

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Caracterización de las imágenes de un sistema de
lente gravitacional mediante el análisis de los
isocontornos de la superficie de tiempo de atraso

James Fernando Insandaré Tacán
Director: Edwin Alexander Delgado Insuasty.

San Juan de Pasto, enero de 2023

Contenido

1. Planteamiento del Problema	3
2. Justificación	3
3. Objetivos	4
3.1. General	4
3.2. Objetivos Específicos.	5
4. Marco referencial	5
4.1. Linealización de las ecuaciones de campo.	6
4.1.1. Ecuación de las geodésicas.	7
4.1.2. Deducción del ángulo de deflexión.	9
4.2. Distancia de diámetro angular.	11
4.3. Ecuación de la lente para una masa puntual	13
4.4. Superficie tiempo de atraso	16
4.4.1. Tiempo de atraso gravitacional	16
4.4.2. Tiempo de atraso geométrico	18
4.4.3. Tiempo de atraso total	19
4.5. Amplificación y Magnificación	20
4.5.1. Formación de imágenes y líneas críticas	23
4.6. Análisis del sistema PG1115+80.	26
5. Metodología	28
6. Cronograma	29
7. Presupuesto	30
8. Resultados Esperados	31

1. Planteamiento del Problema

A lo largo de la historia, el conocimiento científico ha surgido como resultado de un trabajo colectivo para responder a cuestiones fundamentales sobre la naturaleza del universo. El desarrollo de las ciencias naturales, particularmente de la física, ha estado estrechamente ligado a este esfuerzo, con disciplinas como la astrofísica y la cosmología jugando un papel central en la comprensión de fenómenos que trascienden nuestro entorno inmediato.

Entre estos fenómenos, las lentes gravitacionales destacan por su capacidad de manifestarse cuando una distribución considerable de masa, como una galaxia o un cúmulo de galaxias, curva la trayectoria de la luz proveniente de un objeto distante, permitiendo así la formación de imágenes del mismo. La comprensión de la distribución de masa del objeto deflector es crucial para el estudio de este fenómeno; en muchos casos ha sido posible describir con gran precisión estos sistemas simulando las lentes como una masa puntual, una esfera isoterma, un elipsoide isotérmico, entre otros. Sin embargo, existen sistemas que no son descritos adecuadamente por los modelos teóricos actuales, lo que señala la necesidad de profundizar en alternativas que, empleando lo ya conocido, permitan una descripción más precisa de estos sucesos. En este contexto, la clasificación de imágenes surge como una herramienta para la descripción de estos fenómenos, a través de la comprensión de la formación, ubicación, tamaño, luminosidad y otras propiedades asociadas a las mismas.

Con base en lo anterior, este proyecto busca estudiar, comprender, e implementar este método, mediante la **clasificación de la formación de imágenes en diversos sistemas de lente gravitacional, explorando su relación con los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso generada por la distribución de masa de la lente. Además, se busca entender cómo las líneas críticas se relacionan con la generación de estas imágenes y sus respectivas características.**

En resumen, este proyecto busca responder a la siguiente pregunta: *¿Cómo se caracterizan las imágenes de un sistema de lente gravitacional de acuerdo con la topología de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, y cuál es el papel de las líneas críticas en este fenómeno?*

2. Justificación

En la actualidad, las lentes gravitacionales son relevantes dado que posibilitan el desarrollo en campos de alto interés científico, como la astrofísica [1, 2] y la cosmología [3, 4, 5]. Un ejemplo es su función como “telescopios naturales”, que permiten el análisis de objetos distantes que, debido a su lejanía, son imposibles de estudiar con la sensibilidad actual de los instrumentos de medición [6, 7]. Además, tienen aplicabilidad como herramienta alternativa en la búsqueda de exoplanetas [8, 9] y estimación de los parámetros cosmológicos [10, 11].

