

**DINÁMICA DEL VIH/SIDA EN LA CIUDAD DE PASTO-NARIÑO,  
CONSIDERANDO EL ESTUDIO DE LA FASE ASINTOMÁTICA DE LA  
ENFERMEDAD**

**JOSÉ ARMANDO ORTEGA BEJARANO**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
SAN JUAN DE PASTO  
2022**

**DINÁMICA DEL VIH/SIDA EN LA CIUDAD DE PASTO-NARIÑO,  
CONSIDERANDO EL ESTUDIO DE LA FASE ASINTOMÁTICA DE LA  
ENFERMEDAD**

**JOSÉ ARMANDO ORTEGA BEJARANO**

**Asesor:**

**Miller Orlando Cerón Gómez  
Doctor en Matemática Aplicada**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
SAN JUAN DE PASTO  
2022**

## **Nota de responsabilidad**

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1<sup>o</sup> del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

---

Miller Orlando Cerón Gómez

**Asesor del trabajo de grado**

Cristian Camilo Espitia Morillo

**Jurado**

Eduardo Ibarguen Mondragón

**Jurado**

San Juan de Pasto, 25 de Noviembre de 2022

## Resumen

El VIH es uno de los virus que más muertes y contagios ha causado en los últimos años. Al ser una enfermedad que no tiene vacuna ni cura, requiere de tratamientos que permitan mitigar el crecimiento de los nuevos infectados y mantener el bienestar de los infectados sintomáticos. Por otra parte, en los últimos años, en la ciudad de Pasto, han aumentado notablemente los nuevos casos de infectados, convirtiendo al VIH/SIDA en un problema de salud pública. En el presente informe se plantea y analiza un modelo matemático para la dinámica del VIH/SIDA en la ciudad de Pasto-Nariño, con inmigración, en el cual se analizan seis comportamientos de la enfermedad correspondientes a cinco etapas de la misma, las cuales son: la fase susceptible, la fase sin diagnóstico, la fase sin supresión viral, con supresión viral, el estado del SIDA y se considera una población de protegidos. Con el modelo planteado se busca los puntos de equilibrio, se realizan simulaciones numéricas y se estima parámetros para la población de Pasto, de donde se concluye que el diagnóstico oportuno y la prevalencia en el uso de los antirretrovirales son muy eficaces en el control de la enfermedad.

## Abstract

HIV is one of the viruses that has caused the most infections and deaths in recent years. Being a disease that has no vaccine or cure, it requires treatments that allow to mitigate the growth of the newly infected and maintain the well-being of the symptomatic infected. On the other hand, in the last years, in the city of Pasto, the new cases of infected people have increased notably, turning HIV/AIDS into a public health problem. In this report, a mathematical model for the dynamics of HIV/AIDS in the city of Pasto-Nariño, with immigration, is proposed and analyzed, in which six behaviors of the disease corresponding to five stages of the disease are analyzed, which are : the susceptible phase, the phase without diagnosis, the phase without viral suppression, with viral suppression, the state of AIDS and it is considered a protected population. With the proposed model, the equilibrium points are sought, numerical simulations are carried out and parameters are estimated for the population of Pasto, from which it is concluded that timely diagnosis and the prevalence in the use of antiretrovirals are very effective in the control of the illness.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Metodología</b>	<b>9</b>
2.1	Revisión de bases de datos . . . . .	9
2.2	Planteamiento del modelo . . . . .	9
2.3	Simulaciones numéricas . . . . .	10
2.4	Estimación de parámetros . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>11</b>
3.1	Planteamiento del modelo . . . . .	11
3.2	Puntos de equilibrio . . . . .	14
3.3	Resultados numéricos . . . . .	15
3.4	Estimación de parámetros . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Discusión</b>	<b>25</b>
4.1	Análisis teórico del modelo . . . . .	25
4.2	Simulaciones numéricas . . . . .	25
4.3	Estimación de parámetros . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Recomendaciones</b>	<b>28</b>

# 1 Introducción

El virus de inmunodeficiencia humana conocido como VIH, es un virus el cual causa la infección por VIH y con el tiempo el SIDA o síndrome de inmunodeficiencia humana adquirida, la cual es una enfermedad que destruye el sistema inmunológico con el paso del tiempo, dejando así al organismo vulnerable ante cualquier infección oportunista y variados tipos de cáncer, causando al final, la muerte del portador (OMS, 2020).

El VIH se transmite principalmente por medio de relaciones sexuales sin protección con un infectado, y en general, se transmite por medio del contacto con fluidos de personas infectadas como: sangre, semen, flujo vaginal, líquido preseminal y leche de lactancia o se puede transmitir durante el embarazo, el trabajo de parto, y el alumbramiento hacia el bebé. Una vez el virus entra en el cuerpo, infecta las células vitales del sistema inmune  $TCD4^+$ , utilizando a estas células para producir millones de virus por día e infectando a su vez nuevas células, (Alavez et al., 2015).

La enfermedad contempla tres etapas en el proceso de infección del organismo, que consta de una fase aguda, cuando el virus ingresa al organismo; un largo periodo de estado de latencia clínica o fase asintomática, que influye mucho en la transmisión del virus y finalmente el estado del SIDA, (CDC, 2021).

En este informe se plantea y analiza un modelo matemático para la dinámica del VIH/SIDA en la ciudad de Pasto, considerando inmigración y la influencia de población asintomática y no diagnosticada en la transmisión de la enfermedad. Se consideran estrategias de control como la acción del tratamiento antirretroviral (TAR), la profilaxis previa a la exposición (PrEP) y el diagnóstico oportuno de la enfermedad. Se obtienen los puntos de equilibrio, se finaliza con simulaciones numéricas y la estimación de parámetros para la ciudad de Pasto.

## 2 Metodología

### 2.1 Revisión de bases de datos

Se revisaron las bases teóricas referentes a la parte analítica de los modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales, en especial los modelos existentes que describen el VIH/SIDA en una población mixta. Se investigó respecto al contexto nacional, regional y local del VIH/SIDA en los últimos años, destacando estudios cualitativos y cuantitativos. Esta búsqueda se realizó por medio de Google académico y bases de datos locales, destacándose la biblioteca de la Universidad de Nariño.

Los artículos y documentos seleccionados corresponden en su mayoría al periodo comprendido entre 2005 y 2020, y son del tipo cuantitativo.

### 2.2 Planteamiento del modelo

Para el planteamiento del modelo se tuvo en cuenta las principales etapas de progresión de la enfermedad y la situación del VIH/SIDA a nivel nacional, regional y local. También se considera la supresión viral, que ocurre cuando un paciente diagnosticado con VIH y que tiene una buena adhesión al tratamiento antirretroviral, tiene niveles de VIH libre en la sangre bajos.

