

**INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DE PROPAGACIÓN DE
RUMORES EN REDES**

ANA CECILIA DIAZ BACCA

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2022

**INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DE PROPAGACIÓN DE
RUMORES EN REDES**

ANA CECILIA DIAZ BACCA

**Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesores

**Catalina María Rúa Álvarez
Doctora en Matemática Aplicada
Pablo Martín Rodríguez
Doctor en Estadística**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2022

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Catalina María Rúa Álvarez
Directora de Tesis

Pablo Martín Rodríguez
Co-Director de Tesis

Erika Alejandra Rada Mora
Jurado

Mario Andrés Estrada López
Jurado

San Juan de Pasto, Febrero 4 de 2022

*Este trabajo está dedicado a:
Mis Padres Ana Luisa Bacca, Alberto Diaz, a mis hermanos y a mi hijo como
reconocimiento por todo su amor y apoyo.
Ana*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios por permitirme llegar hasta acá, dejarme vivir experiencias que me han hecho crecer personal, intelectual y espiritualmente y mostrarme su gran amor y bendición al rodearme en todo momento de personas maravillosas que me han enseñado grandes cosas y que han confiado en mí y me han dado fuerzas para siempre continuar.

Agradezco a mi familia por su amor y apoyo incondicional, son ustedes mi más grande tesoro. A mis Padres por enseñarme entereza y empuje, admiro mucho su fortaleza para continuar aún en medio de las dificultades y enseñarme que se debe trabajar por lo que uno quiere. A mis tres hermanos, en especial a Dayana por ser esa compañera de vida, en la que siempre puedo confiar y con quien comparto proyectos y sueños.

A mi hijo, Emanuel. Por ser la mayor motivación para luchar por mis sueños y metas. Le has quitado varias horas de sueño a este trabajo pero a cambio me haces la vida mejor con tu amor. Haces que el esfuerzo valga la pena.

Me gustaría agradecer también a mis asesores, Dra. Catalina Rúa y Dr. Pablo Martín Rodríguez, dos personas de las que he aprendido muchísimo antes y durante el desarrollo de este trabajo, y de las cuales solo he recibido muestras de apoyo y amistad. Su calidad humana sumada a sus impecables razonamientos y recomendaciones han hecho que esta sea una experiencia muy enriquecedora.

Finalmente quiero agradecer a todas las personas que he conocido en el transcurso de estos años, me han permitido compartir momentos significativos y ofrecerme su amor, cariño, comprensión y motivación. Han influido a que este proceso sea mucho más agradable.

Resumen

Los procesos de propagación tienen lugar en muchos aspectos de la vida. Un ejemplo en el que aparecen estos procesos, es en el estudio de la propagación de una enfermedad infecciosa que podría modelarse matemáticamente con el modelo epidémico Susceptible-Infectado-Recuperado (modelo SIR). Otro ejemplo, que guarda cierta similitud con el anterior, es la difusión de una información en una población que podría investigarse mediante el modelo Maki-Thompson. Se trata de modelos compartimentados, para los que se considera una población subdividida en diferentes clases de individuos. Estas clases se denominan susceptibles, infectados y recuperados, para el modelo SIR; e ignorantes, informantes y neutros para el modelo del rumor. Ambos modelos pueden ser vistos como un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que pueden ser resueltas numéricamente y nos permiten entender la evolución de las clases a lo largo del tiempo.

En este trabajo se considera el enfoque en el que estos dos modelos se pueden estudiar como casos particulares de un modelo de rumor general, del cual se exploran dos versiones: la versión determinista y la versión estocástica. Para la versión determinista buscamos identificar la proporción final de ignorantes. Mientras que para la versión estocástica en lugar de analizar rigurosamente el comportamiento del proceso estocástico, realizamos simulaciones computacionales.

En primer lugar, discutimos el caso en el que la población está homogéneamente mezclada; es decir, está representada por el grafo completo. Luego ampliamos nuestra discusión para poblaciones homogéneas representadas por grafos k -regulares mediante la generalización de ecuaciones planteadas en la literatura y aplicando argumentos de campo-medio que permiten hacer conexión entre el modelo determinístico y estocástico.

Abstract

Spreading processes occur in many aspects of life. One example where these processes appear is in the study of the spread of an infectious disease that could be modeled mathematically with the Susceptible-Infected-Recovered epidemic model (SIR model). Another example, which bears some similarity to the previous one, is the spread of information in a population that could be investigated using the Maki-Thompson model. These are compartmental models, for which a population is considered subdivided into different classes of individuals. These classes are called susceptible, infected and recovered, for the SIR model; and ignorant, informant and neutral for the rumor model. Both models can be viewed as a system of three nonlinear ordinary differential equations that can be solved numerically and allow us to understand the evolution of the classes over time.

In this paper we consider the approach in which these two models can be studied as particular cases of a general rumor model, of which two versions are explored: the deterministic version and the stochastic version. For the deterministic version we seek to identify the final proportion of ignoramuses. While for the stochastic version, instead of rigorously analyzing the behavior of the stochastic process, we perform computational simulations.

First, we discuss the case in which the population is homogeneously mixed; that is, it is represented by the complete graph. We then extend our discussion for homogeneous populations represented by k -regular graphs by generalizing equations raised in the literature and applying mean-field arguments that allow us to make connection between the deterministic and stochastic model.

Índice general

Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	IX
Introducción	X
1. Modelo de rumor general en población homogénea	1
1.1. Versión determinística del modelo	1
1.2. Versión estocástica del modelo	8
2. Modelo de rumor general en poblaciones homogéneas representadas por grafos k-regulares	17
2.1. Análisis determinístico	17
2.2. Conexión modelo determinístico y modelo estocástico	20
2.3. Análisis estocástico del modelo	25
Conclusiones y trabajo futuro	32
Referencias	34

Índice de figuras

1.	Dinámica del modelo SIR.	XI
1.1.	Representación de la propagación de una epidemia en el modelo SIR.	2
1.2.	Gráficas obtenidas al aumentar el valor de λ	3
1.3.	Gráficas obtenidas al disminuir el valor de λ	3
1.4.	Gráficas obtenidas al aumentar el valor de δ	4
1.5.	Representación de la propagación de un rumor.	4
1.6.	Gráficas obtenidas al aumentar la proporción inicial de esparcidos.	5
1.7.	Gráficas obtenidas al aumentar la población.	5
1.8.	Representación del modelo de Maki-Thompson estocástico.	12
1.9.	Relación del tiempo de finalización y población en modelo Maki-Thompson.	13
1.10.	Comparación entre el valor teórico y simulado del tiempo de finalización del proceso.	13
1.11.	Diferencia entre el valor simulado el valor teórico.	14
1.12.	Representación modelo SIR estocástico.	14
1.13.	Representación modelo SIR estocástico adaptando parámetros.	15
1.14.	Representación modelo SIR estocástico sin el valor k	16
1.15.	Relación del tiempo de finalización y el tamaño de la población en modelo SIR.	16
2.1.	De izquierda a derecha se tiene $r = 1$, $r = 3$ y $r = 5$	26
2.2.	Relación entre r y la proporción final de ignorantes.	29
2.3.	Relación entre r y el tiempo de finalización en el proceso.	30
2.4.	Relación entre r y la proporción final de ignorantes en los primeros valores de r	31
2.5.	Relación entre r y el tiempo de finalización en el proceso en los primeros valores de r	31

Índice de tablas

1.1. Transiciones en grafo completo de 5 nodos.	10
1.2. Valor analítico, $x_\infty = 0.203187$	11
2.1. Gráficas obtenidas con distintos valores de k	28
2.2. Resultados de simulaciones en distintos valores de k	29

Introducción

La propagación de enfermedades y la difusión de información son procesos que se encuentran relacionados fuertemente y que han sido desde hace mucho tiempo objetos de un arduo estudio [9]. Como resultado, hoy en día se puede describir y comprender muchos de los mecanismos que están detrás de la propagación de patógenos entre humanos y otras especies. Estos dos procesos son similares en muchos aspectos. De hecho, el mecanismo de difusión es el mismo en los modelos clásicos: con una tasa dada, una enfermedad (rumor) se transmite a cualquiera de los vecinos de un individuo infectado (informante). Por el contrario, los mecanismos de remoción son muy diferentes en cada proceso. En el contagio de enfermedades, los esparcidos se remueven porque se recuperan de la infección a una tasa determinada. Esto es independiente de los estados dinámicos de sus vecinos y de cualquier interacción. En el caso de los rumores, estos decaen como resultado de las interacciones entre los informantes y otros individuos que ya conocen el rumor, sin importar si realmente lo están propagando (informantes) o si ya se han detenido (neutros).

La similitud entre estos mecanismos de propagación de rumores y enfermedades fue señalada a principios de los años 60 por varios autores, pero fue cuestionada por Daley y Kendall en [8]. Ellos propusieron un modelo matemático sencillo para la transmisión de rumores que aparecía como una alternativa al conocido modelo epidémico SIR. Tal modelo originó el modelo de rumor Maki-Thompson, ver [19].

Dentro de este apartado se mencionarán aspectos generales acerca de los modelos SIR y Maki-Thompson, que servirán de apoyo para comprender más adelante el estudio realizado al modelo de rumor general.

Modelo SIR

El modelo SIR fue propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 [17]; es el más básico que explica la evolución de una enfermedad infecciosa creada por un virus o una bacteria, como por ejemplo la gripe Abiar o el Ébola, en las cuales después de su padecimiento se adquiere inmunidad de por vida.

El modelo consiste en un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que no posee una solución explícita, pero que está pensado para el uso herramientas matemáticas que permitan la postulación de mecanismos que expliquen de una manera precisa el comportamiento de un fenómeno. El modelo se divide en tres clases: los individuos susceptibles $S(t)$, es decir aquellos que pueden contagiarse; los infecciosos $I(t)$, los que al estar enfermos pueden transmitir la enfermedad;

los removidos o recuperados $R(t)$, aquellos que después de enfermarse y aliviarse quedan en un estado de inmunidad o fallecieron.

El modelo SIR se basa además en las siguientes hipótesis vistas en [13]:

- La población se mantiene constante, es decir, no se tienen en cuenta los nacimientos y muertes que se producen a lo largo del desarrollo de la enfermedad, pues el tiempo de duración de una epidemia es corto. Si denotamos por N a la población total de individuos tenemos que la suma del número de individuos de cada uno de los 3 grupos es igual al total de la población:

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.
- En cuanto un individuo es infectado pasa a estar en el grupo de los infectados.
- Los individuos del grupo $I(t)$ se acaban recuperando de la enfermedad y adquieren la inmunidad o mueren (pasando en ambos casos al grupo $R(t)$).
- La tasa de infección, que determina el número de individuos por unidad de tiempo que se transfieren del compartimento de susceptibles al de infectados, es proporcional al producto $S(t) \cdot I(t)$

Se puede representar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe el modelo SIR mediante los compartimentos S , I , R y los flujos de entrada y salida como se muestra en la Figura 1.



Figura 1: Dinámica del modelo SIR.

En base al planteamiento del modelo propuesto en [11], se tiene que $S(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

donde $\beta > 0$ es el parámetro de infección. El número de individuos infectados aumenta simultáneamente en la misma razón como el número de susceptibles disminuye, y disminuye a una tasa $\gamma > 0$ de recuperación, a través de los que se remueven o recuperan (por muerte o inmunidad), así que

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t).$$

Finalmente el número de individuos removidos aumenta en exactamente la misma razón como la pérdida de individuos infectados, de manera que

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t).$$

Como el tamaño de la población total permanece fijo en N , entonces

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0.$$

De todo lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t), & S(0) = S_0, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), & I(0) = I_0, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t), & R(0) = R_0, \end{cases}$$

donde S_0 , I_0 y R_0 son números positivos que representan las condiciones iniciales del sistema.

Para un análisis de este modelo se puede consultar, por ejemplo, [5, 21].

Modelo Maki-Thompson

El modelo de Maki-Thompson tomado de [19], describe la difusión de un rumor en una población cerrada homogéneamente mezclada, la cual se encuentra subdividida en las tres clases de individuos: ignorantes (los que no conocen el rumor), informantes o difusores (que lo difunden) y neutros (que conocen el rumor pero han dejado de comunicarlo tras conocer a alguien que ya lo ha escuchado). Sin embargo, se supone que el rumor se esparce mediante contactos dirigidos de los difusores con otros individuos. Para $t \geq 0$, el número de ignorantes, difusores y neutros en el momento t se denomina $X^N(t)$, $Y^N(t)$ y $Z^N(t)$, respectivamente. Inicialmente se tiene $X^N(0) = N - 1$, $Y^N(0) = 1$, $Z^N(0) = 0$, además $X^N(t) + Y^N(t) + Z^N(t) = N$ para todo t . El modelo de Maki-Thompson es la cadena de Markov de tiempo continuo $\{(X^N(t), Y^N(t))\}_{t \in [0, \infty)}$ que evoluciona según las siguientes transiciones y tasas:

Transición	Razón
$(-1, 1)$	XY ,
$(0, -1)$	$Y(N - 1 - X)$.