Las lentes gravitacionales, especialmente en su manifestación de lensamiento fuerte, dan lugar a la formación de imágenes múltiples y distorsionadas de los objetos lejanos [12, 13, 14]. Este fenómeno no solo proporciona una herramienta poderosa para estudiar la distribución de masa en el universo, sino que también abre ventanas hacia la comprensión de la estructura y evolución del cosmos [15, 16] .

En particular, muchos de los modelos teóricos han sido eficientes en la descripción de lentes gravitacionales reales; sin embargo, se han observado algunos sistemas que no se ajustan a lo descrito en la literatura, ya sea por el número de imágenes observadas, la dificultad para inferir la distribución de masa asociada a la lente, la luminosidad de la fuente u otros factores [17, 18]. Una forma de abordar estas inquietudes es mediante la caracterización topológica de las imágenes. Un ejemplo de esto es el trabajo de Blandford y Narayan [19], que, mediante el estudio de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, buscan inferir la distribución del objeto deflector. Además, este enfoque puede ser de gran utilidad en la estimación de los parámetros cosmológicos, determinación de la constante de Hubble, la evolución del cosmos o la naturaleza de la materia oscura [20, 21, 22, 23] .

Así, debido a su alto impacto en la investigación contemporánea, es esencial estudiar a profundidad estos fenómenos. Sin embargo, en la Universidad de Nariño solo existen dos precedentes sobre este tema [24, 25], tal que abordar el estudio desde aspectos básicos se considera de interés, es así que, aprovechando el conocimiento previo se pueda conformar fundamentos sólidos en esta rama. Por lo anterior, estudiar la relación entre la formación de las imágenes con el potencial gravitacional y las líneas críticas no solo es relevante, sino que también se alinea con los objetivos del proyecto, que buscan ampliar el entendimiento sobre sistemas de lentes gravitacionales desde una perspectiva objetiva, desarrollando herramientas numéricas (código en Python) que puedan ser empleadas para investigaciones futuras.

Los resultados esperados, como lo son la caracterización de las imágenes y la determinación del papel que desempeñan las líneas críticas en este proceso, contribuirán directamente a estos objetivos y se pretende que constituyan un material de apoyo para futuros proyectos.

3. Objetivos

3.1. General

Realizar un análisis de la formación de imágenes en diversos sistemas de lente gravitacional, mediante una categorización basada en el estudio de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, vinculada a la distribución de masa del objeto deflector a través del potencial gravitacional.

3.2. Objetivos Específicos.

- Estudiar la ecuación de las lentes gravitacionales delgadas, para comprender su aplicación en el análisis de formación de imágenes.
- Deducir las ecuaciones de tiempo de atraso y líneas críticas para diferentes modelos de potenciales gravitacionales, incluyendo lente puntual, esfera isotérmica singular, esfera isotérmica no singular, elipsoide isotérmico, entre otros.
- Desarrollar o adaptar un código en Python que calcule el tiempo de atraso entre las imágenes generadas, además de permitir la visualización tanto de los isocontornos como de las líneas críticas del sistema de lente gravitacional.
- Comparar los resultados obtenidos con el código desarrollado para diversas distribuciones de masa en sistemas reales de lente gravitacional, evaluando la consistencia de las predicciones.
- Analizar los datos obtenidos a lo largo del proyecto y desarrollar conclusiones que resuman los hallazgos del mismo.

4. Marco referencial

Las lentes gravitacionales son un fenómeno de alto interés, ya que su descripción teórica involucra distintas disciplinas de la física, tales como la cosmología, la óptica y la relatividad. En este capítulo, se expondrá respectivamente cada una de estas y se detallará su relevancia para la explicación teórica formal de un sistema de lente gravitacional.

Es importante resaltar que, dada la diversidad de ramas físicas que abordan este fenómeno y con el propósito de garantizar coherencia a lo largo del proyecto, se adoptará para la métrica una signatura $(+, -, -, -)$. Además, en cuanto al sistema de unidades, se empleará el sistema Internacional de Unidades (SI).