La ciudad de Pasto está ubicada en el departamento de Nariño, que es fronterizo con Ecuador. Al ser la capital, va a haber un flujo de migración, sin embargo, se trabajó con inmigración, es decir, cuando hay una razón de entrada positiva de personas a la población de la ciudad. En Pasto, el acceso al tratamiento antirretroviral es adecuado, ya que sobrepasa el 70% de cobertura de los infectados diagnosticados (CAC, 2020). En el modelo matemático, se consideraron las siguientes variables:

- La población de susceptibles: Personas que no han contraído la enfermedad
- La población de infectados no diagnosticados: Personas que tienen VIH e inclusive síntomas relacionados a enfermedades oportunistas a causa del SIDA, pero que no han sido diagnosticados con VIH.
- La población de infectados diagnosticados sin supresión viral: Son las personas diagnosticadas con VIH, que ya han iniciado el tratamiento antirretroviral, pero su adhesión al mismo es mala.
- La población de infectados diagnosticados con supresión viral: Personas diagnosticadas con VIH con una buena adhesión al tratamiento antirretroviral y bajos niveles de VIH libre en la sangre.
- La población de pacientes diagnosticados con SIDA: Son las personas diagnosticadas que están en la etapa final de la enfermedad, con una carga viral alta, el sistema inmunológico débil y enfermedades oportunistas. A esta etapa se puede llegar por una mala adherencia al tratamiento o un diagnóstico tardío de la enfermedad.
- La población de protegidos por la profilaxis previa a la exposición (PrEP): Son personas sexualmente activas, con alta probabilidad de contraer el VIH, pero, su adherencia al PrEP es buena.

Con el planteamiento del modelo se buscó los puntos de equilibrio y se analizó el valor del número reproductivo básico de la enfermedad  $R_0$ .

### **2.3 Simulaciones numéricas**

Se procedió a simular en el software libre Octave, diferentes escenarios epidemiológicos, tomando poblaciones iniciales con valores aproximados a datos de la ciudad de Pasto y se varió las distintas tasas y razones de entrada, como las tasas de infección, la tasa de diagnóstico, las tasas de adquisición y pérdida de la supresión viral, las tasas de adquisición del SIDA y las tasas de adquisición y pérdida de la protección.

### **2.4 Estimación de parámetros**

Con los datos de los infectados de la ciudad de Pasto (datos que corresponden a 11 años, en meses, desde el 2008 al 2019), se procedió a estimar la tasa de infección de la población asintomática, la tasa de infección de la población sintomática sin supresión viral y la tasa de diagnóstico de la enfermedad, que se constituyen en datos fundamentales para entender el crecimiento de los infectados por VIH que ha tenido la población de Pasto en los últimos años.

## 3 Resultados

### 3.1 Planteamiento del modelo

El modelo matemático va a considerar inicialmente una población homogénea dividida en seis subpoblaciones: Susceptibles,  $S$ , una población de protegidos bajo la acción de la profilaxis,  $P$ , y una población de infectados diagnosticados con SIDA,  $A$ , en donde se considera que no influyen en la transmisión de la enfermedad, ya que al conocer su estado de la enfermedad, la persona decide cuidarse para no transmitirla y, debido al débil sistema inmunológico y las enfermedades oportunistas, el paciente está muy enfermo para tener relaciones sexuales. En la población de protegidos no se considera mortalidad, puesto que se supone que la tasa de pérdida de la protección es mayor que la tasa de adquisición. Además, consideramos las poblaciones de infectados que si influyen en la propagación del VIH: la de infectados no diagnosticados,  $I_A$ , y dos poblaciones de infectados diagnosticados, que se diferencian por su estado de supresión viral, debido al tratamiento antirretroviral, entonces hay una población de infectados que no ha logrado la supresión viral,  $I_{k1}$ , y una población de infectados diagnosticados que ya logró la supresión viral  $I_{k2}$ .

Se establece el modelo de acuerdo a la ley de acción de masas, donde la población de susceptibles  $S$ , tiene una razón de entrada de nuevos susceptibles  $\lambda_1$ , y además puede ser infectada por las tres poblaciones de infectados,  $I_A$ ,  $I_{k1}$  e  $I_{k2}$  a una tasa  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  respectivamente, suponiendo además que  $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ , esto porque los no diagnosticados transmiten más la enfermedad debido a la alta carga viral de VIH en la sangre, también debido a que no conocen su estado de infectados; seguido de ellos, los infectados sin supresión viral con menor carga viral y por último los infectados con supresión viral. También, hay una tasa de protección debido a la PrEP,  $c$ , y una tasa de pérdida de protección,  $m$ . Además, se considera mortalidad natural,  $\mu_1$ .

Debido a la naturaleza de la enfermedad, los nuevos infectados se vuelven no diagnosticados, y son diagnosticados a una tasa  $\alpha_1$ , desarrollando el estado del SIDA a una tasa de progresión  $\gamma_1$ . Hay una razón de entrada  $\lambda_2$ , que es la inmigración o por nacimientos de nuevos infectados y una tasa de muerte combinada  $\mu_2$ , en donde está la mortalidad natural y la mortalidad por la enfermedad.

Luego de recibir el diagnostico, de acuerdo a la OMS, una vez el paciente VIH positivo conoce su estado, inmediatamente debe someterse al tratamiento antirretroviral (OMS, 2020). Si el infectado tiene una buena adhesión al tratamiento, la supresión viral se logra entre los cuatro a seis meses (CDC, 2022). Considerando esto, en el modelo se supone que los nuevos diagnosticados inician inmediatamente con el TAR y no tienen contacto sexual mientras logran la supresión viral, lo cual conlleva a que los diagnosticados entren inicialmente en la población de infectados que logran la supresión viral,  $I_{k2}$ .

De la población de infectados diagnosticados, hay una tasa de pérdida de la supresión viral  $\alpha_2$ , y una tasa de adquisición de la misma  $\alpha_3$ . De igual forma, en los infectados diagnosticados sin supresión viral, se considera una razón de entrada de inmigrantes o nacimiento de nuevos infectados,  $\lambda_3$ , y una tasa de progresión al SIDA,  $\gamma_2$ . Por último, en la población de infectados diagnosticados sin supresión viral, con supresión viral y con SIDA, se considera tasas de mortalidad  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  y  $\mu_5$

respectivamente.

Por otra parte, no se considera inmigración en los infectados con supresión viral, puesto que este flujo de entrada, está considerado en el parámetro  $\lambda_2$ .

El siguiente diagrama de flujo representa la interacción entre las poblaciones descritas anteriormente:

