

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



LAGRANGIANO SUPERSIMÉTRICO DE TEORÍAS DE YANG-MILLS

TRABAJO DE GRADO

Para optar al título profesional de:

Físico

Farid Riascos Meneses

San Juan de Pasto, Colombia

agosto 2025

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

LAGRANGIANO SUPERSIMÉTRICO DE TEORÍAS DE YANG-MILLS

Farid Riascos Meneses

TRABAJO DE GRADO

Director:

Ph.D EDUARDO ROJAS PEÑA

San Juan de Pasto, Colombia
agosto 2025

©2025 - Farid Riascos Meneses

“Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo de grado son responsabilidad del autor”

Artículo 1° del Acuerdo No.324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño. Todos los derechos reservados.

Nota de aceptación

Eduardo Rojas Peña

Director

Yithsbey Giraldo Usuga

Jurado

German Enrique Ramos Zambrano

Jurado

San Juan de Pasto, agosto de 2025

Resumen

Este trabajo de grado desarrolla de manera sistemática la construcción del lagrangiano supersimétrico para teorías gauge con supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Partiendo de los fundamentos físicos y algebraicos de la teoría cuántica de campos y las simetrías del espacio-tiempo, se introduce el formalismo del superespacio y los supercampos como herramientas para formular teorías supersimétricas. Como aplicación, se analiza la cancelación de divergencias cuadráticas en correcciones radiativas a la masa del Higgs, evidenciando el papel de la supersimetría en la estabilización natural de la escala electro-debil. El enfoque adoptado busca no solo presentar los resultados finales, sino también mostrar con rigor la deducción explícita de cada término, aportando claridad conceptual al formalismo supersimétrico.

Palabras clave: *supersimetría, superespacio, supercampos, Yang–Mills, lagrangiano, divergencias cuadráticas.*

Abstract

This undergraduate thesis systematically develops the construction of the supersymmetric Lagrangian for gauge theories with $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry. Starting from the physical and algebraic foundations of quantum field theory and spacetime symmetries, it introduces the formalism of superspace and superfields as tools to formulate supersymmetric theories. As an application, the cancellation of quadratic divergences in radiative corrections to the Higgs mass is analyzed, highlighting the role of supersymmetry in naturally stabilizing the electroweak scale. The approach taken aims not only to present the final results but also to rigorously show the explicit derivation of each term, thereby providing conceptual clarity to the supersymmetric formalism.

Keywords: *supersymmetry, superspace, superfields, Yang–Mills, Lagrangian, quadratic divergences.*

Contenido

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Planteamiento del Problema | 3 |
| 3. Objetivos | 4 |
| 4. Marco Referencial | 5 |
| 4.1. Formulación Lagrangiana en Teoría de Campos | 5 |
| 4.1.1. Simetrías | 6 |
| 4.1.2. Campo Escalar | 8 |
| 4.1.3. Campo Fermiónico | 8 |
| 4.1.4. Campo de Yang-Mills | 12 |
| 4.2. Modelo Electro débil | 14 |
| 4.2.1. Interacción de Yukawa | 16 |
| 4.2.2. Ruptura Espontánea de Simetría | 17 |
| 4.3. Reglas de Feynman | 18 |
| 4.3.1. Reglas de Feynman para la QED | 20 |
| 5. Superespacio y Transformaciones Supersimétricas | 24 |
| 5.1. Teoremas de No-Go | 24 |
| 5.2. Álgebras Graduadas | 25 |
| 5.3. Extensión Supersimétrica del Álgebra de Poincaré | 28 |
| 5.4. Variables de Grassmann | 35 |
| 5.4.1. Derivadas de Grassmann | 36 |
| 5.4.2. Integración de Grassmann | 38 |
| 5.5. Superespacio | 41 |
| 5.6. Transformaciones Supersimétricas | 42 |
| 5.6.1. Transformaciones Finitas | 42 |
| 5.6.2. Transformaciones Infinitesimales | 46 |
| 5.7. Derivada Covariante | 49 |
| 5.7.1. Técnica de Proyección | 52 |

| | |
|---|------------|
| 6. Supercampos y Supermultipletes | 54 |
| 6.1. Transformación de Campos Componentes | 54 |
| 6.2. Supercampos Quirales | 60 |
| 6.3. Supercampo Vectorial | 66 |
| 6.4. Intensidad de Campo Supersimétrica | 70 |
| 7. Lagrangianos Supersimétricos | 75 |
| 7.1. Construcción del Lagrangiano a Partir de Supercampos Quirales | 75 |
| 7.2. Construcción del Lagrangiano a Partir de Supercampos Vectoriales | 80 |
| 7.3. Teoría de Yang-Mills Supersimétrica con $N = 1$ | 82 |
| 8. Cancelación de Divergencias Cuadráticas Ultravioleta | 95 |
| 8.1. Correcciones Cuadráticas a la Masa del Higgs a un Loop | 99 |
| 8.1.1. Contribución Fermiónica: Loop del Quark Top | 99 |
| 8.1.2. Contribución Bosónica: Loop del Escalar Supersimétrico | 103 |
| 9. Conclusiones | 105 |
| 9.1. Alcance y Limitaciones | 105 |
| A. Grupos de Lie | 107 |
| A.1. Definiciones iniciales | 107 |
| A.2. Grupo de Lorentz | 112 |
| A.3. Grupo de Poincaré | 115 |
| A.4. $SL(2,C)$ e índices espinoriales | 117 |
| A.4.1. Espinores de Weyl Izquierdos: $(1/2,0)$ | 118 |
| A.4.2. Espinores de Weyl Derechos: $(0,1/2)$ | 120 |
| A.4.3. Relación entre $SL(2,C)$ y el grupo de Lorentz | 121 |
| A.4.4. Cálculos Con Espinores | 125 |
| A.5. Espinores de Dirac | 128 |
| A.6. Conjugación de la carga | 130 |
| A.7. Espinores de Majorana | 131 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 4.1. Vértice fundamental de la QED. | 21 |
| 4.2. Asignación de momentos externos en un diagrama de Feynman | 21 |
| 4.3. Factores que contribuyen por cada vértice interno en un diagrama de Feynman para la QED. | 22 |
| 4.4. Diagrama de un lazo fermiónico (1-loop), cuya contribución requiere tomar la traza de la expresión asociada y multiplicar por -1 | 23 |
| 8.1. Contribución a la masa del Higgs proveniente de un loop fermiónico con el quark top. El factor $-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ proviene del término de Yukawa $-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}h\bar{t}t$ | 99 |
| 8.2. Corrección a la masa del Higgs proveniente de un loop escalar correspondiente a un sfermión asociado. El factor debido al vértice $-i\lambda^2$ surge del potencial escalar $-\frac{\lambda^2}{2}h^2 \phi ^2$ | 99 |

Glosario

Acción:

Funcional que asocia a una configuración de campos una cantidad escalar obtenida mediante la integración del lagrangiano sobre el espacio-tiempo. Su principio variacional determina las ecuaciones de movimiento del sistema.

Álgebra de Grassmann:

Álgebra generada por variables anticommutativas que satisfacen $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$. Es fundamental en la formulación de la supersimetría, ya que permite representar grados de libertad fermiónicos en supercampos.

Campo de gauge:

Campo vectorial introducido para garantizar la invariancia local de una teoría bajo un grupo de simetría. Se asocia a la derivada covariante y a las partículas mediadoras de las interacciones fundamentales.

Campo escalar:

Campo que transforma como escalar bajo el grupo de Lorentz. Describe partículas de espín cero como el bosón de Higgs.

Campo fermiónico:

Campo que transforma según una representación espinorial del grupo de Lorentz. Describe partículas de espín semi-entero como electrones y quarks.

Campo vectorial:

Campo con un índice de Lorentz que transforma como un vector. Se utiliza para describir partículas de espín 1, como el fotón o los gluones.

Cancelación de divergencias cuadráticas:

Mecanismo por el cual contribuciones divergentes de diferente signo se anulan, estabilizando la masa de campos escalares. En SUSY, esto ocurre entre loops bosónicos y fermiónicos.

Derivada covariante:

Operador que reemplaza la derivada ordinaria en teorías gauge, garantizando la transformación covariante de los campos bajo simetrías locales.

Divergencia ultravioleta:

Comportamiento divergente de integrales en teorías cuánticas cuando los momentos internos se hacen arbitrariamente grandes. Debe regularizarse y renormalizarse para obtener predicciones físicas.

Espinor:

Objeto matemático que transforma bajo una representación de recubrimiento del grupo de Lorentz, como $SL(2, \mathbb{C})$. Se usa para describir partículas de espín 1/2.

Grupo de Lie:

Grupo continuo y diferenciable cuyas opera-

ciones son suaves y parametrizables. Describe simetrías continuas y posee un álgebra asociada generada por operadores infinitesimales.

Grupo de Lorentz:

Grupo de simetrías del espacio-tiempo plano que preserva la métrica de Minkowski. Actúa sobre campos relativistas.

Grupo de Poincaré:

Grupo que unifica las transformaciones de Lorentz con las traslaciones en el espacio-tiempo. Es la simetría fundamental de la relatividad especial.

Invariancia gauge:

Propiedad de una teoría de permanecer invariante bajo transformaciones locales de un grupo de simetría. Es esencial en la formulación de teorías de interacciones fundamentales.

Lagrangiano:

Función que depende de los campos y sus derivadas, y cuya forma determina la dinámica de una teoría mediante el principio de mínima acción.

Modelo Estándar:

Teoría cuántica de campos que describe las interacciones electromagnética, débil y fuerte. Está basada en simetrías gauge y campos cuánticos.

Representación:

Asignación de operadores lineales a los elementos de un grupo o álgebra, de forma que se preserven las estructuras algebraicas. Permite estudiar cómo actúan las simetrías sobre los campos.

Superálgebra:

Extensión de un álgebra de Lie que incorpora tanto conmutadores como anticonmutadores, permitiendo la inclusión de generadores fermiónicos como en SUSY.

Supercampo:

Función definida en el superespacio, que depende de coordenadas ordinarias y de variables de Grassmann. Contiene componentes bosónicos y fermiónicos y permite formular teorías supersimétricas de forma compacta.

Superespacio:

Extensión del espacio-tiempo que incluye coordenadas adicionales anticommutativas, usadas para construir de manera sistemática teorías supersimétricas.

Supersimetría:

Simetría que relaciona bosones y fermiones mediante generadores espinoriales que transforman estados de distinto espín. Extiende el álgebra de Poincaré.

Teoría de Yang–Mills:

Teoría gauge basada en un grupo de simetría no abeliano, donde los campos de gauge interactúan consigo mismos. Es la base de la cromodinámica cuántica.

Término de Yukawa:

Interacción entre campos escalares y fermiónicos que genera términos de masa tras la ruptura espontánea de simetría. Es esencial en la construcción de modelos realistas.

Capítulo 1

Introducción

El Modelo Estándar (ME) de la física de partículas constituye, hasta la fecha, la teoría más precisa y contrastada experimentalmente para describir las interacciones fundamentales, con excepción de la gravedad [1]. Formulada como una teoría cuántica de campos (TCC) con simetría gauge, ha permitido predecir con notable éxito fenómenos como la existencia del bosón de Higgs. Sin embargo, a pesar de su solidez empírica, el modelo enfrenta limitaciones teóricas relevantes, entre las cuales destacan: la falta de una formulación cuántica consistente de la gravedad, la no unificación exacta de las constantes de acoplamiento y la presencia de divergencias cuadráticas que afectan la estabilidad de la masa del Higgs [2].

En este contexto, la *supersimetría* (SUSY) surge como una extensión teórica del ME que introduce una simetría entre bosones y fermiones. Esta simetría está generada por operadores espinoriales Q , capaces de transformar estados bosónicos en fermiónicos y viceversa [1, 2]. Como estos operadores modifican el espín, SUSY implica una ampliación del grupo de simetría del espacio-tiempo y, en consecuencia, del álgebra de Poincaré [3]. El teorema de Haag, Łopuszański y Sohnius demuestra que, bajo supuestos físicos razonables, la única forma no trivial de unificar simetrías internas y del espacio-tiempo en una teoría cuántica de campos relativista es mediante generadores fermiónicos, es decir, a través de una superálgebra [1, 4]. Más allá de su elegancia formal, SUSY ofrece soluciones a varios problemas del ME, en particular, la cancelación de divergencias cuadráticas en las correcciones radiativas a la masa del Higgs, gracias a una compensación entre contribuciones bosónicas y fermiónicas en diagramas de Feynman [2].

Este trabajo se enfoca en el estudio riguroso de la estructura lagrangiana de teorías gauge supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$, el caso más sencillo en el cual existe un único generador fermiónico de la supersimetría [3]. Para esto se emplea el formalismo del superespacio y los supercampos, herramientas que se desarrollan detalladamente en los capítulos 5 y 6. La organización del trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 4 se repasan los elementos esenciales de la teoría cuántica de campos, con énfasis en el formalismo lagrangiano y las simetrías gauge.

En el Capítulo 5 se introduce la supersimetría como extensión del álgebra de Poincaré, y se

construyen las herramientas del superespacio y las transformaciones supersimétricas.

El Capítulo 6 presenta el formalismo de supercampos quirales y vectoriales, junto con sus respectivas supermultipletes y propiedades de transformación.

En el Capítulo 7 se construyen los lagrangianos supersimétricos a partir de supercampos, culminando con la teoría de Yang–Mills supersimétrica para $\mathcal{N} = 1$.

Finalmente, el Capítulo 8 analiza una aplicación relevante: la cancelación de divergencias cuadráticas en la masa del Higgs a un bucle (1-loop).

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Aunque la supersimetría con $\mathcal{N} = 1$ está bien documentada y permite resolver problemas teóricos del Modelo Estándar, como el de jerarquía, la deducción explícita del lagrangiano supersimétrico en teorías gauge suele omitirse en la literatura debido a la complejidad de los cálculos intermedios, lo que genera un vacío en la comprensión rigurosa del formalismo.

Problema de investigación: ¿Cómo deducir de forma explícita y sistemática el lagrangiano supersimétrico para una teoría de Yang–Mills, partiendo de los fundamentos de la teoría cuántica de campos y la teoría de grupos?

Capítulo 3

Objetivos

Objetivo General

Deducir formalmente el lagrangiano supersimétrico de una teoría de Yang-Mills a partir de los principios fundamentales de la teoría cuántica de campos y la teoría de grupos, para analizar su estructura y su papel en la cancelación de divergencias cuadráticas ultravioletas.

Objetivos Específicos

- Estudiar el formalismo de variables de Grassmann y su aplicación en la construcción del superespacio y supermultipletes.
- Construir explícitamente los términos cinéticos y de interacción del lagrangiano supersimétrico en una teoría de Yang-Mills no abeliana.
- Ilustrar, mediante un ejemplo a un bucle (1-loop), cómo la supersimetría conduce a la cancelación de las divergencias cuadráticas en las correcciones radiativas a la masa del Higgs.

Capítulo 4

Marco Referencial

Este capítulo tiene como objetivo sentar un contexto claro sobre el cual se desarrollarán las ideas principales del capítulo final. Se repasa brevemente la formulación lagrangiana en teoría de campos para justificar las ecuaciones de campo clásicas que satisfacen las diversas partículas del ME. El enfoque será a nivel de lagrangianos al revisar propiedades de simetría.

4.1. Formulación Lagrangiana en Teoría de Campos

La teoría clásica de campos puede considerarse como una generalización relativista de la mecánica lagrangiana para sistemas con un número continuo (infinito) de grados de libertad, es decir, aquellos en los que las variables dinámicas dependen del espacio-tiempo. Estos sistemas son descritos por configuraciones de *campos*, los cuales son mapeos del espacio-tiempo en espacios vectoriales portadores de alguna representación del grupo de Lorentz [5, 6]. En lo que sigue se denota, respectivamente, el campo escalar, vectorial y espinorial por $\phi(x)$, donde $x = x^\mu$. El significado de estos nombres será claro más adelante.

La cantidad fundamental en teoría de campos es la *acción* \mathcal{A} . En una teoría relativista se deben tratar de manera equivalente los índices espaciales y temporales [7]. Por tanto, la acción se define formalmente como

$$\mathcal{A} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_l, \partial_\mu \phi_l) = \int_{t_1}^{t_2} dt L, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{L} es la *densidad lagrangiana* del sistema, la cual para los fines de este trabajo, será una función de uno o más campos ϕ_l y sus derivadas $\partial_\mu \phi_l$. Aquí l es un índice que bien podría representar componentes independientes de un campo o diferentes campos *independientes* [8]. El principio de mínima acción establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración a otra entre dos instantes t_1 y t_2 , lo hace a lo largo de una “trayectoria” en el espacio de

configuración para la cual la acción \mathcal{A} es un extremo, es decir [9]:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{A} &= \delta \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} \delta\phi_l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \delta\partial_\mu\phi_l \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \right] \delta\phi_l, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó integración por partes junto con el hecho de que las variaciones *virtuales* o *totales* de los campos, $\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$, están sujetas a las condiciones de frontera $\delta\phi(t_1, \mathbf{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \mathbf{x})$ y que conmutan con las derivadas [10]:

$$\delta\partial_\mu\phi_l \equiv \partial_\mu\phi'_l - \partial_\mu\phi_l = \partial_\mu(\delta\phi_l).$$

Por tanto, dado que la igualdad debe mantenerse para variaciones arbitrarias de los campos independientes ϕ_l se debe concluir las *ecuaciones Euler-Lagrange* o *ecuaciones de campo*:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} = 0. \quad (4.2)$$

4.1.1. Simetrías

En unidades naturales ($c = 1 = \hbar$) la acción \mathcal{A} es un número real adimensional y escalar de Lorentz. Se dice que es una *funcional* porque únicamente depende de la forma funcional de los campos ϕ_l , razón por la cual definió la *variación total* de los campos:

$$\bar{\delta}\phi_l \equiv \phi'_l(x) - \phi_l(x), \quad (4.3)$$

en la extremalización de la acción [5]. Observe que esta variación se realiza en un punto fijo x , lo que representa un cambio en la forma funcional de los campos y se enfatiza con la notación barrada $\bar{\delta}$, la cual no fue utilizada en la sección anterior donde se obtuvieron las ecuaciones de campo. A continuación se consideran transformaciones infinitesimales más generales (locales) en los argumentos del lagrangiano [5, 6]:

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_l(x) &\longrightarrow \phi'_l(x') = \phi_l(x) + \delta\phi_l(x), \\ \partial_\mu\phi_l(x) &\longrightarrow \partial'_\mu\phi'_l(x') = \partial_\mu\phi_l(x) + \partial_\mu\delta\phi_l(x) - \partial_\nu\phi_l\partial_\mu(\delta x^\nu), \end{aligned} \quad (4.4)$$

y se estudia la correspondiente variación en la acción

$$\delta\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'[\phi'] - \mathcal{A}[\phi] = \int d^4x' \mathcal{L}' - \int d^4x \mathcal{L}.$$

Las variaciones *locales* de los campos $\delta\phi_l(x)$ en la ecuación (4.4) están relacionadas con las

variaciones totales $\bar{\delta}\phi(x)$ de la ecuación (4.3) mediante la ecuación [9]

$$\delta\phi_l = \bar{\delta}\phi_l + \delta x^\nu \partial_\nu \phi_l(x), \quad (4.5)$$

además, los operadores ∂_μ y δ satisfacen la relación de conmutación [5]:

$$[\partial_\mu, \delta]\phi_l = (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi_l. \quad (4.6)$$

Por otra parte, el elemento de volumen d^4x' está relacionado con d^4x mediante el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación. Puede verificarse directamente que a primer orden la relación es [5, 10]:

$$d^4x' = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x, \quad (4.7)$$

de manera que esto, junto con

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x),$$

permite reescribir la variación de la acción como

$$\delta\mathcal{A} = \int d^4x \{ \delta\mathcal{L} + (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} \}. \quad (4.8)$$

Así, en la aproximación de primer orden $\delta\mathcal{L} = \bar{\delta}\mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, la ecuación (4.8) se reescribe como:

$$\delta\mathcal{A} = \int d^4x \{ \bar{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \}. \quad (4.9)$$

Dado que $\delta x = 0$ para variaciones totales, de la ecuación (4.6) se observa que $[\partial_\mu, \bar{\delta}]\phi = 0$, por lo que se puede calcular [8]:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} \bar{\delta}\phi_l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \bar{\delta}\partial_\mu\phi_l \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \right) \bar{\delta}\phi_l + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \bar{\delta}\phi_l \right), \end{aligned}$$

para obtener finalmente que

$$\delta\mathcal{A} = \int d^4x \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \right) \bar{\delta}\phi_l + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \bar{\delta}\phi_l + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) \right\}. \quad (4.10)$$

Definiendo la *corriente de Noether* f^μ como

$$f^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \bar{\delta}\phi_l + \delta x^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \delta\phi_l - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \partial_\nu \phi_l(x) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu, \quad (4.11)$$

donde se ha utilizado la ecuación (4.5); se dice que la transformación (4.4) es una simetría del

sistema si la acción es invariante, es decir, si se garantiza que [5]:

$$\delta\mathcal{A} = \int d^4x \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_l} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_l)} \right) \bar{\delta}\phi_l + \partial_\mu f^\mu \right\} = 0. \quad (4.12)$$

4.1.2. Campo Escalar

El ejemplo más sencillo de la formulación lagrangiana en teoría de campos es el de un campo escalar complejo relativista, denotado por $\phi(x)$. Este campo se define como una función del espacio-tiempo que, bajo transformaciones de Lorentz, permanece invariante en su forma funcional. Es decir, $\phi(x)$ se transforma como un escalar de Lorentz, lo que equivale a decir que pertenece a la representación trivial del grupo $SO(1, 3)$ ¹.

En unidades naturales ($\hbar = c = 1$), la acción debe ser adimensional, lo cual implica que la densidad lagrangiana debe tener dimensiones de energía (o masa) a la cuarta potencia. Bajo esta restricción, la forma más simple de lagrangiano que describe un campo escalar complejo libre de masa m y espín cero es [10]:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi. \quad (4.13)$$

La dinámica del sistema se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange aplicadas a los campos ϕ y ϕ^\dagger , resultando en:

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= 0, \\ (\square + m^2)\phi^\dagger &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\square = \partial^\mu\partial_\mu$ es el operador d'Alembertiano. Estas expresiones corresponden a la ecuación de *Klein-Gordon*, que puede entenderse como la generalización relativista de la ecuación de onda para campos escalares sin espín [7]. Esta ecuación surge naturalmente al promover la relación de energía relativista,

$$p^\mu p_\mu = m^2, \quad (4.15)$$

a una ecuación diferencial sobre campos clásicos mediante la sustitución $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$. Por tanto, describe la propagación de un campo libre (sin interacciones) y constituye la ecuación fundamental para partículas de espín cero en teoría cuántica de campos [11].

4.1.3. Campo Fermiónico

Una ecuación de campo se considera *covariante* si, bajo una transformación de Lorentz, el campo transformado sigue satisfaciendo la misma forma funcional de la ecuación evaluada en el nuevo sistema de coordenadas. Esta propiedad se garantiza automáticamente si la ecuación proviene de un lagrangiano escalar bajo transformaciones de Lorentz [9]. En el caso escalar, esto

¹Los campos en TCC se clasifican según las representaciones de grupos de simetría. En particular, la relatividad especial impone que las leyes físicas sean invariantes bajo el grupo de Lorentz.

fue sencillo porque el campo transforma según la representación trivial del grupo de Lorentz. Ahora se consideran campos de espín $\frac{1}{2}$, los cuales, como se discute en el apéndice A, corresponden a representaciones espinoriales del grupo de Lorentz. El campo de Dirac $\Psi(x)$ se construye como la suma directa de las representaciones irreducibles $(1/2, 0)$ y $(0, 1/2)$ (véase los apéndices A.4.3 y A.5). Conocer esta estructura desde el inicio proporciona las reglas de transformación que debe obedecer el campo, lo que permite desarrollar ecuaciones invariantes bajo Lorentz que involucren dichas representaciones [12].

Por otro lado, todo campo relativista debe satisfacer, en algún sentido, la ecuación de Klein-Gordon [7]. Sin embargo, esta ecuación presenta un inconveniente fundamental: al ser de *segundo orden* en derivadas, admite soluciones con energías negativas, las cuales no tienen una interpretación directa dentro del marco clásico de la teoría de campos [11]. Esto motiva buscar una ecuación de *primer orden* en derivadas que describa campos de espín $\frac{1}{2}$, siempre que dicha ecuación implique la ecuación de Klein-Gordon como una condición de consistencia. Por tanto, se busca una ecuación de la forma

$$D_{ab}\Psi_b = 0, \quad a, b = 1, 2, 3, 4. \quad (4.16)$$

donde D_{ab} es un operador lineal de primer orden en derivadas con índices de espinores de Dirac a, b . Por experiencia, se espera que una ecuación de campo libre contenga un término cinético y uno de masa. El término $\partial_\mu\psi$ posee un índice libre μ , y debe ser contraído con un objeto que también transforme como un vector bajo el grupo de Lorentz, y que además actúe sobre los índices espinoriales del campo. Estas consideraciones hacen natural proponer la siguiente ecuación para un campo de espín $\frac{1}{2}$ con masa m (ecuación de Dirac):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{ab}\Psi_b(x) = 0. \quad (4.17)$$

La consistencia de esta ecuación (4.17) requiere que, al aplicar el operador diferencial dos veces sobre $\Psi(x)$, se recupere la ecuación de Klein-Gordon para cada componente del campo. Se tiene:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{ca}(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)_{ab}\Psi_b &= (-\gamma_{ca}^\mu\gamma_{ab}^\nu\partial_\mu\partial_\nu - 2im\gamma_{cb}^\mu\partial_\mu + \delta_{cb}m^2)\Psi_b \\ &\stackrel{4.17}{=} -[(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu + \delta_{cb}m^2]\Psi_b, \end{aligned}$$

como $\partial_\mu\partial_\nu$ es simétrico en μ y ν , sólo contribuye la parte simétrica del producto $\gamma^\mu\gamma^\nu$; entonces

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{ca}(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)_{ab}\Psi_b = -\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)_{cb}\Psi_b.$$

Por tanto, si la ecuación (4.17) ha de ser el punto de partida para describir partículas de espín $\frac{1}{2}$,

se debe exigir que las matrices γ^μ satisfagan la siguiente relación [11]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (4.18)$$

lo cual define el *álgebra de Clifford* asociada al espacio-tiempo plano. Las matrices γ^μ constituyen una representación de esta álgebra. Se puede sacar provecho de este resultado ya que del apéndice A.4.3 se pueden deducir las reglas de transformación de estos objetos, lo que es importante al investigar la covarianza de la ecuación de Dirac, que constituye el segundo requisito que la ecuación debe satisfacer.

En el apéndice A.5 se muestra que, en la representación de Weyl, el espinor de Dirac Ψ transforma bajo el grupo de Lorentz como

$$\Psi'_a = S_{ab} \Psi_b = \begin{pmatrix} M_A^B & 0 \\ 0 & (M^{-1\dagger})_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_B \\ \bar{\psi}^{\dot{B}} \end{pmatrix}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4. \quad (4.19)$$

donde la matriz M es la autorrepresentación del grupo $SL(2, C)$ y $M^{-1\dagger}$ es la matriz transpuesta inversa de la representación compleja conjugada M^* del mismo grupo; además, los índices $A, B, \dot{A}, \dot{B} = 1, 2$ son los *índices espinoriales* correspondientes a cada representación. La matriz S no es unitaria, por lo tanto $\Psi^\dagger \Psi$ no es invariante. En efecto, ninguna de las representaciones finitas del grupo de Lorentz que se utilizan en teorías realistas es unitaria; sin embargo, esto no representa un problema, ya que los campos clásicos no son funciones de onda [7, 12].

Por otra parte, en el apéndice A.7 se introduce el espinor adjunto de Dirac, definido como $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, el cual, en la representación quirral, toma la forma

$$\bar{\Psi} = \left(\psi^A \quad \bar{\phi}_{\dot{A}} \right). \quad (4.20)$$

Este objeto debe transformarse bajo el grupo de Lorentz como

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}'_a &= \left(\psi'^A \quad \bar{\phi}'_{\dot{A}} \right) = \left((M^{-1T})^A_B \psi^B \quad (M^*)_{\dot{A}}^{\dot{B}} \bar{\phi}_{\dot{B}} \right) \\ &= \left(\psi^B \quad \bar{\phi}_{\dot{B}} \right) \begin{pmatrix} (M^{-1})_B^A & 0 \\ 0 & (M^\dagger)_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi}^b S_{ba}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

La última igualdad se verifica observando que

$$S_{ab} S_{bc}^{-1} = \begin{pmatrix} M_A^B & 0 \\ 0 & (M^{-1\dagger})_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M^{-1})_B^C & 0 \\ 0 & (M^\dagger)_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_A^C & 0 \\ 0 & \delta_{\dot{C}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} = I, \quad (4.22)$$

donde $I \in \text{Aut}[F \oplus \dot{F}^*]$. Por tanto, el objeto $\bar{\Psi} \Psi$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz, y puede utilizarse para construir cantidades escalares, pseudoescalares, vectores de Lorentz,

pseudovectores y otros tensores [12, 13].

Por último, se recuerda que en la representación de Weyl las matrices γ^μ se escriben como (véase la sección A.5):

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

de manera que se puede calcular:

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^\mu S &= \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & M^{-1}\sigma^\mu M^{-1\dagger} \\ M^\dagger\bar{\sigma}^\mu M & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por otro lado, de la ecuación (A.97) se tiene que

$$M\sigma_\nu M^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \quad \Longrightarrow \quad M^{-1}\sigma^\mu M^{-1\dagger} = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu. \quad (4.25)$$

La última expresión permite determinar la transformación de $\bar{\sigma}^\mu$. A nivel indicial se expresa como:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu_{A\dot{A}} = (M^{-1})_A{}^B \sigma^\mu_{B\dot{B}} (M^{-1\dagger})^{\dot{B}}{}_{\dot{A}},$$

de modo que multiplicando ambos lados por $\epsilon^{CA}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}$ y usando las identidades (A.55), (A.67) y (A.82), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^{\nu\dot{C}C} &= \epsilon^{CA}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu_{A\dot{A}} \\ &= \epsilon^{CA}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}} (M^{-1})_A{}^B \epsilon_{BD}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{D}D} (M^{-1\dagger})^{\dot{B}}{}_{\dot{A}} \\ &= (M^*)^{\dot{C}}{}_{\dot{D}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{D}D} M_D{}^C \\ &= (M^\dagger \bar{\sigma}^\mu M)^{\dot{C}C}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M^\dagger \bar{\sigma}^\mu M = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu. \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.25) y (4.26) en la ecuación (4.24), se obtiene la famosa propiedad que a veces se utiliza como definición de la matriz S [11, 13]:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (4.27)$$

Esta relación expresa que las matrices γ^μ transforman como vectores bajo el grupo de Lorentz. Así, es posible demostrar la invariancia de la ecuación de Dirac. En un sistema primado, la

ecuación toma la forma

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\Psi' = (i\gamma^\mu S\Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - Sm)\Psi = 0.$$

Multiplicando por S^{-1} a la izquierda y usando la ecuación (4.27), se tiene:

$$0 = (iS^{-1}\gamma^\mu S\Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m)\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \quad (4.28)$$

Finalmente, se puede construir el lagrangiano escalar de Lorentz:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (4.29)$$

que produce la ecuación de Dirac (4.17) y se dice que describe el campo libre de Dirac.

4.1.4. Campo de Yang-Mills

Ahora se considera un tipo de interacciones de los campos libres de materia: las interacciones con campos gauge aún por definir. Sea un grupo de simetría interna con generadores hermíticos que satisfacen el álgebra de Lie (véase la definición A.6 y la discusión siguiente):²

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (4.30)$$

En una representación unitaria, un elemento del grupo se escribe como (véase el apéndice A.1)

$$U_{ij}(x) = (e^{-i\theta^a(x)T^a})_{ij}, \quad (4.31)$$

y actúa sobre un multiplete de campos (de materia) $\psi_i(x)$ mediante la prescripción

$$\psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x). \quad (4.32)$$

Dado que los parámetros $\theta^a(x)$ que determinan cada elemento del grupo dependen de las coordenadas x^μ , la derivada parcial no transforma de forma covariante, lo cual es un inconveniente si se quiere construir lagrangianos invariantes bajo este tipo de transformaciones (gauge):

$$\partial_\mu \psi' = (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu \psi. \quad (4.33)$$

Para restaurar la covarianza, se introduce una derivada covariante D_μ que transforma como un operador bajo el grupo gauge [14]:

$$D'_\mu = UD_\mu U^\dagger, \quad (4.34)$$

²Por simetría interna se entiende un grupo de simetría independiente del grupo de Lorentz.

de modo que

$$(D_\mu \psi)' = D'_\mu \psi' = U(D_\mu \psi). \quad (4.35)$$

La forma explícita de este operador con índices internos se construye introduciendo un campo vectorial en la representación adjunta del álgebra, A_μ , llamado campo de gauge [5]:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (4.36)$$

de manera que la derivada covariante D_μ se define y transforma como [10]:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad \longrightarrow \quad D'_\mu = \partial_\mu - igA'_\mu, \quad (4.37)$$

donde $A'_\mu(x)$ es la transformación del campo gauge (bajo el grupo de simetría interna), que debe garantizar la covarianza de $D_\mu \psi$. Dicha propiedad de transformación del campo gauge puede obtenerse imponiendo la covarianza; por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu - igA'_\mu)U\psi \\ &= (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu \psi - igA'_\mu U\psi, \end{aligned} \quad (4.38)$$

mientras que por otro lado,

$$D'_\mu \psi' = UD_\mu \psi = U\partial_\mu \psi - igUA_\mu \psi. \quad (4.39)$$

Comparando las ecuaciones (4.38) y (4.39), se obtiene la transformación del campo gauge:

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger. \quad (4.40)$$

El resultado fundamental de esta discusión es que exigir la invariancia de una teoría bajo un grupo de simetría local no abeliano o grupo gauge, fuerza la introducción de un campo vectorial (espín-1) A_μ que transforme adecuadamente para mantener la invariancia del lagrangiano [7, 8].

Con esta derivada covariante se define el tensor de campo [5]:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu], \quad (4.41)$$

el cual resulta en

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c T^a \\ &\equiv F_{\mu\nu}^a T^a, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde se ha definido

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.43)$$

No es difícil calcular $F'_{\mu\nu}$ utilizando la ecuación (4.34) para mostrar que este tensor transforma de forma covariante [14]:

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger, \quad (4.44)$$

lo cual permite construir una cantidad escalar invariante bajo transformaciones locales:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{a\nu} - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A^{d\mu}A^{e\nu}A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (4.45)$$

Este término describe la dinámica de los campos gauge A_μ^a , los cuales son campos vectoriales *sin masa*, ya que no existe ningún término cuadrático del tipo $m^2 A_\mu^a A^{a\mu}$, el cual violaría la invariancia gauge local [6]. Finalmente, al acoplar un campo fermiónico con el gauge, se obtiene el lagrangiano general [10]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (4.46)$$

el cual describe un campo de Dirac con interacciones no abelianas dentro de una teoría de Yang-Mills.

Cabe señalar que el término de masa fermiónico $m\bar{\psi}\psi$ se ha incluido asumiendo que ψ transforma bajo una única representación del grupo de simetría, de modo que el producto $\bar{\psi}\psi$ es invariante de gauge. Sin embargo, en teorías realistas como el ME, las componentes izquierdas y derechas de los fermiones pertenecen a representaciones diferentes del grupo de simetría gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, por lo que un término de masa directo no es gauge-invariante [7].

4.2. Modelo Electro débil

El modelo de Weinberg–Salam constituye la formulación gauge unificada de las interacciones débil y electromagnética. Su estructura se basa en la simetría de grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde el subíndice L indica que solo los fermiones izquierdos transforman bajo $SU(2)$, y Y denota la hipercarga asociada a $U(1)$.³

A cada uno de estos factores de simetría se le asocia un conjunto de campos de gauge: Al grupo $SU(2)_L$ le corresponden tres bosones de gauge W_μ^a (con $a = 1, 2, 3$), acoplados mediante la constante g . Al grupo $U(1)_Y$ le corresponde un solo bosón de gauge B_μ , con constante de acoplamiento g' .

El grupo $SU(2)_L$ es no abeliano, con generadores T^a que satisfacen las relaciones de conmuta-

³Este grupo es un producto directo de grupos de Lie, lo que implica que sus generadores actúan de manera independiente sobre los campos que transforman bajo sus respectivas representaciones.

ción:

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c.$$

Como consecuencia, el tensor de campo asociado al sector débil incluye un término de auto-interacción. Aplicando la definición general de tensor de campo para teorías gauge (4.43), se obtienen:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad (4.47)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (4.48)$$

Los fermiones del Modelo Estándar se organizan en representaciones quirales del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, de modo que las componentes izquierdas se agrupan en dobletes de $SU(2)_L$, mientras que las componentes derechas se tratan como singletes. A cada multiplete se le asigna una hipercarga Y , de modo que la carga eléctrica queda determinada por la relación de Gell-Mann–Nishijima:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2},$$

donde T^3 es el tercer generador de $SU(2)_L$. Para cada una de las tres generaciones, los fermiones se organizan como sigue:

Leptones izquierdos:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad Y = -\frac{1}{2}$$

Quarks izquierdos:

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Y = \frac{1}{6}$$

Fermiones derechos (singletes bajo $SU(2)_L$):

$$e_R (Y = -1), \quad u_R (Y = \frac{2}{3}), \quad d_R (Y = -\frac{1}{3}).$$

En el modelo estándar minimalista, no se introduce el neutrino derecho ν_{eR} , ya que este sería un singlete bajo todo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y, por tanto, no participa en las interacciones gauge. No obstante, diversas extensiones del modelo consideran su inclusión para explicar las masas de los neutrinos mediante mecanismos como el *seesaw*.

El acoplamiento entre los campos de materia y los campos gauge del modelo electrodébil se introduce mediante derivadas covariantes, definidas de acuerdo con la expresión general (4.37), aplicada al grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Para un campo fermiónico que transforma bajo

una representación del grupo, la derivada covariante toma la forma [7, 8, 14]:

$$D_\mu R = (\partial_\mu - ig' Y B_\mu) R, \quad (4.49)$$

$$D_\mu L = (\partial_\mu - ig T^a W_\mu^a - ig' Y B_\mu) L, \quad (4.50)$$

donde L representa un doblete de $SU(2)_L$ con hipercarga Y , mientras que R es un singlete de $SU(2)_L$, transformando sólo bajo $U(1)_Y$. Estas expresiones garantizan la invariancia gauge de los términos cinéticos fermiónicos,

$$\bar{L} i \not{D} L + \bar{R} i \not{D} R,$$

los cuales describen la dinámica de los fermiones en presencia de los campos de gauge W_μ^a y B_μ .

4.2.1. Interacción de Yukawa

El término de masa típico para un campo de Dirac,

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = -m \bar{\Psi} \Psi = -m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R),$$

es un escalar de Lorentz, pero no es invariante bajo las transformaciones del grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, ya que las componentes izquierdas y derechas de Ψ pertenecen a representaciones distintas. Por tanto, en el Modelo Estándar este término no puede incluirse de forma directa sin romper explícitamente la simetría de la teoría [7]. La solución más natural consiste en introducir un campo escalar complejo ϕ , con cargas adecuadas bajo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, de modo que compense las transformaciones de ψ_L y ψ_R , permitiendo la construcción de un término gauge-invariante. Este campo, conocido como campo de *Higgs*, se define como un doblete complejo bajo $SU(2)_L$, con hipercarga $Y = \frac{1}{2}$ asociada al grupo $U(1)_Y$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

A partir de este campo se construyen los denominados términos de *Yukawa*, que acoplan los dobletes izquierdos de fermiones con los singletes derechos, mediante combinaciones invariantes bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [5, 10]. Por ejemplo, para el sector leptónico, se puede escribir:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^\ell = -y_e \bar{e}_R \phi^\dagger L + \text{h.c.}, \quad (4.52)$$

donde L es el doblete de leptones y e_R es el singlete derecho. El término es invariante porque ϕ^\dagger transforma como un conjugado del doblete de $SU(2)_L$ y tiene hipercarga opuesta, compensando

las transformaciones de L y e_R . De modo análogo, para los quarks se escriben [8]:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^d = -y_d \bar{d}_R \phi^\dagger Q + \text{h.c.}, \quad (4.53)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^u = -y_u \bar{u}_R \tilde{\phi}^\dagger Q + \text{h.c.}, \quad (4.54)$$

donde Q es el doblete de quarks y $\tilde{\phi} \equiv i\sigma^2 \phi^*$ transforma como un doblete con hipercarga opuesta, permitiendo construir el término de Yukawa para los quarks up.

