resuelve

$$\rightarrow \sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2} \Big|_0^\theta - \theta_c \left(\ln \left| \sqrt{\theta'^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right) \Big|_0^\theta + \theta_c \ln |\theta'| \Big|_0^\theta - \theta_c \ln |\theta'| \Big|_0^\theta, \quad (6.2.98)$$

$$= \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c - \theta_c \ln \left| \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| + \theta_c \ln |2\theta_c|. \quad (6.2.99)$$

Ahora bien, dado que los términos constantes no afectan las predicciones físicas observables, se omiten en la representación del potencial gravitacional. Es así que finalmente, el potencial gravitacional en el modelo NIS, es descrito como

$$\Psi(\theta) = \theta_{\text{E-sis}} \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln \left| \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right], \quad (6.2.100)$$

el cual, al igual que el de los dos modelos anteriores, es adimensional.

De lo determinado hasta ahora, es posible describir la función tiempo de atraso del NIS mediante de la siguiente expresión matemática

$$\mathcal{T} = \frac{D_{\text{t.a}}}{c} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \theta_{\text{E-sis}} \left(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln \left| \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right) \right]. \quad (6.2.101)$$

Asimismo, la ecuación de la lente en notación angular es

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{\text{E-sis}} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}}{\theta} - \frac{\theta_c}{\theta} \right) \hat{e}_\theta, \quad (6.2.102)$$

$$= \vec{\theta} \left[1 - \theta_{\text{E-sis}} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}}{\theta^2} - \frac{\theta_c}{\theta^2} \right) \right]. \quad (6.2.103)$$

Con el fin de analizar a mayor profundidad este modelo, se busca determinar la convergencia y el módulo del tensor de cizallamiento. Así, en cuanto al primero, se siguen los mismos pasos que en el modelo SIS, describiendo la densidad superficial en notación adimensional como

$$\Sigma(x) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi_E} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x_c^2}}, \quad (6.2.104)$$

de este modo, al mantener la densidad crítica del SIS, se obtiene que la convergencia es

$$\kappa(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x_c^2}}. \quad (6.2.105)$$

Donde la región de lentesamiento sobrecrítico debe satisfacer la condición $x^2 < \frac{1}{4} - x_c^2$. Es decir, el radio del núcleo debe cumplir $x_c < 1/2$.

Como consecuencia de la determinación de la convergencia, se estudia ahora el perfil de masa adimensional, tal que al sustituir 6.2.105 en 6.2.17, se obtiene la siguiente igualdad

$$m(x) = 2 \int_0^x \frac{x' dx'}{2\sqrt{x'^2 + x_c^2}}, \quad (6.2.106)$$

La cual, al ser solucionada mediante el cambio de variable $a = x'^2 + x_c^2$, permite resolver la integral de manera directa. De esta forma, al evaluar los límites de integración, se halla que $m(x)$ en el marco del modelo NIS está caracterizada por

$$m(x) = \sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c. \quad (6.2.107)$$

Al considerar esta última, se tiene que el ángulo de deflexión reducido se describe matemáticamente como

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2}}{x} - \frac{x_c}{x}, \quad (6.2.108)$$

dando lugar, en la siguiente expresión, a la ecuación de la lente en notación adimensional

$$y = x - \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2}}{x} + \frac{x_c}{x}. \quad (6.2.109)$$

La anterior puede llevarse a la forma de un polinomio de tercer grado, mediante el procedimiento descrito a continuación

$$xy = x^2 - \sqrt{x^2 + x_c^2} + x_c, \quad (6.2.110)$$

$$\sqrt{x^2 + x_c^2} = x^2 - xy + x_c, \quad (6.2.111)$$

$$x^2 + x_c^2 = x^4 + x^2y^2 + x_c^2 - 2x^3y + 2x_cx^2 - 2xx_cy, \quad (6.2.112)$$

$$x^4 + x^2y^2 - 2x^3y + 2x_cx^2 - 2xx_cy - x^2 = 0, \quad (6.2.113)$$

$$x^3 - 2x^2y + (y^2 + 2x_c - 1)x - 2x_cy = 0. \quad (6.2.114)$$

En términos más simples, el NIS resuelve tres imágenes, las cuales dependen tanto de la posición radial de la fuente como del tamaño radial del núcleo considerado.

La solución de la ecuación anterior determina las posiciones radiales de las imágenes con respecto al centro de la lente. Esta suele resolverse mediante métodos numéricos debido a su complejidad. Sin embargo, también es posible obtener una solución analítica aplicando la fórmula de Cardano, o bien recurrir a una aproximación, como se muestra en [29].

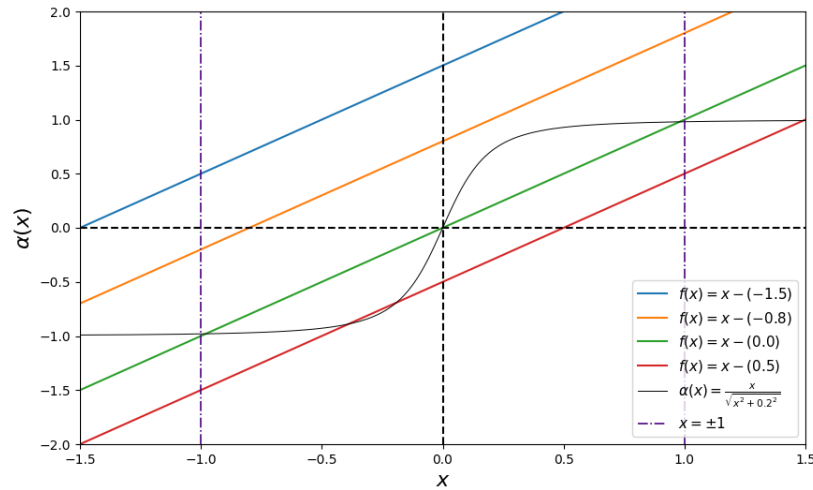


Figura 27: Resolución gráfica de la ecuación de la lente para el modelo NIS con $x_c = 0.2$. Al igual que en los casos anteriores, se consideran posiciones arbitrarias de la fuente para analizar los diferentes puntos de intersección (imágenes) entre $\alpha(x)$ y $f(x) = x - y$.

A diferencia de los modelos anteriores, en este caso se forma una imagen adicional, lo cual es visualmente evidente por los puntos de intersección de las líneas sólidas verdes y rojas con el ángulo de deflexión en la Figura 27. De manera análoga, se observa que si $y = 0.5$, las dos imágenes situadas dentro del anillo de Einstein se encuentran radialmente más próximas entre sí.

A continuación, dada la convergencia como el parámetro de masa adimensional del modelo, se tiene que gracias a la relación 6.2.41 es posible determinar γ directamente. Así, la magnitud del

tensor de cizalladura en el NIS es igual a

$$\gamma = \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x_c^2}}. \quad (6.2.115)$$

Considerando lo anterior, se procede a la cada una de las líneas críticas respectivamente, de esta manera, se tiene que la tangencial es

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - \kappa(x) - \gamma(x), \quad (6.2.116)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2}, \quad (6.2.117)$$

$$= \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + x_c^2} + x_c}{x^2}. \quad (6.2.118)$$

la cual es igual a cero, cuando

$$x_t^2 + x_c = \sqrt{x_t^2 + x_c^2}, \quad (6.2.119)$$

$$x_t^4 + 2x_t^2 x_c^2 + x_c = x_t^2 + x_c^2, \quad (6.2.120)$$

$$x_t^2(x_t^2 + 2x_c - 1) = 0. \quad (6.2.121)$$

Aquí se ha caracterizado la distancia radial de la línea crítica tangencial como x_t . Adicionalmente, no se considera la solución trivial en cero, de manera que λ_{tan} es nula en

$$x_t = \sqrt{1 - 2x_c}. \quad (6.2.122)$$

De la relación anterior se evidencia que la línea crítica tangencial solo existirá si $x_c < 1/2$. esta define el ángulo de Einstein del modelo NIS como

$$\theta_{\text{E-nis}} \equiv \theta_{\text{E-sis}} \sqrt{1 - 2\frac{\theta_c}{\theta_{\text{E-sis}}}}. \quad (6.2.123)$$

Análogamente, para la línea crítica radial, se tiene lo siguiente:

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 - \kappa(x) + \gamma(x), \quad (6.2.124)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x_c^2}}. \quad (6.2.125)$$

Esta expresión resulta ser nula cuando:

$$x_{\text{rad}}^2 = \frac{1}{2} \left(2x_c - x_c^2 \pm x_c \sqrt{x_c^2 + 4x_c} \right), \quad (6.2.126)$$

siempre que $x_c < 1/2$. En otras palabras, la distancia a la cual λ_{rad} es igual a cero, es coherente con la condición de la línea crítica tangencial, ya que $x_r^2 > 0$. La deducción de x_r se detalla en el apendice C.3.

Por último, se busca determinar la magnificación del modelo NIS, para ello se recurre a la ecuación 5.5.31, la cual se expresa en función de las líneas crítica tangencial y radial. La Figura 28 muestra el comportamiento de la magnitud de la magnificación en el modelo de esfera isoterma no singular. A diferencia de los modelos anteriores, en este caso aparece una línea crítica radial, en la cual la magnificación también diverge, al igual que en la línea crítica tangencial. Asimismo, se resalta que la aparición de esta línea crítica no modifica la magnificación de una imagen situada sobre la lente (origen de coordenadas), la cual tiende a cero en dicha región.

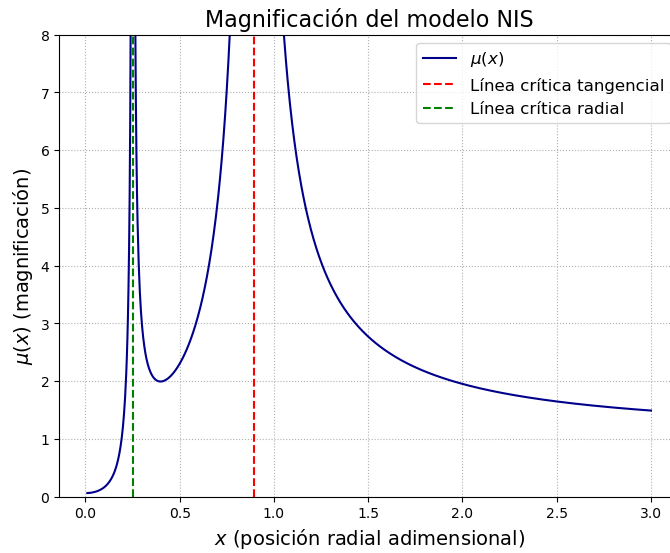


Figura 28: Magnitud de la magnificación del modelo NIS, descrita en función de la posición radial de las imágenes en notación adimensional.

6.3. Modelos Elípticos

Hasta este momento, se han detallado diferentes modelos de lente, los cuales han seguido una estructuración lógica en su presentación. Se tomó como punto de partida el modelo más sencillo (masa puntual), se continuó con una esfera isoterma y se finalizó con la adición de un núcleo a este último. El siguiente paso natural son entonces los modelos elípticos, en los cuales se rompe la simetría axial, pero se busca mantener invariante el área superficial de la lente. Lo anterior se logra al introducir un nuevo término, f , el cual representa la razón entre los ejes de la elipse, de modo que $0 < f \leq 1$. Si se caracteriza el eje menor con una magnitud ξ , el eje mayor estará dado por ξ/f . De forma arbitraria, se alinea el eje de mayor extensión con el eje vertical del plano, es decir, ξ_2 [33].

El estudio de este tipo de modelos requiere la introducción de nuevos parámetros, lo cual incrementa la complejidad matemática de las expresiones que describen el fenómeno de lente gravitacional. Como consecuencia, por ejemplo, no se dispone de una solución gráfica sencilla de la ecuación de

la lente, a diferencia de lo que ocurre con modelos más simples. En otras palabras, la determinación de las posiciones de las imágenes, la magnificación, las líneas críticas, las cáusticas y demás propiedades del sistema exige recurrir a métodos numéricos, con el fin de caracterizar de manera adecuada su comportamiento. Particularmente, a diferencia de lo analizado en la sección anterior, los modelos con simetría elíptica se aproximan más a las geometrías de las lentes presentes en la naturaleza, como es el caso, por ejemplo, el sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 de acuerdo a [60]

Para dar entrada al análisis de estos modelos, se toman como referencia los siguientes trabajos [33, 59, 61, 62], a partir de los cuales se han desarrollado los pasos intermedios.

6.3.1. Elipsoide isoterma singular (SIE)

Como punto de partida, el análisis se realiza a partir de la densidad superficial de la lente. En este modelo se toma como referencia la densidad superficial correspondiente al caso de la esfera isoterma singular (SIS), sobre la cual se introduce el factor de elipticidad f . De este modo, se define la densidad superficial del modelo SIE como

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2}}, \quad (6.3.1)$$

donde se añade un factor de normalización $\sqrt{f}$, que asegura que la masa contenida dentro de la lente sea independiente de la forma de la elipse [33]. Dado que la densidad superficial de la masa se mantiene invariante, es coherente utilizar el radio de Einstein y la densidad superficial crítica del modelo SIS, de modo que la convergencia en notación adimensional es descrita por:

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{x_1^2 + f^2 x_2^2}}. \quad (6.3.2)$$

Por facilidad en la deducción matemática, se describirá el fenómeno en coordenadas polares, tal que

$$x_1 = x \cos \phi, \quad (6.3.3)$$

$$x_2 = x \sin \phi. \quad (6.3.4)$$

En función de lo anterior, la relación 6.3.2 toma la forma

$$\kappa(x, \phi) = \frac{1}{2x} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}}, \quad (6.3.5)$$

siendo que, se distingue en la primera fracción la convergencia del modelo SIS, mientras que el denominador del segundo término contiene las variables angulares. De este último se define

$$\Delta(\phi) \equiv \sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}. \quad (6.3.6)$$

Al sustituir lo anterior sobre la convergencia, se tiene que ésta es igual a

$$\kappa(x, \phi) = \kappa_{\text{sis}} \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)}. \quad (6.3.7)$$

Ahora, a partir de la convergencia del modelo, se busca deducir el potencial gravitacional reescalado. De acuerdo con la ecuación 5.5.4, al representar en coordenadas polares al Laplaciano se obtiene la relación

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{x} \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)}. \quad (6.3.8)$$

Con el objetivo de dar solución a la expresión anterior, se propone representar el potencial gravitacional como el producto de una función lineal en la coordenada radial x y una función angular $\hat{\Psi}(\phi)$, de modo que

$$\hat{\Psi}(x, \phi) \equiv x \hat{\Psi}(\phi). \quad (6.3.9)$$

Al asumir ésta forma del potencial y sustituir en 6.3.8, se deduce lo siguiente

$$\frac{1}{x} \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} = \frac{\partial^2 [x \hat{\Psi}(\phi)]}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial [x \hat{\Psi}(\phi)]}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 [x \hat{\Psi}(\phi)]}{\partial \phi^2}, \quad (6.3.10)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} = \frac{\hat{\Psi}(\phi)}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}(\phi)}{\partial \phi^2}, \quad (6.3.11)$$

$$\frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} = \hat{\Psi}(\phi) + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}(\phi)}{\partial \phi^2}. \quad (6.3.12)$$

Esta última ecuación diferencial puede ser solucionada utilizando el método de Green, (este procedimiento se encuentra en el apéndice C.4). En consecuencia, se deriva que el potencial gravitacional angular $\hat{\Psi}(\phi)$ es representado por

$$\hat{\Psi}(\phi) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right], \quad (6.3.13)$$

describiendo así, el potencial gravitacional total del sistema por la siguiente ecuación

$$\hat{\Psi}(x, \phi) = x \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right], \quad (6.3.14)$$

donde se ha definido a $f' = \sqrt{1 - f^2}$. De igual manera, en notación angular, el potencial gravitacional del modelo se expresa como

$$\Psi(\theta, \phi) = \theta_{\text{E-sis}} \theta \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right]. \quad (6.3.15)$$

el cual es adimensional $[\text{rad}]^2$.

Con base en lo anterior, puede resolverse la función de tiempo de atraso correspondiente al modelo, de modo que

$$\mathcal{T} = \frac{D_{t.a}}{c} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi(\theta, \phi) \right]. \quad (6.3.16)$$

En este contexto, se interpreta a $\mathcal{T}$ como una herramienta diferencial en el estudio de la formación de imágenes, en contraste con los modelos axialmente simétricos. Al no depender únicamente de la coordenada radial, el potencial gravitacional brinda a la ecuación de la lente una alta complejidad matemática, la cual, en la mayoría de los casos, se resuelve mediante métodos numéricos.

Esto se ejemplifica en la Fig. 17, donde las características del potencial gravitacional introducen irregularidades sobre la superficie de tiempo de atraso, las cuales se traducen en la aparición de nuevos puntos críticos, con máximos o mínimos, lo que se traduce en la práctica, en imágenes adicionales.

El siguiente paso, consiste en determinar el ángulo de deflexión del modelo. Para ello se busca encontrar las componentes del mismo, las cuales se calculan a partir de

$$\alpha_1(x) = \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial x_1} = \cos \phi \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{x} \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial \phi}, \quad (6.3.17)$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial x_2} = \sin \phi \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial x} + \frac{\cos \phi}{x} \frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial \phi}. \quad (6.3.18)$$

Para la aplicación de las anteriores, es necesario determinar la derivada angular del potencial, la cual corresponde a

$$\frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial \phi} = x \frac{\sqrt{f}}{f'} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right], \quad (6.3.19)$$

$$= x \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\cos \phi \arcsin(f' \sin \phi) - \sin \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) + Q \right]. \quad (6.3.20)$$

Donde ha caracterizado como Q a los demás términos deducidos de la derivada, los cuales resultan nulos, como se muestra en el procedimiento a continuación

$$Q = f' \sin \phi \cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - f'^2 \sin^2 \phi}} - \frac{1}{\sqrt{f'^2 \cos^2 \phi + f^2}} \right), \quad (6.3.21)$$

$$= f' \sin \phi \cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi - f'^2 \sin^2 \phi}} - \frac{1}{\sqrt{f^2 + \cos^2 \phi - f'^2 \cos^2 \phi}} \right), \quad (6.3.22)$$

$$= \sin \phi \cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \phi - f'^2 \sin^2 \phi}} - \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \phi - f'^2 \sin^2 \phi}} \right), \quad (6.3.23)$$

$$= 0. \quad (6.3.24)$$

En consecuencia, se representa la derivada angular del potencial gravitacional como

$$\frac{\partial \hat{\Psi}(x, \phi)}{\partial \phi} = x \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\cos \phi \arcsin(f' \sin \phi) - \sin \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right]. \quad (6.3.25)$$

Con este resultado en mente, y al considerar que la derivada radial del potencial es directa, se tiene que α_1 y α_2 son iguales a

$$\alpha_1(x) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\arcsin \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right] , \quad (6.3.26)$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin (f' \sin \phi) , \quad (6.3.27)$$

las cuales son independientes de la coordenada radial x , al igual que en el modelo SIS.