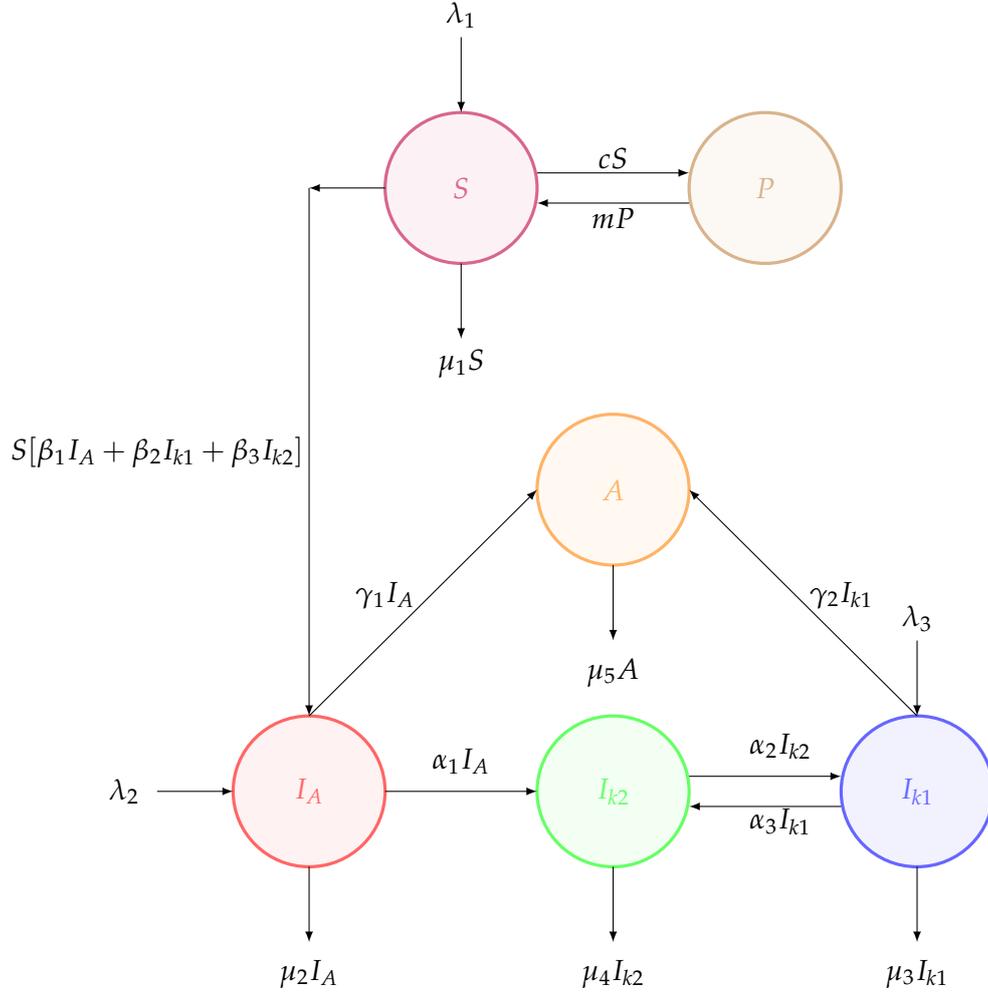


Figura 1: Diagrama de flujo del modelo para VIH/SIDA

Luego, el planteamiento del modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= -S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \mu_1 S - cS + mP + \lambda_1 \\
 \dot{I}_A &= S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \alpha_1 I_A - \mu_2 I_A - \gamma_1 I_A + \lambda_2 \\
 \dot{I}_{k1} &= \alpha_2 I_{k2} - \alpha_3 I_{k1} - \mu_3 I_{k1} - \gamma_2 I_{k1} + \lambda_3 \\
 \dot{I}_{k2} &= \alpha_1 I_A - \alpha_2 I_{k2} + \alpha_3 I_{k1} - \mu_4 I_{k2} \\
 \dot{A} &= \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_{k1} - \mu_5 A \\
 \dot{P} &= cS - mP
 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde el conjunto de interés biológico es:

$$\Omega = \{(S, I_A, I_{k1}, I_{k2}, A, P) \in \mathbb{R}^6 : S \geq 0, I_A \geq 0, I_{k1} \geq 0, I_{k2} \geq 0, A \geq 0, P \geq 0\}$$

Las tasas y razones de entrada del modelo se resumen a continuación:

Parámetro	Valor
$\beta_1$	Tasa de contagio de los infectados sin diagnostico
$\alpha_1$	Tasa de diagnóstico
$\beta_2$	Tasa de contagio de los infectados sin supresión viral
$\alpha_2$	Tasa de perdida de la supresion viral
$\beta_3$	Tasa de contagio de los infectados con supresión viral
$\alpha_3$	Tasa de adquisición de la supresión viral
$m$	Tasa de perdida de la protección
$\mu_1$	Tasa de mortalidad natural
$c$	Tasa de adquisición de la protección
$\mu_2$	Tasa de mortalidad natural y mortalidad por la enfermedad
$\lambda_1$	Razón de entrada de nuevos susceptibles
$\mu_3$	Tasa de mortalidad natural y mortalidad por la enfermedad
$\lambda_2$	Razón de entrada de inmigración de los infectados sin diagnostico
$\mu_4$	Tasa de mortalidad natural y mortalidad por la enfermedad
$\lambda_3$	Razón de entrada de inmigración de los infectados sin supresión viral
$\mu_5$	Tasa de mortalidad natural y mortalidad por la enfermedad
$\gamma_1$	Tasa de adquisición del SIDA de los infectados sin diagnostico
$\gamma_2$	Tasa de adquisición del SIDA de los infectados sin supresión viral

Tabla 1: Parámetros del modelo

### 3.2 Puntos de equilibrio

En la siguiente sección, se hallará los puntos de equilibrio asociados al sistema (1). Para encontrar los puntos de equilibrio, se procede a resolver el sistema homogéneo asociado a (1):

$$-S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \mu_1 S - cS + mP + \lambda_1 = 0, \quad (2)$$

$$S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \alpha_1 I_A - \mu_2 I_A - \gamma_1 I_A + \lambda_2 = 0, \quad (3)$$

$$\alpha_2 I_{k2} - \alpha_3 I_{k1} - \mu_3 I_{k1} - \gamma_2 I_{k1} + \lambda_3 = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_1 I_A - \alpha_2 I_{k2} + \alpha_3 I_{k1} - \mu_4 I_{k2} = 0, \quad (5)$$

$$\gamma_1 I_A + \gamma_2 I_{k1} - \mu_5 A = 0, \quad (6)$$

$$cS - mP = 0. \quad (7)$$

Si reemplazamos la ecuación (7) en (2), se anula el término  $-cS + mP$ . Por tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \mu_1 S + \lambda_1 = 0, \quad (8)$$

$$S \cdot [\beta_1 \cdot I_A + \beta_3 \cdot I_{k2} + \beta_2 \cdot I_{k1}] - \alpha_1 I_A - \mu_2 I_A - \gamma_1 I_A + \lambda_2 = 0, \quad (9)$$

$$\alpha_2 I_{k2} - \alpha_3 I_{k1} - \mu_3 I_{k1} - \gamma_2 I_{k1} + \lambda_3 = 0, \quad (10)$$

$$\alpha_1 I_A - \alpha_2 I_{k2} + \alpha_3 I_{k1} - \mu_4 I_{k2} = 0. \quad (11)$$

De la ecuación (8) del nuevo sistema, al despejar la variable  $S$  se obtiene:

$$S = \frac{\lambda_1}{\beta_1 I_A + \beta_3 I_{k2} + \beta_2 I_{k1} + \mu_1}.$$

De la ecuación (10) del nuevo sistema se despeja  $I_{k1}$ , de donde se obtiene:

$$I_{k1} = \frac{\alpha_2 I_{k2} + \lambda_3}{\alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2}.$$

Reemplazando el valor de  $I_{k1}$  en la ecuación (11) del nuevo sistema y despejando  $I_{k2}$ , se obtiene:

$$I_{k2} = \frac{\alpha_1 I_A (\alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2) + \alpha_3 \lambda_3}{(\alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2)(\alpha_2 + \mu_4) - \alpha_2 \alpha_3}.$$

Note que el término  $(\alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2)(\alpha_2 + \mu_4) - \alpha_2 \alpha_3$  es positivo, ya que al resolver el producto, se anula el término  $\alpha_2 \alpha_3$ . Luego  $I_{k2}$  es:

$$I_{k2} = \frac{\alpha_1 I_A (\alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2) + \alpha_3 \lambda_3}{\alpha_3 \mu_4 + \mu_3 \alpha_2 + \mu_3 \mu_4 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_2 \mu_4}. \quad (12)$$

Luego  $I_{k1}$  es:

$$I_{k1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 I_A + \lambda_3 (\alpha_2 + \mu_4)}{\alpha_3 \mu_4 + \mu_3 \alpha_2 + \mu_3 \mu_4 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_2 \mu_4}. \quad (13)$$

