

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LOCAL DE UN MODELO
MATEMÁTICO TRIDIMENSIONAL OBTENIDO A PARTIR DEL
MODELO DE COMPETENCIA BIDIMENSIONAL DE
LOTKA-VOLTERRA**

**MARCO ESTEBAN ERASO ZUTTA
ALBERTO ALEXANDER PONCE BRAVO**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2014**

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LOCAL DE UN MODELO
MATEMÁTICO TRIDIMENSIONAL OBTENIDO A PARTIR DEL
MODELO DE COMPETENCIA BIDIMENSIONAL DE
LOTKA-VOLTERRA**

**MARCO ESTEBAN ERASO ZUTTA
ALBERTO ALEXANDER PONCE BRAVO**

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
EDUARDO IBARGÜEN MONDRAGÓN
Doctor en Matemáticas

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2014**

Nota de responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Eduardo Ibargüen Mondragón
Asesor

Álvaro Raúl Córdoba Belalcázar
Jurado 1

Luis Eduardo López Montenegro
Jurado 2

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos en primer lugar a Sri Krisna (La Suprema Personalidad de Dios), porque sin la ayuda del Supremo Atractivo nada es posible. También quiero extender un agradecimiento muy especial a Claudia Milena Guerra H. por su amor ilimitado y su apoyo moral en la realización de este trabajo de grado, en verdad muchas gracias, te amo mucho madre Caitanya. Mi más fraternal agradecimiento a mi padre Alberto E. Ponce porque con su apoyo incondicional y sus consejos me enseña a ver la realidad y ha sido fuente de inspiración para que yo pueda salir adelante. Mis agradecimientos también son para mi amigo Marco Esteban Eraso Z. porque gracias a su constante dedicación pudimos sacar adelante este trabajo colectivo, al doctor Eduardo Ibargüen Mondragón por la motivación brindada durante su asesoría y a nuestros jurados Álvaro Raúl Córdoba Belalcázar y Luis Eduardo López Montenegro por su disposición y colaboración para corregir y evaluar este trabajo. Gracias también a cada uno de nuestros docentes que influyeron mucho para que mi paso por la universidad no fuera en vano y finalmente quiero expresar un total agradecimiento a la Universidad de Nariño por convertirse en mi segundo hogar a lo largo de estos años.

Alberto Alexander Ponce Bravo

Agradezco a mi Padre Marco Aurelio Eraso, a mi madre Ana Rocío Zutta, a mis hermanas y cuñados por todo el apoyo brindado durante el transcurso de mi carrera, también agradezco a todos mis profesores por su valiosa enseñanza, a mi virgencita de Guadalupe por darme las fuerzas y guiar mi camino, a nuestro asesor el Dr. Eduardo Ibargüen Mondragón por tener la paciencia del mundo y darnos ese empuje que nos hacia falta para salir adelante y a nuestros jurados Álvaro Raúl Córdoba Belalcázar y Luis Eduardo López Montenegro por las sugerencias realizadas para concluir de la mejor manera nuestro trabajo.

Marco Esteban Eraso Zutta

RESUMEN

En este trabajo se pretende formular un modelo matemático tridimensional deducido a partir del modelo de competencia bidimensional de Lotka-Volterra. Además de eso, se realizará el correspondiente análisis cualitativo del sistema. Es decir, se encontrará los puntos de equilibrio, se linealizará el sistema por medio del jacobiano y se analizará su estabilidad local.

Palabras claves: Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, modelo matemático tridimensional, análisis de estabilidad local.

ABSTRACT

This paper aims to develop a three-dimensional mathematical model derived from the model of dimensional Lotka-Volterra competition. Moreover, the system corresponding qualitative analysis is performed. That is, the equilibrium points are found, the system is linearized by means of the Jacobian and its local stability is analyzed.

Keywords: Systems of nonlinear differential equations, three-dimensional mathematical model, local stability analysis.

Tabla de Contenidos

INTRODUCCIÓN	11
1. PRELIMINARES	15
1.1. Nociones Básicas	15
1.2. Linealización	18
1.3. Modelo de Competencia Bidimensional de Lotka-Volterra	19
2. FORMULACIÓN DEL MODELO	22
3. DETERMINACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO	26
3.1. Clasificación de los puntos de equilibrio	27
3.1.1. Punto origen	27
3.1.2. Puntos axiales	27
3.1.3. Puntos planares	27
3.1.4. Punto interior	28

4. ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO	35
4.1. Análisis para O	36
4.2. Análisis para Q_{23}	36
4.3. Análisis para Q_{13}	37
4.4. Análisis para Q_{12}	39
4.5. Análisis para R_3	40
4.6. Análisis para R_2	40
4.7. Análisis para R_1	41
4.8. Análisis para P	42
5. CEROCLINAS DEL MODELO	44
5.1. Ceroclina x_1	44
5.2. Ceroclina x_2	45
5.3. Ceroclina x_3	46
CONCLUSIONES Y PREGUNTAS ABIERTAS	56
BIBLIOGRAFIA	58
Índice alfabético	59

Índice de cuadros

3.1. Clasificación de puntos de equilibrio	34
4.1. Análisis cualitativo de puntos de equilibrio	43

Índice de figuras

5.1. Ceroclina x_1	45
5.2. Ceroclina x_2	46
5.3. Ceroclina x_3	47
5.4. Ceroclinas juntas a	48
5.5. Ceroclinas juntas b	49

INTRODUCCIÓN

Una de las características más notables de la vida en nuestro planeta es la gran diversidad de aspectos y hábitos que tienen los organismos que la componen. Sin embargo, es difícil observar que esta manifestación de diversidad no se da de una forma arbitraria. Los organismos viven en comunidades, formando intrincadas relaciones de interacción, donde cada especie depende directa o indirectamente de la presencia de las otras. Una de las tareas de la Ecología es el desarrollo de una teoría de la organización de las comunidades que permita entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacción [3].

La competencia ocurre cuando algunos organismos sufren una reducción en su fecundidad, supervivencia o crecimiento como resultado de la explotación de los recursos o de la interferencia por parte de otros organismos a lo cual matemáticamente se denomina Modelo de Competencia, el cual fue planteado por Alfred Lotka y Vito Volterra, pioneros de la biomatemática.

Con este trabajo se afianzarán los conceptos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Sistemas Dinámicos aprendidos a lo largo de la carrera de licenciatura en matemáticas. Además, cabe resaltar que este es un trabajo de carácter monográfico en el cual se espera obtener resultados originales sobre un modelo matemático tridimensional deducido a partir del modelo de competencia bidimensional de Lotka-Volterra.

Se consideran tres especies que presentan un crecimiento logístico y además el contacto entre ellas influye en el decrecimiento poblacional de cada una de ellas.