A partir de las componentes del ángulo de deflexión, es posible determinar las respectivas del tensor de cizallamiento, dado que γ_1 y γ_2 son descritas por

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_2} \right] , \quad (6.3.28)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_2} . \quad (6.3.29)$$

De esta manera, al determinar en primera instancia $\frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_1}$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_1} = \cos \phi \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{x} \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial \phi} . \quad (6.3.30)$$

Donde la derivada radial de la expresión anterior resulta ser nula, lo cual da lugar a lo siguiente

$$\frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{f}}{f'} \frac{\sin \phi}{x} \left[\frac{f' \sin \phi}{\sqrt{f'^2 \cos^2 \phi + f^2}} \right] , \quad (6.3.31)$$

$$= \frac{\sqrt{f}}{x} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}} , \quad (6.3.32)$$

$$= \frac{\sqrt{f}}{x} \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(\phi)} . \quad (6.3.33)$$

Asimismo, al proceder de la misma manera sobre $\frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_2}$, se deduce que:

$$\frac{\partial \alpha_2(x)}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{f}}{x} \frac{\cos^2 \phi}{\Delta(\phi)} . \quad (6.3.34)$$

De esta manera, se establece que γ_1 corresponde a

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) , \quad (6.3.35)$$

$$= -\frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)} \cos 2\phi , \quad (6.3.36)$$

$$= -\kappa(x, \phi) \cos 2\phi , \quad (6.3.37)$$

y de manera análoga, para determinar γ_2 , se calcula:

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \frac{1}{x} \left[\frac{-f' \sin \phi}{\Delta(\phi)} \right] , \quad (6.3.38)$$

$$= -\frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)} \sin(2\phi) . \quad (6.3.39)$$

$$= -\kappa(x, \phi) \sin 2\phi , \quad (6.3.40)$$

Por lo tanto, a partir de las relaciones 6.3.37 y 6.3.40, se concluye que el factor de cizalladura es igual a

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \kappa(x, \phi) , \quad (6.3.41)$$

es decir, para el modelo SIE, la convergencia es igual al módulo del tensor de cizallamiento. Así pues, se tiene que las líneas críticas del modelo SIE son respectivamente

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - 2\kappa(x, \phi) , \quad (6.3.42)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 . \quad (6.3.43)$$

Dilucidando que, para este modelo, no existe línea crítica radial, sino únicamente tangencial. Esta última se configura sobre los puntos que satisfacen la condición de convergencia igual a 1/2, los cuales, matemáticamente caracterizados por

$$\vec{x}_t = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} (\cos \phi, \sin \phi) . \quad (6.3.44)$$

La Figura 29 muestra las líneas críticas correspondientes a una lente isoterma elíptica sin núcleo. Se consideraron tres valores arbitrarios del parámetro f : cuando $f = 1$, la línea azul representa un caso esférico, característico de los modelos axialmente simétricos. Para valores cada vez menores de $f \rightarrow 0$, se incrementa la razón entre los ejes, representándose como una elongación progresiva de la línea crítica a lo largo del eje vertical.

6.3.2. Elipsoide isoterma no singular (NIE)

El siguiente modelo de lente se obtiene al seguir la misma línea de ideas de la sección anterior. En este caso, además del factor de elipticidad (f), se introduce el radio de un núcleo en la densidad superficial, con el propósito de corregir la singularidad presente en el centro de la lente. De esta manera, la descripción de la densidad de masa superficial, expresada en notación angular, se escribe como:

$$\Sigma(\vec{\theta}) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2GD_{OL}} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2}} . \quad (6.3.45)$$

Ahora bien, para determinar el potencial gravitacional correspondiente, se busca resolver la ecuación de Poisson asociada al sistema, tal que:

$$\nabla^2 \Psi = 2\kappa(\theta) . \quad (6.3.46)$$

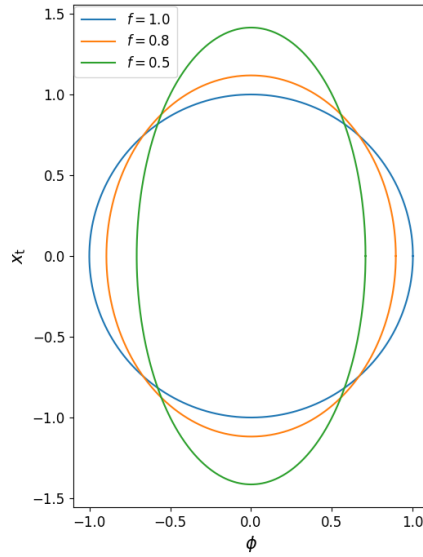


Figura 29: Líneas críticas tangenciales del modelo SIE. Se observa cómo la línea crítica evoluciona desde un anillo de Einstein ($f = 1$) hasta adoptar la forma de una elipse más pronunciada, dependiendo del valor del parámetro f .

Una solución de la ecuación anterior se obtiene mediante el uso de la función de Green en dos dimensiones. En este caso, la solución es de la forma:

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \theta_{\text{E-sis}} \frac{\sqrt{f}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln \sqrt{(\theta_1 - \theta'_1)^2 + (\theta_2 - \theta'_2)^2}}{\sqrt{\theta_1'^2 + f^2 \theta_2'^2 + \theta_c^2}} d\theta'_1 d\theta'_2. \quad (6.3.47)$$

Particularmente, en la literatura no se encuentra un desarrollo analítico o una solución cerrada para la igualdad anterior, por lo que se recurre a resolverla mediante métodos numéricos. En este contexto, la función de tiempo de atraso asociada se expresa como

$$\mathcal{T} = \frac{D_{\text{t.a}}}{c} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \Psi(\theta_1, \theta_2) \right]. \quad (6.3.48)$$

Dentro de este modelo es posible determinar de manera analítica las componentes del ángulo de deflexión, al igual que las componentes del tensor de cizalladura, pero la determinación de éstas requiere la introducción de la notación compleja de las lentes gravitacionales.

A continuación se presentan los fundamentos de la notación compleja y se describe cómo determinar el conjugado complejo del ángulo de deflexión. Como punto de partida, es necesario definir una distancia efectiva ζ , dada por:

$$\zeta^2 \equiv \xi_1^2 + f^2 \xi_2^2. \quad (6.3.49)$$

En función de lo anterior, se introduce una nueva coordenada adimensional $b \equiv \zeta/\xi_{\text{E}}$, de modo

que la densidad superficial del NIE toma la forma:

$$\Sigma(b) = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{b^2 + b_c^2}} . \quad (6.3.50)$$

La introducción de ésta nueva notación tiene como objetivo representar la convergencia del modelo de manera más cercana a la forma matemática ya utilizada en el modelo NIS. Ahora bien, al considerar la densidad crítica del modelo anterior (SIE), se tiene que la convergencia, ahora expresada en función de b , es:

$$\kappa(b) = \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{b^2 + b_c^2}} . \quad (6.3.51)$$

De acuerdo con las referencias [59, 62], se establece, en notación compleja, lo siguiente:

$$x = x_1 + ix_2 , \quad (6.3.52)$$

$$y = y_1 + iy_2 , \quad (6.3.53)$$

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x) . \quad (6.3.54)$$

En consecuencia, es posible analizar la ecuación de la lente descomponiéndola en sus componentes, es decir:

$$y_1 = x_1 + \alpha_1 , \quad (6.3.55)$$

$$y_2 = x_2 + \alpha_2 . \quad (6.3.56)$$

En este contexto, el conjugado complejo del ángulo de deflexión se describe mediante la siguiente igualdad:

$$\alpha^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{\kappa(x')}{x - x'} d^2 x' . \quad (6.3.57)$$

Ahora bien, al introducir el siguiente cambio de representación

$$x \equiv b \cos \phi + i \frac{b}{f} \sin \phi , \quad (6.3.58)$$

se obtiene que 6.3.57 toma la forma:

$$\alpha^*(x) = 2 \int_0^{b(x)} \frac{b' \kappa(b')}{\sqrt{f^2 x^2 + f'^2 b'^2}} db' . \quad (6.3.59)$$

Al sustituir en esta última expresión la convergencia del sistema, se determina que:

$$\alpha^*(x) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \int_0^{b(x)} \frac{b'}{\sqrt{\frac{f^2 x^2}{f'^2} + b'^2} \sqrt{b'^2 + b_c^2}} db' . \quad (6.3.60)$$

Para resolver la integral, se propone el siguiente cambio de variable: $b'^2 + b_c^2 = \eta^2$. Con ello, la integral a solucionar corresponde a

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{f}}{f'} \int \frac{\eta}{\sqrt{\frac{f^2 x^2}{f'^2} + \eta^2 - b_c^2}} d\eta . \quad (6.3.61)$$

Tal que, por facilidad matemática se renombran las siguientes cantidades

$$a^2 = \frac{f^2 x^2}{f'^2} , \quad (6.3.62)$$

$$q^2 = a^2 - b_c^2 , \quad (6.3.63)$$

obteniendo así:

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{f}}{f'} \int \frac{\eta}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} d\eta . \quad (6.3.64)$$

En este punto, se introduce un segundo cambio de variable, $\eta = q \sinh \omega$, de modo que la integral se puede resolver de manera directa, es decir

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{f}}{f'} \int \frac{\cosh \omega}{\sqrt{1 - \sinh^2 \omega}} d\omega , \quad (6.3.65)$$

$$= \frac{\sqrt{f}}{f'} \omega , \quad (6.3.66)$$

$$= \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin \left(\frac{\sqrt{b'^2 + b_c^2}}{\sqrt{\frac{f^2 x^2}{f'^2} - b_c^2}} \right) \Big|_0^b . \quad (6.3.67)$$

Por facilidad, en la última expresión se reorganizan los términos, de modo que se obtenga la forma descrita a continuación

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin \left(\frac{f'}{\sqrt{f^2 x^2 - f'^2 b_c^2}} \sqrt{b'^2 + b_c^2} \right) \Big|_0^b . \quad (6.3.68)$$

Además, bajo el mismo argumento, se define Ξ como:

$$\Xi \equiv \frac{f'}{\sqrt{f^2 x^2 - f'^2 b_c^2}} . \quad (6.3.69)$$

Finalmente, se tiene que el conjugado complejo del ángulo de deflexión es

$$\alpha^* = \left[\frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin \left(\Xi \sqrt{b'^2 + b_c^2} \right) - \arcsin (\Xi b_c) \right] . \quad (6.3.70)$$

La descripción exacta de las componentes del ángulo de deflexión requiere un procedimiento algebraico extenso, el cual se menciona de manera superficial en la referencia [59]. Por simplicidad, se tomará directamente el resultado de estas, de modo que la ecuación de la lente, en términos de sus componentes, se expresa como:

$$y_1 = x_1 - \frac{\sqrt{f}}{4f'} \ln \frac{Q_+}{Q_-} , \quad (6.3.71)$$

$$y_2 = x_2 + \frac{\sqrt{f}}{2f'} [\arg R - \arg S] . \quad (6.3.72)$$

Con

$$Q_{\pm} = \frac{\left(f' \sqrt{b^2 + b_c^2} \pm x_1\right)^2 + f^4 x_2^2}{(f x^2 \pm f' b_c x_1)^2 + f'^2 b_c^2 x_2^2},$$

$$R = x_1^2 + f^4 x_2^2 - f'^2 (b^2 + b_c^2) - 2i f^2 f' \sqrt{b^2 + b_c^2} x_2,$$

$$S = f x^2 - f'^2 b_c^2 - 2i f f' b_c x_2.$$

La deducción de las componentes del tensor de cizalladura sigue la misma formulación, ya que en notación compleja se establece que

$$\Gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad (6.3.73)$$

El cual se relaciona con el ángulo de deflexión por medio de la siguiente ecuación

$$\Gamma = \left(\frac{\partial \alpha^*}{\partial x} \right)^*. \quad (6.3.74)$$

Al igual que en la descripción de las componentes del ángulo de deflexión, se recurre a los resultados de [59], de modo que

$$\gamma_1 = [f^2(x_1^2 - x_2^2) - f'^2 b_c^2] P, \quad (6.3.75)$$

$$\gamma_2 = 2f^2 x_1 x_2 P. \quad (6.3.76)$$

Donde

$$P = \frac{\sqrt{f}}{f^4 x^4 - 2f f'^2 b_c^2 (x_1^2 - x_2^2) + f'^4 b_c^4} \left[\frac{\kappa}{\sqrt{f}} (x_1^2 + f^4 x_2^2) - \frac{1 + f^2}{2} \sqrt{b^2 + b_c^2 + f b_c} \right]. \quad (6.3.77)$$

En conclusión, al conocer la convergencia y el cizallamiento es posible determinar la línea crítica tangencial y radial, ya que

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - \kappa - \gamma, \quad (6.3.78)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 - \kappa + \gamma. \quad (6.3.79)$$

El desarrollo analítico de este modelo, como se ha descrito, presenta una alta complejidad matemática y suele abordarse de manera superficial en muchos textos sobre lentes gravitacionales. Si bien la notación compleja ofrece una solución analítica, debido a las limitaciones de tiempo para el desarrollo del proyecto, no fue posible profundizar en este modelo como se hizo con los anteriores. Por lo tanto, en términos generales, los cálculos se realizarán mediante métodos numéricos.

6.4. Otros modelos

El análisis de perfiles físicos de una lente gravitacional contempla un gran abanico de posibilidades, siendo particularmente los descrito a partir de un gas isotérmico uno de los más estudiados en la

literatura. Sin embargo, existen alternativas de alto interés dado, como lo es por ejemplo: la ley de potencias, descrita en las referencias [33, 63, 64], o bien, los modelos propuestos por Navarro-Frenk-White (NFW) estudiados en [29, 33, 65].

En el desarrollo de configuraciones elípticas se ha evidenciado una complejidad considerable para determinar las características asociadas a la lente gravitacional. Como alternativa al estudio directo de estos esquemas, se han propuesto los modelos pseudoelípticos, los cuales no introducen la elipticidad en la densidad superficial del cuerpo deflector, sino que la incorporan directamente en el potencial gravitacional. Es decir, estas formulaciones consideran una distribución de masa con simetría esférica, pero dotan al potencial de una geometría elíptica [33]. Si bien esta aproximación no es físicamente realista, permite analizar las líneas críticas y la superficie de tiempo de atraso desde una perspectiva matemática más accesible.

De esta manera, se introduce matemáticamente la elipticidad sobre el potencial gravitacional re-escalado, $\Psi(\theta)$, por medio de una transformación en sus coordenadas angulares, la cual se define generalmente como

$$\theta \rightarrow \theta = \sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}. \quad (6.4.1)$$

De la descripción anterior se deducen directamente las componentes del ángulo de deflexión, las cuales corresponden a

$$\alpha_1(\vec{\theta}) = \alpha(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1}, \quad (6.4.2)$$

$$\alpha_2(\vec{\theta}) = \alpha(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2}. \quad (6.4.3)$$

Donde $\alpha(\theta)$ representa el ángulo de deflexión de la lente con simetría axial. Asimismo, la convergencia y el cizallamiento se determinan a partir de las segundas derivadas del potencial gravitacional, por lo que es necesario considerar las siguientes relaciones

$$\Psi_{11}(\vec{\theta}) = \frac{\alpha(\theta)}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} \right)^2 + \alpha(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta_1^2}, \quad (6.4.4)$$

$$\Psi_{22}(\vec{\theta}) = \frac{\alpha(\theta)}{\partial \theta_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} \right)^2 + \alpha(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta_2^2}, \quad (6.4.5)$$

$$\Psi_{12}(\vec{\theta}) = \frac{\alpha(\theta)}{\partial \theta_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} \right) + \alpha(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (6.4.6)$$

6.4.1. Elipsoide isoterma pseudo-singular (pSIE)

Para introducir el primer modelo, se toma como referencia tanto el potencial gravitacional como el ángulo de deflexión del modelo SIS, siguiendo lo expuesto en [33]. De esta manera, el potencial gravitacional de una lente modelada como un elipsoide isoterma pseudo-singular (pSIE) se expresa como:

$$\Psi(\theta) = \theta_{\text{E-sis}} \sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}. \quad (6.4.7)$$

Con la deducción del potencial gravitacional reescalado, se procede a la descripción de la función de tiempo de atraso del modelo, la cual se caracteriza por:

$$\mathcal{T} = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \theta_{E-sis} \sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right]. \quad (6.4.8)$$

Ahora, al considerar las ecuaciones 6.4.2, 6.4.3 y conocer la magnitud del ángulo de deflexión del modelo SIS (ecuación 6.2.60), se deduce que las componentes del ángulo de deflexión en este contexto son:

$$\alpha_1(\vec{\theta}) = \theta_{E-sis} \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}}, \quad (6.4.9)$$

$$\alpha_2(\vec{\theta}) = \theta_{E-sis} \frac{f^2 \theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}}. \quad (6.4.10)$$

Con base en el anterior resultado, se tiene que las componentes de la ecuación de la lente para el modelo pSIE, están representadas por medio de

$$\beta_1 = \theta_1 - \frac{\theta_{E-sis}}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}} \theta_1, \quad (6.4.11)$$

$$\beta_2 = \theta_2 - \frac{\theta_{E-sis}}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}} f^2 \theta_2. \quad (6.4.12)$$

Para determinar la convergencia y el cizallamiento, se calculan las derivadas segundas asociadas al potencial, de la siguiente manera

$$\Psi_{11} = \theta_{E-sis} \left[\frac{1}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} - \frac{\theta_1^2}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{3/2}} \right], \quad (6.4.13)$$

$$\Psi_{22} = \theta_{E-sis} f^2 \left[\frac{1}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} - \frac{f^2 \theta_2^2}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{3/2}} \right]. \quad (6.4.14)$$

$$\Psi_{12} = -\frac{\theta_{E-sis}}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2 \theta_1 \theta_2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right] \quad (6.4.15)$$

Por lo tanto, la convergencia del sistema viene dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} [\Psi_{11} + \Psi_{22}], \quad (6.4.16)$$

$$= \frac{\theta_{E-sis}}{2 (\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[1 + f^2 - \frac{\theta_1^2 + f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right]. \quad (6.4.17)$$

De igual forma, la componente γ_1 es

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} [\Psi_{11} - \Psi_{22}], \quad (6.4.18)$$

$$= \frac{\theta_{E-sis}}{2 (\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[1 - f^2 - \frac{\theta_1^2 - f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right]. \quad (6.4.19)$$

Mientras que, para γ_2 , se obtiene lo siguiente

$$\gamma_2 = \Psi_{12} , \quad (6.4.20)$$

$$= -\frac{\theta_{\text{E-sis}}}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2} \right] . \quad (6.4.21)$$

Específicamente, la determinación de γ ya no es trivial, por lo que, a partir de este punto, y con el objetivo de determinar las líneas críticas del sistema —tangencial y radial—, se buscan los puntos en los cuales se satisfacen las siguientes igualdades

$$\lambda_{\text{tan}} = 1 - \kappa - \gamma = 0 , \quad (6.4.22)$$

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 - \kappa + \gamma = 0 . \quad (6.4.23)$$

Donde se cumple que $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$.

