Lagrangiano Supersimétrico de Teorías de Yang-Mills

Farid Riascos Meneses

Director: Eduardo Rojas Peña

Universidad de Nariño

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

- **Modelo Estándar (ME)**

Teoría Cuántica de Campos (TCC) con simetría gauge

$$\mathbf{SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y},$$

Éxito experimental $\sim 10^{12}$eV.

No explica: las masas de los neutrinos, el número de familias, el grupo gauge, la gravedad.

1. Introducción

- **Sector de Higgs:** Introduce un doblete de Higgs $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left(D_\mu H\right)^\dagger D^\mu H - V(H),$$

donde

$$V = m_H^2 |H|^2 + \lambda |H|^4.$$

1. Introducción

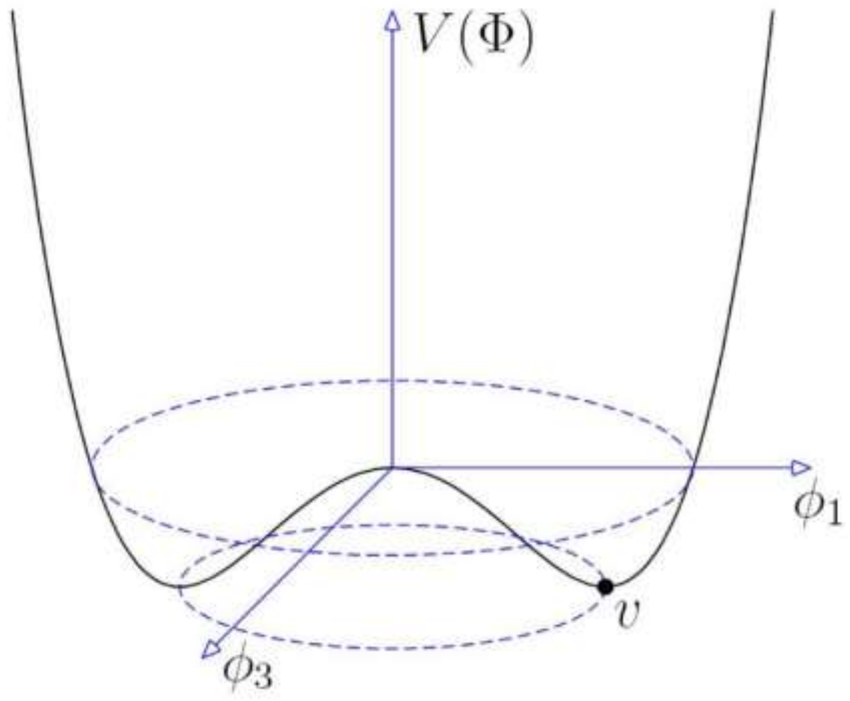
- **Mecanismo de Higgs:** $V = m_H^2 |H|^2 + \lambda |H|^4$.

Suponer $m_H^2 < 0 < \lambda$ implica mínimo para:

$$|H|^2 = -\frac{m_H^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}.$$

- Gauge unitario:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$



1. Introducción

- **Sector de Yukawa:** Términos trilineales:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = -y_b \bar{b}_R H^\dagger Q - y_t \bar{t}_R \widetilde{H}^\dagger Q + h.c.,$$

donde $Q = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$ son dobletes de $\mathbf{SU(2)}$; $\bar{t}_R$y $\bar{b}_R$ son singletes.

1. Introducción

- **Ruputura espontánea de simetría:** $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L} \otimes \mathrm{U}(1)_\mathrm{Y} \to U(1)_{\mathrm{em}}$,

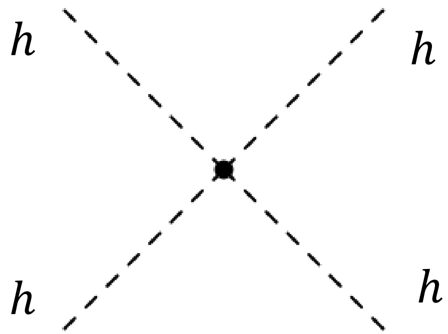
$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yuk}} = -\frac{y_t}{\sqrt{2}}\,(v+h)\bar{t}t + \cdots,$$

$$\mathcal{L}_{V(h)} = -\frac{m_H^2}{2}(v+h)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+h)^4.$$