Esto describe la situación en la que los individuos interactúan mediante contactos iniciados por los informantes: las dos transiciones posibles corresponden a informante-ignorante, e informante-informante o neutro. En el primer caso, el informante cuenta el rumor al el ignorante, que se convierte en informante. La otra transición representa la transformación de un informante en un neutro después de iniciar un encuentro con un no ignorante. Es decir, el último evento describe la pérdida de interés en propagar el rumor que procede de enterarse de que ya es conocido por el otro individuo en la reunión. Para una referencia de cadenas de Markov a tiempo continuo ver [23, Cap. 6]

La versión determinista para el modelo Maki-Thompson en [22], está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(t)y(t), & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = [2x(t) - 1]y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

La solución de ρ representa una aproximación de una versión escalada de las trayectorias completas del modelo Maki-Thompson, para N lo suficientemente grande.

En los modelos estocásticos de rumores en poblaciones finitas, un aspecto de fundamental interés es obtener información sobre la proporción restante de personas que nunca oyen el rumor. Los primeros resultados rigurosos en esta dirección son teoremas límite para la proporción restante de ignorantes cuando el proceso termina, considerando que el tamaño de la población crece hasta ∞ . Se ha demostrado, que dicha proporción final de ignorantes es igual a aproximadamente el 20 % de la población [24, 25]. Para resultados recientes de la teoría de modelos estocásticos de rumores en poblaciones homogéneamente mezcladas, se puede ver en [14, 15], y las referencias que allí se dan. Para el modelo Maki-Thompson, suponiendo que la población no es necesariamente homogénea ni totalmente mezclada, pueden encontrarse resultados en [12, 14].

Un campo mediante el cual se puede estudiar procesos de propagación es la Teoría de grafos, que proporciona un marco teórico útil para modelar las interacciones entre los individuos, y así plantear un escenario más realista de la dispersión de un agente infeccioso en una población pequeña. Véase [1] y [6]. En este enfoque se modela la población como una estructura espacial donde los miembros de la misma son nodos de una red, y las aristas de la red representan interacciones entre los individuos que potencialmente pueden llevar a la transmisión de la enfermedad o de algún tipo de información. Para un mayor entendimiento sobre conceptos acerca de la teoría de grafos, ver [2, 4].

Los modelos matemáticos nos permiten describir de manera simplificada la dinámica/estructura del fenómeno que nos interesa. Si bien la inclusión de grafos no suele ser tan simple, su fundamentación teórica favorece su validez; además los avances en la ciencia y la tecnología han proporcionado el desarrollo de herramientas poderosas para cuantificar y representar redes complejas que han hecho posible observar un crecimiento notable de trabajos que explotan el potencial de las redes complejas en el estudio de la transmisión de información.

De este modo, este trabajo de grado permite profundizar en temas de importancia para nuestra sociedad a través de una introducción a la modelación matemática de epidemiología y el esparcimiento de rumores, abriendo un nuevo camino para continuar futuras investigaciones en la licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Por tal motivo se propuso para la realización de esta investigación los siguientes objetivos:

- **Objetivo general:** Analizar la modelación de la propagación de los rumores en algunas familias de grafos usando técnicas de modelos epidémicos.
- **Objetivos específicos:**
 1. Estudiar los conceptos básicos de la teoría de probabilidad para la obtención de ecuaciones en redes heterogéneas que modelen dinámicas epidemiológicas y de esparcimiento de rumores.
 2. Aproximar sistemas de ecuaciones diferencias en redes a partir de simulaciones numéricas.

En este trabajo se realizó una introducción a procesos de propagación con dos ejemplos particulares como son la propagación de epidemias y la difusión de rumores que pueden estudiarse mediante el

modelo SIR y el modelo Maki-Thompson, respectivamente. En el Capítulo 1 se plantea un modelo de rumor general en poblaciones homogéneas, del cual se pueden estudiar como casos particulares los modelos anteriormente nombrados. Inicialmente se estudia la versión determinística y se hace una pequeña discusión acerca de la proporción restante de ignorantes y luego se estudia la versión estocástica mediante simulaciones computacionales representando la población por un grafo completo. Adicionalmente, en el Capítulo 2 se presentan resultados obtenidos sobre el modelo general en grafos k -regulares. Se hace un análisis determinístico del modelo en cuanto a la proporción restante de ignorantes, a continuación se estudia la conexión entre el modelo determinístico y estocástico. Por último se hace un análisis estocástico mediante simulaciones computacionales realizadas en grafos k -regulares. Finalmente se incluyen conclusiones y trabajos futuros.

Capítulo 1

Modelo de rumor general en población homogénea

En este capítulo se plantea el enfoque en el que el modelo epidemiológico SIR y el modelo de rumor Maki-Thompson, pueden ser estudiados como casos particulares de un modelo de rumor general. En la Sección 1.1 se estudia la versión determinística del modelo, se realizan ejemplos para cada modelo de dispersión haciendo observaciones en cada caso y se hace una pequeña discusión con respecto a la proporción final de ignorantes y susceptibles de los dos modelos para luego calcular la proporción final de ignorantes en el modelo general. En la Sección 1.2 se estudia la versión estocástica del modelo a través de simulaciones computacionales representando la población homogénea por un grafo completo.

1.1. Versión determinística del modelo

El modelo general de rumor estudiado en este trabajo, consta de tres variables: x , y y z las cuales representarán las proporciones de las categorías de ignorantes, informantes y neutros, respectivamente. La dinámica del modelo se da así: Inicialmente toda la población se encuentra en estado ignorante dado que el rumor es nuevo. Un individuo que no ha conocido el rumor, se entera por el contacto con un informante, después de lo cual pasa a la clase informante con una tasa de propagación λ y luego pasa a la tercera clase de dos formas: la primera es por el paso del tiempo, y con una tasa δ pasará a la clase de neutros. La segunda, se dará por la interacción con otros individuos en estado informantes o en estado neutro con una tasa de interacción α .

Formalmente, el modelo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x(t)y(t) - \delta y(t) - \alpha y(t)(1-x(t)), \\ \frac{dz}{dt} = \delta y(t) + \alpha y(t)(1-x(t)). \end{cases} \quad (1.1)$$

Cuyas condiciones iniciales son dadas por $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ con $x_0, y_0, z_0 \in [0, 1]$ de forma que $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. De hecho, como se considera que la población es cerrada se asume que $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ para todo $t \geq 0$. Además, para que este modelo tenga sentido, se tomará siempre $\lambda > 0$, y por lo menos uno de los parámetros δ o α mayor que cero. Note que si $\alpha = 0$ se tiene el modelo SIR, pero si $\delta = 0$ se tiene el modelo de rumor Maki-Thompson. En el caso del modelo SIR se obtiene la equivalencia natural de susceptible por ignorante, infectado por informante y recuperado por neutro.

Considere el modelo SIR, para el cual $\alpha = 0$, y considere $x_0 = 0.99$, $y_0 = 0.01$ y $z_0 = 0$. En este trabajo la aproximación numérica del sistema de ecuaciones diferenciales se obtuvo usando Python.

En la Figura 1.1, usando $\lambda = 0.8$ y $\delta = 0.2$, se puede observar que la infección llegó a toda población, y el punto máximo de la infección se dio alrededor de $t = 10$, en donde el 40% de la población estuvo infectada al mismo tiempo. También notamos que la epidemia tuvo un periodo de duración de $t = 30$, puesto que en ese punto las variables ya se ven estacionadas y la población se encuentra en estado recuperado.

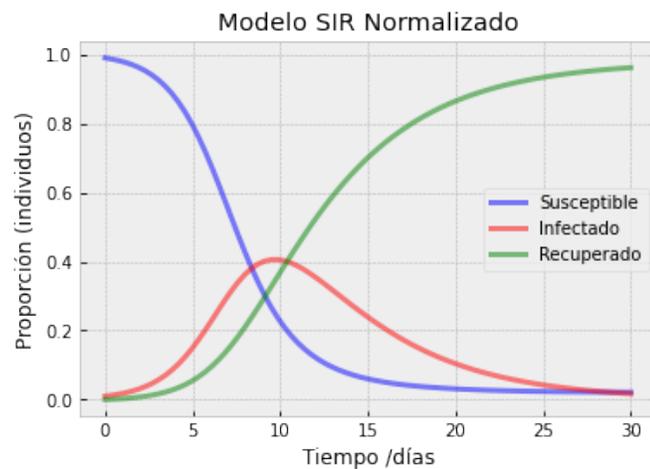


Figura 1.1: Representación de la propagación de una epidemia en el modelo SIR.

Cambiando los valores de λ por $\lambda = 1$ y $\lambda = 1.5$, y dejando $\delta = 0.2$ se tiene los resultados en la Figura 1.2. De esta figura se puede observar que a medida que el valor de λ crece, también la propagación de la enfermedad aumenta alcanzando el punto máximo de infección más rápido. Con $\lambda = 1$ el punto máximo se alcanzó alrededor de $t = 7$ con cerca del 50% de la población infectada. Mientras que con $\lambda = 1.5$ el punto máximo de infección se dio en $t = 5$ con el 60% de la población infectada, además en este caso el tiempo que duró la epidemia fue menor dado que desde $t = 25$, las variables ya se habían estacionado.

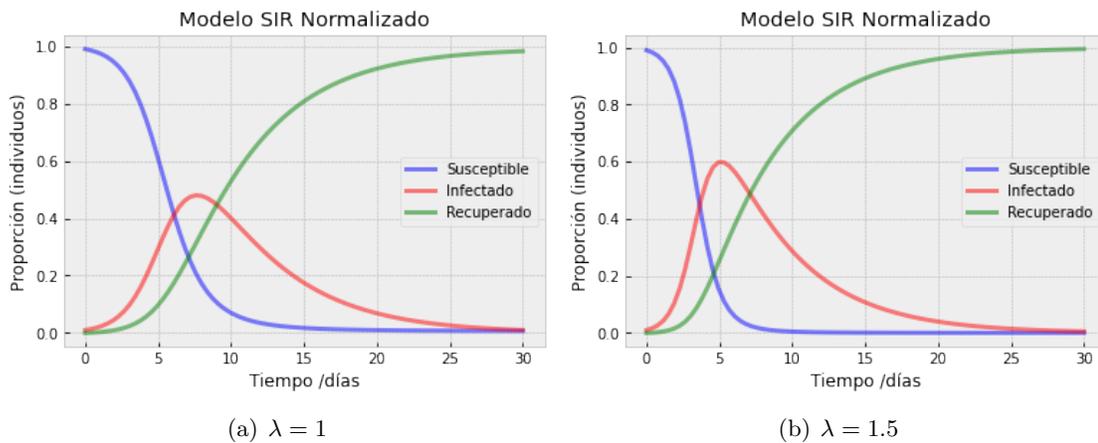


Figura 1.2: Gráficas obtenidas al aumentar el valor de λ .

Dando valores menores al λ inicial: $\lambda = 0.6$ y $\lambda = 0.4$, manteniendo $\delta = 0.2$ se tiene la Figura 1.3 y se observa que a diferencia de lo obtenido en la anterior figura, si el valor de λ disminuye entonces la propagación también no es alta al igual que el punto máximo de infección, además toma más tiempo antes de que las variables se estacionen en comparación a ejemplos anteriores, y finalmente se observa que no toda la población se llegó a infectar.

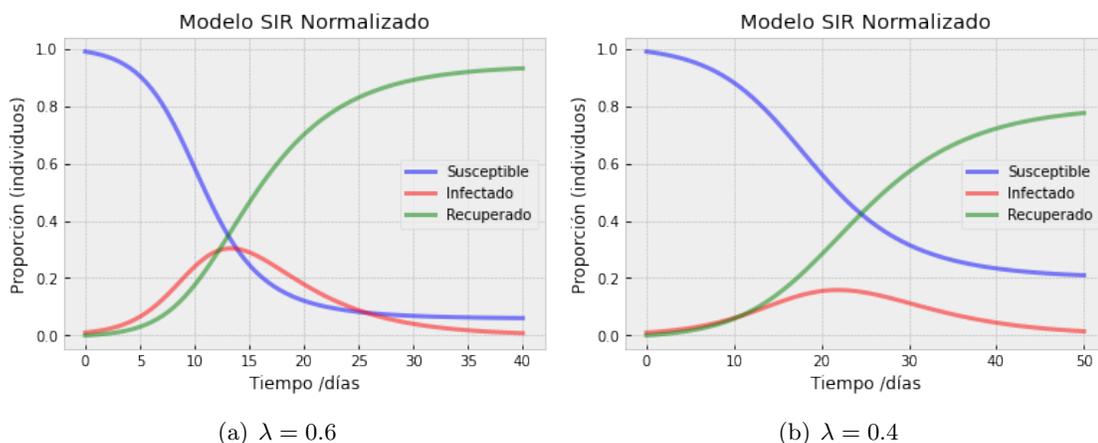


Figura 1.3: Gráficas obtenidas al disminuir el valor de λ .

Ahora, dando valores mayores al δ inicial como $\delta = 0.5$ y $\delta = 0.8$, manteniendo las condiciones iniciales y tomando los parámetros $\alpha = 0$, $\lambda = 1$ se tiene la Figura 1.4. De la que se observa que al aumentar el valor de δ , afecta directamente el paso al estado recuperado de la población, lo que influye en que la propagación de la infección disminuya notoriamente y las variables se estacionan mucho más rápido. Por ejemplo, cuando $\delta = 0.8$, valor muy cercano a λ , casi no hubo propagación, infectándose menos de la mitad de la población.