6.4.2. Elipsoide isoterma pseudo-no singular (pNIE)

Este segundo modelo introduce, además del factor de razón entre los ejes f , el radio del núcleo. Al seguir el mismo rotero de ideas, se tiene que, en este marco, el potencial gravitacional está dado por

$$\Psi(\theta) = \theta_{\text{E-sis}} \left[\sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right] , \quad (6.4.24)$$

De tal manera que la función de tiempo de atraso está representada por la siguiente igualdad

$$\mathcal{T} = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \theta_{\text{E-sis}} \sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right] . \quad (6.4.25)$$

Las componentes del ángulo de deflexión son muy similares a las del modelo anterior, con la diferencia de que en este se introduce el radio del núcleo en el denominador, es decir

$$\alpha_1(\theta) = \theta_{\text{E-sis}} \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2}} , \quad (6.4.26)$$

$$\alpha_2(\theta) = \theta_{\text{E-sis}} \frac{f^2\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2}} . \quad (6.4.27)$$

De la misma manera, se obtienen las componentes de la ecuación de la lente del pNIE. A partir de estas, se deducen directamente las segundas derivadas del potencial gravitacional, las cuales corresponden a

$$\Psi_{11} = \theta_{\text{E-sis}} \left[\frac{1}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} - \frac{\theta_1^2}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{3/2}} \right] , \quad (6.4.28)$$

$$\Psi_{22} = \theta_{\text{E-sis}} f^2 \left[\frac{1}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} - \frac{f^2\theta_2^2}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{3/2}} \right] . \quad (6.4.29)$$

$$\Psi_{12} = -\frac{\theta_{\text{E-sis}}}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right] \quad (6.4.30)$$

Concluyendo que tanto la convergencia como las componentes del cizallamiento están dadas por

$$\kappa = \frac{\theta_{\text{E-sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[1 + f^2 - \frac{\theta_1^2 + f^4\theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right]. \quad (6.4.31)$$

$$\gamma_1 = \frac{\theta_{\text{E-sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[1 - f^2 - \frac{\theta_1^2 - f^4\theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right], \quad (6.4.32)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\theta_{\text{E-sis}}}{(\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2} \right]. \quad (6.4.33)$$

Las líneas críticas son determinadas mediante métodos numéricos.

Capítulo 7

Resultados

El estudio del fenómeno de lente gravitacional considera la comprensión de un conjunto de fundamentos físicos, como ha sido descrito a lo largo de este trabajo. De esta manera, los capítulos anteriores no solo contextualizan al lector con el fenómeno de lente gravitacional, sino que también constituyen una parte importante de los resultados, al presentar cálculos intermedios que suelen ser omitidos en la literatura especializada. Concretamente, en el Capítulo 5 se destaca el desarrollo de la teoría de lentes gravitacionales utilizando tanto la notación angular ($\vec{\theta}$) como la notación adimensional ($\vec{x}$), asimismo se resalta la descripción y distinción entre la magnificación y la amplificación. En el Capítulo 6, se resalta el desarrollo analítico de cada uno de los modelos usados en este trabajo.

En este capítulo se modelaron diferentes sistemas de lentes gravitacionales presentes en la naturaleza y se clasificaron sus imágenes en función de la topología de la superficie tiempo de atraso; tal que, los sistemas de lente gravitacional a estudiar son: PG 1115 + 080, RX J1131 – 1231 y WFI J2026 – 4536. En donde, es importante mencionar que todos los resultados presentados a continuación se obtienen a partir de los siguientes parámetros¹:

Tabla 7.0.1: Parámetros usados en este trabajo.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de Hubble	H_0	2.182×10^{-18}	s^{-1}
Velocidad de la luz	c	9.715×10^{-15}	Mpc s^{-1}
Constante gravitacional	G	2.272×10^{-78}	$\text{Mpc}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Masa solar	$M_{\odot}$	1.981×10^{30}	kg
Densidad de materia	Ω_m	0.316	–
Densidad de radiación	Ω_r	0	–
Densidad de energía oscura	Ω_{Λ}	0.684	–
Densidad de curvatura	Ω_k	0	–

¹En particular, las magnitudes correspondientes a la densidad de materia, radiación, energía oscura y curvatura han sido tomadas de [66].

7.1. Sistema PG 1115+080

Este sistema de lente gravitacional fue detectado por primera vez en 1987 gracias a Christian, Crabtree y Waddell, quienes por fotometría concluyeron que todas las imágenes alrededor de la galaxia lente corresponden al quasar PG 1115 + 080 [67]. Se ha seleccionado este sistema tanto por la abundante información disponible como por su configuración particular, en la cual se observa la lente (G) y cuatro imágenes (A1,A2,B,C), siendo dos de ellas muy próximas entre sí, como se visualiza en la Figura 30.

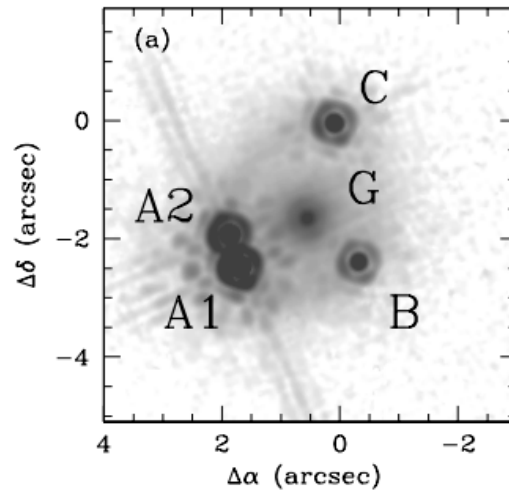


Figura 30: Imagen del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 obtenida con NICMOS a bordo del telescopio espacial Hubble. El origen del sistema de coordenadas se encuentra situado en la imagen C. Fotografía tomada de la Figura 1 de [2].

Con el fin de estudiar los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso del sistema, se adoptó el corrimiento al rojo de la fuente $z_s = 1.735$ y de la lente $z_l = 0.311$, según lo descrito en [68]. Asimismo, se consideraron la posición de la fuente y las de las imágenes descritas en la referencia [1], de modo que las coordenadas de las imágenes y de la fuente en el plano de la lente, con respecto al cuerpo deflector ubicado en el origen, son las siguientes:

Tabla 7.1.1: Coordenadas en arcosegundos de la fuente y de las imágenes respecto a la lente. Valores obtenidos de [1].

Objeto	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
Fuente	-0.011	-0.018
Imagen A1	-0.930	-0.780
Imagen A2	-1.120	-0.310
Imagen B	0.730	-0.650
Imagen C	0.340	1.300

A partir de la información anterior, se obtiene el primer resultado de interés: el valor de las distancias de diámetro angular asociadas al sistema. Estas son calculadas mediante la integración numérica de la ecuación B.0.16. Dichas distancias son fundamentales para la determinación de la superficie de tiempo de atraso en todos los modelos considerados. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 7.1.2.

Tabla 7.1.2: Distancias de diámetro angular para el sistema PG 1115 + 080.

Distancia	Símbolo	Valor (Mpc)
Distancia de la lente	D_{OL}	975.625
Distancia de la fuente	D_{OS}	1791.243
Distancia entre lente y fuente	D_{LS}	1323.585

7.1.1. Estudio de modelos esféricos en PG 1115+080

Dado el número de imágenes observadas en el sistema, este no puede ser descrito adecuadamente mediante los modelos de masa puntual, SIS y NIS; no obstante, se presenta a continuación el estudio realizado de dichos modelos a modo de ejercicio.

En el modelo de **masa puntual** se establece la formación de únicamente dos imágenes y la existencia exclusiva de la línea crítica tangencial ($\lambda_{\text{tan}} = 0$). En la Figura 31 se ilustran los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para este perfil (ecuación 6.1.13), representando la formación de las dos imágenes esperadas θ_+ y θ_- , de las cuales se dedujo su posición al solucionar la ecuación 6.1.17.

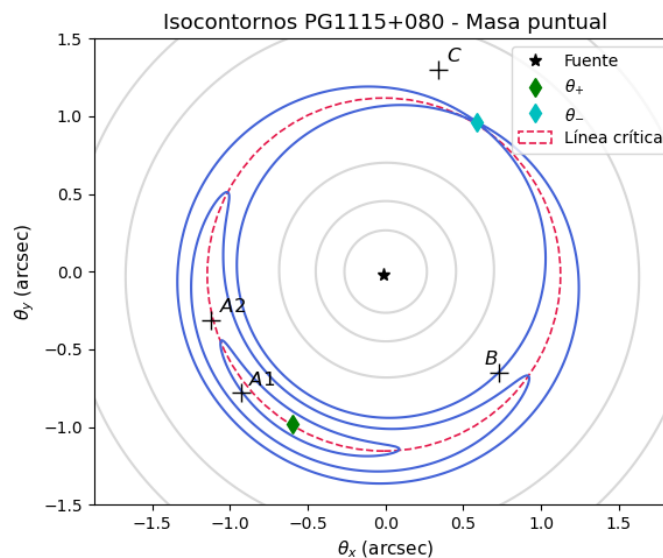


Figura 31: Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para una masa puntual.

Se aprecia que la imagen θ_+ , dada su proximidad a la línea crítica, sufre una alta magnificación, siendo esto inferido gracias al isocontorno más próximo, el cual es notablemente estrecho y elongado. De lo anterior, se concluye que la imagen real ubicada en esta región presentará una alta magnificación, lo cual es coherente con el sistema dada la proximidad existente entre las imágenes A1 y A2.

Se resalta en esta configuración la importancia de la masa de la lente, ya que afecta directamente al ángulo de deflexión y al potencial gravitacional reescalado. Así, los iscontornos fueron obtenidos al establecer esta magnitud igual a

$$M = 2.091 \times 10^{11} M_{\odot} , \quad (7.1.1)$$

y por ende, el ángulo de Einstein es:

$$\theta_E = 1.135'' . \quad (7.1.2)$$

Las anteriores estimaciones son coherentes con lo reportado en las referencias [1, 2, 69]. En particular, en estos trabajos se presentan los resultados de multiples modelos de lente, como lo es el perfil de De Vaucouleurs², el de Hubble³, o bien, el de masa puntual con cizallamiento externo. Al comparar los valor obtenidos con los deducidos en dichos modelos, se encuentra que la diferencia relativa porcentual (DRP) tanto para la masa como para el angulo Eintein es menor o en algunos casos igual al 10 %, como se muestra en la Tabla 7.1.3. La notación abreviada, por ejemplo "(Hubb/Pt)", describe un modelo compuesto en el que el perfil de masa de la galaxia lente se representa con una ley de Hubble elipsoidal, y el grupo o cúmulo asociado se modela como una masa puntual. Si bien en este trabajo no se considera la influencia del grupo al que pertenece la galaxia lente, se respeta la notación empleada por los autores con los cuales se realiza la comparación de los parámetros.

Tabla 7.1.3: Comparación de las masas y ángulos de Einstein para el sistema PG 1115 + 080. La DRP corresponde a la diferencia relativa porcentual respecto al valor usado en este trabajo.

Modelo	Masa ($10^{11} M_{\odot}$)	DRP	θ_E (arcsec)	DRP
Hub/SIS	2.030	3 %	1.030	10 %
De Vauc/SIS	1.910	9 %	1.030	10 %
Hub/Pt	2.030	3 %	1.150	1.3 %
PMXS	—	—	1.137	0.7 %

En resumen, el modelo de masa puntual reproduce estimaciones aceptables de las características principales del sistema, como la masa y el ángulo de Einstein, ya que los resultados obtenidos son consistentes con los reportados mediante modelos más complejos. Cabe resaltar que se emplea la DRP debido a que los modelos no son estrictamente comparables entre sí; se utiliza, más

²Este modelo describe la distribución del brillo superficial de una galaxia en función del radio.

³El perfil de Hubble modificado se entiende como una aproximación matemáticamente más manejable del perfil de De Vaucouleurs.

bien, como método de contraste para evaluar si las estimaciones obtenidas son fiables frente a las presentadas en modelos más complejos.

Con respecto a los modelos SIS y NIS, las superficies de tiempo de atraso son prácticamente idénticas a las de una masa puntual, como se aprecia en la Figura 32.

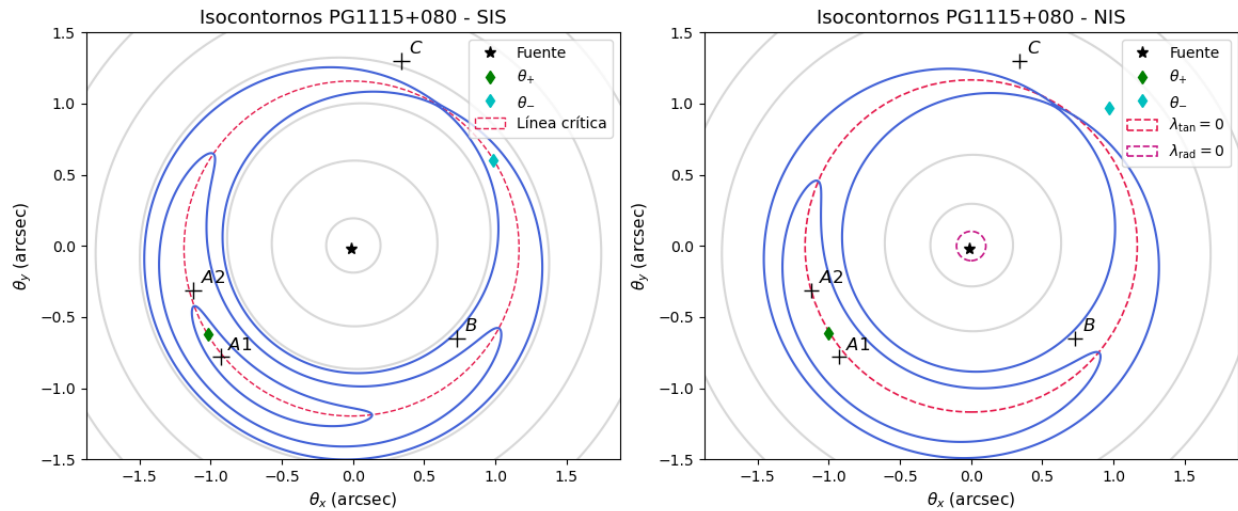


Figura 32: Grafica de los isocontornos de la función tiempo de atraso para los modelos SIS (ecuación 6.2.67) y NIS (ecuación 6.2.101) del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080. El núcleo considerado en el modelado fue escogido de manera arbitraria y corresponde a: $\theta_c = 0.01''$.

Se menciona que, para el desarrollo de estas simulaciones, se consideró una velocidad de dispersión igual a:

$$\sigma_v = 235 \text{ km/s} . \quad (7.1.3)$$

Referencias como [70, 71] brindan una estimación experimental de la velocidad de dispersión del sistema PG 1115 + 080. En estos estudios se reporta un rango de error, dentro del cual se encuentra una velocidad de dispersión de 256 km/s. Al tomar este valor como referencia y comparar con la velocidad empleada en las simulaciones de este trabajo, se obtiene una DRP del 8 %. Además, la velocidad de dispersión empleada para las simulaciones puede ser comparada con [2], donde se corrobora que el uso de esta velocidad en otros modelos presenta una diferencia relativa porcentual es menor al 4 %. Esta información se presenta en la Tabla 7.1.4.

Tabla 7.1.4: Diferencia relativa porcentual de la velocidad de dispersión para el sistema PG 1115 + 080 con respecto al valor usado en este trabajo.

Modelo	σ_v (km/s)	DRP
SIE/SIS	230	2 %
SIE/Pt	243	3 %

Puntualmente, para el modelo **SIS**, se encontró que la línea crítica tangencial es análoga a la del perfil de masa puntual y que esta, como se ha mencionado, corresponde al ángulo de Einstein del sistema (ecuación 6.2.80), el cual en este caso es igual a:

$$\theta_{E-sis} = 1.754'' . \quad (7.1.4)$$

Análogamente, se obtuvo la posición de las imágenes teóricas al resolver la expresión 6.2.78. Finalmente, se encontró que la relación entre los tiempos de atraso (ecuación 6.2.67) de las imágenes A1C y A1B se encuentra dentro del rango de error de los valores reportados en la Tabla 1 de [72], con un valor de:

$$\frac{\Delta\mathcal{T}_{A1C}}{\Delta\mathcal{T}_{A1B}} \approx 0.6 . \quad (7.1.5)$$

Por otro lado, el ángulo de Einstein correspondiente al modelo **NIS** es:

$$\theta_{E-nis} = 1.165'' . \quad (7.1.6)$$

Y análogamente, en este modelo, se obtuvo una primera aproximación a la topología de la superficie de tiempo de atraso al resolver la ecuación de lente (ecuación 6.2.114) mediante el método numérico implementado en la función `numpy.roots`. De este modo, se determinaron las posiciones de las imágenes en unidades de arcosegundos, como se muestra a continuación:

$$\vec{\theta}_+ = (-1.005, -0.614) \text{ arcs} , \quad (7.1.7)$$

$$\vec{\theta}_- = (0.969, 0.592) \text{ arcs} , \quad (7.1.8)$$

$$\vec{\theta}_{cen} = (1.574, 0.962) \times 10^{-4} \text{ arcs} . \quad (7.1.9)$$

Aunque el sistema permite la formación de una tercera imagen, esta corresponde a una imagen central, como se discute en la sección 5.6.3. Con esto en mente, la geometría de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso es la de un caracol de Pascal (Figura 19), con la imagen central θ_{cen} asociada a un máximo (H), la imagen θ_+ con un mínimo local (L) y finalmente θ_- con un punto de silla (S). En este caso particular, la imagen central no resulta observable en la práctica debido a su magnificación crítica ($\mu \rightarrow 0$), véase Figura 28.

Esta interpretación se refuerza al analizar la ubicación de las imágenes respecto a las líneas críticas del sistema: la imagen central se encuentra contenida dentro de la línea crítica tangencial (ecuación 6.2.123) y radial⁴ (Ecuación 6.2.126), lo que implica que los rayos de luz que la formarían han atravesado las dos cáusticas del plano fuente. Como resultado, esta imagen puede clasificarse como un máximo (H) o imagen de tipo III en la superficie de tiempo de atraso. Su detección es altamente improbable debido a la fuerte distorsión gravitacional y baja magnificación asociada.

Para concluir con los resultados del **NIS**, en primera instancia se presentan los tiempos de atraso entre las imágenes del sistema en la Tabla 7.1.5. Cabe destacar que los valores determinados se encuentran dentro del rango reportado en [73].

⁴La Ecuación 6.2.126 está escrita en notación adimensional, pero se obtiene su representación angular al considerar la relación $x = \theta/\theta_{sis}$

Tabla 7.1.5: Tiempos de atraso entre imágenes para el sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 modelado con un perfil NIS.

Tiempo de atraso	Valor (días)
$\Delta\mathcal{T}_{A1B}$	11.562
$\Delta\mathcal{T}_{A2B}$	8.885
$\Delta\mathcal{T}_{A1C}$	10.545
$\Delta\mathcal{T}_{A2C}$	13.212
$\Delta\mathcal{T}_{BC}$	22.097

7.1.2. Modelos SIE y pSIE

De la teoría se sabe que los modelos elípticos representan de manera más fiel la formación de imágenes en sistemas de lente gravitacional presentes en la naturaleza. Por lo tanto, los resultados expuestos a continuación se enfocan principalmente en la categorización de las imágenes de PG 1115 + 080.