1. Introducción

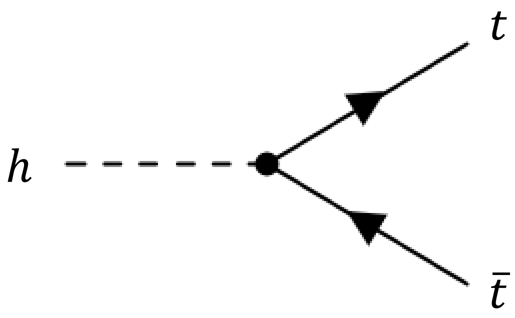
- **Auto-interacción**

$$-\frac{\lambda}{4}h^4$$



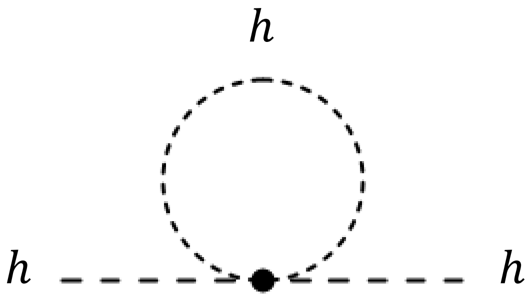
- **Interacción de Yukawa**

$$-\frac{y_t}{2}\bar{t}th$$



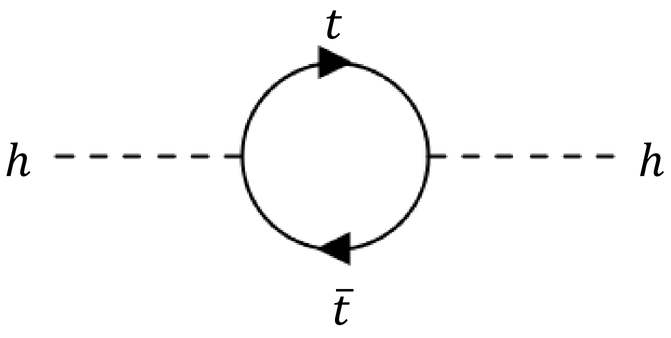
1. Introducción

- Auto-interacción $-\frac{\lambda}{4}h^4$:



$\propto \lambda\Lambda^2$

- Interacción de Yukawa $-\frac{y_t}{2}\bar{t}th$:



$\propto -y_t\Lambda^2$

1. Introducción

- **Problema de Jerarquía:**

$$\Lambda \sim 10^{19}\text{GeV}, \qquad \rightarrow \qquad \Delta m_H^2 \sim 10^{36}\text{GeV}^2.$$

Pero

$$m_H^2 = m_0^2 + \Delta m_H^2 \sim (125\text{GeV})^2.$$

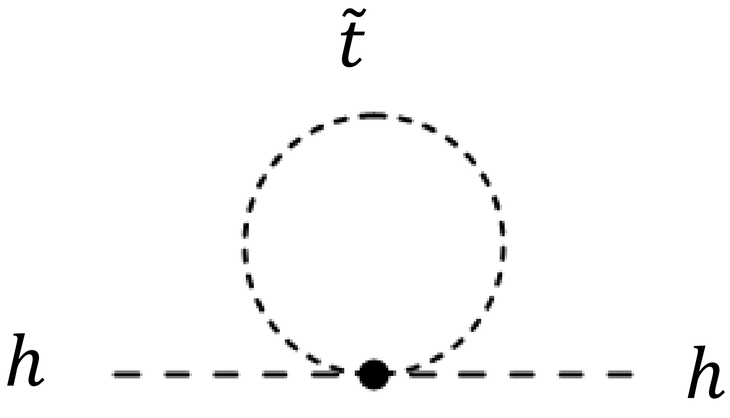
¿Por qué**?** → Motivación para extensiones teóricas.