Con los valores de  $I_{k1}$ ,  $I_{k2}$  y  $S$ , en términos de  $I_A$  se trabaja en la ecuación (9) del nuevo sistema, con el fin de despejar  $I_A$  en términos de los parámetros del modelo. Con el fin de simplificar los cálculos, se hace las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} T_1 &= \alpha_1 + \mu_2 + \gamma_1. & T_3 &= \alpha_2 + \mu_4. \\ T_2 &= \alpha_3 + \mu_3 + \gamma_2. & T_4 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

$$T_5 = \alpha_3\mu_4 + \mu_3\alpha_2 + \mu_3\mu_4 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_2\mu_4.$$

Luego de realizar las sustituciones y simplificar, se obtiene una ecuación cuadrática de la forma  $a \cdot I_A^2 + b \cdot I_A + c = 0$ , de donde:

$$a = \frac{T_1[\beta_1 T_5 + \beta_3 \alpha_1 T_2 + \beta_2 \alpha_1 \alpha_2]}{T_5},$$

$$b = \frac{T_1[\beta_3 \alpha_3 \lambda_3 + \beta_2 \lambda_3 T_3 + \mu_1 T_5]}{T_5} - \frac{T_4[\beta_1 T_5 + \beta_3 \alpha_1 T_2 + \beta_2 \alpha_1 \alpha_2]}{T_5},$$

$$c = -\frac{T_4 \lambda_3 (\beta_3 \alpha_3 + \beta_2 T_3) + \lambda_2 \mu_1 T_5}{T_5}.$$

Por tanto, la solución para  $I_A$  es  $I_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Note que  $a > 0$ ,  $c < 0$  y  $b$  puede ser tanto positivo como negativo. Para el caso de  $b < 0$  ocurre que  $-b > 0$  y además  $\sqrt{b^2 - 4ac} > -b$ , por lo que  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$  y  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ , por lo que para este caso, se toma la solución positiva de  $I_A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Si  $b > 0$ , entonces  $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$ , de ahí que  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$  y  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ . Por tanto, también se toma la solución positiva de  $I_A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . De ambos casos, se demuestra que solo hay un punto de equilibrio. Con el valor de  $I_A$ , el valor de la componente  $A$  es:

$$A = \frac{\gamma_1 I_A + \gamma_2 I_{k1}}{\mu_5}.$$

Simplificando y aplicando las sustituciones se obtiene:

$$A = \frac{T_5 \gamma_1 I_A + \alpha_1 \alpha_2 I_A + \lambda_3 T_3}{\mu_5 T_5}. \quad (14)$$

Simplificando los términos en la componente  $S$ , se obtiene:

$$S = \frac{\lambda_1 T_5}{I_A [\beta_1 T_5 + \alpha_1 (\beta_3 T_2 + \beta_2 \alpha_2)] + \lambda_3 (\beta_3 \alpha_3 + \beta_2 T_3) + \mu_1 T_5}. \quad (15)$$

Finalmente, la componente  $P$  es:

$$P = \frac{c \lambda_1 T_5}{m [I_A [\beta_1 T_5 + \alpha_1 (\beta_3 T_2 + \beta_2 \alpha_2)] + \lambda_3 (\beta_3 \alpha_3 + \beta_2 T_3) + \mu_1 T_5]}. \quad (16)$$

**Nota:** Debido a que en el modelo se considera inmigración, siempre va a existir la enfermedad. Esto conlleva a que no exista el punto de equilibrio trivial o libre de la enfermedad y por tanto, no se puede calcular el número reproductivo básico de la enfermedad o  $R_0$ , (Ram & McCluskey, 2014).

### 3.3 Resultados numéricos

A continuación se presentan resultados numéricos teniendo en cuenta varios escenarios epidemiológicos, con unas poblaciones iniciales de 405885 susceptibles, 200 infectados sin diagnóstico, 50 infectados sin supresión viral, 80 infectados con supresión viral, 100 pacientes con SIDA y 100 protegidos bajo la acción del PrEP. Estos

datos son de fuente propia.

**Simulación 1:** En esta simulación, lo más influyente son las tasas de contagio  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , pertenecientes a las poblaciones de no diagnosticados e infectados sin supresión viral, las cuales se consideran elevadas. También se considera una tasa de diagnóstico pequeña, y una tasa media de prevalencia en la supresión viral.

Como se puede apreciar en la figura 2, el número de no diagnosticados aumenta y los pacientes con TAR adecuado disminuyen, pasando parte de esta población a los infectados sin supresión viral para posteriormente adquirir SIDA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000000999	$\alpha_1$	0.0000125
$\beta_2$	0.0000000009999	$\alpha_2$	0.125
$\beta_3$	0.00000000000000091333	$\alpha_3$	0.0905
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	$1/864*400+1$	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.00027	$\gamma_2$	0.00001

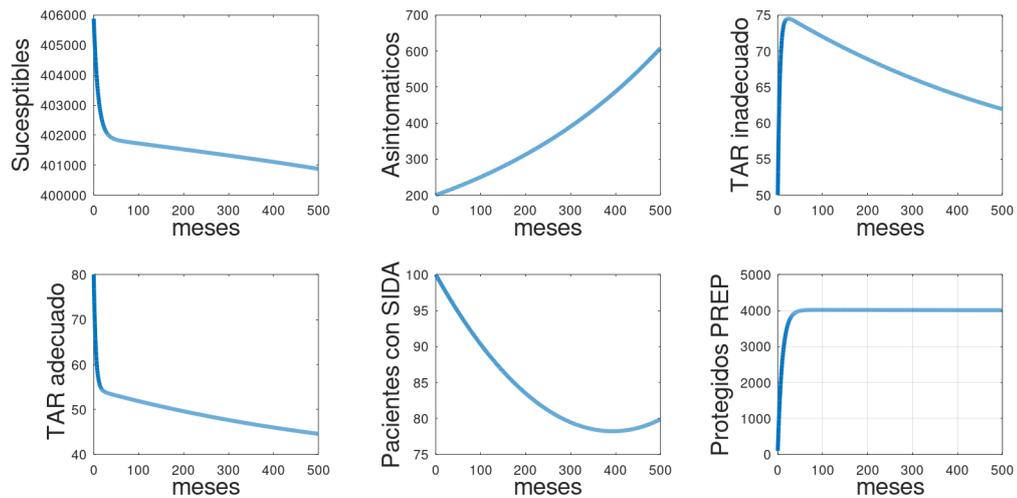


Figura 2: simulación 1

**Simulación 2:** En comparación con la simulación 1, solo se modifica la tasa de diagnóstico, aumentándola. Se puede ver en la figura 3, como la población de no diagnosticados disminuye y crecen las poblaciones de diagnosticados. Debido a que la prevalencia en la supresión viral no es muy grande, los infectados de a poco desarrollan el SIDA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000000999	$\alpha_1$	0.0125
$\beta_2$	0.0000000009999	$\alpha_2$	0.125
$\beta_3$	0.00000000000000091333	$\alpha_3$	0.0905
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	1/864*400+1	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.00027	$\gamma_2$	0.00001