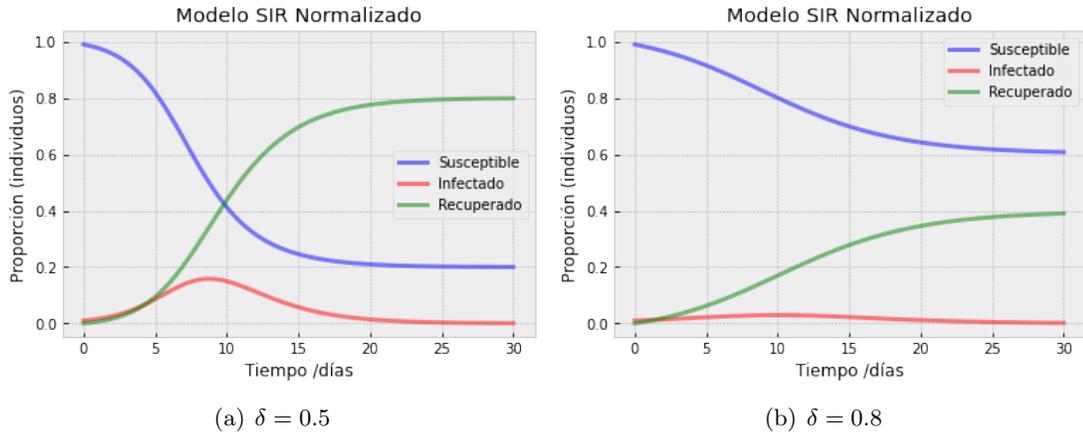


Figura 1.4: Gráficas obtenidas al aumentar el valor de δ .

El modelo básico de Maki-Thompson solo tiene los siguientes parámetros $\alpha = \lambda = 1$ y $\delta = 0$, para estos ejemplos se cambiarán las condiciones iniciales. Tomando las condiciones iniciales del modelo anterior, $x_0 = 0.99$, $y_0 = 0.01$ y $z_0 = 0$, se tiene la Figura 1.5.

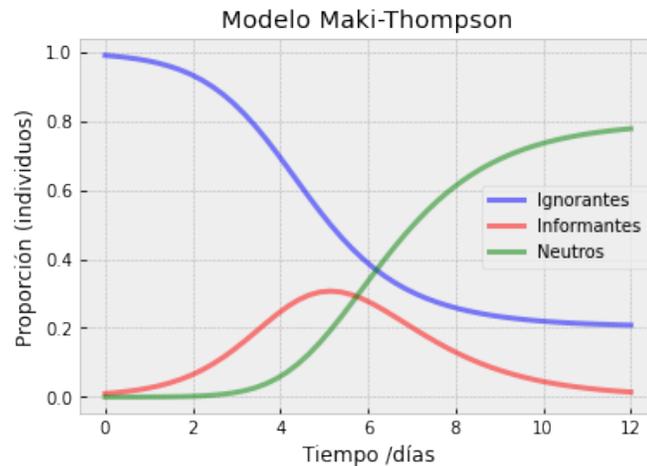


Figura 1.5: Representación de la propagación de un rumor.

En la Figura 1.5 se observa que en este modelo el proceso de dispersión transcurre rápidamente dado que en $t = 10$ las variables ya se estacionan. También el máximo de personas en estado informante se da alrededor de $t = 3$ con el 30% de la población en este estado, y una vez estacionadas las

variables se observa que el 20 % de la población nunca conoció el rumor permaneciendo en estado ignorante.

Asignando valores diferentes a la proporción inicial de informantes $y_0 = 0.05$ y $y_0 = 0.2$, manteniendo en ambos casos $z_0 = 0$, se tiene la Figura 1.6. Se puede observar que si la proporción inicial de informantes es más grande, entonces la propagación se produce más pronto, pero al igual que el ejemplo anterior, no toda la población se enteró del rumor, quedando una proporción de personas ignorantes al final del proceso que nuevamente se encuentra alrededor del 20 %.

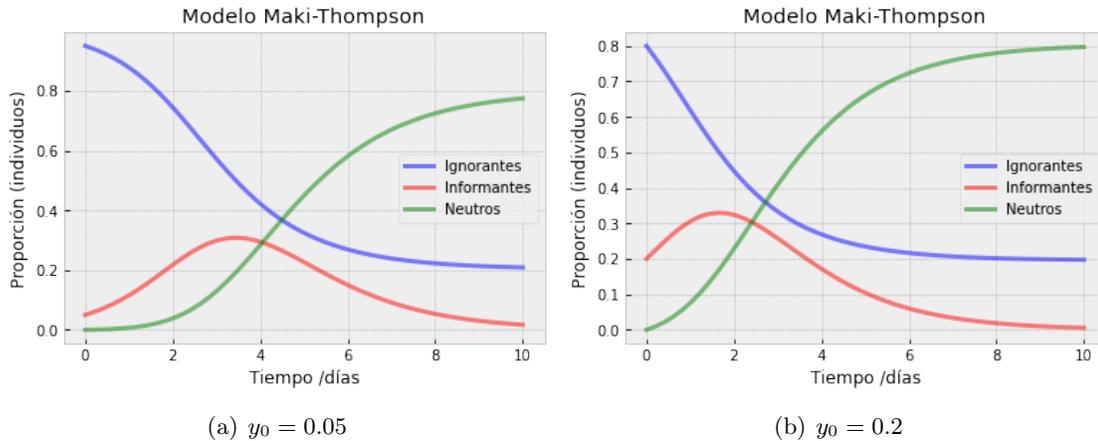


Figura 1.6: Gráficas obtenidas al aumentar la proporción inicial de esparcidos.

Por otro lado, si se tiene $y_0 = 0.01$, y este se actualiza para diferentes valores en la población, se obtiene la Figura 1.7. Se puede observar que aunque varíen las proporciones iniciales, el comportamiento de las curvas se mantiene. La propagación del rumor transcurre en $t = 12$ y el máximo de espaciadores se da alrededor de $t = 5$ con 30 % de la población y nuevamente se puede observar que al final del proceso en ambos casos, el 20 % de la población quedó en estado ignorante.

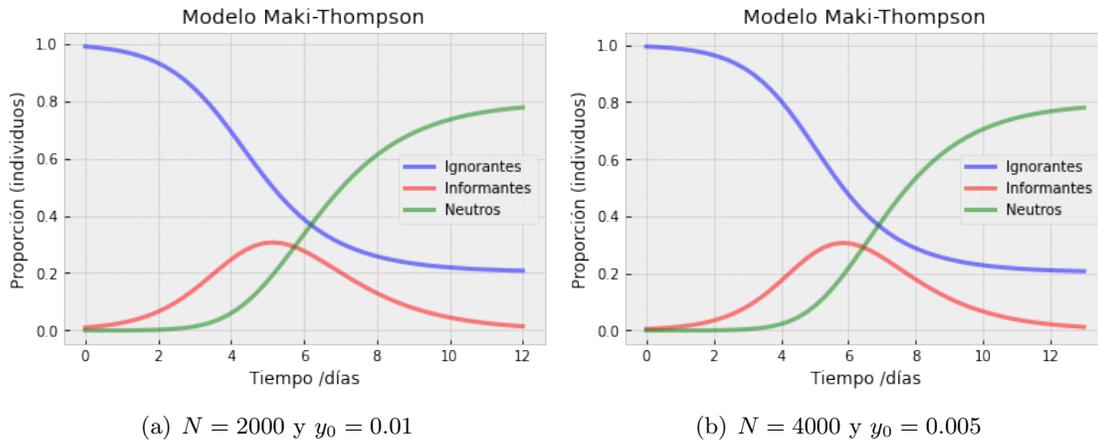


Figura 1.7: Gráficas obtenidas al aumentar la población.

De los ejemplos anteriores, se puede concluir que hay características importantes que resaltan en cada modelo. Por ejemplo, en el modelo SIR, la influencia de los parámetros λ y δ en la propagación de una infección. El primero tiene influencia directamente proporcional a la propagación, es decir, la infección se difundirá mucho más pronto y alcanzará niveles más altos cuando λ tome valores mayores. Por otro lado, el segundo parámetro δ influye de forma inversa, o sea, la propagación se dará de forma más lenta y en menor escala a medida que δ tome valores cada vez más cercanos a λ . Cabe resaltar que para que haya una infección, λ debe ser mayor que δ .

En el modelo Maki-Thompson, se puede destacar que en los diferentes ejemplos siempre se observó un comportamiento similar en la propagación del rumor, en la cual resulta una proporción final de ignorantes cuando acabe el proceso, correspondiente al 20 %.

De lo anterior, se encuentra motivación para buscar la proporción final de ignorantes en el modelo de rumor general para lo cual se sigue el trabajo de [3], en el que se hace uso de la función W de Lambert. Esta función no es nada más que la función inversa de $g(w) : w \rightarrow we^w$, para la cual se pueden observar muchas aplicaciones tanto en matemáticas puras como aplicadas, algunos ejemplos de esto se pueden ver en [7].

Considerando las dos primeras ecuaciones del Sistema (1.1) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\lambda x(t)y(t) - \delta y(t) - \alpha y(t)(1 - x(t))}{-\lambda x(t)y(t)} \\ &= \frac{y(t)(\lambda x(t) - \delta - \alpha(1 - x(t)))}{-\lambda x(t)y(t)} \\ &= \frac{\lambda x(t) - \delta - \alpha(1 - x(t))}{-\lambda x(t)} \\ &= \frac{-\lambda x(t) + \delta + \alpha(1 - x(t))}{\lambda x(t)}. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= - \int \frac{\lambda x(t)}{\lambda x(t)} dx(t) + \int \frac{\delta}{\lambda x(t)} dx(t) + \int \frac{\alpha}{\lambda x(t)} dx(t) - \int \frac{\alpha x(t)}{\lambda x(t)} dx(t) \\ &= -x(t) + \frac{\delta}{\lambda} \ln(x(t)) + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(x(t)) - \frac{\alpha x(t)}{\lambda} + c \\ &= -x(t) + \ln(x(t)) \left(\frac{\delta + \alpha}{\lambda} \right) - \frac{\alpha x(t)}{\lambda} + c. \end{aligned}$$

Con la anterior expresión y considerando nuestra condición inicial $x(0) = 1$ y $y(0) = z(0) = 0$ se concluye que

$$0 = -1 + \ln(1) \left(\frac{\delta + \alpha}{\lambda} \right) - \frac{\alpha}{\lambda} + c,$$

de donde $c = 1 + (\alpha/\lambda)$. Luego

$$y(t) = -x(t) + \ln(x(t)) \left(\frac{\delta + \alpha}{\lambda} \right) - \frac{\alpha x(t)}{\lambda} + 1 + \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Sea x_∞ la proporción de ignorantes es decir $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Ya que la proporción final de de informantes $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, se tiene

$$0 = \ln(x_\infty) \left(\frac{\delta + \alpha}{\lambda} \right) - \frac{\alpha x_\infty}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} + 1 - x_\infty.$$

Luego

$$\ln(x_\infty) = \frac{\alpha x_\infty - \alpha - \lambda + \lambda x_\infty}{\delta + \alpha},$$

de donde se consigue

$$x_\infty = e^{\frac{x_\infty(\alpha+\lambda)}{\delta+\alpha}} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}},$$

que podemos reescribir como

$$-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} x_\infty \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha} x_\infty} = -\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}}.$$

Ahora, sea $w := -(\alpha + \lambda)/(\delta + \alpha)x_\infty$, entonces

$$we^w = -\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}}.$$

Aplicando la función de Lambert se obtiene

$$W(we^w) = W\left(-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}}\right),$$

es decir

$$w = W\left(-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}}\right).$$

Luego, como

$$-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} x_\infty = W\left(-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha+\lambda}{\delta+\alpha}}\right)$$

se concluye que la proporción final de ignorantes, es dada por

$$x_\infty = - \left(\frac{\delta + \alpha}{\alpha + \lambda} \right) W \left(- \frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha + \lambda}{\delta + \alpha}} \right).$$

Se puede calcular la proporción final de ignorantes en el modelo Maki-Thompson con parámetros $\alpha = \lambda = 1$ y $\delta = 0$, dada por

$$x_\infty = -(1/2)W(-2e^{-2}) \approx 0.203187.$$

Con esto se puede confirmar lo que se observó en los ejemplos para el modelo Maki-Thompson, en donde la proporción final tendía siempre al 20%. Este es un resultado conocido de la literatura, ver por ejemplo [24, 25].

Note que también para el modelo SIR con las condiciones de la Figura 1.1, es decir $\alpha = 0$, $\lambda = 0.8$ y $\delta = 0.2$, se tiene

$$x_\infty = -(1/2)W(-2e^{-2}) \approx 0.019827.$$

Se puede confirmar observando la Figura 1.1 que el resultado obtenido coincide.

1.2. Versión estocástica del modelo

En esta sección se trabaja el modelo estocástico, mediante simulaciones computacionales. Para esto se representa a la población con un grafo completo, es decir, se asume que nodos representan individuos y que cada par de individuos se encuentra conectado. Con la consideración estocástica nos referimos a que los tiempos de entrada y salida de los compartimentos tienen una distribución probabilística.

A continuación se muestra el pseudocódigo que se desarrolló para estudiar las transiciones de los estados en los que se encuentran los individuos. En este caso es de suma importancia la probabilidad de informar P_I que se calcula mediante los parámetros α , δ y λ , además de N_x que es el número de nodos en estado ignorante y está dada por

$$P_I = \frac{(N_x)\lambda}{(N_x)\lambda + \delta + \alpha(N - N_x)}.$$

De ella dependerá si hay propagación o recuperación. Entre más alta sea esta probabilidad, hay mayor posibilidad de que el nodo escogido haga el proceso de informar y no de recuperar.