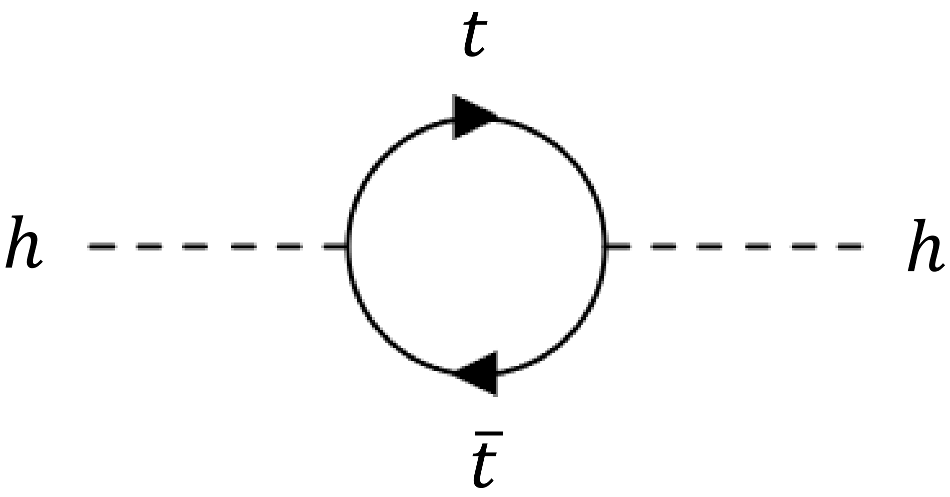
1. Introducción

- **Supersimetría:** Simetría entre bosones y fermiones $t \leftrightarrow \tilde{t}$.

$$\mathcal{L}_{\text{super t}} = y_{\tilde{t}} h^2 |\tilde{t}|^2, \qquad \mathcal{L}_{\text{Yuk}} = y_t' h \bar{t} t.$$

Cancelación de correcciones cuadráticas en los diagramas:





2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

- **Problema de investigación:**

¿Cómo deducir de forma explícita y sistemática el lagrangiano supersimétrico para una teoría de Yang–Mills?

OBJETIVOS

General:

Deducir formalmente el lagrangiano supersimétrico para una teoría de Yang-Mills y analizar su papel en la cancelación de divergencias cuadráticas.

Específicos:

- Estudiar el formalismo de variables de Grassmann, superespacio y supercampos.
- Construir los términos cinéticos y de interacción.
- Ilustrar, con un cálculo a un bucle, la cancelación de divergencias.

3. SUPERÁLGEBRA

Teorema de Coleman-Mandula (1967)

- Restricción fuerte en la estructura posible del grupo de total simetría:

$$G = \mathcal{P} \times B$$

Los generadores satisfacen:

$$\left[P_\mu, B_l\right] = 0 = \left[M_{\mu\nu}, B_l\right].$$

Teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius (1975)

- Extensión del teorema de Coleman-Mandula que permite álgebras graduadas.

Introducción de generadores Q:

$$Q|b\rangle = |f\rangle, \qquad Q|f\rangle = |b\rangle.$$

3. Superálgebra

- **Álgebra de Lie graduada $\boldsymbol{Z}_2$:**

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{F}$ con generadores $E_i \in \boldsymbol{B}$ y $Q_a \in \boldsymbol{F}$:

$$[E_i, E_j] \in \boldsymbol{B}, \qquad [E_i, Q_a] \in \boldsymbol{F}, \qquad \{Q_a, Q_b\} \in \boldsymbol{B}.$$

- **Constantes de estructura:**

$$[E_i, E_j] = c_{ij}{}^{k} E_k, \qquad [E_i, Q_a] = s_{ia}{}^{b} Q_b, \qquad \{Q_a, Q_b\} = \gamma_{ab}{}^{i} E_i.$$

3. Superálgebra

- **Identidad de Jacobi generalizada:** con $a = 1,2,3,4$.

$$\left[E_i, [E_j, E_k]\right] + \left[E_k, [E_i, E_j]\right] + \left[E_j, [E_k, E_i]\right] = 0,$$

$$\left[E_i, [E_j, Q_a]\right] + \left[Q_a, [E_i, E_j]\right] + \left[E_j, [Q_a, E_i]\right] = 0,$$

$$[E_i, \{Q_a, Q_b\}] - \{Q_b, [E_i, Q_a]\} + \{Q_a, [Q_b, E_i]\} = 0,$$

$$[Q_a, \{Q_b, Q_c\}] + [Q_c, \{Q_a, Q_b\}] + [Q_b, \{Q_c, Q_a\}] = 0.$$

3. Superálgebra

- **Álgebra de super-Poincaré**

Álgebra de Poincaré:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu),$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}),$$

3. Superálgebra

- **Álgebra de super-Poincaré**

Extensión del algebra con generadores fermiónicos:

$$
\begin{aligned}
\left[P_\mu, Q_a\right] &= 0, \\
\left[M_{\mu\nu}, Q_a\right] &= -\left(\sigma_{\mu\nu}^{(4)}\right)_{ab} Q_b, \\
\{Q_a, \bar{Q}_b\} &= 2(\gamma^\mu)_{ab} P_\mu.
\end{aligned}
$$