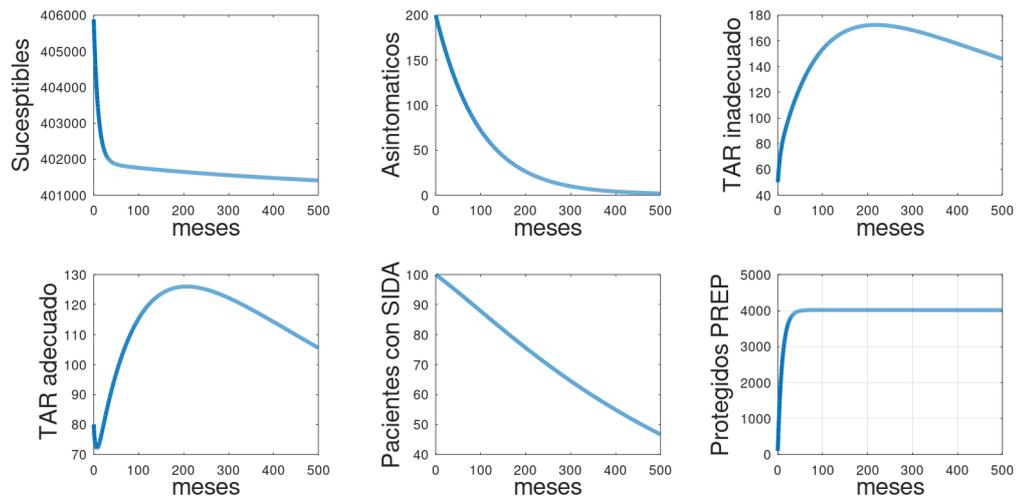


Figura 3: simulación 2

**Simulación 3:** En comparación con la simulación 2, se modifica la tasa de prevalencia en la supresión viral, aumentándola y como se puede ver en la figura 4, los infectados con supresión viral crecen y empiezan a disminuir su población de una manera más lenta. Los infectados sin supresión viral por su parte, no sobrepasan los 60 casos, a diferencia de lo que ocurría con la simulación 2, donde se acercaban a los 180 casos.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000000999	$\alpha_1$	0.0125
$\beta_2$	0.0000000009999	$\alpha_2$	0.125
$\beta_3$	0.00000000000000091333	$\alpha_3$	0.505
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	1/864*400+1	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.00027	$\gamma_2$	0.00001

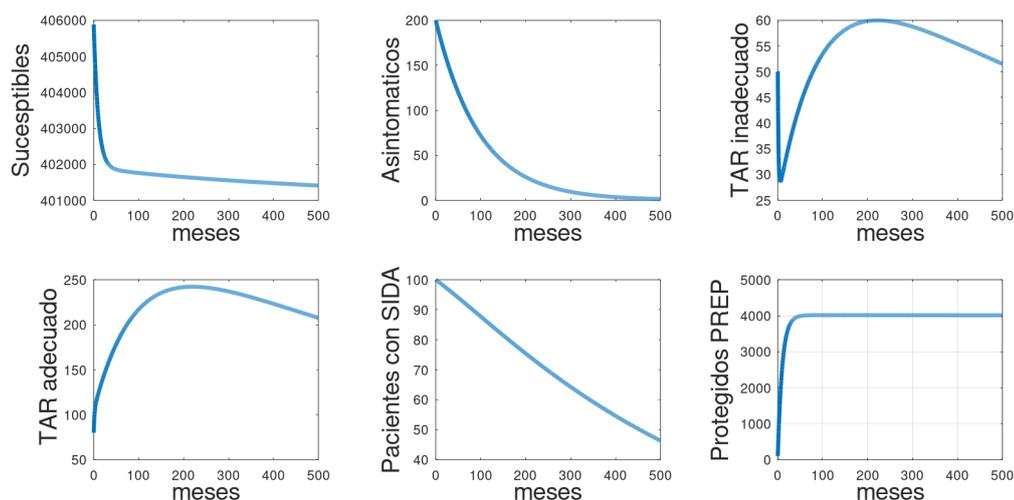


Figura 4: simulación 3

**Simulación 4:** En este caso se disminuye la tasa de diagnóstico y de protección y se aumenta la tasa de pérdida de la supresión viral.

En la figura 5, se puede ver que los protegidos descendieron a 400 y todas las poblaciones de infectados empiezan a crecer, en especial la de no diagnosticados que llega hasta los 800, donde se ve nuevamente la importancia de la tasa de diagnóstico.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000000999	$\alpha_1$	0.00125
$\beta_2$	0.0000000009999	$\alpha_2$	0.325
$\beta_3$	0.0000000000000091333	$\alpha_3$	0.605
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.0001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	1/864*400+1	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.00027	$\gamma_2$	0.00001

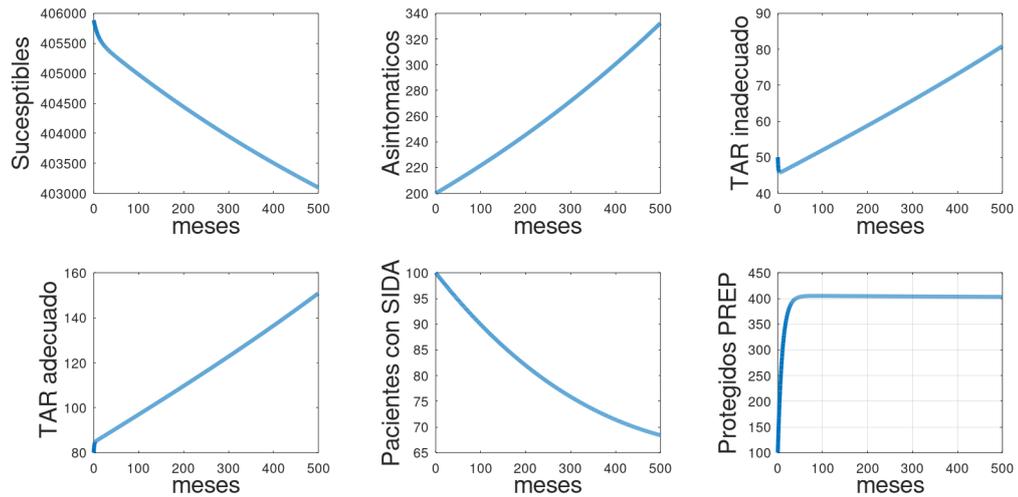


Figura 5: simulación 4

**Simulación 5:** Para esta simulación, el principal factor es la alta tasa de adquirir SIDA, la baja tasa de diagnóstico y la alta tasa de contagio.

Se puede ver en la figura 6, como disminuyen las poblaciones de infectados, pero aumentando en gran medida la población que adquiere SIDA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000005999999	$\alpha_1$	0.0000024
$\beta_2$	0.00000000589999	$\alpha_2$	0.325
$\beta_3$	0.00000000000000091333	$\alpha_3$	0.505
$m$	0.1	$\mu_1$	1/864
$c$	0.0001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	$1/864 \cdot 400 + 1$	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.027	$\gamma_2$	0.01

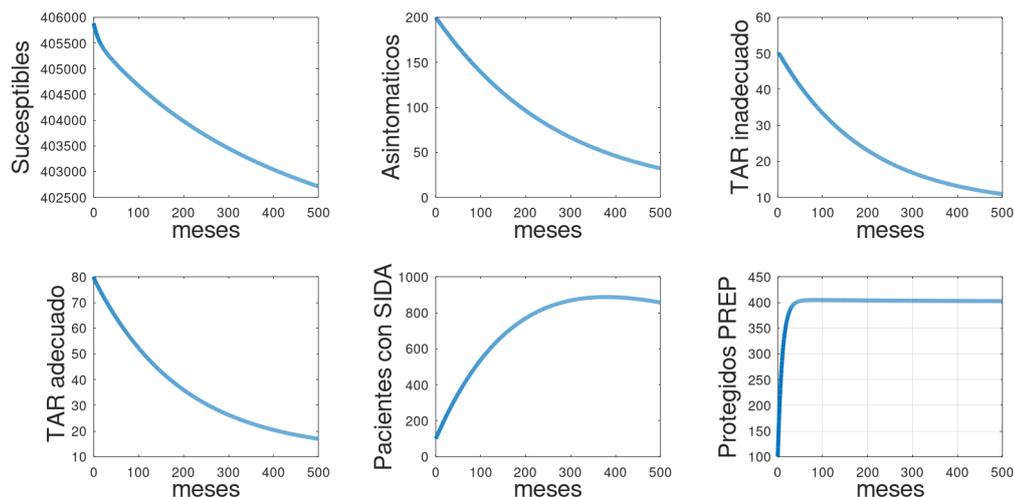


Figura 6: simulación 5

**Simulación 6:** A diferencia de la simulación 5, en este caso se aumenta la tasa de diagnóstico y se deja los demás parámetros igual.