Pseudocódigo 1: Modelo de rumor general - Grafo completo

Entrada. Condiciones Iniciales N , y_0 , α , δ , λ y el grafo G .

1. Cantidad de informantes $N_y = N \cdot y_0$
 2. Se eligen N_y nodos de G arbitrariamente
 3. Se crean las listas de ignorantes, informantes y neutros: X , Y y Z
 4. **Mientras** $longitud(Y) > 0$ **Haga**
 5. $N_x = N - longitud(Y) - longitud(Z)$ y $U = aleatorio(0,1)$
 6. Se elige el nodo informante de Y arbitrariamente
 7. Se calcula la Probabilidad de infección $P_I = N_x \lambda / (N_x \lambda + \delta + \alpha(N - N_x))$
 8. **Si** $U < P_I$ **Entonces**
 9. Se escoge un ignorante, se adiciona a Y y se remueve de X
 10. **Sino**
 11. Se adiciona el nodo informante a Z y se remueve de Y
-

El pseudocódigo funciona principalmente así:

Se inicia con un un grafo completo G con ciertas condiciones iniciales que más adelante se necesitarán. Se calcula la cantidad inicial de esparcidos N_y que hay, que resulta del producto entre la proporción inicial de esparcidos y_0 y el total de la nodos N . Luego se escogerán aleatoriamente el valor N_y del total de nodos del grafo y se crean tres listas de los estados en los cuales se pueda encontrar cada nodo (Ignorante, Informante, Neutro).

Una vez creadas la listas se procede de la siguiente forma. Mientras haya informantes en la lista Y , se escogerá ella un nodo al azar, se le calculará la probabilidad de infección P_I y se considerará la variable aleatoria uniforme en $(0,1)$ U para comparar sus valores. Si P_I es mayor U , entonces pasará la información y habrá un nuevo informante. Esto se hará escogiendo uno de los nodos en estado ignorante de la lista X al azar y se convertirá en informante, agregándolo a la lista Y ; pero si P_I es menor que U , entonces el nodo informante escogido se convertirá en neutro removiéndolo de la lista Y para pasarlo a la lista Z . Se seguirá repitiendo este proceso hasta que ya no hayan nodos informantes.

En otras palabras, para cada nodo escogido se simula una variable aleatoria de Bernoulli con probabilidad de suceso P_I usando la variable U . La probabilidad P_I se calcula en un instante específico, es decir, para que un nodo infectado pase la información, debe ser antes de que ocurra otro tipo de contacto. Esta probabilidad se actualizará en cada iteración.

Para observar el funcionamiento del pseudocódigo se puede ver un ejemplo sencillo en la Tabla 1.1 con un grafo completo de 5 nodos que muestra las transiciones en cada tiempo t , con condiciones iniciales como siguen: $N = 5$, $y_0 = 0.4$, $\alpha = 0$, $\delta = 0.2$ y $\lambda = 0.4$.

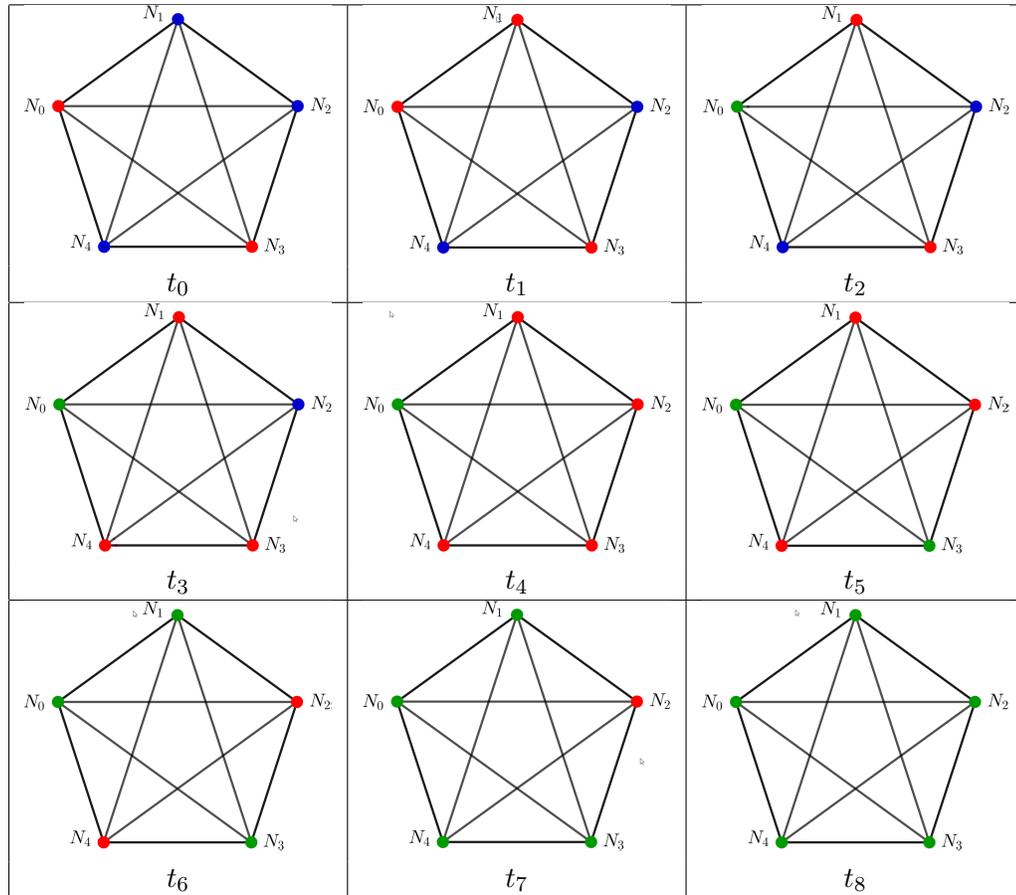


Tabla 1.1: Transiciones en grafo completo de 5 nodos.

El ejemplo de la Tabla 1.1, es un caso del modelo SIR dado que el parámetro $\alpha = 0$. La tabla muestra los estados en los que se encuentran los nodos en cada tiempo, representados de la siguiente forma: Los nodos en color azul representan el estado susceptible, los de color rojo el estado infectado y los de color verde el estado recuperado. Inicialmente se tiene 2 infectados aleatorios, los cuales corresponden a $C_s = 5 \times 0.04 = 2$. En adelante se puede observar la propagación de la infección escogiendo al azar uno de los nodos infectado y calculando su probabilidad de infección. Si es mayor a la variable uniforme entonces se infectará un nuevo nodo como sucedió en t_1 , pero si esta probabilidad es menor que variable uniforme, entonces ese nodo infectado escogido se recupera como sucedió en t_2 . Repitiendo el proceso hasta que ya no hay nodos infectados.

Se puede observar que en t_4 ya todos los nodos se han infectado, por lo que a partir de ahí las transiciones corresponden únicamente a recuperación de cada nodo.

Ahora, para hacer un contraste con el valor encontrado en la sección anterior, se realizaron 300 simulaciones en el modelo Maki-Thompson con los parámetros $\alpha = 1$, $\delta = 0$ y $\lambda = 1$ para cada uno de los diferentes valores de $N = 100, 500, 1000, 1500$ y 3000 , de las cuales se calculó la media de los resultados en cada N , obteniendo los datos que se pueden observar en la Tabla 1.2. Observe que para valores grandes de N se ve una buena aproximación entre la proporción restante de los ignorantes en el modelo simulado y el valor obtenido de la versión determinista.

N° de nodos	Proporción final de ignorantes
100	0,218066
500	0,209726
1000	0,203906
1500	0,203582
3000	0,203297

Tabla 1.2: Valor analítico, $x_\infty = 0.203187$.

Es también de carácter interesante, observar de forma gráfica el funcionamiento del algoritmo aplicado a cada uno de los modelos.

Para el caso del modelo Maki-Thompson, se tiene la Figura 1.8, de la cual se puede observar que el comportamiento que toman las curvas para diferentes valores de N , en donde se observa que entre mayor es este valor, entonces el comportamiento de las curvas de cada grupo de individuos son muy similares a las obtenidas en la versión determinística. Es decir, cuando el valor de N no es muy grande se puede observar más la aleatoriedad dado que en este caso los trazos no son tan suaves, mientras que a medida que el valor de N se va aumentando, los trazos se tornan un poco más suaves mostrando la idea de que se acercan al límite, por lo que se parecen más las curvas al modelo anteriormente visto.

Para poder realizar las gráficas de tipo estocástico se toman los datos de la cantidad de nodos pertenecientes a cada grupo en cada instante de tiempo, dando como resultado una serie de puntos que al unirnos resulta en las curvas que permiten notar el comportamiento de la propagación.

En este modelo estocástico el tiempo t representa cada unidad en la que se da una transición o cambio de estado de algún nodo ya sea que se infecta o recupera. Quedando la duración final del proceso en unidades de t .

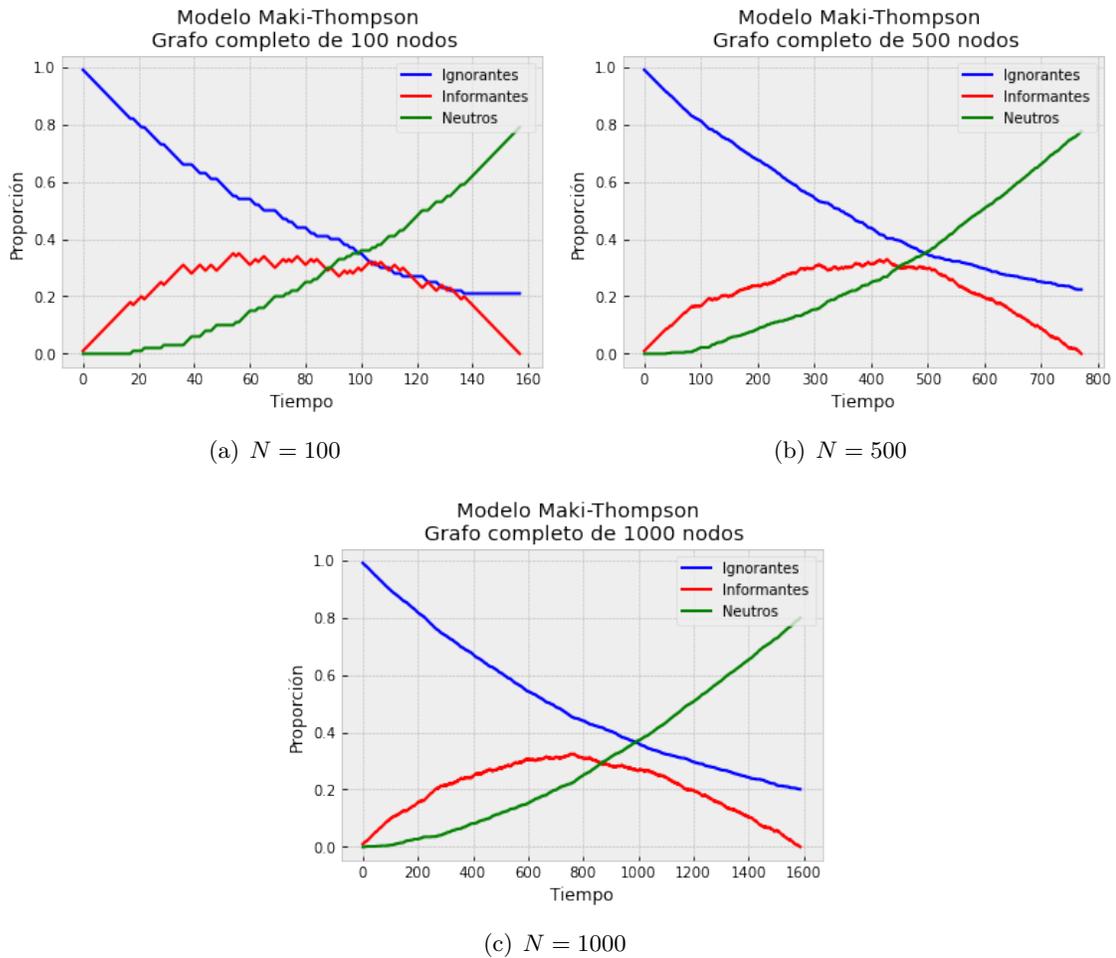


Figura 1.8: Representación del modelo de Maki-Thompson estocástico.

Con la diferencia en el tiempo t , resulta también interesante mirar la relación que tiene el tiempo de finalización de un proceso de propagación y la población.

Para este modelo se realizaron 10 simulaciones en cada valor de N , tomando la media del tiempo que tardó en finalizar el proceso en cada caso. Para los valores de N se comenzó con 1000 nodos y se continuó aumentando de 500 en 500 hasta llegar a un valor de 6000 nodos. Obteniendo los datos que se observan en la Figura 1.9, en donde se puede observar que existe una relación directamente proporcional entre el tamaño de la población y el tiempo en que tarda en realizar el proceso.