3. Superálgebra

- **Álgebra de supertraslaciones**

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[P_\mu, Q_A] = [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{B}}] = 0,$$

$$\{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0,$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}} P_\mu,$$

$$\{\bar{Q}^{\dot{A}}, Q^B\} = 2(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B} P_\mu.$$

3. Superálgebra

- **Variables de Grassmann.** Conjunto $\{\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n\}$ que satisface:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0, \qquad (\theta_i)^2 = 0.$$

Generan un álgebra $G_n(K)$ de dimensión 2^n con elementos:

$$f(\theta_i) = a + \sum_i b_i\theta_i + \sum_{i<j} c_{ij}\theta_i\theta_j + \cdots d\theta_1\theta_2 \dots \theta_n.$$

3. Superálgebra

- **Variables de Grassmann**

Postulado: Espinores de Weyl $\left\{\theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}\right\}$ son variables de Grassmann:

$$\{\theta_A, \theta_B\} = \{\theta_A, \theta^B\} = \{\theta^A, \theta^B\} = 0,$$

$$\{\bar{\theta}_{\dot{A}}, \bar{\theta}_{\dot{B}}\} = \left\{\bar{\theta}_{\dot{A}}, \bar{\theta}^{\dot{B}}\right\} = \left\{\bar{\theta}^{\dot{A}}, \bar{\theta}^{\dot{B}}\right\} = 0,$$

$$\{\theta_A, \bar{\theta}_{\dot{B}}\} = \left\{\theta_A, \bar{\theta}^{\dot{B}}\right\} = \left\{\theta^A, \bar{\theta}^{\dot{B}}\right\} = 0.$$

3. Superálgebra

- **Variables de Grassmann**

Expansión escalar de Lorentz:

$$\Phi(\theta,\bar{\theta}) = \phi^{(0)} + \theta^{A}\phi_{A}^{(1)} + (\theta\theta)\phi^{(2)} + \cdots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\phi^{(9)}.$$

- Tiene grado **par.**

$$\theta\theta = \theta^{A}\theta_{A}, \qquad \bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}.$$

3. Superálgebra

- **Derivadas de Grassmann**

Considerar:

$$f(\theta) = f^{(0)} + f^{(1)}\theta.$$

Se define:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) \equiv f^{(1)}.$$

3. Superálgebra

- **Derivadas de Grassmann.** Generalizar:

$$\partial_A \theta^B \equiv \frac{\partial \theta^B}{\partial \theta^A} \equiv \delta_A{}^B.$$

Propiedad**:**

$$\{\partial_A, \partial_B\} f = 0.$$

3. Superálgebra

- **Integral de Grassmann**

Propiedades:

$$\int d\theta 1 = 0, \qquad \int d\theta\theta = 1,$$

$$\int d\theta[f(\theta) + g(\theta)] = \int d\theta f(\theta) + \int d\theta g(\theta)\,.$$

3. Superálgebra

- **Integral de Grassmann**

Ejemplos:

$$\int d^2\theta f(\theta) = \int d^2\theta \left(f^{(0)} + \theta^A f_A^{(1)} + (\theta\theta) f^{(2)} \right) = f^{(2)},$$

donde $d^2\theta = -\frac{1}{4} d\theta^A d\theta^B \epsilon_{AB}$.

3. Superálgebra

- **Superespacio**

Extensión del espacio-tiempo de Minkowski x^{μ} utilizando 4 coordenadas fermiónicas anticonmutantes θ_A y $\bar{\theta}^{\dot{A}}$.

$$\left(x^{\mu}, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}\right).$$

Propiedad:

$$[\theta] \equiv \text{masa}^{-1/2}.$$

3. Superálgebra

- **Supercampo escalar**

Funciones definidas en el superespacio

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)m(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})n(x)$$

$$+(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})V_{\mu}(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x).$$

Grados de Libertad: 8 bosónicos, 8 fermiónicos.