En la figura 7, se puede ver que si bien los pacientes con SIDA crecen, la población no sobrepasa las 400 personas, en comparación con la simulación 5, que llegan hasta las 800 personas. También se puede ver que en un principio, las poblaciones de diagnosticados crecen y luego empiezan a decrecer, esto debido a la alta tasa de adquirir SIDA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000005999999	$\alpha_1$	0.024
$\beta_2$	0.00000000589999	$\alpha_2$	0.325
$\beta_3$	0.00000000000000091333	$\alpha_3$	0.505
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.0001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	1/864*400+1	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.027	$\gamma_2$	0.01

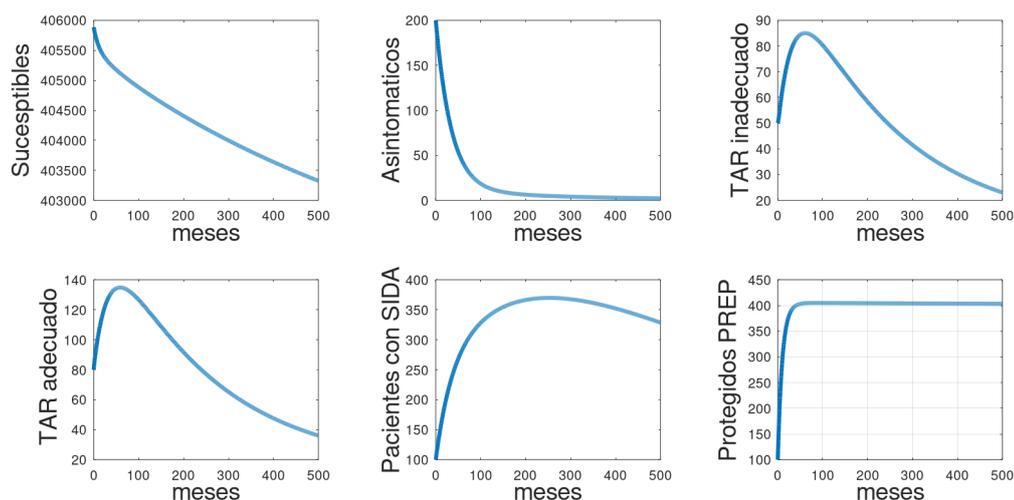


Figura 7: simulación 6

**Simulación 7:** En comparación con las simulaciones 5 y 6, se aumenta la tasa de prevalencia en la supresión viral y se disminuye la tasa de pérdida de la misma.

En la figura 9, se puede ver que nuevamente disminuye el crecimiento de los infectados con SIDA y en concordancia con la simulaciones anteriores, se aprecia la importancia del diagnóstico oportuno y la prevalencia en la supresión viral.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\beta_1$	0.00000005999999	$\alpha_1$	0.024
$\beta_2$	0.00000000589999	$\alpha_2$	0.125
$\beta_3$	0.0000000000000091333	$\alpha_3$	0.905
m	0.1	$\mu_1$	1/864
c	0.0001	$\mu_2$	1/660
$\lambda_1$	1/864*400+1	$\mu_3$	1/720
$\lambda_2$	0.000695994512201075	$\mu_4$	1/864
$\lambda_3$	0.1	$\mu_5$	1/600
$\gamma_1$	0.027	$\gamma_2$	0.01

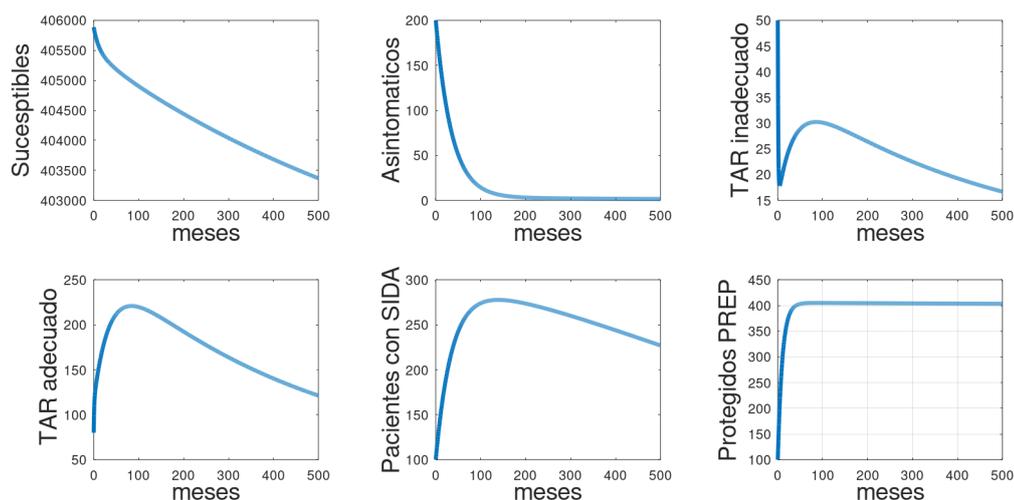


Figura 8: simulación 7

### 3.4 Estimación de parámetros

El modelo propuesto se usa para estimar las tasas de contagio de los infectados sin diagnóstico, sin supresión viral, y la tasa de diagnóstico, es decir las tasas  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\alpha_1$  respectivamente.

Para esta estimación, se toma la población de San Juan de Pasto, ciudad ubicada en el departamento de Nariño, en el suroccidente colombiano. La ciudad contaba con una población de 455678 habitantes en 2018 (Alcaldía de Pasto, 2020) y alrededor de 1765 personas vivían con VIH para el año 2019 (CAC, 2020). Esta ciudad se caracteriza por estar cerca de la frontera con Ecuador, lo que conlleva a que haya una alta afluencia de inmigrantes. Por otra parte, en los últimos once años, se ha visto como los casos positivos por VIH han incrementado notablemente, pasando de 105 casos nuevos en 2009 a 287 casos en 2019. Adicional a eso, entre estos años ha habido un número considerable de inmigrantes, lo que también ha influido en la transmisión de la enfermedad.

Para la estimación de parámetros, se usa unos valores dados para las razones y tasas que no se van a estimar, las cuales son:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\gamma_1$	0.000027	$\gamma_2$	0.000001
$\beta_3$	0.000000000025	$\alpha_3$	0.7297
$m$	0.1	$\mu_1$	1/924
$c$	0.001	$\mu_2$	1/900
$\lambda_1$	1/924*455678+1	$\mu_3$	1/912
$\lambda_2$	0.015	$\mu_4$	1/924
$\lambda_3$	0.001	$\mu_5$	21/(1558*12)
$\alpha_2$	0.2703		

Tabla 2: Tasas para la estimación de parámetros

Los parámetros están trabajados en meses. De las tasas presentadas, en el caso de la tasa de mortalidad natural  $\mu_1$ , de acuerdo a datosmacro.com (2019), la esperanza de vida en Colombia para el año 2019 era de 77 años, que en meses equivalen a 924, y por tanto, el valor de  $\mu_1$  se obtiene con la relación entre esperanza de vida y mortalidad.