4.2.2. Ruptura Espontánea de Simetría

El sector escalar del modelo electrodébil está gobernado por el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi), \quad V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (4.55)$$

donde ϕ es el doblete de Higgs y la derivada covariante se define por:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig T^a W_\mu^a - ig' Y B_\mu) \phi. \quad (4.56)$$

La inclusión de este sector escalar completa la estructura lagrangiana del modelo electrodébil:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} = & -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sum_{\psi=L,R} \bar{\psi} i \not{D} \psi \\ & - \bar{Q}_L Y_u \tilde{\phi} u_R - \bar{Q}_L Y_d \phi d_R - \bar{L}_L Y_e \phi e_R + \text{h.c.} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Es importante destacar que el lagrangiano (4.57) no contiene términos de masa explícitos ni para los fermiones ni para los bosones de gauge, en cumplimiento de la invariancia bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. No obstante, si el parámetro μ^2 es negativo y $\lambda > 0$, el potencial escalar del campo de Higgs adquiere un mínimo no trivial cuando el campo cumple:

$$\phi^\dagger \phi = \frac{-\mu^2}{\lambda}. \quad (4.58)$$

El conjunto de todos los posibles estados de vacío —es decir, los campos ϕ que minimizan el potencial— es invariante bajo el grupo gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sin embargo, una vez se elige un valor específico para el vacío (una dirección particular en el espacio de configuraciones), dicha configuración ya no permanece invariante bajo todas las transformaciones del grupo. Este fenómeno, conocido como *ruptura espontánea de simetría*, refleja que el lagrangiano sigue siendo completamente simétrico, pero el estado fundamental escogido no lo es.

Una elección convencional para el valor esperado del campo de Higgs en el vacío es:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}. \quad (4.59)$$

Esta elección preserva únicamente una combinación particular de las simetrías originales, identificada con el subgrupo electromagnético $U(1)_{\text{em}}$. Para analizar las excitaciones físicas alrededor del vacío, se emplea el *gauge unitario*, en el cual el campo de Higgs se parametriza como:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

donde $h(x)$ es un campo escalar real que representa el bosón de Higgs.

Al reemplazar esta forma en el lagrangiano del modelo electrodébil, se generan términos de masa para los bosones W^\pm y Z mediante los acoplamientos gauge, así como términos de masa para los fermiones a través de los acoplamientos de Yukawa. El fotón permanece sin masa, reflejando que la simetría electromagnética $U(1)_{\text{em}}$ no se rompe.

4.3. Reglas de Feynman

Hay tres formas experimentales de estudiar las interacciones entre partículas elementales: los estados ligados, los decaimientos y las dispersiones. A continuación se introduce una formulación cuantitativa de la dinámica de partículas elementales, centrada en el cálculo de la tasa de decaimiento Γ y la sección eficaz de dispersión σ . Ambas cantidades requieren el conocimiento de la *amplitud de transición* \mathcal{M} [13].

Decaimiento y dispersión

En los procesos de decaimiento, el parámetro de mayor interés es el tiempo de vida media de una partícula en reposo. Debido a la naturaleza cuántica del proceso, no todos los muones (por ejemplo) duran exactamente lo mismo: existe una aleatoriedad inherente. Lo que puede medirse experimentalmente es el tiempo de vida media τ de una gran muestra de partículas idénticas.

Un hecho importante es que la probabilidad de que una partícula decaiga en un intervalo de tiempo dado es independiente del tiempo transcurrido desde su creación. Esto implica que el decaimiento sigue una ley exponencial, y lo que se mide realmente es una *tasa de decaimiento* Γ , definida como la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula decaiga en un instante dado. Esta se relaciona con el tiempo de vida media mediante [9]:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}.$$

Además, si una partícula puede decaer a través de distintos canales posibles, la tasa de decai-

miento total es la suma de las tasas parciales asociadas a cada canal:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i. \quad (4.61)$$

Por otra parte, muchos experimentos que exploran la física de partículas en el régimen relativista se basan en procesos de dispersión. La magnitud relevante en estos casos es la *sección eficaz* o *sección transversal*, que cuantifica la probabilidad de interacción entre las partículas incidentes y un blanco dado. Esta tiene dimensiones de área y depende tanto de la estructura interna de las partículas que colisionan como del blanco, e incluso del estado final de las partículas producidas [9].

La regla de oro de Fermi

El cálculo de tasas de decaimiento y secciones eficaces requiere conocer dos elementos importantes: la amplitud del proceso \mathcal{M} y el espacio de fase disponible. La amplitud, obtenida a partir de los *diagramas de Feynman* mediante las *reglas de Feynman*, contiene la dinámica del sistema. Por su parte, el espacio de fase es un factor puramente cinemático que cuantifica el número de configuraciones finales posibles: a mayor espacio accesible, mayor será la probabilidad de que ocurra el proceso [13]. En lo que sigue se presenta la regla de oro de Fermi, que permite expresar tanto la tasa de decaimiento como la sección eficaz en función de \mathcal{M} y del espacio de fase.

Considérese primero el decaimiento de una partícula 1 (inicialmente en reposo) en varias partículas 2, 3, ..., n :

$$1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

La tasa de decaimiento está dada por:

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int \prod_{j=2}^n \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - \dots - p_n) 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0), \quad (4.62)$$

donde m_i es la masa y p_i el 4-momento de la partícula i -ésima. El factor S es una corrección estadística que evita contar más de una vez configuraciones indistinguibles: por cada subconjunto de s partículas idénticas en el estado final, se incluye un factor $1/s!$. Es importante no confundir este factor estadístico con la matriz S que aparece en la ecuación (4.27). En ausencia de partículas idénticas, $S = 1$. La amplitud $\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ depende en general de los momentos de todas las partículas involucradas y codifica la probabilidad cuántica del proceso. La integral sobre el espacio de fase restringe los estados finales a cumplir: (i) la conservación del cuatro-momento total, (ii) la condición de capa de masa para cada partícula saliente, y (iii) la positividad de su energía [13].

Ahora considérese un proceso de dispersión en el que las partículas 1 y 2 colisionan para pro-

ducir partículas 3, 4, ..., n:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n.$$

La sección eficaz total está dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \\ &\times \int \prod_{j=3}^n \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0). \end{aligned} \quad (4.63)$$

En este caso, el espacio de fase cumple un rol análogo: impone que las partículas salientes satisfagan las condiciones cinemáticas ya mencionadas. La sección eficaz resultante tiene unidades de área y representa el “tamaño efectivo” del blanco frente al haz incidente.

4.3.1. Reglas de Feynman para la QED

El lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés: *quantum electrodynamics*) está dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi}(i\mathcal{D}_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.64)$$

donde $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_e A_\mu$ es la derivada covariante y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagnético. El único término de interacción es:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi, \quad (4.65)$$

el cual define el vértice fundamental de la teoría con dos líneas fermiónicas y una línea de fotón, como se muestra en la figura 4.1. Para estos diagramas (de Feynman) se adopta la convención de que el tiempo apunta hacia la derecha.

En general, las reglas de Feynman se derivan directamente del lagrangiano de la teoría. Los términos cinéticos determinan los propagadores, mientras que los términos de interacción generan los vértices [9, 12, 13, 14, 15]. En QED:

- $\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow$ determina propagadores.
- $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi \rightarrow$ define el único vértice.

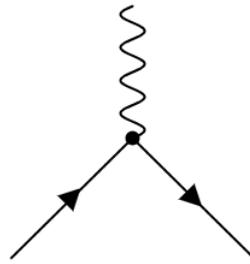


Figura 4.1: Vértice fundamental de la QED.

Las reglas de Feynman permiten calcular la amplitud invariante \mathcal{M} de un proceso físico dado. Estas reglas se agrupan en los siguientes pasos: ⁴

1. Construcción del diagrama:

- En QED, todos los procesos físicos se describen mediante combinaciones del vértice fundamental mostrado en la figura 4.1.
- Se deben considerar todos los diagramas topológicamente distintos que conectan las líneas externas requeridas por el proceso.

2. Asignación de momentos:

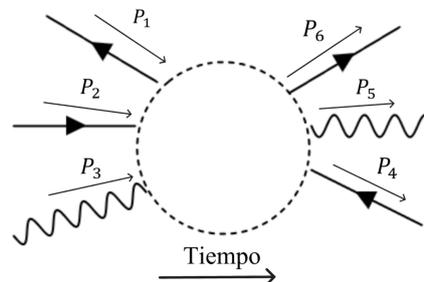


Figura 4.2: Asignación de momentos externos en un diagrama de Feynman

- A cada línea externa se le asigna un cuadrimomento p_i y se dibuja al lado una flecha indicando la dirección positiva (en dirección al tiempo).
- A cada línea interna se le asigna un momento q_j (con dirección positiva arbitrariamente asignada), que será integrado posteriormente.

3. Factores asociados a cada elemento del diagrama:

- **Vértice:** Por cada vértice, se asigna el factor $ig_e\gamma^\mu$ junto con un factor de conservación de momento $(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$, donde los k_i son los tres cuadrimomentos entrantes al vértice (véase la figura 4.3).

⁴Las reglas aquí utilizadas siguen [15].

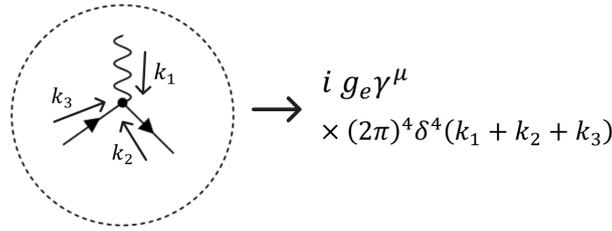


Figura 4.3: Factores que contribuyen por cada vértice interno en un diagrama de Feynman para la QED.

- **Propagador de fermión:** Por cada línea interna de fermión con cuádrimomento q , el propagador asociado es

$$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.66)$$

- **Propagador de fotón:** Por cada línea interna de fotón con cuádrimomento q , el propagador es

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (4.67)$$

- **Líneas externas:** cada línea se reemplaza por un factor espinorial o de polarización, según la siguiente tabla:

| | |
|---|--|
| Electrón entrante: $u^{(s)}(p)$ | |
| Electrón saliente: $\bar{u}^{(s)}(p)$ | |
| Positrón entrante: $\bar{v}^{(s)}(p)$ | |
| Positrón saliente: $v^{(s)}(p)$ | |
| Fotón entrante: $\varepsilon^\mu(p)$ | |
| Fotón saliente: $\varepsilon^{\mu*}(p)$ | |

4. Contracción de índices:

- Se contraen siguiendo las líneas de fermiones desde el extremo cuya flecha apunta desde el vértice. El orden de los factores (espinores, vértices y propagadores) debe respetarse cuidadosamente.

5. Integración e identificación de la amplitud:

- Se integra sobre cada momento interno con la medida $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
- Se factoriza el delta de conservación de momento global:

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_{\text{entrantes}} - \sum p_{\text{salientes}} \right).$$

- El resultado se multiplica por un factor global i , obteniendo así la amplitud invariante \mathcal{M} .

6. Correcciones adicionales:

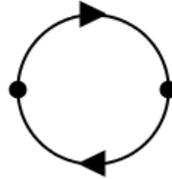


Figura 4.4: Diagrama de un lazo fermiónico (1-loop), cuya contribución requiere tomar la traza de la expresión asociada y multiplicar por -1 .

- Si el diagrama contiene un lazo fermiónico como el que se muestra en la figura 4.4, se incluye un factor -1 y se toma la traza sobre los índices espinoriales.
- La amplitud total es la suma de las contribuciones de todos los diagramas con las mismas líneas externas.
- En presencia de fermiones, los diagramas que difieren por el intercambio de dos partículas fermiónicas *se restan*, debido a la antisimetría de los estados cuánticos de fermiones.

Esto es suficiente para los fines de este trabajo ya que más adelante se harán cálculos de diagramas a 1-loop, pero solo será de importancia el interior del diagrama, ya que esta es la parte que produce integrales divergentes. Las líneas externas no contribuyen a este problema.

Capítulo 5

Superespacio y Transformaciones Supersimétricas

En este capítulo se estudia el formalismo del superespacio y los supercampos, el cual proporciona una formulación geométrica de la supersimetría al extender el espacio-tiempo de Minkowski mediante coordenadas fermiónicas anticomutantes. Esta ampliación permite describir de manera unificada grados de libertad bosónicos y fermiónicos dentro de un único objeto: el supercampo [2, 16].

5.1. Teoremas de No-Go

Teorema de Coleman-Mandula

El teorema de Coleman–Mandula impone fuertes restricciones sobre la posible estructura del grupo de simetrías de una teoría cuántica de campos relativista con interacciones no triviales. En particular, considera aquellas teorías cuya matriz de dispersión S (matriz-S) es bien definida y satisface propiedades físicas razonables. Esta matriz relaciona los estados entrantes y salientes de partículas libres, y no debe confundirse con el factor estadístico de la regla de oro de Fermi ni con las matrices que actúan sobre espinores de Dirac.

El teorema demuestra que, bajo ciertos supuestos, el grupo de simetría total G debe ser localmente isomorfo al producto directo del grupo de Poincaré \mathcal{P} y un grupo compacto de simetrías internas B [3, 4, 17]:

$$G \simeq \mathcal{P} \times B,$$

es decir, las simetrías internas y del espacio-tiempo no pueden mezclarse de manera no trivial. Si se denota por $P_\mu, M_{\mu\nu}$ a los generadores del grupo de Poincaré, y por B_l a los generadores del grupo B , las relaciones de conmutación relevantes son:

$$[P_\mu, B_l] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0, \quad [B_l, B_m] = ic_{lm}^k B_k, \quad (5.1)$$

donde c_{lm}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie asociada a B . Esto implica que los generadores internos no afectan el espacio-tiempo y viceversa; es decir, las transformaciones internas actúan independientemente de las transformaciones de Lorentz y traslaciones.

Teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius

El teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius extiende el resultado de Coleman y Mandula al considerar una generalización del álgebra de Poincaré que incluye generadores fermiónicos. Estos generadores, denotados por Q_A^i , transforman como espinores bajo el grupo de Lorentz y satisfacen relaciones de anticonmutación en lugar de conmutación, a diferencia de los generadores bosónicos convencionales.

El resultado muestra que la extensión más general del álgebra de simetría compatible con una matriz de dispersión S unitaria, analítica y causal puede incluir, además de los generadores de Poincaré y de las simetrías internas, un conjunto de generadores fermiónicos Q_A^i y sus conjugados $\bar{Q}_{\dot{A}i}$, que obedecen la siguiente estructura algebraica [1, 3]:

$$\begin{aligned} \{Q_A^i, \bar{Q}_{\dot{B}j}\} &= 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu P_\mu \delta_j^i, \\ \{Q_A^i, Q_B^j\} &= \epsilon_{AB} Z^{ij}, \\ [Q_A^i, P^\mu] &= [\bar{Q}_{\dot{A}i}, P^\mu] = 0, \\ [Q_A^i, M_{\mu\nu}] &= (\sigma_{\mu\nu})_A^B Q_B^i, \\ [\bar{Q}_{\dot{A}i}, M_{\mu\nu}] &= \bar{Q}_{\dot{B}i} (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{B}}_{\dot{A}}. \end{aligned}$$

Aquí, A y \dot{A} son índices espinoriales de Weyl, mientras que el índice $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ enumera los distintos generadores fermiónicos de la teoría. El número \mathcal{N} determina el grado de supersimetría: $\mathcal{N} = 1$ representa la forma más simple, mientras que $\mathcal{N} > 1$ permite simetrías internas más complejas. Las cantidades Z^{ij} , denominadas *cargas centrales*, son operadores escalares que conmutan con todos los demás generadores y solo aparecen cuando $\mathcal{N} > 1$ [1, 3, 4, 18].

5.2. Álgebras Graduadas

Los teoremas de Coleman–Mandula y de Haag–Łopuszański–Sohnius establecen importantes restricciones sobre las posibles extensiones del álgebra de Poincaré en teorías cuánticas de campos. Mientras el primero prohíbe la mezcla no trivial entre simetrías internas y del espacio-tiempo mediante generadores bosónicos, el segundo demuestra que es posible lograr tal extensión introduciendo generadores fermiónicos, que transforman como espinores bajo el grupo de Lorentz y obedecen relaciones de anticonmutación.

Para describir de manera sistemática estas extensiones algebraicas, es necesario recurrir a las llamadas *álgebras de Lie graduadas* o *superálgebras*. Estas estructuras generalizan las álgebras de Lie ordinarias al permitir tanto conmutadores como anticonmutadores entre sus generadores,

y proporcionan el marco matemático en el que se construyen las teorías supersimétricas.

Definición 5.1 (Álgebra graduada). *Sea $L = \bigoplus_{k=0}^N L_k$ un espacio vectorial construido como la suma directa de $N + 1$ subespacios L_k^1 , con N natural. L es un álgebra graduada si y solamente si puede definirse un producto $\circ : L \times L \rightarrow L$ tal que para todo $u_i \in L_i$ y $u_k \in L_k$ se satisface*

$$u_j \circ u_k \in L_{j+k \pmod{N+1}}, \quad (5.2)$$

donde la expresión $j + k \pmod{N + 1}$ significa el residuo de la división entera $j + k / N + 1$. ■

Un producto como el de la ecuación (5.2) recibe el nombre de *graduación*. Cuando $N = 1$, L está conformada por dos subespacios L_0 y L_1 y se habla del álgebra graduada \mathbb{Z}_2 .

Definición 5.2 (Álgebra de Lie graduada \mathbb{Z}_2). *Una álgebra graduada \mathbb{Z}_2 , L , es una álgebra de Lie graduada si el producto $\circ : L \times L \rightarrow L$ satisface, para todo $x_i \in L_i$ y $x_j \in L_j$,*

Supersimetrización:

$$x_i \circ x_j = -(-1)^{ij} x_j \circ x_i, \quad i = 0, 1. \quad (5.3)$$

Identidad de Jacobi generalizada:

$$x_k \circ (x_l \circ x_m) (-1)^{km} + x_l \circ (x_m \circ x_k) (-1)^{lk} + x_m \circ (x_k \circ x_l) (-1)^{ml} = 0, \quad k, l, m \in \mathbb{Z}_2. \quad (5.4)$$

La definición 5.2 implica que:

- i. El producto de la forma $L_0 \times L_0$ es antisimétrico: $x_0 \circ y_0 = -y_0 \circ x_0$.
- ii. EL producto de la forma $L_0 \times L_1$ es antisimétrico: $x_0 \circ y_1 = -y_1 \circ x_0$.
- iii. EL producto de la forma $L_1 \times L_1$ es simétrico: $x_1 \circ y_1 = y_1 \circ x_1$.

Por ser L un espacio vectorial, debe tener una base $\{X_\mu\}_{\mu=1}^{\dim L}$. Se asigna un grado $g = \{0, 1\}$ a cada $X_\mu \in L$ definiendo

$$g_\mu := g(X_\mu) = 0 \iff X_\mu \in L_0, \quad (5.5)$$

$$g_\nu := g(X_\nu) = 1 \iff X_\nu \in L_1. \quad (5.6)$$

Se dice que los generadores de L_0 , $\{E_i\}_{i=1}^{\dim L_0}$, tienen *grado par* y se llama a L_0 el sector *bosónico*, mientras que los generadores de L_1 , $\{Q_a\}_{a=1}^{\dim L_1}$, tienen *grado impar* y se llama a L_1 el sector *fermiónico*.

¹Dados dos espacios vectoriales V y W , su *suma directa* $V \oplus W$ es el conjunto de pares ordenados (v, w) con $v \in V, w \in W$, dotado de una estructura vectorial. Cada vector en $V \oplus W$ puede escribirse de manera única como suma de un vector en V y uno en W .

Definición 5.3. El producto \circ en L se define explícitamente como

$$\circ : \underbrace{L \times L}_{(X_\mu, X_\nu)} \rightarrow \underbrace{L}_{X_\mu \circ X_\nu} \mid X_\mu \circ X_\nu = X_\mu X_\nu - (-1)^{g_\mu g_\nu} X_\nu X_\mu. \quad (5.7)$$

■

De la ecuación (5.7) se sigue que:

- i. El producto de la forma $L_0 \times L_0$ es $E_i \circ E_j \equiv [E_i, E_j]$.
- ii. El producto de la forma $L_0 \times L_1$ es $E_i \circ Q_a \equiv [E_i, Q_a]$.
- iii. EL producto de la forma $L_1 \times L_1$ es $Q_a \circ Q_b \equiv \{Q_a, Q_b\}$.

La notación $[E_i, E_j]$ y $\{Q_a, Q_b\}$ está para conmutadores y anticonmutadores, respectivamente. Las constantes de estructura generalizadas $c_{\mu\nu}^\omega$ describen la cerradura del álgebra L , y se definen como tales que

$$X_\mu \circ X_\nu = c_{\mu\nu}^\omega X_\omega. \quad (5.8)$$

Estas tienen la propiedad de que

$$c_{\mu\nu}^\omega = -(-1)^{g_\mu g_\nu} c_{\nu\mu}^\omega. \quad (5.9)$$

La definición del producto en la ecuación (5.7) satisface la identidad de Jacobi generalizada

$$X_\mu \circ (X_\nu \circ X_\rho)(-1)^{g_\mu g_\rho} + X_\nu \circ (X_\rho \circ X_\mu)(-1)^{g_\nu g_\mu} + X_\rho \circ (X_\mu \circ X_\nu)(-1)^{g_\rho g_\nu} = 0. \quad (5.10)$$

En particular, para cada caso: (i) $X_\mu, X_\nu, X_\rho \in L_0$, (ii) $X_\mu, X_\nu \in L_0, X_\rho \in L_1$, (iii) $X_\mu \in L_0, X_\nu, X_\rho \in L_1$ y (iv) $X_\mu, X_\nu, X_\rho \in L_1$; la identidad de Jacobi toma respectivamente las formas [1]:

$$[E_i, [E_j, E_k]] + [E_k, [E_i, E_j]] + [E_j, [E_k, E_i]] = 0, \quad (5.11)$$

$$[E_i, [E_j, Q_a]] + [Q_a, [E_i, E_j]] + [E_j, [Q_a, E_i]] = 0, \quad (5.12)$$

$$[E_i, \{Q_a, Q_b\}] - \{Q_b, [E_i, Q_a]\} + \{Q_a, [Q_b, E_i]\} = 0, \quad (5.13)$$

$$[Q_a, \{Q_b, Q_c\}] + [Q_c, \{Q_a, Q_b\}] + [Q_b, \{Q_c, Q_a\}] = 0. \quad (5.14)$$

La identidad de Jacobi en la definición de una álgebra graduada es fundamental para garantizar la supersimetrización, la cerradura y la aplicación sucesiva de los productos de forma coherente. Cada una de las condiciones anteriores impuestas sobre los conmutadores y anticonmutadores de los generadores E y Q son consistentes con la definición de álgebra de Lie graduada, la cual frecuentemente se expresa en términos de las constantes de estructura definidas en la ecuación

(5.8), como:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad (5.15)$$

$$[E_i, Q_a] = s_{ia}^b Q_b, \quad (5.16)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \gamma_{ab}^i E_i. \quad (5.17)$$

5.3. Extensión Supersimétrica del Álgebra de Poincaré

En esta sección se aplica el formalismo de la álgebra de Lie graduada \mathbb{Z}_2 al grupo de Poincaré, introduciendo un único generador fermiónico Q y sus relaciones de anticonmutación, tal como establece el teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius, para describir la estructura algebraica de la supersimetría con $\mathcal{N} = 1$ en un contexto físico.

Formulación de Dirac

El álgebra de Poincaré está dada por (véase el apéndice A.3):

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (5.18)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu),$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (5.19)$$

Los generadores P_μ y $M_{\mu\nu}$ constituyen una base de un espacio vectorial de diez dimensiones, y las ecuaciones anteriores definen las relaciones de conmutación entre los elementos de esta base.

Para construir una extensión supersimétrica, se introduce una estructura de graduación- \mathbb{Z}_2 en el álgebra: se define L_0 como el álgebra de Poincaré, y L_1 como un espacio vectorial real de dimensión 4, generado por las componentes Q_a de un único generador fermiónico, consistente en un espinor de Majorana, con $a = 1, 2, 3, 4$ [3]. Es decir,²

$$L_0 = \text{Span}\{P_\mu, M_{\mu\nu}\}, \quad L_1 = \text{Span}\{Q_a\}, \quad L = L_0 \oplus L_1.$$

En este contexto, L es un espacio vectorial real sobre el cual se definirá la estructura de superálgebra, combinando generadores bosónicos y fermiónicos. Mientras P_μ y $M_{\mu\nu}$ están asociados a las simetrías del espacio-tiempo (traslaciones y transformaciones de Lorentz, respectivamente), el generador Q corresponde a las transformaciones de supersimetría, que relacionan estados bosónicos y fermiónicos dentro de una misma representación del álgebra.³

²El símbolo $\text{Span}\{\dots\}$ indica el espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales de los vectores listados.

³AL final de esta sección se verá que el operador Q transforma como un espinor bajo el grupo de Lorentz.

Los elementos de L deben satisfacer las condiciones de la definición de superálgebra de Lie graduada (definición 5.2). En particular:

1. El producto $\circ : L_0 \times L_0 \rightarrow L_0$ corresponde a la estructura del álgebra de Poincaré.
2. El producto $\circ : L_0 \times L_1 \rightarrow L_1$ se define, según la ecuación (5.16), por relaciones de conmutación con constantes de estructura:⁴

$$[P_\mu, Q_a] = -(s_\mu)_{ab}Q_b, \quad [M_{\mu\nu}, Q_a] = -(\sigma_{\mu\nu}^{(4)})_{ab}Q_b. \quad (5.20)$$

La identidad de Jacobi para generadores $X_\mu, X_\nu \in L_0$ y $Q_a \in L_1$ se escribe como

$$[X_\mu, [X_\nu, Q_a]] + [Q_a, [X_\mu, X_\nu]] + [X_\nu, [Q_a, X_\mu]] = 0, \quad (5.21)$$

y puede utilizarse para exhibir restricciones sobre las constantes de estructura, analizando todos los casos posibles, los cuales son tres:

- a) $X_\mu = P_\mu, X_\nu = P_\nu$, en cuyo caso la ecuación (5.21) se convierte en

$$[P_\mu, [P_\nu, Q_a]] + [Q_a, [P_\mu, P_\nu]] + [P_\nu, [Q_a, P_\mu]] = 0. \quad (5.22)$$

Utilizando la ecuación (5.20) esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= [P_\mu, [P_\nu, Q_a]] - [P_\nu, [P_\mu, Q_a]] = [P_\mu, -(s_\nu)_{ab}Q_b] - [P_\nu, -(s_\mu)_{ab}Q_b] \\ &= -(s_\nu)_{ab}[P_\mu, Q_b] + (s_\mu)_{ab}[P_\nu, Q_b] \\ &= -(s_\nu)_{ab}(-(s_\mu)_{bc}Q_c) + (s_\mu)_{ab}(-(s_\nu)_{bc}Q_c) \\ &= (s_\nu s_\mu)_{ac}Q_c - (s_\mu s_\nu)_{ac}Q_c, \end{aligned}$$

Entonces

$$[s_\mu, s_\nu] = 0. \quad (5.23)$$

- b) $X_\mu = M_{\mu\nu}, X_\nu = P_\rho$, en cuyo caso resulta

$$[M_{\mu\nu}, [P_\rho, Q_a]] + [Q_a, [M_{\mu\nu}, P_\rho]] + [P_\rho, [Q_a, M_{\mu\nu}]] = 0. \quad (5.24)$$

Utilizando nuevamente la ecuación 5.20 esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= [M_{\mu\nu}, -(s_\rho)_{ab}Q_b] + [Q_a, i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu)] + [P_\rho, (\sigma_{\mu\nu})_{ab}Q_b] \\ &= -(s_\rho)_{ab}[M_{\mu\nu}, Q_b] + i\eta_{\nu\rho}[Q_a, P_\mu] - i\eta_{\mu\rho}[Q_a, P_\nu] + (\sigma_{\mu\nu})_{ab}[P_\rho, Q_b] \\ &= (s_\rho)_{ab}(\sigma_{\mu\nu})_{bc}Q_c + i\eta_{\nu\rho}(s_\mu)_{ab}Q_b - i\eta_{\mu\rho}(s_\nu)_{ab}Q_b - (\sigma_{\mu\nu})_{ab}(s_\rho)_{bc}Q_c, \end{aligned}$$

⁴el subíndice (4) en la ecuación (5.20) indica que la dimensión de los coeficientes $\sigma_{\mu\nu}$, tomados como matrices, es 4×4 .

entonces

$$[\sigma_{\mu\nu}, s_\rho] = i(\eta_{\nu\rho}s_\mu - \eta_{\mu\rho}s_\nu), \quad (5.25)$$

$$c) X_\mu = M_{\mu\nu}, X_\nu = M_{\rho\sigma},$$

$$[M_{\mu\nu}, [M_{\rho\sigma}, Q_a]] + [Q_a, [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]] + [M_{\rho\sigma}, [Q_a, M_{\mu\nu}]] = 0. \quad (5.26)$$

Utilizando la ecuación 5.20 queda

$$\begin{aligned} 0 &= [M_{\mu\nu}, [M_{\rho\sigma}, Q_a]] + [Q_a, [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]] + [M_{\rho\sigma}, [Q_a, M_{\mu\nu}]] \\ &= [M_{\mu\nu}, -(\sigma_{\rho\sigma})_{ab}Q_b] + [Q_a, -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})] \\ &\quad + [M_{\rho\sigma}, (\sigma_{\mu\nu})_{ab}Q_b] \\ &= -(\sigma_{\rho\sigma})_{ab}[M_{\mu\nu}, Q_b] - i(\eta_{\mu\rho}[Q_a, M_{\nu\sigma}] - \eta_{\mu\sigma}[Q_a, M_{\nu\rho}] - \eta_{\nu\rho}[Q_a, M_{\mu\sigma}] \\ &\quad + \eta_{\nu\sigma}[Q_a, M_{\mu\rho}]) + (\sigma_{\mu\nu})_{ab}[M_{\rho\sigma}, Q_b] \\ &= (\sigma_{\rho\sigma})_{ab}(\sigma_{\mu\nu})_{bc}Q_c - i(\eta_{\mu\rho}(\sigma_{\nu\sigma})_{ab}Q_b - \eta_{\mu\sigma}(\sigma_{\nu\rho})_{ab}Q_b - \eta_{\nu\rho}(\sigma_{\mu\sigma})_{ab}Q_b \\ &\quad + \eta_{\nu\sigma}(\sigma_{\mu\rho})_{ab}Q_b) - (\sigma_{\mu\nu})_{ab}(\sigma_{\rho\sigma})_{bc}Q_c, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_{\rho\sigma})_{ab}(\sigma_{\mu\nu})_{bc} - i(\eta_{\mu\rho}(\sigma_{\nu\sigma})_{ac} - \eta_{\mu\sigma}(\sigma_{\nu\rho})_{ac} - \eta_{\nu\rho}(\sigma_{\mu\sigma})_{ac} + \eta_{\nu\sigma}(\sigma_{\mu\rho})_{ac}) \\ &\quad - (\sigma_{\mu\nu})_{ab}(\sigma_{\rho\sigma})_{bc}, \\ &= (\sigma_{\rho\sigma}\sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma} - i(\eta_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\sigma_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\sigma_{\mu\rho}))_{ac}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\sigma_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\sigma_{\mu\rho}). \quad (5.27)$$

Comparando las ecuaciones (5.23), (5.25) y (5.27) con (5.18), se observa que las constantes de estructura se pueden organizar en matrices s_μ y $\sigma_{\mu\nu}$, las cuales constituyen representaciones del grupo de Poincaré. En particular, se escoge la solución:

$$\sigma_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (s_\mu)_{ab} = 0, \quad (5.28)$$

de modo que

$$[P_\mu, Q_a] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, Q_a] = -(\sigma_{\mu\nu}^{(4)})_{ab}Q_b. \quad (5.29)$$

Esta solución no es única, pero se adopta porque, físicamente, se requiere que la supersimetría sea una simetría global, lo cual implica que los generadores Q no transformen bajo traslaciones espacio-temporales [1, 3, 4]. Adicionalmente, el conmutador con $M_{\mu\nu}$ muestra que el generador Q transforma como un espinor de Lorentz.

3. El producto $\circ : L_1 \times L_1 \rightarrow L_0$ se define, según la ecuación (5.17), por las constantes de estructura:⁵

$$Q_a \circ Q_b = \{Q_a, Q_b\} = (h^\mu)_{ab} P_\mu + (k^{\mu\nu})_{ab} M_{\mu\nu}, \quad (5.30)$$

donde las matrices h^μ y $k^{\mu\nu}$ son simétricas en el intercambio de a y b . Más aún, $k^{\mu\nu}$ es antisimétrica en el intercambio de μ y ν . Dado que el siguiente conjunto de matrices γ ,

$$\{1_{4 \times 4}, \gamma^\mu, \sigma_{\mu\nu}^{(4)}, \gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5\}, \quad (5.31)$$

constituye una base para el espacio de matrices 4×4 , se puede expresar a h^μ y $k^{\mu\nu}$ como una combinación lineal de estas 16 matrices [12, 19]. También se puede aprovechar la propiedad que define la matriz de conjugación de carga C para escribir (véase el apéndice A.6):⁶

$$C \gamma^{\mu T} C^{-1} = -\gamma^\mu \implies \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu C^T)^T, \quad (5.32)$$

de manera que se puede notar que

$$(\gamma^\mu C) = (\gamma^\mu C)^T, \quad (5.33)$$

es decir, que $\gamma^\mu C$ es una matriz simétrica. A partir de esto se puede mostrar que

$$\sigma_{\mu\nu}^{(4)} C = (\sigma_{\mu\nu}^{(4)} C)^T. \quad (5.34)$$

Por tanto, se tienen 10 matrices simétricas linealmente independientes, $\gamma^\mu C$ y $\sigma_{\mu\nu}^{(4)} C$; además, $\sigma_{\mu\nu}^{(4)} C$ son antisimétricas en μ y ν . Por lo tanto, se concluye que

$$\{Q_a, Q_b\} = a(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu + b(\sigma^{(4)\mu\nu} C)_{ac} M_{\mu\nu}, \quad (5.35)$$

donde a y b son constantes por determinar utilizando la identidad de Jacobi (5.13), es decir (con $X_\mu \in L_0$):

$$[X_\mu, \{Q_a, Q_b\}] - \{Q_b, [X_\mu, Q_a]\} + \{Q_a, [Q_b, X_\mu]\} = 0.$$

Nuevamente se consideran dos casos posibles:

⁵Dado que los generadores de L_0 son únicamente P_μ y $M_{\mu\nu}$, cualquier elemento de L_0 puede expresarse como una combinación lineal de estos. Por tanto, la ecuación (5.30) representa la forma más general posible para el producto $\{Q_a, Q_b\}$ dentro de L_0 .

⁶La matriz de conjugación de carga, C , es antisimétrica y satisface $C^2 = -1_{4 \times 4}$, como se muestra en el apéndice A.6.

a) $X_\mu = P_\mu$, entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= [P_\mu, \{Q_a, Q_b\}] - \{Q_b, [P_\mu, Q_a]\} + \{Q_a, [Q_b, P_\mu]\} \\
 &= [P_\mu, \{Q_a, Q_b\}] = [P_\mu, a(\gamma^\nu C)_{ab}P_\nu + b(\sigma^{(4)\rho\sigma}C)_{ac}M_{\rho\sigma}] \\
 &= b(\sigma^{(4)\rho\sigma}C)_{ac}[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = -ib(\sigma^{(4)\rho\sigma}(\eta_{\sigma\mu}P_\rho - \eta_{\rho\mu}P_\sigma)C)_{ac} \\
 &= -ib((\sigma_{\rho\mu}^{(4)}P^\rho - \sigma_{\mu\rho}^{(4)}P^\rho)C)_{ac} \\
 &= 2ib\sigma_{\mu\rho}^{(4)}CP^\rho,
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la antisimetría de $\sigma_{\mu\nu}^{(4)}$. Entonces $b = 0$ y se concluye que

$$\{Q_a, Q_b\} = a(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu. \quad (5.36)$$

b) $X_\mu = M_{\mu\nu}$, entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= [M_{\mu\nu}, \{Q_a, Q_b\}] - \{Q_b, [M_{\mu\nu}, Q_a]\} + \{Q_a, [Q_b, M_{\mu\nu}]\} \\
 &= a(\gamma^\lambda C)_{ab}[M_{\mu\nu}, P_\lambda] + (\sigma_{\mu\nu})_{ac}\{Q_b, Q_c\} + (\sigma_{\mu\nu})_{bc}\{Q_a, Q_c\} \\
 &= a(\gamma^\lambda C)_{abi}(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu) + (\sigma_{\mu\nu})_{ac}a(\gamma^\lambda C)_{bc}P_\lambda + (\sigma_{\mu\nu})_{bc}a(\gamma^\lambda C)_{ac}P_\lambda
 \end{aligned}$$

Puesto que $a \neq 0$, La identidad de Jacobi impone

$$-(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu)(\gamma^\lambda iC)_{ab} = [(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ab} + (\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ba}]P_\lambda. \quad (5.37)$$

Se puede mostrar que esta ecuación (5.37) es consistente. Para esto, se puede simetrizar $\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda = \frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda\} + \frac{1}{2}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda]$ para escribir

$$\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C = \frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda\}C + \frac{1}{2}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda]C,$$

pero ⁷[3]:

$$\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda\} = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^5\gamma^\rho, \quad (5.38)$$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = i(\eta_{\nu\lambda}\gamma_\mu - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu), \quad (5.39)$$

⁷El resultado del conmutador (5.39) es conocido y se puede mostrar por cálculo directo, mientras que el resultado del anticonmutador (5.38) es menos conocido y se ha tomado siguiendo [3].

entonces el lado derecho de la ecuación (5.37) se escribe como

$$\begin{aligned}
 [(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ab} + (\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ba}]P_\lambda &= \left[\left(\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda\}C + \frac{1}{2}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda]C \right)_{ab} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda\}C + \frac{1}{2}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\lambda]C \right)_{ba} \right] P_\lambda \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2}i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(\gamma^5\gamma^\rho C)_{ab} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2}i(\eta_{\nu\lambda}\gamma_\mu C - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu C)_{ab} \\
 &\quad - \frac{1}{2}i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(\gamma^5\gamma^\rho C)_{ba} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}i(\eta_{\nu\lambda}\gamma_\mu C - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu C)_{ba} \right\} P^\lambda.
 \end{aligned}$$

Utilizando $C = i\gamma^2\gamma^0$ en la representación de Dirac, no es difícil probar que $(\gamma^5 C)^T = -\gamma^5 C$, con lo cual

$$\begin{aligned}
 (\gamma^5\gamma^\mu C)^T &= (\gamma^\mu C)^T \gamma^{5T} \stackrel{5.33}{=} \gamma^\mu C \gamma^{5T} \stackrel{A.150}{=} -\gamma^\mu (\gamma^5 C)^T \\
 &= \gamma^\mu \gamma^5 C \stackrel{A.135}{=} -\gamma^5 \gamma^\mu C,
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

de manera que

$$[(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ab} + (\sigma_{\mu\nu}\gamma^\lambda C)_{ba}]P_\lambda = i(\gamma_\mu C)_{ab}P_\nu - i(\gamma_\nu C)_{ab}P_\mu \tag{5.41}$$

lo que es una prueba de consistencia para la identidad de Jacobi (5.37) ya que el lado izquierdo es

$$-(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu)(\gamma^\lambda iC)_{ab} = i(\gamma_\mu C)_{ab}P_\nu - i(\gamma_\nu C)_{ab}P_\mu \tag{5.42}$$

4. Con todo esto se puede verificar que la graduación propuesta satisface la última identidad de Jacobi, es decir, cuando $X_\mu, X_\nu, X_\rho \in L_1$ (ecuación 5.14):

$$\begin{aligned}
 [Q_a, \{Q_b, Q_c\}] + [Q_c, \{Q_a, Q_b\}] \\
 + [Q_b, \{Q_c, Q_a\}] &= [Q_a, a(\gamma^\mu C)_{bc}P_\mu] + [Q_c, a(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu] \\
 &\quad + [Q_b, a(\gamma^\mu C)_{ca}P_\mu] \\
 &= a(\gamma^\mu C)_{bc}[Q_a, P_\mu] + a(\gamma^\mu C)_{ab}[Q_c, P_\mu] \\
 &\quad + a(\gamma^\mu C)_{ca}[Q_b, P_\mu] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que los objetos Q_a , con $a = 1, 2, 3, 4$, representan las componentes de un espinor de Majorana (véase la sección A.7), esto permite simplificar más el resultado de la

ecuación (5.36), es decir,

$$\{Q_a, Q_b\} = a(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu. \quad (5.43)$$

En efecto, la condición de Majorana (definición A.11) implica que

$$Q_a^C = Q_a = (C\bar{Q}^T)_a = C_{ab}\bar{Q}_b^T, \quad (5.44)$$

donde C es la matriz de conjugación de carga; de modo que al multiplicar C_{ca} por la izquierda en la última igualdad resulta

$$C_{ca}Q_a = (CQ)_c = C_{ca}C_{ab}(\bar{Q}^T)_b = (C^2\bar{Q}^T)_c = (-\bar{Q}^T)_c, \quad (5.45)$$

entonces

$$CQ = -\bar{Q}^T \implies Q^T C = \bar{Q} \quad (5.46)$$

Por tanto, para generadores de Majorana, al multiplicar por C la ecuación (5.43) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\}C_{bd} &= Q_a Q_b C_{bd} + Q_b C_{bd} Q_a = Q_a (Q^T C)_d + (Q^T C)_d Q_a \\ &= \{Q_a, \bar{Q}_d\} = a(\gamma^\mu C^2)_{ad} P_\mu = -a\gamma_{ad}^\mu P_\mu, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la ecuación (5.46). El valor de la constante a aún queda por definir, pero debe ser negativo con el fin de que P_0 sea definido positivo [3]; ⁸ típicamente se escoge para ser -2 . Por tanto, el resultado final es

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2(\gamma^\mu)_{ab} P_\mu. \quad (5.47)$$

Formulación de Weyl

El generador (espinorial) Q_a puede escribirse explícitamente en términos de espinores de Weyl como (véase el apéndice A.7)

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_b = Q^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} Q^B & \bar{Q}_{\dot{B}} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

de manera que en la representación quirral, la relación de anticonmutación (5.47) se escribe como

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^B & \bar{Q}_{\dot{B}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q^B & \bar{Q}_{\dot{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{A\dot{B}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} P_\mu,$$

⁸ P_0 debe ser definido positivo ya que está asociado a la energía del sistema.

de manera que

$$\{Q^A, Q^B\} = 0 = \{\bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\}, \quad (5.49)$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}} P_\mu, \quad (5.50)$$

$$\{\bar{Q}^{\dot{A}}, Q^B\} = 2(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B} P_\mu, \quad (5.51)$$

Utilizando el hecho de que

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}^{(4)} &= \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{4} [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] \\ &= \frac{i}{4} \left[\begin{pmatrix} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} (\sigma_{\mu\nu}^{(2)})_A^B & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}_{\mu\nu}^{(2)})_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde se han definido los arreglos

$$\sigma_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{i}{4} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu), \quad \bar{\sigma}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{i}{4} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu), \quad (5.53)$$

se puede mostrar que el conmutador (5.29) se escribe como

$$[M_{\mu\nu}, Q_A] = -(\sigma_{\mu\nu}^{(2)})_A^B Q_B, \quad (5.54)$$

$$[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{A}}] = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu}^{(2)})_{\dot{B}}^{\dot{A}} \bar{Q}^{\dot{B}}. \quad (5.55)$$

5.4. Variables de Grassmann

Para describir supersimetría de forma manifiesta, es necesario extender el espacio ordinario de coordenadas bosónicas a un *superespacio*, que incluye también coordenadas fermiónicas. Estas nuevas coordenadas no pueden ser números reales ni complejos comunes, ya que deben conmutar con bosones pero anticonmutar entre sí. Esto motiva la introducción de las *variables de Grassmann*, números anticomutativos que satisfacen $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$.