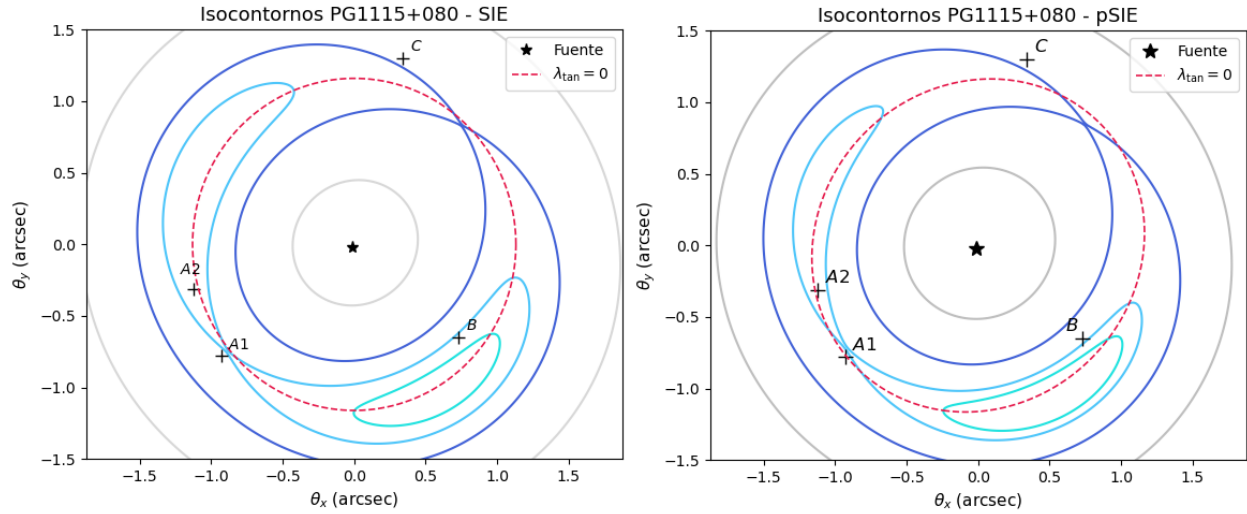


Figura 33: Ilustración modelos SIE (ecuación 6.2.67) y pSIE (ecuación 6.2.101) de los isocontornos de la función tiempo de atraso de PG 1115 + 080.

Las simulaciones fueron realizadas al considerar:

$$f = 0.975 , \quad (7.1.10)$$

$$\varphi = 45^\circ , \quad (7.1.11)$$

$$\sigma_v = 235 \text{ km/s} . \quad (7.1.12)$$

Donde el ángulo φ representa la rotación de la lente con respecto al eje horizontal del sistema.

En la Figura 33 se muestran los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso para los modelos **SIE** y **pSIE**, donde, se aprecia que, a pesar de las diferencia en la formulación matemática de los potenciales gravitacionales, SIE (ecuación 6.3.15) y pSIE (ecuación 6.4.7), la topología de la superficie de tiempo de atraso, al igual que la línea crítica tangencial, es similar en ambos modelos. En el SIE se representó la ecuación 6.3.44 en notación angular, mientras que en el modelo pSIE se determinó la línea crítica tangencial (ecuación 6.4.22.) al evaluar en una malla (el plano de la lente) la convergencia y la cizalladura determinadas a partir de las segundas derivadas del potencial gravitacional (ecuación 6.4.7).

Ahora bien, a partir de estos modelos se dedujo la topología completa que caracteriza al sistema PG 1115 + 080, lo que permitió, a su vez, clasificar las imágenes. Este análisis se llevó a cabo mediante la observación de la formación de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso con respecto al tiempo, como se muestra en la Figura 34.

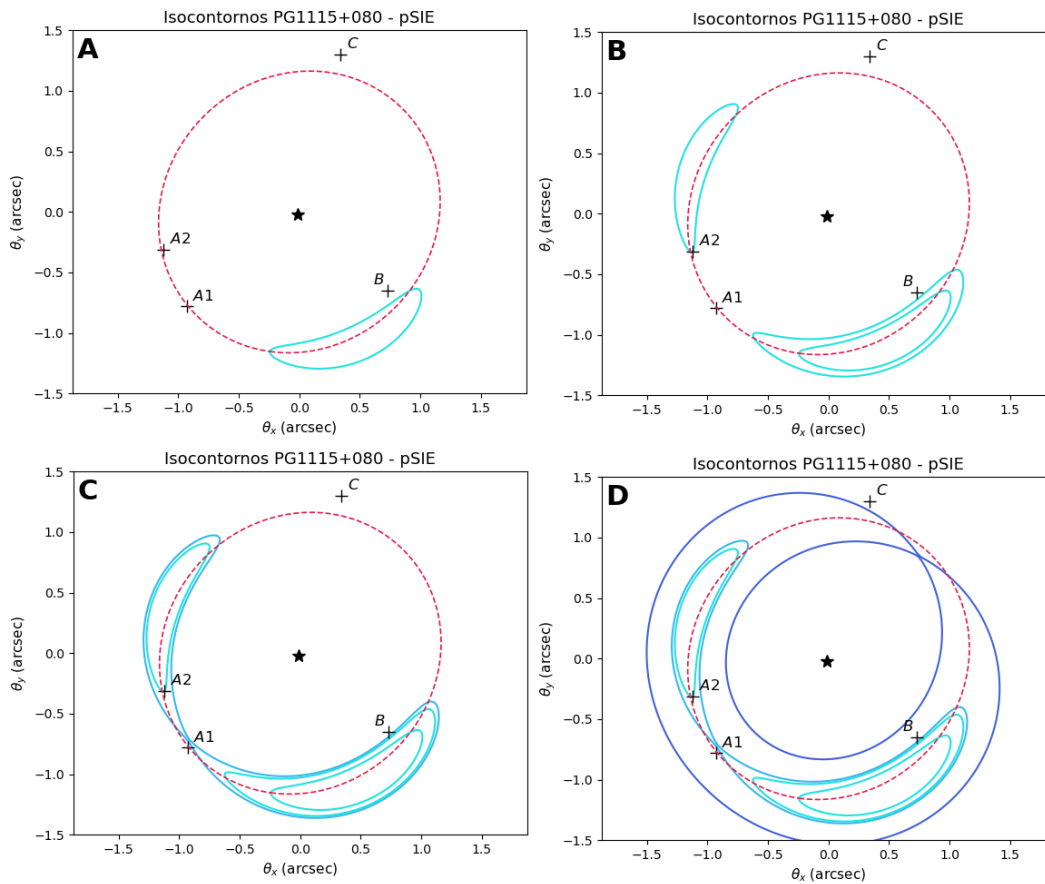


Figura 34: Formación de las imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 en función de la evolución temporal de las líneas de contorno de la superficie de tiempo de atraso del modelo pSIE. Los isocontornos grises se forman para tiempos mayores, por lo cual su adición es únicamente estética.

En la subfigura **A** se aprecia la formación de la primera imagen relacionada con la posición de la imagen **B** del sistema, la cual corresponde a un mínimo (L), según el teorema 1 de las lentes

gravitacionales. La aparición de la segunda imagen, mostrada en la subfigura **B**, asociada con A2, se clasificará en la siguiente subfigura. En el apartado **C**, se visualiza la creación de un punto de silla (*S*), vinculado a A1, el cual permite describir la geometría interna de la superficie de tiempo de atraso mediante una lemniscata. En consecuencia, se concluye que A2 corresponde también a un mínimo (*L*). Por último, en **D** se forma otro punto de silla (*S*), atribuido a C, lo cual establece un caracol de Pascal en la geometría externa de los isocontornos. Lo anterior se desarrolló considerando la existencia de una imagen central. Así, entonces, la clasificación de cada una de las imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080 se expone en la Tabla 7.1.6. Finalmente se resalta que, la topología del sistema concuerda con la establecida por la teoría en la Figura 21a.

Tabla 7.1.6: Clasificación de imágenes del sistema PG 1115 + 080 en el SIE.

Imagen	Tipo	Paridad
A1	P. de silla - II	-
A2	Mínimo - I	+
B	Mínimo - I	+
C	P. de silla - II	-

Un punto importante a destacar al contrastar con los resultados obtenidos en los modelos circulares es que, debido a la cercanía de la imagen teórica θ_+ a la línea crítica tangencial, esta se ve altamente magnificada, lo que conduce a la formación de las imágenes A₁, A₂ y B del sistema. Asimismo, se resalta que las diferencias en los tiempos de atraso obtenidas en el modelo anterior (Tabla 7.1.5), correspondientes a las imágenes A1 y A2, se justifican por el proceso de formación de imágenes en estos modelos. En particular, el intervalo temporal entre la aparición de A2 y A1 es reducido, aunque no nulo, lo cual concuerda con la cercanía espacial entre dichas imágenes.

Finalmente, se menciona que el ángulo de Einstein obtenido en ambos modelos es idéntico, teniendo un valor de:

$$\theta_{E-sie} = 1.175'' . \quad (7.1.13)$$

Se resalta que selección de los parámetros para el modelado de ambos casos se encuentra en línea con los resultados de las referencias [2, 74]. Puntualmente, con lo descrito por el modelo SIE/Pt, en donde se tiene que la diferencia relativa porcentual en algunos parámetros es menor al 5 %. Esta información se dispone en la Tabla 7.1.7.

Tabla 7.1.7: Diferencia relativa porcentual entre los parametros usados en este trabajo y el modelo SIE/Pt de la referencia [2].

Parámetro	Valor	Unidad	DRP
θ_E	1.15	arcs	2 %
σ_v	243	km/s	3 %
f	0.95	—	3 %

7.1.3. Modelos NIE y pNIE

La superficie de tiempo de atraso en el modelo **NIE** predice con precisión la formación de la imagen A2, pero, en contraste, presenta un mayor desfase en la estimación de la posición esperada para B. Ahora, con respecto a los isocontornos asociados al modelo **pNIE**, este presenta resultados similares a los modelos SIE y pSIE, incluyendo en el modelado la presencia de la línea crítica radial, la cual ya fue analizada en el modelo NIE. Los isocontornos obtenidos se representan en la Figura 35.

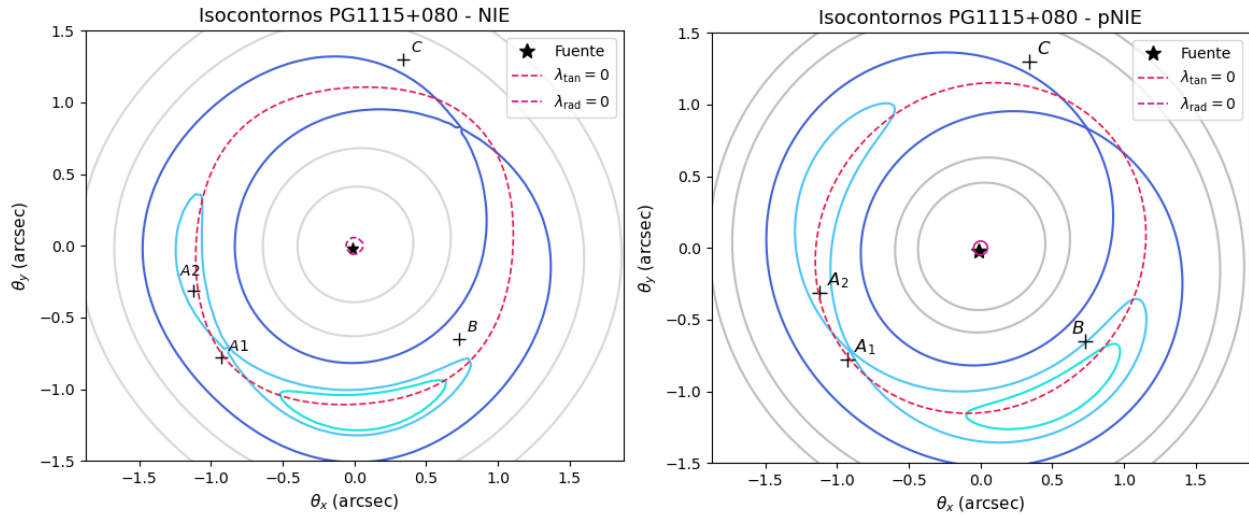


Figura 35: Ilustración modelos NIE (ecuación 6.3.48) y pNIE (ecuación 6.4.25) de los isocontornos de la función tiempo de atraso del sistema PG 1115 + 080.

La obtención de los isocontornos del modelo **NIE** se realizó mediante integración por cuadratura del potencial gravitacional en la ecuación 6.3.47, utilizando los valores calculados en una malla. Por otro lado, las líneas críticas de ambos marcos fueron calculadas a partir de las segundas derivadas del potencial gravitacional, tal como se describió en el modelo pSIE.

Como resultado del análisis sobre el sistema PG 1115 + 080, no se evidenció una diferencia en la clasificación de las imágenes a partir de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso en los modelos elipsoidales o pseudoelípticos. Por esta razón, los siguientes sistemas de lentes gravitacionales se analizarán desde el enfoque del modelo SIE.

7.2. Sistema RX J1131-1231

Descubierto en 2003 por Sluse et al. [4], este sistema de lente gravitacional se asocia con una galaxia elíptica que actúa como lente. Según la base de datos de cuántares bajo el fenómeno de lente gravitacional, GLQ Database [75] por sus siglas en inglés, la fuente presenta un corrimiento al rojo

de $z_s = 0.658$, mientras que la lente tiene $z_l = 0.295$. Este sistema, al igual que PG 1115 + 080, permite observar cuatro imágenes (A, B, C y D), de las cuales tres se encuentran próximas entre sí. En la Figura 36 se ilustra el sistema en cuestión.

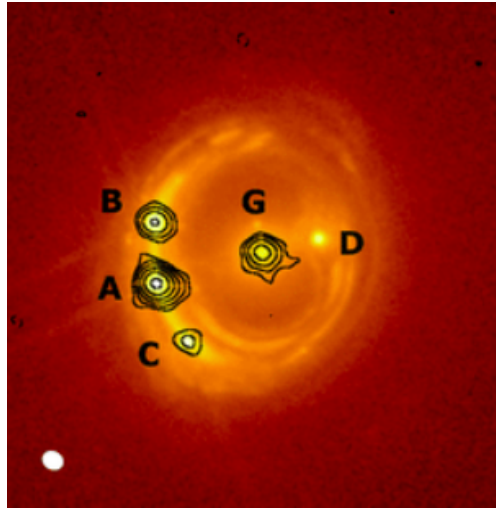


Figura 36: Sistema de lente gravitacional RX J1131 – 1231. Imagen obtenida de la Figura 1 en [3].

Con respecto a la posición de las imágenes y de la fuente, estos datos fueron tomados de las Tablas 1 y 3 de la referencia [4]. Las coordenadas de las imágenes están dadas con respecto a la imagen A, por lo que fue necesario ajustar su posición en relación con la lente (G), obteniendo así las coordenadas que se presentan en la Tabla 7.2.1.

Tabla 7.2.1: Coordenadas de la fuente e imágenes del sistema RX J1131 – 1231 con respecto a la lente G.

Objeto	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
Fuente	-0.411	-0.108
Imagen A	-1.898	-0.559
Imagen B	-1.922	0.642
Imagen C	-1.335	-1.621
Imagen D	1.224	-0.350

A partir de la información anterior, se determinaron las distancias de diámetro angular que caracterizan al sistema, las cuales se presentan en la Tabla 7.2.2.

Tabla 7.2.2: Distancias de diámetro angular para el sistema RX J1131 – 1231.

Distancia	Símbolo	Valor [Mpc]
Distancia de la lente	D_{OL}	940.901
Distancia de la fuente	D_{OS}	1483.461
Distancia entre lente y fuente	D_{LS}	748.559

De igual forma, para simular el sistema se consideró que:

$$\sigma_v = 354.8 , \quad (7.2.1)$$

$$f = 0.8 , \quad (7.2.2)$$

$$\varphi = 75.2^\circ . \quad (7.2.3)$$

En la Figura 37 se visualizan los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso. Se encontró que la topología que describe el sistema está asociada, para la línea de contorno interior, a una lemniscata, cuyos lóbulos contienen dos imágenes correspondientes a un punto mínimo de la superficie de tiempo de atraso. Por otro lado, para el contorno exterior, la curva de nivel presenta la geometría de un caracol de Pascal, como se ilustra en la Figura 21a.

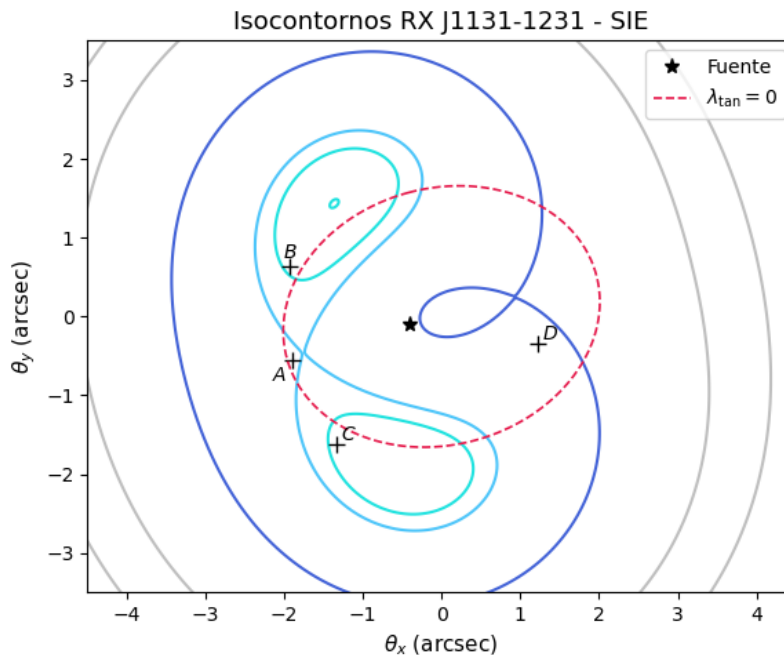


Figura 37: Isocontornos de la función tiempo de atraso de RX J1131 – 1231 (ecuación 6.2.67). Los isocontornos obtenidos son coherentes con el modelado de lente gravitacional descrito en la Figura 3 de [4].

Curiosamente, a pesar de la distinta configuración de las imágenes, la topología de la superficie de tiempo de atraso es la misma que la del sistema PG 1115 + 080, de manera que para RX J1131 – 1231 se asume la existencia de una imagen central. El primer isocontorno en formarse se encuentra próximo a la imagen B del sistema, correspondiendo al mínimo general de la superficie de tiempo de atraso. A partir de este punto, el orden de aparición de las imágenes es, respectivamente, B-C-A-D. Este orden cronológico coincide con el descrito en la referencia [4]. En consecuencia, la clasificación de las imágenes es la siguiente:

Tabla 7.2.3: Clasificación de imágenes - SIE - RX J1131 – 1231.