3. Superálgebra

- **Transformaciones supersimétricas**

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}} P_\mu, \qquad \rightarrow \qquad [\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}] = 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu.$$

Generadas por los operadores P_μ, Q_A y $\bar{Q}^{\dot{A}}$, y parametrizadas por el superespacio $\left(x^\mu, \theta_A, \bar{\theta}^{\dot{A}}\right)$:

$$L(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-ix\cdot p + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}}.$$

3. Superálgebra

- **Transformaciones supersimétricas**

El supercampo transforma como:

$$L(0,\alpha,\bar{\alpha})\Phi(x,\theta,\bar{\theta})L^{-1}(0,\alpha,\bar{\alpha}) = \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}),$$

donde

$$\delta_s x = i\theta\sigma\bar{\alpha} - i\alpha\sigma\bar{\theta}, \qquad \delta_s\theta = \alpha, \qquad \delta_s\bar{\theta} = \bar{\alpha}.$$

3. Superálgebra

- **Representación diferencial**

Los generadores se supersimetría son:

$$Q_A = -i\left(\partial_A - i\sigma^{\mu}_{A\dot{B}}\bar{\theta}^{\dot{B}}\partial_{\mu}\right),$$

$$\bar{Q}^{\dot{A}} = -i\left(\bar{\partial}^{\dot{A}} - i(\bar{\sigma}^{\mu}\bar{\theta})^{\dot{A}}\partial_{\mu}\right).$$

3. Superálgebra

- **Derivada covariante**

Operador diferencial:

$$D_A \equiv \partial_A + i\sigma^{\mu}_{A\dot{B}}\bar{\theta}^{B}\partial_{\mu}, \qquad \bar{D}_{\dot{A}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\theta^{B}\sigma^{\mu}_{B\dot{A}}\partial_{\mu}$$

Covariante SUSY:

$$[D_A, \delta_s]\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \qquad [\bar{D}_{\dot{A}}, \delta_s]\Phi = 0.$$

3. Superálgebra

- **Variación SUSY de componentes**

$\delta_s \Phi$ implica:

$$\delta_s f = \alpha\phi + \bar{\alpha}\bar{\chi},$$
$$\delta_s \phi_A = 2\alpha_A m + (\sigma^\mu \bar{\alpha})_A \{i\partial_\mu f + V_\mu\},$$
$$\delta_s \bar{\chi}^{\dot{A}} = 2\bar{\alpha}^{\dot{A}} n + (\alpha\sigma^\mu \epsilon)^{\dot{A}} \{i\partial_\mu f - V_\mu\},$$
$$\delta_s m = \bar{\alpha}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}(\partial_\mu \phi)\sigma^\mu \bar{\alpha},$$
$$\delta_s n = \alpha\psi + \frac{i}{2}\alpha\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi},$$

3. Superálgebra

- **Variación SUSY de componentes**

$$\delta_s V_\mu = \alpha\sigma_\mu\bar{\lambda} + \psi\sigma_\mu\bar{\alpha} + \frac{i}{2}\alpha\partial_\mu\phi - \frac{i}{2}\partial_\mu\,\bar{\chi}\bar{\alpha},$$

$$\delta_s\bar{\lambda}^{\dot{A}} = 2\bar{\alpha}^{\dot{A}}d + \frac{i}{2}\bar{\alpha}^{\dot{A}}\partial^\mu V_\mu + i(\alpha\sigma^\mu\epsilon)^{\dot{A}}\partial_\mu m,$$

$$\delta_s\psi_A = 2\alpha_A d - \frac{i}{2}\alpha_A\partial^\mu V_\mu + i(\sigma^\mu\bar{\alpha})_A\partial_\mu,$$

$$\boldsymbol{\delta_s d = \frac{i}{2}\partial_\mu\left(\psi\sigma^\mu\bar{\alpha} - \bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\alpha\right)}.$$

4. SUPERCAMPOS

- **Supercampo quiral izquierdo**

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = 0.$$

Solución: $y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}$

$$\Phi(x(y),\theta,\bar{\theta}) \equiv \Phi_1(y,\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y).$$

Grados de libertad: 4 bosónicos, 4 fermiónicos.

4. Supercampos

- **Supercampo quiral izquierdo**

Expandiendo:

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = A + \sqrt{2}\theta^A\psi_A + (\theta\theta)F + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$$

$$-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu A.$$

4. Supercampos

- **Supercampo quiral izquierdo** (A, ψ, F)

$$\delta_s A(x) = \sqrt{2}\alpha\psi(x),$$

$$\delta_s \psi_A(x) = \sqrt{2}\alpha_A F(x) + i\sqrt{2}(\sigma^\mu \bar{\alpha})_A \partial_\mu A(x),$$

$$\boldsymbol{\delta_s F(x) = -i\sqrt{2}\partial_\mu(\psi(x)\sigma^\mu\bar{\alpha})}$$

El F-término.