Definición 5.4 (Variables de Grassmann). *Se define el álgebra de Grassmann con n generadores, denotada como $G_n(K)$, como el álgebra asociativa unitaria sobre un cuerpo K (\mathbb{R} o \mathbb{C}), generada por un conjunto de símbolos $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, llamados **variables de Grassmann**, junto con la unidad 1, y sujeta a la relación de anticonmutación:*

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i, \quad \forall i, j.$$

■

En particular, esto implica que cada variable satisface la propiedad de **nilpotencia**:

$$\theta_i^2 = 0. \quad (5.56)$$

Un elemento arbitrario del álgebra de Grassmann es una combinación lineal de productos ordenados de las θ_i , por lo que cualquier elemento de $G_n(K)$ puede escribirse como [19]:

$$\Psi = a + \sum_i b_i \theta_i + \sum_{i < j} c_{ij} \theta_i \theta_j + \sum_{i < j < k} d_{ijk} \theta_i \theta_j \theta_k + \cdots + e \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n, \quad (5.57)$$

donde los coeficientes $a, b_i, c_{ij}, d_{ijk}, \dots, e$ pertenecen a K .

Dado que $\theta_i^2 = 0$, el número máximo de factores distintos en un producto no nulo es n , lo que implica que $G_n(K)$ es de **dimensión finita** 2^n como espacio vectorial sobre K . Una base natural está dada por [20]:

$$\{1, \theta_i, \theta_i \theta_j, \theta_i \theta_j \theta_k, \dots, \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n\}, \quad \text{con } i < j < k < \dots \quad (5.58)$$

5.4.1. Derivadas de Grassmann

Considere un conjunto de variables de n variables de Grassmann $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. Estos son números discretos, pero el símbolo de derivada izquierda (que actúa por izquierda de funciones de variables de Grassmann) puede definirse formalmente como [21]:

$$\frac{\partial \theta_A}{\partial \theta_B} \equiv \delta_{AB}. \quad (5.59)$$

A menudo se definen también las derivadas derechas, que actúan por la derecha de una función de las variables de Grassmann, pero en este trabajo solo se utilizan derivadas izquierdas, por lo que se omiten discusiones al respecto.

Para escribir una regla del producto se debe tener en cuenta la anticonmutatividad de las variables, es decir

$$\frac{\partial}{\partial \theta_A} (\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_r) = (\delta_{1A} \theta_2 \cdots \theta_r) - (\delta_{2A} \theta_1 \theta_3 \cdots \theta_r) + \cdots + (-1)^{r-1} (\delta_{rA} \theta_1 \cdots \theta_{r-1}). \quad (5.60)$$

Con esta regla se puede determinar la propiedad:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_A} [\theta_B f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)] = \frac{\partial \theta_B}{\partial \theta_A} f - \theta_B \frac{\partial f}{\partial \theta_A}, \quad (5.61)$$

donde f es una función de prueba que depende de las variables de Grassmann $\{\theta_i\}$. Entonces es fácil mostrar que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_A}, \theta_B \right\} f = \frac{\partial}{\partial \theta_A} (\theta_B f) + \theta_B \frac{\partial f}{\partial \theta_A} = \frac{\partial \psi_B}{\partial \psi_A} = \delta_{BA}. \quad (5.62)$$

Otra propiedad importante es que si $f = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, entonces [3]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_A}, \frac{\partial}{\partial \theta_B} \right\} f = 0. \quad (5.63)$$

Esta identidad puede verificarse directamente para funciones que consisten en productos de variables de Grassmann, como $f = \theta_1 \theta_2$, $f = \theta_1 \theta_2 \theta_3$, etc. Por inducción sobre el número de factores del monomio, se concluye que la ecuación (5.63) es válida para cualquier monomio en las variables θ_i . Como cualquier función $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ puede escribirse como combinación lineal finita de tales monomios (ya que $\theta_i^2 = 0$), y como la derivación es lineal, se deduce que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_A}, \frac{\partial}{\partial \theta_B} \right\} = 0. \quad (5.64)$$

Ahora se consideran espinores de Weyl de dos componentes θ^A y $\bar{\theta}^{\dot{A}}$ y se postula que sus componentes son variables de Grassmann, de manera que se definen las derivadas de Grassmann:

$$\begin{aligned} \partial_A &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta^A}, & \partial^A &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta_A}, \\ \bar{\partial}_{\dot{A}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}}, & \bar{\partial}^{\dot{A}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{A}}}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \partial_A \theta^B &= \delta_A^B, & \partial^A \theta_B &= \delta_B^A, & \partial_A \theta_B &= \delta_{BA} = \epsilon_{BA}, \\ \bar{\partial}_{\dot{A}} \bar{\theta}^{\dot{B}} &= \delta_{\dot{A}}^{\dot{B}}, & \bar{\partial}^{\dot{A}} \bar{\theta}_{\dot{B}} &= \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}, & \bar{\partial}_{\dot{A}} \bar{\theta}_{\dot{B}} &= \delta_{\dot{B}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{B}\dot{A}}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Los índices covariantes, contravariantes, puntuados y no puntuados son el nuevo factor en estas definiciones para las derivadas. Dichos índices se pueden subir y bajar utilizando la métrica:

$$\epsilon^{AB} \partial_B \theta^C = \epsilon^{AB} \delta_B^C = \epsilon^{AC} = -\epsilon^{CA} = -\partial^A \theta^C,$$

entonces

$$\epsilon^{AB} \partial_B = -\partial^A. \quad (5.67)$$

Similarmente se deduce que, en acuerdo con (5.67):

$$\epsilon_{AB} \partial^B = -\partial_A. \quad (5.68)$$

Relaciones similares se mantienen para las derivadas puntuadas $\bar{\partial}$:

$$\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{\partial}_{\dot{B}} = -\bar{\partial}^{\dot{A}}, \quad \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{\partial}^{\dot{B}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}}. \quad (5.69)$$

Un par de cálculos importantes son: ⁹

$$\partial_A(\theta\theta) = \partial_A\theta^B\theta_B = \delta_A^B\theta_B - \theta^B\epsilon_{BA} = 2\theta_A, \quad (5.70)$$

$$\bar{\partial}_{\dot{A}}(\bar{\theta}\bar{\theta}) = \bar{\partial}_{\dot{A}}\theta_{\dot{B}}\theta^{\dot{B}} = \epsilon_{\dot{B}\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{B}} - \bar{\theta}_{\dot{B}}\delta_{\dot{A}}^{\dot{B}} = -2\bar{\theta}_{\dot{A}}. \quad (5.71)$$

5.4.2. Integración de Grassmann

Ahora se investiga el concepto de integral de una función con respecto a variables de Grassmann. Considere una función f de una variable de Grassmann θ , $f(\theta)$. Esta función se expande en potencias de θ como

$$f(\theta) = f(0) + f^{(1)}\theta. \quad (5.72)$$

El símbolo $\int d\theta f(\theta) \equiv I(f)$ se define como [19]:

$$I(f) = \int d\theta f(\theta) \equiv f^{(1)}. \quad (5.73)$$

En este sentido se puede notar que $\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta)$. Se impone además la condición de linealidad:

$$\int d\theta [\alpha f(\theta) + \beta g(\theta)] = \alpha \int d\theta f(\theta) + \beta \int d\theta g(\theta). \quad (5.74)$$

Las ecuaciones (5.73) y (5.74) implican que se debe establecer [14]:

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta\theta = 1. \quad (5.75)$$

Es útil definir una función de la variable θ , $\delta(\theta)$,¹⁰ que haga verdadera la ecuación:

$$\int d\theta f(\theta)\delta(\theta) = f(0). \quad (5.76)$$

Es fácil ver que

$$\int d\theta f(\theta)\theta = f(0) \int d\theta\theta + f^{(1)} \int d\theta\theta^2 = f(0),$$

porque $\theta^2 = 0$ ya que es una variable de Grassmann. Entonces se concluye que

$$\delta(\theta) = \theta. \quad (5.77)$$

Para extender el análisis anterior a un álgebra de Grassmann G_2 generada por dos variables de

⁹Las contracciones de índices espinoriales en expresiones como $\theta\theta$ y $\bar{\theta}\bar{\theta}$ se estudian en la sección A.4 del apéndice.

¹⁰La notación $\delta(\theta)$ no hace referencia a una distribución delta de Dirac.

Grassmann θ_1 y θ_2 , se considera una función de estas variables, $f(\theta_1, \theta_2)$, expandida como

$$f(\theta_1, \theta_2) = f^{(0)} + f^{(1)}\theta_1 + f^{(2)}\theta_2 + f^{(3)}\theta_1\theta_2. \quad (5.78)$$

Para definir una integral $\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2)$, primero se establece que las cantidades $d\theta_i$ y θ_i , con $i = 1, 2$, anticonmutan [3]:

$$\{d\theta_A, d\theta_B\} = \{d\theta_A, \theta_B\} = 0, \quad (5.79)$$

de modo que con ayuda de la ecuación (5.75) se puede calcular:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 = \int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 \right) = 0, \quad (5.80)$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 = - \int d\theta_2 d\theta_1 \theta_1 = - \int d\theta_2 \left(\int d\theta_1 \theta_1 \right) = - \int d\theta_2 1 = 0, \quad (5.81)$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 = \int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) = 0, \quad (5.82)$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) \theta_1 = -1. \quad (5.83)$$

Utilizando estas ecuaciones puede mostrarse que para la función $f(\theta_1, \theta_2)$ de la ecuación (5.78), su integral $I(f)$ da:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int d\theta_1 d\theta_2 (f^{(0)} + f^{(1)}\theta_1 + f^{(2)}\theta_2 + f^{(3)}\theta_1\theta_2), \\ &= f^{(0)} \int d\theta_1 d\theta_2 + \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 + f^{(2)} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 + f^{(3)} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \\ &= -f^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

En el álgebra de Grassmann G_2 se puede introducir una notación alternativa que involucra contracciones $(\theta\theta) = \theta^A \theta_A$, donde A es un índice de espinor de Weyl, ya que estas contracciones son proporcionales a $\theta_1 \theta_2$. Así, en G_2 una función $f(\theta_A) = f(\theta_1, \theta_2)$ se puede expandir como:

$$f(\theta) = f(0) + \theta^A f_A^{(1)} + (\theta\theta) f^{(2)}. \quad (5.85)$$

Definiendo los elementos de volumen [1]:

$$d^2\theta \equiv -\frac{1}{4} d\theta^A d\theta^B \epsilon_{AB}, \quad (5.86)$$

$$d^2\bar{\theta} \equiv -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{A}} d\bar{\theta}_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}, \quad (5.87)$$

$$d^A \theta \equiv d^2\theta d^2\bar{\theta}, \quad (5.88)$$

es posible calcular:

$$\begin{aligned}
 \int d^2\theta(\theta\theta) &= -\frac{1}{4} \int d\theta^A d\theta^B \epsilon_{AB}(\theta\theta) \stackrel{A.112}{=} \frac{1}{2} \int d\theta^A d\theta^B \epsilon_{AB} \theta_1 \theta_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int d\theta^1 d\theta^2 \epsilon_{12} + d\theta^2 d\theta^1 \epsilon_{21} \theta_1 \theta_2 \\
 &= - \int d\theta^1 d\theta^2 \theta_1 \theta_2 = 1,
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\int d^2\bar{\theta}(\bar{\theta}\bar{\theta}) \stackrel{A.113}{=} -\frac{1}{2} \int d\bar{\theta}_{\dot{A}} d\bar{\theta}_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{\theta}_{\dot{1}} \bar{\theta}_{\dot{2}} = - \int d\bar{\theta}_{\dot{1}} d\bar{\theta}_{\dot{2}} \bar{\theta}_{\dot{1}} \bar{\theta}_{\dot{2}} = 1, \tag{5.90}$$

$$\int d^2\theta = 0 = \int d^2\bar{\theta}, \tag{5.91}$$

$$\int d^2\theta \theta_A = 0 = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{A}}, \tag{5.92}$$

de modo que, si en G_2 se define una función $\delta^2(\theta)$ tal que:

$$\int d^2\theta f(\theta) \delta^2(\theta) = f(0), \tag{5.93}$$

entonces esta deberá ser $\delta^2(\theta) = \theta\theta$ ya que esto garantiza:

$$\begin{aligned}
 \int d^2\theta f(\theta)(\theta\theta) &= \int d^2\theta (f(0) + \theta^A f_A^{(1)} + (\theta\theta) f^{(2)})(\theta\theta) \\
 &= f(0) \int d^2\theta (\theta\theta) = f(0).
 \end{aligned}$$

Un razonamiento similar se puede hacer para un álgebra de Grassmann G_2 generada por las variables $\bar{\theta}^{\dot{A}}$ y concluir que:

$$\delta^2(\theta) = \theta\theta, \quad \delta^2(\bar{\theta}) = \bar{\theta}\bar{\theta}. \tag{5.94}$$

Con todo esto, queda mencionar que θ_A y $\bar{\theta}^{\dot{A}}$ con $A, \dot{A} = 1, 2$, generan un álgebra de Grassmann G_4 , donde tiene sentido calcular:

$$\begin{aligned}
 \int d^4\theta f(\theta) \delta^2(\bar{\theta}) &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [f(0) + \theta^A f_A^{(1)} + (\theta\theta) f^{(2)}](\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
 &= \int d^2\theta \{f(0) + \theta^A f_A^{(1)} + (\theta\theta) f^{(2)}\} \\
 &= f^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Más aún, en G_4 se pueden construir *supercampos*, como se verá en el capítulo siguiente. Lo

importante aquí es que la integral de un supercampo Φ , como el de la ecuación (6.1), da:

$$\begin{aligned} \int d^4\theta\Phi &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\{f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)m(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})n(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) \\ &\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x)\} \\ &= d(x). \end{aligned} \quad (5.96)$$

5.5. Superespacio

El superespacio es una extensión del espacio de Minkowski. Los elementos del superespacio reciben el nombre de supercoordenadas las cuales son las cuatro coordenadas espacio temporales x^μ y cuatro variables de Grassmann,

$$\{\theta_A\}_{A=1,2}, \quad \text{y} \quad \{\bar{\theta}_{\dot{A}}\}_{\dot{A}=1,2}.$$

Estas cantidades que expanden el espacio de Minkowski a un superespacio son espinores del Weyl de dos componentes y así deben entenderse los índices y las contracciones entre estas cantidades. El espacio resultante es, por tanto, un espacio de dimensión ocho y un punto se especifica por $(x_\mu, \theta_A, \bar{\theta}_{\dot{A}})$. Con la ayuda de estos parámetros de Grassmann se pueden escribir las combinaciones lineales o contracciones invariantes de Lorentz:

$$\theta Q = \theta^A Q_A = -\theta_A Q^A, \quad \bar{\theta}\bar{Q} = \bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{Q}^{\dot{A}} = -\bar{\theta}^{\dot{A}}\bar{Q}_{\dot{A}}, \quad (5.97)$$

las cuales permiten pasar del anticonmutador entre Q_A y $\bar{Q}_{\dot{A}}$ a un conmutador entre θQ y $\bar{\theta}\bar{Q}$. Para ver esto, se calcula:

$$\begin{aligned} \theta^A\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\}\bar{\theta}^{\dot{B}} &= \theta^A 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}} P_\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \\ &= \theta^A Q_A \bar{Q}_{\dot{B}} \bar{\theta}^{\dot{B}} + \theta^A \bar{Q}_{\dot{B}} Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}. \end{aligned}$$

Este objeto deberá actuar sobre una función de prueba $f(x, \theta, \bar{\theta})$ definida en el superespacio y, para desarrollar este cálculo, es necesario generalizar la ecuación (5.61) como:

$$\bar{\partial}_{\dot{A}}(\bar{\theta}^{\dot{B}} f) = (\bar{\partial}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{B}})f - \theta^{\dot{B}}\partial_{\dot{A}}f, \quad (5.98)$$

de modo que si se asume que Q_A y $\bar{Q}_{\dot{A}}$ son operadores lineales que actúan sobre estas funciones de prueba, estos podrían representarse como operadores diferenciales y, por tanto, escribir [3, 15]:

$$Q_A \sim \partial_A, \quad \bar{Q}_{\dot{B}} \sim \bar{\partial}_{\dot{B}}, \quad \implies \quad (Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}) = 0, \quad (\bar{Q}_{\dot{B}} \theta^A) = 0, \quad (5.99)$$

y, en virtud de (5.98), también se tiene:

$$\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}} = (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) - \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}}, \quad (5.100)$$

$$\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A = (\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A) - \theta^A\bar{Q}_{\dot{B}}, \quad \implies \quad \theta^A\bar{Q}_{\dot{B}} = (\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A) - \bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A. \quad (5.101)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \theta^A\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\}\bar{\theta}^{\dot{B}} &= \theta^A Q_A [(\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) - \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}}] + [(\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A) - \bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A] Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}} \\ &= \theta^A Q_A (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) - \theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}} + (\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A) Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}} - \bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}} \\ &= -\theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}} + \theta^A Q_A (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) + \bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A \bar{\theta}^{\dot{B}} Q_A - \bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A (Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}) \\ &= -\theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}} + \theta^A Q_A (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) - \bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}\theta^A Q_A \\ &= -\theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}} + \theta^A Q_A (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}) + \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A Q_A - (\bar{Q}_{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}})\theta^A Q_A \\ &= +\theta^A Q_A \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}} - \bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}}\theta^A Q_A, \\ &= (\theta Q)(\bar{\theta}\bar{Q}) - (\bar{\theta}\bar{Q})(\theta Q), \end{aligned} \quad (5.102)$$

y por tanto se obtiene el conmutador:

$$[\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}] = 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu. \quad (5.103)$$

De igual forma, utilizando las propiedades (5.99), (5.100) y (5.101), se pueden probar las relaciones [14]:

$$[P_\mu, (\theta Q)] = [P_\mu, (\bar{\theta}\bar{Q})] = 0, \quad (5.104)$$

$$[(\theta Q), (\theta\sigma_\mu\bar{\theta})] = [(\bar{\theta}\bar{Q}), (\theta\sigma_\mu\bar{\theta})] = 0. \quad (5.105)$$

5.6. Transformaciones Supersimétricas

Con los generadores supersimétricos θQ , $\bar{\theta}\bar{Q}$ y sus correspondientes reglas de conmutación bien definidas, es posible integrar la superálgebra en una estructura de grupo: el *grupo de super Poincaré*, cuyos elementos generales se escriben como [1]:

$$g = e^{-ix \cdot P + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q} + \frac{i}{2}\omega \cdot M}, \quad (5.106)$$

donde $\omega \cdot M = \omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ representa las transformaciones de Lorentz.

5.6.1. Transformaciones Finitas

Las transformaciones supersimétricas finitas corresponden a elementos del subgrupo de *supertraslaciones*, generado por los operadores de traslación P_μ y los generadores supersimétricos

$Q_A, \bar{Q}^{\dot{A}}$, los cuales actúan sobre funciones definidas en el superespacio. Los operadores que describen la acción de este grupo de supersimetría tienen la forma típica [1, 3]:

$$L(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta} \bar{Q}}, \quad (5.107)$$

$$L_1(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q} \cdot e^{i\bar{\theta} \bar{Q}}, \quad (5.108)$$

$$L_2(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = e^{-ix^\mu P_\mu + i\bar{\theta} \bar{Q}} \cdot e^{i\theta Q}. \quad (5.109)$$

En este sentido, el superespacio se puede entender como el espacio de parámetros del grupo de supertraslaciones.

Utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff resulta que

$$\begin{aligned} L_1(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) &= e^{-i(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu + i\theta Q} \cdot e^{i\bar{\theta} \bar{Q}}, \\ &= e^{-i(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta} \bar{Q} + \frac{1}{2}[-i(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu + i\theta Q, i\bar{\theta} \bar{Q}] + \dots}, \\ &= e^{-i(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta} \bar{Q} + \frac{1}{2}(-i(x^\mu [P_\mu, \bar{\theta} \bar{Q}] + i[\theta\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu, \bar{\theta} \bar{Q}]) - [\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}])}, \\ &= e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta} \bar{Q}}, \\ &\stackrel{5.107}{=} L(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado las ecuaciones (5.103), (5.104) y (5.105) para obtener la penúltima ecuación. Este cálculo prueba que:

$$L_1(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = L(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}), \quad (5.110)$$

y de manera similar se muestra que:

$$L_2(x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}) = L(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}). \quad (5.111)$$

Estas tres transformaciones, L , L_1 y L_2 dan lugar a tres definiciones diferentes de *supercampos*, $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$,¹¹ los cuales se entienden como funciones con valores de operador definidas en el superespacio [2]. Considere una configuración inicial de campo Φ_0 definida como:

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0, 0, 0). \quad (5.112)$$

Los campos Φ , Φ_1 y Φ_2 se definen en relación a Φ_0 , dependiendo de si este transforma bajo L , L_1 o L_2 , respectivamente, es decir [1]:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv L(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0 L^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (5.113)$$

$$\Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv L_1(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0 L_1^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (5.114)$$

$$\Phi_2(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv L_2(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0 L_2^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (5.115)$$

¹¹Los supercampos $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ son estudiados con detalle en el capítulo 6.

Dada la relación entre L , L_1 y L_2 , se puede mostrar que

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_1(x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_2(x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}). \quad (5.116)$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente: Bajo una transformación finita supersimétrica, denotada por T_α , los supercampos Φ , Φ_1 y Φ_2 transforman como:

$$T_\alpha\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}), \quad (5.117)$$

$$T_\alpha\Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_1(x + 2i\theta\sigma\bar{\alpha} + i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}), \quad (5.118)$$

$$T_\alpha\Phi_2(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_2(x - 2i\alpha\sigma\bar{\theta} - i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}). \quad (5.119)$$

Para ver este resultado, se debe entender que la transformación supersimétrica T_α es una *traslación* en el superespacio y es mediada por un operador $L(0, \alpha, \bar{\alpha})$ que actúa sobre el supercampo $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ en la forma:

$$\begin{aligned} T_\alpha\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= L(0, \alpha, \bar{\alpha})\Phi(x, \theta, \bar{\theta})L^{-1}(0, \alpha, \bar{\alpha}), \\ &= L(0, \alpha, \bar{\alpha})L(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0L^{-1}(x, \theta, \bar{\theta})L^{-1}(0, \alpha, \bar{\alpha}), \\ &= [L(0, \alpha, \bar{\alpha})L(x, \theta, \bar{\theta})]\Phi_0[L(0, \alpha, \bar{\alpha})L(x, \theta, \bar{\theta})]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

De manera similar, L_1 y L_2 median la transformación T_α para supercampos Φ_1 y Φ_2 como se verá más adelante. Retomando la última ecuación, resta calcular:

$$\begin{aligned} L(0, \alpha, \bar{\alpha})L(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\alpha Q + i\bar{\alpha}\bar{Q}} e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}}, \\ &= e^{i\alpha Q + i\bar{\alpha}\bar{Q} - ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q} + \frac{1}{2}[i\alpha Q + i\bar{\alpha}\bar{Q}, -ix^\mu P_\mu + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}]}, \\ &= e^{-ix^\mu P_\mu + i(\alpha + \theta)Q + i(\bar{\alpha} + \bar{\theta})\bar{Q} - \frac{1}{2}([\alpha Q, \bar{\theta}\bar{Q}] - [\theta Q, \bar{\alpha}\bar{Q}])}, \\ &= e^{-i(x^\mu + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta})P_\mu + i(\alpha + \theta)Q + i(\bar{\alpha} + \bar{\theta})\bar{Q}}, \\ &\stackrel{5.107}{=} L(x^\mu + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \alpha + \theta, \bar{\alpha} + \bar{\theta}). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Sustituyendo (5.121) en (5.120) se obtiene

$$\begin{aligned} T_\alpha\Phi &= L(x^\mu + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \alpha + \theta, \bar{\alpha} + \bar{\theta})\Phi_0[L(x^\mu + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \alpha + \theta, \bar{\alpha} + \bar{\theta})]^{-1}, \\ &\stackrel{5.113}{=} \Phi(x^\mu + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \alpha + \theta, \bar{\alpha} + \bar{\theta}). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Esta es la ecuación (5.117).

Como consecuencia de la relación entre T_α y $L(0, \alpha, \bar{\alpha})$, la transformación T_α deberá aplicarse

sobre Φ_1 y Φ_2 mediante la forma

$$\begin{aligned} T_\alpha \Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) &= L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})\Phi_1 L_1^{-1}(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \\ &= L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0 L_1^{-1}(x, \theta, \bar{\theta})L_1^{-1}(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \\ &= [L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta})]\Phi_0 [L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta})]^{-1} \end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned} T_\alpha \Phi_2(x, \theta, \bar{\theta}) &= L_2(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})\Phi_1 L_2^{-1}(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \\ &= L_2(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_2(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_0 L_2^{-1}(x, \theta, \bar{\theta})L_2^{-1}(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \\ &= [L_2(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_2(x, \theta, \bar{\theta})]\Phi_0 [L_2(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_2(x, \theta, \bar{\theta})]^{-1} \end{aligned} \quad (5.124)$$

Resta entonces calcular, en cada caso:

$$L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta}), \quad \text{y} \quad L_2(-i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_2(x, \theta, \bar{\theta}).$$

L_1 se escribe en su forma exponencial como los productos:

$$L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i(i\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha})P_\mu + i\alpha Q} e^{i\bar{\alpha}\bar{Q}} e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q} e^{i\bar{\theta}\bar{Q}}. \quad (5.125)$$

Dado que los conmutadores de conmutadores de generadores P_μ y Q o \bar{Q} se anulan por la graduación de álgebra, para el propósito actual la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff puede escribirse en la forma

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = e^{A+B+[A,B]+\frac{1}{2}[B,A]} = e^{B+[A,B]} e^A, \quad (5.126)$$

de manera que definiendo

$$e^A = e^{i\bar{\alpha}\bar{Q}}, \quad e^B = e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q}, \quad (5.127)$$

la ecuación (5.125) se reescribe utilizando (5.126) como

$$\begin{aligned} L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha})L_1(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha}P_\mu + i\alpha Q} e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q + [i\bar{\alpha}\bar{Q}, -ix^\mu P_\mu + i\theta Q]} e^{i\bar{\alpha}\bar{Q}} e^{i\bar{\theta}\bar{Q}} \\ &= e^{\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha}P_\mu + i\alpha Q} e^{-ix^\mu P_\mu + i\theta Q + [\theta Q, \bar{\alpha}\bar{Q}]} e^{i(\bar{\alpha}+\bar{\theta})\bar{Q}} \\ &= e^{\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha}P_\mu + i\alpha Q} e^{-i(x^\mu + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha})P_\mu + i\theta Q} e^{i(\bar{\alpha}+\bar{\theta})\bar{Q}} \\ &= e^{-i(x^\mu + i\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha} + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha})P_\mu + i(\alpha+\theta)Q} e^{i(\bar{\alpha}+\bar{\theta})\bar{Q}} \\ &\stackrel{5.108}{=} L_1(x^\mu + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha} + i\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (5.128)$$

De aquí que la ecuación (5.123) se reescriba como

$$T_\alpha \Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_1(x^\mu + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha} + i\alpha\sigma^\mu\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}).$$

De manera similar se deduce de la ecuación (5.124) que

$$T_\alpha \Phi_2(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_2(x^\mu - 2i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} - i\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}).$$

5.6.2. Transformaciones Infinitesimales

Esta sección tiene el propósito de encontrar una representación diferencial de los operadores Q_A y $\bar{Q}_{\dot{A}}$, idea que fue motivada en la ecuación (5.99). Para comenzar, se recuerda que para una función de una variable $f(x)$ que admite una expansión en serie de potencias, puede expandirse $f(x+a)$ alrededor de x como:

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} a^n. \quad (5.129)$$

Similarmente, considere una expansión en serie de Taylor del supercampo $\Phi(x + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \theta + \alpha + \bar{\theta} + \bar{\alpha})$ alrededor del punto $(x, \theta, \bar{\theta})$,

$$\begin{aligned} \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \theta + \alpha + \bar{\theta} + \bar{\alpha}) &= \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) + i(\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} - \alpha\sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(x, \theta, \bar{\theta}) + \bar{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}}(x, \theta, \bar{\theta}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.130)$$

donde α y $\bar{\alpha}$ son, bajo el grupo de Lorentz, espinores de Weyl (y por tanto, también variables de Grassmann) que parametrizan o especifican la transformación supersimétrica infinitesimal que actúa sobre el supercampo Φ . Entonces:

$$\begin{aligned} \delta_s \Phi &= \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \theta + \alpha + \bar{\theta} + \bar{\alpha}) - \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \left[i(\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} - \alpha\sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + \dots \right] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Solamente que, por otra parte,

$$\begin{aligned} \delta_s \Phi &= T_\alpha \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) - \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= L(0, \alpha, \bar{\alpha}) \Phi L^{-1}(0, \alpha, \bar{\alpha}) - \Phi \\ &\equiv e^A \Phi e^{-A} - \Phi, \end{aligned} \quad (5.132)$$

donde se ha definido $A \equiv i\alpha Q + i\bar{\alpha} \bar{Q}$. Pero [22],

$$\begin{aligned} e^A \Phi e^{-A} &= \Phi + [A, \Phi] + \frac{1}{2} [A[A, \Phi]] + \dots \\ &= \Phi + [i\alpha Q + i\bar{\alpha} \bar{Q}, \Phi] + \dots \\ &= \Phi + i[\alpha Q, \Phi] + i[\bar{\alpha} \bar{Q}, \Phi] + \dots \end{aligned}$$

La ecuación (5.132) queda entonces como

$$\delta_s \Phi = i[\alpha Q, \Phi] + i[\bar{\alpha} \bar{Q}, \Phi] + \dots \quad (5.133)$$

La acción de este operador sobre una función de prueba F tendrá el término

$$\begin{aligned} i[\alpha Q, \Phi] F(x, \theta, \bar{\theta}) &= i(\alpha Q \Phi - \Phi \alpha Q) F \\ &= i(\alpha Q(\Phi F) - \Phi(\alpha Q F)) \\ &= i[(\alpha Q \Phi) F + \Phi(\alpha Q F) - \Phi(\alpha Q F)] \\ &= i(\alpha Q \Phi) F. \end{aligned} \quad (5.134)$$

De manera similar se muestra que $i[\bar{\alpha} \bar{Q}, \Phi] = i\bar{\alpha}(\bar{Q} \Phi)$. Entonces la ecuación (5.133) se escribe como

$$\delta_s \Phi = i\alpha(Q\Phi) + i\bar{\alpha}(\bar{Q}\Phi) + \dots = [i\alpha Q + i\bar{\alpha} \bar{Q} + \dots] \Phi. \quad (5.135)$$

Comparando las ecuaciones (5.135) y (5.131) a primer orden se deduce que

$$\begin{aligned} i\alpha^A Q_A + i\bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{Q}^{\dot{A}} &= i(\theta^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} - \alpha^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}}) \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \\ &= \alpha^A (\partial_A - i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu) + i\theta^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \bar{\alpha}_{\dot{A}} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \\ &= \alpha^A (\partial_A - i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu) + \bar{\alpha}_{\dot{A}} (\bar{\partial}^{\dot{A}} - i\theta^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \partial_\mu). \end{aligned}$$

De aquí surge la representación diferencial de los generadores Q_A y $\bar{Q}^{\dot{A}}$:

$$Q_A = -i(\partial_A - i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu), \quad (5.136)$$

$$\bar{Q}^{\dot{A}} = -i(\bar{\partial}^{\dot{A}} - i(\bar{\sigma}^\mu \theta)^{\dot{A}} \partial_\mu), \quad (5.137)$$

donde en la última ecuación se utilizó el hecho de que

$$\theta^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = -\theta_C \epsilon^{CA} \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}C} \theta_C = (\bar{\sigma}^\mu \theta)^{\dot{A}}.$$

El índice de $\bar{Q}^{\dot{A}}$ se puede bajar escribiendo

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\dot{B}} &= \epsilon_{\dot{B}\dot{A}} \bar{Q}^{\dot{A}} = -i\epsilon_{\dot{B}\dot{A}} (\bar{\partial}^{\dot{A}} - i\theta^A \sigma_{AC}^\mu \epsilon^{\dot{C}\dot{A}} \partial_\mu) \\ &= -i(\epsilon_{\dot{B}\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} - i\theta^A \sigma_{AC}^\mu \epsilon_{\dot{B}\dot{A}} \epsilon^{\dot{C}\dot{A}} \partial_\mu) \\ &= i(\bar{\partial}_{\dot{B}} - i\theta^A \sigma_{AB}^\mu \partial_\mu), \end{aligned} \quad (5.138)$$

de manera que se puede verificar:

$$\begin{aligned}
 \{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} &= \{-i(\partial_A - i\sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu), i(\bar{\partial}_{\dot{B}} - i\theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu)\} \\
 &= \{\partial_A, \bar{\partial}_{\dot{B}}\} - i\{\partial_A, \theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu\} - i\{\sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \bar{\partial}_{\dot{B}}\} - \{\sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu\} \\
 &= -i\{\partial_A(\theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu) + \theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu \partial_A\} - i\{\sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu \bar{\partial}_{\dot{B}} + \bar{\partial}_{\dot{B}}(\sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu)\} \\
 &= -i\{(\partial_A \theta^B) \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu\} - i\{\sigma_{AA}^\mu (\bar{\partial}_{\dot{B}} \bar{\theta}^{\dot{A}}) \partial_\mu\} = 2\sigma_{AB}^\mu P_\mu.
 \end{aligned}$$

De forma similar pueden encontrarse representaciones infinitesimales de los operadores Q y \bar{Q} para los supercampos Φ_1 y Φ_2 . Por ejemplo, partiendo de

$$\begin{aligned}
 T_\alpha \Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) &= \Phi_1(x + 2i\theta\sigma\bar{\alpha} + i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) \\
 &= L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \Phi_1 L_1^{-1}(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}),
 \end{aligned} \tag{5.139}$$

se puede despreciar términos de segundo orden en α (para α infinitesimal) y expandir el lado izquierdo de la última igualdad como

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(x + 2i\theta\sigma\bar{\alpha} + i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) &= \Phi_1(x, \theta, \bar{\theta}) + \{2i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}}\} \Phi_1 \\
 &= \{1 + \alpha^A \partial_A + 2i\theta^A \sigma_{A\dot{B}}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \bar{\alpha}_{\dot{A}} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}}\} \Phi_1 \\
 &= \{1 + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} (\bar{\partial}^{\dot{A}} - 2i\theta^A \sigma_{A\dot{B}}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \partial_\mu)\} \Phi_1.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el lado derecho se expande como

$$\begin{aligned}
 L_1(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) \Phi_1 L_1^{-1}(i\alpha\sigma\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}) &= e^{\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu + i\alpha Q^{(1)}} e^{i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}} \Phi_1 e^{\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu - i\alpha Q^{(1)}} e^{-i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}} \\
 &\stackrel{A.11}{=} e^{\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu + i\alpha Q^{(1)} + i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)} + \frac{1}{2}[i\alpha Q^{(1)}, i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}]} \Phi_1 \\
 &\quad e^{\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu - i\alpha Q^{(1)} - i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)} + \frac{1}{2}[-i\alpha Q^{(1)}, -i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}]} \\
 &= e^{-\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu + i\alpha Q^{(1)} + i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}} \Phi_1 e^{-\alpha\sigma^\mu \bar{\alpha} P_\mu - i\alpha Q^{(1)} - i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}} \\
 &\approx (1 + i\alpha Q^{(1)} + i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}) \Phi_1 (1 - i\alpha Q^{(1)} - i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)}) \\
 &= (\Phi_1 + i\alpha Q^{(1)} \Phi_1 + i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)} \Phi_1) \\
 &\quad - \Phi_1 i\alpha Q^{(1)} - \Phi_1 i\bar{\alpha} \bar{Q}^{(1)} \\
 &= \Phi_1 + i\alpha^A [Q_A^{(1)}, \Phi_1] + i\bar{\alpha}_{\dot{A}} [\bar{Q}^{(1)\dot{A}}, \Phi_1] \\
 &\stackrel{5.134}{=} (1 + i\alpha^A Q_A^{(1)} + i\bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{Q}^{(1)\dot{A}}) \Phi_1,
 \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene escribiendo L_1^{-1} con ayuda de la ecuación (5.126). Al comparar ambos miembros de la ecuación (5.139) que se venía desarrollando, se deduce la representación diferencial de $Q^{(1)}$ y $\bar{Q}^{(1)}$:

$$Q_A^{(1)} = -i\partial_A, \quad \bar{Q}^{(1)\dot{A}} = -i(\bar{\partial}^{\dot{A}} - 2i\theta^A \sigma_{A\dot{B}}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \partial_\mu). \tag{5.140}$$

De manera análoga se encuentran las representaciones para $Q^{(2)}$ y $\bar{Q}^{(2)}$ como

$$Q_A^{(2)} = -i(\partial_A - i\sigma_{AB}^\mu \partial_\mu), \quad \bar{Q}^{(2)\dot{A}} = -i\bar{\partial}^{\dot{A}}. \quad (5.141)$$

Estas expresiones también son consistentes con los anticonmutadores:

$$\{Q_A^{(1)}, Q_{\dot{B}}^{(1)}\} = 2\sigma_{AB}^\mu P_\mu = \{Q_A^{(2)}, Q_{\dot{B}}^{(2)}\}. \quad (5.142)$$

5.7. Derivada Covariante

Se puede definir una *derivada covariante* por cada tipo de campo. Para un campo Φ se define:

$$\begin{aligned} D_A &\equiv \partial_A + i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu, \\ D^{\dot{A}} &\equiv \epsilon^{\dot{A}B} D_B = -\partial^{\dot{A}} - i\bar{\theta}^{\dot{C}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{C}A} \partial_\mu, \end{aligned} \quad (5.143)$$

y,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{A}} &\equiv -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^B \sigma_{BA}^\mu \partial_\mu, \\ \bar{D}^{\dot{A}} &\equiv \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{D}_{\dot{B}} = \bar{\partial}^{\dot{A}} + i\bar{\sigma}^{\mu\dot{A}C} \theta_C \partial_\mu. \end{aligned} \quad (5.144)$$