Imagen	Tipo	Paridad
A	P. de silla - II	-
B	Mínimo - I	+
C	Mínimo - I	+
D	P. de silla - II	-

Por otro lado, se determinó que el ángulo de Einstein que caracteriza al sistema es:

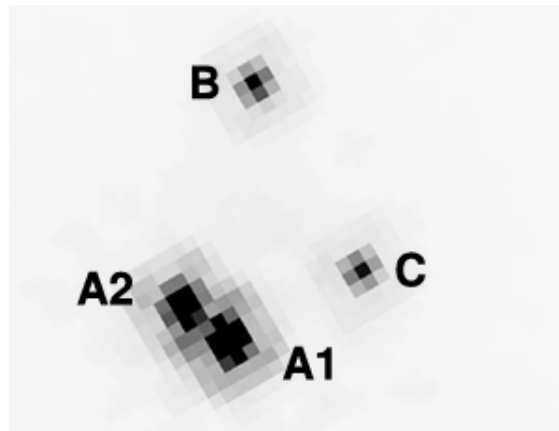
$$\theta_{E-sis} = 0.811'' , \quad (7.2.4)$$

el cual concuerda con los valores reportados en los modelos de las referencias [4, 76].

Del mismo modo, se encontró que el tiempo de atraso entre las imágenes ha sido reportado en diferentes referencias. Por ejemplo, $\Delta\mathcal{T}_{AC} = 12.129$ días, es indicado en [76]. Mientras que $\Delta\mathcal{T}_{BC} = 0.528$ días, como se indica tanto en el modelo de lente gravitacional de [76] como experimentalmente en [77], donde fue determinado mediante monitoreo fotométrico empleando diferentes métodos numéricos, tal como se muestra en la Figura 6 de dicho trabajo.

7.3. Sistema WFI J2026-4536

Este sistema de lente gravitacional fue descubierto por Morgan y colaboradores en 2004, como se describe en [5]. Se caracteriza por presentar un corrimiento al rojo de la fuente de $z_s = 1.662$, mientras que el de la lente es $z_l = 0.661$, según [78]. Al igual que en los dos sistemas anteriores, WFI J2026 – 4536 está conformado por cuatro imágenes, dispuestas de manera similar al sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080.

**Figura 38:** Lente gravitacional WFI J2026 – 4536. Imagen obtenida de la Figura 3 en [5].

En la Tabla 5 de [5] se presentan las posiciones de las imágenes⁵ y de la lente con respecto a la imagen B. Al recalculer dichas posiciones en coordenadas cartesianas centradas en la lente G, se obtuvo:

Tabla 7.3.1: Coordenadas de la fuente e imágenes del sistema WFI J2026 – 4536.

Objeto	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
Fuente	- 0.020	- 0.064
Imagen A1	- 0.090	- 0.612
Imagen A2	- 0.331	- 0.386
Imagen B	0.075	0.817
Imagen C	0.652	- 0.236

Las distancias de diámetro angular del sistema WFI J2026–4536 fueron determinadas mediante el mismo procedimiento aplicado a los sistemas previos. Los valores calculados se presentan en la Tabla 7.3.2.

Tabla 7.3.2: Distancias de diámetro angular para el sistema WFI J2026 – 4536.

Distancia	Símbolo	Valor [Mpc]
Distancia de la lente	D_{OL}	1486.294
Distancia de la fuente	D_{OS}	1793.855
Distancia entre lente y fuente	D_{LS}	866.456

Asimismo, los parámetros sobre los cuales se modelo (SIS) el sistema son:

$$\sigma_v = 220 , \quad (7.3.1)$$

$$f = 0.9 , \quad (7.3.2)$$

$$\varphi = 90^\circ . \quad (7.3.3)$$

La Figura 39 muestra los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso del sistema. A partir de ellos, se determinó que la curva de nivel interior presenta la topología de una lemniscata, mientras que la curva exterior corresponde a un caracol de Pascal, como se observa en la Figura 21a.

Topológicamente, el sistema WFI J2026 – 4536 coincide con lo deducido en modelos previos; por lo tanto, en esta configuración se considera también la existencia de una imagen central. El orden de aparición de las imágenes es, respectivamente, B–A1–A2–C. De esta manera, se establece que tanto B como A2 corresponden a puntos mínimos de la superficie de tiempo de atraso, mientras que A1 y C se caracterizan por ser puntos de silla. Esta clasificación es análoga a la establecida

⁵La posición de la fuente no se encuentra especificada en la referencia [5], por lo cual fue determinada a partir del análisis del comportamiento de los isocontornos.

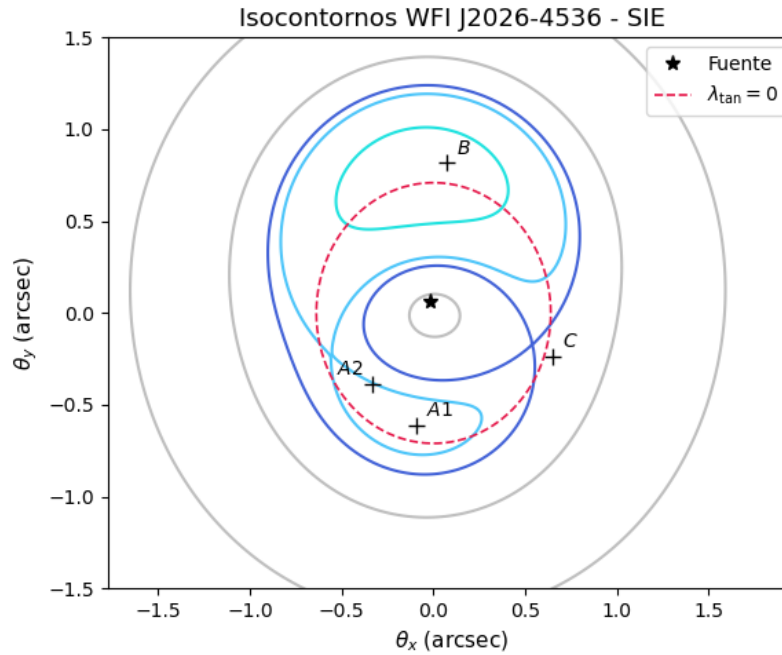


Figura 39: Isocontornos superficie tiempo de atraso del sistema WFI J2026 – 4536.

en [5]. Adicionalmente, se destaca que los isocontornos obtenidos en el modelo de este trabajo son similares a los presentados en la Figura 7.b de la misma referencia.

En pocas palabras, las imágenes del sistema se clasificaron de la siguiente manera:

Tabla 7.3.3: Clasificación de imágenes del sistema WFI J2026 – 4536 en el SIE.

Imagen	Tipo	Paridad
A1	Mínimo - I	-
A2	P. de silla - II	+
B	Mínimo - I	+
C	P. de silla - II	-

Por otro lado, se presenta el ángulo de Einstein del sistema, el cual es igual a:

$$\theta_{E-sis} = 0.673'' . \quad (7.3.4)$$

El valor determinado para el ángulo de Einstein a partir del modelado propio es muy similar al descrito en el modelo de esfera isoterma singular con cizallamiento externo (ISx, respetando la notación del autor) en [5], así como en el modelo de elipsoide isoterma singular con cizalladura externa, presentado en la Tabla 5 de [79]. En la Tabla 7.3.4 se muestra la diferencia relativa porcentual con respecto a cada uno de los valores reportados.

Tabla 7.3.4: Diferencia relativa porcentual del ángulo de Einstein para el sistema WFI J2026 – 4536 con respecto al valor usado en este trabajo.

Modelo	θ_E (arcs)	DRP
SIx	0.654	3 %
SIE+ γ_{ext}	0.652	3 %

De forma análoga, se determinó que el tiempo de atraso entre las imágenes A y C es $\Delta\tau_{AC} = 12.476$ días⁶. Este valor se encuentra dentro del rango reportado por según [80], el cual es $\Delta\tau_{AB} = 18.4^{+6.7}_{-9.6}$.

Finalmente, de manera general, se establece que la geometría de las galaxias que actúan como lente en los tres sistemas estudiados es elíptica. Debido a las características particulares de cada una de ellas, la forma de los isocontornos varía, lo cual afecta la formación de las imágenes. Esta afirmación se refuerza al comparar la formación de imágenes entre PG 1115+080 y WFI J2026 – 4536.

7.4. Resultados de referencia: Lenstronomy

Teniendo en mente un desarrollo fiable en la parte computacional, se ha estudiado el software *Lenstronomy* [54, 55]. Este se presenta como referencia comparativa en el modelado de los sistemas, dado que permite visualizar las curvas de nivel del potencial de Fermat como las líneas críticas (y causticas). Uno de los principales motivos de la ampliación del software es la amplia gama de potenciales permitidos, y el manejo práctico del mismo.

Se menciona que la formación de imágenes en *Lenstronomy* se realiza en función del tiempo de atraso teórico, y que las imágenes se caracterizan alfabéticamente; es decir, la primera imagen siempre se denomina “A”, la siguiente “B” y así sucesivamente.

Con respecto a los isocontornos del potencial de Fermat, el software los representa en notación adimensional y no especifica la escala por defecto. Por otro lado, para las curvas críticas, el programa las representa visualmente como líneas continuas de color rojo, mientras que las causticas son representas por un color verde.

Particularmente, *Lenstronomy* usa para la descripción de modelos elípticos el siguiente potencial:

$$\hat{\Psi}(x_1, x_2) = \sqrt{(1 - \epsilon)x_1^2 + (1 + \epsilon)x_2^2 + x_c^2}, \quad (7.4.1)$$

el cual bajo las características específicas puede modelar ya sea cualquiera de los modelos elípticos o esféricos. Adicionalmente, la elipticidad del sistema por defecto puede ser representada por un

⁶En este caso específico, el tiempo de atraso considerado corresponde al promedio entre los pares de imágenes A1–C y A2–C.

factor de relación q entre los ejes, equivalente al parámetro f de este trabajo, donde la principal diferencia radica en que el eje mayor de la elipse en *Lenstronomy* está orientado sobre el eje horizontal.

Para el sistema de lente gravitacional PG 1115 + 080, *Lenstronomy* establece que la formación de las imágenes del sistema (de acuerdo con la notación original de las imágenes) sigue el orden: B–A2–A1–C. Esta cronología coincide con la determinada mediante la simulación desarrollada en este trabajo, lo que permite corroborar los resultados presentados en la Tabla 7.1.6. Los isocontornos, las líneas críticas y las caústicas se ilustran en la Figura 40. Para este modelo se considero: $q = 0.95$ y $\varphi = 45^\circ$.

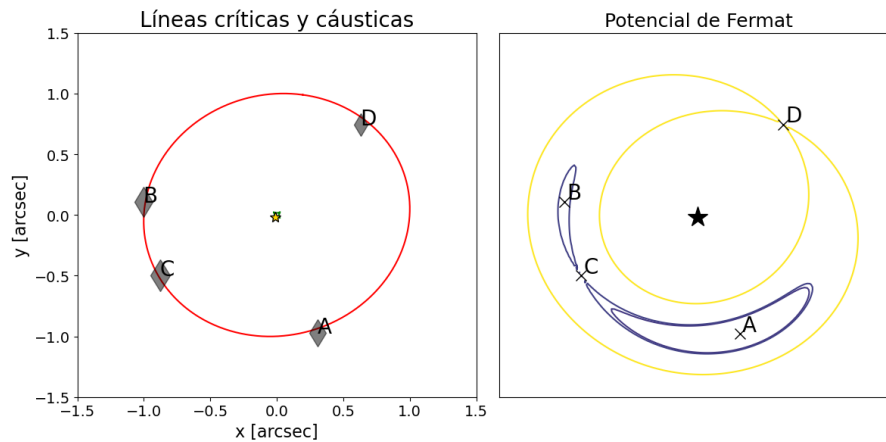


Figura 40: Sistema PG 1115 + 080 en *Lenstronomy*.

Con respecto a RX J1131 – 1231, ocurre exactamente lo mismo. El orden de formación de las imágenes según *Lenstronomy* es B–C–A–D, el cual es análogo al presentado en la Tabla 7.2.3 de la Sección 7.2. En este modelo se empleó: $q = 0.80$ y $\varphi = 14.8^\circ$.

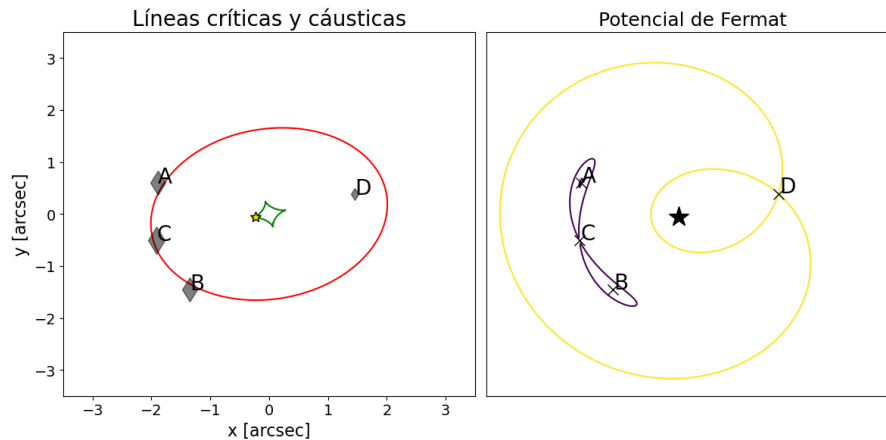


Figura 41: Sistema RX J1131 – 1231 en *Lenstronomy*.

Finalmente, para WFI J2026 – 4536 se confirma la clasificación de las imágenes descrita en la Tabla 7.3.3. El potencial de Fermat, junto con las líneas críticas y las cáusticas, se muestran en las Figuras 41 y 42, respectivamente. Estos resultados se obtuvieron considerando: $q = 0.90$ y $\varphi = 0^\circ$.

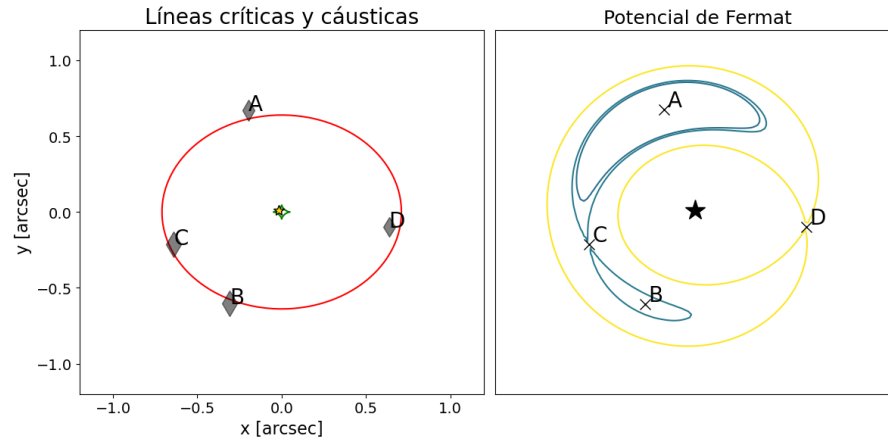


Figura 42: Sistema WFI J2026 – 4536 en Lenstronomy.

Capítulo 8

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de este trabajo era estudiar la formación de imágenes en sistemas de lente gravitacional reales mediante una categorización basada en el estudio de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso. En particular, esto se consiguió a partir de dos procesos complementarios: el primero, en el cual se realizó un riguroso análisis de la teoría de lentes gravitacionales; y el segundo, donde se llevó a cabo la aplicación de los conceptos aprendidos al simular sistemas presentes en la naturaleza.

Así, se describe en primera instancia el proceso metodológico de aprendizaje del tema, el cual inició con la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein y la introducción del principio de Fermat, permitiendo deducir las ecuaciones de movimiento en el límite Newtoniano. A partir de estas se derivó el ángulo de deflexión para una masa puntual, el cual sirvió como punto de partida para la deducción del ángulo de deflexión debido a una distribución continua de masa. Lo siguiente fue estudiar la teoría fundamental de un sistema de lente gravitacional, estableciendo los elementos que lo constituyen, la ecuación característica y su relación con el potencial gravitacional; luego se describió la superficie de tiempo de atraso y se definieron las características de las imágenes en dicha superficie (punto de silla, mínimo o máximo), lo cual fue complementado con el estudio de la topología del potencial de Fermat. Finalmente, se concluyó la investigación mediante la descripción de diferentes modelos para representar al cuerpo deflector. Entre estos se estudió: el modelo de masa puntual, modelo de esfera isoterma singular y no singular, modelo de elipsoide singular y no singular, y por último, los modelos pseudoelípticos. En cada uno de ellos, se especificó tanto el potencial gravitacional como las líneas críticas de cada caso.

De esta manera, se da paso al segundo proceso, en el cual se modelaron los sistemas de lente gravitacional PG 1115 + 080, RX J1131–1231 y WFI J2026–4536; permitiendo concluir que, a partir de las curvas con geometría de lemniscata y caracol de Pascal definidas por la topología del potencial de Fermat (sección 5.6.2), es posible clasificar las imágenes de sistemas de lente gravitacional presentes en la naturaleza mediante el análisis de la evolución temporal de las líneas de contorno para cada sistema, como se describe en la Figura 34. Esto se realiza bajo la consideración de una imagen central no visible/detectable, tal como se describe en el análisis del perfil NIS del sistema PG1115 + 080 (sección 7.1.1). Los resultados se presentan en las Tablas 7.1.6, 7.2.3 y

7.3.3. En conclusión, aunque los isocontornos no permiten predecir con exactitud la posición de cada una de las imágenes en los sistemas analizados, sí resultan útiles para su clasificación. Las diferencias observadas en las posiciones de las imágenes se asocian a limitaciones inherentes a los modelos empleados; no obstante, dichas limitaciones se mostraron consistentes con lo reportado en modelos más complejos y con los datos experimentales disponibles.

Asimismo, se afirma que, a partir de las líneas críticas y del análisis de las líneas de contorno, los modelos **SIE** y **pSIE** son los apropiados para llevar a cabo un estudio topológico de la superficie de tiempo de atraso como una primera aproximación. Esto se deriva de la comparación entre los modelos elípticos (y pseudoelípticos) con y sin núcleo, considerando tanto sus características físicas, como complejidad matemática y resultados, tal como se presenta en las secciones 7.1.2 y 7.1.3.

Por otro lado, se observó que las líneas críticas funcionan como una herramienta visual para identificar las regiones del plano donde la magnificación es tan alta que una imagen situada en sus proximidades puede deformarse hasta el punto de dar lugar a nuevas imágenes. Esto se detalla en la sección 7.1.2 y está en concordancia con la descripción teórica de las líneas críticas y caústicas, donde se especifica que una imagen próxima a las líneas críticas permite inferir cualitativamente que la fuente se encuentra próxima a una caústica, que son las líneas que caracterizan las regiones de multiplicidad en la formación de imágenes.

Para concluir, se menciona que los resultados obtenidos mediante los códigos propios coinciden con los generados por el software especializado *Lenstronomy* lo cual valida los resultados obtenidos en este trabajo, vease sección 7.4.

Como recomendaciones, se propone que, con el fin de profundizar en el estudio de las lentes gravitacionales como una herramienta en el análisis del Universo, se estudie, para futuros trabajos, la formación de imágenes a través de las caústicas, tanto de forma analítica como mediante métodos computacionales, considerando además la ampliación de los modelos de lente, como lo es el perfil Navarro-Frenk-White (NFW).

Asimismo, se sugiere profundizar en el efecto que tiene la cizalladura externa sobre los isocontornos de los sistemas, con el fin de observar si se presenta una mayor precisión en la formación de imágenes. Otra línea de análisis sería estudiar sistemas de lente gravitacional no a partir de una única lente, sino a través de un grupo de galaxias en el plano de la lente, o considerando cuerpos deflectores a lo largo del camino del rayo de luz, incluso, se propone el análisis de las lentes gravitacionales desde un enfoque más cercano a la óptica física [81–83].