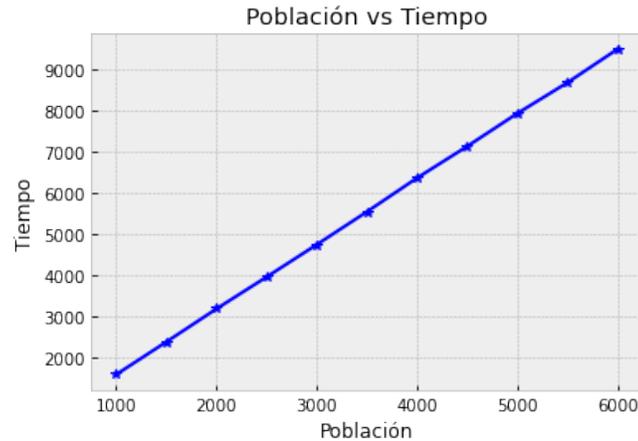


Figura 1.9: Relación del tiempo de finalización y población en modelo Maki-Thompson.

Los resultados de la Figura 1.9 pueden ser comprobados mediante uno de los resultados de [16] con respecto al número medio de transiciones que realiza el proceso. En este caso, para el modelo de Maki-Thompson está dado por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} m^{(N)} = 2(x_0 - x_\infty), \quad (1.2)$$

donde $m^{(N)}$ es el número medio de iteraciones del proceso para una población de tamaño N . Haciendo comparación de los resultados obtenidos en la simulación con los datos obtenidos al usar la ecuación (1.2) se tiene la Figura 1.10, donde se nota que los resultados son muy similares por lo que las curvas tienen el mismo comportamiento.

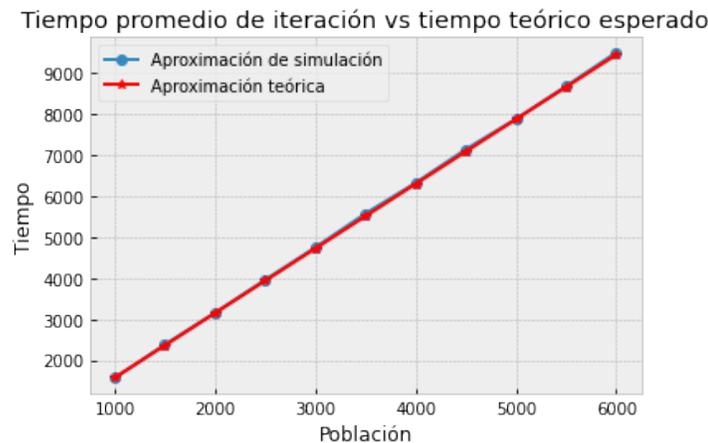


Figura 1.10: Comparación entre el valor teórico y simulado del tiempo de finalización del proceso.

Para observar más a detalle la diferencia entre el valor teórico y el simulado del tiempo de finalización del proceso se tiene la Figura 1.11 la cual muestra que existen diferencias entre ambos resultados.

La diferencia resulta positiva cuando el valor simulado es mayor al valor teórico y es negativa en caso contrario.

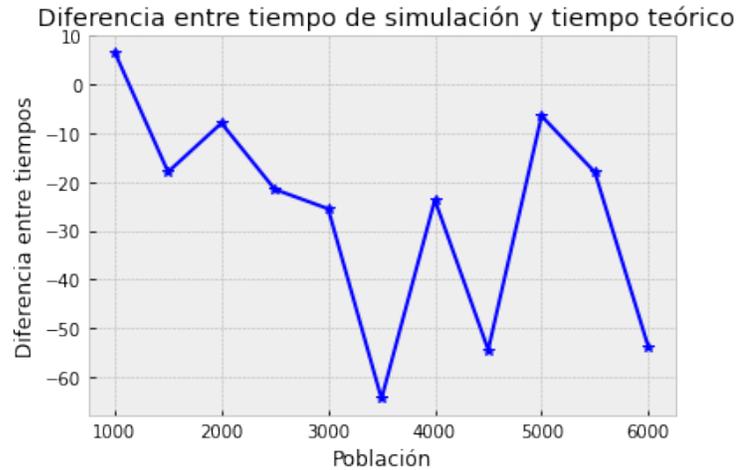


Figura 1.11: Diferencia entre el valor simulado el valor teórico.

Ahora, al correr el algoritmo en el modelo SIR con parámetros $\alpha = 0$, $\delta = 0.4$ y $\lambda = 0.8$ en un grafo de 1000 nodos se obtiene la Figura 1.12, que es el resultado de usar los parámetros usados en la versión determinística del modelo.

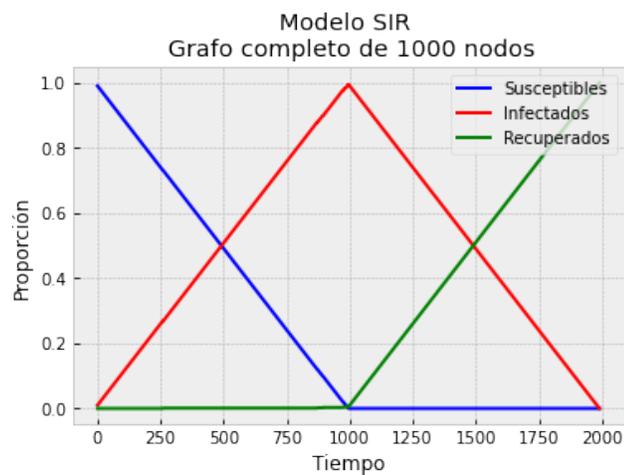


Figura 1.12: Representación modelo SIR estocástico.

En la Figura 1.12, se evidencia un comportamiento diferente al visto en la versión determinística. Esto se debe al uso de un grafo completo, pues para valores grandes de N , la probabilidad de infección es cercana a 1. De esta forma, la probabilidad de infección resultaba casi siempre más alta que la de recuperación, y eso se ve reflejado en el comportamiento de las curvas en la gráfica, en

donde inicialmente solo infecta, llegando al punto en el que todos se encuentran infectados y luego, a partir de ahí empiezan a recuperarse todos los infectados.

Para contrarrestar este efecto se optó por bajar el valor del parámetro de infección λ y aumentar el parámetro de recuperación δ . Con un grafo completo de 1000 nodos se obtuvo la Figura 1.13 en la que se observa que el comportamiento que toman las curvas es un poco más cercano a las mostradas en la sección 1.1. Sin embargo, no representa una solución dado que los parámetros se han escogido convenientemente para obtener un comportamiento similar al mostrado en la sección anterior.

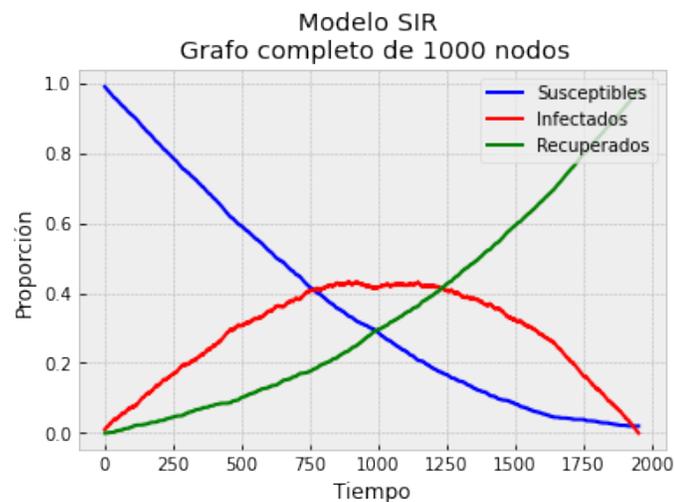


Figura 1.13: Representación modelo SIR estocástico adaptando parámetros.

Tratando de dar una solución alternativa, se eliminó en el código el valor N_x de la fórmula usada para la probabilidad de infección, dado que este valor representa la cantidad de susceptibles que hay por infectar, afectando directamente la probabilidad y haciendo que esta aumente. Con esta modificación, usando los parámetros inicialmente tomados para este modelo en esta sección ($\alpha = 0$, $\delta = 0.4$ y $\lambda = 0.8$) se obtuvo la Figura 1.14, para la cual se puede observar que el comportamiento en las curvas cambia y de inicio ya no solo hay infección; sin embargo, aún sigue resultando mayor la propagación que en la versión determinística y hay un punto en donde ya solo hay recuperaciones debido a que ya se ha infectado toda la población.

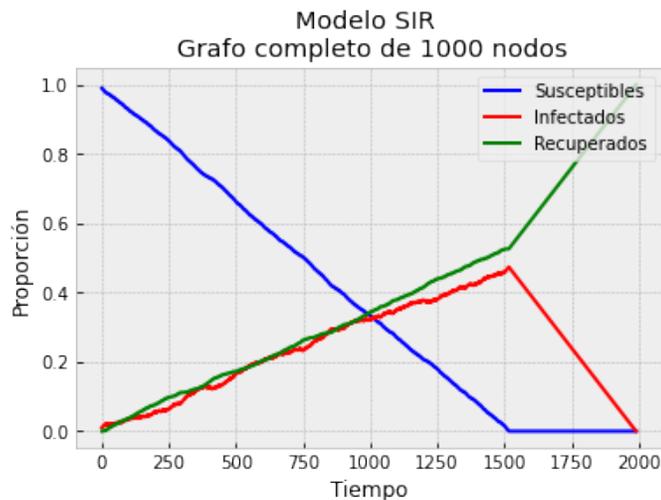


Figura 1.14: Representación modelo SIR estocástico sin el valor k .

Finalmente, al igual que en el modelo anterior es interesante ver la relación entre el tiempo empleado en la finalización de un proceso y el tamaño de la población. Nuevamente se tomó el tiempo de finalización para poblaciones con $N = 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000, 5500$ y 6000 , obteniendo la Figura 1.15. Al igual que en la Figura 1.9, se observa que hay un comportamiento directamente proporcional entre el tamaño de la población y el tiempo de finalización del proceso, pero en este caso se observa que el proceso dura más que el modelo anterior.

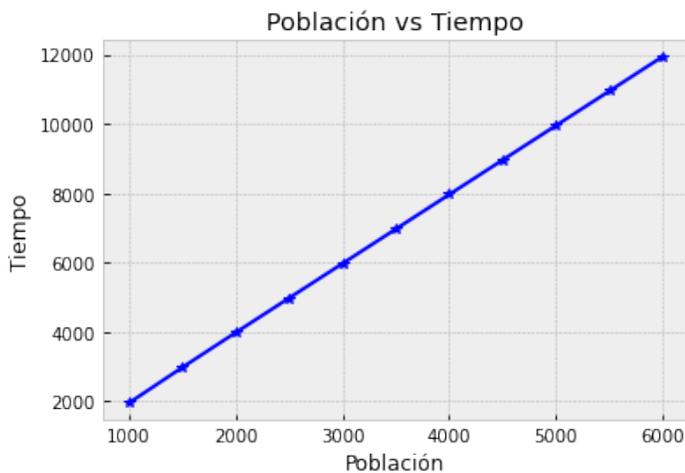


Figura 1.15: Relación del tiempo de finalización y el tamaño de la población en modelo SIR.

Capítulo 2

Modelo de rumor general en poblaciones homogéneas representadas por grafos k -regulares

En este capítulo se estudia el modelo de rumor general del capítulo 1 para poblaciones homogéneas de forma más general, el cual es una generalización de las ecuaciones planteadas en [18]. En este caso la homogeneidad se encuentra representada en que cada individuo posee la misma cantidad de conexiones. Se estudiará como casos particulares de este, el modelo SIR y el modelo Maki-Thompson, para observar su evolución en este tipo de poblaciones. En la Sección 2.1 se hace un análisis determinístico de la proporción final de ignorantes. En la Sección 2.2 se estudia la conexión entre el modelo determinístico y estocástico aplicando los argumentos usados en [10], asumiendo inicialmente que el grado del grafo es k (grafo homogéneo) y luego apelando a argumentos de campo medio. Finalmente, en la Sección 2.3 se hace un análisis estocástico del modelo en estas poblaciones mediante simulaciones computacionales realizadas en grafos k -regulares.

2.1. Análisis determinístico

Considere una población con N individuos, donde cada uno posee la misma cantidad de conexiones determinada por la constante $k \in \mathbb{N}$. En este caso se tiene que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda k x(t) y(t), \\ \frac{dy}{dt} = \lambda k x(t) y(t) - \delta y(t) - \alpha k y(t) (y(t) + z(t)), \\ \frac{dz}{dt} = \delta y(t) + \alpha k y(t) (y(t) + z(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son las proporciones de ignorantes, informantes y neutros respectivamente en el instante $t \geq 0$, α, δ y λ son constantes, y k es una constante que determina la cantidad de conexiones entre los individuos de la población.

Sus condiciones iniciales son dadas por $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ con $x_0, y_0, z_0 \in [0, 1]$ de forma que $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. De hecho, como se considera que la población es cerrada se asume que $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ para todo $t \geq 0$. Además, para que este modelo tenga sentido, se tomará siempre a $\lambda > 0$, y por lo menos uno de los parámetros δ o α mayor que cero. Si $\alpha = 0$ se tiene el modelo SIR, pero si $\delta = 0$ se tiene el modelo de rumor Maki-Thompson.