La propiedad principal de la derivada covariante es que conmuta con las transformaciones infinitesimales SUSY, es decir que [2, 3, 15]:

$$[D_A, \delta_s] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (5.145)$$

Esto se ve calculando explícitamente

$$\begin{aligned} [D_A, \delta_s] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &\stackrel{5.135}{=} [D_A, i\alpha Q + i\bar{\alpha} \bar{Q}] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= i[D_A, \alpha^B Q_B] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) + i[D_A, \bar{\alpha}_{\dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}}] \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= i(D_A \alpha^B Q_B - \alpha^B Q_B D_A) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad + i(D_A \bar{\alpha}_{\dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}} - \bar{\alpha}_{\dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}} D_A) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= -i\alpha^B (D_A Q_B + Q_B D_A) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad - i\bar{\alpha}_{\dot{B}} (D_A \bar{Q}^{\dot{B}} + \bar{Q}^{\dot{B}} D_A) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= -i\alpha^B \{D_A, Q_B\} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) - i\bar{\alpha}_{\dot{B}} \{D_A, \bar{Q}^{\dot{B}}\} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

porque

$$\begin{aligned}
 \{D_A, Q_B\} &= -i \left\{ \partial_A + i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu, \partial_B - i\sigma_{BC}^\nu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\nu \right\} \\
 &= -i \{ \partial_A, \partial_B \} - \{ \partial_A, \sigma_{BC}^\nu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\nu \} \\
 &\quad + \{ \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu, \partial_B \} - i \{ \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu, \sigma_{BC}^\nu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\nu \} \\
 &= 0. \\
 i\{D_A, \bar{Q}^{\dot{B}}\} &= \{ \partial_A + i\sigma_{AC}^\mu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\mu, \bar{\partial}^{\dot{B}} - i\theta^C \sigma_{CD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu \} \\
 &= \{ \partial_A, \bar{\partial}^{\dot{B}} \} - i \{ \partial_A, \theta^C \sigma_{CD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu \} + i \{ \sigma_{AC}^\mu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\mu, \bar{\partial}^{\dot{B}} \} \\
 &\quad + \{ \sigma_{AC}^\mu \bar{\theta}^{\dot{C}} \partial_\mu, \theta^C \sigma_{CD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu \} \\
 &= -i\sigma_{AD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu + i\sigma_{AC}^\mu (\bar{\partial}^{\dot{B}} \bar{\theta}^{\dot{C}}) \partial_\mu \\
 &= -i\sigma_{AD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu + i\sigma_{AC}^\mu (-\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}) \partial_\mu \\
 &= -i\sigma_{AD}^\nu \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \partial_\nu + i\sigma_{AC}^\nu \epsilon^{\dot{C}\dot{B}} \partial_\nu \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que

$$[\bar{D}_{\dot{A}}, \delta_s] \Phi = 0. \quad (5.146)$$

También pueden definirse derivadas covariantes $D_A^{(1)}, \bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}$ y $D_A^{(2)}, \bar{D}_{\dot{A}}^{(2)}$ para los campos Φ_1 y Φ_2 , tal que

$$[D_A^{(1)}, \delta_s] \Phi_1 = 0, \quad [\bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}, \delta_s] \Phi_1 = 0, \quad (5.147)$$

$$[D_A^{(2)}, \delta_s] \Phi_2 = 0, \quad [\bar{D}_{\dot{A}}^{(2)}, \delta_s] \Phi_2 = 0. \quad (5.148)$$

Dichas derivadas covariantes están dadas por

$$D_A^{(1)} \equiv \partial_A + 2i\sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{A}}^{(1)} \equiv -\bar{\partial}_{\dot{A}}, \quad (5.149)$$

$$D_A^{(2)} \equiv \partial_A, \quad \bar{D}_{\dot{A}}^{(2)} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - 2i\theta^B \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial_\mu. \quad (5.150)$$

Es importante notar que las derivadas covariantes satisfacen un álgebra similar al de los gene-

radoreos Q_A y $\bar{Q}_{\dot{A}}$:

$$\begin{aligned} \{D_A, D_B\} &= \{\partial_A + i\sigma_{A\dot{A}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \partial_B + i\sigma_{B\dot{B}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu\} \\ &= \{\partial_A, \partial_B\} + i\sigma_{B\dot{B}}^\nu \{\partial_A, \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu\} + i\sigma_{A\dot{A}}^\mu \{\bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \partial_B\} \\ &\quad + i\sigma_{A\dot{A}}^\mu i\sigma_{B\dot{B}}^\nu \{\bar{\theta}^{\dot{A}}, \bar{\theta}^{\dot{B}}\} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.151}$$

$$\begin{aligned} \{D_A, \bar{D}_{\dot{B}}\} &= \{\partial_A + i\sigma_{A\dot{A}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, -\bar{\partial}_{\dot{B}} - i\theta^B \sigma_{B\dot{B}}^\nu \partial_\nu\} \\ &= -\{\partial_A, \bar{\partial}_{\dot{B}}\} - i\{\partial_A, \theta^B \partial_\nu\} \sigma_{B\dot{B}}^\nu - i\sigma_{A\dot{A}}^\mu \{\bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \bar{\partial}_{\dot{B}}\} \\ &\quad + \sigma_{A\dot{A}}^\mu \{\bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\mu, \theta^B \partial_\nu\} \sigma_{B\dot{B}}^\nu \\ &= -i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \partial_\nu - i\sigma_{A\dot{B}}^\mu \partial_\mu \\ &= -2i\sigma_{A\dot{B}}^\mu \partial_\mu = 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu P_\mu. \end{aligned} \tag{5.152}$$

A partir de estas dos ecuaciones (5.151) y (5.152) se pueden deducir las siguientes relaciones útiles: Se comienza multiplicando $\bar{D}^{\dot{B}}$ por la derecha de la ecuación (5.152) y se obtiene

$$D_A \bar{D}^2 + \bar{D}_{\dot{B}} D_A \bar{D}^{\dot{B}} = 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{D}^{\dot{B}} P_\mu. \tag{5.153}$$

Por otro lado, multiplicando esta misma ecuación por $\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}$ se obtiene que

$$(D_A \bar{D}_{\dot{B}} + \bar{D}_{\dot{B}} D_A) \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} = -(D_A \bar{D}^{\dot{C}} + \bar{D}^{\dot{C}} D_A) = 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu P_\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{C}},$$

entonces (redefiniendo índices $\dot{B} \leftrightarrow \dot{C}$)

$$D_A \bar{D}^{\dot{B}} = 2\sigma_{A\dot{C}}^\mu P_\mu \epsilon^{\dot{C}\dot{B}} - \bar{D}^{\dot{B}} D_A.$$

Sustituyendo esto en la ecuación (5.153) resulta que

$$\begin{aligned} D_A \bar{D}^2 + \bar{D}_{\dot{B}} (2\sigma_{A\dot{C}}^\mu P_\mu \epsilon^{\dot{C}\dot{B}} - \bar{D}^{\dot{B}} D_A) &= D_A \bar{D}^2 + 2\sigma_{A\dot{C}}^\mu P_\mu \bar{D}_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{C}\dot{B}} - \bar{D}_{\dot{B}} \bar{D}^{\dot{B}} D_A \\ &= [D_A, \bar{D}^2] - 2\sigma_{A\dot{C}}^\mu P_\mu \bar{D}^{\dot{C}} \\ &\stackrel{5.153}{=} 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{D}^{\dot{B}} P_\mu. \end{aligned}$$

Entonces se concluye que

$$[D_A, \bar{D}^2] = 4\sigma_{A\dot{A}}^\mu \bar{D}^{\dot{A}} P_\mu \tag{5.154}$$

De manera similar se muestra que

$$[\bar{D}_{\dot{A}}, D^2] = -4D^A \sigma_{A\dot{A}}^\mu P_\mu. \tag{5.155}$$

Se continúa multiplicando D^A por la izquierda de la ecuación (5.154) y $\bar{D}^{\dot{A}}$ por la derecha de

la ecuación (5.155); sumando ambos resultados se obtiene:

$$\begin{aligned} D^A D_A \bar{D}^2 - D^A \bar{D}^2 D_A + \bar{D}_{\dot{A}} D^2 \bar{D}^{\dot{A}} - D^2 \bar{D}_{\dot{A}} \bar{D}^{\dot{A}} &= -D^A \bar{D}^2 D_A + \bar{D}_{\dot{A}} D^2 \bar{D}^{\dot{A}} \\ &= 4D^A \sigma_{AA}^{\mu} \bar{D}^{\dot{A}} P_{\mu} - 4D^A \sigma_{AA}^{\mu} P_{\mu} \bar{D}^{\dot{A}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de manera que

$$D^A \bar{D}^2 D_A = \bar{D}_{\dot{A}} D^2 \bar{D}^{\dot{A}}. \quad (5.156)$$

Por último, es trivial mencionar que

$$D^3 = \bar{D}^3 = 0. \quad (5.157)$$

5.7.1. Técnica de Proyección

Como se mencionó en la sección (5.4.2), la integral de Grassmann $\int d^2\theta$ es equivalente a un operador diferencial. En particular, se tiene que

$$\int d^2\theta \Phi(y, \theta) = F(x),$$

donde Φ es un supercampo quiral izquierdo como el dado por la ecuación (6.29), es decir

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y).$$

Por otra parte, es fácil darse cuenta de que lo siguiente es verdad:

$$\Phi(y, \theta)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = A(y), \quad (5.158)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D_A^{(1)} \Phi(y, \theta)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \psi_A(y), \quad (5.159)$$

$$-\frac{1}{4} D^{(1)2} \Phi(y, \theta)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = F(y), \quad (5.160)$$

donde $y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma\bar{\theta}$ y $D_A^{(1)} = \partial_A + 2\sigma_{AA}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_{\mu}$. Se puede entonces escribir que

$$\int d^2\theta = -\frac{1}{4} D^{(1)2}|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -\frac{1}{4} D^2|_{\theta=\bar{\theta}=0}. \quad (5.161)$$

Considere un supercampo $W[\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]$ que depende de N supercampos quirales $\Phi_i(y, \theta)$ (este concepto es detallado en seguida pero es conveniente introducir esta discusión aquí). En-

tonces se puede calcular su integral en $d^2\theta$ usando la regla de la cadena como:

$$\begin{aligned}
 \int d^2\theta W[\Phi] &= -\frac{1}{4} D^A D_A W[\Phi_i^a(x, \theta, \bar{\theta})] \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
 &= -\frac{1}{4} D^A \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi_i^a} D_A \Phi_i^a \right\} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ D^A \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_i^a} \right) D_A \Phi_i^a + \frac{\partial W}{\partial \Phi_i^a} D^2 \Phi_i^a \right\} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_j^b \partial \Phi_i^a} \psi_j^b \psi_i^a + \frac{\partial W}{\partial \Phi_i^a} F_i^a(x) \right\} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0}.
 \end{aligned}$$

entonces

$$\int d^2\theta W[\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N] = \frac{\partial W}{\partial A_i^a} F_i^a(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial A_j^b \partial A_i^a} \psi_j^b \psi_i^a. \quad (5.162)$$

Capítulo 6

Supercampos y Supermultipletes

En este capítulo se introducen los supercampos y sus componentes, así como los supermultipletes que organizan los grados de libertad bosónicos y fermiónicos en representaciones irreducibles de la supersimetría. Estas estructuras son fundamentales para formular teorías de campos supersimétricas de manera compacta y covariante, ya que permiten escribir lagrangianos supersimétricos directamente en el superespacio.

La utilidad de este capítulo radica en que proporciona las herramientas necesarias para construir modelos físicos con supersimetría, como el lagrangiano supersimétrico de Yang–Mills, que será deducido en el capítulo siguiente. En particular, los supercampos quirales y vectoriales permiten agrupar campos que se transforman entre sí bajo supersimetría, respetando las restricciones impuestas por el álgebra. De este modo, este capítulo establece la base formal sobre la cual se desarrolla el modelo que constituye el eje del presente trabajo.

6.1. Transformación de Campos Componentes

En el capítulo anterior se definió un supercampo como una función con valores de operador definida en el superespacio, es decir, una función que depende de las coordenadas ordinarias x^μ y de las coordenadas fermiónicas de Grassmann θ^A y $\bar{\theta}_{\dot{A}}$. En esta sección se considerará el caso específico de un *supercampo escalar* o *pseudoescalar* de Lorentz, $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$, el cual admite una expansión en serie de potencias finita en las variables de Grassmann:¹

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)m(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})n(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Bajo el grupo de Lorentz, las cantidades $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ son campos escalares o pseudoescalares complejos; $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son espinores de Weyl izquierdos; $\bar{\chi}(x)$ y $\bar{\lambda}(x)$ son espinores de Weyl derechos; $V_\mu(x)$ es un campo vectorial de Lorentz; y $d(x)$ es un campo escalar. Todas

¹Las expresiones $\theta\theta = \theta^A\theta_A$ y $\bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}$ se entienden como contracciones de índices espinoriales de Lorentz. Esto se estudia con detalle en el apéndice A.

estas funciones se denominan *campos componentes*. Así, un supercampo Φ es una forma abreviada de escribir un *supermultiplete* finito de campos. Bajo transformaciones supersimétricas, la variación de un supercampo siempre puede expresarse en términos de las variaciones de las componentes utilizando la expansión en variables de Grassmann

$$\delta_s \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \delta_s f + \theta \delta_s \phi + \bar{\theta} \delta_s \bar{\chi} + \theta \theta \delta_s m + \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_s n + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \delta_s V_\mu + \theta \theta \bar{\theta} \delta_s \bar{\lambda} + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \delta_s \psi + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_s d. \quad (6.2)$$

Para calcular la forma explícita de estas variaciones de los campos componentes, inducidas por transformaciones supersimétricas infinitesimales, se comienza por aplicar la ecuación (5.131) a Φ ,

$$\begin{aligned} \delta_s \Phi &= \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) \times \left[f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + (\theta \theta) m(x) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\theta} \bar{\theta}) n(x) + (\theta \sigma^\nu \bar{\theta}) V_\nu(x) + (\theta \theta) \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta} \bar{\theta}) \theta \psi(x) + (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x) \right], \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta_s \Phi &= i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu f - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu f \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A \right) \theta^B \phi_B \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{\chi}^{\dot{B}} \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A \right) (\theta \theta) m \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\bar{\theta} \bar{\theta}) n \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta \sigma^\nu \bar{\theta}) V_\nu \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta \theta) \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\bar{\theta} \bar{\theta}) \theta^B \psi_B \\ &\quad + \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) d. \end{aligned}$$

Por tanto, es necesario calcular:

$$\begin{aligned} \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A \right) \theta^B \phi_B &= i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \theta^B \partial_\mu \phi_B - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \theta^B \partial_\mu \phi_B + \alpha^A \phi_A, \\ \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{\chi}^{\dot{B}} &= i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}} - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}} + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\chi}^{\dot{A}}, \\ \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \alpha^A \partial_A \right) (\theta \theta) m &= -i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} (\theta \theta) \partial_\mu m + 2\alpha^A \theta_A m, \\ \left(i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu - i\alpha \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\bar{\theta} \bar{\theta}) n &= i\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial_\mu n + 2\bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\theta}^{\dot{A}} n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \alpha^A\partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu \\
& \quad \quad + \alpha^A\partial_A(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu \\
& \quad \quad + \alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\nu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\nu + \bar{\alpha}_{\dot{A}}(\theta^A\sigma_{A\dot{B}}^\nu\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})V_\nu, \\
& \left(i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \alpha^A\partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& \quad \quad + \alpha^A\partial_A(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& \quad = -i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& \quad \quad + 2\alpha^A\theta_A\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} + (\theta\theta)\bar{\alpha}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}}, \\
& \left(i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \alpha^A\partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\psi_B \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\psi_B - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\psi_B \\
& \quad \quad + \alpha^A\partial_A(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\psi_B + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\psi_B \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\partial_\mu\psi_B \\
& \quad \quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\alpha^B\psi_B + 2\bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}\theta^B\psi_B, \\
& \left(i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \alpha^A\partial_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}} \right) (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d \\
& \quad = i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu d - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu d \\
& \quad \quad + \alpha^A\partial_A(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d \\
& \quad = 2\alpha^A\theta_A(\bar{\theta}\bar{\theta})d + 2(\theta\theta)\bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}d.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\delta_s\Phi &= i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu f - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu f \\
& \quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\theta^B\partial_\mu\phi_B - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^B\partial_\mu\phi_B + \alpha^A\phi_A \\
& \quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{B}}\partial_\mu\bar{\chi}^{\dot{B}} - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{B}}\partial_\mu\bar{\chi}^{\dot{B}} + \bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\chi}^{\dot{A}} \\
& \quad - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\theta)\partial_\mu m + 2\alpha^A\theta_A m \\
& \quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu n + 2\bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}n \\
& \quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu V_\nu + \alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\nu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\nu + \bar{\alpha}_{\dot{A}}(\theta^A\sigma_{A\dot{B}}^\nu\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})V_\nu \\
& \quad - i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{B}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{B}} + 2\alpha^A\theta_A\bar{\theta}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} + (\theta\theta)\bar{\alpha}_{\dot{B}}\bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& \quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^B\partial_\mu\psi_B + (\bar{\theta}\bar{\theta})\alpha^B\psi_B + 2\bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}\theta^B\psi_B \\
& \quad + 2\alpha^A\theta_A(\bar{\theta}\bar{\theta})d + 2(\theta\theta)\bar{\alpha}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}d
\end{aligned}$$

Esto se puede reorganizar como

$$\begin{aligned}
\delta_s \Phi = & \alpha^A \phi_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\chi}^{\dot{A}} + \theta^A \{ 2\alpha_A m(x) + i\sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} \partial_\mu f(x) - \bar{\alpha}_{\dot{A}} \sigma_{AB}^\nu \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} V_\nu(x) \} \\
& + \bar{\theta}_{\dot{A}} \{ 2\bar{\alpha}^{\dot{A}} n(x) + i(\alpha\sigma^\mu)_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \partial_\mu f(x) - (\alpha\sigma^\nu)_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} V_\nu(x) \} + (\theta\theta) \bar{\alpha}_{\dot{B}} \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& + \underbrace{i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} \theta^B \partial_\mu \phi_B}_{\equiv T_1} + \underbrace{(\bar{\theta}\bar{\theta}) \alpha^B \psi_B - i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}}}_{\equiv T_2} + 2(\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{\alpha}^{\dot{A}} d \\
& + \underbrace{i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) \partial_\mu V_\nu}_{\equiv T_3} - \underbrace{i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} (\theta\theta) \partial_\mu m}_{\equiv T_4} - \underbrace{i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} (\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) \partial_\mu V_\nu}_{\equiv T_5} + \underbrace{i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^B \partial_\mu \psi_B}_{\equiv T_6} \\
& + 2\alpha^A \theta_A (\bar{\theta}\bar{\theta}) d + i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu n - \underbrace{i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} (\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}}}_{\equiv T_7} + 2\alpha^A \theta_A \bar{\theta}_{\dot{B}} \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& + 2\bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\theta}^{\dot{A}} \theta^B \psi_B - i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} \theta^B \partial_\mu \phi_B + i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}}. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Ahora se calculan las T 's en esta ecuación (6.3), utilizando varios de los resultados obtenidos en el apéndice A.4.4 :

$$\begin{aligned}
T_1 &= i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} \theta^B \partial_\mu \phi_B = -i\theta^A \theta^B \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} \partial_\mu \phi_B \stackrel{A.115}{=} \frac{i}{2} \epsilon^{AB} \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} \partial_\mu \phi_B (\theta\theta) \\
&= (\theta\theta) \left[-\frac{i}{2} (\partial_\mu \phi) \sigma^\mu \bar{\alpha} \right], \\
T_2 &= -i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}} = -i\alpha^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \bar{\theta}_{\dot{A}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{A}} = -i\alpha^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} \bar{\theta}_{\dot{C}} \bar{\theta}_{\dot{A}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{A}} \\
&\stackrel{A.116}{=} \frac{i}{2} \alpha^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} \epsilon_{\dot{C}\dot{A}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{A}} = (\bar{\theta}\bar{\theta}) \frac{i}{2} \alpha^A \sigma_{AB}^\mu \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}} \\
&= (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(\frac{i}{2} \alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}(x) \right), \\
T_3 &= i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) \partial_\mu V_\nu \stackrel{A.120}{=} \frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} (\theta\theta) (\bar{\alpha}\bar{\theta}) \partial_\mu V_\nu = \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\alpha}\bar{\theta}) \partial^\mu V_\mu(x), \\
T_4 &= -i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} (\theta\theta) \partial_\mu m = -i(\theta\theta) \alpha^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu m = -i(\theta\theta) \alpha^A \sigma_{AB}^\mu \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} \bar{\theta}_{\dot{C}} \partial_\mu m \\
&= i(\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{A}} (\alpha\sigma^\mu \epsilon)^{\dot{A}} \partial_\mu m(x), \\
T_5 &= -i(\alpha\sigma^\mu \bar{\theta}) (\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) \partial_\mu V_\nu \stackrel{A.120}{=} -\frac{i}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta}) (\alpha\theta) \partial^\mu V_\mu(x), \\
T_6 &= i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^B \partial_\mu \psi_B = i\theta^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^B \partial_\mu \psi_B \\
&= -i\theta^A \theta^B \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu \psi_B \stackrel{A.115}{=} -\frac{i}{2} \epsilon^{AB} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \sigma_{AB}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} \partial_\mu \psi_B \\
&= \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \epsilon^{AB} \partial_\mu \psi_B (\sigma^\mu \bar{\alpha})_A = (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(\frac{i}{2} \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\alpha} \right), \\
T_7 &= i\alpha\sigma^\mu \bar{\theta} (\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} = i(\theta\theta) \alpha^A \sigma_{AA}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
&= i(\theta\theta) \alpha^A \sigma_{AA}^\mu \epsilon^{\dot{A}\dot{C}} \bar{\theta}_{\dot{C}} \bar{\theta}_{\dot{B}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \stackrel{A.116}{=} -\frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \alpha^A \sigma_{AA}^\mu \epsilon^{\dot{A}\dot{C}} \epsilon_{\dot{C}\dot{B}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
&= (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(-\frac{i}{2} \alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right).
\end{aligned}$$

Además, lo últimos cuatro términos en la ecuación (6.3) se reorganizan utilizando las fórmulas

de reordenamiento de Fierz como:

$$\begin{aligned} 2(\alpha\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) &= 2(\theta\alpha)\bar{\theta}_A\bar{\lambda}^{\dot{A}} \stackrel{A.118}{=} (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\alpha\sigma_\mu\bar{\lambda}(x)), \\ 2(\bar{\alpha}\bar{\theta})(\theta\psi) &\stackrel{A.119}{=} -(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\bar{\alpha}\bar{\sigma}_\mu)^A\psi_A \stackrel{A.110}{=} (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\psi(x)\sigma_\mu\bar{\alpha}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i(\alpha\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\partial_\mu\phi(x)) &= -i\alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\theta^C\partial_\mu\phi_C(x) = -i\alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\theta^C\partial_\mu\phi_C(x)\bar{\theta}_{\dot{C}} \\ &\stackrel{A.117}{=} -\frac{i}{2}\alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\partial_\mu\phi(x)\sigma^\rho)_{\dot{C}} \\ &= -\frac{i}{2}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})\alpha^A\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\partial_\mu\phi^B(x)\sigma_{B\dot{C}}^\rho \\ &= -\frac{i}{2}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})\alpha^A\partial_\mu\phi^B(x)\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\sigma_{B\dot{C}}^\rho \\ &\stackrel{A.115}{=} \frac{i}{4}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x))\epsilon^{AB}\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\sigma_{B\dot{C}}^\rho \\ &= -\frac{i}{4}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x))\epsilon^{BA}\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}}\sigma_{B\dot{C}}^\rho \\ &\stackrel{A.82}{=} \frac{i}{4}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x))(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{C}B}(\sigma^\rho)_{B\dot{C}} \\ &= \frac{i}{4}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x))\text{Tr}[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho] = \frac{i}{2}(\theta\sigma_\rho\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x))\eta^{\mu\rho} \\ &= \frac{i}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\alpha\partial_\mu\phi(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\theta\sigma^\mu\alpha)(\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\chi}(x)) &= i\theta^A\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{B}}(\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\chi}(x)) = -i\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{B}}(\partial_\mu\bar{\chi}(x)\bar{\theta})\theta^A \\ &\stackrel{A.119}{=} \frac{i}{2}\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{B}}(\theta\sigma_\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\chi}(x)\bar{\sigma}^\nu)^A \\ &= -\frac{i}{2}(\theta\sigma_\nu\bar{\theta})\partial_\mu\bar{\chi}_A(x)\bar{\sigma}^{\nu\dot{A}A}\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{B}} \\ &\stackrel{A.116}{=} \frac{i}{4}(\theta\sigma_\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\chi}(x)\bar{\alpha})\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{A}A}\sigma_{A\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{C}} \\ &= -\frac{i}{4}(\theta\sigma_\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\chi}(x)\bar{\alpha})\text{Tr}[\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu] \\ &\stackrel{A.84}{=} -\frac{i}{2}(\theta\sigma_\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\chi}(x)\bar{\alpha})\eta^{\nu\mu} = -\frac{i}{2}(\theta\sigma_\mu\bar{\theta})(\partial^\mu\bar{\chi}(x)\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

Con todo esto queda que

$$\begin{aligned}
\delta_s \Phi = & \alpha^A \phi_A + \bar{\alpha}_{\dot{A}} \bar{\chi}^{\dot{A}} + \theta^A \{2\alpha_A m(x) + i\sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{B}} \partial_\mu f(x) - \bar{\alpha}_{\dot{A}} \sigma_{A\dot{B}}^\nu \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} V_\nu(x)\} \\
& + \bar{\theta}_{\dot{A}} \{2\bar{\alpha}^{\dot{A}} n(x) + i(\alpha\sigma^\mu)_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \partial_\mu f(x) - (\alpha\sigma^\nu)_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} V_\nu(x)\} + (\theta\theta) \bar{\alpha}_{\dot{B}} \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
& + (\theta\theta) \left[-\frac{i}{2} (\partial_\mu \phi) \sigma^\mu \bar{\alpha} \right] + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \alpha^B \psi_B + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \frac{i}{2} \alpha^A \sigma_{A\dot{B}}^\mu \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{B}} + 2(\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{\alpha}^{\dot{A}} d \\
& + \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\alpha}\bar{\theta}) \partial^\mu V_\mu(x) + i(\theta\theta) \bar{\theta}_{\dot{A}} (\alpha\sigma^\mu \epsilon)^{\dot{A}} \partial_\mu m(x) - \frac{i}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta}) (\alpha\theta) \partial^\mu V_\mu(x) \\
& + (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(\frac{i}{2} \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\alpha} \right) + 2\alpha^A \theta_A (\bar{\theta}\bar{\theta}) d + i\theta\sigma^\mu \bar{\alpha} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu n \\
& - (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(-\frac{i}{2} \alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) + (\theta\sigma^\mu \bar{\theta}) (\alpha\sigma_\mu \bar{\lambda}(x)) + (\theta\sigma^\mu \bar{\theta}) \psi(x) \sigma_\mu \bar{\alpha} \\
& + \frac{i}{2} (\theta\sigma^\mu \bar{\theta}) (\alpha\partial_\mu \phi(x)) - \frac{i}{2} (\theta\sigma_\mu \bar{\theta}) (\partial^\mu \bar{\chi}(x) \bar{\alpha}), \tag{6.4}
\end{aligned}$$

lo cual se reorganiza en potencias de θ y $\bar{\theta}$ como

$$\begin{aligned}
\delta_s \Phi = & \alpha\phi + \bar{\alpha}\bar{\chi} + \theta\{2\alpha m(x) + \sigma^\mu \bar{\alpha} (i\partial_\mu f(x) + V_\mu(x))\} \tag{6.5} \\
& + \bar{\theta}\{2\bar{\alpha} n(x) + i(\alpha\sigma^\mu \epsilon) \partial_\mu f(x) - (\alpha\sigma^\nu \epsilon) V_\nu(x)\} \\
& + (\theta\theta) \left(\bar{\alpha}\bar{\lambda} - \frac{i}{2} (\partial_\mu \phi) \sigma^\mu \bar{\alpha} \right) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left(\alpha\psi(x) + \frac{i}{2} \alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} \right) \\
& + (\theta\sigma^\mu \bar{\theta}) \left(\alpha\sigma_\mu \bar{\lambda}(x) + \psi(x) \sigma_\mu \bar{\alpha} + \frac{i}{2} \alpha\partial_\mu \phi(x) - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\chi}(x) \bar{\alpha} \right) \\
& + (\theta\theta) \bar{\theta} \left(2\bar{\alpha} d + \frac{i}{2} \bar{\alpha} \partial^\mu V_\mu(x) + i(\alpha\sigma^\mu \epsilon) \partial_\mu m(x) \right) \\
& + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta \left(2\alpha d - \frac{i}{2} \alpha \partial^\mu V_\mu(x) + i\sigma^\mu \bar{\alpha} \partial_\mu n \right) \\
& + (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \frac{i}{2} (\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\alpha} + \alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x)) \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones (6.2) y (6.6) se concluye que las variaciones de los campos com-

ponentes debidas a una transformación supersimétrica están dadas por [3]:

$$\delta_s f = \alpha\phi + \bar{\alpha}\bar{\chi}, \quad (6.7)$$

$$\delta_s \phi_A = 2\alpha_A m(x) + (\sigma^\mu \bar{\alpha})_A \{i\partial_\mu f(x) + V_\mu(x)\}, \quad (6.8)$$

$$\delta_s \bar{\chi}^{\dot{A}} = 2\bar{\alpha}^{\dot{A}} n(x) + (\alpha\sigma^\mu \epsilon)^{\dot{A}} \{i\partial_\mu f(x) - V_\mu(x)\}, \quad (6.9)$$

$$\delta_s m(x) = \bar{\alpha}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}(\partial_\mu \phi)\sigma^\mu \bar{\alpha}, \quad (6.10)$$

$$\delta_s n(x) = \alpha\psi(x) + \frac{i}{2}\alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}, \quad (6.11)$$

$$\delta_s V_\mu(x) = \alpha\sigma_\mu \bar{\lambda}(x) + \psi(x)\sigma_\mu \bar{\alpha} + \frac{i}{2}\alpha\partial_\mu \phi(x) - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\chi}(x)\bar{\alpha}, \quad (6.12)$$

$$\delta_s \bar{\lambda}^{\dot{A}} = 2\bar{\alpha}^{\dot{A}} d(x) + \frac{i}{2}\bar{\alpha}^{\dot{A}} \partial^\mu V_\mu(x) + i(\alpha\sigma^\mu \epsilon)^{\dot{A}} \partial_\mu m(x), \quad (6.13)$$

$$\delta_s \psi_A(x) = 2\alpha_A d(x) - \frac{i}{2}\alpha_A \partial^\mu V_\mu(x) + i(\sigma^\mu \bar{\alpha})_A \partial_\mu n, \quad (6.14)$$

$$\delta_s d(x) = \frac{i}{2}(\partial_\mu \psi(x)\sigma^\mu \bar{\alpha} - \partial_\mu \bar{\lambda}(x)\bar{\sigma}^\mu \alpha). \quad (6.15)$$

6.2. Supercampos Quirales

Definición 6.1 (Supercampo quiral). *Un supercampo escalar Φ es un supercampo quiral izquierdo si satisface:*

$$\bar{D}_{\dot{A}} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad \bar{D}_{\dot{A}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^B \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial_\mu. \quad (6.16)$$

Además, Φ^\dagger es un supercampo quiral derecho si satisface:²

$$D_A \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad D_A = \partial_A + i\sigma_{AB} \theta^B \partial_\mu. \quad (6.17)$$

■

Supercampo Quiral Izquierdo

Puede encontrarse una solución de la ecuación (6.16) considerando un nuevo conjunto de variables dado por [15]:

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\theta}, \quad (6.18)$$

$$\theta'_A = \theta_A, \quad \bar{\theta}'_{\dot{A}} = \bar{\theta}_{\dot{A}}. \quad (6.19)$$

²La notación Φ^\dagger no es casualidad. En lo que sigue se verá cómo se define el adjunto hermítico de un supercampo.

Para ver esto, se puede calcular

$$\begin{aligned}\bar{D}_A y^\mu &= \{-\bar{\partial}_A - i\theta^B \sigma_{BA}^\nu \partial_\nu\} (x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = \{-\bar{\partial}_A i\theta^A \sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} - i\theta^B \sigma_{BA}^\nu \partial_\nu x^\mu\} \\ &= \{i\theta^A \sigma_{AA}^\mu - i\theta^B \sigma_{BA}^\mu\} = 0,\end{aligned}\tag{6.20}$$

$$\bar{D}_A \theta_A = 0.\tag{6.21}$$

Esto implica que cualquier función de y y θ deberá satisfacer la ecuación (6.16). Por otra parte, el cambio de variable afecta la derivada covariante ya que

$$\partial_\mu = (\partial^\nu y_\mu) \partial'_\nu = \partial'_\mu,\tag{6.22}$$

$$\partial_A = \partial_A \theta'^B \partial'_B + \partial_A y^\nu \partial'_\nu = \partial'_A + i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}'^{\dot{B}} \partial'_\nu\tag{6.23}$$

$$\bar{\partial}_A = \bar{\partial}'_B \bar{\theta}'^{\dot{A}} \bar{\partial}'_B + \bar{\partial}_A y^\nu \partial'_\nu = \bar{\partial}'_A - i\theta'^A \sigma_{AA}^\mu \partial'_\mu,\tag{6.24}$$

entonces

$$\begin{aligned}D_A(x, \theta, \bar{\theta}) &= \partial_A + i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\mu = \partial'_A + i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}'^{\dot{B}} \partial'_\nu + i\sigma_{AB}^\mu \theta^{\dot{B}} \partial'_\mu \\ &= \partial'_A + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}'^{\dot{B}} \partial'_\nu \\ &= D_A^{(1)}(y, \theta', \bar{\theta}'),\end{aligned}\tag{6.25}$$

y también:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{A}}(x, \theta, \bar{\theta}) &= -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^B \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial_\mu = -(\bar{\partial}'_{\dot{A}} - i\theta'^A \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial'_\mu) - i\theta'^B \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial'_\mu \\ &= -\bar{\partial}'_{\dot{A}} = \bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}.\end{aligned}\quad (6.26)$$

Esto implica que el campo

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \stackrel{5.116}{=} \Phi_1(y, \theta, \bar{\theta}), \quad (6.27)$$

satisface:

$$\bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}\Phi_1(y, \theta, \bar{\theta}) = 0 = -\bar{\partial}_{\dot{A}}\Phi_1(y, \theta, \bar{\theta}). \quad (6.28)$$

Entonces $\Phi_1(y, \theta, \bar{\theta}) = \Phi_1(y, \theta)$ y, por lo tanto, se puede considerar la expansión en serie de potencias:

$$\Phi_1(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y). \quad (6.29)$$

La consistencia de esta expresión se investiga expandiendo Φ_1 alrededor de un punto x una cantidad $i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$:³

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \Phi_1(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta) = A(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + \sqrt{2}\theta\psi(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\ &\quad + (\theta\theta)F(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\ &= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A - \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\mu\partial_\nu A + \sqrt{2}\theta\psi + i\sqrt{2}\theta(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\psi \\ &\quad + (\theta\theta)F(x) \\ &\stackrel{A.120}{=} A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A + \sqrt{2}\theta\psi + i\sqrt{2}\theta(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\psi \\ &\quad + (\theta\theta)F(x).\end{aligned}$$

Pero se puede calcular

$$\begin{aligned}i\sqrt{2}\theta(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\psi &= i\sqrt{2}\theta^A(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\psi_A \stackrel{A.115}{=} -\frac{i\sqrt{2}}{2}\epsilon^{AB}(\theta\theta)\sigma_{B\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial_\mu\psi_A \\ &= -\frac{i\sqrt{2}}{2}(\theta\theta)\epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{B}}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}\bar{\theta}_{\dot{A}}\partial_\mu\psi_A \stackrel{A.82}{=} \frac{i\sqrt{2}}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{A}}\partial_\mu\psi_A \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi.\end{aligned}$$

³Observe que, debido a la propiedad de nilpotencia de las variables de Grassmann θ y $\bar{\theta}$, ésta parte del calculo es una igualdad y se evidencia que el $\theta\theta$ término no cambia.

Entonces $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ queda como

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & A(x) + \sqrt{2}\theta^A\psi_A + (\theta\theta)F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\ & - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A. \end{aligned} \quad (6.30)$$

La verificación $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ se hace directamente de esta ecuación (6.30). Más interesante es compararla con la ecuación (6.1), donde se puede hacer la identificación:

$$\begin{aligned} f(x) = A(x), \quad \phi(x) = \sqrt{2}\psi(x), \quad \bar{\chi}(x) = 0, \quad m(x) = F(x), \quad n(x) = 0, \\ V_\mu(x) = i\partial_\mu A, \quad \bar{\lambda}^{\dot{A}}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi^B\sigma_{BB}^\mu\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}, \quad \psi(x) = 0, \quad d(x) = -\frac{1}{4}\square A, \end{aligned}$$

para utilizar las ecuaciones de (6.7) a (6.15) y obtener la variación de las componentes A, ψ, F del supercampo quiral izquierdo Φ :

$$\delta_s A(x) = \sqrt{2}\alpha\psi(x), \quad (6.31)$$

$$\delta_s\psi_A(x) = \sqrt{2}\alpha_A F(x) + i\sqrt{2}(\sigma^\mu\bar{\alpha})_A\partial_\mu A, \quad (6.32)$$

$$\delta_s F(x) = -i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\alpha}. \quad (6.33)$$

La ecuación (6.33) es la más importante porque expresa que la transformación supersimétrica del campo F es una derivada total.⁴ Por tanto $\int d^4x F$ es invariante bajo una transformación supersimétrica y podría ser un término en la acción de una teoría supersimétrica [4, 14, 15].

Por último queda mencionar que el producto de supercampos quirales izquierdos, Φ_i , con $i = 1, 2, \dots, N$ es también un supercampo quiral izquierdo [18]. Esto es evidente ya que dichos supercampos no dependen de $\bar{\theta}$ y tampoco su producto. Formalmente este resultado se consigue utilizando el hecho de que la derivada covariante es un operador lineal:

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Phi_i\Phi_j = (\bar{D}_{\dot{A}}\Phi_i)\Phi_j + \Phi_i\bar{D}_{\dot{A}}\Phi_j = 0. \quad (6.34)$$

⁴Se dice derivada total a una expresión de la forma $\partial_\mu f^\mu$ porque es la divergencia de una corriente, lo que garantiza que su integral sobre el espacio-tiempo solo contribuye en la frontera y se anula bajo condiciones adecuadas.

Dicho esto, es conveniente calcular aquí el producto $\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_j(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned}
\Phi_i\Phi_j &= \left[A_i(x) + \sqrt{2}\theta\psi_i + (\theta\theta)F_i + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_i + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_i \right] \\
&\quad \times \left[A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + (\theta\theta)F_j + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_j + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_j \right] \\
&= A_i A_j + \sqrt{2}A_i\theta\psi_j + (\theta\theta)A_i F_j + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_i\partial_\mu A_j + \frac{i}{\sqrt{2}}A_i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j \\
&\quad - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}A_i\square A_j + \sqrt{2}\theta\psi_i A_j + 2\theta\psi_i\theta\psi_j + \sqrt{2}\theta\psi_i(i\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_j + (\theta\theta)F_i A_j \\
&\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_j\partial_\mu A_i + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_i(i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu A_j) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu A_j\partial_\mu\psi_i \\
&\quad - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}A_j\square A_i \\
&= A_i A_j + \sqrt{2}\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i) + (\theta\theta)(A_i F_j + A_j F_i - \psi_i\psi_j) \\
&\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(A_i\partial_\mu A_j + A_j\partial_\mu A_i) \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}(A_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + A_j\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i + \bar{\sigma}^\mu\psi_i\partial_\mu A_j) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(A_i\square A_j + A_j\square A_i + 2\partial_\mu A_i\partial^\mu A_j). \tag{6.35}
\end{aligned}$$

De igual manera $\Phi_l\Phi_i\Phi_k$ es también un supercampo quiral izquierdo

$$\begin{aligned}
\Phi_l\Phi_i\Phi_k &= A_l(y)A_i(y)A_k(y) + \sqrt{2}\theta[A_l(y)A_i(y)\psi_k(y) + A_l(y)\psi_i(y)A_k(y) \\
&\quad + \psi_l(y)A_i(y)A_k(y)] + (\theta\theta)[A_l(y)A_i(y)F_k(y) + A_l(y)F_i(y)A_k(y) \\
&\quad + F_l(y)A_i(y)A_k(y) - \psi_l(y)\psi_k(y)A_i(y) \\
&\quad - \psi_l(y)\psi_i(y)A_k(y) - A_l(y)\psi_i(y)\psi_k(y)]. \tag{6.36}
\end{aligned}$$

Si bien esta expresión se puede expandir alrededor de x con $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$, esto no será necesario ya que la componente de mayor orden (componente $\theta\theta$) no cambia bajo traslaciones del argumento, como se verá en la sección 7.1 del capítulo siguiente.