La formulación de este modelo se basa en el modelo de Volterra quien incorporó la com-

petencia inter-específica añadiendo un nuevo término a la siguiente ecuación

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{k_1} \right), \quad (1)$$

quedando así

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{k_1} - \frac{a_1 P_2}{k_1} \right), \quad (2)$$

donde P_2 es el número de individuos de la segunda especie y a_1 es el coeficiente de competición; es decir, el efecto de la segunda especie sobre el grado de crecimiento exponencial de la primera especie.

El coeficiente a_1 puede ser considerado como el grado hasta el cual individuos de la segunda especie utilizan los recursos de individuos de la primera especie.

Debido a que cada una de las dos especies competidoras ejerce un efecto en la otra, la descripción de su relación mutua requiere dos ecuaciones, una para la primera especie y otra para la segunda especie:

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{k_1} - \frac{a_1 P_2}{k_1} \right) \quad (3)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{k_2} - \frac{a_2 P_1}{k_2} \right),$$

el cual es un sistema no lineal que se puede expresar como:

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{r_1}{k_1} P_1 (k_1 - P_1 - a_1 P_2) \quad (4)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{r_2}{k_2} P_2 (k_2 - P_2 - a_2 P_1),$$

del sistema (4) se puede observar que:

a) En ausencia de la primera especie ($P_1 = 0$) se obtiene:

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{r_2}{k_2} P_2 (k_2 - P_2). \quad (5)$$

Es decir, la población de la segunda especie crece de forma logística y tiende a la población de estado estable k_2 [8].

b) En ausencia de la segunda especie ($P_2 = 0$) se obtiene:

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{r_1}{k_1} P_1 (k_1 - P_1). \quad (6)$$

Es decir, la población de la primera especie crece de forma logística y tiende a la población de estado estable k_1 .

Siendo a_1, a_2, r_1, r_2, k_1 y k_2 constantes positivas.

En este trabajo se pretende estudiar algunas propiedades sobre la dinámica de un modelo matemático tridimensional obtenido a partir del modelo de competencia bidimensional de Lotka-Volterra. Además de eso, se estudiará las ceroclinas y con ello se realizará el correspondiente análisis cualitativo del sistema. Es decir, se encontrará los puntos de equilibrio, se linealizará el sistema por medio del jacobiano y se analizará su estabilidad local. Sin embargo, no se garantiza que este modelo matemático tridimensional tenga alguna aplicación biológica.

El desarrollo del trabajo consta de cinco capítulos:

En el capítulo 1, se presentan las definiciones y resultados de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales necesarias para el desarrollo de los objetivos específicos.

En el capítulo 2, es donde a partir del modelo bidimensional de Lotka-Volterra y por medio de algunas sustituciones se formulará el sistema que se va a trabajar.

En el capítulo 3, se encuentra por medio de procedimientos analíticos los puntos de equilibrio así como también se categoriza cada uno de ellos como punto origen, punto axial, punto planar, punto interior(infinitos).

En el capítulo 4, se realiza el análisis respectivo de nuestro modelo.

En el capítulo 5, se encuentra las ceroclinas correspondientes al modelo.

Capítulo 1

PRELIMINARES

La teoría que se presenta a continuación tiene como propósito facilitar la lectura y la comprensión de este proyecto. Dicha teoría ha sido tomada del libro "Differential Equations and Dynamical Systems" [6], así como también del libro [4]; el cual nos ha facilitado algunos teoremas y definiciones de gran importancia para continuar con el desarrollo de nuestro proyecto.

1.1. Nociones Básicas

En el desarrollo de este trabajo se consideran ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

donde f es un campo vectorial de clase C^1 en U , es decir, f es una función continua con primeras derivadas parciales continuas en un abierto U de \mathbb{R}^n . Una ecuación diferencial de esta clase se llama **autónoma** ya que la función f no depende explícitamente de la variable independiente t .

Una **solución** de la ecuación (1.1) sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es una función $x(t)$

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

continuamente diferenciable que satisface la ecuación (1.1).

Teorema 1.1.1. Existencia y unicidad. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , x_0 un punto en U y f una aplicación de clase C^1 en U , entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

tiene una única solución $x(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$.

Definición 1.1.2. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y f una aplicación de clase C^1 en U . Para x_0 en U denotamos $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial (1.2) definida sobre un intervalo maximal de existencia I . para t en I , el conjunto de aplicaciones

$$\phi_t : U \rightarrow U$$

definida como

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

se llama el **Flujo** de la ecuación diferencial (1.1).

Definición 1.1.3. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

La transformación lineal $Df(x_0)$ es llamada la derivada de f en x_0 .

Teorema 1.1.4. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en x_0 , entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, existen todas en x_0 y para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Por lo tanto, si f es una función diferenciable, la derivada Df viene dada por la matriz jacobiana $n \times n$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.1.5 (Hartman-Grobman). (véase [1]).

Sea f de clase C^1 y x_0 un punto crítico hiperbólico del sistema plano $\dot{x} = f(x)$. Entonces hay una vecindad de x_0 en la cual $\dot{x} = f(x)$ es topológicamente equivalente a su linealización $\dot{x} = Df(x_0)x$.

Definición 1.1.6 (Ceroclinas). (véase [2]).

En lugar de trazar arbitrariamente valores tabulados, debemos preparar el camino para darnos cuenta de lo que pasa en el lugar geométrico de puntos para cuál de las dos funciones, ya sea $f_1(x, y)$ o $f_2(x, y)$ se vuelven cero, observemos que

1. Si $f_1(x, y) = 0$, entonces $\frac{dx}{dt} = 0$, por lo que x no cambia. Esto significa que el vector de dirección debe ser paralelo al eje y , ya que su componente Δx es cero.
2. Si $f_2(x, y) = 0$, entonces $\frac{dy}{dt} = 0$, por lo que y no cambia. Esto significa que el vector de dirección debe ser paralelo al eje x , ya que su componente Δy es cero.

El lugar geométrico de puntos que satisfacen una de estas dos condiciones se denomina ceroclina. La **x ceroclina** es el conjunto de puntos que satisfacen la condición 1; Del mismo modo, la **y ceroclina** es el conjunto de puntos que satisfacen la condición 2. Debido a que las flechas son paralelas al eje Y y al eje X respectivamente en estos lugares geométricos, resultan útiles para dibujar como un primer paso.

Los puntos de intersección de las ceroclinas satisfacen tanto $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ y por lo tanto representan estados estacionarios o de equilibrio. Para identificar estos y determinar las direcciones de flujo, son útiles una serie de pautas. Reglas para determinar los Estados estacionarios y vectores de dirección en las ceroclinas:

1. Los estados de equilibrio se encuentran en las intersecciones de una ceroclina x con una ceroclina y .

2. En los Estados de equilibrio no hay cambios en los valores de x o y ; es decir, los vectores tienen longitud cero.
3. Los vectores de dirección deben variar continuamente de un punto a otro en las ceroclinas. Así, un cambio en la orientación (por ejemplo, de que señala de arriba hacia abajo) puede tener lugar solamente en estados estacionarios.