4. Supercampos

- **Supercampo quiral derecho** $(A^*, \bar{\psi}, F^*)$

$$D_A \Phi^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \qquad z^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}.$$

$$\Phi^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) = A^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^* - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^* - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\theta$$

$$-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu A^*.$$

4. Supercampos

- **Propiedad:** Suma y producto de supercampos quirales (antiquirales) es quiral (antiquiral).

$$\bar{D}_{\dot{A}}\left(g_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right) = 0,$$

$$D_A\left(g_i^*\Phi_i^\dagger + \frac{1}{2}m_{ij}^*\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger + \lambda_{ijk}^*\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger\Phi_k^\dagger\right) = 0.$$

4. Supercampos

- **Supercampo vectorial (gauge)**

$$V^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) = V(x,\theta,\bar{\theta}).$$

Se expande como

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = C + \theta\phi + \bar{\theta}\bar{\phi} + \theta\theta M + \bar{\theta}\bar{\theta}M^* + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + (\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi\right)$$
$$+(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}\right) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C\right).$$

4. Supercampos

- **Supercampo vectorial (gauge)**

Propiedad:

$$\left(\Phi + \Phi^{\dagger}\right)^{\dagger} = \Phi + \Phi^{\dagger},$$

$$\left(\Phi^{\dagger}\Phi\right)^{\dagger} = \left(\Phi^{\dagger}\Phi\right),$$

donde Φ es quiral.

4. Supercampos

- **Transformación de gauge SUSY abeliana**

$$V'(x,\theta,\bar{\theta}) \equiv V(x,\theta,\bar{\theta}) + \Phi(x,\theta,\bar{\theta}) + \Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}).$$

- Gauge de Wess-Zumino

$$V_{\mathrm{WZ}}(x,\theta,\bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x).$$

V_μ campo gauge, λ gaugino. $V_\mu' = V_\mu + i\partial_\mu\,(A - A^*)$

4. Supercampos

- **Intensidad de campo supersimétrica**

$$W_A \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_A V(x,\theta,\bar{\theta}), \qquad \bar{W}_{\dot{A}} = D^2 \bar{D}_{\dot{A}} V(x,\theta,\bar{\theta})$$

donde $V(x,\theta,\bar{\theta})$ es vectorial.

- **Propiedades:**

Supercampo quiral, espinorial, invariante de supergauge.

5. LAGRANGIANOS SUPERSIMÉTRICOS

- **Acción supersimétrica**

$$\delta_s \mathcal{A} = \int d^4x \, \delta_s \mathcal{L}' = 0.$$

Propiedades (en unidades naturales):

Adimensional, real, par.

5. Lagrangianos Supersimétricos

- Se propone $\mathcal{L}'$ como el D-término de un supercampo vectorial

$$\mathcal{A} = \int d^4x \int d^4\theta \; \mathcal{L}(x, \theta, \bar{\theta}) \, .$$

- Invariante bajo simetrías internas locales:

$$[T_a, T_b] = i t_{ab}{}^{c} T_c,$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- Es invariante real, invariante de Lorentz y de gauge:

$$W^A W_A + h.c.$$

- Es real, invariante de gauge global:

$$\Phi'^\dagger \Phi' = \left(\Phi^\dagger e^{-i\Lambda}\right)\left(e^{i\Lambda}\Phi\right).$$

No es invariante de gauge local.

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Teorías gauge no abelianas SUSY**

$$(U)_i{}^j \equiv \left(e^{-i\Lambda(x,\theta,\bar{\theta})}\right)_i{}^j, \qquad \Lambda(x,\theta,\bar{\theta}) = \Lambda^a(x,\theta,\bar{\theta})T_a$$

Son covariantes:

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Lambda^a(x,\theta,\bar{\theta}) = 0, \qquad D_A\Lambda^{\dagger a}(x,\theta,\bar{\theta}) = 0.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Teorías gauge no abelianas SUSY**

Supermultiplete gauge:

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = V^a(x,\theta,\bar{\theta})T_a$$

transforman bajo la prescripción:

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} = e^{V-[V,i\Lambda]+\frac{1}{2}[V,[V,i\Lambda]]+\cdots},$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Teorías gauge no abelianas SUSY**