En este contexto, las ecuaciones de campo de Einstein describen la relación existente entre materia (o cualquier manifestación de la energía y del momento) y la geometría del espacio-tiempo. Matemáticamente pueden ser representadas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

tal que, en el lado izquierdo de la igualdad se encuentran los términos asociados a la geometría del espacio, como lo son: la métrica ($g_{\mu\nu}$), el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) y el escalar de curvatura (R). Mientras que, en el lado derecho se describe la distribución de la energía y del momento del espacio-tiempo mediante el tensor energía-momento ($T_{\mu\nu}$).

La solución a estas ecuaciones, ésta dada por las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual describe la geometría del espacio-tiempo, permitiendo calcular distancias, ángulos y volúmenes sobre el mismo.

De manera puntual, es de interés introducir la métrica de Schwarzschild la cual es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, que describe el efecto del campo gravitacional debido a una distribución de masa esféricamente simétrica, tal que, en coordenadas esféricas el intervalo espacio-temporal es representado como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2)$$

Aquí se introduce la definición del radio de Schwarzschild (r_s) mediante la siguiente expresión

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

el cual describe el horizonte de eventos debido a un agujero negro estático o también denominado agujero negro de Schwarzschild.

Partiendo de la anterior solución, es posible realizar una primera aproximación tal que, al describir la geometría del espacio-tiempo en un punto lo suficientemente alejado de la distribución de masa, el intervalo espacio-temporal puede ser escrito en coordenadas cartesianas, de la siguiente manera

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4)$$

En general, la relevancia de la métrica de Schwarzschild radica en que es la primera solución obtenida para las ecuaciones de campo de Einstein. Además, postula la existencia de fenómenos peculiares, como los agujeros negros, los cuales hoy en día ya han sido confirmados. Por otro lado, da lugar a la aproximación de campo débil, muy importante dado que, a partir de la relatividad general, permite el análisis de una variedad de fenómenos físicos de manera práctica en los cálculos, como por ejemplo, sistemas de lente gravitacional, ondas gravitacionales, entre otros. Es decir, la aproximación permite estudiar fenómenos gravitacionales donde las no linealidades de la relatividad general pueden ser ignoradas.

4.1. Linealización de las ecuaciones de campo.

La deflexión de la luz es una de las principales consecuencias físicas de las ecuaciones de campo de Einstein, y es fundamental para la descripción del fenómeno de lente gravitacional. Su estudio se realiza empleando la aproximación lineal, y en esta subsección se sigue la deducción en los capítulos 3 y 4 de la referencia [26].

Como punto de partida, se considera una distribución de masa tal que el campo gravitacional asociado sea débil y pueda ser interpretado como una perturbación sobre un espacio-tiempo plano. Si se caracteriza dicha alteración como $h_{\alpha\beta}$ y dado que se pretende ignorar los efectos gravitacionales de segundo orden o mayor, se establece que $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. En consecuencia, la métrica asociada al espacio-tiempo puede ser representada por

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} . \quad (5)$$

Ahora, se conoce que las ecuaciones de campo de Einstein deben ser las mismas para todos los observadores, tal que por medio del jacobiano que se describe la relación entre los mismos ($J_\mu^\alpha = \partial x'^\alpha / \partial x^\mu$). De lo anterior, se tiene que al tender hacia una región distante al campo gravitacional, el jacobiano se aproxima a las ecuaciones de transformación de Lorentz, es decir, $J_\mu^\alpha \rightarrow \Lambda_\mu^\alpha$.

Por lo tanto, resulta de interés estudiar las reglas de transformación asociadas a la métrica en este contexto, de modo que, al realizar una transformación de coordenadas sobre $g_{\alpha\beta}$, se deduce que transforma como un tensor de rango dos, como se demuestra a continuación

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} + \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta h_{\alpha\beta} . \quad (6)$$

En este punto, por definición, se espera que la transformación sea de la siguiente manera: $g'_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$. Es así que, al relacionar ambas expresiones bajo la aproximación de campo débil, se aprecia que el término $h_{\mu\nu}$ transforma como cualquier tensor sobre el espacio-tiempo plano, es decir

$$h'_{\mu\nu} \equiv \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta h_{\alpha\beta} , \quad (7)$$

como consecuencia, el desarrollo matemático permite la implementación de las herramientas asociadas a la relatividad especial.