1.2. Linealización

Un sistema no lineal es un sistema de la forma (1.1). Una buena manera para empezar el análisis del sistema no lineal (1.1) es determinar sus puntos de equilibrio y luego describir el comportamiento cerca a sus puntos de equilibrio.

El comportamiento local del sistema no lineal (1.1) alrededor del punto de equilibrio x_0 está determinado por el comportamiento del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, con la matriz $A = Df(x_0)$ cerca al origen. La función lineal $Ax = Df(x_0)x$ es llamada la parte lineal de f en x_0 .

Definición 1.2.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de (1.1) si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es un Punto de Equilibrio Hiperbólico de (1.1) si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real igual a cero.

Definición 1.2.2. Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema no lineal (1.1), entonces x_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico si algún valor propio de $Df(x_0)$ tiene parte real cero.

Definición 1.2.3. Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1.1), entonces:

- x_0 es un **Sumidero** si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real negativa.
- x_0 es una **Fuente** si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva.
- x_0 es una **Silla** si $Df(x_0)$ tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa.

Teorema 1.2.4. *Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1.1):*

1. *Si x_0 es un sumidero entonces x_0 es asintóticamente estable.*
2. *Si x_0 es una fuente o una silla entonces x_0 es inestable.*

1.3. Modelo de Competencia Bidimensional de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)$$

El modelo de competencia de Lotka-Volterra 2×2 es un sistema no lineal de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

y

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \end{pmatrix}$$

si $f(x_0) = 0$ donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$. En este caso, $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Donde x_0 es un punto de equilibrio o punto crítico. Por lo tanto los puntos de equilibrio de este sistema se pueden encontrar solucionando la igualdad $f(x) = 0$, es decir:

$$x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) = 0$$

$$x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) = 0$$

de donde se obtienen los siguientes casos:

Caso 1

Si $x_1 = 0, x_2 = 0$, se tiene como punto de equilibrio el punto $(0,0)$ el cual se obtiene de manera inmediata.

Caso 2

Si $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, la igualdad $f(x) = 0$ se convierte en $x_2(b_2 - a_{22}x_2) = 0$, de donde $x_2 = 0$ o $b_2 - a_{22}x_2 = 0$, pero como $x_2 \neq 0$, entonces solo se toma en cuenta $b_2 - a_{22}x_2 = 0$, es decir $x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$ y por lo tanto se obtiene como punto de equilibrio $(0, \frac{b_2}{a_{22}})$.

Caso 3

Si $x_1 \neq 0, x_2 = 0$, la igualdad $f(x) = 0$ se convierte en $x_1(b_1 - a_{11}x_1) = 0$, de donde $x_1 = 0$ o $b_1 - a_{11}x_1 = 0$, pero como $x_1 \neq 0$, entonces solo se toma en cuenta $b_1 - a_{11}x_1 = 0$, es decir $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ y por lo tanto se obtiene como punto de equilibrio $(\frac{b_1}{a_{11}}, 0)$.

Caso 4

Si $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, la igualdad $f(x) = 0$ se convierte en

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

el cual es un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y cuya solución es

$$x_1 = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$$

y

$$x_2 = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$$

por lo tanto se obtiene como punto de equilibrio:

$$\left(\frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \right)$$

Capítulo 2

FORMULACIÓN DEL MODELO

En este capítulo se parte del sistema Lotka-Volterra 2x2 y por medio de sustituciones adecuadas se lo transforma en el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que se va a trabajar. El procedimiento es el siguiente:

para el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{k_1} - \frac{a_1 P_2}{k_1} \right) \\ \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{k_2} - \frac{a_2 P_1}{k_2} \right) \end{cases}$$

Utilizando las sustituciones

$$x_1 = \frac{P_1}{k_1}$$

y

$$x_2 = \frac{P_2}{k_2}$$

cuyas derivadas

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{k_1} \frac{dP_1}{dt}$$

y

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{k_2} \frac{dP_2}{dt}$$

generan un cambio de variable, es decir

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{k_1} r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{k_1} - \frac{a_1 P_2}{k_1} \right)$$

y con un poco de operaciones tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - x_1 - \frac{a_1 k_2 P_2}{k_1 k_2} \right) \\ &= r_1 x_1 \left(1 - x_1 - \frac{a_1 k_2}{k_1} x_2 \right) \\ &= r_1 x_1 - r_1 x_1^2 - \frac{a_1 k_2}{k_1} r_1 x_1 x_2 \\ &= r_1 x_1 (1 - x_1) - \frac{a_1 k_2 r_1}{k_1} x_1 x_2 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo

$$r_1 = \alpha_1$$

y

$$\frac{a_1 k_2 r_1}{k_1} = \sigma_1$$

se obtiene

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 (1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2$$

de la misma manera,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{k_2} r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2}{k_2} - \frac{a_2 P_1}{k_2} \right)$$

y con un poco de operaciones se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - x_2 - \frac{a_2 k_1 P_1}{k_2 k_1} \right) \\
 &= r_2 x_2 \left(1 - x_2 - \frac{a_2 k_1}{k_2} x_1 \right) \\
 &= r_2 x_2 - r_2 x_2^2 - \frac{a_2 k_1}{k_2} r_2 x_1 x_2 \\
 &= r_2 x_2 (1 - x_2) - \frac{a_2 k_1 r_2}{k_2} x_1 x_2
 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo

$$r_2 = \alpha_2$$

y

$$\frac{a_2 k_1 r_2}{k_2} = \sigma_2$$

se obtiene

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 x_2 (1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2$$

de lo anterior se tiene el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 (1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_2 (1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 \end{cases}$$

el cual es el sistema de la forma

$$\dot{x}_j = \alpha_j x_j (1 - x_j) - \sigma_j \prod_{j=1}^2 x_j, \quad \text{donde } j = 1, 2. \quad (2.1)$$

Pero lo que interesa en este trabajo es analizar el modelo de la forma:

$$\dot{x}_j = \alpha_j x_j (1 - x_j) - \sigma_j \prod_{j=1}^3 x_j, \quad \text{donde } j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

es decir, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1(1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_2(1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = \alpha_3 x_3(1 - x_3) - \sigma_3 x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

Capítulo 3

DETERMINACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

En el sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha_1 - \alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_2(\alpha_2 - \alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(\alpha_3 - \alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

si para algún punto $x \in \mathbb{R}_+^3$, se tiene que

$$\dot{x}_i = \alpha_i - (Ax)_i - f_i(x) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, 3\}\tag{3.2}$$

Dicho punto es un punto de equilibrio del sistema. Para que ocurra lo anterior el lado derecho de las igualdades (3.1) debe ser cero lo que se traduce en las condiciones $x_i = 0$ o $N_i(x) = 0$ donde

$$N_i(x) = \alpha_i - \alpha_i x_i - f_i(x) = 0 \quad (3.3)$$

en general interesa referirse al conjunto de ceros de la función (3.3) por lo que se denotará como

$$\mathbf{N}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha_i - \alpha_i x_i - f_i(x) = 0\}$$

3.1. Clasificación de los puntos de equilibrio

Para clasificar los puntos de equilibrio se han agrupado en cuatro categorías, las cuales son: punto origen, puntos axiales, puntos planares y punto interior que se describirán a continuación.