De este sistema de ecuaciones se puede obtener la proporción restante de ignorantes; para lo cual observe que $y(t) + z(t) = 1 - x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{k\lambda x(t)y(t) - \delta y(t) - k\alpha y(t)(1 - x(t))}{-k\lambda x(t)y(t)} \\ &= \frac{y(t)(k\lambda x - \delta - k\alpha(1 - x(t)))}{-k\lambda x(t)y(t)} \\ &= \frac{k\lambda x - \delta - k\alpha(1 - x(t))}{-k\lambda x} \\ &= \frac{-k\lambda x(t) + \delta + k\alpha(1 - x(t))}{k\lambda x(t)}. \end{aligned}$$

Integrando se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{-k\lambda x(t) + \delta + k\alpha(1 - x(t))}{k\lambda x(t)} dx \\ &= - \int \frac{k\lambda x(t)}{k\lambda x(t)} dx + \int \frac{\delta}{k\lambda x(t)} dx + \int \frac{k\alpha}{k\lambda x(t)} dx - \int \frac{k\alpha x(t)}{k\lambda x(t)} dx \\ &= -x(t) + \frac{\delta}{k\lambda} \ln(x(t)) + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(x(t)) - \frac{\alpha x(t)}{\lambda} + c \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones iniciales se concluye que

$$0 = -1 + \ln(1) \left(\frac{\delta + k\alpha}{k\lambda} \right) - \frac{\alpha}{\lambda} + c,$$

de donde

$$c = 1 + \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Luego

$$y(t) = \ln(x(t)) \left(\frac{\delta + k\alpha}{k\lambda} \right) - \frac{\alpha x(t)}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} + 1 - x(t).$$

Sea x_∞ la proporción de ignorantes quienes nunca conocieron el rumor. Ya que $y_\infty = 0$ se tiene

$$0 = \ln(x_\infty) \left(\frac{\delta + k\alpha}{k\lambda} \right) - \frac{\alpha x_\infty}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} + 1 - x_\infty,$$

de donde se consigue

$$-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} x_\infty \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} x_\infty} = -\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}.$$

Ahora, sea $w = -(k\alpha + k\lambda)/(\delta + k\alpha)x_\infty$, y note que

$$we^w = -\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}.$$

Aplicando la función de Lambert se obtiene

$$W(we^w) = W\left(-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}\right).$$

Es decir

$$w = W\left(-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}\right).$$

Luego, como

$$-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} x_\infty = W\left(-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}\right),$$

se concluye que la proporción final de ignorantes $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, es dada por

$$x_\infty = -\left(\frac{\delta + k\alpha}{k\alpha + k\lambda}\right) W\left(-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha} \cdot e^{-\frac{k\alpha + k\lambda}{\delta + k\alpha}}\right). \quad (2.2)$$

Como ejemplo se puede calcular la proporción restante de ignorantes para el modelo Maki-Thompson con parámetros $\alpha = \lambda = 1$ y $\delta = 0$ para diferentes valores de $k = 2, 100, 500$:

- $k = 2$
 $x_\infty = -\left(\frac{2}{4}\right) W\left(-\frac{4}{2} \cdot e^{-\frac{4}{2}}\right) \approx 0.203187.$
- $k = 100$
 $x_\infty = -\left(\frac{100}{200}\right) W\left(-\frac{200}{100} \cdot e^{-\frac{200}{100}}\right) \approx 0.203187.$
- $k = 500$
 $x_\infty = -\left(\frac{500}{1000}\right) W\left(-\frac{1000}{500} \cdot e^{-\frac{1000}{500}}\right) \approx 0.203187.$

Se puede observar que en los tres casos se obtuvo la misma proporción, lo cual deja notar que en realidad la ecuación (2.2) no es muy informativa para valores pequeños de k . Esto se lo podrá verificar más claramente en la Sección 2.3.

2.2. Conexión modelo determinístico y modelo estocástico

En este trabajo se utilizan ecuaciones que generalizan las ecuaciones de [18] y para eso se conecta el modelo determinístico con el estocástico, aplicando como argumento los análisis desarrollados en el artículo [10, Pag.8–12, Sección 4]. Para esto, serán aplicados procesos de Poisson, ver por ejemplo [23, Sección 3, Cap.5]. Como primer paso, se puede asumir un grado común dado por k (un grafo homogéneo), y luego apelar a los argumentos de campo medio para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales como se describe a continuación.

Considere un grafo $G = (V, E)$ k -regular. El modelo estocástico se define como una cadena de Markov a tiempo continuo $(\eta_t)_{t \geq 0}$, donde para cada t , $\eta_t \in \{0, 1, 2\}^V$. En otras palabras $\eta_t : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ y tiene la interpretación, para cada $v \in V$ y $t \geq 0$:

$$\eta_t(v) = \begin{cases} 0, & \text{si el vértice } v \text{ es ignorante en el instante } t, \\ 1, & \text{si el vértice } v \text{ es informante en el instante } t, \\ 2, & \text{si el vértice } v \text{ es neutro en el instante } t. \end{cases}$$

Es supuesto que $P(\eta_t(v) = i) = P(\eta_t(u) = i)$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ siendo $u \neq v$ y $t \geq 0$. Se puede asumir que el proceso comienza con apenas un vértice infectado elegido al azar. Por eso, se usa la notación:

$$x(t) = P(\eta_t(v) = 0), \quad y(t) = P(\eta_t(v) = 1), \quad z(t) = P(\eta_t(v) = 2).$$

Se va a mostrar como las ecuaciones en (2.1) surgen a partir del análisis de estas probabilidades.

Considere un tiempo $h \approx 0$. Por el teorema de la probabilidad total:

$$x(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 0) = \sum_{i=0}^2 P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = i) P(\eta_t(v) = i).$$

Luego, como $P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = 1) = 0$ y $P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = 2) = 0$, entonces

$$x(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = 0) x(t). \tag{2.3}$$

Ahora, note que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = 0) = 1 - P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0) - P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 0),$$

pero $P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 0) = o(h)$ pues implica la ocurrencia de al menos dos marcas de un proceso de Poisson. Entonces, se tiene que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 0 | \eta_t(v) = 0) = 1 - P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0) + o(h). \tag{2.4}$$

Para trabajar ahora con $P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0)$ note que v tiene k vecinos, y para cada vecino $i \sim v$ (notación de $i \in V$ y i es vecino de v) se define el evento:

$$A_{i,v}(t, t+h) = \{\eta_t(i) = 1\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\},$$

en palabras, $A_{i,v}(t, t+h)$ representa el evento en el que i está infectado y entre t y $t+h$ existe al menos un intento de infección de i para v , donde $(N_{i,v}(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ , asociado a las flechas de infección de i para v . Por independencia de los eventos:

$$\begin{aligned} P(A_{i,v}(t, t+h)) &= P(\{\eta_t(i) = 1\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\}) \\ &= P(\eta_t(i) = 1) P(N_{i,v}(t, t+h) \geq 1) \\ &= y(t)(\lambda h + o(h)). \end{aligned}$$

Es decir

$$P(A_{i,v}(t, t+h)) = \lambda h y(t) + o(h). \quad (2.5)$$

Ahora, note que $P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0)$ es igual a

$$\begin{aligned} P\left(\eta_{t+h}(v) = 1 \mid \left\{ \bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \right\} \cap \{\eta_t(v) = 0\}\right) & P\left(\bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \mid \eta_t(v) = 0\right) \\ & + \\ P\left(\eta_{t+h}(v) = 1 \mid \left\{ \bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \right\}^c \cap \{\eta_t(v) = 0\}\right) & P\left(\left\{ \bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \right\}^c \mid \eta_t(v) = 0\right), \end{aligned}$$

pero

$$P\left(\eta_{t+h}(v) = 1 \mid \left\{ \bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \right\} \cap \{\eta_t(v) = 0\}\right) = 1, \quad (2.6)$$

$$P\left(\eta_{t+h}(v) = 1 \mid \left\{ \bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \right\}^c \cap \{\eta_t(v) = 0\}\right) = 0 \quad (2.7)$$

y

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i \sim v} A_{i,v}(t, t+h) \mid \eta_t(v) = 0\right) &= \sum_{i \sim v} P\left(A_{i,v}(t, t+h) \mid \eta_t(v) = 0\right) + o(h) \\ &= \sum_{i \sim v} P\left(\{\eta_t(i) = 1\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\} \mid \eta_t(v) = 0\right) + o(h) \\ &= \sum_{i \sim v} P(\{\eta_t(i) = 1\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\}) + o(h) \\ &= k y(t) \lambda h + o(h). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En la primera línea de (2.8) se usó la fórmula de inclusión-exclusión, observando que la intersección de por lo menos dos eventos, implica la ocurrencia de al menos dos marcas en un proceso de Poisson que tiene probabilidad $o(h)$ de ocurrir.

Luego, de (2.6), (2.7) y (2.8) se consigue que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0) = k y(t) \lambda h + o(h). \quad (2.9)$$

De (2.3)-(2.9) se concluye que

$$x(t+h) = \{1 - \lambda k h y(t)\} x(t) + o(h),$$

que se puede reescribir como

$$x(t+h) - x(t) = -\lambda k h y(t) x(t) + o(h).$$

Luego, dividiendo por h y haciendo $h \rightarrow 0$ se sigue

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -\lambda k y(t) x(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}.$$

Es decir

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda k y(t) x(t). \quad (2.10)$$

Para la ecuación de los informantes se obtiene

$$y(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 1) = \sum_{i=0}^2 P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = i) P(\eta_t(v) = i).$$

Luego, como $P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 2) z(t) = 0$ se tiene

$$y(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0) x(t) + P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 1) y(t). \quad (2.11)$$

De (2.9) se tiene que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 0) x(t) = k \lambda h y(t) x(t) + o(h).$$

Observe que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 1) = 1 - P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1)$$

Vamos a estudiar $P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1)$; para esto, se pueden analizar dos tipos de eventos:

Evento 1: Sucede cuando el nodo v pasa del estado informante a neutro por si solo y se define entonces

$$B_v = \{\eta_t(v) = 1\} \cap \{N_v(t, t+h) \geq 1\},$$

donde $(N_v(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro δ , asociado al paso a neutro del nodo v en estado informante, luego

$$\begin{aligned} P(B_v(t, t+h)) &= P(\{\eta_t(v) = 1\} \cap \{N_v(t, t+h) \geq 1\}) \\ &= P(\eta_t(v) = 1) P(N_v(t, t+h) \geq 1) \\ &= y(t)(\delta h + o(h)). \end{aligned}$$

Es decir

$$P(B_v(t, t+h)) = y(t)(\delta h + o(h)).$$

Evento 2: Sucede cuando el nodo v pasa del estado informante a neutro a causa de la interacción con otro nodo en estado informante o neutro. Observe que v tiene k vecinos, y para cada vecino $i \sim v$ definimos el evento:

$$C_{i,v}(t, t+h) = \{\eta_t(i) = 1 \cup \eta_t(i) = 2\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\},$$

donde $(N_{i,v}(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro α , asociado a la interacción de i y v . Por independencia de eventos

$$\begin{aligned} P(C_{i,v}(t, t+h)) &= P(\{\eta_t(i) = 1 \cup \eta_t(i) = 2\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\}) \\ &= P(\eta_t(i) = 1 \cup \eta_t(i) = 2) \cap P(N_{i,v}(t, t+h) \geq 1) \\ &= (P(\eta_t(i) = 1) + P(\eta_t(i) = 2)) (\alpha h + o(h)) \\ &= (y(t) + z(t)) (\alpha h + o(h)). \end{aligned}$$

Es decir

$$P(C_{i,v}(t, t+h)) = \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h).$$

Ahora, note que $P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1)$ es igual al producto entre

$$P\left(\eta_{t+h}(v) = 2 \left| \left\{ \bigcup_{i \sim v} C_{i,v}(t, t+h) \cup B_v(t, t+h) \right\} \cap \{\eta_t(v) = 1\} \right.\right)$$

y

$$P\left(\bigcup_{i \sim v} C_{i,v}(t, t+h) \cup B_v(t, t+h) \left| \eta_t(v) = 1 \right.\right).$$

Como

$$P\left(\eta_{t+h}(v) = 2 \left| \left\{ \bigcup_{i \sim v} C_{i,v}(t, t+h) \cup B_v(t, t+h) \right\} \cap \{\eta_t(v) = 1\} \right.\right) = 1$$

y

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i \sim v} C_{i,v}(t, t+h) \cup B_v(t, t+h) \middle| \eta_t(v) = 1\right) &= \\
 &= \sum_{i \sim v} P\left(C_{i,v}(t, t+h) \middle| \eta_t(v) = 1\right) + P(B_v(t, t+h) \middle| \eta_t(v) = 1) + o(h) \\
 &= \sum_{i \sim v} P(\{\eta_t(i) = 1 \cup \eta_t(i) = 2\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\} \middle| \eta_t(v) = 1) \\
 &\quad + P(\{\eta_t(v) = 1\} \cap \{N_v(t, t+h) \geq 1\}) + o(h) \\
 &= \sum_{i \sim v} P(\{\eta_t(i) = 1 \cup \eta_t(i) = 2\} \cap \{N_{i,v}(t, t+h) \geq 1\}) \\
 &\quad \times P(\eta_t(v) = 1) P(N_v(t, t+h) \geq 1) + o(h) \\
 &= k \alpha h (y(t) + z(t)) + y(t)(\delta h) + o(h).
 \end{aligned}$$

Se concluye que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1) = \delta h y(t) + k \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h). \quad (2.12)$$