En el gauge de Wess-Zumino:

$$e^V = 1 + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D + \frac{1}{4}V^\mu V_\mu\right),$$

Porque

$$V^n = 0, \qquad n \geq 3.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Términos cinéticos de materia**

Supermultipletes quirales (A_a, ψ_a, F_a):

$$\Phi'_a = \left(e^{-i\Lambda}\right)_a{}^b \Phi_b, \qquad \left(\Phi^{\dagger\prime}\right)^a = \Phi^{\dagger b}\left(e^{i\Lambda^\dagger}\right)_b{}^a .$$

Es invariante de gauge:

$$\Phi^{\dagger\prime} e^{V\prime} \Phi' = \left(\Phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger}\right)\left(e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}\right)\left(e^{-i\Lambda}\Phi\right) = \Phi^\dagger e^V \Phi.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Términos cinéticos de materia**

El lagrangiano es

$$\int d^4\theta \Phi_i^\dagger e^{V_i} \Phi_i = \left(D_\mu A\right)^\dagger D^\mu A_i - i\psi_i \sigma^\mu \overline{D}_\mu \bar{\psi}_i - \frac{g_i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_i \bar{\lambda} A_i + A_i^* \lambda \psi_i\right)$$

$$+g_i^2 A_i^* D A_i + F_i^\dagger F_i + d.t.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Términos de Yang-Mills**

Intensidad de campo susy:

$$W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-V}D_A e^V), \qquad W'_A = e^{-i\Lambda}W_A e^{i\Lambda}.$$

Es escalar real bajo el grupo de simetría $\mathcal{P} \times B$:

$$\mathrm{Tr}[W^A W_A] + h.c.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Términos de Yang-Mills**

El lagrangiano es:

$$\int d^2\theta \mathrm{Tr}[W^A W_A] + h.c. = -2i\lambda^c \sigma^\mu \left(D_\mu\right)_b{}^c \bar{\lambda}^b - \frac{1}{2} F^{c\mu\nu} F^c_{\mu\nu} + 4D^c D^c$$

$$+d.t.$$

5. Lagrangianos Supersimétricos

- **Términos de interacción**

Superpotencial: Quiral, invariante de gauge

$$W[\Phi_i] = g_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$$

Lagrangiano supersimétrico real:

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})W + h.c.$$

6. APLICACIÓN

- **Grupo gauge:**

$$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}.$$

- **Contenido de partículas:**

Supercampo	**Representación**	**Hipercarga**
$\boldsymbol{\Phi_1}$ (Quark L)	$\mathbf{2}$	$1/2$
$\boldsymbol{\Phi_2}$ (Higgs)	$\mathbf{2}$	$1/6$
$\boldsymbol{\Phi_3}$ (Quark R)	$\mathbf{1}$	$-2/3$
$\boldsymbol{V}$ (gauge)	Adj	--

6. Aplicación

- **Superpotencial**

$$W[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \equiv \lambda\epsilon^{ab}(\Phi_1)_a(\Phi_2)_b\Phi_3.$$

El lagrangiano es

$$\int d^4\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})W + h.c. = \lambda\epsilon^{ab}[(A_1)_a(A_2)_bF_3 + (A_1)_a(F_2)_bA_3 + (F_1)_a(A_2)_bA_3$$
$$-(\psi_1)_a\psi_3(A_2)_b - (\psi_1)_a(\psi_2)_bA_3 - (A_1)_a(\psi_2)_b\psi_3] + h.c.$$

6. Aplicación

Términos de interés:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} \supset -\lambda\epsilon^{ab}(\psi_1)_a\psi_3(A_2)_b - \lambda\epsilon^{ab}(A_2^*)_b(\bar{\psi}_1)_a\bar{\psi}_3,$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quartic}} \supset -\lambda^2(|A_2|^2|A_3|^2 + |A_1A_2|^2).$$