3.1.1. Punto origen

El punto origen se presenta cuando $x_i = 0$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$. el cual se denotará como punto \mathbf{O} .

3.1.2. Puntos axiales

Los puntos axiales son aquellos en los cuales $N_i(x) = 0$ sobre el eje coordenado x_i , a este punto se lo denotará como \mathbf{R}_i y su coordenada distinta de cero es 1.

3.1.3. Puntos planares

Los puntos planares, denotados como \mathbf{Q}_{ij} , están determinados por las condiciones $N_i(x) = 0$, $N_j(x) = 0$ y $x_k = 0$, con i, j, k distintos. Esto quiere decir que estos puntos son la intersección de los planos \mathbf{N}_i y \mathbf{N}_j sobre el plano coordenado $\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j$.

3.1.4. Punto interior

El punto interior, denotado como \mathbf{P} , existirá solamente cuando los tres planos N_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ se intersecten en el interior de \mathbb{R}_+^3 .

Los puntos de equilibrio para el sistema son:

Punto Origen

si $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, se obtiene de manera inmediata el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$. Este punto se llama punto origen.

Punto Planar Q_{23}

si $x_1 = 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$, se tiene

$$\alpha_2 x_2 (1 - x_2) = 0$$

$$\alpha_3 x_3 (1 - x_3) = 0$$

de donde

$$(1 - x_2) = 0$$

$$(1 - x_3) = 0$$

Luego, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(0, 1, 1)$. Este punto se llama punto planar Q_{23} .

Punto Planar Q_{13}

si $x_1 \neq 0, x_2 = 0, x_3 \neq 0$, se tiene

$$\alpha_1 x_1(1 - x_1) = 0$$

$$\alpha_3 x_3(1 - x_3) = 0$$

de donde

$$(1 - x_1) = 0$$

$$(1 - x_3) = 0$$

Luego, $x_1 = 1$ y $x_3 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(1, 0, 1)$. Este punto se llama punto planar Q_{13} .

Punto Planar Q_{12}

si $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 = 0$, se tiene

$$\alpha_1 x_1(1 - x_1) = 0$$

$$\alpha_2 x_2(1 - x_2) = 0$$

de donde

$$(1 - x_1) = 0$$

$$(1 - x_2) = 0$$

Luego, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(1, 1, 0)$. Este punto se llama punto planar Q_{12} .

Punto Axial R_3

si $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \neq 0$, se tiene

$$\alpha_3 x_3 (1 - x_3) = 0$$

de donde

$$(1 - x_3) = 0$$

Luego, $x_3 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(0, 0, 1)$. Este punto se llama punto axial R_3 .

Punto Axial R_2

si $x_1 = 0, x_2 \neq 0, x_3 = 0$, se tiene

$$\alpha_2 x_2 (1 - x_2) = 0$$

de donde

$$(1 - x_2) = 0$$

Luego, $x_2 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(0, 1, 0)$. Este punto se llama punto axial R_2 .

Punto Axial R_1

si $x_1 \neq 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, se tiene

$$\alpha_1 x_1 (1 - x_1) = 0$$

de donde

$$(1 - x_1) = 0$$

Luego, $x_1 = 1$ y por lo tanto se obtiene el punto de equilibrio $(1, 0, 0)$. Este punto se llama punto axial R_1 .

Punto Interior P

En esta sección se va a hacer el análisis cualitativo de un sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales. Se va a aplicar la Proposición (3.1.1) para probar la estabilidad asintótica de un equilibrio no trivial. El sistema no lineal es:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1(1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 \\
\dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2(1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 \\
\dot{x}_3 &= \alpha_3 x_3(1 - x_3) - \sigma_3 x_1 x_2 x_3,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde α_i y σ_i para $i = 1, 2, 3$ son constantes positivas. El conjunto de interés resume los resultados de existencia del equilibrio de (3.4) es la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *El sistema (3.4) siempre tiene la solución de equilibrio trivial $P_0 = (0, 0, 0)$, y los equilibrios no triviales en \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas satisfacen $x_3 = 1 - \frac{\sigma_3 x_1 x_2}{\alpha_3}$, x_1 e x_2 recorren el camino de la superficie cilíndrica.*

$$R_0 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{R_0 - 1}{4}, \tag{3.5}$$

donde

$$R_0 = \frac{\alpha_1 \sigma_2}{\alpha_2 \sigma_1}. \tag{3.6}$$

Demostración. Los estados de equilibrio del sistema (3.4) vienen dados por las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_1(1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 &= 0 \\
\alpha_2 x_2(1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 &= 0 \\
\alpha_3 x_3(1 - x_3) - \sigma_3 x_1 x_2 x_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

El examen del sistema (3.7) revela la existencia del equilibrio trivial, $P_0 = (0, 0, 0)$. Ahora se va a determinar la existencia de equilibrios no triviales. De la tercera ecuación de (3.7) se obtiene

$$x_3 = 1 - \frac{\sigma_3 x_1 x_2}{\alpha_3} \tag{3.8}$$

De las dos primeras ecuaciones de (3.7) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{\sigma_1}x_1(1-x_1) &= x_1x_2x_3 \\ \frac{\alpha_2}{\sigma_2}x_2(1-x_2) &= x_1x_2x_3,\end{aligned}$$

igualando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}x_1(1-x_1) = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}x_2(1-x_2).$$

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}(x_1 - x_1^2) = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}(x_2 - x_2^2),$$

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}(x_1^2 - x_1) = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}(x_2^2 - x_2),$$

completando cuadrados, se tiene:

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}\left(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}\left(x_2^2 - x_2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}\left(\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}\left(\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{\alpha_1\sigma_2}{\alpha_2\sigma_1}\left(\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right),$$

haciendo

$$R_0 = \frac{\alpha_1\sigma_2}{\alpha_2\sigma_1},$$

se tiene:

$$R_0 \left(\left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = \left(\left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right),$$

$$R_0 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{R_0}{4} = \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$R_0 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{R_0}{4} - \frac{1}{4},$$

lo que implica

$$R_0 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{R_0 - 1}{4}.$$

□

En resumen, podemos decir que la clasificación de los puntos de equilibrio junto con sus coordenadas quedaría de la siguiente manera:

Clasificación	Punto de equilibrio
Punto origen O	(0, 0, 0)
Punto planar Q₁₂	(1, 1, 0)
Punto planar Q₁₃	(1, 0, 1)
Punto planar Q₂₃	(0, 1, 1)
Punto axial R₁	(1, 0, 0)
Punto axial R₂	(0, 1, 0)
Punto axial R₃	(0, 0, 1)
Punto interior P	(x ₁ , x ₂ , x ₃)

Cuadro 3.1: Clasificación de puntos de equilibrio

Capítulo 4

ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO

Para realizar el análisis correspondiente al sistema, primero se debe encontrar la matriz jacobiana $A = Df(x)$, donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1(1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 \\ \alpha_2 x_2(1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 \\ \alpha_3 x_3(1 - x_3) - \sigma_3 x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_1^2 - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 \\ \alpha_2 x_2 - \alpha_2 x_2^2 - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 \\ \alpha_3 x_3 - \alpha_3 x_3^2 - \sigma_3 x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

luego, se tiene

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3 & -\sigma_1 x_1 x_3 & -\sigma_1 x_1 x_2 \\ -\sigma_2 x_2 x_3 & \alpha_2 - 2\alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3 & -\sigma_2 x_1 x_2 \\ -\sigma_3 x_2 x_3 & -\sigma_3 x_1 x_3 & \alpha_3 - 2\alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

y evaluando cada uno de los puntos de equilibrio en $A = Df(x_0)$, donde x_0 es un punto de equilibrio, se tiene:

4.1. Análisis para \mathbf{O}

Para el punto $(0, 0, 0)$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\lambda_3 = \alpha_3$ y como todos los valores propios tienen parte real positiva, entonces el punto $(0, 0, 0)$ es una **fuerza**.

4.2. Análisis para Q_{23}

Para el punto $(0, 1, 1)$

$$A = Df(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \alpha_2 - 2\alpha_2 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & \alpha_3 - 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 - \sigma_1 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\sigma_3 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 + \sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \lambda + \alpha_2 & 0 \\ \sigma_3 & 0 & \lambda + \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \alpha_1 + \sigma_1)(\lambda + \alpha_2)(\lambda + \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = \alpha_1 - \sigma_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$, $\lambda_3 = -\alpha_3$.

Por lo tanto para puede suceder que:

- si $\alpha_1 = \sigma_1$, entonces $\lambda_1 = 0$, es decir, habría un valor propio con parte real cero, luego el punto $(0, 1, 1)$ es un punto de equilibrio **no hiperbólico**.
- si $\alpha_1 < \sigma_1$, entonces la parte real de λ_1 es negativa, es decir, todos los valores propios van a tener parte real negativa, luego el punto $(0, 1, 1)$ es un **sumidero**.
- si $\alpha_1 > \sigma_1$, entonces la parte real de λ_1 es positiva y como λ_1 y λ_2 tienen parte real negativa, existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos un valor propio con parte real negativa, luego el punto $(0, 1, 1)$ es una **silla**.

4.3. Análisis para Q_{13}

Para el punto $(1, 0, 1)$

$$A = Df(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \alpha_3 - 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \alpha_1 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 + \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda + \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2 + \sigma_2)(\lambda + \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 - \sigma_2$, $\lambda_3 = -\alpha_3$.

Por lo tanto para puede suceder que:

- si $\alpha_2 = \sigma_2$, entonces $\lambda_2 = 0$, es decir, habría un valor propio con parte real cero, luego el punto $(1, 0, 1)$ es un punto de equilibrio **no hiperbólico**.
- si $\alpha_2 < \sigma_2$, entonces la parte real de λ_2 es negativa, es decir, todos los valores propios van a tener parte real negativa, luego el punto $(1, 0, 1)$ es un **sumidero**.
- si $\alpha_2 > \sigma_2$, entonces la parte real de λ_2 es positiva y como λ_1 y λ_3 tienen parte real negativa, existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos un valor propio con parte real negativa, luego el punto $(1, 0, 1)$ es una **silla**.

4.4. Análisis para Q_{12}

Para el punto $(1, 1, 0)$

$$A = Df(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_1 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & \alpha_2 - 2\alpha_2 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & -\alpha_2 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & -\alpha_2 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \sigma_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \alpha_1 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \lambda + \alpha_2 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 + \sigma_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)(\lambda - \alpha_3 + \sigma_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$, $\lambda_3 = \alpha_3 - \sigma_3$.

Por lo tanto para puede suceder que:

- si $\alpha_3 = \sigma_3$, entonces $\lambda_3 = 0$, es decir, habría un valor propio con parte real cero, luego el punto $(1, 1, 0)$ es un punto de equilibrio **no hiperbólico**.
- si $\alpha_3 < \sigma_3$, entonces la parte real de λ_3 es negativa, es decir, todos los valores propios van a tener parte real negativa, luego el punto $(1, 1, 0)$ es un **sumidero**.
- si $\alpha_3 > \sigma_3$, entonces la parte real de λ_3 es positiva y como λ_1 y λ_2 tienen parte real negativa, existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos

un valor propio con parte real negativa, luego el punto $(1, 1, 0)$ es una **silla**.

4.5. Análisis para R_3

Para el punto $(0, 0, 1)$

$$A = Df(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $\det(P(\lambda) = \lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda + \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\lambda_3 = -\alpha_3$.

Como en este caso existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos un valor propio con parte real negativa, entonces el punto $(0, 0, 1)$ es una **silla**.

4.6. Análisis para R_2

Para el punto $(0, 1, 0)$

$$A = Df(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$, $\lambda_3 = \alpha_3$.

Como en este caso existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos un valor propio con parte real negativa, entonces el punto $(0, 1, 0)$ es una **silla**.

4.7. Análisis para R_1

Para el punto $(1, 0, 0)$

$$A = Df(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ para hallar los valores propios se tiene:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = 0$$

de donde $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\lambda_3 = \alpha_3$.

Como en este caso existe al menos un valor propio con parte real positiva y existe al menos un valor propio con parte real negativa, entonces el punto $(1, 0, 0)$ es una **silla**.