APÉNDICES

Apéndice A

Herramientas para la relatividad general

A.1. Transformacion de calibre

La introducción de las transformaciones de calibre es necesaria para garantizar la ausencia de divergencias en las ecuaciones de campo linealizadas, manteniendo invariante la física subyacente. Este tipo de transformaciones son ampliamente conocidas debido a su papel fundamental en áreas como la electrodinámica [36, 84].

Como punto de partida, se considera una transformación de coordenadas caracterizada por

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\mu) . \quad (\text{A.1.1})$$

A partir de esta expresión se obtiene la siguiente matriz de transformación:

$$L^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \partial_{\beta} \xi^{\alpha} , \quad (\text{A.1.2})$$

donde se impone que $\partial_{\beta} \xi^{\alpha} \ll 1$, con el fin de que la transformación sea infinitesimal.

En este contexto, es relevante determinar la inversa de $L^{\alpha'}_{\beta}$. Para ello, se sigue un procedimiento análogo al de la métrica linealizada, imponiendo la condición $L^{\alpha'}_{\beta} L^{\beta}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}$, de modo que:

$$L^{\beta}_{\gamma'} = \delta^{\beta}_{\gamma} - \partial_{\gamma} \xi^{\beta} . \quad (\text{A.1.3})$$

Ahora bien, es de interés observar como este tipo de transformaciones afecta a la métrica del espacio-tiempo infinitesimalmente perturbado. Al aplicarse dicha transformación, se obtiene

$$g_{\mu'\nu'} = L^{\alpha}_{\mu'} L^{\beta}_{\nu'} g_{\alpha\beta} = (\delta^{\alpha}_{\mu} - \partial_{\mu} \xi^{\alpha})(\delta^{\beta}_{\nu} - \partial_{\nu} \xi^{\beta})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) , \quad (\text{A.1.4})$$

y, al omitir los términos de segundo orden, se deduce que:

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \xi_{\nu} - \partial_{\nu} \xi_{\mu} . \quad (\text{A.1.5})$$

Sin embargo, se espera que el resultado tenga la forma $g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'}$. En consecuencia, al comparar las expresiones A.1.4 y A.1.5, se concluye que el término de perturbación luego de la transformación¹, es de la forma:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu . \quad (\text{A.1.6})$$

Por otro lado, en el contexto de la electrodinámica, los potenciales electromagnéticos pueden ser seleccionados de forma conveniente. En este sentido, el resultado anterior permite aplicar una idea análoga en la teoría de la gravedad linealizada mediante las transformaciones de calibre. Para ello, se realiza la transformación sobre el factor de perturbación con traza invertida ($\bar{h}$), dando lugar a la expresión:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \xi_\alpha . \quad (\text{A.1.7})$$

Al calcular la divergencia de $\bar{h}'_{\mu\nu}$, se encuentra que:

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \xi_\mu + \partial^\alpha \partial_\nu \xi_\alpha , \quad (\text{A.1.8})$$

donde los dos últimos términos se anulan entre sí.

En otras palabras, se tiene que la divergencia de la transformación de calibre sobre $h_{\mu\nu}$ es de la forma:

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\nu . \quad (\text{A.1.9})$$

Así, al hacer una adecuada selección del calibre, tal que se satisfaga $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, se concluye que

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = \square \xi_\nu , \quad (\text{A.1.10})$$

lo cual permite introducir el análogo de la condición de Lorenz de la electrodinámica en el contexto de la gravedad linealizada:

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{A.1.11})$$

La importancia de la introducción de las transformaciones de calibre radica en que, en términos prácticos, siempre es posible determinar una transformación que favorezca la representación linealizada de las ecuaciones de campo de Einstein.

Este resultado es el que se sustituye en la relación 4.1.35, lo que permite deducir la forma de las ecuaciones de campo de Einstein en 4.1.36.

A.2. Equivalencia con la métrica de Schwarzschild

De manera puntual, es de interés introducir la métrica de Schwarzschild la cual es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, que describe el efecto del campo gravitacional

¹Para distinguir claramente los términos transformados, se utiliza un apóstrofo, como en h'

debido a una distribución de masa esféricamente simétrica, tal que, en coordenadas esféricas el intervalo espacio-temporal es representado como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{A.2.1})$$

en donde, se introduce la definición del radio de Schwarzschild (R_s) mediante la siguiente expresión

$$R_s \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad (\text{A.2.2})$$

el cual describe el horizonte de eventos debido a un agujero negro estático o también denominado agujero negro de Schwarzschild.

Partiendo de la anterior solución, es posible realizar una primera aproximación hacia la métrica linealizada, al introducir una nueva coordenada radial r , definida por:

$$R = r \left(1 + \frac{GM}{2rc^2}\right)^2. \quad (\text{A.2.3})$$

De esta manera, se tiene que si el campo gravitacional asociado es débil ($GM/rc^2 \ll 1$), se satisface lo siguiente:

$$\left(1 + \frac{GM}{2rc^2}\right)^2 \approx 1 + \frac{GM}{rc^2}. \quad (\text{A.2.4})$$

Y por ende

$$R \approx r \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right). \quad (\text{A.2.5})$$

Al introducir esta última sobre la relación entre R_s y R , se determina que $\frac{R_s}{R}$ es igual a:

$$\frac{R_s}{R} \approx \frac{2GM}{c^2 r} \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)^{-1} \approx \frac{2GM}{c^2 r} - 2 \left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2, \quad (\text{A.2.6})$$

de tal manera, que al considerar únicamente el termino de primer orden, se obtiene la expresión:

$$\frac{R_s}{R} \approx \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (\text{A.2.7})$$

Bajo la misma consideración, se determina que:

$$dR \approx dr. \quad (\text{A.2.8})$$

Tras estos procedimientos, se tiene que, al sustituir las expresiones deducidas de R y dR sobre A.2.1, se deriva la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotropicas como:

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.2.9})$$

Particularmente, al describir la geometría del espacio-tiempo en un punto lo suficientemente alejado de la distribución de masa, el anterior intervalo espacio-temporal puede ser escrito en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{A.2.10})$$

El cual escrito en términos del potencial gravitacional Newtoniano corresponde a:

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) (d\vec{x})^2, \quad (\text{A.2.11})$$

que es justamente la ecuación 4.4.4 y es análoga a la métrica linealizada.

Apéndice B

Distancia de diámetro angular

Con el fin de describir las distancias en un Universo en expansión, se propone estudiar dicho Universo desde el marco cosmológico. Este apéndice se basa en las referencias [29, 33, 85]. Así, en primera instancia, se introduce el principio cosmológico, el cual establece que a grandes escalas el Universo es homogéneo e isotrópico. En este contexto, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW, por sus siglas en inglés) describe el caso más general y es representada como:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + f_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)] . \quad (\text{B.0.1})$$

Donde, en la parte espacial, se tiene que: χ corresponde a la coordenada radial, mientras que θ y ϕ caracterizan la posición angular en la esfera unitaria¹ con respecto a su centro. Análogamente, en la expresión se ha introducido el factor de escala del Universo $a(t)$, y finalmente el parámetro k , que representa la curvatura espacial del Universo.

Esta última es de relevancia en el estudio de los modelos cosmológicos, ya que la distancia entre dos puntos del Universo depende de su valor, como se observa en la ecuación B.0.1. Si se considera el caso $k = 1$, se obtiene un Universo esférico; para $k = 0$, un Universo plano; y por último, si $k = -1$, un Universo hiperbólico. Esta dependencia de k se refleja en la forma de la función radial dentro de la métrica, la cual, según el valor que se considere, tendrá una expresión específica, tal como se describe a continuación:

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\chi\sqrt{k}) & \text{si } k > 0 \\ \omega & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\chi\sqrt{-k}) & \text{si } k < 0 \end{cases} . \quad (\text{B.0.2})$$

En esencia, de acuerdo al principio cosmológico, es posible interpretar a $f_k(\chi)$ como el radio de las esferas bidimensionales que aparecen al describir la métrica del Universo. Es decir, si se define $r \equiv f_k(\omega)$, la métrica toma la forma:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \right] , \quad (\text{B.0.3})$$

¹El origen de la esfera se selecciona de manera arbitraria.

la cual describe como la distancia entre dos puntos del espacio-tiempo depende únicamente del tiempo, esto debido a la presencia del parámetro de expansión del universo $a(t)$. En particular, se tiene que las coordenadas espaciales no dependen explícitamente del tiempo t , por lo que se denominan coordenadas comóviles.

Ahora bien, en cosmografía se establece que el factor de escala está relacionado con el corrimiento al rojo (z). Este último se expresa mediante la relación:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} , \quad (\text{B.0.4})$$

en la cual, se considera por definición que $a(t_0) = 1$ en la actualidad. Por otro lado, se define el parámetro de Hubble como:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} , \quad (\text{B.0.5})$$

siendo $\dot{a}(t)$ la derivada temporal del factor de escala del Universo. Matemáticamente es posible relacionar el corrimiento al rojo con el parámetro de Hubble, ya que si se considera la ecuación B.0.4 en el presente y se deriva implícitamente con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)^2} \quad (\text{B.0.6})$$

Al reemplazar $\dot{a}$ de la definición del parámetro de Hubble en la anterior, y dado $a(t) = 1/(1+z)$, se deduce la expresión:

$$\frac{dz}{dt} = -H(z)(1+z) . \quad (\text{B.0.7})$$

Por otro lado, la relevancia de la constante de Hubble radica también en que, a partir de ella, es posible definir los parámetros de densidad adimensionales, los cuales en conjunto representan cómo evoluciona la expansión del universo en función del corrimiento al rojo. Esta evolución se expresa mediante la función $E(z)$, que corresponde a:

$$E(z)^2 = \Omega_{m[0]}(1+z)^3 + \Omega_{\gamma[0]}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k[0]}(1+z)^2 , \quad (\text{B.0.8})$$

donde se indican los parámetros de densidad actuales de materia (Ω_m), radiación (Ω_{γ}), energía oscura (Ω_{Λ}) y curvatura (Ω_k).

Concretamente se tiene que $E(z)$ es proporcional a la derivada logarítmica del factor de escala $\dot{a}(t)/a(t)$ con un corrimiento al rojo z . Es otras palabras, un observador situado a un corrimiento al rojo z , obtendría que su constante de Hubble es:

$$H(z) = H_0 E(z) . \quad (\text{B.0.9})$$

En este punto, gracias a lo deducido hasta el momento, es posible definir la distancia comóvil a partir de la métrica FLRW. Si se considera un rayo de luz que se propaga a lo largo de la trayectoria radial, es decir, $d\theta = d\phi = 0$, la expresión B.0.1 toma la forma:

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c dt}{a(t)} . \quad (\text{B.0.10})$$

Ahora, ya que para un haz de luz $c dt = dz$, es posible cambiar la variable de integración, y sí además se considera que el diferencial temporal a partir de B.0.7 es

$$dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} , \quad (\text{B.0.11})$$

y $a(t) = \frac{1}{1+z}$, se determina lo siguiente:

$$\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = -\frac{c dz}{(1+z)H(z)} . \quad (\text{B.0.12})$$

Esta última igualdad, si no se considera el corrimiento al rojo de la fuente, se tiene que al ser integrada corresponde a la definición de la distancia comóvil², es decir:

$$D_C \equiv \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \frac{D_H}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} , \quad (\text{B.0.13})$$

donde se definió la distancia de Hubble como $D_H = c/H_0$, y se representó a $H(z) = H_0 E(z)$.

A partir de este resultado, dependiendo de la curvatura del universo, se define la distancia comóvil transversa como:

$$D_M(z) = \begin{cases} D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} D_C / D_H) & \text{si } \Omega_k > 0 , \\ D_C & \text{si } \Omega_k = 0 , \\ D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|} D_C / D_H) & \text{si } \Omega_k < 0 , \end{cases} \quad (\text{B.0.14})$$

siendo representado k a través parámetro de densidad de curvatura actual, el cual es:

$$k = -\Omega_{k[0]} \cdot \left(\frac{H_0^2}{c^2} \right) . \quad (\text{B.0.15})$$

Finalmente, se tiene que la distancia de diámetro angular se relaciona con la distancia comóvil transversa mediante la expresión:

$$D_A \equiv \frac{D_M}{1+z} . \quad (\text{B.0.16})$$

De este modo, se describe que la distancia angular entre dos cuerpos es:

$$D_{A,12} = \frac{1}{1+z_2} \left[D_{M2} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M1}^2}{D_H^2}} - D_{M1} \sqrt{1 + \Omega_k \frac{D_{M2}^2}{D_H^2}} \right] . \quad (\text{B.0.17})$$

demostrando que en general en el marco de la cosmología, las distancias de diámetro angular no son cantidades aditivas a priori. Sin embargo, al trabajar en el límite de la teoría relativista, donde la perturbación se asocia a un campo gravitacional débil es posible considerar que $k \approx 0$. Bajo esta condición, se tiene entonces que la diferencia entre las distancias de diámetro angular entre dos cuerpos es:

$$D_{A,12} \approx \frac{1}{1+z_2} [D_{M2} - D_{M1}] . \quad (\text{B.0.18})$$

²El signo negativo desaparece al invertir los límites de integración con respecto al tiempo, donde el límite inferior corresponde al tiempo de emisión del fotón, mientras que el límite superior corresponde al tiempo en el que es visualizado por nosotros.

Apéndice C

Complementos de lentes gravitacionales

C.1. Diagonalización del tensor de cizalladura

Con el objetivo de diagonalizar el tensor de cizalladura, se introduce la matriz de rotación $R(\phi)$, siguiendo lo descrito en el Capítulo 3.3 de [33].

Así, al aplicar la correspondiente regla de transformación sobre la matriz jacobiana de la lente, esta transforma bajo la siguiente expresión:

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = R(\phi)^T \mathcal{A} R(\phi) , \quad (\text{C.1.1})$$

donde la matriz de rotación $R(\phi)$ es:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} . \quad (\text{C.1.2})$$

Al representar en su forma matricial a $\mathcal{A}$ y $R(\phi)$, se tiene que la anterior corresponde a:

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} . \quad (\text{C.1.3})$$

Al desarrollar el producto matricial, se obtiene que las componentes en la diagonal de la matriz $\mathcal{A}'$ son respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \kappa (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \gamma_1 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &\quad - \gamma_2 (2 \sin \phi \cos \phi) , \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

$$= 1 - \kappa - \gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi . \quad (\text{C.1.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{22} &= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \kappa (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \gamma_1 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &\quad + \gamma_2 (2 \sin \phi \cos \phi) , \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

$$= 1 - \kappa + \gamma_1 \cos 2\phi + \gamma_2 \sin 2\phi . \quad (\text{C.1.7})$$

De igual forma, con respecto a las componentes por fuera de la diagonal, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} &= -\sin \phi \cos \phi + \kappa \sin \phi \cos \phi + \gamma_1 \sin \phi \cos \phi - \gamma_2 \cos^2 \phi \\ &\quad + \gamma_2 \sin^2 \phi + \sin \phi \cos \phi - \kappa \sin \phi \cos \phi + \gamma_1 \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

$$= \gamma_1 (2 \sin \phi \cos \phi) - \gamma_2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \quad (\text{C.1.9})$$

$$= \gamma_1 \sin(2\phi) - \gamma_2 \cos(2\phi). \quad (\text{C.1.10})$$

Como resultado del procedimiento anterior, se establece que la transformación sobre la matriz jacobiana de la lente, en notación matricial es:

$$\mathcal{A}' = (1 - \kappa) \mathbb{I} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \cos 2\phi + \gamma_2 \sin 2\phi & -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi \\ -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi & -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1.11})$$

en la cual se observa que, al tratarse de una transformación de rotación —que es una operación lineal—, la matriz que contiene las componentes γ_1 y γ_2 corresponde precisamente a la transformación del tensor de cizalladura. Es decir, Γ' es igual a:

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \gamma_1 \cos 2\phi + \gamma_2 \sin 2\phi & -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi \\ -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi & -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1.12})$$

Por otro lado, dada la definición del tensor de cizalladura, se espera que la transformación sea de forma:

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \gamma'_1 & \gamma'_2 \\ \gamma'_2 & -\gamma'_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1.13})$$

Ahora bien, ambas matrices representan el tensor de cizallamiento transformado bajo la acción del operador de rotación, por lo cual deben ser iguales. Con esto en mente, se establece que las componentes respectivas transforman mediante las siguientes ecuaciones:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma'_1 = \gamma_1 \cos 2\phi + \gamma_2 \sin 2\phi, \quad (\text{C.1.14})$$

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma'_2 = -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi. \quad (\text{C.1.15})$$

En este momento, se retoma el objetivo principal, el cual consiste en representar al tensor de cizallamiento en forma diagonal, de modo que el resultado esperado después de la rotación es:

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1.16})$$

Para satisfacer justamente lo anterior, se impone que:

$$\gamma'_1 = \gamma_1 \cos 2\phi + \gamma_2 \sin 2\phi = \gamma, \quad (\text{C.1.17})$$

$$\gamma'_2 = -\gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi = 0, \quad (\text{C.1.18})$$

las cuales configuran un sistema de ecuaciones 2×2 , el cual es solucionado por:

$$\gamma_1 = \gamma \cos 2\phi \quad (\text{C.1.19})$$

$$\gamma_2 = \gamma \sin 2\phi. \quad (\text{C.1.20})$$

Finalmente, se deduce que la matriz de cizallamiento diagonal izada es de la forma:

$$\Gamma' = \gamma \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1.21})$$

la cual corresponde a la ecuación 5.5.12.

C.2. Demostración de los teoremas generales

Estos teoremas provienen del análisis matemático de los puntos estacionarios sobre un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, los cuales en el contexto de las lentes gravitacionales corresponden con las regiones en las cuales se formaran las imágenes. Esta descripción esta basada en la sección 5.4 de [53].

Como punto de partida, se introduce el *teorema del índice*, el cual nos permite clasificar los puntos estacionarios sobre la superficie de interés mediante el análisis del campo alrededor de dichos puntos. Así, se considera un campo $\mathbf{X}(\vec{x})$, en el cual $\vec{x}_0$ es punto estacionario. En este punto se tiene que el campo es nulo, es decir $\mathbf{X}(\vec{x}_0) = 0$. Ahora bien, al asumir que el campo vectorial es bien comportado y dadas las características bidimensionales, es posible representar al campo vectorial en coordenadas polares, tal que:

$$\mathbf{X} = X(\cos \phi, \sin \phi) . \quad (\text{C.2.1})$$

Es posible definir en el campo una curva cerrada que rodee al punto estacionario sin pasar por él. Esta curva puede ser parametrizada por λ y representada como $c(\lambda)$. Lo anterior permite introducir el concepto de **índice de un punto estacionario**, ya que, al desplazarse a lo largo de la curva $c(\lambda)$, la dirección del campo vectorial varía de forma continua a lo largo de una curva cerrada. Si, al regresar al punto de partida, dicha dirección ha completado una rotación en sentido antihorario, se le asigna un índice de $+1$. Si la rotación ha sido en sentido horario, el índice es -1 . En general, el índice indica el número de vueltas completas (positivas o negativas) que realiza la dirección del campo al recorrer la curva. Matemáticamente se define el índice de un punto estacionario como:

$$\frac{1}{2\pi} \oint d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{c(\lambda)} \frac{d\phi}{d\lambda} d\lambda . \quad (\text{C.2.2})$$

Con la introducción del índice topológico, se procede al análisis de las imágenes en un sistema de lentes gravitacionales, tal que el campo vectorial de interés corresponde al gradiente del potencial gravitacional de la lente¹, es decir:

$$\mathbf{X} = \vec{\nabla} \hat{\Psi}(x, y) . \quad (\text{C.2.3})$$

Se conoce que los puntos estacionarios describen imágenes de la fuente producidas por el efecto de lente gravitacional, siendo estas localizadas en máximos, mínimos o puntos de silla.