Por lo tanto

$$P(\eta_{t+h}(v) = 1 | \eta_t(v) = 1) = 1 - (\delta h y(t) + k \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h)). \quad (2.13)$$

De (2.9), (2.11) y (2.13) se concluye que

$$y(t+h) = \{1 - (\delta h y(t) + k \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h))\} y(t) + \lambda k h y(t) x(t) + o(h),$$

que se puede reescribir como

$$y(t+h) - y(t) = \lambda k h y(t) x(t) - \delta h y(t) + k \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h).$$

Luego, dividiendo por h y haciendo $h \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lambda k y(t) x(t) - \delta y(t) - k \alpha (y(t) + z(t)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}.$$

Es decir

$$\frac{dy}{dt} = \lambda k y(t) x(t) - \delta y(t) - k \alpha (y(t) + z(t)). \quad (2.14)$$

Para la ecuación de los neutros se tiene

$$z(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 2) = \sum_{i=0}^2 P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = i) P(\eta_t(v) = i).$$

Luego, como $P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 0) = 0$, entonces

$$z(t+h) = P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1) y(t) + P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 2) z(t). \quad (2.15)$$

De (2.12) se tiene que

$$P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 1) = \delta h y(t) + k \alpha h (y(t) + z(t)) + o(h).$$

Por otro lado, observe que $P(\eta_{t+h}(v) = 2 | \eta_t(v) = 2) = 1$, por tanto

$$z(t+h) = z(t) + \delta h y(t) + o(h).$$

Luego, dividiendo por h y haciendo $h \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - y(z)}{h} = \delta y(t) + k \alpha (y(t) + z(t)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}.$$

Es decir

$$\frac{dz}{dt} = \delta y(t) + \alpha k y(t) (y(t) + z(t)). \quad (2.16)$$

Por tanto, de (2.10), (2.14) y (2.16), se consigue el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda k x(t) y(t), \\ \frac{dy}{dt} = \lambda k x(t) y(t) - \delta y(t) - \alpha k y(t) (y(t) + z(t)), \\ \frac{dz}{dt} = \delta y(t) + \alpha k y(t) (y(t) + z(t)). \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3. Análisis estocástico del modelo

En esta sección nuevamente se trabaja el modelo estocástico mediante simulaciones computacionales, representando ahora a la población con grafos k -regulares.

Para este estudio, inicialmente se crean los grafos k -regulares de forma determinística mediante la medida r que indica para cada nodo la cantidad de conexiones entre los nodos hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. Es decir, se considera la familia de grafos tal que, para la creación de las aristas se organizan los nodos de forma ascendente y se formarán parejas de ellos dependiendo del valor de r . Por ejemplo, en un grafo de 5 nodos con $r = 1$, se formarán aristas entre los pares de nodos que se encuentra al lado, por lo tanto, la lista de aristas formada por los pares de nodos enumerados de 0 a 4 sería: $[(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)]$, obteniendo el grafo anillo. Por otro lado, para un grafo de 5 nodos con $r = 2$, la lista de aristas formada por los pares de nodos en este caso sería: $[(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 0), (4, 0), (4, 1)]$.

A medida que se aumenta el valor de r se generarán nuevas conexiones entre parejas de nodos llegando hasta el grafo completo con $r = \lfloor N/2 \rfloor$. En la Figura 2.1 se pueden observar algunos ejemplos de los grafos k -regulares considerados.

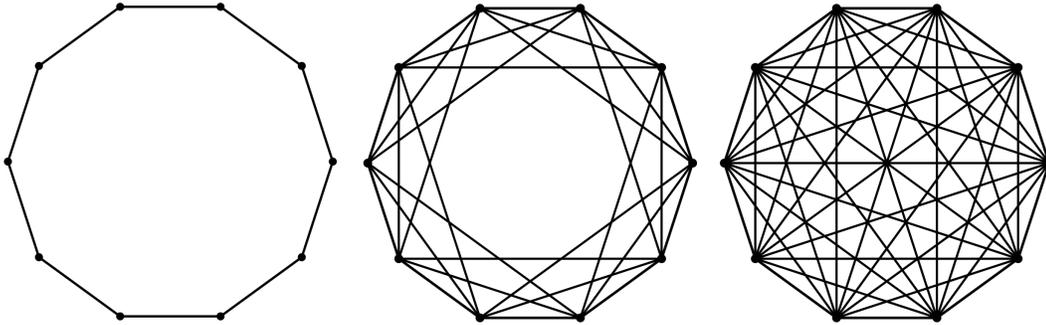


Figura 2.1: De izquierda a derecha se tiene $r = 1$, $r = 3$ y $r = 5$.

Es importante tener en cuenta que el valor r y k no es el mismo, y en la mayoría de los casos a excepción del grafo completo, estos dos valores tendrán la relación $k = 2r$. Es importante destacar que k es el número de nodos con el que cada nodo se conecta, es decir es el grado de cada nodo.

El pseudocódigo 2, es una modificación del pseudocódigo 1 visto en el Capítulo anterior, en el que solo tenía en cuenta la cantidad de nodos en cada estado, ya que todos los nodos estaban conectados entre sí. En este grafo, diferente al grafo completo usado anteriormente, se debe considerar los vecinos que tiene cada nodo y el estado en el que cada uno de ellos se encuentra. Entonces la cantidad de vecinos que tengan y su respectivo estado, tendrán un factor importante a la hora de escoger el nodo informante que realizará el proceso de informar o recuperar.

Pseudocódigo 2: Modelo de rumor general

Entrada. Condiciones iniciales N , y_0 , α , δ , λ y el grafo G .

1. Cantidad de informantes iniciales $N_y = N \cdot y_0$
2. Se eligen N_y nodos de G arbitrariamente
3. Se crean las listas de ignorantes, informantes y neutros: X , Y y Z
4. **Para** i en Y
5. Se actualizan los nodos vecinos en G
6. **Mientras** $longitud(Y) > 0$ **Haga**
7. Se decide cual es el nodo informante v : usando $U_1 = aleatorio(0, 1)$ y
8. la probabilidad de escoger un informante dada por

$$P_{cyl} = \frac{(Nx_i)\lambda + \delta + \alpha(Ny_i + Nz_i)}{\sum_{j=1}^y (Nx_j) + N\delta + \alpha \sum_{j=1}^y (Ny_j + Nz_j)}$$

9. Se calcula la probabilidad de infección $P_I = \frac{(Nx_i)\lambda}{(Nx_i)\lambda + \delta + \alpha(Ny_i + Nz_i)}$
 10. Sea $U_2 = aleatorio(0, 1)$
 11. **Si** $U_2 < P_I$ **Entonces**
 12. Se escoge un vecino de v ignorante, se adiciona a Y y se remueve de los vecinos ignorantes
 13. **Sino**
 14. Se adiciona el nodo v a la lista de neutros y se remueve de Y
-

La probabilidad de elegir un nodo en estado informante, dependerá de los vecinos que tenga y el estado en el que ellos se encuentren. Así, la probabilidad de escoger un nodo i informante está dada por

$$P_{cy_i} = \frac{(Nx_i)\lambda + \delta + \alpha(Ny_i + Nz_i)}{\sum_{j=1}^{N_y} (Nx_j) + N\delta + \alpha \sum_{j=1}^{N_y} (Ny_j + Nz_j)}, \quad (2.18)$$

donde Nx_i , Ny_i y Nz_i son el número de vecinos en estado ignorante, informante y neutro del nodo i , respectivamente y además, se tienen las variables aleatorias exponenciales de parámetros α , δ y λ asociadas a los nodos.

Una vez escogido el nodo informante, el proceso de difundir o recuperar dependerá de la probabilidad de informar P_I , la cual está dada por

$$P_I = \frac{(Nx_i)\lambda}{(Nx_i)\lambda + \delta + \alpha(Ny_i + Nz_i)} \quad (2.19)$$

Mientras más alta sea esta probabilidad, hay mayor posibilidad de que el nodo escogido haga el proceso de informar y no de recuperar.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.18) y (2.19), se organiza el algoritmo para el modelo de rumor general, dado en el Pseudocódigo 2.

Haciendo uso del Pseudocódigo 2 se pueden realizar gráficas como las que se observan en la Tabla 2.1, las cuales son simulaciones del modelo Maki-Thompson para diferentes valores de k en gráficas de 1000 nodos. Se puede observar que a partir de $k = 50$, la proporción restante de ignorantes se va acercando al 20% y a medida que el valor de k es mayor, el comportamiento de las curvas es muy similar a las observadas en el grafo completo Figura 1.8.

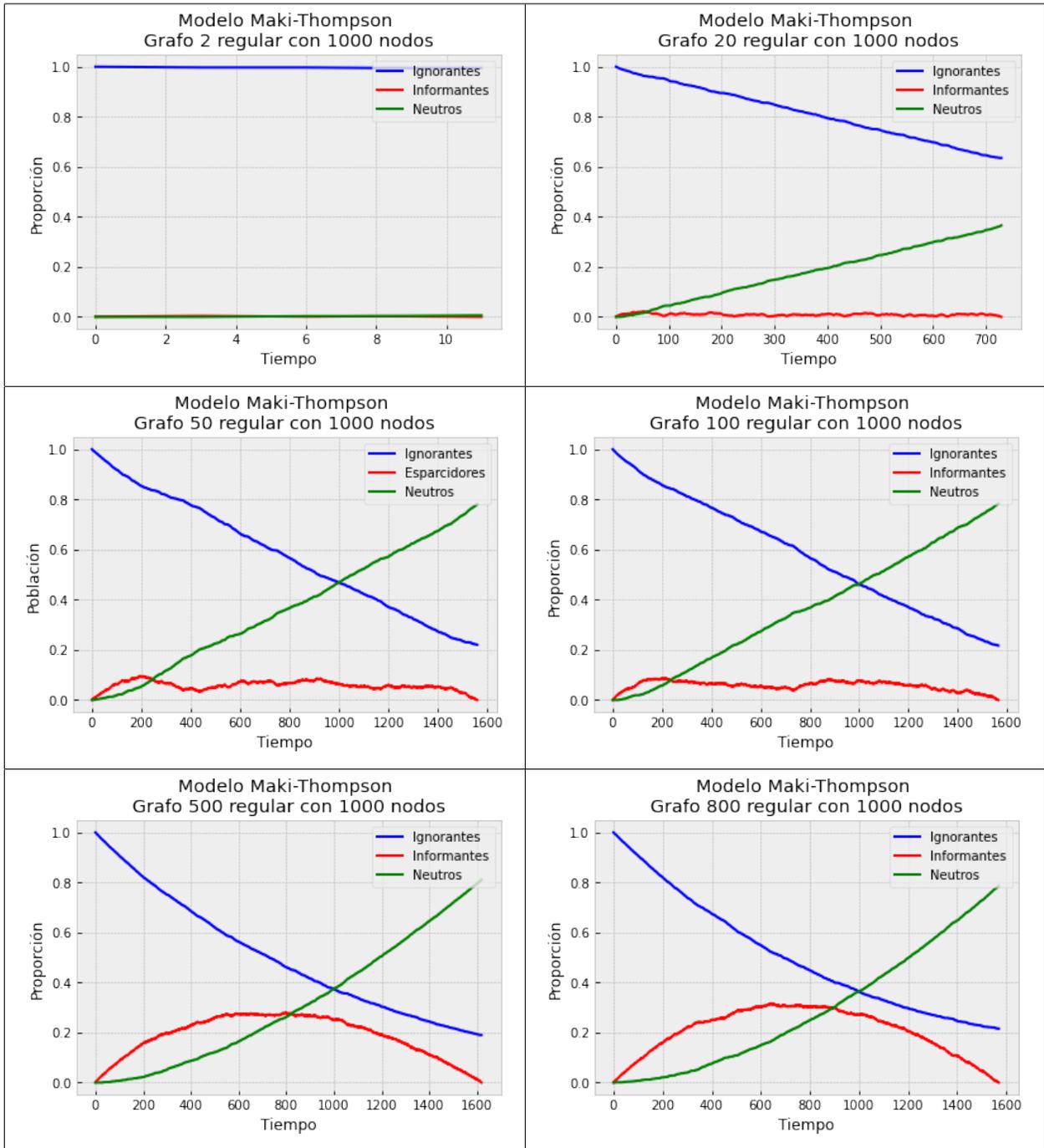


Tabla 2.1: Gráficas obtenidas con distintos valores de k .

Además de las gráficas observadas anteriormente, se puede también tener información más detallada sobre la proporción restante de ignorantes para diferentes valores de k . Para esto, se tomaron 15 valores diferentes de k y se realizaron 10 simulaciones para cada caso, obteniendo información de

la proporción final de ignorantes y también de la cantidad de iteraciones necesarias para terminar el proceso. Se calculó también el promedio de las simulaciones en cada caso. Los resultados pueden observarse en la Tabla 2.2.

r	k	x_∞	t
1	2	0,9955	8
16	32	0,3973	1204,4
31	62	0,2166	1565,8
46	92	0,2043	1590,4
61	122	0,2140	1570,8
76	152	0,207	1585
91	183	0,2013	1596,4
106	212	0,2091	1580,8
121	242	0,2122	1574,6
136	172	0,2086	1581,8
151	302	0,2088	1581,4
166	332	0,1954	1608,2
181	362	0,203	1593
196	392	0,1941	1610,8
211	422	0,2038	1591,4

Tabla 2.2: Resultados de simulaciones en distintos valores de k .