Supercampo Quiral Derecho

De manera análoga al caso del supercampo quiral izquierdo, se puede encontrar la solución de la ecuación (6.17) considerando el cambio de variable

$$z^\mu \equiv x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \quad \theta' = \theta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta}, \tag{6.37}$$

con el cual se obtiene que

$$D_A z^\mu = 0, \quad D_A \bar{\theta}'_A = 0. \tag{6.38}$$

Así mismo, las derivadas covariantes D_A y $\bar{D}_{\dot{A}}$ se convierten en

$$D_A(x, \theta, \bar{\theta}) = D_A^{(2)}(z, \theta', \bar{\theta}') = \partial'_A, \quad (6.39)$$

$$\bar{D}_{\dot{A}}(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{D}_{\dot{A}}^{(2)}(z, \theta', \bar{\theta}') = -\bar{\partial}'_{\dot{A}} - 2i\theta'^A \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial'_\mu, \quad (6.40)$$

de manera que la ecuación (6.17) implica que

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi^\dagger(z + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \stackrel{5.116}{\equiv} \Phi_2(z, \bar{\theta}, \theta) \quad (6.41)$$

$$D_A \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = D_A^{(2)} \Phi_2(z, \bar{\theta}, \theta) = \partial_A \Phi_2(z, \bar{\theta}, \theta) = 0. \quad (6.42)$$

Por tanto, $\Phi_2(z, \bar{\theta})$ no depende explícitamente de θ y se debe poder escribir en serie de potencias de $\bar{\theta}$,

$$\Phi_2(z, \bar{\theta}) \equiv \Phi^\dagger(z, \bar{\theta}) = A^*(z) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(z) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(z). \quad (6.43)$$

Aquí, Φ^\dagger denota el *adjunto hermítico* de Φ . Dado que las variables de Grassmann θ y $\bar{\theta}$ transforman como espinores de Weyl bajo el grupo de Lorentz, es necesario definir su adjunto hermítico de forma análoga a los campos espinoriales, tal como se describe al final de la sección A.4.4. Esto garantiza que el supercampo conjugado preserve su carácter escalar bajo las transformaciones de Lorentz.

Por otra parte, de manera análoga al caso del supercampo quiral izquierdo Φ_1 , la ecuación (6.43) puede expandirse alrededor de x una cantidad $-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ como

$$\begin{aligned} \Phi_2(z, \bar{\theta}) &= A^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(x) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^*(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square A^*(x), \\ &= \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Debe ser claro que el producto de supercampos quirales derechos es otro supercampo quiral derecho. Además, las expresiones explícitas de los productos $\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger$ y $\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger\Phi_k^\dagger$ se obtienen tomando el adjunto hermítico de las ecuaciones (6.35) y (6.36):

$$\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger = A_i^*A_j^* + \sqrt{2}\bar{\theta}(A_i^*\bar{\psi}_j + A_j^*\bar{\psi}_i) + \bar{\theta}\bar{\theta}(A_i^*F_j^* + A_j^*F_i^* - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j) \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger\Phi_k^\dagger &= A_i^*A_j^*A_k^* + \sqrt{2}\bar{\theta}[A_i^*A_j^*\bar{\psi}_k + A_i^*\bar{\psi}_jA_k^* + \bar{\psi}_iA_j^*A_k^*] \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})[A_i^*A_j^*F_k^* + A_i^*F_j^*A_k^* + F_i^*A_j^*(y)A_k^* \\ &\quad - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_kA_j^* - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_jA_k^* - A_i^*\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k]. \end{aligned} \quad (6.46)$$

6.3. Supercampo Vectorial

Un supercampo vectorial es un supercampo escalar real (bajo Lorentz). Esta condición de realidad significa que el supercampo vectorial es igual a su conjugado hermítico. Es una generalización de la realidad de los campos clásicos, y garantiza que las componentes físicas del supercampo (como el campo gauge V_μ) sean reales ($V_\mu \in \mathbb{R}$).

Definición 6.2 (Supercampo vectorial). *El supercampo vectorial satisface la condición de realidad:*⁵

$$V^\dagger(x, \bar{\theta}, \bar{\theta}) = V(x, \bar{\theta}, \bar{\theta}). \quad (6.47)$$

■

Como cualquier otro supercampo, $V(x, \theta, \bar{\theta})$ puede expresarse como una serie de potencias en θ en $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \end{aligned}$$

Observe que la notación utilizada para los campos componentes es ligeramente diferente a aquella que aparece en la ecuación (6.1); la componente de mayor grado en θ y $\bar{\theta}$ se llama el *D-Término*. Con la ayuda de las ecuaciones (A.123) se puede tomar el adjunto hermítico de la expresión anterior y escribir

$$\begin{aligned} V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = & C^*(x) + \bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + (\theta\theta)N^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^* \\ & + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D^*(x). \end{aligned}$$

La condición de realidad (6.47) que define el supercampo vectorial implica entonces las siguientes relaciones:

$$C^* = C, \quad \phi = \chi, \quad M = N^*, \quad V_\mu^* = V_\mu, \quad \psi = \lambda, \quad D^* = D.$$

Esto significa que: $C(x)$, $V_\mu(x)$ y $D(x)$ son campos reales, $M(x)$ es un campo escalar complejo, ϕ y λ son espinores de Weyl. La expansión general del campo vectorial V es

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Sin embargo, existe una expresión más general de V que satisface (6.47) y se obtiene de (6.48)

⁵El supercampo vectorial recibe su nombre por el contenido del supermultiplete: incluye un campo vectorial real V_μ , que lo distingue del supercampo quirral, el cual contiene únicamente campos de materia (escalares y espinores).

haciendo el cambio [3]:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &\longrightarrow \lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}(x), \\ D(x) &\longrightarrow D(x) - \frac{1}{4}\square C(x).\end{aligned}$$

Es decir, que la expresión más general para el supercampo $V(x, \theta, \bar{\theta})$ es:

$$\begin{aligned}V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu \\ &+ (\theta\theta)\bar{\theta}[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi(x)] + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}(x)] \\ &+ (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(x) - \frac{1}{4}\square C(x)].\end{aligned}\quad (6.49)$$

Un par de ejemplos de supercampos vectoriales son los que se construyen con el producto y la suma de un supercampo quiral izquierdo y su adjunto hermítico, ya que

$$(\Phi_i + \Phi_i^\dagger)^\dagger = (\Phi_i^\dagger + \Phi_i), \quad (6.50)$$

$$(\Phi_i^\dagger\Phi_i)^\dagger = \Phi_i^\dagger\Phi_i, \quad (6.51)$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_i(y, \theta) &= A_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + (\theta\theta)F_i(y), \\ \Phi_i^\dagger(z, \bar{\theta}) &= A_i^*(z) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(z) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*(z),\end{aligned}$$

son supercampos i -ésimos. Se pueden utilizar las expresiones (6.30) y (6.44) para escribir la expansión alrededor de x de Φ_i y Φ_i^\dagger :

$$\begin{aligned}\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) &= A_i(x) + \sqrt{2}\theta\psi_i(x) + (\theta\theta)F_i(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_i(x) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_i(x),\end{aligned}\quad (6.52)$$

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= A_i^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*(x) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_i^*(x) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square A_i^*(x).\end{aligned}\quad (6.53)$$

Con esto se puede calcular explícitamente las ecuaciones (6.50) y (6.51) [4]:

$$\begin{aligned}
\Phi_i + \Phi_j^\dagger &= A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + (\theta\theta)F_i + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_i + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_i \\
&\quad + A_j^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_j^* - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square A_j^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_j + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_j^* \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_j \\
&= A_i + A_j^* + \sqrt{2}\theta\psi_i + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_j + (\theta\theta)F_i + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_j^* + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(A_i - A_j^*) \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_j - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square[A_i + A_j^*]. \tag{6.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_i^\dagger\Phi_j &= \left[A_i^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_i^* - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square A_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^* + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i \right] \times \left[A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + (\theta\theta)F_j + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_j \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_j \right] \\
&= A_i^*A_j + \sqrt{2}A_i^*\theta\psi_j + (\theta\theta)A_i^*F_j + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_i^*\partial_\mu A_j + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu A_i^*\partial_\mu\psi_j \\
&\quad - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}A_i^*\square A_j - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_j\partial_\mu A_i^* - \sqrt{2}i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\partial_\mu A_i^*)(\theta\psi_j) \\
&\quad + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_i^*(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu A_j) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\square A_i^*)A_j + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i A_j + 2\bar{\theta}\bar{\psi}_i\theta\psi_j \\
&\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(\theta\theta)F_j + i\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A_j + i\bar{\theta}\bar{\psi}_i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*A_j \\
&\quad + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*\theta\psi_j + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*(\theta\theta)F_j + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i A_j + i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\theta\psi_j \\
&= A_i^*A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j A_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i A_j + (\theta\theta)A_i^*F_j + (\bar{\theta}\bar{\theta})F_i^*A_j + 2\bar{\theta}\bar{\psi}_i\theta\psi_j \\
&\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(A_i^*\partial_\mu A_j - A_j\partial_\mu A_i^*) \\
&\quad - \sqrt{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_A \left[\frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu\dot{A}B}(\psi_{jB}\partial_\mu A_i^* - A_i^*\partial_\mu\psi_{jB}) - \bar{\psi}_i^{\dot{A}}F_j \right] \\
&\quad + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^A \left[\frac{i}{2}\sigma_{AA}^\mu(A_j\partial_\mu\bar{\psi}_i^{\dot{A}} - \bar{\psi}_i^{\dot{A}}\partial_\mu A_j) + \psi_{jA}F_i^* \right] \\
&\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu A_i^*\partial^\mu A_j - \frac{1}{4}(A_i^*\square A_j + \square A_i^*A_j) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2}\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i + F_i^*F_j \right\}. \tag{6.55}
\end{aligned}$$

El concepto de transformación de gauge en el contexto de la supersimetría está asociado al campo vectorial $V(x, \theta, \bar{\theta})$. Aunque su justificación completa aparecerá en el lagrangiano supersimétrico de Yang–Mills en capítulos posteriores, se anticipa aquí su definición porque es fundamental para la estructura del modelo.

Definición 6.3 (Transformación de gauge SUSY). *La generalización supersimétrica de transformación de gauge es dada por:*⁶

$$V'(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv V(x, \theta, \bar{\theta}) + \Phi + \Phi^\dagger. \quad (6.56)$$

■

Una transformación gauge supersimétrica induce las siguientes transformaciones en las componentes de un campo vectorial general $V(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned} V' &= V + \Phi + \Phi^\dagger \\ &\stackrel{6.54}{=} C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu \\ &\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi(x)] + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}(x)] \\ &\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(x) - \frac{1}{4}\square C(x)] + A + A^* + \sqrt{2}\theta\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} \\ &\quad + (\theta\theta)F + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^* + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(A - A^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square[A + A^*] \\ &= C + A + A^* + \theta(\phi + \sqrt{2}\psi) + \bar{\theta}(\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\psi}) \\ &\quad + \theta\theta(M + F) + \bar{\theta}\bar{\theta}(M^* + F^*) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}[V_\mu + i\partial_\mu(A - A^*)] \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu(\phi + \sqrt{2}\psi)] + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu(\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\psi})] \\ &\quad + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})[D - \frac{1}{4}\square(C + A + A^*)] \end{aligned}$$

Si se definen los campos primados

$$C' = C + A + A^*, \quad \phi' = \phi + \sqrt{2}\psi, \quad M' = M + F, \quad V'_\mu = V_\mu + i\partial_\mu(A - A^*),$$

entonces se ve que los campos λ y D son *invariantes de gauge*:⁷

$$\begin{aligned} V' &= C' + \theta\phi' + \bar{\theta}\bar{\phi}' + \theta\theta M' + \bar{\theta}\bar{\theta}M'^* + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V'_\mu + \theta\theta\bar{\theta}(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi') \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}') + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - \frac{1}{4}\square C'), \end{aligned}$$

mientras el campo V_μ transforma como $V'_\mu = V_\mu + i\partial_\mu(A - A^*)$, lo que corresponde a una transformación de gauge abeliana. Por tanto, el tensor de Lorentz $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ es in-

⁶En el capítulo siguiente esta transformación se generaliza como $e^{V'} = e^{-i\Lambda} e^V e^{i\Lambda}$

⁷Esto es consecuencia del hecho de que el supermultiplete (A, ψ, F) no contribuye directamente a las componentes λ y D en la expansión del supercampo vectorial. Las transformaciones gauge supersimétricas afectan principalmente a los campos C, ϕ, V_μ y sus derivadas, mientras que λ y D permanecen inalterados, reflejando que son grados de libertad no eliminables mediante una transformación de gauge.

variante bajo la transformación de gauge (6.56). Ahora bien, es posible escoger un *gauge* Φ tal que $C' = M' = 0$ y $\phi' = 0$, el llamado *gauge* de Wess-Zumino [4, 14, 15, 18]:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\psi &= -\phi, \\ F &= -M, \\ 2\text{Re}A &= A + A^* = -C.\end{aligned}\tag{6.57}$$

Con esta elección, el supercampo vectorial se reduce a sus componentes esenciales: el campo gauge V_μ , el gaugino λ y el campo auxiliar D . Esta simplificación es fundamental para poder construir de manera explícita el lagrangiano supersimétrico de Yang–Mills. El campo transformado en este gauge $V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta})$ se expresa entonces como:

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}[V_\mu(x) + i\partial_\mu(A(x) - A^*(x))] + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x).\tag{6.58}$$

Aquí se dice que V_μ es el campo de gauge y λ es su compañero supersimétrico. El gauge de Wess-Zumino solo impone una restricción sobre la parte real de A , de manera que la parte imaginaria aún provoca un corrimiento en V_μ correspondiente a una simetría de gauge convencional. D es un *campo auxiliar* sin dinámica y puede removerse con ayuda de las ecuaciones de movimiento, como se verá más adelante.

6.4. Intensidad de Campo Supersimétrica

la intensidad de campo supersimétrica, también conocida como *tensor de curvatura supersimétrico*, se describe mediante supercampos espinoriales W_A y $\bar{W}_{\dot{A}}$:⁸

$$\begin{aligned}W_A &\equiv -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x, \theta, \bar{\theta}), \\ \bar{W}_{\dot{A}} &\equiv -\frac{1}{4}(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V(x, \theta, \bar{\theta}).\end{aligned}\tag{6.59}$$

Estos supercampos tienen la propiedad de que sus componentes más bajas en la expansión en variables de Grassmann son espinores de Weyl, y por tanto transforman como espinores bajo el grupo de Lorentz. Por otra parte, W_A es un supercampo quiral izquierdo y $\bar{W}_{\dot{A}}$ es un supercampo quiral derecho y ambos son invariantes bajo la transformación gauge supersimétrica [3]:

$$V' = V + \Phi + \Phi^\dagger.$$

⁸Más adelante se generalizará como siendo $W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}\bar{D}^{\dot{A}}e^{-V}D_A e^V$

Lo primero se ve a partir de la ecuación (5.157), pues según esto

$$\bar{D}_{\dot{A}}W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}\bar{D}\bar{D}D_A V = 0, \quad (6.60)$$

$$D_A\bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4}D_A(DD)\bar{D}_{\dot{A}}V = 0. \quad (6.61)$$

Lo segundo se muestra utilizando el hecho de que las derivadas covariantes son operadores lineales y que el anticonmutador $\{\bar{D}, D\}$ se cierra en P_μ :

$$\begin{aligned} W'_A &= -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V' = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V - \frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A \Phi - \frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A \Phi^\dagger \\ &= W_A - \frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A \Phi - \underbrace{\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}D_A\bar{D}^{\dot{A}}\Phi}_{=0} = W_A - \frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}\{\bar{D}^{\dot{A}}, D_A\}\Phi \\ &= W_A, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa que $\{\bar{D}^{\dot{A}}, D_A\}$ conmuta con $\bar{D}_{\dot{A}}$ y Φ es un campo quiral izquierdo. De manera similar se trabaja $\bar{W}_{\dot{A}}$ para concluir que

$$W'_A = W_A, \quad \bar{W}'_{\dot{A}} = \bar{W}_{\dot{A}}. \quad (6.62)$$

Otra propiedad de la intensidad de campo supersimétrica es la siguiente:

$$\bar{D}_{\dot{A}}\bar{W}^{\dot{A}} = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}D^2\bar{D}^{\dot{A}}V \stackrel{5.156}{=} -\frac{1}{4}D^A\bar{D}^2D_A V \stackrel{6.59}{=} D^A W_A. \quad (6.63)$$

Ahora se examina la expansión en componentes de los campos W_A y $\bar{W}_{\dot{A}}$ en el gauge de Wess-Zumino; considere el supercampo vectorial V_{WZ} :

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (6.64)$$

El supercampo $W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_A V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta})$ se evalúa más fácilmente si se hace el cambio de variable $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$ ya que según las ecuaciones (6.25) y (6.26),

$$\begin{aligned} D_A(x, \theta, \bar{\theta}) &= \partial_A + i\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial_\mu \longrightarrow D_A^{(1)}(y, \theta, \bar{\theta}) = \partial_A + 2i\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial'_\mu, \\ \bar{D}_{\dot{A}}(x, \theta, \bar{\theta}) &= -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^B\sigma_{B\dot{A}}^\mu\partial_\mu \longrightarrow \bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}(y, \theta, \bar{\theta}) = -\bar{\partial}_{\dot{A}}, \end{aligned}$$

donde $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$. El campo V_{WZ} transforma como:

$$\begin{aligned}
V_{WZ}(y^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\
&\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D(y^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\
&= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu V_\mu(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) \\
&\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D(y) \\
&= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) \\
&\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(y)].
\end{aligned}$$

Entonces se define

$$\begin{aligned}
V_{WZ}^{(1)}(y, \theta, \bar{\theta}) &\equiv V(y - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \\
&= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(y)]. \quad (6.65)
\end{aligned}$$

De forma idéntica se puede hacer el cambio de variable $z = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$ y definir

$$\begin{aligned}
V_{WZ}^{(2)}(z, \theta, \bar{\theta}) &\equiv V(z + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \\
&= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(z) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(z) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(z) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(z) + \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(z)]. \quad (6.66)
\end{aligned}$$

En resumen se tiene:

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = V_{WZ}^{(1)}(y, \theta, \bar{\theta}) = V_{WZ}^{(2)}(z, \theta, \bar{\theta}). \quad (6.67)$$

Ahora se puede calcular

$$\begin{aligned}
D_A V_{WZ} &= D_A^{(1)} V_{WZ}^{(1)} \\
&= \{\partial_A + 2i\sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial'_\mu\} \times \{(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) \\
&\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\nu V_\nu(y)]\} \\
&= \partial_A(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y) + \partial_A(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + \partial_A(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) \\
&\quad + \partial_A(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(y)] + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(y) \\
&\quad + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(y) \\
&\quad + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \partial_\nu(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(y)] \\
&= \sigma_{AB}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\lambda_A(y) + 2\theta_A \bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu(y)] \\
&\quad + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\nu V_\mu(y) + 2i\sigma_{AB}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} (\theta\theta)\bar{\theta}\partial_\nu \bar{\lambda}(y)
\end{aligned}$$

Los últimos dos términos de la expresión anterior se pueden reescribir utilizando los resultados de la sección A.4.4 como:

$$\begin{aligned}
2i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} (\theta\sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\nu V_\mu(y) &= 2i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \theta^B \sigma_{B\dot{A}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{A}} \partial_\nu V_\mu(y) = -i(\bar{\theta}\bar{\theta}) \sigma_{A\dot{B}}^\nu \theta^B \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial_\nu V_\mu(y) \\
&= i(\bar{\theta}\bar{\theta}) \sigma_{A\dot{B}}^\nu \epsilon^{CB} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \sigma_{B\dot{A}}^\mu \partial_\nu V_\mu(y) \theta_C \\
&\stackrel{A.106}{=} i(\bar{\theta}\bar{\theta}) \sigma_{A\dot{B}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{B}C} \partial_\nu V_\mu(y) \theta_C = i(\bar{\theta}\bar{\theta}) (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_A^B \partial_\mu V_\nu \theta_B, \\
2i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} (\theta\theta) \bar{\theta} \partial_\nu \bar{\lambda}(y) &= 2i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{B}} \bar{\theta}_A (\theta\theta) \partial_\nu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) = 2i\sigma_{A\dot{B}}^\nu \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} \bar{\theta}_C \bar{\theta}_A (\theta\theta) \partial_\nu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) \\
&= -i(\bar{\theta}\bar{\theta}) (\theta\theta) \sigma_{A\dot{A}}^\nu \partial_\nu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) = -i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} (\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda})_A,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
D_A^{(1)} V_{WZ}^{(1)} &= \sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \lambda_A(y) - i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) \\
&\quad + 2\bar{\theta}\bar{\theta} [D(y) - \frac{i}{2} \partial^\mu V_\mu(y)] \delta_A^B \theta_B + i(\bar{\theta}\bar{\theta}) (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_A^B \partial_\mu V_\nu(y) \theta_B \\
&= \sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \lambda_A(y) - i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) \\
&\quad + 2\bar{\theta}\bar{\theta} [\delta_A^B D(y) - \frac{i}{2} \delta_A^B \eta^{\mu\nu} \partial_\mu V_\nu(y) + \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_A^B \partial_\mu V_\nu(y)] \theta_B \\
&\stackrel{A.106}{=} \sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \lambda_A(y) - i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) \\
&\quad + 2\bar{\theta}\bar{\theta} [\delta_A^B D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B \partial_\mu V_\nu(y)] \theta_B \\
&= \sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \lambda_A(y) - i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{A\dot{A}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{A}}(y) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta} \{2\delta_A^B D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B [\partial_\mu V_\nu(y) - \partial_\nu V_\mu(y)]\} \theta_B,
\end{aligned}$$

donde se hizo uso de la antisimetría de $\sigma^{\mu\nu}$ para escribir

$$2(\sigma^{\mu\nu})_A^B \partial_\mu V_\nu(y) = (\sigma^{\mu\nu})_A^B [\partial_\mu V_\nu(y) - \partial_\nu V_\mu(y)].$$

Por tanto, definiendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ resulta finalmente que

$$\begin{aligned}
D_A^{(1)} V_{WZ}^{(1)} &= \sigma_{A\dot{B}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{B}} V_\mu(y) + 2\theta_A \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \lambda_A(y) - i(\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{A\dot{A}}^\nu \partial_\mu \bar{\lambda}(y) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta} \{2\delta_A^B D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B F_{\mu\nu}(y)\} \theta_B
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Ahora solo queda calcular W_A como:

$$\begin{aligned}
W_A &= -\frac{1}{4}\bar{\partial}_{\dot{A}}\bar{\partial}^{\dot{A}}D_A^{(1)}V_{WZ}^{(1)}(y, \theta, \bar{\theta}) \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\bar{\partial}^{\dot{C}}\bar{\partial}^{\dot{A}}\{\sigma_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu}\bar{\theta}^{\dot{B}}V_{\mu}(y) + 2\theta_A\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\lambda_A(y) - i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^{\nu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}(y) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}[2\delta_A^B D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B F_{\mu\nu}(y)]\theta_B\} \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\{\bar{\partial}^{\dot{C}}\bar{\partial}^{\dot{A}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\lambda_A(y) - i(\theta\theta)\bar{\partial}^{\dot{C}}\bar{\partial}^{\dot{A}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^{\nu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}(y) \\
&\quad + \bar{\partial}^{\dot{C}}\bar{\partial}^{\dot{A}}\bar{\theta}\bar{\theta}[2\delta_A^B D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B F_{\mu\nu}(y)]\theta_B\} \\
&= \lambda_A(y) + 2D(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu})_A^B\theta_B F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)(\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}(y))_A.
\end{aligned}$$

Este es el resultado que se estaba buscando. Similarmente se puede utilizar $V_{WZ}^{(2)}(z, \theta, \bar{\theta})$ para calcular $\bar{W}_{\dot{A}}$, pero otra forma plausible es tomar el adjunto hermítico de W_A , es decir, que $W_A^{\dagger} = \bar{W}_{\dot{A}}$. Los resultados se anotan a continuación [3].

$$W_A = \lambda_A(y) + 2D(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)\sigma_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}^{\dot{B}}(y), \quad (6.69)$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} = \bar{\lambda}_{\dot{A}}(z) + 2\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}D(z)\bar{\theta}^{\dot{C}} - \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{C}}^{\dot{B}}F_{\mu\nu}(z)\bar{\theta}^{\dot{C}} + i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\partial_{\mu}\lambda(z)\sigma^{\mu})_{\dot{A}}. \quad (6.70)$$

Capítulo 7

Lagrangianos Supersimétricos

La ecuación (6.15) muestra que, bajo supertraslaciones, la componente de mayor orden en la expansión de un supercampo Φ transforma como una derivada total. Además, la integral en $d^4\theta$ del supercampo extrae dicha componente, como lo muestran la ecuación (5.96). Estos hechos se utilizan en la construcción de densidades lagrangianas supersimétricas ya que la acción \mathcal{A} es invariante bajo transformaciones supersimétricas si se define como:

$$\mathcal{A} = \int d^4x \int d^4\theta \mathcal{L}. \quad (7.1)$$

7.1. Construcción del Lagrangiano a Partir de Supercampos Quirales

El lagrangiano supersimétrico renormalizable más general que involucra solamente N supercampos quirales Φ_i está dado por [2, 3, 4, 18]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int d^4\theta \{ & \Phi_i^\dagger \Phi_i + \left(g_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \delta^2(\bar{\theta}) \\ & + \left(g_i^* \Phi_i^\dagger + \frac{1}{2} m_{ij}^* \Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger + \frac{1}{3} \lambda_{ijk}^* \Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger \Phi_k^\dagger \right) \delta^2(\theta) \}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde $\delta^2(\theta) = \theta\theta$ y $\delta^2(\bar{\theta}) = \bar{\theta}\bar{\theta}$. Se sobreentiende la suma sobre los índices repetidos i, j, k . Los parámetros complejos λ_{ijk} son simétricos bajo la permutación de cualquiera de sus índices. La condición de renormalizabilidad prohíbe términos con potencias de Φ superiores a tres [3]. El primer término del lagrangiano,

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \int d^4\theta \Phi_i^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}),$$

es un *término cinético* de los campos de materia A_i, ψ_i, F_i de los supermultipletes Φ_i . Los términos restantes constituyen un lagrangiano de *superpotencial*,

$$\mathcal{L}_{\text{spot}} = \int d^4\theta \{W[\Phi]\delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}[\Phi^\dagger]\delta^2(\theta)\},$$

donde se ha definido el *superpotencial* $W[\Phi]$ y, su adjunto hermítico $\bar{W}[\Phi^\dagger]$, como:

$$W[\Phi_1, \Phi_1, \dots, \Phi_N] = g_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k, \quad (7.3)$$

$$\bar{W}^\dagger[\Phi_1^\dagger, \Phi_1^\dagger, \dots, \Phi_N^\dagger] = g_i^* \Phi_i^\dagger + \frac{1}{2} m_{ij}^* \Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger + \frac{1}{3} \lambda_{ijk}^* \Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger \Phi_k^\dagger, \quad (7.4)$$

respectivamente. Es decir, que se acostumbra a escribir \mathcal{L} como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{spot}}.$$

La acción supersimétrica se puede escribir entonces como:

$$\mathcal{A} = \int d^4x \left(\int d^4\theta \Phi_i^\dagger \Phi_i + \int d^4\theta W[\Phi]\delta^2(\bar{\theta}) + \int d^4\theta \bar{W}[\Phi^\dagger]\delta^2(\theta) \right). \quad (7.5)$$

Los términos de la ecuación (7.5) se expanden utilizando las ecuaciones (5.95) y (5.96). Para el término cinético, se tiene:

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \Phi_i^\dagger \Phi_i &\stackrel{6.55}{=} \int d^4\theta \{A_i^* A_i + \sqrt{2}\theta \psi_i A_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta} \bar{\psi}_i A_i + (\theta\theta) A_i^* F_i + (\bar{\theta}\bar{\theta}) F_i^* A_i \\ &\quad + 2\bar{\theta} \bar{\psi}_i \theta \psi_i + i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} (A_i^* \partial_\mu A_i - A_i \partial_\mu A_i^*) \\ &\quad - \sqrt{2}(\theta\theta) \bar{\theta}^{\dot{A}} \left[\frac{i}{2} \bar{\sigma}^{\mu\dot{A}B} (\psi_{iB} \partial_\mu A_i^* - A_i^* \partial_\mu \psi_{iB}) - \bar{\psi}_i^{\dot{A}} F_i \right] \\ &\quad + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^A \left[\frac{i}{2} \sigma_{A\dot{A}}^\mu (A_i \partial_\mu \bar{\psi}_i^{\dot{A}} - \bar{\psi}_i^{\dot{A}} \partial_\mu A_i) + \psi_{iA} F_i^* \right] \\ &\quad + (\theta\theta) \bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i - \frac{1}{4} (A_i^* \square A_i + \square A_i^* A_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{i}{2} \psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i + F_i^* F_i \right\}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \Phi_i^\dagger \Phi_i &\stackrel{5.96}{=} \frac{1}{2} \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i - \frac{1}{4} (A_i^* \square A_i + \square A_i^* A_i) - \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{i}{2} \psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i \\ &\quad + F_i^* F_i. \end{aligned} \quad (7.6)$$

La última expresión se puede reescribir utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i &= \frac{1}{2}\partial_\mu (A_i^* \partial^\mu A_i) - \frac{1}{2}A_i^* \square A_i, \\ A_i^* \square A_i + A_i \square A_i^* &= \partial^\mu (A_i^* \partial_\mu A_i + A_i \partial_\mu A_i^*) - 2\partial^\mu A_i^* \partial_\mu A_i \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{1}{2}\partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i - \frac{1}{4}(A_i^* \square A_i + A_i \square A_i) = \partial^\mu A_i^* \partial_\mu A_i + \text{derivadas totales}, \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\partial_\mu \psi_i \sigma^\mu \bar{\psi}_i - \frac{i}{2}\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i \\ &= -\frac{i}{2}\partial_\mu (\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i) + i(\partial_\mu \bar{\psi}_i) \bar{\sigma}^\mu \psi_i \\ &= i\partial_\mu \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i + \text{derivadas totales}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

entonces al sustituir las ecuaciones (7.7) y (7.8) en la ecuación (7.6), se obtiene el término cinético:¹

$$\int d^4\theta \Phi_i^\dagger \Phi_i = i\partial_\mu \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i + \partial^\mu A_i^* \partial_\mu A_i + F_i^* F_i + \text{derivadas totales}. \quad (7.9)$$

Hasta este punto, los cálculos han sido directos: el supercampo quiral derecho $\Phi_i^\dagger(z)$ se multiplica por el supercampo quiral izquierdo $\Phi_i(y)$, formando un supercampo vectorial $\Phi_i^\dagger(z)\Phi_i(y)$. Sin embargo, estos dos supercampos están escritos en términos de diferentes combinaciones lineales de la misma variable del superespacio x , ya que $y \neq z$. Por esta razón, al calcular su producto es necesario reescribirlos en función de la misma variable x , y expandir alrededor de ella. Esta expansión es la que permite obtener los términos con las potencias adecuadas de θ y $\bar{\theta}$ que contribuyen a la integral sobre $d^4\theta$.

Por otra parte, la evaluación del término $\int d^2\theta W[\Phi(y)]$ resulta considerablemente más simple. De acuerdo con la ecuación (5.95), la integral en $d^2\theta$ selecciona directamente la componente $\theta\theta$ del supercampo quiral $W[\Phi]$, y esta resulta invariante bajo traslaciones del argumento $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Para ver esto se puede calcular:

$$\begin{aligned} \Phi_i(y)\Phi_j(y) &= (A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F_i)(A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + \theta\theta F_j) \\ &= A_i A_j + \sqrt{2}\theta A_i \psi_j + \theta\theta A_i F_j + \sqrt{2}\theta\psi_i A_j + 2\theta\psi_i \theta\psi_j + \theta\theta F_i A_j \\ &= A_i A_j + \sqrt{2}\theta(A_i \psi_j + A_j \psi_i) + \theta\theta(A_i F_j + A_j F_i - \psi_i \psi_j), \end{aligned} \quad (7.10)$$

de modo que al comparar esta ecuación (7.10) con la ecuación (6.35) se ve que la componente

¹Se llama "término cinético" porque contiene derivadas de los campos, y por tanto es responsable del movimiento dinámico de los mismos en el espacio-tiempo.

$\theta\theta$ no cambia; más concretamente se ve que

$$\int d^2\theta \Phi_i(y)\Phi_j(y) = \int d^4\theta \Phi_i(x)\Phi_j(x)\delta^2(\bar{\theta}), \quad (7.11)$$

y, por lo tanto:

$$\int d^4\theta \Phi_i(x)\Phi_j(x)\delta^2(\bar{\theta}) \stackrel{7.10}{=} A_i(x)F_j(x) + A_j(x)F_i(x) - \psi_i(x)\psi_j(x). \quad (7.12)$$

Se puede utilizar el mismo argumento para calcular fácilmente los demás términos debidos al superpotencial. Por ejemplo, la $\theta\theta$ -componente del producto $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ se obtiene de la ecuación (6.36) como:

$$\begin{aligned} \int d^2\theta \Phi_i\Phi_j\Phi_k &= A_i(x)A_j(x)F_k(x) + A_i(x)F_j(x)A_k(x) + F_i(x)A_j(x)A_k(x) \\ &\quad - \psi_i(x)\psi_k(x)A_j(x) - \psi_i(x)\psi_j(x)A_k(x) - A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Finalmente, lo más fácil es determinar que:

$$\int d^2\theta \Phi_i = \int d^2\theta (A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F_i) = F_i(x), \quad (7.14)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \int d^2\theta W[\Phi] &= g_i F_i(x) + m_{ij} \{A_i(x)F_j(x) - \frac{1}{2}\psi_i(x)\psi_j(x)\} \\ &\quad + \lambda_{ijk} \{A_i(x)A_j(x)F_k(x) - A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x)\}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde se ha utilizado la simetría de los índices de los acoplos m_{ij} y λ_{ijk} . De manera totalmente análoga se puede calcular, utilizando las ecuaciones (6.45) y (6.46):

$$\begin{aligned} \int d^2\theta \bar{W}[\Phi^\dagger] &= g_i^* F_i^*(x) + m_{ij}^* \{A_i^*(x)F_j^*(x) - \frac{1}{2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(x)\} \\ &\quad + \lambda_{ijk}^* \{A_i^*(x)A_j^*(x)F_k^*(x) - A_i^*(x)\bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(x)\}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

por tanto, el lagrangiano más general debido al superpotencial, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spot}} &= g_i F_i(x) + m_{ij} \{A_i(x)F_j(x) - \frac{1}{2}\psi_i(x)\psi_j(x)\} \\ &\quad + \lambda_{ijk} \{A_i(x)A_j(x)F_k(x) - A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x)\} \\ &\quad + g_i^* F_i^*(x) + m_{ij}^* \{A_i^*(x)F_j^*(x) - \frac{1}{2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(x)\} \\ &\quad + \lambda_{ijk}^* \{A_i^*(x)A_j^*(x)F_k^*(x) - A_i^*(x)\bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(x)\}, \end{aligned}$$

lo cual se reescribe por conveniencia (utilizando la simetría de m_{ij} y λ_{ijk}) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spot}} = & [g_i + m_{ij}A_j(x) + \lambda_{ijk}A_k(x)A_j(x)]F_i(x) \\ & - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i(x)\psi_j(x) - m_{ij}^*\frac{1}{2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(x) \\ & + [g_i^* + m_{ij}^*A_j^*(x) + \lambda_{ijk}^*A_k^*(x)A_j^*(x)]F_i^*(x) \\ & - \lambda_{ijk}A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x) - \lambda_{ijk}^*A_i^*(x)\bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(x). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Por tanto, el lagrangiano supersimétrico de la acción (7.5) queda como:

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \mathcal{L} = & i\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_i + \partial^\mu A_i^*\partial_\mu A_i + F_i^*F_i + \text{derivadas totales} \\ & [g_i + m_{ij}A_j(x) + \lambda_{ijk}A_k(x)A_j(x)]F_i(x) \\ & - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i(x)\psi_j(x) - m_{ij}^*\frac{1}{2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(x) \\ & + [g_i^* + m_{ij}^*A_j^*(x) + \lambda_{ijk}^*A_k^*(x)A_j^*(x)]F_i^*(x) \\ & - \lambda_{ijk}A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x) - \lambda_{ijk}^*A_i^*(x)\bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(x). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Observe que no existen términos cinéticos para los campos escalares F_i (es decir, términos con derivadas espacio-temporales de F_i), por lo cual no tienen dinámica y pueden quitarse con la ayuda de las ecuaciones de movimiento. Se dice entonces que los F_i son *campos auxiliares* y debido a su presencia en la ecuación (7.18), esta es la forma “off-shell” del lagrangiano. Para obtener la forma “on-shell” se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.2) para F_l y F_l^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_l} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F_l)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_l} = F_l^* + g_l + m_{il}A_i + \lambda_{ijl}A_iA_j = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_l^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F_l^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_l^*} = F_l + g_l^* + m_{il}^*A_i^* + \lambda_{ijl}^*A_i^*A_j^* = 0. \end{aligned}$$

Entonces el lagrangiano de la ecuación (7.18) puede reescribirse como:²

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \mathcal{L} = & i\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_i + \partial^\mu A_i^*\partial_\mu A_i - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i(x)\psi_j(x) - \frac{1}{2}m_{ij}^*\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(x) \\ & - \lambda_{ijk}A_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x) - \lambda_{ijk}^*A_i^*(x)\bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(x) - F_i^*F_i \\ & + \text{derivadas totales,} \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde $V(A_i, A_j^*) \equiv F_l^*F_l$ es el potencial de esta teoría de campos supersimétrica y se calcula

²Este lagrangiano describe un modelo supersimétrico de campos de materia. Es posible considerar simetrías globales adicionales que imponen restricciones sobre los acoplamientos y las cargas de los campos.

como

$$\begin{aligned}
V(A_i, A_j^*) &= (g_l + m_{il}A_i + \lambda_{ijl}A_iA_j)(g_l^* + m_{kl}^*A_k^* + \lambda_{mnl}^*A_m^*A_n^*) \\
&= g_l g_l^* + g_l m_{kl}^* A_k^* + g_l \lambda_{mnl}^* A_m^* A_n^* + g_l^* m_{il} A_i + m_{kl}^* m_{il} A_i A_k^* \\
&\quad + \lambda_{mnl}^* m_{il} A_i A_m^* A_n^* + g_l^* \lambda_{ijl} A_i A_j + m_{kl}^* \lambda_{ijl} A_i A_j A_k^* \\
&\quad + \lambda_{mnl}^* \lambda_{ijl} A_i A_j A_m^* A_n^*.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Se observa así que las interacciones cuárticas del potencial V no son independientes, sino que están fijadas por los mismos coeficientes que determinan los acoplamientos de Yukawa. Esto refleja una propiedad fundamental de la supersimetría: la relación directa entre las interacciones fermiónicas y escalares.

7.2. Construcción del Lagrangiano a Partir de Supercampos Vectoriales

En la sección anterior se construyó el lagrangiano supersimétrico para supercampos quirales, obteniendo los términos cinéticos y de interacción correspondientes a campos escalares, espinoriales y auxiliares. En esta sección, se aborda la construcción del lagrangiano supersimétrico que describe campos de gauge abelianos, los cuales se incorporan mediante supercampos vectoriales reales $V(x, \theta, \bar{\theta})$.