4.8. Análisis para P

Realizar el análisis cualitativo para este caso no está al alcance de este trabajo, puesto que no se habla de un solo punto, sino mas bien de un conjunto infinito de puntos de la forma (x_1, x_2, x_3) cuyas coordenadas son distintas de cero, las cuales satisfacen $x_3 = 1 - \frac{\sigma_3 x_1 x_2}{\alpha_3}$ y

$$R_0 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{R_0 - 1}{4},$$

con

$$R_0 = \frac{\alpha_1 \sigma_2}{\alpha_2 \sigma_1}.$$

En resumen, podemos decir que el análisis de los puntos de equilibrio quedaría de la siguiente manera:

Análisis	valores propios	tipo de equilibrio
Punto origen O	$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \lambda_3 = \alpha_3$	fuelle
Punto planar Q_{12}	$\lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = \alpha_3 - \sigma_3$	tres posibilidades
Punto planar Q_{13}	$\lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2 - \sigma_2, \lambda_3 = -\alpha_3$	tres posibilidades
Punto planar Q_{23}	$\lambda_1 = \alpha_1 - \sigma_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = -\alpha_3$	tres posibilidades
Punto axial R_1	$\lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \lambda_3 = \alpha_3$	silla
Punto axial R_2	$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = \alpha_3$	silla
Punto axial R_3	$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \lambda_3 = -\alpha_3$	silla
Punto interior P	(x_1, x_2, x_3)	por determinar

Cuadro 4.1: Análisis cualitativo de puntos de equilibrio

Capítulo 5

CEROCLINAS DEL MODELO

Para determinar las ceroclinas de un modelo tridimensional se debe considerar los conjuntos que están constituidos por puntos en donde el campo vectorial tiene al menos una dirección nula, es decir para aquellos puntos en los que $\dot{x}_i = 0$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. Para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\alpha_1 - \alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_2(\alpha_2 - \alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(\alpha_3 - \alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2)\end{aligned}\tag{5.1}$$

se determinan sus ceroclinas de la siguiente manera:

5.1. Ceroclina x_1

Para encontrar esta ceroclina, se hace $\dot{x}_1 = 0$, es decir, $\alpha_1 x_1(1 - x_1) - \sigma_1 x_1 x_2 x_3 = 0$ de donde $x_1(\alpha_1 - \alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3) = 0$, luego $x_1 = 0$ o $\alpha_1 - \alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3 = 0$. Por lo tanto la ceroclina x_1 esta conformada por el plano $x_2 x_3$ y el conjunto $\mathbf{N}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha_1 - \alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_2 x_3 = 0\}$.

Para $\alpha_1 = 0,2$ y $\sigma_1 = 0,7$ la gráfica de ceroclinas quedaría de la siguiente manera:

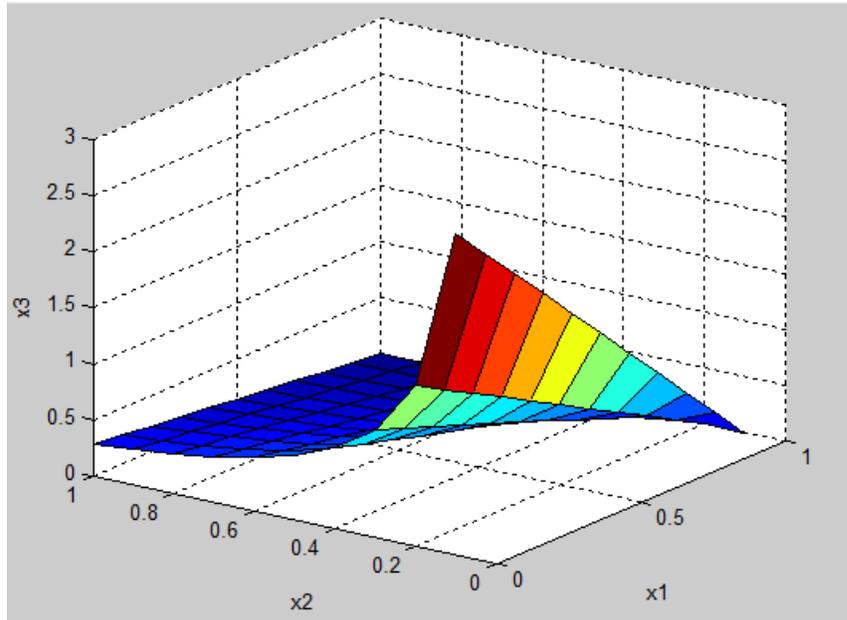


Figura 5.1: Ceroclina x_1

5.2. Ceroclina x_2

Para encontrar esta ceroclina, se hace $\dot{x}_2 = 0$, es decir, $\alpha_2 x_2 (1 - x_2) - \sigma_2 x_1 x_2 x_3 = 0$ de donde $x_2(\alpha_2 - \alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3) = 0$, luego $x_2 = 0$ o $\alpha_2 - \alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3 = 0$. Por lo tanto la ceroclina x_2 esta conformada por el plano $x_1 x_3$ y el conjunto $\mathbf{N}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha_2 - \alpha_2 x_2 - \sigma_2 x_1 x_3 = 0\}$.

Para $\alpha_2 = 0,5$ y $\sigma_2 = 0,3$ la gráfica de ceroquinas quedaría de la siguiente manera:

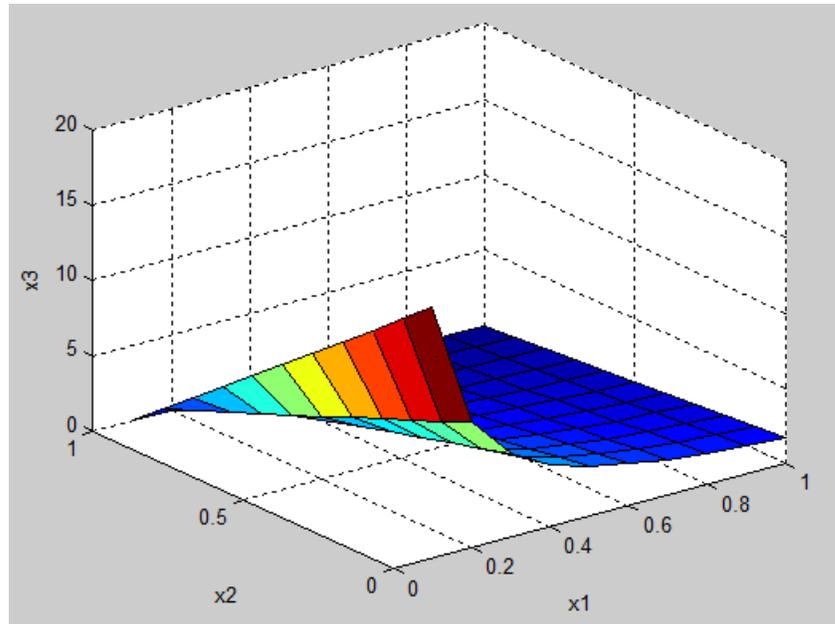


Figura 5.2: Ceroclina x_2

5.3. Ceroclina x_3

Para encontrar esta ceroclina, se hace $\dot{x}_3 = 0$, es decir, $\alpha_3 x_3(1 - x_3) - \sigma_3 x_1 x_2 x_3 = 0$ de donde $x_3(\alpha_3 - \alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2) = 0$, luego $x_3 = 0$ o $\alpha_3 - \alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2 = 0$. Por lo tanto la ceroclina x_3 esta conformada por el plano $x_1 x_2$ y el conjunto $\mathbf{N}_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha_3 - \alpha_3 x_3 - \sigma_3 x_1 x_2 = 0\}$.