De acuerdo a la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2020), debido al TAR, la esperanza de vida de las personas que viven con VIH, es muy similar a la de una persona que vive sin el virus. Teniendo en cuenta esto, para el caso de la tasa de mortalidad  $\mu_4$ , se usa la misma tasa de mortalidad natural; para el caso de la tasa  $\mu_3$ , se asume que las personas que viven con VIH, sin supresión viral, tienen una esperanza de vida de 76 años, equivalentes a 912 meses y para el caso de la tasa de mortalidad para los no diagnosticados, se asume que su esperanza de vida es de 75 años, equivalentes a 900 meses.

Respecto a la tasa de mortalidad por SIDA, de acuerdo al Fondo Colombiano de Enfermedades de Alto Costo (CAC, 2020):

Para el corte del 31 de enero de 2019 se presentaron 1.802 muertes en las personas con diagnóstico de VIH, de las cuales el 34,07% correspondieron a muerte por Sida, el 14,59% se consideró muerte por otra enfermedad no definitiva de Sida y el 29,74% fue por muerte por causa externa. Se desconoce la causa de la muerte en el 21,59% de los casos. (p. 76)

En el caso de Nariño, hubo 21 muertes de 1558 personas que vivían con VIH. Con esta información, la tasa de mortalidad por SIDA en meses es de  $\mu_5 = \frac{21}{1558*12}$ .

Respecto a las tasas de prevalencia en el TAR y pérdida de la supresión viral, de acuerdo al Fondo Colombiano de Enfermedades de Alto Costo (CAC, 2020), "De las Personas que viven con VIH, con tratamiento y activos (n=86.257), 62.186 tuvieron supresión viral (carga viral menor de 50 copias), es decir el 72,09%" (p. 87). Particularmente en Nariño hubo un 72,97% de personas con supresión viral y un 27.03% con TAR pero sin supresión. Estos porcentajes en decimal son los que se usan para las tasas  $\alpha_3$  y  $\alpha_2$  respectivamente.

Con estos valores, y tomando datos de los diagnosticados en Pasto de los años comprendidos entre 2009 y 2019, se obtuvo la siguiente estimación de parámetros.

**Estimacion beta<sub>1</sub> beta<sub>2</sub> alpha<sub>1</sub>**  
**valores parametros 2.10049e-06**  
**valores parametros 4.61802e-08**  
**valores parametros 4.63009e-05**

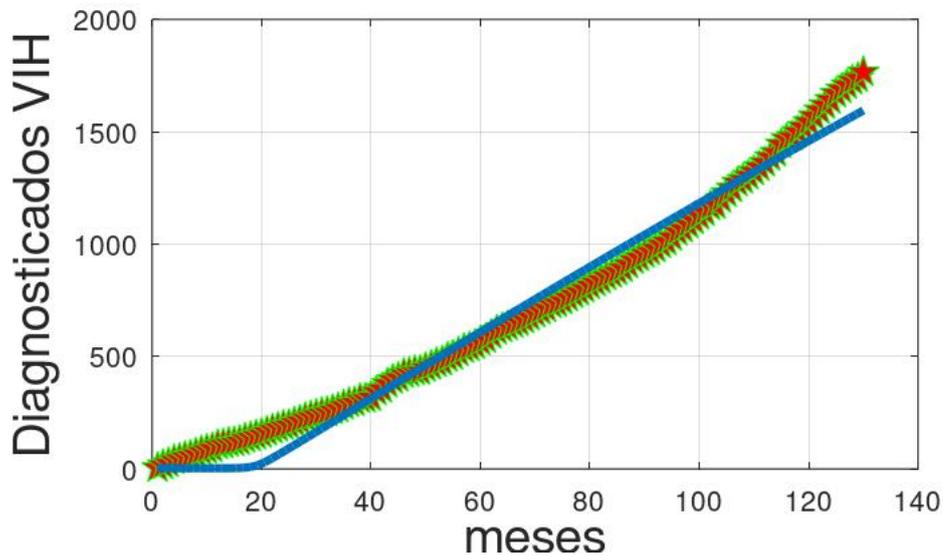


Figura 9: Estimación de parametros

En la figura 9, la curva de estrellas de color verde con rojo, representa los datos acumulados de los diagnosticados con VIH en Pasto, entre los años 2009- 2019. La curva de color azul es la estimación obtenida con el modelo matemático y el algoritmo empleado, en este caso el algoritmo genético.

Como se puede apreciar, existen altas tasas de infección  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , correspondientes a los infectados asintomáticos e infectados diagnosticados sin supresión viral, y además hay una baja tasa de diagnóstico  $\alpha_1$ , lo cual explica el crecimiento de infectados en esta población.

## 4 Discusión

### 4.1 Análisis teórico del modelo

El modelo matemático propuesto considera inmigración en las poblaciones de infectados sin diagnóstico y diagnosticados sin supresión viral. Estas razones de entrada de inmigración, hacen que el modelo solo cuente con un punto de equilibrio, el endémico, es decir, siempre va a haber enfermedad en la población. Al no haber un punto de equilibrio trivial o libre de la enfermedad, no se puede calcular el número reproductivo básico de la enfermedad o  $R_0$ , por lo cual, si se desea usar el modelo en una población con inmigración nula, existe una desventaja al no conocer el valor del  $R_0$  que es vital para saber el estado de progresión de la diseminación del VIH. Por otra parte, en la ciudad de Pasto, el empleo de este modelo matemático es adecuado para conocer el estado del VIH/SIDA, ya que, al ser el departamento de Nariño fronterizo con Ecuador y al existir una alta afluencia de inmigrantes, el modelo se acopla más a la realidad de la ciudad.

Otro elemento importante del modelo matemático está relacionado con la tasa de diagnóstico: En el modelo se considera que los infectados sin diagnóstico al ser diagnosticados, llegan directamente a la población de infectados con supresión viral, debido a la suposición de que ellos ingresan inmediatamente en el tratamiento antirretroviral, tienen pocos contactos sexuales y tienen una buena adhesión al tratamiento hasta lograr la supresión viral a los seis meses. Si bien es cierto que los nuevos diagnosticados tienen una alta carga viral, el acceso oportuno al TAR es clave para que por un periodo de seis meses se los considere infectados con supresión viral, así tengan una carga viral alta. Si el acceso al TAR es inadecuado, el modelo matemático cambiaría y, por tanto, los nuevos diagnosticados irían a los infectados sin supresión viral, donde muy probablemente en este escenario, haya una mayor población de infectados en general. Esto genera una limitación en el modelo, puesto que si se desea emplearlo para simulaciones numéricas, solo se podrá hacer en lugares donde el acceso al TAR sea oportuno y adecuado después del diagnóstico.

Respecto a la población de protegidos, el hecho de no considerar mortalidad natural se debe a la suposición de que la tasa de pérdida de la protección es más alta que la de adquisición. En Colombia, y en particular en Pasto, la profilaxis previa a la exposición es una herramienta de protección contra el VIH que muy pocas personas conocen y pueden acceder. El implementar esta estrategia, requiere de campañas públicas, de información y de inversión de recursos por parte del estado. Ahora bien, si se considera mortalidad natural, el punto de equilibrio del modelo cambiaría, y para las simulaciones numéricas, es muy importante considerar que las tasas de pérdida y adquisición deben estar cercanas entre sí, pudiendo ser más grande la tasa de adquisición que la de pérdida.