Como se mostró previamente, el supercampo $W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_A V$ es un supercampo quiral izquierdo que resulta invariante bajo la transformación de gauge supersimétrica (6.56). Su conjugado hermítico $\bar{W}_{\dot{A}}$ es también quiral (derecho), y ambos contienen la dinámica del campo de gauge y de su compañero fermiónico (el gaugino). Los objetos $W^A W_A$ y $\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}$ son supercampos quirales (izquierdo y derecho, respectivamente), y además son *escalares de Lorentz*. Por tanto, puede utilizarse su D-término, extraído vía integración de Grassmann, para construir una acción supersimétrica:

$$\mathcal{A} = \int d^4x \int d^4\theta \left(W^A W_A \delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}} \delta^2(\theta) \right). \tag{7.21}$$

Esta acción, construida a partir del supercampo vectorial $V(x, \theta, \bar{\theta})$, es invariante tanto bajo traslaciones supersimétricas como bajo la transformación de gauge supersimétrica definida en (6.56). Para obtener una expresión explícita en componentes, se procede a calcular $W^A W_A$ y

$\bar{W}_A; \bar{W}^{\dot{A}}$ utilizando las ecuaciones (6.69) y (6.70). Entonces:

$$\begin{aligned}
W^A W_A &= (\lambda^A + 2D\theta^A + (\sigma^{\mu\nu}\theta)^A F_{\mu\nu} - i(\theta\theta)\epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{B}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}}) \\
&\quad \times (\lambda_A + 2D\theta_A + (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\rho\sigma} - i(\theta\theta)\sigma_{A\dot{B}}^\rho \partial_\rho \bar{\lambda}^{\dot{B}}) \\
&= \lambda^A \lambda_A + 2D\lambda^A \theta_A + \lambda^A (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\rho\sigma} - i(\theta\theta)\lambda^A \sigma_{A\dot{B}}^\rho \partial_\rho \bar{\lambda}^{\dot{B}} \\
&\quad + 2D\theta^A \lambda_A + 4D^2 \theta^A \theta_A + 2D\theta^A (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\rho\sigma} \\
&\quad + \underbrace{(\sigma^{\mu\nu}\theta)^A \lambda_A F_{\mu\nu}}_{=T_1} + \underbrace{2D(\sigma^{\mu\nu}\theta)^A \theta_A F_{\mu\nu}}_{=T_2} + \underbrace{(\sigma^{\mu\nu}\theta)^A (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}_{=T_3} \\
&\quad - \underbrace{i(\theta\theta)\epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{B}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \lambda_A}_{=T_4},
\end{aligned}$$

donde se necesita calcular:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (\sigma^{\mu\nu}\theta)^A \lambda_A F_{\mu\nu} = \epsilon^{AB} (\sigma^{\mu\nu})_B^C \theta_C \lambda_A F_{\mu\nu} = \lambda \sigma^{\mu\nu} \theta F_{\mu\nu}, \\
T_2 &= 2D(\sigma^{\mu\nu}\theta)^A \theta_A F_{\mu\nu} = 2D\theta \sigma^{\mu\nu} \theta F_{\mu\nu} \stackrel{A.108}{=} 0, \\
T_4 &= -i(\theta\theta)\epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{B}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{B}} \lambda_A = -i(\theta\theta)\lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda},
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
T_3 &= (\sigma^{\mu\nu}\theta)^A (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \epsilon^{AB} (\sigma^{\mu\nu})_B^C \theta_C (\sigma^{\rho\sigma})_A^D \theta_D F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&= \theta\theta \frac{1}{2} \epsilon^{AB} (\sigma^{\mu\nu})_B^C \epsilon_{CD} (\sigma^{\rho\sigma})_A^D F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \theta\theta \frac{1}{2} \epsilon^{AB} (\sigma^{\mu\nu})_B^C (\sigma^{\rho\sigma} \epsilon^T)_{AC} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&\stackrel{A.107}{=} -\theta\theta \frac{1}{2} \epsilon^{BA} \epsilon_{AD} (\sigma^{\mu\nu})_B^C (\sigma^{\rho\sigma})_C^D F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \theta\theta \text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma}] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&\stackrel{A.109}{=} -\frac{1}{2} (\theta\theta) \left[\frac{1}{2} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \right] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&= (\theta\theta) \left[\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} - \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right] \\
&= (\theta\theta) \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{2} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} \right],
\end{aligned}$$

donde se ha definido el *campo de esfuerzo dual* $F^{*\mu\nu}$ como

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (7.22)$$

Sustituyendo los términos T_1, T_2, T_3 y T_4 , al simplificar resulta:

$$\begin{aligned}
W^A W_A &= \lambda^2 + 4D\lambda\theta + 2\lambda\sigma^{\rho\sigma}\theta F_{\rho\sigma} \\
&\quad + (\theta\theta) \left[4D^2 - 2i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{2} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} \right].
\end{aligned} \quad (7.23)$$

De manera similar se muestra que

$$\begin{aligned} \bar{W}_A \bar{W}^A &= \bar{\lambda}^2 + 4D\bar{\lambda}\bar{\theta} - 2\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\theta}F_{\mu\nu} \\ &+ (\bar{\theta}\bar{\theta})[4D^2 + 2i(\partial_\mu\lambda)\sigma^\mu\bar{\lambda} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Con las ecuaciones (7.23) y (7.24) se determina que el lagrangiano en la acción de la ecuación (7.21) es [3]:

$$\int d^4\theta \mathcal{L} = 8D^2 - 4i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \text{derivada total}, \quad (7.25)$$

donde se utilizó

$$(\partial_\mu\lambda)\sigma^\mu\bar{\lambda} = \partial_\mu(\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) - \lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} = -\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \text{derivadas totales.}$$

Este es, por tanto, el lagrangiano obtenido a partir del supercampo de intensidad W_A ; no representa el caso más general, pero contiene las características esenciales del sector gauge supersimétrico. El campo auxiliar real $D(x)$ puede eliminarse mediante sus ecuaciones de movimiento, y el campo de gauge sin masa V_μ viene acompañado por su supercompañero fermiónico sin masa λ , conocido como *gaugino* o *fotino* en el caso abeliano. Este último es un *espinor de Majorana*.

7.3. Teoría de Yang-Mills Supersimétrica con $\mathbf{N} = 1$

En las secciones anteriores se construyeron lagrangianos supersimétricos para supercampos quirales y para supercampos vectoriales abelianos, incluyendo sus términos cinéticos e interacciones derivadas del superpotencial. El paso siguiente es extender este formalismo al caso de simetrías gauge locales no abelianas, lo cual exige introducir supercampos vectoriales matriciales. Esta generalización permite definir transformaciones gauge supersimétricas apropiadas y construir lagrangianos invariantes que describen, en el caso $\mathcal{N} = 1$, la dinámica de los campos gauge, sus gauginos asociados y los campos auxiliares requeridos para mantener la invariancia supersimétrica fuera de la capa de masa (off-shell).

Sea G un grupo de Lie, con generadores hermíticos T_a que satisfacen el álgebra de conmutación:

$$[T_a, T_b] = i t_{ab}^c T_c, \quad (7.26)$$

donde t_{ab}^c son las constantes de estructura características del grupo. En la *representación adjunta*, estos generadores se representan mediante matrices cuyos elementos están dados por:

$$(T_a)_b^c = i t_{ab}^c. \quad (7.27)$$

El producto interno entre generadores suele definirse mediante la traza de su producto. En la representación adjunta, es común normalizar los generadores de modo que [7]:

$$\text{Tr}[T_a T_b] = k \delta_{ab}, \quad (7.28)$$

donde k es una constante de normalización que depende de la representación empleada.

Para construir términos del lagrangiano invariantes bajo transformaciones gauge locales, se introduce un *supercampo vectorial matricial* $V(x, \theta, \bar{\theta})$, definido como:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^a(x, \theta, \bar{\theta}) T_a, \quad (7.29)$$

cuyas componentes V^a son supercampos vectoriales (reales). La transformación gauge no abeliana de este supercampo está dada por [3, 4, 9, 18]:

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}, \quad (7.30)$$

donde $\Lambda(x, \theta)$ es un supercampo quiral matricial, que puede expandirse como:

$$\Lambda_a^b(x, \theta, \bar{\theta}) = \Lambda^c(x, \theta, \bar{\theta}) (T_c)_a^b, \quad (7.31)$$

con Λ^a funciones dependientes de las coordenadas del superespacio y T_a los generadores del grupo gauge. El carácter quiral de Λ implica:

$$\bar{D}_{\dot{A}} \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad D_A \Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (7.32)$$

Términos Cinéticos Campos de Materia

Los supercampos quirales Φ_a y sus conjugados Φ_a^\dagger , que transforman bajo una representación del grupo gauge con índices internos a, b , se transforman localmente como:

$$\Phi'_a = \left(e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \right)_a^b \Phi_b, \quad \Phi^{\dagger'a} = \Phi^{\dagger b} \left(e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \right)_b^a. \quad (7.33)$$

De este modo se garantiza que Φ'_a permanezca quiral (es decir, que satisfaga $\bar{D}_{\dot{A}} \Phi'_a = 0$) y que $\Phi^{\dagger'a}$ sea antiquiral.

La acción cinética gauge-invariante para un supercampo quiral Φ acoplado a V se construye entonces mediante el lagrangiano:

$$\int d^4\theta \mathcal{L}_{\text{kin}} = \int d^4\theta \Phi^\dagger e^V \Phi, \quad (7.34)$$

el cual permanece invariante bajo la transformación (7.33), como puede verificarse directamen-

te:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger e^{V'} \Phi' &= (\Phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger}) (e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}) (e^{-i\Lambda} \Phi) \\ &= \Phi^\dagger e^V \Phi.\end{aligned}$$

De este modo se garantiza la invariancia gauge en la teoría supersimétrica no abeliana, extendiendo los resultados previamente obtenidos en el caso abeliano.

Puede emplearse el gauge de Wess–Zumino, es decir V_{WZ} como en la ecuación (6.64), para simplificar el cálculo de e^V . En primer lugar, se obtiene:

$$\begin{aligned}V_{WZ}^a V_{WZ}^b &= [(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu^a(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^a(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D^a(x)] \\ &\quad \times [(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu^b(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^b(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^b(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D^b(x)] \\ &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\mu^a V_\nu^b = \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})V^{a\mu}(x)V_\mu^b(x),\end{aligned}\quad (7.35)$$

$$V_{WZ}^a V_{WZ}^b V_{WZ}^c = 0. \quad (7.36)$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}e^V &= 1 + V + \frac{1}{2}V^2 = 1 + V^a T_a + \frac{1}{2}V^a V^b T_a T_b \\ &= 1 + [(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu^a(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^a(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}D^a(x)] T_a \\ &\quad + \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})V^{a\mu}(x)V_\mu^b(x) T_a T_b \\ &= 1 + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta} \left[D(x) + \frac{1}{4}V^\mu(x)V_\mu(x) \right].\end{aligned}\quad (7.37)$$

Para determinar explícitamente el término cinético de los campos de materia se comienza calculando:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger e^V \Phi &= \Phi^\dagger{}^a \Phi_a + \left\{ \Phi^\dagger{}^b (\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \Phi_c V_\mu^a(x) + \Phi^\dagger{}^b (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta} \Phi_c \bar{\lambda}^a(x) + \Phi^\dagger{}^b (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta \Phi_c \lambda^a(x) \right\} (T_a)_b{}^c \\ &\quad + \Phi^\dagger{}^b (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta} \Phi_c \left[D^a(x) (T_a)_b{}^c + \frac{1}{4}V^{a\mu}(x) (T_a)_b{}^e V_\mu^d(x) (T_d)_e{}^c \right],\end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\dagger b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\Phi_c &= [A^{*b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) - i(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu A^{*b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^b(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})]\Phi_c \\
&= A^{*b}A_c(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) - i(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu A^{*b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_c + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^b(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_c \\
&\quad + A^{*b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\sqrt{2}\theta\psi_c + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^b(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\sqrt{2}\theta\psi_c + A^{*b}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu A_c \\
&= \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A^{*b}A_c - \frac{i}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial^\mu A^{*b}A_c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\bar{\psi}^bA_c \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}\psi_cA^{*b} + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\psi_c\sigma^\mu\bar{\psi}^b + \frac{i}{2}\theta\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})A^{*b}\partial^\mu A_c \\
&= \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A^{*b}A_c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^\mu\bar{\psi}^bA_c + \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}\psi_cA^{*b} \\
&\quad + \theta\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})\left[\frac{i}{2}(A^{*b}\partial^\mu A_c - A_c\partial^\mu A^{*b}) + \frac{1}{2}\psi_c\sigma^\mu\bar{\psi}^b\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{\dagger b}(\theta\theta)\bar{\theta}\Phi_c\bar{\lambda}^a &= \left[A^{*b}(\theta\theta)\bar{\theta} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^b(\theta\theta)\bar{\theta}\right] \times \left[A_c + \sqrt{2}\theta\psi_c + (\theta\theta)F_c + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_c\right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_c - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_c\right]\bar{\lambda}^a \\
&= (A^{*b}(\theta\theta)\bar{\theta}A_c)\bar{\lambda}^a + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^b(\theta\theta)\bar{\theta}A_c\bar{\lambda}^a \\
&= (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^aA^{*b}A_c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\psi}^b\bar{\lambda}^aA_c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{\dagger b}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\Phi_c\lambda^a(x) &= \left[(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta A^{*b}\right] \times \left[A_c + \sqrt{2}\theta\psi_c + (\theta\theta)F_c + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A_c\right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_c - \frac{1}{4}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\square A_c\right]\lambda^a(x) \\
&= (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^a(x)A^{*b}A_c + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta A^{*b}\sqrt{2}(\theta\psi_c)\lambda^a(x) \\
&= (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^a(x)A^{*b}A_c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}A^{*b}\psi_c(x)\lambda^a(x),
\end{aligned}$$

y por último,

$$\Phi^{\dagger b}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\Phi_c = (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}A^{*b}A_c,$$

con lo cual, el término cinético es el D -término:

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta \Phi^\dagger e^V \Phi = & i\partial_\mu \bar{\psi}^a \bar{\sigma}^\mu \psi_a + \partial^\mu A^{*a} \partial_\mu A_a + F^{*a} F_a + \text{derivadas totales} \\
& + \left[\frac{i}{2} (A^{*b} \partial^\mu A_c - A_c \partial^\mu A^{*b}) + \frac{1}{2} \psi_c \sigma^\mu \bar{\psi}^b \right] V_\mu^a (T_a)_b^c \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^b \bar{\lambda}^a A_c (T_a)_b^c - \frac{1}{\sqrt{2}} A^{*b} \psi_c(x) \lambda^a(x) (T_a)_b^c \\
& + A^{*b} A_c [D^a(x) (T_a)_b^c + \frac{1}{4} V^{a\mu} (T_a)_b^e V_\mu^d (T_d)_e^c]. \tag{7.38}
\end{aligned}$$

Esto puede reescribirse más familiarmente definiendo la derivada covariante:

$$(D_\mu)_b^c A_c \equiv \delta_b^c \partial_\mu A_c - \frac{i}{2} (V_\mu)_b^c A_c, \tag{7.39}$$

de modo que

$$(D^\mu A)^{\dagger b} = \partial^\mu A^{*c} \delta_c^b + \frac{i}{2} A^{*c} (V^\mu)_c^b,$$

dado que los generadores T_a son hermíticos. Se puede entonces calcular:

$$\begin{aligned}
(D^\mu A)^{\dagger b} (D_\mu A)_b &= \left(\partial^\mu A^{*c} \delta_c^b + \frac{i}{2} A^{*c} (V^\mu)_c^b \right) \times \left(\delta_b^a \partial_\mu A_a - \frac{i}{2} (V_\mu)_b^a A_a \right) \\
&= \partial^\mu A^{*a} \partial_\mu A_a - \frac{i}{2} (A_a \partial^\mu A^{*c} - A^{*c} \partial_\mu A_a) (V^\mu)_c^a + \frac{1}{4} A^{*c} (V^\mu)_c^b (V_\mu)_b^a A_a
\end{aligned}$$

de manera que el término cinético (7.38) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta \Phi^\dagger e^V \Phi = & (D^\mu A)^\dagger (D_\mu A) - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\psi} \bar{\lambda} A + A^* \lambda \psi] + A^* D A \\
& + F^* F + \text{derivadas totales}, \tag{7.40}
\end{aligned}$$

donde todos los índices internos están contraídos. De manera general, si se tienen varios supercampos quirales Φ_i ,³ cada uno transformando bajo una representación del grupo gauge, el término cinético total se escribe como:

$$\sum_i \int d^4\theta \Phi_i^\dagger e^V \Phi_i, \tag{7.41}$$

donde V se toma en la representación correspondiente al supercampo Φ_i . Su desarrollo en

³**Nota:** A partir de aquí, el subíndice i se utiliza para etiquetar diferentes supercampos quirales que transforman bajo diferentes representaciones.

componentes es:

$$\sum_i \left[(D_\mu A_i)^\dagger D^\mu A_i - i\psi_i \sigma^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi}_i - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_i \bar{\lambda} A_i + A_i^* \lambda \psi_i) + A_i^* D A_i + F_i^\dagger F_i \right] + \text{derivadas totales.} \quad (7.42)$$

Términos Cinéticos para Campos Gauge

Una vez definido el acoplamiento gauge de los supercampos quirales, es necesario considerar los términos cinéticos correspondientes al sector gauge. Dado que en el caso no abeliano el supercampo vectorial V es matricial, la definición del supercampo de intensidad supersimétrica W_A debe extenderse para mantener la invariancia gauge.

Para el caso no abeliano, se define el supercampo quiral de intensidad como:

$$W_A = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 (e^{-V} D_A e^V). \quad (7.43)$$

Este objeto transforma covariantemente bajo transformaciones gauge no abelianas de la forma:

$$W'_A = e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda}. \quad (7.44)$$

Dado que W_A es matricial, para construir términos invariantes bajo simetrías gauge es necesario formar expresiones invariantes mediante la traza. En particular, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [W'_A W'^A] &= \text{Tr} (e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda} e^{-i\Lambda} W^A e^{i\Lambda}) \\ &= \text{Tr} [W_A W^A], \end{aligned} \quad (7.45)$$

donde se ha utilizado la propiedad cíclica de la traza. Por tanto, el término cinético gauge-invariante para el sector de Yang-Mills supersimétrico se construye mediante:

$$\int d^2\theta \text{Tr}(W^A W_A) + \int d^2\bar{\theta} \text{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}). \quad (7.46)$$

Este término describe la dinámica supersimétrica de los campos gauge, sus gauginos y los campos auxiliares asociados, y constituye la base para el lagrangiano puro de Yang-Mills supersimétrico.

Para obtener su forma explícita en términos de los campos físicos, es necesario desarrollar $W_A W^A$ partiendo de la definición (7.43), lo cual requiere calcular expresiones intermedias co-

mo $e^{-V}D_Ae^V$ y sus derivadas:

$$\begin{aligned}
e^{-V}D_Ae^V &= (1-V)D_A(1+V+\frac{1}{2}V^2) = (1-V)(D_AV + \frac{1}{2}(D_AV)V + \frac{1}{2}VD_AV) \\
&= D_AV + \frac{1}{2}(D_AV)V + \frac{1}{2}VD_AV - VD_AV \\
&= D_AV + \frac{1}{2}[D_AV, V] = D_AV + \frac{1}{2}[T_a, T_b](D_AV^a)V^b \\
&= D_AV + \frac{i}{2}t_{ab}^c T_c(D_AV^a)V^b.
\end{aligned}$$

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
W_A &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2e^{-V}D_Ae^V = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_AV - \frac{i}{8}t_{ab}^c T_c\bar{D}^2[(D_AV^a)V^b], \\
&= \left[-\frac{1}{4}\bar{D}^2D_AV^c - \frac{i}{8}t_{ab}^c\bar{D}^2[(D_AV^a)V^b] \right] T_c \\
&\equiv W_A^c T_c
\end{aligned}$$

Es necesario calcular explícitamente las expresiones:

$$-\frac{1}{4}\bar{D}^2D_AV^c, \quad (D_AV^a)V^b, \quad \text{y} \quad \bar{D}^2[(D_AV^a)V^b].$$

Algunas de estas cantidades ya fueron obtenidas en la Sección 6.4, trabajando en el gauge de Wess–Zumino y utilizando la variable $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$. Allí se demostró que:

$$\begin{aligned}
V^b(y, \theta) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu^b(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^b(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^b(y) \\
&\quad + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D^b(y) - \frac{i}{2}\partial^\mu V_\mu^b(y)],
\end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\begin{aligned}
D_A^{(1)}V^{(1)a} &= \sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\mu^a(y) + 2\theta_A\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\lambda_A^a(y) - i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a)_A \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\{2\delta_A^B D^a(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B F_{\mu\nu}^a(y)\}\theta_B,
\end{aligned} \tag{7.48}$$

$$-\frac{1}{4}\bar{D}^2D_AV^c = -\{\lambda_A^c(y) + 2D^c(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu})_A^B\theta_B F_{\mu\nu}^c(y) - i(\theta\theta)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^c(y)\}, \tag{7.49}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(D_AV^a)V^b &= \{\sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\mu^a(y) + 2\theta_A\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(y) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\lambda_A^a(y) - i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a(y) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}[2\delta_A^B D^a(y) + (\sigma^{\mu\nu})_A^B F_{\mu\nu}^a(y)]\theta_B\} \times \{(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu^b(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^b(y) \\
&\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda^b(y) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\theta}[D^b(y) - \frac{i}{2}\partial^\nu V_\nu^b(y)]\} \\
&= \sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\mu^a(y)(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu^b(y) + \sigma_{A\dot{B}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{B}}V_\mu^a(y)(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}^b(y) \\
&\quad + 2\theta_A\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(y)(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})V_\nu^b(y) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})[\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a]
\end{aligned}$$

Ahora se puede calcular:

$$\begin{aligned}
\bar{D}^2[(D_A V^a)V^b] &= \bar{\partial}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \times \left\{ \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b \right. \\
&\quad \left. + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \left[\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a \right] \right\} \\
&= -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \left\{ -\frac{1}{2}\bar{\partial}^{\dot{B}} \bar{\partial}^{\dot{A}} (\bar{\theta}\bar{\theta})(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b \right. \\
&\quad \left. + (\theta\theta)\bar{\partial}^{\dot{B}} \bar{\partial}^{\dot{A}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \left[\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a \right] \right\} \\
&= 2\{(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b + (\theta\theta)[(\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b - (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a]\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, con todo esto queda que:

$$\begin{aligned}
W_A &= -\{\lambda_A(y) + 2D(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu})_A^B \theta_B F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A\} \\
&\quad - \frac{i}{4}t_{ab}^c \{(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b + (\theta\theta)[(\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b - (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a]\} T_c \\
&= -\{\lambda_A(y) + 2D(y)\theta_A + (\sigma^{\mu\nu})_A^B \theta_B F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A\} \\
&\quad + \left\{ -\frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b + (\theta\theta) \left[\frac{1}{4}it_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a - \frac{1}{4}it_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)_A V_\mu^b \right] \right\} \\
&= -\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b \\
&\quad + (\theta\theta) \left[\frac{1}{2}it_{ab}^c (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a T_c + i(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A \right].
\end{aligned}$$

Ahora solo queda calcular:

$$\begin{aligned}
W^A W_A &= \{-\lambda^A - 2D\theta^A - (\sigma^{\alpha\beta}\theta)^A F_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}t_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta)^A V_\alpha^l V_\beta^m \\
&\quad + (\theta\theta)[\frac{1}{2}it_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\bar{\lambda}^m)^A V_\alpha^l + i(\sigma^\alpha\partial_\alpha\bar{\lambda})^A]\} \\
&\quad \times \{-\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b \\
&\quad + (\theta\theta)[\frac{1}{2}it_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a + i(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A]\} \\
&= -\lambda^A \{-\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b \\
&\quad + (\theta\theta)[\frac{1}{2}it_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\bar{\lambda}^b)_A V_\mu^a + i(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A]\} \\
&\quad - 2D(y)\theta^A \{-\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) \\
&\quad - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b\} \\
&\quad - (\sigma^{\alpha\beta}\theta)^A F_{\alpha\beta} \{-\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) \\
&\quad - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b\} \\
&\quad - \frac{i}{4}t_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta)^A V_\alpha^l V_\beta^m \{-\lambda_A(y) - 2D(y)\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) \\
&\quad - \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b\} \\
&\quad + (\theta\theta)[\frac{1}{2}it_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\bar{\lambda}^m)^A V_\alpha^l + i(\sigma^\alpha\partial_\alpha\bar{\lambda})^A] \{-\lambda_A(y)\}.
\end{aligned}$$

La evaluación de esta última expresión en su totalidad es extensa e innecesaria, pues se puede extraer directamente el F -término de interés integrando en $d^2\theta$, de manera que los únicos términos con coeficiente $\theta\theta$ son:

$$\begin{aligned}
&\int d^2\theta W^A W_A \\
&= \int d^2\theta \{(\theta\theta)T_d T_c (-\frac{i}{2}t_{ab}^c \lambda^d \sigma^\mu \bar{\lambda}^b V_\mu^a - i\lambda^d \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^c) + (\theta\theta)4D^2 + 2D(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{i}{2}t_{ab}^c D T_c (\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A V_\mu^a V_\nu^b + 2D(\sigma^{\alpha\beta}\theta\theta)F_{\alpha\beta} + (\sigma^{\alpha\beta}\theta\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{i}{4}t_{ab}^c T_c (\sigma^{\alpha\beta}\theta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)F_{\alpha\beta}V_\mu^a V_\nu^b + \frac{i}{2}t_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\theta)D V_\alpha^l V_\beta^m \\
&\quad + \frac{i}{4}t_{lm}^n T_n (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu}V_\alpha^l V_\beta^m - \frac{1}{16}t_{lm}^n t_{ab}^c T_n T_c (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m \\
&\quad + (\theta\theta)T_n T_c (-\frac{i}{2}t_{lm}^n \lambda^c \sigma^\mu \bar{\lambda}^m V_\alpha^l - i\lambda^c \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^n)\}.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación (A.108) para escribir

$$2D\theta\sigma^{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu} = 0,$$

$$2D(\sigma^{\alpha\beta}\theta\theta)F_{\alpha\beta} = 2D\epsilon^{AC}(\sigma^{\alpha\beta})_C^B\theta_B\theta_A F_{\alpha\beta} = -2D(\theta\sigma^{\alpha\beta}\theta)F_{\alpha\beta} = 0,$$

resulta que

$$\begin{aligned} & \int d^2\theta W^A W_A \\ &= \int d^2\theta \{ (\theta\theta) T_d T_c \left(-\frac{i}{2} t_{ab}^c \lambda^d \sigma^\mu \bar{\lambda}^b V_\mu^a - i \lambda^d \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^c \right) + (\theta\theta) 4 T_d T_c D^d D^c \\ &+ \frac{i}{2} t_{ab}^c T_d T_c D^d (\theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) V_\mu^a V_\nu^b + T_d T_c (\sigma^{\alpha\beta} \theta \sigma^{\mu\nu} \theta) F_{\alpha\beta}^d F_{\mu\nu}^c \\ &+ \frac{i}{4} t_{ab}^c T_c T_d (\sigma^{\alpha\beta} \theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) F_{\alpha\beta}^d V_\mu^a V_\nu^b + \frac{i}{2} t_{lm}^n T_n T_c (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta) D^c V_\alpha^l V_\beta^m \\ &+ \frac{i}{4} t_{lm}^n T_n T_c (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta \sigma^{\mu\nu} \theta) F_{\mu\nu}^c V_\alpha^l V_\beta^m - \frac{1}{16} t_{lm}^n t_{ab}^c T_n T_c (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m \\ &+ (\theta\theta) T_n T_c \left(-\frac{i}{2} t_{lm}^n \lambda^c \sigma^\mu \bar{\lambda}^m V_\alpha^l - i \lambda^c \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^n \right) \}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

El carácter matricial de esta ecuación (7.50) está contenido en los generadores T_a . Tomando la traza de esta expresión con ayuda de la ecuación (7.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int d^2\theta \text{Tr} (W^A W_A) &= k \int d^2\theta \{ (\theta\theta) (-i t_{ab}^c \lambda^c \sigma^\mu \bar{\lambda}^b V_\mu^a - 2i \lambda^c \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^c + 4 D^c D^c) \\ &+ \frac{i}{2} t_{ab}^c D^c (\theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) V_\mu^a V_\nu^b + (\sigma^{\alpha\beta} \theta \sigma^{\mu\nu} \theta) F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c \\ &+ \frac{i}{4} t_{ab}^c (\sigma^{\alpha\beta} \theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b + \frac{i}{2} t_{lm}^n (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta) D^n V_\alpha^l V_\beta^m \\ &+ \frac{i}{4} t_{lm}^n (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta \sigma^{\mu\nu} \theta) F_{\mu\nu}^n V_\alpha^l V_\beta^m \\ &- \frac{1}{16} t_{lm}^c t_{ab}^c (\sigma^\alpha \theta \sigma^\beta \theta \sigma^\mu \theta \sigma^\nu) V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m \}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Los últimos seis términos de esta ecuación (7.51) se pueden reorganizar haciendo uso de los siguientes resultados (calculados sistemáticamente como hasta el momento se ha hecho):

$$\begin{aligned}
\theta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu &= \theta^A(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A = \theta^A\sigma_{A\dot{A}}^\mu\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\theta^B\sigma_{B\dot{C}}^\nu = (\theta\theta)\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]\right), \\
\sigma^{\alpha\beta}\theta\sigma^{\mu\nu}\theta &= (\sigma^{\alpha\beta}\theta)^A(\sigma^{\mu\nu}\theta)_A = \epsilon^{AB}(\sigma^{\alpha\beta})_B^C\theta_C(\sigma^{\mu\nu})_A^D\theta_D = (\theta\theta)\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}]\right), \\
\sigma^{\alpha\beta}\theta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu &= (\sigma^{\alpha\beta}\theta)^A(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A = \epsilon^{AB}(\sigma^{\alpha\beta})_B^C\theta_C(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\theta^D\sigma_{D\dot{B}}^\nu \\
&= \epsilon^{AB}\epsilon^{DE}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\theta_C\theta_E(\sigma^{\alpha\beta})_B^C(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\sigma_{D\dot{B}}^\nu = (\theta\theta)\left(\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]\right), \\
\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\theta &= (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta)^A\theta_A = \epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{A}}^\alpha\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\theta^C\sigma_{C\dot{B}}^\beta\theta_A = (\theta\theta)\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^\alpha\bar{\sigma}^\beta]\right), \\
\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\sigma^{\mu\nu}\theta &= (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta)^A(\sigma^{\mu\nu}\theta)_A = \epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{B}}^\alpha\epsilon^{\dot{B}\dot{A}}\theta^C\sigma_{C\dot{A}}^\beta(\sigma^{\mu\nu})_A^D\theta_D \\
&= (\theta\theta)\left(\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^\alpha\bar{\sigma}^\beta\sigma^{\mu\nu}]\right), \\
\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu &= (\sigma^\alpha\theta\sigma^\beta)^A(\sigma^\mu\theta\sigma^\nu)_A = \epsilon^{AB}\sigma_{B\dot{A}}^\alpha\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\theta^C\sigma_{C\dot{B}}^\beta\sigma_{A\dot{C}}^\mu\epsilon^{\dot{C}\dot{D}}\theta^D\sigma_{D\dot{D}}^\nu \\
&= (\theta\theta)\left(\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^\beta\bar{\sigma}^\alpha\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]\right),
\end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta \text{Tr}(W^A W_A) &= k\{-it_{ab}^c\lambda^c\sigma^\mu\bar{\lambda}^b V_\mu^a - 2i\lambda^c\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^c + 4D^c D^c \\
&\quad - \frac{i}{2}t_{ab}^c D^c \text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]V_\mu^a V_\nu^b - \frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}]F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c \\
&\quad + \frac{i}{4}t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b \\
&\quad - \frac{1}{32}t_{lm}^c t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^\beta\bar{\sigma}^\alpha\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu]V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m\}. \tag{7.52}
\end{aligned}$$

Ahora solo resta evaluar las trazas que aparecen, utilizando las siguientes relaciones [3]:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] &= 2\eta^{\mu\nu}, \\
\text{Tr}[\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\
\text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\alpha\bar{\sigma}^\beta] &= 2(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}), \\
\text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] &= i(\eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}),
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}t_{ab}^c D^c \text{Tr}[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] V_\mu^a V_\nu^b &= -t_{ab}^c D^c V^{a\mu} V_\mu^b = 0 \\
-\frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}] F_{\mu\nu}^c F_{\alpha\beta}^c &= -\frac{1}{2} F^{c\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c - \frac{i}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}^c F_{\alpha\beta}^c \\
\frac{i}{4} t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b &= \frac{1}{2} t_{ab}^c F^{c\mu\nu} V_\mu^a V_\nu^b + \frac{1}{4} t_{ab}^c i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b \\
-\frac{1}{32} t_{lm}^c t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^\beta \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m &= -\frac{1}{8} t_{lm}^c t_{ab}^c V^{a\alpha} V^{b\beta} V_\alpha^l V_\beta^m \\
&\quad + i \frac{1}{16} t_{lm}^c t_{ab}^c \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}] F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c + \frac{i}{4} t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b \\
&-\frac{1}{32} t_{lm}^c t_{ab}^c \text{Tr}[\sigma^\beta \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m \\
&= -\frac{1}{2} F^{c\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c - \frac{i}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}^c F_{\alpha\beta}^c \\
&\quad + \frac{1}{2} t_{ab}^c F^{c\mu\nu} V_\mu^a V_\nu^b + \frac{1}{4} t_{ab}^c i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b \\
&\quad - \frac{1}{8} t_{lm}^c t_{ab}^c V^{a\alpha} V^{b\beta} V_\alpha^l V_\beta^m + i \frac{1}{16} t_{lm}^c t_{ab}^c \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m \\
&= -\frac{1}{2} (F^{c\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c - t_{ab}^c F^{c\mu\nu} V_\mu^a V_\nu^b + \frac{1}{4} t_{lm}^c t_{ab}^c V^{a\alpha} V^{b\beta} V_\alpha^l V_\beta^m) \\
&\quad - \frac{i}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (F_{\mu\nu}^c F_{\alpha\beta}^c - t_{ab}^c F_{\alpha\beta}^c V_\mu^a V_\nu^b + \frac{1}{4} t_{lm}^c t_{ab}^c \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\mu^a V_\nu^b V_\alpha^l V_\beta^m) \\
&= -\frac{1}{2} (F^{c\mu\nu} - \frac{1}{2} t_{ab}^c V^{a\mu} V^{b\nu}) (F_{\mu\nu}^c - \frac{1}{2} t_{lm}^c V_\mu^l V_\nu^m) \\
&\quad - \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (F_{\alpha\beta}^c - \frac{1}{2} t_{ab}^c V_\alpha^a V_\beta^b) (F_{\mu\nu}^c - \frac{1}{2} t_{lm}^c V_\mu^l V_\nu^m), \\
&\equiv -\frac{1}{2} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c - \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c,
\end{aligned}$$

donde se ha definido el tensor de esfuerzo no abeliano:

$$F^{c\mu\nu} = F_{\text{abeliano}}^{c\mu\nu} - \frac{1}{2} t_{ab}^c V^{a\mu} V^{b\nu}. \quad (7.53)$$

Además, definiendo la derivada covariante

$$(D_\mu)_a^c = \delta_a^c \partial_\mu - \frac{1}{2} t_{ab}^c V_\mu^b, \quad (7.54)$$

finalmente se obtiene que, al sustituir las ecuaciones (7.53) y (7.54) en la ecuación (7.52),

resulta:

$$\int d^2\theta \operatorname{Tr}(W^A W_A) = k \left\{ -2i\lambda^c \sigma^\mu (D_\mu)_b^c \bar{\lambda}^b + 4D^c D^c - \frac{1}{2} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c - \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c \right\}.$$

Usualmente se establece $k = \frac{1}{2}$, de modo que el término cinético del lagrangiano de Yang-Mills es:

$$\int d^2\theta \operatorname{Tr}(W^A W_A) = -i\lambda^c \sigma^\mu (D_\mu)_b^c \bar{\lambda}^b + 2D^c D^c - \frac{1}{4} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c. \quad (7.55)$$

El complejo conjugado de esta expresión es

$$\int d^2\bar{\theta} \operatorname{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}) = i(D_\mu)_b^c \lambda^b \sigma^\mu \bar{\lambda}^c + 2D^c D^c - \frac{1}{4} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c + \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c, \quad (7.56)$$

de manera que utilizando la regla del producto de la derivada ∂_μ se puede reescribir el primer término de la expresión anterior como

$$i(D_\mu)_b^c \lambda^b \sigma^\mu \bar{\lambda}^c = -i\lambda^c \sigma^\mu (D_\mu)_b^c \bar{\lambda}^b + \text{derivadas totales},$$

y, por lo tanto, resulta que el término cinético de los campos gauge es ⁴ (ecuación (7.46))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} &\equiv \int d^2\theta \operatorname{Tr}(W^A W_A) + \int d^2\bar{\theta} \operatorname{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}) \\ &= -2i\lambda^c \sigma^\mu (D_\mu)_b^c \bar{\lambda}^b - \frac{1}{2} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c + 4D^c D^c + \text{derivadas totales}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

⁴Usualmente este lagrangiano en la literatura se encuentra escrito reescalando $D^c \rightarrow \frac{1}{2}D^c$ y dividiendo toda la expresión entre 2: es decir que $\mathcal{L}_{W_A} = -i\lambda^c \sigma^\mu (D_\mu)_b^c \bar{\lambda}^b - \frac{1}{4} F^{c\mu\nu} F_{\mu\nu}^c + \frac{1}{2} D^c D^c + \text{derivadas totales}$, lo que es consistente con la ecuación (7.57).

Capítulo 8

Cancelación de Divergencias Cuadráticas Ultravioleta

Hasta este punto se ha desarrollado el formalismo general para construir lagrangianos supersimétricos renormalizables, cuyas expresiones completas se encuentran en las ecuaciones (7.17), (7.42) y (7.57). Este marco describe una clase amplia de modelos compatibles con la supersimetría, pero no todas sus posibles interacciones son viables desde el punto de vista fenomenológico. Por ejemplo, términos de masa no invariantes bajo transformaciones gauge deben ser descartados,¹ y la implementación de supersimetría en modelos realistas conduce a extensiones como el Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo, cuya construcción escapa al propósito de esta monografía.

En lugar de adentrarse en modelos específicos, el objetivo de esta sección es aplicar el formalismo desarrollado a un cálculo puntual que permita ilustrar uno de los resultados más notables de la supersimetría: la cancelación de divergencias cuadráticas en diagramas de Feynman a 1-loop [1, 2, 14, 23, 24].

Con base en estas consideraciones, a continuación se seleccionan, del lagrangiano supersimétrico general de Yang-Mills, los términos relevantes para ilustrar cómo emergen de manera natural las cancelaciones de divergencias cuadráticas. En esta etapa, se consideran únicamente los términos correspondientes a los campos de materia, ya que el lagrangiano cinético de los campos gauge no interviene en el análisis que se desarrollará.

El lagrangiano off-shell más general bajo todas las consideraciones anteriores se expresa como:

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \Phi_i^\dagger e^V \Phi_i + \mathcal{L}_{\text{spot}} = & (D^\mu A_i)^\dagger (D_\mu A_i) - i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i - \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_i \bar{\lambda} A_i + A_i^* \lambda \psi_i] \\ & + A_i^* D A_i + F_i^* F_i + \int d^4\theta \{ W[\Phi] \delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}[\Phi^\dagger] \delta^2(\theta) \} \\ & + \text{derivadas totales,} \end{aligned}$$

¹Esto también ocurre en el caso del lagrangiano libre de Dirac, lo cual motiva la inclusión de interacciones de Yukawa.

donde aún queda por definir bien el superpotencial $W[\Phi]$, el cual debe ser una función holomorfa de los supercampos quirales e invariante de gauge [3, 4, 9, 18]. Con el fin de concretar el modelo, se consideran tres supercampos quirales Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 , con las siguientes representaciones y asignaciones de carga bajo el grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

| Supercampo | Representación | Hipercarga (Y) |
|------------|----------------|----------------|
| Φ_1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| Φ_2 | 2 | $\frac{1}{6}$ |
| Φ_3 | 1 | $-\frac{2}{3}$ |

Con estas asignaciones, se puede construir el siguiente superpotencial holomorfo e invariante bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [2, 16]:

$$W[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = \lambda \Phi_1 \cdot \Phi_2 \Phi_3 = \lambda \Phi_{1a} \epsilon^{ab} \Phi_{2b} \Phi_3, \quad (8.1)$$

donde λ es una constante de acoplamiento (análoga a una constante de Yukawa). Esta es la única combinación trilineal de estos supercampos que es invariante bajo el grupo gauge, dado que:

- i. El producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ de $SU(2)_L$ contiene un singlete (producto antisimétrico):

$$(\Phi'_1)_a (\Phi'_2)^a = (U)_a^b (\Phi_1)_b (U^{-1T})^a_c (\Phi_2)^c = (\Phi_1)_b (U^{-1})^a_c (U)_a^b (\Phi_2)^c = (\Phi_1)_b (\Phi_2)^b. \quad (8.2)$$

- ii. La suma de las hipercargas es nula: $\frac{1}{6} + (-\frac{2}{3}) + \frac{1}{2} = 0$.