Para $\alpha_3 = 0,9$ y $\sigma_3 = 0,2$ la gráfica de ceroclinas quedaría de la siguiente manera:

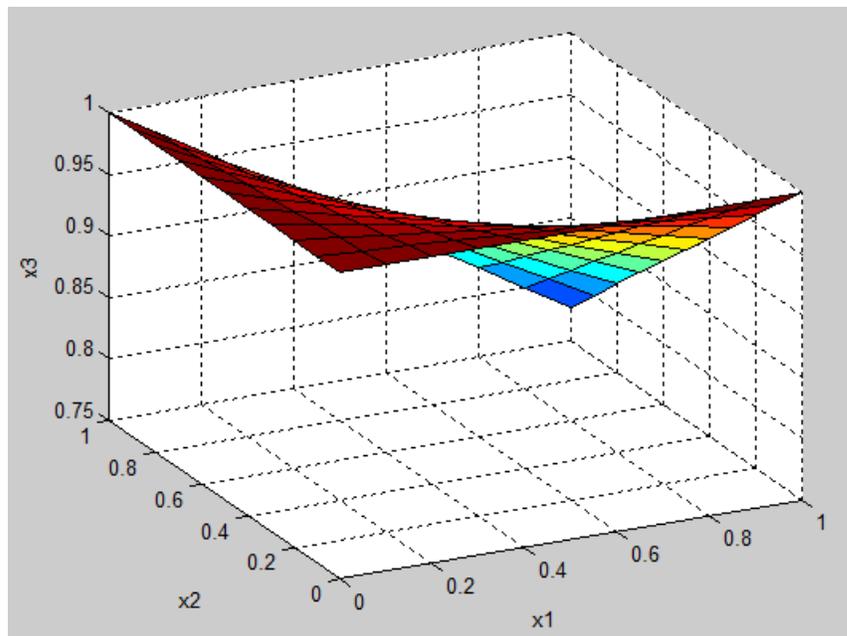


Figura 5.3: Ceroclina x_3

Para $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,5$, $\alpha_3 = 0,9$, $\sigma_1 = 0,7$, $\sigma_2 = 0,3$, $\sigma_3 = 0,2$ la gráfica de ceroclinas de las tres superficies juntas quedaría de la siguiente manera:

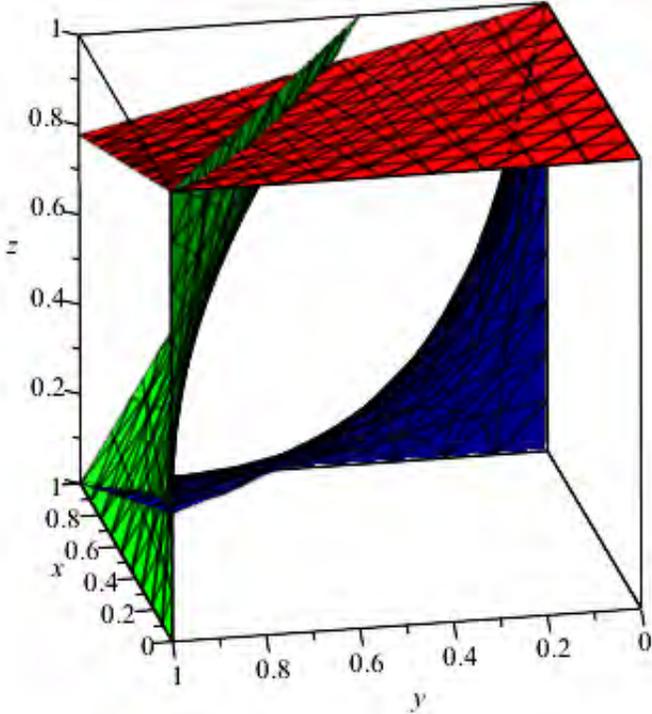


Figura 5.4: Ceroclinas juntas a

Para $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 2$ la gráfica de ceroquinas de las tres superficies juntas quedaría de la siguiente manera:

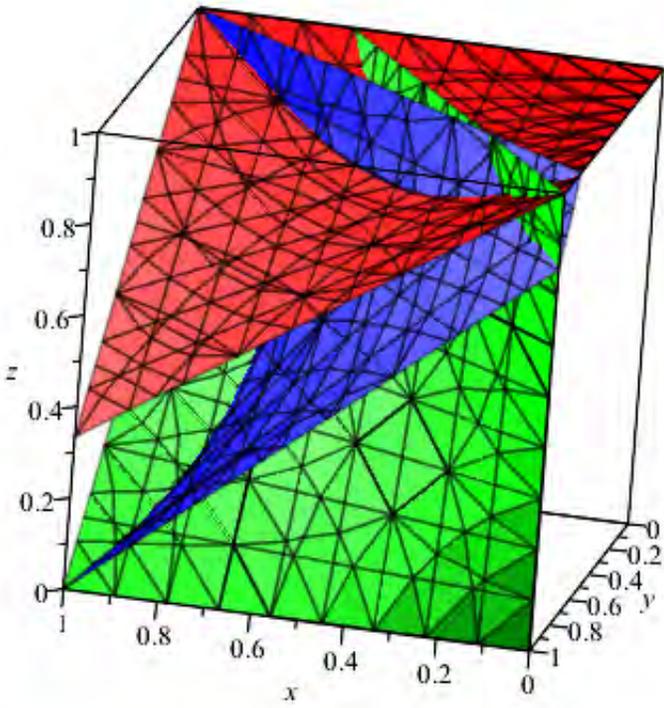


Figura 5.5: Ceroquinas juntas b

Una superficie ceroquina divide al octante positivo R_+^3 en dos componentes una acotada que contiene al origen y otra no acotada. Se dirá que un punto esta "por debajo" de la ceroquina N_i cuando este pertenezca a la componente acotada del conjunto $R_+^3 \setminus N_i$. Saber la posición de un punto respecto a una ceroquina es de gran importancia en el análisis que se hará a continuación, razón por la cual es importante caracterizar dicha posición mediante algún criterio algebraico.

Definiendo la función $T : R_+^3 \rightarrow R^3, T(x) = Ax + f(x) - B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1 x_2 x_3 \\ \sigma_2 x_1 x_3 \\ \sigma_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Luego,

$$T(x) = Ax + f(x) - B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 x_2 x_3 \\ \sigma_2 x_1 x_3 \\ \sigma_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Para entender lo que hace esta transformación, se la va a probar en algunos puntos de

equilibrio.