Con la idea de determinar los índices sobre estos puntos, se expande el potencial gravitacional en series de Taylor alrededor de cada punto estacionario. Como ejemplo se realizara el análisis únicamente sobre punto estacionario en $\vec{x}_0$, tal que:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_0 + \frac{1}{2} \hat{\Psi}_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} \hat{\Psi}_{22} x_2^2 . \quad (\text{C.2.4})$$

Al asumir que $\vec{x}_0 = (0, 0)$, se tiene que es posible clasificar el punto con función de los signos de las segundas derivadas parciales, tal que $\vec{x}_0$ es:

¹Se ha considerado la posición de la fuente como un parámetro externo.

- Mínimo con índice +1, cuando

$$\hat{\Psi}_{11} > 0 \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_{22} > 0 . \quad (\text{C.2.5})$$

- Máximo con índice +1, si

$$\hat{\Psi}_{11} < 0 \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_{22} < 0 . \quad (\text{C.2.6})$$

- Punto de silla, si el producto entre las segundas derivadas es negativo, es decir

$$\hat{\Psi}_{11} \hat{\Psi}_{22} < 0 , \quad (\text{C.2.7})$$

De forma particular, se tiene que, para valores pequeños del campo gravitacional, este campo puede ser representado mediante la siguiente igualdad

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} x_1 \\ \hat{\Psi}_{22} x_2 \end{bmatrix} . \quad (\text{C.2.8})$$

Si arbitrariamente, se considera que la curva alrededor del punto estacionario es de geometría elíptica², tal que sea lo suficientemente pequeña para excluir otros puntos estacionarios, se tiene que la curva puede ser representada mediante la siguiente parametrización:

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \cos \theta \\ \epsilon_2 \sin \theta \end{bmatrix} . \quad (\text{C.2.9})$$

Donde $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ para todos los puntos que componen la curva.

De lo anterior, se tiene que es posible representar el ángulo entre las componentes del potencial gravitacional alrededor del punto estacionario mediante

$$\tan \phi = \frac{\hat{\Psi}_{22} \epsilon_2 \sin \theta}{\hat{\Psi}_{11} \epsilon_1 \cos \theta} , \quad (\text{C.2.10})$$

la cual permite relacionar el ángulo asociado al campo gravitacional con el índice del punto estacionario, como se muestra a continuación:

- Si se trata de un mínimo, se tiene que:

$$\epsilon_1 = \epsilon \hat{\Psi}_{22} ; \quad \epsilon_2 = \epsilon \hat{\Psi}_{11} \rightarrow \phi = \theta . \quad (\text{C.2.11})$$

- En el caso de ser un máximo, entonces:

$$\epsilon_1 = -\epsilon \hat{\Psi}_{22} ; \quad \epsilon_2 = -\epsilon \hat{\Psi}_{11} \rightarrow \phi = \theta . \quad (\text{C.2.12})$$

²Esto se hace con el fin de representar adecuadamente la geometría elíptica que puede tener la lente que da lugar al potencial gravitacional.

- Finalmente para el punto de silla,

$$\epsilon_1 = -\epsilon \hat{\Psi}_{22} ; \epsilon_2 = \epsilon \hat{\Psi}_{11} \rightarrow \phi = -\theta . \quad (\text{C.2.13})$$

En consecuencia, se tiene que para los puntos con características de mínimo o máximo, el ángulo aumenta en una razón de 2π , siendo representados por un índice $+1$, mientras que en el punto de silla, se invierte, resultando en un índice -1 . De esta manera, se deduce que los puntos estacionarios son aislados. En función de lo anterior, se prueban cada uno de los teoremas establecidos.

Así: PRUEBA DEL TEOREMA 1: En función de lo descrito, se tiene que:

- El potencial gravitacional $\hat{\Psi}$ tiene un mínimo absoluto, y este corresponde a una imagen ordinaria de tipo I.
- Si se considera la posición de la fuente fija, y dado que el ángulo de deflexión es una magnitud finita, se decide acotar al mismo en una región a , tal que $|\vec{\alpha}| \leq a$. Entonces, se deduce que las imágenes serán generadas dentro de la región:

$$|\vec{x}| \leq |\vec{y}| + a, \quad (\text{C.2.14})$$

implicando así que las imágenes son ordinarias, aisladas y, finalmente, finitas.

- El número total de imágenes (n) de la fuente ($\vec{y}$) estarán contenidas en el disco de radio:

$$R \leq |\vec{y}| + a. \quad (\text{C.2.15})$$

Ahora bien, si el círculo de dicho radio es lo suficientemente grande, tal que el ángulo de deflexión sea despreciable, el campo vectorial $\mathbf{X}(\vec{x})$ se hace aproximadamente radial en la frontera del disco. En otras palabras, el campo apunta fuera o dentro de la circunferencia.

Dado que el teorema del índice establece que la suma de los índices de los puntos estacionarios del potencial gravitacional dentro de una región cerrada es igual al índice del campo en el borde de esta región, al considerar que el índice en la frontera es 1, se concluye que la suma de los índices de las imágenes debe ser igual a 1, es decir:

$$n_I + n_{II} + n_{III} = 1. \quad (\text{C.2.16})$$

- Cuando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, se tiene que la matriz jacobiana de la lente tiende a la matriz identidad, de modo que tanto su determinante como su traza resultan positivas fuera de un círculo de radio R . Así entonces, las imágenes fuera de este círculo son de tipo I, ya que en la ecuación de la lente se establece que:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}). \quad (\text{C.2.17})$$

Ahora bien, ya que $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ y que las imágenes siempre se generan dentro del disco de radio R , entonces:

$$|\vec{x}| \geq |\vec{y}| - |\vec{\alpha}(\vec{x})| , \quad (\text{C.2.18})$$

$$|\vec{x}| \geq |\vec{y}| - a , \quad (\text{C.2.19})$$

$$|\vec{x}| > R . \quad (\text{C.2.20})$$

Por lo que, en la ecuación de la lente, solo habría una imagen de la fuente y esta estaría fuera del disco de radio R siendo caracterizada como tipo I:

$$n_{II} + n_{III} = 0, \quad (C.2.21)$$

con lo cual:

$$n_I = 1. \quad (C.2.22)$$

PRUEBA DEL TEOREMA 2: De acuerdo con el primer ítem de la prueba del teorema 1, se tiene que la primera imagen en llegar al observador corresponde con un mínimo. Por tanto, su magnificación debe satisfacer que:

$$\mu \geq 1. \quad (C.2.23)$$

Sin embargo, la anterior no puede ser exactamente igual a uno, ya que aquello implicaría que tanto la convergencia como el cizallamiento sean nulos y en ese caso, la matriz jacobiana de la lente correspondería con la matriz de identidad, es decir:

$$\mathcal{A} = \mathbb{I}. \quad (C.2.24)$$

Por lo tanto, la primera imagen que llega al observador es de tipo I y será más brillante que la fuente.

C.3. Deducción de línea crítica radial – NIS

Se considera como punto de partida la igualdad 6.2.125, tal que la línea crítica radial del sistema se obtiene cuando la expresión es igual a cero, es decir:

$$\lambda_{\text{rad}} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x_c^2}} = 0. \quad (C.3.1)$$

Al determinar el mínimo común múltiplo de la anterior, se deduce la expresión:

$$\frac{x^2 \sqrt{x^2 + x_c^2} + x^2 + x_c^2 - x_c \sqrt{x^2 + x_c^2} - x^2}{x^2 \sqrt{x^2 + x_c^2}} = 0, \quad (C.3.2)$$

la cual se satisface cuando el numerador es igual a cero, es decir:

$$x^2 \sqrt{x^2 + x_c^2} + x^2 + x_c^2 - x_c \sqrt{x^2 + x_c^2} - x^2 = 0, \quad (C.3.3)$$

$$x^2 \sqrt{x^2 + x_c^2} + x_c^2 - x_c \sqrt{x^2 + x_c^2} = 0, \quad (C.3.4)$$

$$\sqrt{x^2 + x_c^2} (x^2 - x_c) + x_c^2 = 0, \quad (C.3.5)$$

$$(x^2 + x_c^2) (x^2 - x_c)^2 = x_c^4, \quad (C.3.6)$$

$$(x^2 + x_c^2) (x^4 - 2x^2 x_c + x_c^2) = x_c^4. \quad (C.3.7)$$

Al realizar los productos correspondientes del lado izquierdo, se obtiene que habrá un término x_c^4 , el cual se simplifica con el término del lado derecho de la igualdad. Análogamente, al factorizar de todos los términos resultantes x^2 , se obtiene la siguiente expresión:

$$x^2 (x^4 - 2x^2 x_c + x_c^2 + x^2 x_c^2 - 2x_c^3) = 0 , \quad (\text{C.3.8})$$

la cual tiene como solución trivial $x = 0$.

Para encontrar las demás soluciones, se propone el cambio de variable $x^2 \rightarrow P$, de modo que la anterior expresión toma la forma de polinomio de grado 2, como se representa a continuación:

$$P^2 + P (x_c^2 - 2x_c) + x_c^2 - 2x_c^3 = 0 . \quad (\text{C.3.9})$$

La solución de la anterior se determina mediante la fórmula cuadrática, tal que sus soluciones son:

$$P_{1,2} = \frac{-(x_c^2 - 2x_c) \pm \sqrt{(x_c^2 - 2x_c)^2 - 4(x_c^2 - 2x_c^3)}}{2} . \quad (\text{C.3.10})$$

En este momento, se desarrolla la operación descrita dentro de la raíz, tal que:

$$(x_c^2 - 2x_c)^2 - 4(x_c^2 - 2x_c^3) = x_c^4 - 4x_c^3 + 4x_c^2 - 4x_c^2 + 8x_c^3 , \quad (\text{C.3.11})$$

$$= x_c^4 + 4x_c^3 . \quad (\text{C.3.12})$$

Finalmente, al revertir al revertir el cambio de variable, se obtiene que los puntos que satisfacen la igualdad son aquellos que describen la línea crítica radial del sistema, con esto en mente, se representa la anterior como:

$$x_{\text{rad}}^2 = \frac{1}{2} \left[2x_c - x_c^2 \pm x_c \sqrt{x_c^4 + 4x_c^3} \right] , \quad (\text{C.3.13})$$

y que corresponde con la ecuación 6.2.126.

C.4. Deducción del potencial gravitacional angular - SIE

La ecuación diferencial 6.3.12 establece que:

$$\hat{\Psi}(\phi) + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}(\phi)}{\partial \phi^2} = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} . \quad (\text{C.4.1})$$

Con el objetivo de solucionar la expresión anterior, se imponen las siguientes condiciones sobre el potencial gravitacional:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \hat{\Psi}(\phi) = 0 , \quad (\text{C.4.2})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \hat{\Psi}'(\phi) = 0 , \quad (\text{C.4.3})$$

esto con el propósito de que la solución determinada sea bien comportada físicamente.

Ahora bien, dado que se trata de una ecuación diferencial no homogénea, para resolverla en primera instancia se calcula la solución de la ecuación diferencial homogénea, es decir:

$$\hat{\Psi}(\phi) + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 , \quad (\text{C.4.4})$$

de la cual se conoce que la solución general es de la forma:

$$\hat{\Psi}(\phi) = C_1 \sin \phi + C_2 \cos \phi . \quad (\text{C.4.5})$$

Teniendo en cuenta este resultado, se propone que la función de Green G tenga la misma forma. Adicionalmente, se introduce sobre esta solución el parámetro ϵ , el cual servirá para satisfacer las condiciones iniciales, tal que, en función de lo anterior la función de Green es:

$$G(\phi, \epsilon) = C_1(\epsilon) \sin \phi + C_2(\epsilon) \cos \phi . \quad (\text{C.4.6})$$

Esta función debe ser bien comportada en todo el espacio, Ahora bien, dada la relación entre la función de Green y la delta de Dirac, por conveniencia se establece que el potencial sea nulo en dicha región, mientras que su derivada presenta un salto igual a 1³. Matemáticamente, estas condiciones se describen como:

$$G(\phi, \epsilon) \Big|_{\phi=\epsilon} = 0 , \quad (\text{C.4.7})$$

$$G'(\phi, \epsilon) \Big|_{\phi=\epsilon} = 1 . \quad (\text{C.4.8})$$

Bajo estas condiciones, se configura el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_1(\epsilon) \sin \epsilon + C_2(\epsilon) \cos \epsilon = 0 , \quad (\text{C.4.9})$$

$$C_1(\epsilon) \cos \epsilon - C_2(\epsilon) \sin \epsilon = 1 , \quad (\text{C.4.10})$$

el cual tiene como solución a:

$$C_1(\epsilon) = -\sin \epsilon , \quad (\text{C.4.11})$$

$$C_2(\epsilon) = \cos \epsilon . \quad (\text{C.4.12})$$

De esta manera, se deduce la forma final de la función de Green asociada al sistema, que es:

$$G(\phi, \epsilon) = \cos \epsilon \sin \phi - \sin \epsilon \cos \phi = \sin(\phi - \epsilon) . \quad (\text{C.4.13})$$

Así entonces, el potencial gravitacional que soluciona la ecuación diferencial se determina mediante la solución de las siguientes integrales:

$$\hat{\Psi}(\phi) = \sin \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon + f^2 \sin^2 \epsilon}} \cos \epsilon \, d\epsilon - \cos \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon + f^2 \sin^2 \epsilon}} \sin \epsilon \, d\epsilon . \quad (\text{C.4.14})$$

³En realidad, la derivada no está definida en ese punto; lo que se hace es integrar la ecuación diferencial alrededor de y luego normalizar.

Inicialmente, se resuelve la integral acompañada del término $\sin \phi$, tal que:

$$\sin \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon + f^2 \sin^2 \epsilon}} \cos \epsilon \, d\epsilon = \sin \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1 - \sin^2 \epsilon + f^2 \sin^2 \epsilon}} \cos \epsilon \, d\epsilon \quad (\text{C.4.15})$$

$$= \sin \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1 - (1 - f^2) \sin^2 \epsilon}} \cos \epsilon \, d\epsilon . \quad (\text{C.4.16})$$

En este punto, se define $(1 - f^2) \equiv f'^2$ y se realiza el siguiente cambio de variable $\varsigma = \sin \epsilon$. De esta manera se obtiene que la integral a solucionar es:

$$\sin \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1 - (1 - f^2) \sin^2 \epsilon}} \cos \epsilon \, d\epsilon \rightarrow \sqrt{f} \sin \phi \int \frac{d\varsigma}{\sqrt{1 - f'^2 \varsigma^2}} , \quad (\text{C.4.17})$$

sin embargo, sobre esta última se realizará un nuevo cambio de variable, tal que $\varsigma = \sin \Theta / f'$, determinando finalmente que la integral a solucionar es de la forma:

$$\rightarrow \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \int \frac{\cos \Theta \, d\Theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta}} = \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \int \frac{\cos \Theta \, d\Theta}{\cos \Theta} \quad (\text{C.4.18})$$

$$= \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \Theta \quad (\text{C.4.19})$$

$$= \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \arcsin(f' \varsigma) \quad (\text{C.4.20})$$

$$= \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \arcsin(f' \sin \epsilon) \Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon=\phi} \quad (\text{C.4.21})$$

$$= \frac{\sqrt{f} \sin \phi}{f'} \arcsin(f' \sin \phi) . \quad (\text{C.4.22})$$

Ahora bien, sobre la otra integral se realiza un procedimiento similar, como se describe a continuación:

$$\cos \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon + f^2 \sin^2 \epsilon}} \sin \epsilon \, d\epsilon = \cos \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon + f^2 - f^2 \cos^2 \epsilon}} \sin \epsilon \, d\epsilon \quad (\text{C.4.23})$$

$$= \cos \phi \int_0^\phi \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f^2 + f'^2 \cos^2 \epsilon}} \sin \epsilon \, d\epsilon . \quad (\text{C.4.24})$$

Al igual que en la integral anterior, se propone el cambio de variable $\varsigma = \cos \epsilon$, tal que la expresión resultante es de la forma:

$$-\sqrt{f} \cos \phi \int \frac{d\varsigma}{\sqrt{f^2 + f'^2 \varsigma^2}} = -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \int \frac{d\varsigma}{\sqrt{f^2/f'^2 + \varsigma^2}} , \quad (\text{C.4.25})$$

y finalmente, se introduce un último cambio de variable, $\varsigma = \frac{f}{f'} \sinh \Theta$, de manera que la integral

a solucionar corresponde con:

$$-\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \int \frac{d\varsigma}{\sqrt{f^2/f'^2 + \varsigma^2}} \rightarrow -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \int \frac{\frac{f}{f'} \cosh \Theta d\Theta}{\sqrt{\frac{f^2}{f'^2} + \frac{f^2}{f'^2} \sinh^2 \Theta}} \quad (\text{C.4.26})$$

$$= -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \int \frac{\cosh \Theta d\Theta}{\cosh \Theta} \quad (\text{C.4.27})$$

$$= -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \Theta \quad (\text{C.4.28})$$

$$= -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \varsigma \right) \quad (\text{C.4.29})$$

$$= -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \epsilon \right) \Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon=\phi} \quad (\text{C.4.30})$$

$$= -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \left[\operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) - \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \right) \right] . \quad (\text{C.4.31})$$

En la última igualdad, se omite el factor constante ya que no termina siendo relevante en el comportamiento de la función⁴, como se observa en la Figura 43. de este modo es posible omitir dicho factor, tal que la segunda integral es igual a:

$$-\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \int \frac{d\varsigma}{\sqrt{f^2/f'^2 + \varsigma^2}} = -\frac{\sqrt{f} \cos \phi}{f'} \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) . \quad (\text{C.4.32})$$

Finalmente, con lo anterior se concluye la forma del potencial gravitacional proyectado angular en notación adimensional, tal que al sustituir los resultados de C.4.22 y C.4.32 en C.4.14, se tiene la siguiente igualdad:

$$\hat{\Psi}(\phi) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right] . \quad (\text{C.4.33})$$

que corresponde a la ecuación 6.3.13.

⁴Esto no se especifica en la fuente [59], sin embargo se asume del análisis grafico realizado.