Identificación

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi}_3 = t_R$$

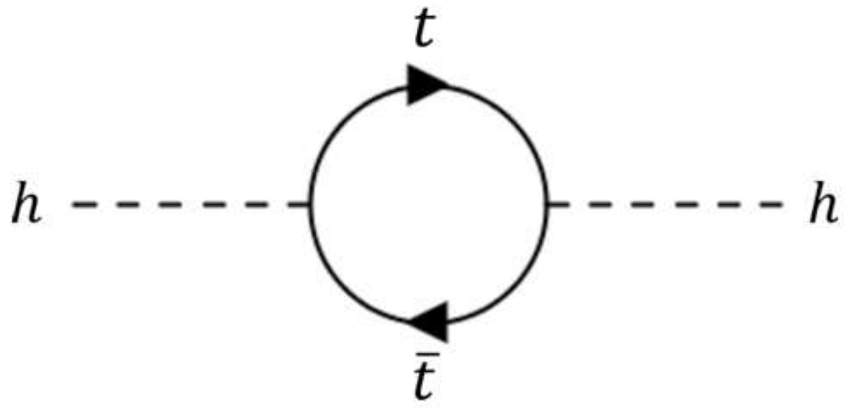
6. Aplicación

Si el Higgs adquiere un VEV no nulo:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} \supset -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(v+h)\bar{t}t,$$

$$\mathcal{L}_{\text{Quartic}} \supset -\frac{\lambda^2}{2}(v+h)^2(|\tilde{t}_R|^2 + |\tilde{t}_L|^2).$$

6. Aplicación

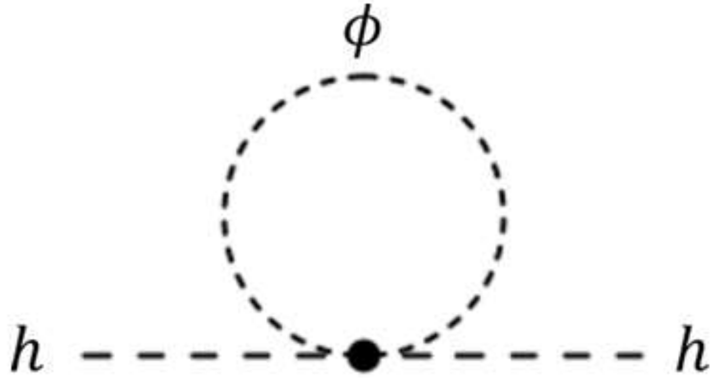


Las correcciones cuadráticas:

$$-i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\left(\gamma^\mu k_\mu - m_t\right)}\frac{1}{\left(\gamma^\alpha k_\alpha + \gamma^\beta p_\beta - m_t\right)}\right] = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\Lambda^2 + \cdots$$

6. Aplicación

Las correcciones cuadráticas:



$$\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m_\phi^2}=\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\Lambda^2+\cdots$$

Los dos supercompañeros contribuyen con:

$$\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\Lambda^2.$$

7. CONCLUSIONES

- El lagrangiano SUSY de Yang-Mills se deduce de forma sistemática utilizando el formalismo de superálgebra, superespacio y supercampos.
- Se comprobó que la supersimetría resuelve de forma natural las divergencias cuadráticas en la masa del Higgs.

7. Conclusiones

- Presentar la deducción paso a paso aporta valor formativo y didáctico para nuevas generaciones de estudiantes en física teórica
- Se consolidaron habilidades de investigación rigurosa y se adquirió una mayor maduréz académica en:

Teoría clásica, simetría gauge, teoría de grupos y representaciones, Álgebras graduadas, diagramas y reglas de Feynman, etc…

REFERENCIAS

[1] M. F. Sohnius, "Introducing supersymmetry," *Physics reports*, vol. 128, no. 2-3, pp. 39–204, 1985.

[2] M. E. Peskin *et al.*, "Supersymmetry in elementary particle physics," *arXiv preprint arXiv:0801.1928*, vol. 190, 2008.

[3] H. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, *Supersymmetry-an introduction with conceptual and calculational details*. World Scientific Pub. Co., Teaneck, NJ, 1987.

[4] J. Wess and J. A. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity: Revised Edition*. Princeton university press, 2020.

Referencias

[16] S. P. Martin, "A supersymmetry primer," *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys*, vol. 21, no. 515, pp. 1–153, 2010.

[17] S. Coleman and J. Mandula, "All possible symmetries of the s matrix," *Physical Review*, vol. 159, no. 5, p. 1251, 1967.

[18] P. P. Srivastava, *Supersymmetry, superfields and supergravity: an introduction*. Adam Hilger Ltd., Accord, MA, 1986.

[23] M. Drees, "An introduction to supersymmetry," *arXiv preprint hep-ph/9611409*, 1996.

[24] J. Terning, *Modern supersymmetry: Dynamics and duality*. Oxford University Press, 2006.

Gracias