Para R_1 se tiene:

$$\begin{aligned} T(R_1) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 0 \cdot 0 \\ \sigma_2 \cdot 1 \cdot 0 \\ \sigma_3 \cdot 1 \cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 0 - \alpha_1 \\ 0 + 0 - \alpha_2 \\ 0 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Para R_2 se tiene:

$$\begin{aligned}
T(R_2) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 1 \cdot 0 \\ \sigma_2 \cdot 0 \cdot 0 \\ \sigma_3 \cdot 0 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 + 0 - \alpha_1 \\ \alpha_2 + 0 - \alpha_2 \\ 0 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ -\alpha_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Para R_3 se tiene:

$$\begin{aligned}
T(R_3) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 0 \cdot 1 \\ \sigma_2 \cdot 0 \cdot 1 \\ \sigma_3 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 + 0 - \alpha_1 \\ 0 + 0 - \alpha_2 \\ \alpha_3 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Para Q_{12} se tiene:

$$\begin{aligned}
 T(Q_{12}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 1 \cdot 0 \\ \sigma_2 \cdot 1 \cdot 0 \\ \sigma_3 \cdot 1 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 0 - \alpha_1 \\ \alpha_2 + 0 - \alpha_2 \\ 0 + \sigma_3 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 - \alpha_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Para Q_{13} se tiene:

$$\begin{aligned}
 T(Q_{13}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 0 \cdot 1 \\ \sigma_2 \cdot 1 \cdot 1 \\ \sigma_3 \cdot 1 \cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 0 - \alpha_1 \\ 0 + \sigma_2 - \alpha_2 \\ \alpha_3 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 - \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Para Q_{23} se tiene:

$$\begin{aligned}
 T(Q_{23}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 1 \cdot 1 \\ \sigma_2 \cdot 0 \cdot 1 \\ \sigma_3 \cdot 0 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 + \sigma_1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 + 0 - \alpha_2 \\ \alpha_3 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 - \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Para O se tiene:

$$\begin{aligned}
 T(O) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot 0 \cdot 0 \\ \sigma_2 \cdot 0 \cdot 0 \\ \sigma_3 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 + 0 - \alpha_1 \\ 0 + 0 - \alpha_2 \\ 0 + 0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

El análisis anterior permite ver que las imágenes de los puntos axiales R_i bajo la transformación antes mencionada quedan ubicados entre los planos $X_j X_k$, es decir en la parte acotada del conjunto $R_+^3 \setminus N_i$. Pero, los puntos planares Q_{ij} quedan ubicados sobre los ejes coordenados y dependiendo de los signos de alfa y sigma estos pueden quedar ubicados en la parte acotada del sistema o en la parte no acotada de este. Por último, el punto origen queda ubicado en la componente acotada del conjunto $R_+^3 \setminus N_i$.

CONCLUSIONES Y PREGUNTAS ABIERTAS

Luego de realizar un análisis al modelo matemático tridimensional que se formuló a partir del modelo de competencia bidimensional de Lotka-Volterra se concluye que:

- Se encontraron ocho puntos de equilibrio de los cuales uno es trivial y es un punto origen puesto que sus coordenadas son ceros, además, seis de ellos son puntos de equilibrio no triviales, donde tres de ellos son puntos planares ya que dos de sus coordenadas son distintas de cero y la otra es cero. Los otros tres puntos son axiales puesto que una de sus tres coordenadas es distinta de cero y las otras dos son ceros.
- Uno de los puntos no triviales resultó difícil de obtener por métodos elementales y fue necesario expresarlo por medio de una ecuación de una superficie cilíndrica.
- Mediante la linealización del sistema se puede decir que tanto el punto origen como los puntos axiales son puntos de equilibrio hiperbólicos, puesto que sus valores propios tienen parte real distinta de cero y los puntos planares pueden ser puntos de equilibrio hiperbólicos o puntos de equilibrio no hiperbólicos dependiendo de los valores de los parámetros α y σ .
- Finalmente se encontraron tres tipos de ceroclinas, cada una de ellas conformada por la intersección de uno de los planos coordenados y una superficie.
- El hecho de que este sistema tridimensional sea una deducción del modelo de competencia bidimensional de Lotka-Volterra, no quiere decir que este nuevo sistema tenga

una aplicación biológica, es por eso que una de las preguntas abiertas es buscar si ¿existe alguna aplicación biológica para este nuevo sistema? y si existe ¿que significan los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 ?

- Otra de las preguntas abiertas es realizar el análisis de estabilidad local para los infinitos puntos que se presentan en la ecuación (3.5).

Bibliografía

- [1] Barreira, L. Valls, C. *Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory*. Vol. 137. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2012. 248 p.
- [2] Edelstein, L. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics. 586 p.
- [3] Falconi, M. *Una introducción a los modelos de competencia*. Recuperado el 15 de agosto de 2013 de http://www.fenomec.unam.mx/claralibro_2Edicion_20jun11_14.pdf.
- [4] Hirsch, M. Smale, S. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal*. Alianza Universidad. Madrid, 1983. 496 p.
- [5] Mendoza, J. C.(2012) *Sistemas tridimensionales Lotka-Volterra de competencia: una clasificación de las familias estables*. Tesis de licenciatura en matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 10 de noviembre de 2013 de la base de datos TESIUNAM.
- [6] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York. Springer-Verlag. third ed. 2001. 555 p.
- [7] Villar, P. *Introducción a las interacciones entre especies (Competencia interespecífica)*. Recuperado el 18 de septiembre de 2013 de <http://http://www2.uah.es/pedrovillar/Docencia/Ecologia.pdf>
- [8] Zill, D. G. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson Editores. México. Sexta edición 2006. 704 p.

Índice alfabético

Análisis cualitativo

- para Q_{12} , 38
- para Q_{13} , 37
- para Q_{23} , 36
- para R_1 , 41
- para R_2 , 40
- para R_3 , 40
- para O, 35
- para P, 42

Ceroclinas

- ceroclinas del modelo, 44
 - ceroclina x_1 , 44
 - ceroclina x_2 , 45
 - ceroclina x_3 , 46
- definición de, 17

Derivada, 16

Flujo, 16

Lotka-Volterra

- modelo bidimensional, 19

Matriz jacobiana, 16

Modelo tridimensional

- punto axial R_1 , 31
- punto axial R_2 , 30

punto axial R_3 , 30

punto interior P, 31

punto origen, 28

punto planar Q_{12} , 29

punto planar Q_{13} , 28

punto planar Q_{23} , 28

Punto de equilibrio

definición de, 18

hiperbólico, 18

asintóticamente estable, 19

fuelle, 18

inestable, 19

silla, 18

sumidero, 18

no hiperbólico, 18

Punto interior, 27

Punto origen, 27

Puntos axiales, 27

Puntos planares, 27

Sistema no lineal, 18

Teorema

de existencia y unicidad, 16

de Hartman-Grobman, 17