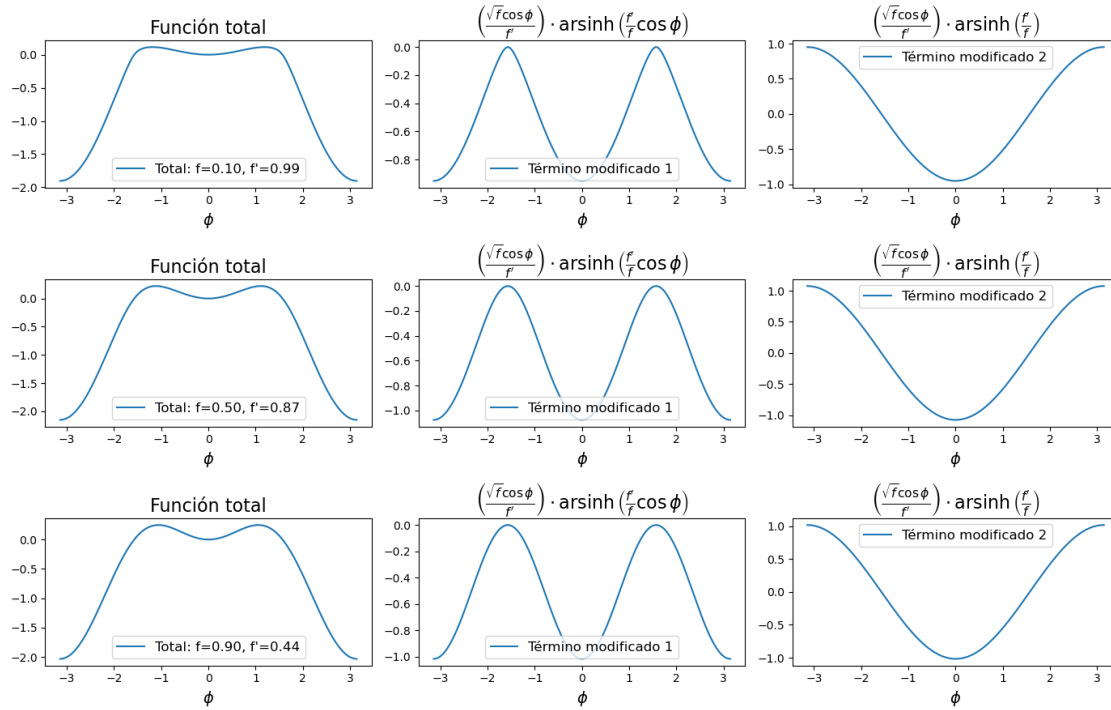


Figura 43: Análisis gráfico de la ecuación C.4.31, se visualiza en la última columna el comportamiento del factor asociado a término constante, el cual no modifica significativamente la función total.

Bibliografía

- [1] Hiroshi Yoshida and Minoru Omote. General formulation of the gravitational lens and analysis of the multiple quasar pg1115+ 080. *Progress of Theoretical Physics*, 79(5):1095–1109, 1988.
- [2] CD Impey, EE Falco, CS Kochanek, J Lehar, BA McLeod, H-W Rix, CY Peng, and CR Keeton. An infrared einstein ring in the gravitational lens pg 1115+ 080. *The Astrophysical Journal*, 509(2):551, 1998.
- [3] D Paraficz, M Rybak, JP McKean, S Vegetti, Dominique Sluse, F Courbin, HR Stacey, SH Suyu, M Dessauges-Zavadsky, CD Fassnacht, et al. Alma view of rx j1131-1231: Sub-kpc co (2-1) mapping of a molecular disk in a lensed star-forming quasar host galaxy. *Astronomy & Astrophysics*, 613:A34, 2018.
- [4] Dominique Sluse, Jean Surdej, J-F Claeskens, Damien Hutsemekers, Christophe Jean, F Courbin, T Nakos, M Billeres, and SV Khmil. A quadruply imaged quasar with an optical einstein ring candidate: 1rxs j113155. 4–123155. *Astronomy & Astrophysics*, 406(2):L43–L46, 2003.
- [5] Nicholas D Morgan, John AR Caldwell, Paul L Schechter, Alan Dressler, Eiichi Egami, and Hans-Walter Rix. Wfi j2026- 4536 and wfi j2033- 4723: Two new quadruple gravitational lenses. *The Astronomical Journal*, 127(5):2617, 2004.
- [6] Nick Kaiser and Gordon Squires. Mapping the dark matter with weak gravitational lensing. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 404, no. 2, p. 441–450., 404:441–450, 1993.
- [7] Thomas J Broadhurst, AN Taylor, and JA Peacock. Mapping cluster mass distributions via gravitational lensing of background galaxies. *arXiv preprint astro-ph/9406052*, 1994.
- [8] CR Keeton, CS Kochanek, and EE Falco. The optical properties of gravitational lens galaxies as a probe of galaxy structure and evolution. *The Astrophysical Journal*, 509(2):561, 1998.
- [9] Peter Schneider. Gravitational lensing as a probe of structure. In *14th Canary Islands Winter School of Astrophysics: Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, 6 2003.

- [10] Philipp M Merkel and Björn Malte Schäfer. Gravitational lensing of the cosmic microwave background by non-linear structures. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(2):1067–1076, 2011.
- [11] Nick Kaiser. Weak gravitational lensing of distant galaxies. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 388, April 1, 1992, p. 272–286. Research supported by NSERC and Canadian Institute for Advanced Research., 388:272–286, 1992.
- [12] Tommaso Treu. Strong lensing by galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48(1):87–125, 2010.
- [13] B Scott Gaudi. Microlensing surveys for exoplanets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 50(1):411–453, 2012.
- [14] Calen B Henderson, B Scott Gaudi, Cheongho Han, Jan Skowron, Matthew T Penny, David Nataf, and Andrew P Gould. Optimal survey strategies and predicted planet yields for the korean microlensing telescope network. *The Astrophysical Journal*, 794(1):52, 2014.
- [15] Claudio Grillo, M Lombardi, and G Bertin. Cosmological parameters from strong gravitational lensing and stellar dynamics in elliptical galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, 477(2):397–406, 2008.
- [16] Priyamvada Natarajan, LLR Williams, M Bradač, Claudio Grillo, Agniva Ghosh, Keren Sharon, and Jenny Wagner. Strong lensing by galaxy clusters. *Space Science Reviews*, 220(2):19, 2024.
- [17] Jean-François Claeskens and Jean Surdej. Gravitational lensing in quasar samples. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 10:263–311, 2002.
- [18] M. Hildebrand, A. Becker, E. Lopez, F. Gael, and S. Imara. Detailed analysis of gravitational lensing effects in high-redshift galaxies. *Max Planck Institute for Astrophysics*, 2023. Accessed: 2024-08-25.
- [19] Prasenjit Saha, Dominique Sluse, Jenny Wagner, and Liliya L. R. Williams. Essentials of strong gravitational lensing, 2024.
- [20] Darshan Kumar, Deepak Jain, Shobhit Mahajan, Amitabha Mukherjee, and Nisha Rani. Constraining cosmological and galaxy parameters using strong gravitational lensing systems. *Physical Review D*, 103(6):063511, 2021.
- [21] AJ Shajib, G Vernardos, TE Collett, V Motta, D Sluse, LLR Williams, Prasenjit Saha, S Birrer, C Spiniello, and Tommaso Treu. Strong lensing by galaxies. *arXiv preprint arXiv:2210.10790*, 2022.
- [22] Levi G Walls and Liliya LR Williams. Testing the uniqueness of gravitational lens mass models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(1):655–665, 2018.
- [23] Slava G Turyshev and Viktor T Toth. Recovering the mass distribution of an extended gravitational lens. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513(4):5355–5376, 2022.

- [24] Roger Blandford and Ramesh Narayan. Fermat's principle, caustics, and the classification of gravitational lens images. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 310, Nov. 15, 1986, p. 568-582., 310:568–582, 1986.
- [25] V Bonvin, M Tewes, F Courbin, T Kuntzer, Dominique Sluse, and G Meylan. Cosmograil: the cosmological monitoring of gravitational lenses-xv. assessing the achievability and precision of time-delay measurements. *Astronomy & Astrophysics*, 585:A88, 2016.
- [26] Tommaso Treu and Philip J Marshall. Time delay cosmography. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 24:1–41, 2016.
- [27] Kenneth C Wong, Sherry H Suyu, Geoff CF Chen, Cristian E Rusu, Martin Millon, Dominique Sluse, Vivien Bonvin, Christopher D Fassnacht, Stefan Taubenberger, Matthew W Auger, et al. H0licow–xiii. a 2.4 per cent measurement of h_0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early-and late-universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(1):1420–1439, 2020.
- [28] S Birrer, M Millon, D Sluse, AJ Shajib, F Courbin, S Erickson, LVE Koopmans, SH Suyu, and T Treu. Time-delay cosmography: Measuring the hubble constant and other cosmological parameters with strong gravitational lensing. *Space Science Reviews*, 220(5):48, 2024.
- [29] P. Schneider, G. Meylan, C. Kochanek, P. Jetzer, P. North, and J. Wambsganss. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro: Saas-Fee Advanced Course 33*. Saas-Fee Advanced Course. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [30] H.C. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [31] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [32] Sadri Hassani. *Mathematical methods: for students of physics and related fields*, volume 2. Springer, 2009.
- [33] M. Meneghetti. *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2021.
- [34] A.B. Congdon and C.R. Keeton. *Principles of Gravitational Lensing: Light Deflection as a Probe of Astrophysics and Cosmology*. Springer Praxis Books. Springer International Publishing, 2018.
- [35] Center for Astrophysics | Harvard and Smithsonian. Einstein's theory of gravitation. <https://www.cfa.harvard.edu/research/science-field/einsteins-theory-gravitation>, n.d. Accessed: 2025-05-15.
- [36] Ray d'Inverno and James Vickers. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. Oxford University Press, 2022.
- [37] MIT OpenCourseWare. Lecture 1: Introduction and the geometric viewpoint on physics. <https://ocw.mit.edu/courses/8-962-general-relativity-spring-2020/resources/>

- [lecture-1-introduction-and-the-geometric-viewpoint-on-physics/](#), 2020. Accessed: 2024-10-01.
- [38] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, 2013.
 - [39] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
 - [40] Jorge Mahecha Gomez. *Mecánica clásica avanzada*. Universidad de Antioquia, 2006.
 - [41] Malcolm Anderson, Miftachul Hadi, and UA Deta. Fermat’s principle and hamilton’s principle: Does a least action take a least time for happening? In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1467, page 012038. IOP Publishing, 2020.
 - [42] Joanna Piwnik, Joanna Gonera, and Piotr Kosinski. Fermat principle and weak deflection angle from lindstedt-poincare method. *arXiv preprint arXiv:2405.14462*, 2024.
 - [43] Israel Kovner. Fermat principle in arbitrary gravitational fields. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 351, March 1, 1990, p. 114-120., 351:114–120, 1990.
 - [44] Silvia Mollerach and Esteban Roulet. *Gravitational Lensing and Microlensing*. WORLD SCIENTIFIC, 2002.
 - [45] Valerio Bozza. Gravitational lensing by black holes. *General Relativity and Gravitation*, 42(9):2269–2300, May 2010.
 - [46] ESA Webb. Gravitational Lensing, 2025. Accessed: 2025-03-27.
 - [47] Prasenjit Saha, Dominique Sluse, Jenny Wagner, and Liliya L. R. Williams. Essentials of strong gravitational lensing, 2024.
 - [48] Adam Knudson, Kavan U Ratnatunga, and Richard E Griffiths. Investigation of gravitational lens mass models. *The Astronomical Journal*, 122(1):103, 2001.
 - [49] S. Vegetti, S. Birrer, G. Despali, C. D. Fassnacht, D. Gilman, Y. Hezaveh, L. Perreault Levasseur, J. P. McKean, D. M. Powell, C. M. O’Riordan, and G. Vernardos. Strong gravitational lensing as a probe of dark matter, 2023.
 - [50] Richard Massey, Thomas Kitching, and Johan Richard. The dark matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, 73(8):086901, July 2010.
 - [51] Nan Li, Michael D Gladders, Esteban M Rangel, Michael K Florian, Lindsey E Bleem, Katrin Heitmann, Salman Habib, and Patricia Fasel. Pics: simulations of strong gravitational lensing in galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 828(1):54, 2016.
 - [52] Jo Bovy. Gravitational lensing. In *Dynamics and Astrophysics of Galaxies*. galaxiesbook.org, 2023. Last changed February 20, 2023, rev. d9494f9; last built February 21, 2023.
 - [53] Peter Schneider, Jürgen Ehlers, Emilio E Falco, Peter Schneider, Jürgen Ehlers, and Emilio E Falco. *Gravitational lenses as astrophysical tools*. Springer, 1992.

- [54] Simon Birrer and Adam Amara. Lenstronomy: multi-purpose gravitational lens modelling software package, 2018.
- [55] Simon Birrer, Anowar Shajib, Daniel Gilman, Aymeric Galan, Jelle Aalbers, Martin Millon, Robert Morgan, Giulia Pagano, Ji Park, Luca Teodori, Nicolas Tessore, Madison Ueland, Lyne Van de Vyvere, Sebastian Wagner-Carena, Ewoud Wempe, Lilan Yang, Xuheng Ding, Thomas Schmidt, Dominique Sluse, Ming Zhang, and Adam Amara. lenstronomy ii: A gravitational lensing software ecosystem. *Journal of Open Source Software*, 6(62):3283, June 2021.
- [56] Joshua N Winn, David Rusin, and Christopher S Kochanek. The central image of a gravitationally lensed quasar. *Nature*, 427(6975):613–615, 2004.
- [57] Martina Kleinheinrich, Hans-Walter Rix, Peter Schneider, Thomas Erben, Klaus Meisenheimer, Christian Wolf, and Mischa Schirmer. Galaxy-galaxy lensing studies from combo-17. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2004(IAUS225):249–254, July 2004.
- [58] H. Hoekstra, M. Franx, K. Kuijken, R. G. Carlberg, and H. K. C. Yee. Lensing by galaxies in cnoc2 fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 340(2):609–622, April 2003.
- [59] Robert Kormann, Peter Schneider, and Matthias Bartelmann. Isothermal elliptical gravitational lens models. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, vol. 284, no. 1, p. 285-299, 284:285–299, 1994.
- [60] Jaiyul Yoo, Christopher S. Kochanek, Emilio E. Falco, and Brian A. McLeod. The lens galaxy in pg 1115+080 is an ellipse. *The Astrophysical Journal*, 626(1):51–57, June 2005.
- [61] K. Asano and T. Fukuyama. Elliptical lens model in pg1115+080, 1998.
- [62] RR Bourassa and R Kantowski. The theory of transparent gravitational lenses. *Astrophysical Journal*, vol. 195, Jan. 1, 1975, pt. 1, p. 13-21. *Research supported by the University of Oklahoma.*, 195:13–21, 1975.
- [63] Nicolas Tessore and R. Benton Metcalf. The elliptical power law profile lens. *Astronomy and amp; Astrophysics*, 580:A79, August 2015.
- [64] Kyu-Hyun Chae, Valery K Khersonsky, and David A Turnshek. Gravitational lensing by power-law mass distributions: A fast and exact series approach. *The Astrophysical Journal*, 506(1):80, 1998.
- [65] Candace Oaxaca Wright and Tereasa G. Brainerd. Gravitational lensing by nfw halos, 1999.
- [66] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, Jonathan Aumont, Carlo Baccigalupi, Mario Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, Nicola Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [67] CA Christian, D Crabtree, and P Waddell. Detection of the lensing galaxy in pg 1115+ 080. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 312, Jan. 1, 1987, p. 45-49., 312:45–49, 1987.

- [68] Institute of Astronomy, University of Cambridge. Pg 1115+080. <https://research.ast.cam.ac.uk/lensedquasars/indiv/PG1115+080.html>, n.d. Accedido el 24 de mayo de 2025.
- [69] Paul L Schechter, Charles D Bailyn, Robert Barr, Richard Barvainis, Christopher M Becker, Gary M Bernstein, John P Blakeslee, Schelte J Bus, Alan Dressler, Emilio E Falco, et al. The quadruple gravitational lens pg 1115+ 080: time delays and models. *The Astrophysical Journal*, 475(2):L85, 1997.
- [70] John L Tonry. Redshifts of the gravitational lenses b1422+ 231 and pg 1115+ 080. *The Astronomical Journal*, 115(1):1, 1998.
- [71] Tomislav Kundic, Judith G Cohen, Roger D Blandford, and Lori M Lubin. Keck spectroscopy of the gravitational lens system pg 1115+ 080: Redshifts of the lensing galaxies. *arXiv preprint astro-ph/9704109*, 1997.
- [72] E Shimanovskaya, V Oknyansky, and B Artamonov. New estimates of time delays in the gravitationally lensed system pg1115+ 080. *arXiv preprint arXiv:1502.05392*, 2015.
- [73] Vivien Bonvin, JHH Chan, M Millon, K Rojas, F Courbin, GC-F Chen, CD Fassnacht, E Paic, M Tewes, DC-Y Chao, et al. Cosmograil-xvii. time delays for the quadruply imaged quasar pg 1115+ 080. *Astronomy & Astrophysics*, 616:A183, 2018.
- [74] Jaiyul Yoo, Christopher S Kochanek, Emilio E Falco, and Brian A McLeod. The lens galaxy in pg 1115+ 080 is an ellipse. *The Astrophysical Journal*, 626(1):51, 2005.
- [75] Gravitationally Lensed Quasar Database. Rxj1131-1231, 2025. Accedido el 28 de mayo de 2025.
- [76] Nicholas D Morgan, Christopher S Kochanek, Emilio E Falco, and Xinyu Dai. Time-delay measurement for the quadruple lens rx j1131-1231. *arXiv preprint astro-ph/0605321*, 2006.
- [77] M Tewes, F Courbin, and G Meylan. Cosmograil: the cosmological monitoring of gravitational lenses-xi. techniques for time delay measurement in presence of microlensing. *Astronomy & Astrophysics*, 553:A120, 2013.
- [78] Gravitationally Lensed Quasar Database. WFI2033-4723. <https://research.ast.cam.ac.uk/lensedquasars/indiv/WFI2033-4723.html>, 2025. Accedido el 28 de mayo de 2025.
- [79] Virginie Chantry, Dominique Sluse, and Pierre Magain. Cosmograil: the cosmological monitoring of gravitational lenses-viii. deconvolution of high resolution near-ir images and simple mass models for 7 gravitationally lensed quasars. *Astronomy & Astrophysics*, 522:A95, 2010.
- [80] M Millon, F Courbin, V Bonvin, E Paic, G Meylan, M Tewes, Dominique Sluse, Pierre Magain, JHH Chan, A Galan, et al. Cosmograil-xix. time delays in 18 strongly lensed quasars from 15 years of optical monitoring. *Astronomy & Astrophysics*, 640:A105, 2020.
- [81] Yasusada Nambu. Wave optics and image formation in gravitational lensing, 2012.

- [82] Job Feldbrugge and Neil Turok. Gravitational lensing of binary systems in wave optics. *arXiv preprint arXiv:2008.01154*, 2020.
- [83] Slava G Turyshev and Viktor T Toth. Diffraction of electromagnetic waves by an extended gravitational lens. *Physical Review D*, 103(6):064076, 2021.
- [84] Scott Hughes. 14. linearized gravity i: Principles and static limit, 2020. MIT OpenCourseWare, Lecture 14, 8.962 General Relativity, Spring 2020.
- [85] David W Hogg. Distance measures in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/9905116*, 1999.