Con los datos obtenidos en la Tabla 2.2, se puede realizar la gráfica de la proporción final de ignorantes en función del valor r . En la Figura 2.2, se puede observar que en el rango de los primeros 30 valores de r hay un decrecimiento significativo en la curva. Para el resto de valores, se puede observar que la proporción final de ignorantes se encuentra al rededor del 20 %.

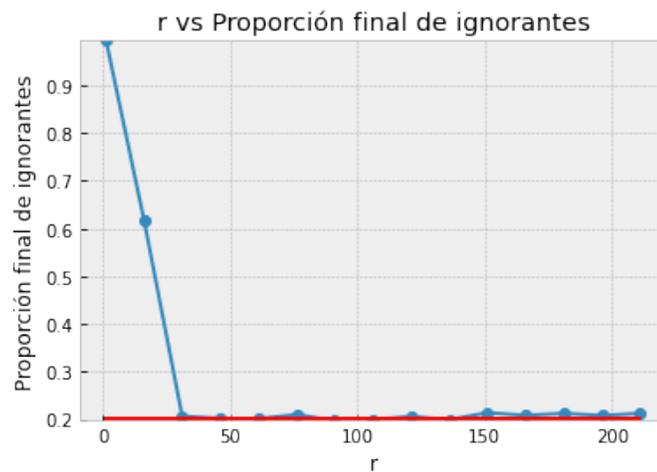


Figura 2.2: Relación entre r y la proporción final de ignorantes.

Otra gráfica que se obtiene de los resultados de la Tabla 2.2 es la del tiempo que dura el proceso en función de las conexiones que tiene el grafo. La Figura 2.3, muestra esta relación donde se observa que en los 30 primeros valores de r , hay un crecimiento acentuado en el tiempo de finalización del proceso. De ahí en adelante ese tiempo se mantiene en valores alrededor de las 1600 iteraciones; lo cual se acerca bastante al caso del grafo completo.

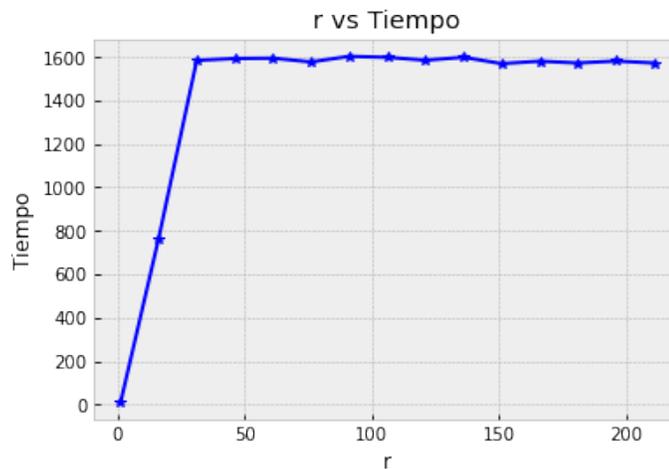


Figura 2.3: Relación entre r y el tiempo de finalización en el proceso.

En vista del interesante comportamiento que tomaron los datos en los primeros valores de r , se realizaron simulaciones con valores pequeños para poder observar con más detalle el comportamiento que tomaron los datos, se comenzó con $r = 1$ y se fue aumentando de 2 en 2 hasta $r = 31$ y en cada caso se realizó el proceso 10 veces, registrando en cada uno, el promedio del tiempo de duración del proceso.

En la Figura 2.4 se observa inicialmente la relación entre r y la proporción final de ignorantes. Se puede observar que en el rango de los 10 primeros valores la proporción final no presenta mayor variación; en los siguientes 10 valores se observa un decrecimiento pronunciado, desde cerca del 90 % y finaliza alrededor del 30 %, pero se puede observar que este decrecimiento no es constante sino un poco escalonado, dado que de 10 a 13 hay un decrecimiento del 90 % al 60 %, luego hay un crecimiento en 15 y nuevamente decrece en 17, de ahí vuelve a tener un decrecimiento grande desde cerca del 60 % hasta 30 % en 20. En adelante continua un pequeño decrecimiento y se estaciona en valores cercanos al 20 %.

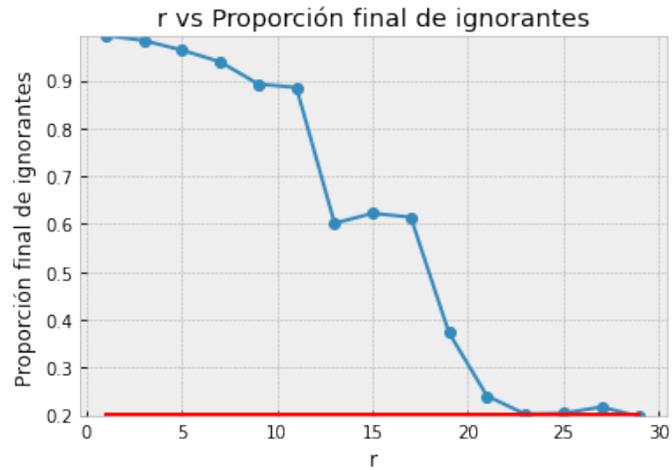


Figura 2.4: Relación entre r y la proporción final de ignorantes en los primeros valores de r .

Finalmente, se observa la relación entre r y los tiempos que tardó en finalizar el proceso en la Figura 2.5, notando en este caso un crecimiento de tipo escalonado, al igual que la anterior gráfica, los cambios más pronunciados se dan en el intervalo comprendido entre 10 y 20, en este caso teniendo desde las 200 iteraciones y llegando hasta las 1400 iteraciones al finalizar el proceso de propagación.

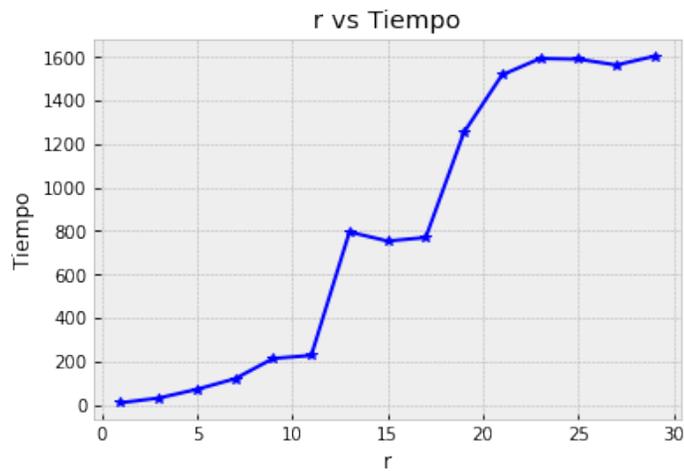


Figura 2.5: Relación entre r y el tiempo de finalización en el proceso en los primeros valores de r .

Conclusiones y trabajo futuro

En el presente trabajo se presentó un modelo de rumor general del cual resultan como casos particulares de estudio: el modelo epidémico SIR y el modelo para difusión de rumores Maki-Thompson. Se trata de modelos en los que se considera una población subdividida en diferentes clases de individuos y pueden ser vistos como un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que al ser resueltas permiten entender la evolución de las clases a lo largo del tiempo. Se estudió la versión determinística y estocástica del modelo en población homogénea, inicialmente representada por un grafo completo y luego por grafos k -regulares. En la versión determinística se identificó la proporción restante de ignorantes y para la estocástica se realizaron implementaciones de algoritmos en el lenguaje de programación Python para efectuar simulaciones computacionales.

A continuación se describen algunas conclusiones del presente trabajo y opciones de trabajo futuro como resultado de la investigación:

- El modelo de rumor general cuenta con tres compartimientos que representan las categorías en las que se encuentra la población en cada instante de tiempo. De este se pueden estudiar como casos particulares: el modelo SIR haciendo $\alpha = 0$ y el modelo Maki-Thompson haciendo $\delta = 0$.
- La implementación de pseudocódigos en el lenguaje de programación Python, resulta de gran utilidad para la simulación del proceso de propagación de los modelos, permitiendo analizar dicho proceso.
- En el modelo SIR los parámetros λ y δ están directamente relacionados con la propagación de una infección. Cuando λ toma valores cada vez mayores, la propagación aumenta; mientras que si δ toma valores cada vez más cercanos a λ , la propagación se da mucho más lenta.
- El modelo Maki-Thompson siempre muestra un comportamiento similar en la propagación de un rumor y al final del proceso resulta que 20% de la población nunca conoció el rumor.
- Se obtiene una mejor aproximación de la proporción de ignorantes entre el modelo simulado y el valor encontrado teóricamente cuando N tiene valores grandes. Además, cuando el valor de N no es muy grande se observa más la aleatoriedad del proceso; mientras que a medida que el valor de N se va aumentando, las curvas se tornan más suaves mostrando la idea de que se acercan al límite.
- Hay una relación directamente proporcional entre la población y el tiempo que tarda en finalizar el proceso de propagación en las simulaciones realizadas.

- En grafos k -regulares la ecuación encontrada teóricamente de la proporción final de ignorantes, no resulta muy informativa para valores pequeños de k . También, en las simulaciones a medida que k aumenta, los resultados son más similares a los obtenidos con el grafo completo.
- La relación entre r y la proporción final de ignorantes se estudió tras realizar una cantidad de simulaciones tomando distintos valores de k y de lo cual se observó que a medida que k toma valores mayores, la proporción final de ignorantes se acerca al 20 %. Al graficar esta relación, se observó que en el intervalo de los primeros 30 valores, hubo un decrecimiento significativo en la proporción restante hasta llegar a valores cercanos al 20 %. Sin embargo, al observar con detalle el decrecimiento se da de forma inconstante.

Finalmente, se resaltan opciones de investigación futura que se concluyen a partir de este trabajo:

- Estudiar la aleatoriedad presente en las transiciones de estado de los nodos en grafos k -regulares en el modelo de rumor general.
- Realizar un estudio en otras familias de grafos y comparar resultados con los obtenidos en este trabajo.

Referencias

- [1] Ávila, R. Inferencias de Modelos Epidemiológicos Compartmentales en Redes Sociales. Tesis de maestría. CIMAT A.C., Guanajuato, 2016.
- [2] Bollobás, B. Modern graph theory. Springer, New York, 1998.
- [3] Belen, S. The behaviour of stochastic rumours. Ph.D. Thesis. University of Adelaide, Australia, 2008.
- [4] Bondy, J., and Murty, U. Vol. 244 Graph Theory, *Graduate texts in Mathematics*. 2008.
- [5] Braun, M. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo editorial iberoamérica, 1990.
- [6] Cabrera, C., Lotero, E., and Umaña, V. Modelos epidemiológicos enredos: una presentación introductoria, *Boletín de Matemáticas*, 22:21–37, 2015.
- [7] Corless, R., Gonnet, G., Hare, D., Jeórey, D. and Knut, D. On the Lambert W Function, *Advances in Computational mathematics*, 5:329–359, 1996.
- [8] Daley, D. and Kendall, D. Stochastic rumours, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1:2–55, 1965.
- [9] Daley, D. and Gani, J. Epidemic modelling: an introduction. Cambridge University Press, 2001.
- [10] de Arruda, G., Lebensztayn, E., Rodrigues, F. and Rodríguez, P. A process of rumour scotching on finite populations, *Royal Society open science*, 2:150240, 2015.
- [11] Doing, E. Teorema del umbral de Kermack y McKendrick para un modelo en tiempo discreto, *Pro Mathematica*, 17:61–74, 2003.
- [12] Ferraz, G., Aparecido, F., Martín, P., Cozzo, E. and Moreno, Y. A general markov chain approach for disease and rumour spreading in complex networks, *Journal of Complex Networks*, 6:215–242, 2018.
- [13] García, A. Modelos de ecuaciones diferenciales para la propagación de enfermedades infecciosas. Trabajo de grado. Universidad de Cantabria, España, 2014.
- [14] Grejo, C. and Rodríguez, P. Asymptotic behavior for a modified Maki-Thompson model with directed inter-group interactions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 480:1–10, 2019.

-
- [15] Lebensztayn, E. and Rodríguez, P. A connection between a system of random walks and rumor transmission, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392:5793–5800, 2013.
- [16] Lebensztayn, E., Machado, F. and Rodríguez, P. On the behaviour of a rumour process with random stifling, *Environmental Modelling & Software*, 26:517–522, 2011.
- [17] Kermack, W. and McKendrick, A. A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115:700–721, 1927.
- [18] Moreno, Y., Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 26:521–529, 2002.
- [19] Maki, D. and Thompson, M. Mathematical models and applications: with emphasis on the social life, and management sciences, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.*, 1973.
- [20] Pearce, C. The exact solution of the general stochastic rumour, *Mathematical and Computer Modelling*, 31:289–298, 2000.
- [21] Pliego, E. Modelos epidemiológicos de enfermedades virales infecciosas. *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla*, 20, 2011.
- [22] Rada, A., Coletti, C., and Lebensztayn, E. and Rodríguez, P. The role of multiple repetitions on the size of a rumor. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 20:1209–1231, 2021.
- [23] Sheldon M. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.
- [24] Sudbury, A. The proportion of the population never hearing a rumour, *Journal of applied probability*, 22:443–446, 1985.
- [25] Watson, R. On the size of a rumour, *Stochastic processes and their applications* 27:141–149, 1987.