### 4.2 Simulaciones numéricas

Es importante mencionar que estudios hechos en África como el de Nsuami M Peter J, (2018), concluyen la importancia del tratamiento antirretroviral y de la profilaxis previa a la exposición en el control de la diseminación de la enfermedad y por otra parte, estudios como el de Toro H., Mesa M. y Prieto D., concluyen que el diagnóstico puede ayudar a disminuir los casos de VIH, pero, basarse solo en esta estrategia no es

tan efectivo para controlar la propagación del virus, por lo que combinar estas dos estrategias en una población con altas tasas de infección, puede ayudar a que se controle notablemente la diseminación de la enfermedad. Esto se vio en las simulaciones numéricas del modelo propuesto, donde claramente se resalta la importancia de una alta tasa de diagnóstico y de prevalencia en la supresión viral. Además, hay que tener en cuenta las tasas de pérdida de la supresión viral y de adquisición del SIDA, ya que al tener estos valores muy bajos, se contribuye a que la enfermedad se controle.

### **4.3 Estimación de parámetros**

En la estimación de parámetros, es importante destacar las altas tasas de infección y la baja tasa de diagnóstico encontradas. En Pasto se ha visto como los casos nuevos por VIH/SIDA han aumentado en los últimos años y siguen en aumento, que a futuro se puede convertir en un problema de salud pública. En este sentido, en Pasto se debe priorizar el acceso al TAR y realizar campañas de concientización para aumentar el diagnóstico oportuno en la población sexualmente activa, ya que esto puede conllevar a disminuir la tasa de contagios y aumentar la tasa de diagnóstico.

## 5 Conclusiones

- Los escenarios epidemiológicos considerados en las simulaciones numéricas, mostraron la importancia del diagnóstico oportuno y el uso de antirretrovirales en el control de la enfermedad. Por su parte, el diagnóstico oportuno disminuye la cantidad de infectados sin diagnóstico, por lo cual hay una disminución general de nuevos infectados. Mientras, el uso de los antirretrovirales para lograr la supresión viral, disminuye los nuevos infectados y también se convierte en una importante herramienta para que los infectados diagnosticados no pasen al estado del SIDA. El uso de estas dos estrategias combinadas, pueden ayudar notablemente en la disminución de la diseminación de la enfermedad y también en controlar el número de personas que llegan al estado del SIDA, ayudando así en el bienestar de los infectados sintomáticos.
- Nuestro modelo considera el PrEP, estrategia que mantiene una cantidad constante de protegidos más propensos a contraer el VIH. El implementar esta estrategia en una población, requiere de concientización y una inversión alta recursos por parte del estado, para que las personas en mayor riesgo de contraer el VIH, puedan acceder sin complicaciones al tratamiento. Dependiendo que tan efectiva sea la concientización del uso del PrEP, en el futuro se puede llegar a una cantidad constante de protegidos, los cuales evitaban que se incrementen los contagiados.
- Según Toro et al., (2014), una estrategia de contención de la diseminación de la enfermedad centrada solo en el diagnóstico oportuno, no es suficiente para el control de la enfermedad. En nuestro modelo, se ha visto como el diagnóstico contribuye a disminuir la población de infectados sin diagnóstico, sin embargo, si no se trata tempranamente el VIH con los antirretrovirales, la cantidad de nuevos infectados seguirá creciendo pese a prevalecer una buena estrategia de diagnóstico. Por tanto, el empleo del diagnóstico oportuno y un pronto uso del TAR, contribuye a que se controle la diseminación de la enfermedad, a controlar la mortandad por SIDA y a que se garantice una vida estable a los infectados. Esto se puede apreciar en las simulaciones numéricas del modelo y va en concordancia con el estudio hecho en Sudáfrica de Nsuami y Witbooi, (2018), donde se concluyó que " El manejo del VIH con tratamiento temprano puede disminuir la transmisión y posiblemente disminuir el número de muertes relacionadas con el SIDA" .

## 6 Recomendaciones

- Si se desea emplear el modelo matemático para realizar simulaciones numéricas en una población específica, es muy importante tener en cuenta la afluencia de inmigrantes, el tiempo de acceso al tratamiento antirretroviral y ver si en las estrategias de protección esta la profilaxis previa a la exposición. Con estas condiciones favorables para el modelo, los resultados serán más realistas y se aproximarán muy adecuadamente a la situación del VIH/SIDA en dicha población.
- Para contener la propagación del VIH/SIDA, es muy importante concientizar en el diagnóstico de la enfermedad, en hacer pruebas recurrentes para las poblaciones que tienen más probabilidad de adquirir el VIH y también tener un acceso rápido y prevalente a los TAR, ya que así se evita que se llegue al estado del SIDA y los infectados lleven una vida normal.
- En la ciudad de San Juan de Pasto es muy importante intensificar campañas que ayuden a promover el diagnóstico de la enfermedad, debido a que la baja tasa de diagnóstico existente, ha ayudado a que el crecimiento de los nuevos infectados cada vez sea más alto. Si bien en Pasto el acceso al TAR es adecuado, respecto al diagnóstico no ha habido una adecuada concientización respecto a su importancia. También es importante concientizar respecto al estado actual del VIH en la ciudad, puesto que el crecimiento de los infectados se acelera con el pasar del tiempo.

## Referencias

- Alcaldía de Pasto. (2020, 20 de Julio). *Estadísticas-Municipio de Pasto*.  
<https://www.pasto.gov.co/index.php/nuestro-municipio/estadisticas>
- Centros para el Control y Prevención de Enfermedades. (2021, 7 de Junio). *Acerca del VIH/SIDA*.  
<https://www.cdc.gov/hiv/spanish/basics/whatishiv.html>
- Centros para el Control y Prevención de Enfermedades. (2022, 24 de Junio). *Diagnóstico reciente del VIH*.  
<https://www.cdc.gov/hiv/spanish/basics/livingwithhiv/newly-diagnosed.html>
- Fondo Colombiano de Enfermedades de Alto Costo, Cuenta de Alto Costo (CAC). (2020) *Situación del VIH en Colombia 2019*; Bogotá D.C.
- Datos Macro. (2019, 1 de noviembre). *Esperanza de vida al nacer*.  
<https://datosmacro.expansion.com/demografia/esperanza-vida>
- Alavez, J., López-Estrada, J., Vargas-De-León, C. y Cano, Malaquias. (2015).  
*Un modelo matemático para el VIH/SIDA*. Journal of Basic Sciences. 1.
- Nsuami, M.U.& Witbooi, P.J. (2018). *A model of HIV/AIDS population dynamics including ARV treatment and pre-exposure prophylaxis*. Advances in Difference Equations, 11.  
<https://doi.org/10.1186/s13662-017-1458-x>
- Organización Mundial de la Salud [OMS]. (2022, 27 de Julio). *Infección por el VIH*.  
<https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids>
- Ram, S. & McCluskey, C. (2014) *Global stability for an SEI model of infectious disease with immigration*, Applied Mathematics and Computation, 243, 684-689.
- Toro, H., Prieto, D. y Mesa, M. (2014). *Modelo de simulación para la transmisión del VIH y estrategias de control basadas en diagnóstico*. Revista de Salud Pública, 16(1), 139-152.  
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=42232032012>