El adjunto hermítico es

$$\begin{aligned} \bar{W}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] &= (\lambda \Phi_1 \cdot \Phi_2 \Phi_3)^\dagger = (\lambda \Phi_{1a} \epsilon^{ab} \Phi_{2b} \Phi_3)^* = \lambda (\Phi_{2b})^* (\epsilon^T)^{ba} (\Phi_{1a})^* \Phi_3^* \\ &\equiv \lambda (\Phi_2^\dagger)^b \epsilon_{ba} (\Phi_1^\dagger)^a \Phi_3^\dagger \\ &= \lambda (\Phi_1^\dagger)_a (\Phi_2^\dagger)^a \Phi_3^\dagger. \end{aligned}$$

El lagrangiano correspondiente al superpotencial es entonces el $(\theta\theta)$ -término:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{spot}} &= \lambda \epsilon^{ab} (A_{1a} A_{2b} F_3 + A_{1a} F_{2b} A_3 + F_{1a} A_{2b} A_3 - \psi_{1a} \psi_3 A_{2b} - \psi_{1a} \psi_{2b} A_3 - A_{1a} \psi_{2b} \psi_3) \\ &\quad + \lambda \epsilon^{ab} ((A_2^*)_b (A_1^*)_a F_3^* + (A_2^*)_b (F_1^*)_a A_3^* + (F_2^*)_b (A_1^*)_a A_3^* - (\bar{\psi}_2)_b \bar{\psi}_3 (A_1^*)_a \\ &\quad - (\bar{\psi}_2)_b (\bar{\psi}_1)_a A_3^* - (A_2^*)_b (\bar{\psi}_1)_a \bar{\psi}_3), \end{aligned}$$

Con lo cual el lagrangiano total $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{spot}}$ es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t &= \sum_{i=1}^3 \left\{ (D^\mu A_i)^\dagger{}^a (D_\mu A_i)_a - i\bar{\psi}_i^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_{ia} - \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_i^a \bar{\lambda}_a^b A_{ib} + A_i^{*a} \lambda_a^b \psi_{ib}] + A_i^{*a} D_a^b A_{ib} \right\} \\
 &\quad (\epsilon^{ab} F_{1b}^* F_{1a} + \epsilon^{ab} F_{2b}^* F_{2a} + F_3^* F_3) + \lambda \epsilon^{ab} (A_{1a} A_{2b} F_3 + A_{1a} F_{2b} A_3 + F_{1a} A_{2b} A_3 \\
 &\quad - \psi_{1a} \psi_3 A_{2b} - \psi_{1a} \psi_{2b} A_3 - A_{1a} \psi_{2b} \psi_3) + \lambda \epsilon^{ab} (A_{2b}^* A_{1a}^* F_3^* + A_{2b}^* F_{1a}^* A_3^* + F_{2b}^* A_{1a}^* A_3^* \\
 &\quad - \bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_3 A_{1a}^* - \bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_{1a} A_3^* - A_{2b}^* \bar{\psi}_{1a} \bar{\psi}_3) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left\{ (D^\mu A_i)^\dagger{}^a (D_\mu A_i)_a - i\bar{\psi}_i^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_{ia} - \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_i^a \bar{\lambda}_a^b A_{ib} + A_i^{*a} \lambda_a^b \psi_{ib}] + A_i^{*a} D_a^b A_{ib} \right\} \\
 &\quad + \epsilon^{ab} (F_{1b}^* F_{1a} + \lambda F_{1a} A_{2b} A_3 - \lambda A_{2a}^* F_{1b}^* A_3^*) \\
 &\quad + \epsilon^{ab} (F_{2b}^* F_{2a} - \lambda A_{1b} F_{2a} A_3 + \lambda F_{2b}^* A_{1a}^* A_3^*) \\
 &\quad + F_3^* F_3 + \lambda \epsilon^{ab} A_{1a} A_{2b} F_3 + \lambda \epsilon^{ab} A_{2b}^* A_{1a}^* F_3^* \\
 &\quad - \lambda \epsilon^{ab} (\psi_{1a} \psi_3 A_{2b} + \psi_{1a} \psi_{2b} A_3 + A_{1a} \psi_{2b} \psi_3) \\
 &\quad - \lambda \epsilon^{ab} (\bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_3 A_{1a}^* + \bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_{1a} A_3^* + A_{2b}^* \bar{\psi}_{1a} \bar{\psi}_3).
 \end{aligned}$$

Ahora solo resta utilizar las ecuaciones Euler-Lagrange para los campos F_i . Estas arrojan que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{1a}} &= \epsilon^{ab} (F_{1b}^* + \lambda A_{2b} A_3) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{1b}^*} &= \epsilon^{ab} (F_{1a} - \lambda A_{2a}^* A_3^*) = 0, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{2a}} &= \epsilon^{ab} (F_{2b}^* - \lambda A_{1b} A_3) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{2b}^*} &= \epsilon^{ab} (F_{2a} + \lambda A_{1a}^* A_3^*) = 0, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_3} &= F_3^* + \lambda A_1 \cdot A_2 = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_3^*} &= F_3 + \lambda A_2^* \cdot A_1^* = 0,
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t &= \sum_{i=1}^3 \left\{ (D^\mu A_i)^\dagger{}^a (D_\mu A_i)_a - i\bar{\psi}_i^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_{ia} - \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_i^a \bar{\lambda}_a^b A_{ib} + A_i^{*a} \lambda_a^b \psi_{ib}] + A_i^{*a} D_a^b A_{ib} \right\} \\
 &\quad - \lambda^2 ((A_2^*)^b (A_2)_b A_3^* A_3 + (A_1^*)^b (A_1)_b A_3^* A_3 + \epsilon^{ab} (A_1^*)_a (A_2^*)_b \epsilon^{cd} (A_1)_c (A_2)_d) \\
 &\quad - \lambda \epsilon^{ab} (\psi_{1a} \psi_3 A_{2b} + \psi_{1a} \psi_{2b} A_3 + A_{1a} \psi_{2b} \psi_3) \\
 &\quad - \lambda \epsilon^{ab} (\bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_3 A_{1a}^* + \bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_{1a} A_3^* + A_{2b}^* \bar{\psi}_{1a} \bar{\psi}_3).
 \end{aligned}$$

De este lagrangiano, los términos de interés son:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Yuk}} &= -\lambda \epsilon^{ab} (\psi_{1a} \psi_3 A_{2b} + \psi_{1a} \psi_{2b} A_3 + A_{1a} \psi_{2b} \psi_3) \\
 &\quad - \lambda \epsilon^{ab} (\bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_3 A_{1a}^* + \bar{\psi}_{2b} \bar{\psi}_{1a} A_3^* + A_{2b}^* \bar{\psi}_{1a} \bar{\psi}_3). \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quartic}} = -\lambda^2 ((A_2^*)^b (A_2)_b A_3^* A_3 + (A_1^*)^b (A_1)_b A_3^* A_3 + \epsilon^{ab} (A_1^*)_a (A_2^*)_b \epsilon^{cd} (A_1)_c (A_2)_d). \tag{8.4}$$

Identificando el supermultiplete Φ_1 como un doblete de supercampos asociado a los quarks

izquierdos de tercera generación (por ejemplo, t_L y b_L), y Φ_3^\dagger como un supercampo singlete correspondiente al quark top derecho t_R , se definen los campos fermiónicos como:

$$\psi_1 \equiv Q_L \equiv \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad \psi_3 \equiv \bar{t}_R. \quad (8.5)$$

Sus correspondientes supercompañeros escalares, denotados mediante una tilde, son:

$$A_1 \equiv \tilde{Q}_L \equiv \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{b}_L \end{pmatrix}, \quad A_3 \equiv \tilde{\bar{t}}_R. \quad (8.6)$$

Por otra parte, al asociar el supermultiplete Φ_2 con un doblete de supercampos de Higgs, se identifican los campos escalares del Higgs y sus supercompañeros fermiónicos (los Higgsinos) como:

$$A_2 \equiv H \equiv \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 \equiv \tilde{H} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{H}^+ \\ \tilde{H}^0 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Con estas identificaciones, es posible recuperar los términos de Yukawa familiares que describen las interacciones entre el Higgs, el quark top y sus supercompañeros:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}} &\equiv -\lambda \epsilon^{ab} (\psi_{1a} \psi_3 A_{2b}) - \lambda \epsilon^{ab} (A_{2b}^* \bar{\psi}_{1a} \bar{\psi}_3) \\ &= -\lambda (t_L H^0 \bar{t}_R - b_L H^+ \bar{t}_R) - \lambda (\bar{t}_L H^{0*} t_R - \bar{b}_L H^- t_L), \\ &= -\lambda Q_L i \sigma^2 H \bar{t}_R + h.c., \end{aligned} \quad (8.8)$$

y los términos de interacción de cuarto grado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quartic}} &= -\lambda^2 ((A_2^*)^b (A_2)_b A_3^* A_3 + \epsilon^{ab} (A_1^*)_a (A_2^*)_b \epsilon^{cd} (A_1)_c (A_2)_d) \\ &= -\lambda^2 (|H|^2 |\tilde{t}_R|^2 + (\tilde{t}_L^* H^{0*} - \tilde{b}_L^* H^-) (\tilde{t}_L H^0 - \tilde{b}_L H^+)) \\ &= -\lambda^2 (|H|^2 |\tilde{t}_R|^2 + |\tilde{Q}_L i \sigma^2 H|^2). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, el campo de Higgs complejo H adquiere un valor esperado en el vacío (VEV) distinto de cero, v , y se expresa como la fluctuación h alrededor de dicho valor:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Al sustituir esta expresión en el término de Yukawa, se obtiene la interacción entre el Higgs físico h y el quark top, la cual toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}} &= -\lambda t_L H^0 \bar{t}_R - \lambda \bar{t}_L H^{0*} t_R = -\lambda H^0 (t_L \bar{t}_R + \bar{t}_L t_R) \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (v + h) \bar{t} t. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Aquí, t y \bar{t} representan los campos del quark top, y se sobreentiende la contracción de índices de espín de Dirac. Por otra parte, al sustituir en (8.9) se obtienen las interacciones de cuarto grado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quartic}} &= -\lambda^2(|H|^2|\tilde{t}_R|^2 + \tilde{t}_L^*\tilde{t}_L H^{0*}H^0) = -\lambda^2(|H^0|^2|\tilde{t}_R|^2 + |\tilde{t}_L|^2|H^0|^2) \\ &= -\frac{\lambda^2}{2}(v+h)^2(|\tilde{t}_R|^2 + |\tilde{t}_L|^2). \end{aligned} \quad (8.12)$$

El desarrollo anterior, concluido en las ecuaciones (8.11) y (8.12), evidencia cómo dentro de un modelo supersimétrico, los acoplamientos de tipo Yukawa y los términos de interacción cuárticos no son independientes, sino que están intrínsecamente relacionados a través de la estructura del superpotencial. En particular, el acoplamiento cuártico entre el Higgs y los escalares supersimétricos (los stops) es exactamente igual al cuadrado del acoplamiento de Yukawa del quark top. Esta relación no es accidental: es una consecuencia directa de la supersimetría. Gracias a esta estructura, las contribuciones divergentes provenientes de fermiones (como el top) y de escalares (como los stops) al potencial efectivo del Higgs se cancelan de forma exacta a nivel de un loop. Esta cancelación constituye el mecanismo mediante el cual la supersimetría protege de manera natural la estabilidad de la escala electrodébil frente a correcciones ultravioleta de tipo cuadrático [2, 16].

8.1. Correcciones Cuadráticas a la Masa del Higgs a un Loop

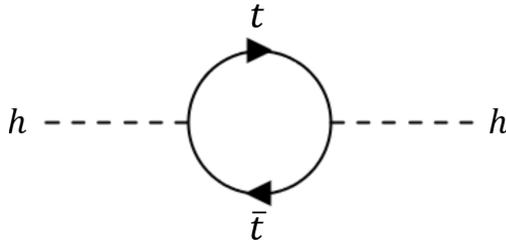


Figura 8.1: Contribución a la masa del Higgs proveniente de un loop fermiónico con el quark top. El factor $-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ proviene del término de Yukawa $-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}h\bar{t}t$.

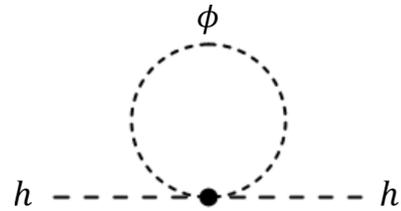


Figura 8.2: Corrección a la masa del Higgs proveniente de un loop escalar correspondiente a un sfermión asociado. El factor debido al vértice $-i\lambda^2$ surge del potencial escalar $-\frac{\lambda^2}{2}h^2|\phi|^2$.

8.1.1. Contribución Fermiónica: Loop del Quark Top

En esta sección se realiza el cálculo de la contribución del interior del diagrama de la figura 8.1 a la amplitud del proceso, la cual está determinada por los propagadores de las líneas internas y

el factor de vértice que viene dado por el término de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} h t \bar{t}. \quad (8.13)$$

El propagador del quark top es (del término cinético del espinor libre del quark top):

$$\text{Propagador del Quark-top: } \frac{i}{\not{k} - m_t}. \quad (8.14)$$

Cada vértice aporta (del término de Yukawa):

$$\text{Factor del vértice: } -i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}. \quad (8.15)$$

Una última regla de Feynman importante es que, para un loop fermiónico, se toma la traza y se multiplica por -1 . Por tanto, la amplitud que se deriva de la figura 8.1 contiene la integral

$$I = -i(-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{(\not{k} - m_t)} \frac{i}{(\not{k} + \not{p} - m_t)} \right], \quad (8.16)$$

donde k es el momento interno del quark top y p el momento del Higgs que entra en el vértice. Se comienza calculando la traza en el interior de la integral, para lo cual primero debe reescribirse la expresión (8.16) como

$$\begin{aligned} I &= -i\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{(\not{k} + m_t)(\not{k} + \not{p} + m_t)}{(k^2 - m_t^2)[(\not{k} + \not{p})^2 - m_t^2]} \right] \\ &= -i\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{(\not{k} + m_t)^2 + (\not{k} + m_t)\not{p}}{(k^2 - m_t^2)[k^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + p^2 - m_t^2]} \right] \\ &= -i\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [(\not{k} + m_t)^2 + (\not{k} + m_t)\not{p}]}{(k^2 - m_t^2)[k^2 - m_t^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + p^2]}, \end{aligned}$$

porque $\not{k}\not{p} = k \cdot p$. Ahora, como $\text{Tr}[I] = 4$, $\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$ y $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$ [13], entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\not{k} + m_t)^2 + (\not{k} + m_t)\not{p}] &= \text{Tr} [k^2 + 2\mathbf{k}m_t + m_t^2 + k \cdot p + m_t\not{p}] \\ &= 4(k^2 + k \cdot p + m_t^2), \end{aligned} \quad (8.17)$$

entonces

$$I = -i2\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 + k \cdot p + m_t^2)}{(k^2 - m_t^2)(k^2 - m_t^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + p^2)}, \quad (8.18)$$

Se puede reducir el denominador utilizando la ecuación de los parámetros de Feynman [12, 9]:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + (1-x)b]^2}, \quad (8.19)$$

de manera que

$$\frac{1}{(k^2 - m_t^2)(k^2 - m_t^2 + 2k \cdot p + p^2)} \equiv \int_0^1 \frac{dx}{D^2}, \quad (8.20)$$

donde se ha definido el denominador

$$\begin{aligned} D &= (k^2 - m_t^2)x + (1 - x)(k^2 - m_t^2 + 2k \cdot p + p^2) \\ &= (xk^2 - xm_t^2) + (k^2 - m_t^2 + 2k \cdot p + p^2) - xk^2 + xm_t^2 - 2xk \cdot p - xp^2 \\ &= k^2 - m_t^2 + 2(1 - x)k \cdot p + (1 - x)p^2 + \underbrace{[(1 - x)p]^2 - [(1 - x)p]^2}_{=0} \\ &= (k + (1 - x)p)^2 - m_t^2 - [(1 - x)p]^2 + (1 - x)p^2. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Redefiniendo la variable de integración en x en la ecuación (8.20) como $\tilde{x} = 1 - x$ se obtiene que

$$\int_0^1 f(1 - x)dx = - \int_1^0 f(\tilde{x})d\tilde{x} \equiv \int_0^1 f(x)dx, \quad (8.22)$$

donde la última definición se sigue del hecho que la variable de integración es muda. Sustituyendo las ecuaciones (8.20) y (8.21) en la ecuación (8.18) se obtiene

$$I = -2i\lambda^2 \int_0^1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 + k \cdot p + m_t^2)}{[(k + xp)^2 - \Delta]^2} dx, \quad (8.23)$$

donde se ha definido $\Delta(x) \equiv m_t^2 + (xp)^2 - xp^2$. El siguiente paso es definir ahora $l \equiv k + xp$ resulta $d^4l = d^4k$ y $k = l - xp$, de modo que (8.23) se reescribe como

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2i\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{l^2 + (1 - 2x)l \cdot p + \Delta}{[l^2 - \Delta]^2} d^4l dx. \\ &= \frac{-2i\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \left[\int \frac{l^2 + \Delta}{[l^2 - \Delta]^2} d^4l + \int \frac{(1 - 2x)l \cdot p}{[l^2 - \Delta]^2} d^4l \right] dx. \end{aligned} \quad (8.24)$$

La segunda integral en d^4l se cancela dada la linealidad del numerador (antisimetría) y por tanto, queda resolver:

$$I = \frac{-2i\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{l^2 + \Delta}{[l^2 - \Delta]^2} d^4l dx. \quad (8.25)$$

Se puede aplicar una rotación de Wick a esta expresión, definiendo el vector euclidiano en el plano complejo $l_E = (il^0, l^1, l^2, l^3)$, de manera que [9]:

$$l^2 = l_\mu l^\mu = (l^0)^2 - |\mathbf{l}|^2 = -l_E^2 = -[(l_E^0)^2 + (l_E^1)^2 + (l_E^2)^2 + (l_E^3)^2], \quad (8.26)$$

entonces la ecuación (8.25) queda como

$$I = \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{-l_E^2 + \Delta}{[l_E^2 + \Delta]^2} d^4 l_E dx. \quad (8.27)$$

Utilizando coordenadas polares en cuatro dimensiones y aplicando un cut-off Λ , el cual es la escala de energía hasta la cual se supone el modelo válido, se puede escribir

$$I = \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^\Lambda \frac{-l_E^2 + \Delta}{[l_E^2 + \Delta]^2} l_E^3 dl_E d\Omega_4 dx, \quad (8.28)$$

donde $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$ es el ángulo sólido. Se definen entonces las integrales auxiliares:

$$I_1 \equiv \int \frac{-l_E^5}{[l_E^2 + \Delta]^2} dl_E, \quad (8.29)$$

$$I_2 \equiv \int \frac{\Delta l_E^3}{[l_E^2 + \Delta]^2} dl_E. \quad (8.30)$$

Utilizando la sustitución $u = l_E^2$ se obtiene $du = 2l_E dl_E = 2u^{1/2} dl_E$, entonces las ecuaciones (8.29) y (8.30) se reescriben como

$$I_1 = - \int_0^{\Lambda^2} \frac{u^{5/2}}{[u + \Delta]^2} \frac{du}{2u^{1/2}} = - \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{u^2}{[u + \Delta]^2} du, \quad (8.31)$$

$$I_2 = \int_0^{\Lambda^2} \frac{\Delta u^{3/2}}{[u + \Delta]^2} \frac{du}{2u^{1/2}} = \frac{\Delta}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{u du}{[u + \Delta]^2}. \quad (8.32)$$

Ambas ecuaciones se resuelven por fracciones parciales haciendo $v = u + \Delta$, de manera que $dv = du$ y $u = v - \Delta$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} I_1 &= - \frac{1}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{(v - \Delta)^2}{v^2} dv = - \frac{1}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{v^2 - 2v\Delta + \Delta^2}{v^2} dv \\ &= - \frac{1}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} dv + \Delta \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{1}{v} dv - \frac{\Delta^2}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{1}{v^2} dv \\ &= - \frac{1}{2} \Lambda^2 + \Delta \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} - \frac{\Delta^2}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{dv}{v^2}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\Delta}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{v - \Delta}{v^2} dv = \frac{\Delta}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{dv}{v} - \frac{\Delta^2}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{dv}{v^2} \\ &= \frac{\Delta}{2} \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} - \frac{\Delta^2}{2} \int_\Delta^{\Lambda^2+\Delta} \frac{dv}{v^2}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda \frac{-l_E^5 + l_E^3 \Delta}{[l_E^2 + \Delta]^2} dl_E &= I_1 + I_2 = -\frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{3\Delta}{2} \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} - \Delta^2 \int_\Delta^{\Lambda^2 + \Delta} \frac{dv}{v^2}, \\ &= -\frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{3\Delta}{2} \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} + \frac{\Delta^2}{(\Lambda^2 + \Delta)} - \Delta. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Sustituyendo la ecuación (8.35) en la ecuación (8.28) se obtiene que

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^4} \underbrace{d\Omega_4}_{=2\pi^2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{3\Delta}{2} \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} + \frac{\Delta^2}{(\Lambda^2 + \Delta)} - \Delta \right) dx, \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^1 \left(-\Lambda^2 + \Delta \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} + \frac{2\Delta^2}{(\Lambda^2 + \Delta)} - 2\Delta \right) dx. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Cuando $\Lambda \rightarrow \infty$, los términos que contribuyen con radiaciones aditivas ultravioleta son [2, 14, 23, 24]:

$$-i(-i\frac{\lambda}{\sqrt{2}})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{(\not{k} - m_t)} \frac{i}{(\not{k} + \not{p} - m_t)} \right] = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \Lambda^2 + \frac{3\lambda^2}{4\pi^2} \ln \Lambda \int_0^1 \Delta dx. \quad (8.37)$$

8.1.2. Contribución Bosónica: Loop del Escalar Supersimétrico

La figura 8.2 muestra un diagrama de tipo “renacuajo” (tadpole) correspondiente a una corrección a 1-loop proveniente de la interacción entre un supercompañero escalar del quark top, \tilde{t}_L , y el campo de Higgs h :

$$\mathcal{L}_{h\phi} = -\frac{\lambda^2}{2} h^2 |\tilde{t}_L|^2. \quad (8.38)$$

Por otro lado, el propagador para el campo escalar libre está dado por:

$$\text{Propagador del campo escalar: } \frac{i}{k^2 - m^2}, \quad (8.39)$$

y el factor de vértice correspondiente a la interacción es [2, 8, 9, 12, 14, 23, 24]:

$$\text{Factor del vértice: } -i\lambda^2, \quad (8.40)$$

de manera que la integral potencialmente divergente que involucra la amplitud asociada a dicho

loop es:

$$I = i(-i\lambda^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}, \quad (8.41)$$

$$\xrightarrow{\text{Rotación de Wick}} = -i\lambda^2 \int i \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{l_E^2 + m^2}, \quad (8.42)$$

$$\xrightarrow{\text{Coordenadas esféricas}} = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda \frac{d\Omega_4 l_E^3}{l_E^2 + m^2} dl_E = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{l_E^3}{l_E^2 + m^2} dl_E \quad (8.43)$$

La integral en dl_E se resuelve haciendo la sustitución $u = l_E^2$, de manera que $du = 2l_E dl_E = 2u^{1/2} dl_E$, por tanto

$$I = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{u^{3/2}}{u + m^2} \frac{du}{2u^{1/2}} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{u}{u + m^2} du. \quad (8.44)$$

Haciendo $v = u + m^2$ se obtiene $dv = du$ y $u = v - m^2$, de manera que

$$\begin{aligned} I &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_{m^2}^{\Lambda^2+m^2} \frac{v - m^2}{v} dv = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[\int_{m^2}^{\Lambda^2+m^2} dv - m^2 \int_{m^2}^{\Lambda^2+m^2} \frac{1}{v} dv \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Así, las correcciones radiativas aditivas del diagrama son [2, 14, 23, 24]:

$$i(-i\lambda^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right). \quad (8.46)$$

Cada uno de los dos supercampos escalares en el lagrangiano (8.12) aporta correcciones cuadráticas al parámetro de masa del Higgs, según la forma dada en (8.46). Al comparar las ecuaciones (8.37) y (8.46), se observa que los diagramas mostrados en las figuras 8.1 y 8.2 generan divergencias cuadráticas en el ultravioleta, las cuales se cancelan exactamente gracias a la relación entre las constantes de acoplamiento, impuesta por la estructura del modelo supersimétrico. Esto evidencia el papel fundamental de la supersimetría en la estabilización natural de la escala electrodébil y da cierre al desarrollo presentado en este trabajo.

Capítulo 9

Conclusiones

Este trabajo ha desarrollado de manera sistemática el lagrangiano supersimétrico para teorías de Yang–Mills con $\mathcal{N} = 1$ en cuatro dimensiones, utilizando de manera exhaustiva el formalismo de superespacio y supercampos. Se obtuvo explícitamente la forma del lagrangiano con sus términos cinéticos, de interacción y se analizó su invariancia gauge y supersimétrica, destacando cómo la estructura invariante del modelo está profundamente determinada por las propiedades algebraicas del formalismo.

El estudio incluyó, además del supermultiplete vectorial, tres supermultipletes quirales, lo que permitió analizar una estructura de interacciones más rica entre campos bosónicos y fermiónicos. Esta elección, más allá de ser minimalista, hizo posible capturar relaciones no triviales entre los acoplamientos y explorar un escenario teóricamente más cercano a construcciones como el MSSM, aunque sin incorporar aún todos sus ingredientes fenomenológicos. Esta ampliación contribuyó a una comprensión más completa del comportamiento de teorías supersimétricas con múltiples sectores de materia.

Uno de los resultados importantes fue demostrar que la supersimetría impone relaciones precisas entre los acoplamientos y masas de los campos bosónicos y fermiónicos, lo que se traduce en una cancelación automática de divergencias cuadráticas en correcciones radiativas a la masa escalar. Este mecanismo se ilustró mediante un modelo simplificado, que evidenció el poder regulador de la supersimetría frente al problema de jerarquía del Higgs.

Pese a no haberse incorporado mecanismos de ruptura de supersimetría ni correcciones de orden superior, el modelo desarrollado ofrece una base sólida para futuras extensiones como la inclusión de términos de ruptura suave o la conexión con teorías más completas como el MSSM o la supergravedad.

9.1. Alcance y Limitaciones

En el presente trabajo, el análisis se llevó a cabo considerando supersimetría global y exacta, sin incluir mecanismos de ruptura espontánea ni términos de ruptura suave. Además, las evaluaciones de cancelaciones de divergencias se realizaron al nivel de un solo bucle (one-loop),

suficiente para ilustrar el mecanismo de protección de la masa escalar, pero sin extenderse a cálculos de órdenes superiores ni a efectos no perturbativos. Esto deja abierto el interrogante sobre la persistencia de la estabilidad radiativa en escenarios más complejos o a escalas energéticas mayores, particularmente si se incorporan interacciones de Yukawa realistas o se contemplan correcciones de dos bucles o más.

Por otra parte, el trabajo ha mantenido una orientación fundamentalmente teórica, sin contraste directo con datos experimentales ni discusión sobre parámetros fenomenológicos, como las masas mínimas de supercompañeros o las restricciones impuestas por resultados del LHC. Tampoco se abordaron temas de unificación de acoplamientos ni efectos gravitacionales, como los que surgen en supergravedad. En consecuencia, el alcance de esta investigación se inscribe principalmente en el ámbito pedagógico y conceptual, aunque sienta bases sólidas para desarrollos más aplicados.

Apéndice A

Grupos de Lie

La construcción de teorías supersimétricas requiere un manejo preciso de las estructuras algebraicas subyacentes, en particular aquellas asociadas a simetrías continuas. En este contexto, los grupos de Lie y sus álgebras asociadas constituyen una herramienta fundamental para describir tanto simetrías internas como del espacio-tiempo.

Este apéndice reúne los elementos esenciales sobre grupos de Lie, álgebra de Lie y sus representaciones, con énfasis en los grupos relevantes para la física de partículas y la supersimetría. Se revisan definiciones clave, el grupo de Lorentz y su conexión con $SL(2, \mathbb{C})$, así como la estructura de espinores de Weyl, Dirac y Majorana.

A.1. Definiciones iniciales

Definición A.1 (Grupo). *Un grupo es un conjunto G junto con una operación binaria asociativa $\star : G \times G \rightarrow G$ llamada multiplicación que tiene la siguientes propiedades:*

1. *Existe un único elemento $e \in G$ llamado “identidad” tal que si $g \in G$, entonces $e \star g = g \star e = g$.*
2. *Para todo $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$ llamado inverso tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$.*

■

Cuando se añade propiedades de una variedad diferenciable al conjunto, se habla de grupos de Lie [22, 7].

Definición A.2 (Grupo de Lie). *Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable dotada con una estructura de grupo tal que la operación de grupo $G \times G \rightarrow G$ y el mapeo $f : G \rightarrow G \mid f(g) = g^{-1}$ son diferenciables.*

■

Definición A.3 (Grupo general lineal). *El grupo general lineal $GL(\mathcal{V})$ es el conjunto de todos los automorfismos de un espacio vectorial lineal \mathcal{V} . Cuando $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ el grupo general lineal se escribe como $GL(n, \mathbb{C})$.*

■

El grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{C})$ es el subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ que consiste en elementos con determinante uno. Estos son ejemplos importantes de grupos de Lie y serán detallados más adelante.

Definición A.4 (Homomorfismo). Sean (G, \star) y (H, \bullet) grupos. Un mapeo $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo si

$$f(a \star b) = f(a) \bullet f(b), \quad \forall a, b \in G. \quad (\text{A.1})$$

■

En el contexto de teoría de grupos, un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo. Si existe un isomorfismo entre G y H , son isomorfos y se escribe $G \cong H$. Un automorfismo es un isomorfismo $f : G \rightarrow G$.

Definición A.5 (Representación). Sea G un grupo y \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Una representación de G en \mathcal{H} es un homomorfismo

$$D : G \rightarrow GL(\mathcal{H}). \quad (\text{A.2})$$

■

Esta definición implica que una representación del grupo G es un subgrupo dentro del grupo lineal general $GL(\mathcal{H})$. En consecuencia, cada elemento $g \in G$ tiene asociada una matriz $D(g)$ que actúa sobre los vectores del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Debido a esto, \mathcal{H} recibe el nombre de *espacio de representación*, y su dimensión, $\dim(\mathcal{H})$, se denomina *dimensión de la representación*. Lo importante de esta construcción es que los elementos de $GL(\mathcal{H})$ son vectores y pueden representarse como combinaciones lineales de un número finito r de matrices base, $\{J_a\}_{a=1}^r$, de modo que un elemento genérico de la representación puede escribirse como

$$W = \omega^a J_a. \quad (\text{A.3})$$

Dado que la cerradura bajo la multiplicación del grupo se mantiene, la cantidad

$$A = e^W \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W^n}{n!} \quad (\text{A.4})$$

pertenece también a la representación del grupo. Esto sugiere que los r parámetros continuos ω^a pueden utilizarse para identificar los elementos del grupo, es decir, se puede escribir $g = g(\omega^a)$. Se dice entonces que el *grupo es de dimensión r* o que tiene r parámetros.

Álgebra de Lie y Generadores

Las ecuaciones (A.3) y (A.4) sugieren escoger la identidad del grupo como $e = g(0, 0, \dots)$, lo que implica que en la representación matricial se cumple

$$D(e) = \mathbb{I}_{\dim(\mathcal{H})}. \quad (\text{A.5})$$

Si consideramos una variación infinitesimal de los parámetros ω alrededor de cero, el correspondiente elemento del grupo puede expresarse como

$$D(0 + \delta\omega) = D(0) + \left. \frac{\partial D}{\partial \omega^\alpha} \right|_{\omega=0} \delta\omega^\alpha + \dots = \mathbb{I} + \frac{\partial D}{\partial \omega^a} \delta\omega^a + \dots. \quad (\text{A.6})$$

Definiendo los *generadores* del grupo J_a mediante la relación

$$J_a = \left. \frac{1}{i} \frac{\partial T(\omega)}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0}, \quad (\text{A.7})$$

se obtiene que una transformación finita puede expresarse como el límite de la aplicación sucesiva de N transformaciones infinitesimales, con $N \rightarrow \infty$:

$$T(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + i \frac{\omega^a}{N} J_a \right)^N = e^{i\omega^a J_a}, \quad \delta\omega^a = \frac{\omega^a}{N}. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, los generadores del grupo, J_a , junto con la operación de conmutador $[J_a, J_b]$, constituyen un *álgebra de Lie* [5].

Definición A.6 (Álgebra de Lie). *Un álgebra de Lie consiste en un espacio vectorial L sobre un cuerpo (como \mathbb{R} o \mathbb{C}) con una regla de composición, llamada producto y denotada por \circ , definida como:*

$$\circ : L \times L \rightarrow L.$$

Si $v_1, v_2, v_3 \in L$, entonces las siguientes propiedades definen un álgebra de Lie:

1. *Clausura de L bajo \circ* : $v_1 \circ v_2 \in L$,
2. *Linealidad*: $v_1 \circ (v_2 + v_3) = v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_3$,
3. *Antisimetría*: $v_1 \circ v_2 = -v_2 \circ v_1$
4. *Identidad de Jacobi*: $v_1 \circ (v_2 \circ v_3) + v_2 \circ (v_3 \circ v_1) + v_3 \circ (v_1 \circ v_2) = 0$.



En efecto, el conmutador

$$[J_\alpha, J_\beta] \equiv J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha,$$

satisface las propiedades un álgebra de Lie. En particular, la propiedad de cerradura se expresa formalmente utilizando las *constantes de estructura* $f_{\alpha\beta}^\lambda$, como

$$[J_\alpha, J_\beta] = f_{\alpha\beta}^\lambda J_\lambda. \quad (\text{A.9})$$

Las tres matrices de Pauli σ^i son un ejemplo de generadores que satisfacen esta cerradura. De hecho, se tiene que

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ij}^k \sigma_k, \quad (\text{A.10})$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita en tres dimensiones.

Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff da el producto para dos elementos e^A y e^B en la representación de grupo,

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots}. \quad (\text{A.11})$$

Para derivar esta expresión, se consideran dos elementos en la representación de un grupo de Lie G , escritos en su forma exponencial como e^A y e^B . Dado que el grupo es cerrado bajo multiplicación, su producto

$$e^A e^B = e^C,$$

debe pertenecer al grupo para algún elemento C . Se pueden utilizar aproximaciones infinitesimales para encontrar C definiendo el logaritmo natural como una serie de potencias de sus argumentos [7].

$$C = \ln e^A e^B = \ln (1 + e^A e^B - 1) \equiv \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} - \dots,$$

donde se ha definido $X \equiv e^A e^B - 1$. Por ejemplo, para los términos de primer orden

$$X = e^A e^B - 1 = (1 + A + \dots)(1 + B + \dots) - 1 = A + B + AB + \dots,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} C &= X - \frac{1}{2}X^2 + \dots = (A + B + AB + \dots) - \frac{1}{2}(A + B + AB + \dots)^2 + \dots \\ &= A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Como en general $A = \omega^\alpha J_\alpha$ y $B = \omega'^\beta J_\beta$, la ecuación A.11 muestra que el producto de dos elementos cualesquiera del grupo está determinado si se especifica el conmutador

$$[J_\alpha, J_\beta] = f_{\alpha\beta}^\lambda J_\lambda,$$

donde $f_{\alpha\beta}^\lambda$ son las constantes de estructura. Es importante entender que la relación anterior debe ser cierta dada la cerradura del producto en el álgebra de Lie y que no depende de la representación escogida, es decir, que las constantes de estructura son las mismas para cualquier conjunto de generadores escogido.

Considere por último el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} e^A B e^{-A} &= (1 + A + A^2 + \dots) B (1 - A + A^2 - \dots) \\ &= B(1 - A + A^2 - \dots) + AB(1 - A + A^2 - \dots) \\ &\quad + A^2 B(1 - A + A^2 - \dots) + \dots \\ &= (B - BA + BA^2 - \dots) + (AB - ABA + ABA^2 - \dots) \\ &\quad + (A^2 B - A^2 BA + A^2 BA^2 - \dots) + \dots \\ &= B + AB - BA + \frac{1}{2} (A^2 B - 2ABA + BA^2) + \dots \\ &= B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \end{aligned}$$

Si se escribe el conmutador de A con B como $A[B] \equiv [A, B]$, entonces la ecuación anterior se expresa como [22]:

$$e^A B e^{-A} = B + A[B] + \frac{1}{2!} A^2[B] + \frac{1}{3!} A^3[B] \equiv e^A [B]. \quad (\text{A.13})$$

A.2. Grupo de Lorentz

Un punto en el espacio-tiempo es denotado por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (\text{A.14})$$

El espacio de estos puntos es el espacio de Minkowski y se denota por \mathbb{M}_4 . El grupo de Lorentz se define inicialmente como las transformaciones que actúan sobre el cuadri-vector x^μ como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{A.15})$$

y dejan la forma cuadrática

$$x^2 = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (\mathbf{x})^2 \quad (\text{A.16})$$

invariante, es decir

$$x'^2 = x'^\mu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = x^\sigma \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho x^\rho = x \Lambda^T \eta \Lambda x \stackrel{!}{=} x^2 = x \eta x. \quad (\text{A.17})$$

De aquí se deduce que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (\text{A.18})$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Más formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición A.7 (Grupo de Lorentz). *El grupo de Lorentz, denotado por $O(1, 3)$, se define como*

$$L \equiv O(1, 3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \quad (\text{A.19})$$

■

Si un elemento $\Lambda \in O(1, 3)$ se expresa como $\Lambda(t) = e^{t\mathbf{u}}$, donde \mathbf{u} es un generador de grupo, entonces la ecuación A.19 implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(e^{t\mathbf{u}})^T \eta e^{t\mathbf{u}}] &= \frac{d}{dt} (e^{t\mathbf{u}^T}) \eta e^{t\mathbf{u}} + e^{t\mathbf{u}^T} \eta \frac{d}{dt} (e^{t\mathbf{u}}) \\ &= e^{t\mathbf{u}^T} \mathbf{u}^T \eta e^{t\mathbf{u}} + e^{t\mathbf{u}^T} \eta e^{t\mathbf{u}} \mathbf{u} \\ &= \frac{d}{dt} \eta = 0. \end{aligned}$$

Evaluando en esto en $t = 0$ resulta que los generadores de grupo de Lorentz, deben satisfacer

$$\mathbf{u}^T \eta + \eta \mathbf{u} = 0.$$

Este resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema A.1. *Los generadores del grupo de Lorentz satisfacen el álgebra de Lie $o(1, 3)$ dado por*

$$o(1, 3; \mathbb{R}) = \{\mathbf{u} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{u}^T = -\eta \mathbf{u} \eta\}, \quad (\text{A.20})$$

donde $M_{4 \times 4}$ es el conjunto de todas las matrices 4×4 con entradas reales. ■

Más particularmente, se trabaja con el grupo restringido de Lorentz.

Definición A.8 (Grupo restringido de Lorentz). *El grupo restringido de Lorentz se denota por L_+^\uparrow y se define como*

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq +1\}. \quad (\text{A.21})$$

■

En una vecindad de la identidad en $SO(1, 3)$, $\Lambda \in L_+^\uparrow$ puede escribirse en la forma

$$\Lambda = 1_{4 \times 4} + \omega, \quad (\text{A.22})$$

donde ω es una matriz con parámetros infinitesimales. Sustituyendo la ecuación A.22 en la ecuación A.19 se llega a una condición de antisimetría para la matriz ω ,

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (\text{A.23})$$

de manera que

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{A.24})$$

La matriz de coeficientes ω^μ_ν solo tiene seis parámetros independientes, los cuales son los parámetros-ángulos del grupo de Lorentz. Deben haber, por tanto, seis generadores de la representación del grupo de Lorentz que actúa sobre 4-vectores y que pueden agruparse en un tensor antisimétrico de rango dos, $M_{\rho\sigma}$, de manera que

$$\omega^\mu_\nu = -\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} (M_{\sigma\rho})^\mu_\nu. \quad (\text{A.25})$$

El factor 2 acontece para evitar el conteo doble realizado en la contracción de índices antisimétricos, mientras que el factor $-i$ es convencional. De esta relación se deduce que (se puede verificar que se cumple A.25):

$$(M_{\sigma\rho})^\mu_\nu = i(\eta_{\sigma\nu} \delta_\rho^\mu - \eta_{\rho\nu} \delta_\sigma^\mu). \quad (\text{A.26})$$

Esta ecuación se entiende como un arreglo rectangular 4×4 de matrices (también 4×4):

$$(M_{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

donde

$$(J_1)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_2)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_3)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$(K_1)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (K_2)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (K_3)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Dado que las matrices J y K recién definidas satisfacen la ecuación A.20, son generadores de grupo de Lorentz. Más aún, bajando todos los índices se puede mostrar que

$$(M_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = i(\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu}), \quad (\text{A.30})$$

son matrices hermíticas [7]. El álgebra de Lie $\mathfrak{o}(1, 3; \mathbb{R})$ de estos generadores hermíticos puede escribirse de forma compacta como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema A.2. *Los generadores $M_{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz obedecen la relación de conmutación*

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (\text{A.31})$$

■

La estructura subyacente del grupo de Lorentz se investiga mejor cambiando la base de los generadores mediante la complexificación

$$S_i \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad (\text{A.32})$$

$$T_i \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \quad (\text{A.33})$$

Estas matrices satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= i\epsilon_{ijk}S_k, \\ [T_i, T_j] &= i\epsilon_{ijk}T_k, \\ [T_i, S_j] &= 0. \end{aligned} \tag{A.34}$$

Esto significa que los generadores S_i y T_j obedecen las relaciones de conmutación del álgebra de Lie de $SU(2, \mathbb{C})$, lo que implica que el álgebra de Lie complexificada $so(1, 3; \mathbb{R})^{\mathbb{C}}$ se descompone en la suma directa de dos álgebras de Lie $su(2, \mathbb{C})$, es decir,

$$so(1, 3; \mathbb{R})^{\mathbb{C}} \cong su(2, \mathbb{C}) \times su(2, \mathbb{C}). \tag{A.35}$$

Debido a esto, se intuye que deben haber dos operadores de casimir, a saber

$$S^2 = S_i S_i, \quad T^2 = T_i T_i. \tag{A.36}$$

Estos operadores tienen autovalores $n(n+1)$ y $m(m+1)$, respectivamente, donde n y m son autovalores de T_3 y S_3 respectivamente. Por tanto, es posible etiquetar representaciones de $so(1, 3; \mathbb{R})$ por el par (n, m) y dado que

$$J_3 = S_3 + T_3,$$

se puede identificar el spin de la representación por $n+m$. Por último cabe mencionar que esta clasificación de representaciones irreducibles del álgebra de Lie complexificada sirve también para encontrar representaciones irreducibles del álgebra de Lie real $so(1, 3, \mathbb{R}) \cong sl(2, \mathbb{C})$ [3].

A.3. Grupo de Poincaré

Definición A.9 (Grupo de Poincaré). *El grupo de Poincaré, denotado por \mathcal{P} , se define como todas las transformaciones reales en \mathbb{M}_4 de la forma*

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

que dejan invariante la forma cuadrática x^2 . ■

Un elemento de \mathcal{P} se caracteriza de forma genérica por el par (Λ, a) , de manera que la composición de dos transformaciones de Poincaré se escribe como

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \tag{A.37}$$

El elemento identidad de \mathcal{P} es $(1_{4 \times 4}, 0)$ y la transformación inversa de (Λ, a) es $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$

porque

$$(\Lambda, a) \circ (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (1, 0). \quad (\text{A.38})$$

Al igual que sucede en el grupo de Lorentz, el grupo de Poincaré contiene subgrupos; en particular está P_+^\uparrow el cual se caracteriza por la relación de conmutación (A.31), la relación trivial de conmutación del grupo de traslaciones $[P_\mu, P_\nu] = 0$, y el el conmutador de traslaciones y transformaciones de Lorentz $[P_\mu, M_{\rho\sigma}]$, que aún queda por determinar. Para hacer esto considere una representación de P_+^\uparrow ,

$$(\Lambda, a) \rightarrow g(\Lambda, a). \quad (\text{A.39})$$

Infinitesimalmente se escribe

$$g(\Lambda, a) = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + ia_\mu P^\mu, \quad (\text{A.40})$$

donde $M^{\rho\sigma}$ y P^μ son los generadores de L_+^\uparrow y traslaciones, respectivamente. Considere ahora una representación $g(\Lambda'\Lambda, a')$. Bajo un boost $g(\Lambda, 0)$, un elemento de \mathcal{P} transforma como

$$\begin{aligned} g^{-1}(\Lambda, 0)g(\Lambda', a')g(\Lambda, 0) &= g^{-1}(\Lambda, 0)g(\Lambda'\Lambda, a') \\ &= g(\Lambda^{-1}, 0)g(\Lambda'\Lambda, a') \\ &= g(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, \Lambda^{-1}a'). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Para una transformación infinitesimal el lado izquierdo queda como

$$g^{-1}(\Lambda, 0)g(\Lambda', a')g(\Lambda, 0) = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}g^{-1}(\Lambda, 0)M^{\mu\nu}g(\Lambda, 0) + ia'_\mu g^{-1}P_\mu(\Lambda, 0)g(\Lambda, 0),$$

mientras que el lado derecho se expande como

$$g(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, \Lambda^{-1}a') = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} + ia'_\mu\Lambda^\mu_\rho P^\rho.$$

De aquí se obtiene que

$$g^{-1}(\Lambda, 0)M^{\mu\nu}g(\Lambda, 0) = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma}, \quad (\text{A.42})$$

$$g^{-1}(\Lambda, 0)P^\mu g(\Lambda, 0) = \Lambda^\mu_\rho P^\rho. \quad (\text{A.43})$$

Expandiendo ambos lados de la ecuación A.42 se llega las relaciones A.20

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}), \quad (\text{A.44})$$

mientras que de la ecuación A.43 se obtiene

$$\begin{aligned}
g^{-1}(\Lambda, 0)P^\rho g(\Lambda, 0) &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) P^\rho \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \\
&= P^\rho + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[M^{\mu\nu}, P^\rho] \\
&\stackrel{!}{=} \Lambda^\rho_\nu P^\nu = (\delta^\rho_\nu + \omega^\rho_\nu)P^\nu = P^\rho + \omega^\rho_\nu P^\nu \\
&= P^\rho + \eta^{\rho\mu}\omega_{\mu\nu}P^\nu = P^\rho + \frac{1}{2}\{\eta^{\rho\mu}\omega_{\mu\nu}P^\nu + \eta^{\rho\nu}\omega_{\nu\mu}P^\mu\} \\
&= P^\rho + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\{\eta^{\rho\mu}P^\nu - \eta^{\rho\nu}P^\mu\}.
\end{aligned}$$

Es decir, comparando la segunda línea y la última, se obtiene la relación de conmutación que quedaba por determinar:

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu). \quad (\text{A.45})$$

Estas ecuaciones A.44 y A.45, junto con la relación trivial para traslaciones:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (\text{A.46})$$

completan el álgebra de Lie del grupo de Poincaré. El grupo de Poincaré tiene también dos operadores de Casimir, $P^2 = P^\mu P_\mu$ y $W^2 = W^\mu W_\mu$, donde W_μ es el vector de polarización de Pauli-Ljubanski definido como

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}. \quad (\text{A.47})$$

A.4. $SL(2, \mathbb{C})$ e índices espinoriales

En este apartado se anotan los resultados principales del grupo $SL(2, \mathbb{C})$, el cual se define formalmente a continuación.

Definición A.10 (Grupo $SL(2, \mathbb{C})$). *El grupo especial lineal en dos dimensiones con parámetros complejos, denotado por $SL(2, \mathbb{C})$, se define como*

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{M \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det M = +1\}.$$

■

Este grupo admite dos representaciones no equivalentes $D(M)$, es decir, dos representaciones que no están relacionadas mediante una transformación de semejanza.

Sea ψ un elemento del espacio vectorial F y sea $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\dim F}$ una base de F , de manera que

$$\psi = \sum_{n=1}^{\dim F} \psi_n \hat{e}^n, \quad (\text{A.48})$$

entonces una representación de $SL(2\mathbb{C})$, $D(M)$, que actúa sobre los vectores $\psi \in F$ se puede escribir como

$$D(M)\psi = \sum_{n=1}^{\dim F} D_n^i \psi_i \hat{e}^n \equiv \sum_{n=1}^{\dim F} \psi'_n \hat{e}^n, \quad (\text{A.49})$$

donde $D_n^i(M)$ es una matriz de dimensión $\dim F \times \dim F$.

Las dos representaciones no equivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$ son la autorrepresentación $D(M) = M$, la cual tiene un espacio portador F de dimensión dos y la autorrepresentación compleja conjugada $D(M) = M^*$, cuyo espacio portador se denota por \dot{F} (también de dimensión 2).

A.4.1. Espinores de Weyl Izquierdos: (1/2,0)

Los espinores de Weyl izquierdos denotados por ψ son vectores en F que transforman bajo la autorrepresentación $D(M) = M$ y se utilizan índices latinos no puntuados. En esta representación las componentes covariantes transforman como

$$\psi'_A = M_A^B \psi_B, \quad A, B = 1, 2. \quad (\text{A.50})$$

Esta representación del grupo se denota por $(1/2, 0)$ y existe una representación equivalente dada por M^{-1T} , lo que significa que existe una matriz $\epsilon \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$\epsilon M \epsilon^{-1} = M^{-1T}. \quad (\text{A.51})$$

Es fácil verificar que

$$(\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\epsilon^{AB})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

hace el trabajo. Más aún, la ecuación A.51 escrita indicialmente como

$$(\epsilon^{AB}) M_B^C (\epsilon^{CD})^{-1} = (M^{-1T})^A_D,$$

sugiere que se puede definir la matriz covariante ϵ_{AB} como

$$(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.53})$$

y por tanto se pueden escribir los siguientes resultados

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{BC} = \delta_A^C, \quad \epsilon^{AB} \epsilon_{BC} = \delta_C^A, \quad \epsilon_{AB}^T \epsilon^{BC} = -\delta_A^C. \quad (\text{A.54})$$

Con esto, se puede despejar M de la ecuación A.51 así:

$$M_A^B = \epsilon_{AC} (M^{-1T})^C_D \epsilon^{DB}. \quad (\text{A.55})$$

En consecuencia, la matriz ϵ (con índices superiores) y su inversa (con índices inferiores) juegan el papel de una métrica. En efecto, definiendo

$$\psi^A = \epsilon^{AB} \psi_B = -\psi_B \epsilon^{BA}, \quad (\text{A.56})$$

se puede mostrar que estas componentes de forma contravariante, es decir, transforman bajo M^{-1T}

$$\psi'^A = (M^{-1T})^A_B \psi^B. \quad (\text{A.57})$$

Los espinores contravariantes ψ^A pertenecen al espacio dual F^* de F , de manera que la métrica ϵ^{AB} se entiende como un mapeo invertible

$$(\epsilon^{AB}) : F \longrightarrow F^*, \quad (\text{A.58})$$

donde la inversa es

$$(\epsilon_{AB}) : F^* \longrightarrow F, \quad (\text{A.59})$$

y por tanto se verifica que

$$\begin{aligned} \psi'^A \psi'_A &= (M^{-1T})^A_B \psi^B (M)_A^C \psi_C \\ &= (M^{-1T})^A_B \delta_D^B \psi^D (M)_A^C \psi_C \\ &= (M^{-1T})^A_B \epsilon^{BE} \epsilon_{ED} \psi^D (M)_A^C \psi_C \\ &= -(M^{-1T})^{AE} \psi_E (M)_A^C \psi_C \\ &= -\psi_E (M^{-1})^{EA} (M)_A^C \psi_C \\ &= -\psi_D \delta_E^D (M^{-1})^{EA} (M)_A^C \psi_C \\ &= -\psi_D \epsilon^{DB} \epsilon_{BE} (M^{-1})^{EA} (M)_A^C \psi_C \\ &= \psi^B (M^{-1})_B^A M_A^C \psi_C \\ &= \psi^B \delta_B^C \psi_C \\ &= \psi^B \psi_B, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

es una invariante (escalar) bajo la autorrepresentación M de $SL(2, \mathbb{C})$. Matricialmente, índices superiores no puntuados se interpretan como filas e índices inferiores no puntuados como columnas.

A.4.2. Espinores de Weyl Derechos: (0,1/2)

Los espinores de Weyl derechos denotados por $\bar{\psi}$ son vectores en el espacio portador \dot{F} de la aurrepresentación compleja conjugada $D(M) = M^*$ y se utilizan índices latinos puntuados, de manera que en esta representación las componentes covariantes transforman como

$$\bar{\psi}'_{\dot{A}} = (M^*)^{\dot{B}}_{\dot{A}} \bar{\psi}_{\dot{B}}. \quad \dot{A}, \dot{B} = 1, 2. \quad (\text{A.61})$$

Esta representación se denota por $(0, 1/2)$ y existe una representación equivalente dada por

$$D(M) = M^{*-1T}, \quad (\text{A.62})$$

de manera que existe una matriz $\bar{\epsilon} \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$\bar{\epsilon} M^* \bar{\epsilon}^{-1} = M^{*-1T}. \quad (\text{A.63})$$

En este caso, es fácil verificar que las matrices

$$(\bar{\epsilon}^{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\epsilon}_{\dot{A}\dot{B}}) \equiv (\bar{\epsilon}^{\dot{A}\dot{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.64})$$

hacen el trabajo. Comparando esto con la ecuación A.52 se ve que matricialmente $\bar{\epsilon} = \epsilon$, por lo que se descarta la notación barrada y se deja los índices puntuados para hacer la distinción. Por ejemplo, la ecuación (A.63) se escribe como

$$\epsilon^{\dot{A}\dot{C}} (M^*)^{\dot{D}}_{\dot{C}} \epsilon_{\dot{D}\dot{B}} = (M^{-1\dot{\dagger}})^{\dot{A}}_{\dot{B}}. \quad (\text{A.65})$$

Se tienen también las siguientes relaciones para las contracciones del tensor métrico

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} = \delta_{\dot{A}}^{\dot{C}}, \quad \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{\dot{B}\dot{C}} = \delta^{\dot{A}}_{\dot{C}}, \quad (\text{A.66})$$

de modo que también se puede anotar

$$(M^*)^{\dot{B}}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{C}} (M^{-1\dot{\dagger}})^{\dot{C}}_{\dot{D}} \epsilon^{\dot{D}\dot{B}} \quad (\text{A.67})$$

De manera similar a como ocurre con la representación izquierda $(1/2, 0)$, la matriz ϵ juega el papel de una métrica para subir y bajar índices, de modo que se puede definir las componentes contravariantes

$$\bar{\psi}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{\psi}_{\dot{B}}, \quad (\text{A.68})$$

las cuales transforman bajo $M^{*-1T} = (M^{\dot{\dagger}})^{-1}$ como

$$\bar{\psi}'^{\dot{A}} = (M^{*-1T})^{\dot{A}}_{\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}}. \quad (\text{A.69})$$

Los vectores $\bar{\psi}^{\dot{A}}$ pertenecen al espacio dual \dot{F}^* de \dot{F} , de manera que

$$\bar{\psi}'_A \bar{\psi}'^{\dot{A}} = \bar{\psi}_A \bar{\psi}^{\dot{A}} \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.70})$$

La métrica $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$ se entiende por tanto como el mapa

$$(\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}) : \dot{F} \longrightarrow \dot{F}^*, \quad (\text{A.71})$$

donde el mapa inverso es

$$(\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \dot{F}^* \longrightarrow \dot{F}. \quad (\text{A.72})$$

Por otra parte, los vectores $\psi_A \in F$ se mapean a los vectores en $\bar{\psi}^{\dot{A}} \in \dot{F}^*$ conjugando y multiplicando por la representación matricial de una transformación lineal $(\bar{\sigma}^0)^{\dot{A}B}$ definida por

$$(\bar{\sigma}^0)^{\dot{A}B} : F \longrightarrow \dot{F}^*, \quad \text{tal que} \quad \bar{\psi}^{\dot{A}} = (\bar{\sigma}^0)^{\dot{A}B} (\psi_B)^*. \quad (\text{A.73})$$

El mapa inverso es

$$(\sigma^0)_{\dot{A}\dot{B}} : \dot{F}^* \longrightarrow F, \quad \text{tal que} \quad \psi_A = (\sigma^0)_{\dot{A}\dot{B}} (\bar{\psi}^{\dot{B}})^*. \quad (\text{A.74})$$

A continuación se verá que las matrices $\sigma_{\dot{A}\dot{A}}^0$ y $\bar{\sigma}^{0\dot{A}\dot{A}}$ son identidades sobre los espacios que operan, de manera que su aparición como mapeos en las expresiones anteriores es puramente formal para evitar escribir relaciones del tipo $\psi_A^* = \bar{\psi}^{\dot{A}}$, las cuales no tienen consistencia en los índices.

A.4.3. Relación entre $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz

En esta sección se busca determinar un homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C})$ y L_+^\uparrow . Se comienza definiendo las matrices σ^μ como

$$(\sigma^\mu) = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \boldsymbol{\sigma}), \quad (\text{A.75})$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ son las matrices de pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.76})$$

Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1}_{2 \times 2} \quad (\text{A.77})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (\text{A.78})$$

$$\text{Tr}[\sigma_i] = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma_i^2] = 1, \quad (\text{A.80})$$

para $i, j, k = 1, 2, 3$. Los índices espinoriales de σ^μ se definen como siendo contravariantes, con el índice puntuado a la derecha del no puntuado:

$$(\sigma^\mu) \equiv (\sigma^\mu)_{A\dot{A}}. \quad (\text{A.81})$$

Los índices pueden subirse y trasponerse para definir el nuevo conjunto de matrices $\bar{\sigma}^\mu$ como:

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A} \equiv -\epsilon^{AB}(\sigma^\mu)_{B\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}A} = (-\epsilon\sigma^\mu\bar{\epsilon})^{\dot{A}A} = (\bar{\epsilon}\sigma^{\mu T}\epsilon^T)^{\dot{A}A}. \quad (\text{A.82})$$

De estas ecuaciones se puede mostrar que

$$(\bar{\sigma}^\mu) = (\mathbf{1}_{4 \times 4}, -\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{A.83})$$

Teorema A.3. Las matrices (σ^μ) y $(\bar{\sigma}^\nu)$ satisfacen las siguientes relaciones

$$\text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.84})$$

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.85})$$

$$\sigma^\mu_{AA}\bar{\sigma}^\mu_{\dot{B}B} = 2\delta_A^B\delta_{\dot{A}}^{\dot{B}}. \quad (\text{A.86})$$

■

Considere ahora el conjunto de matrices complejas hermíticas 2×2 , $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, y sea X un elemento genérico de \mathbb{H} . Se puede definir un mapeo ρ entre 4-vectores y elementos de $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ como [3, 12]:

$$\rho : \mathbb{M}_4 \longrightarrow \mathbb{H}(2, \mathbb{C}) \mid X = \rho(x^\mu) \equiv x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.87})$$

Dada la hermeticidad de las matrices de Pauli, es claro que

$$X^\dagger = X, \quad (\text{A.88})$$

como es requerido por consistencia. Además, el lector puede verificar que el determinante de X

es el intervalo espacio-temporal:

$$\det X = x_\mu x^\mu. \quad (\text{A.89})$$

El mapa inverso de (A.87) se encuentra utilizando la ecuación (A.84) y resulta ser:

$$\rho^{-1} : \mathbb{H}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{M}_4 \mid x^\mu = \rho^{-1}(X) = \frac{1}{2} \text{Tr}[X \bar{\sigma}^\mu]. \quad (\text{A.90})$$

Se llama *representación adjunta* de $SL(2, \mathbb{C})$ a la acción de $SL(2, \mathbb{C})$ en $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, es decir [3]:

$$\text{ad} : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}(2, \mathbb{C})) \quad \text{tal que} \quad \text{ad}M \equiv MXM^\dagger, \quad (\text{A.91})$$

donde $M, M^\dagger \in SL(2, \mathbb{C})$ y $\text{Aut}(\mathbb{H}(2, \mathbb{C}))$ es el espacio de automorfismos de $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ el cual es isomorfo a $GL(\mathbb{H}(2, \mathbb{C}))$. En efecto,

$$(\text{ad}M(x))^\dagger = (MXM^\dagger)^\dagger = \text{ad}M(x) \in \mathbb{H}(2, \mathbb{C}).$$

El mapeo de la ecuación (A.91) solo significa que bajo $SL(2, \mathbb{C})$, $X \in \mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ transforma como

$$X'_{AA} = M_A^B X_{BB} (M^\dagger)^{\dot{B}}_{\dot{A}}, \quad (\text{A.92})$$

de manera que que

$$x'_\mu x'^\mu = \det X' = \det X = x_\mu x^\mu. \quad (\text{A.93})$$

Por tanto, la representación adjunta del grupo $SL(2, \mathbb{C})$ deja invariante el determinante $x_\mu x^\mu$. Más aún,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{1}{2} \text{Tr}[X' \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[MXM^\dagger \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[M x_\nu \sigma^\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\mu] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger] x^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Puesto que $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, se concluye el homomorfismo

$$\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow L_+^\uparrow \mid \Lambda^\mu_\nu(M) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger]. \quad (\text{A.95})$$

Ahora se procede a determinar la relación inversa, para lo cual se reescribe la ecuación A.92 como

$$X' = x'_\mu \sigma^\mu = \Lambda^\mu_\nu x_\nu \sigma^\mu = MXM^\dagger = M x_\nu \sigma^\nu M^\dagger, \quad (\text{A.96})$$

de manera que se tiene la importante propiedad

$$M \sigma_\nu M^\dagger = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu. \quad (\text{A.97})$$

Esta relación expresa que, bajo $SL(2, \mathbb{C})$, las matrices de σ^μ transforman como 4-vectores. A partir del hecho de que

$$\begin{aligned} Tr[M^\dagger] &= (M^\dagger)_{\dot{A}}^{\dot{A}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} (M^\dagger)_{\dot{A}}^{\dot{B}} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}C} (\sigma_\mu)_{C\dot{B}} (M^\dagger)_{\dot{A}}^{\dot{B}} \\ &= \frac{1}{4} \sigma_\mu M^\dagger \bar{\sigma}^\mu, \end{aligned}$$

de la ecuación A.97 se puede ver que

$$\Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu = M \sigma_\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\nu = M (4Tr[M^\dagger]). \quad (\text{A.98})$$

Entonces

$$M(\Lambda) = \frac{1}{4Tr[M^\dagger]} \Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu \quad (\text{A.99})$$

Tomando el determinante en A.98 se puede deducir que

$$4Tr[M^\dagger] = \pm [\det(\Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu)]^{1/2}. \quad (\text{A.100})$$

Por tanto, la forma explícita de la relación inversa es

$$M(\Lambda) = \pm \frac{\Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu}{\{\det[\Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu]\}^{1/2}}. \quad (\text{A.101})$$

Esto muestra que para un $\Lambda \in L_+^\dagger$ existen dos matrices asociadas, M y $-M$. Por tanto, hay dos representaciones del grupo restringido de Lorentz las cuales se llamas *representaciones espinoriales*. Matemáticamente se escribe el isomorfismo:

$$L_+^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2, \quad (\text{A.102})$$

y se dice que $SL(2, \mathbb{C})$ es el *grupo de recubrimiento universal* de L_+^\dagger .

Por último, queda señalar que los generadores de las representaciones $(1/2, 0)$ y $(0, 1/2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$ se pueden expresar respectivamente como

$$(\sigma^{\mu\nu})_A^B = \frac{i}{4} \left[(\sigma^\mu)_{A\dot{A}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{A}B} - (\sigma^\nu)_{A\dot{A}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B} \right], \quad (\text{A.103})$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{B}}^{\dot{A}} = \frac{i}{4} \left[(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}A} (\sigma^\nu)_{A\dot{B}} - (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{A}A} (\sigma^\mu)_{A\dot{B}} \right], \quad (\text{A.104})$$

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \bar{\sigma}^{\mu\nu}. \quad (\text{A.105})$$

No es difícil probar que, debido al álgebra de Clifford A.85, las matrices $\sigma^{\mu\nu}$ y $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ satisfacen el álgebra de Lorentz A.31. Una forma útil de $\sigma^{\mu\nu}$ se obtiene como sigue: del álgebra de Clifford fácilmente se ve que

$$-\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2(\eta^{\mu\nu} - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu),$$

pero por definición, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\{\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\} = -\sigma^{\nu\mu}$, de manera que la anterior expresión es igual a

$$-4i\sigma^{\nu\mu} = -2(-\eta^{\mu\nu} + \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu).$$

Haciendo explícitos los índices y reorganizando se tiene la relación útil:

$$2(\sigma^{\mu\nu})_A^B = i[-\delta_A^B\eta^{\mu\nu} + (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_A^B]. \quad (\text{A.106})$$

Ahora se calculan un par de expresiones que involucran $\sigma^{\mu\nu}$ y que serán de mucha ayuda en el cálculo de supercampos escalares invariantes de gauge. Se utiliza el hecho de que matricialmente ϵ y $\bar{\epsilon}$ son iguales para escribir (según la ecuación A.82) que $\bar{\sigma}^\mu = \epsilon\sigma^{\mu T}\epsilon^T$ y, en consecuencia:

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu}\epsilon^T)^T &= \epsilon\sigma^{\mu\nu T} = \frac{i}{4}\epsilon(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^T = \frac{i}{4}\epsilon(\bar{\sigma}^{\nu T}\sigma^{\mu T} - \bar{\sigma}^{\mu T}\sigma^{\nu T}) \\ &= \frac{i}{4}\epsilon(\epsilon\sigma^\nu\epsilon^T\sigma^{\mu T} - \epsilon\sigma^\mu\epsilon^T\sigma^{\nu T}) = \frac{i}{4}(\sigma^\nu\epsilon\sigma^{\mu T} - \sigma^\mu\epsilon\sigma^{\nu T}) \underbrace{\epsilon^T\epsilon}_{=1} \\ &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\epsilon^T = \sigma^{\mu\nu}\epsilon^T. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Con esta ecuación A.107 no es difícil mostrar que

$$\phi\sigma^{\mu\nu}\chi = -\chi\sigma^{\mu\nu}\phi, \quad (\text{A.108})$$

lo que implica que $\theta\sigma^{\mu\nu}\theta = 0$. Por último, se anotan sin demostración un par (y medio) de propiedades útiles de traza que involucran estos generadores $\sigma^{\mu\nu}$ y $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ [2]:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \text{Tr}[\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\alpha\bar{\sigma}^\beta] &= 2(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

A.4.4. Cálculos Con Espinores

En esta sección se desarrolla una serie de cálculos que serán utilizados con frecuencia. El primero de estos cálculos establece que

$$\phi\sigma^\mu\bar{\chi} = \phi^A\sigma_{AB}^\mu\bar{\chi}^{\dot{B}} = -\bar{\chi}_{\dot{C}}\epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{B}C}\sigma_{AB}^\mu\phi_C \stackrel{\text{A.82}}{=} -\bar{\chi}_{\dot{C}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{C}C}\phi_C = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\phi. \quad (\text{A.110})$$

Para lo que sigue se postula que las componentes de espinores de Weyl son *variables de Grassmann* (estudiado en la sección 5.4), es decir, que las componentes de ψ y $\bar{\psi}$ satisfacen las

siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned}\{\psi_A, \psi^B\} &= \{\psi_A, \psi_B\} = \{\psi^A, \psi^B\} = 0, \\ \{\bar{\psi}_{\dot{A}}, \bar{\psi}^{\dot{B}}\} &= \{\bar{\psi}_{\dot{A}}, \bar{\psi}_{\dot{B}}\} = \{\bar{\psi}^{\dot{A}}, \bar{\psi}^{\dot{B}}\} = 0, \\ \{\psi_A, \bar{\psi}^{\dot{B}}\} &= \{\psi_A, \bar{\psi}_{\dot{B}}\} = \{\psi^A, \bar{\psi}^{\dot{B}}\} = 0.\end{aligned}\tag{A.111}$$

Teniendo esto en cuenta, se pueden realizar los siguientes cálculos:

$$\psi\psi = \psi^A\psi_A = \epsilon^{AB}\psi_B\psi_A = \epsilon^{12}\psi_2\psi_1 + \epsilon^{21}\psi_1\psi_2 = -2\psi_1\psi_2,\tag{A.112}$$

$$\bar{\psi}\bar{\psi} = \bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{A}} = -\bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} + \bar{\psi}^{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{2}} = 2\bar{\psi}^{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{2}} = -2\bar{\psi}_{\dot{2}}\bar{\psi}_{\dot{1}} = 2\bar{\psi}_{\dot{1}}\bar{\psi}_{\dot{2}}.\tag{A.113}$$

Por otra parte, un desarrollo para la expresión $\epsilon_{AB}\epsilon^{DC}$ puede intuirse contrayendo cada par de índices; por ejemplo, si contrae B y D el resultado deberá ser δ_A^C ; si contrae A y C el resultado deberá ser proporcional a δ_B^D y así sucesivamente. No es difícil verificar que las siguientes expresiones son consistentes con este razonamiento y son, de hecho, correctas [3]:

$$\begin{aligned}\epsilon_{AB}\epsilon^{DC} &= \delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C, \\ \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{\dot{D}\dot{C}} &= \delta_{\dot{A}}^{\dot{C}}\delta_{\dot{B}}^{\dot{D}} - \delta_{\dot{A}}^{\dot{D}}\delta_{\dot{B}}^{\dot{C}}.\end{aligned}\tag{A.114}$$

Con esto es fácil probar que

$$\theta^A\theta^B = -\frac{1}{2}\epsilon^{AB}(\theta\theta),\tag{A.115}$$

$$\theta_A\theta_B = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}(\theta\theta),$$

$$\bar{\theta}^{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{B}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\theta}\bar{\theta}),$$

$$\bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\theta}_{\dot{B}} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\theta}\bar{\theta}).\tag{A.116}$$

Otro resultado útil son las *fórmulas de reordenamiento de Fierz*:

$$\begin{aligned}(\theta\phi)(\theta\psi) &= (\phi\theta)(\theta\psi) = \phi^A\theta_A\theta^B\psi_B = \phi^A\epsilon^{BC}\theta_A\theta_C\psi_B \\ &\stackrel{A.115}{=} \frac{1}{2}(\theta\theta)\phi^A\epsilon^{BC}\epsilon_{AC}\psi_B = -\frac{1}{2}(\theta\theta)\phi^A\psi_B\delta_C^B \\ &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)\phi\psi.\end{aligned}\tag{A.117}$$

$$\begin{aligned}
(\phi\psi)\chi_{\dot{A}} &= \phi^B\psi_B\chi_{\dot{A}} = \phi^B\epsilon_{BC}\psi^C\epsilon_{\dot{A}\dot{D}}\chi^{\dot{D}} = -\epsilon_{CB}\phi^B\psi^C\epsilon_{\dot{A}\dot{D}}\chi^{\dot{D}} \\
&= \epsilon_{CB}\psi^C\phi^B\epsilon_{\dot{A}\dot{D}}\chi^{\dot{D}} = \delta_A^C\delta_{\dot{A}}^{\dot{E}}\epsilon_{CB}\epsilon_{\dot{E}\dot{D}}\psi^A\phi^B\chi^{\dot{D}} \\
&\stackrel{A.86}{=} \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{E}C}\epsilon_{CB}\epsilon_{\dot{E}\dot{D}}\psi^A\phi^B\chi^{\dot{D}} \\
&\stackrel{A.82}{=} \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\epsilon^{CF}\epsilon^{\dot{E}\dot{H}}(\sigma_\mu)_{F\dot{H}}\epsilon_{CB}\epsilon_{\dot{E}\dot{D}}\psi^A\phi^B\chi^{\dot{D}} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}(\sigma_\mu)_{F\dot{H}}\delta_B^F\delta_{\dot{D}}^{\dot{H}}\psi^A\phi^B\chi^{\dot{D}} = \frac{1}{2}\phi^B(\sigma_\mu)_{B\dot{D}}\chi^{\dot{D}}\psi^A(\sigma^\mu)_{A\dot{A}} \\
&= \frac{1}{2}(\phi\sigma^\mu\chi)(\psi\sigma_\mu)_{\dot{A}}. \tag{A.118}
\end{aligned}$$

De manera similar se muestra que

$$\bar{\phi}\bar{\psi}\chi^B = -\frac{1}{2}(\chi\sigma_\mu\bar{\psi})(\bar{\phi}\bar{\sigma}^\mu)^B. \tag{A.119}$$

Se anotan también los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}\theta^C(\sigma^\nu)_{C\dot{D}}\bar{\theta}^{\dot{D}} \\
&= -\theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}\theta^C\bar{\theta}^{\dot{B}}(\sigma^\nu)_{C\dot{D}}\bar{\theta}^{\dot{D}} \\
&= -(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}(\sigma^\nu)_{C\dot{D}}\theta^A\theta^C\bar{\theta}^{\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{D}} \\
&\stackrel{A.115A.116}{=} \frac{1}{4}(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}(\sigma^\nu)_{C\dot{D}}\epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
&= \frac{1}{4}(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{B}A}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
&\stackrel{A.84}{=} \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}). \tag{A.120}
\end{aligned}$$

De aquí que

$$(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta_A(\bar{\theta}\bar{\theta}). \tag{A.121}$$

Finalmente se define el adjunto hermitiano de un espinor de Weyl θ , θ^\dagger mediante las componentes

$$\theta^{\dagger\dot{A}} \equiv \bar{\theta}^{\dot{A}} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{\theta}^{\dagger A} \equiv \theta^A. \tag{A.122}$$

Con esto es fácil ver que

$$\begin{aligned}
(\phi\sigma^\mu\bar{\chi})^\dagger &= (\bar{\chi})^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger(\phi)^\dagger = \chi\sigma^\mu\bar{\phi}, \\
(\theta\phi)^\dagger &= (\phi\theta)^\dagger = \theta^\dagger\phi^\dagger = \bar{\theta}\bar{\phi}. \tag{A.123}
\end{aligned}$$

Esto es así porque las matrices σ^μ son hermíticas, es decir que $\sigma_{A\dot{A}}^{\mu\dagger} = \sigma_{A\dot{A}}^\mu$.

A.5. Espinores de Dirac

Se define el espacio de representaciones complejas cuadri-dimensionales de los espinores de Dirac, E , como la suma directa de los espacios de representaciones complejas F y \dot{F}^* ,

$$E \equiv F \oplus \dot{F}^*. \quad (\text{A.124})$$

Si $\phi \in F$ y $\bar{\psi} \in \dot{F}^*$, entonces

$$\Psi_a \equiv \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \in E, \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.125})$$

Si $\text{Aut}(E)$ es el grupo automorfismo de E , se define la representación de $SL(2, \mathbb{C})$ en el espacio E como

$$M \in SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow S_{ab}(M) = \begin{pmatrix} M_A^B & 0 \\ 0 & (M^{*-1})^{\dot{A}}_{\dot{B}} \end{pmatrix} \in \text{Aut}(E). \quad (\text{A.126})$$

Por tanto, esta representación de $SL(2, \mathbb{C})$ actúa sobre un espinor de Dirac como

$$\Psi' = \begin{pmatrix} M\phi \\ M^{*-1}\bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.127})$$

Los índices de una matriz 4×4 que actúa sobre espinores de Dirac deberá tener índices

$$\Gamma_{ab} = \begin{pmatrix} A_A^B & B_{A\dot{B}} \\ C^{\dot{A}B} & D_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.128})$$

porque solamente así se garantiza que

$$\Gamma_{ab}\Psi_b = \begin{pmatrix} A_A^B\phi_B + B_{A\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} \in F \\ C^{\dot{A}B}\phi_B + D_{\dot{B}}^{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{B}} \in \dot{F}^* \end{pmatrix} \in E. \quad (\text{A.129})$$

Esta representación es irreducible bajo paridad, como puede ser mostrado.

Representación Quiral

La representación Quiral, también llamada base de Weyl, hace referencia la representación de las matrices γ

$$\gamma_W^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.130})$$

que permiten obtener una relación directa entre espinores de dos y cuatro componentes. Como en cualquier representación, las matrices γ satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (\text{A.131})$$

Se define una matriz γ^5 adicional como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.132})$$

En la representación Quiral toma la forma explícita

$$\gamma_W^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{4 \times 4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.133})$$

y satisface, en general

$$(\gamma_W^5)^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.134})$$

$$\{\gamma_W^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.135})$$

Además, las matrices γ tiene las siguientes propiedades

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad (\text{A.136})$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad (\text{A.137})$$

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.138})$$

Estas propiedades, junto con el álgebra de Clifford permiten mostrar

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}. \quad (\text{A.139})$$

Este resultado es válido e cualquier representación.

Representación de Dirac

La representación de Dirac, también llamada base canónica, hace referencia a la representación de las matrices γ

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{4 \times 4} \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \bar{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{4 \times 4} \\ \mathbf{1}_{4 \times 4} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.140})$$

Teorema A.4. La representación de Weyl de las matrices γ_W y la representación de Dirac γ_D

están conectadas por la relación de semejanza

$$\gamma_W = X\gamma_D X^{-1}, \quad \text{donde } X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1_{4 \times 4} & \sigma^0 \\ -\bar{\sigma}^0 & -1_{4 \times 4} \end{pmatrix}.$$

■

A.6. Conjugación de la carga

La ecuación de Dirac admite soluciones de partículas y antipartículas, las cuales se diferencian por la carga. La ecuación de Dirac debe, por tanto, tener una simetría entre partículas y antipartículas. El espinor de Dirac Ψ obedece la ecuación de Dirac

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi = 0. \quad (\text{A.141})$$

Tomando el adjunto hermitiano de esta ecuación

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger[\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu) - m]^\dagger &= \Psi^\dagger[\gamma^{\mu\dagger}(-i\overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu) - m] \\ &= \Psi^\dagger\gamma^0[\gamma^\mu(-i\overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu) - m]\gamma^0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.142})$$

de manera que, al definir el espinor adjunto de Dirac $\bar{\Psi}$ como

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0, \quad (\text{A.143})$$

la ecuación A.142 implica que

$$\bar{\Psi}[\gamma^\mu(-i\overleftarrow{\partial}_\mu - eA_\mu) - m] = 0. \quad (\text{A.144})$$

Tomando la transpuesta de esta ecuación resulta

$$[-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\bar{\Psi}^T = 0. \quad (\text{A.145})$$

Se define la matriz de conjugación de Carga C como una matriz compleja invertible 4×4 tal que

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (\text{A.146})$$

Si esta matriz existe, entonces la ecuación A.145 se puede escribir como

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\Psi^c = 0, \quad \text{donde } \Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^T. \quad (\text{A.147})$$

Esta es la ecuación de una partícula de carga opuesta a Ψ . En la representación de Dirac, la matriz de conjugación de carga C toma la forma

$$C_D = i\gamma_D^2\gamma_D^0 = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \bar{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.148})$$

En la representación de Weyl, la matriz de conjugación de la carga es

$$C_W = \begin{pmatrix} i\sigma^2\bar{\sigma}^0 & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^2\sigma^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.149})$$

Esta matriz es antisimétrica, pues

$$C^T = i\gamma^{0T}\gamma^{2T} = -i\gamma^0\gamma^2 = -C. \quad (\text{A.150})$$

Además, satisface que

$$C^2 = i\gamma^2\gamma^0(i\gamma^2\gamma^0) = -\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0 = -1_{4\times 4} \quad (\text{A.151})$$

A.7. Espinores de Majorana

Un espinor de Dirac en la representación de Weyl se escribe como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \in F \oplus \dot{F}^*. \quad (\text{A.152})$$

Para que los cálculos con índices tengan sentido, las filas deben tener la estructura indicial

$$\Psi^T = \left(\phi^A \quad \bar{\psi}_{\dot{A}} \right), \quad (\text{A.153})$$

de manera que el espinor adjunto de Dirac se escribe como

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \Psi^\dagger\gamma^0 = \left(\phi^{A*} \quad \bar{\psi}_{\dot{A}}^* \right) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^0)_{A\dot{B}} \\ (\bar{\sigma}^0)^{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\bar{\psi}_{\dot{A}}^* (\bar{\sigma}^0)^{\dot{A}B} \quad \phi^{A*} (\sigma^0)_{A\dot{B}} \right) \\ &= \left(\psi^B \quad \bar{\phi}_{\dot{B}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

Por tanto, se calcula $\bar{\Psi}^T$ como

$$\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\phi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.155})$$

La matriz de conjugación de carga C_W se puede escribir como

$$C_W = \begin{pmatrix} (i\sigma^2\bar{\sigma}^0)_A^B & 0 \\ 0 & (i\bar{\sigma}^2\sigma^0)_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.156})$$

de manera que el espinor de carga conjugada Ψ^c se expresa como

$$\Psi^c = C\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} (i\sigma^2\bar{\sigma}^0)_A^B \psi_B \\ (i\bar{\sigma}^2\sigma^0)_{\dot{B}}^{\dot{A}} \bar{\phi}_{\dot{B}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.157})$$

Pero

$$i\sigma_{AC}^2 \bar{\sigma}^{0\dot{C}B} = (i\sigma^2\bar{\sigma}^0)_A^B = \epsilon_{AC}(i\sigma^2\bar{\sigma}^0)^{CB} = \delta_A^B, \quad (\text{A.158})$$

$$i\bar{\sigma}^{2\dot{A}C} \sigma_{C\dot{B}}^0 = (i\bar{\sigma}^2\sigma^0)_{\dot{B}}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{C}}(i\bar{\sigma}^2\sigma^0)_{\dot{C}\dot{B}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}, \quad (\text{A.159})$$

donde se hizo uso de

$$(i\sigma^2\bar{\sigma}^0)^{CB} = \epsilon^{CB}, \quad (i\bar{\sigma}^2\sigma^0)_{\dot{C}\dot{B}} = \epsilon_{\dot{C}\dot{B}}. \quad (\text{A.160})$$

entonces se concluye que

$$\Psi^c = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\phi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.161})$$

Definición A.11. Un espinor de Majorana Ψ^M es un espinor de Dirac Ψ que satisface

$$\Psi^C = \Psi.$$

■

En la representación de Weyl, un espinor de Majorana se escribe explícitamente como

$$\Psi_W^M = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\phi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.162})$$

Este es, por tanto, un espinor de dos componentes independientes, equivalente a un espinor de dos componentes de Weyl o un espinor de Dirac real.

Bibliografía

- [1] M. F. Sohnius, “Introducing supersymmetry,” *Physics reports*, vol. 128, no. 2-3, pp. 39–204, 1985.
- [2] M. E. Peskin *et al.*, “Supersymmetry in elementary particle physics,” *arXiv preprint arXiv:0801.1928*, vol. 190, 2008.
- [3] H. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, *Supersymmetry-an introduction with conceptual and calculational details*. World Scientific Pub. Co., Teaneck, NJ, 1987.
- [4] J. Wess and J. A. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity: Revised Edition*. Princeton university press, 2020.
- [5] R. Aldrovandi and J. Pereira, “Classical fields,” *São Paulo*, 2004.
- [6] J. Schwichtenberg, *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-nonsense books, 2020.
- [7] M. Robinson, *Symmetry and the standard model*. Springer, 2011.
- [8] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2013.
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [10] A. Das, *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [11] J. D. Bjorken, S. D. Drell, and J. Mansfield, “Relativistic quantum mechanics,” 1965.
- [12] L. H. Ryder, *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [13] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.
- [14] P. Langacker, *The standard model and beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [15] M. Srednicki, *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [16] S. P. Martin, “A supersymmetry primer,” *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys*, vol. 21, no. 515, pp. 1–153, 2010.

-
- [17] S. Coleman and J. Mandula, "All possible symmetries of the s matrix," *Physical Review*, vol. 159, no. 5, p. 1251, 1967.
- [18] P. P. Srivastava, *Supersymmetry, superfields and supergravity: an introduction*. Adam Hilger Ltd., Accord, MA, 1986.
- [19] K. Sundermeyer, *Symmetries in fundamental physics*, vol. 176. Springer, 2014.
- [20] R. de Oliveira, *Modelos de Schwinger, Thirring e Kondo à temperatura finita: um estudo*. Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Brasil, 2007.
- [21] L. A. R. Ortega, "Modelo de thirring con simetría gauge," trabajo de grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2022. Proyecto de investigación de pregrado.
- [22] S. Hassani, *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] M. Drees, "An introduction to supersymmetry," *arXiv preprint hep-ph/9611409*, 1996.
- [24] J. Terning, *Modern supersymmetry: Dynamics and duality*. Oxford University Press, 2006.