Análogamente, es pertinente determinar la representación contravariante del factor de perturbación, donde, a partir de $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} h_{\mu\nu}$, se obtiene el siguiente resultado

$$h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\mu\nu} . \quad (8)$$

Lo resuelto anteriormente es vital, dado que permite conocer la forma geométrica del espacio-tiempo y los medios para trabajar con ella [27]. Desde la perspectiva de la física, es de interés la descripción de la distancia entre dos puntos (también llamados eventos) sobre el espacio-tiempo caracterizado por la métrica, tal que, son las líneas geodésicas el medio para representar (de manera local) la línea de mínima longitud.

4.1.1. Ecuación de las geodésicas.

Una vez establecidas las características asociadas al espacio-tiempo de interés, lo siguiente es determinar el comportamiento de los objetos físicos en este contexto. Se considera que

las partículas a describir son libres, es decir, solo se encuentran bajo la influencia del campo gravitacional. Es por lo anterior que se toma como punto de partida el principio de mínima acción, obteniendo así

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = 0, \quad (9)$$

tal que el argumento de la integral corresponde a la lagrangiana del sistema, $\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$. La solución a la anterior ecuación se obtiene por medio del desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange, tomando en consideración la métrica del espacio-tiempo ($g_{\alpha\beta}$). Al desarrollar lo previamente descrito se deduce que la ecuación de la geodésica es

$$\frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + h_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (10)$$

donde al llevar a cabo la derivada respecto al tiempo propio sobre el primer término, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + h_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} + h_{\alpha\mu,\beta} \frac{x^\alpha}{d\tau} \frac{x^\beta}{d\tau} + h_{\alpha\mu} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x^\alpha}{d\tau} \right), \quad (11)$$

siendo el tercer término a la derecha proporcional a $|h_{\alpha\beta}|^2$, permitiendo ser así despreciado. Lo anterior se fundamenta en que $\left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x^\alpha}{d\tau} \right) \right|$ describe una aceleración asociada a la curvatura del espacio-tiempo, es decir: $\left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x^\alpha}{d\tau} \right) \right| \propto |h_{\alpha\beta}|$.

Ahora, con el fin de representar la ecuación de las geodésicas en una forma que describa las trayectorias de las partículas en función del momento de las mismas, se introduce una masa m arbitraria. Análogamente se usaran definiciones como la de la cuadrivelocidad y la del cuádrimomento.

Es así que al implementar todo lo descrito anteriormente sobre la ecuación 10, se obtiene que

$$dP_\mu + \left(h_{\alpha\mu,\beta} P^\alpha - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu} P^\alpha \right) dx^\beta = 0, \quad (12)$$

donde esta expresión representa la ecuación de las geodésicas para un espacio-tiempo curvo, dada una perturbación débil, siendo independiente tanto del tiempo propio como de la masa, permitiendo así ser empleada para la descripción de la luz. Además, permite estudiar las trayectorias de las anteriores y cómo estas se modifican al situarse en las proximidades de un campo gravitacional, lo que es denominado deflexión de la luz.

4.1.2. Deducción del ángulo de deflexión.

El ángulo de deflexión caracteriza el cambio en la trayectoria de haz de luz al pasar cerca de un cuerpo masivo. Para determinar este ángulo, en la ecuación 12 se considerarán los cuadrimomentos contenidos en el paréntesis como constantes, de tal manera que al integrar, se deduce que el cambio del momento en los fotones corresponde a

$$\Delta P_\mu = -P^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_{\alpha\mu,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu} \right] dx^\beta. \quad (13)$$

Dado que el contexto involucra la descripción de un espacio-tiempo asintóticamente plano, la primera integral, al ser evaluada, resulta ser nula. Por ende, el cambio en los momentos únicamente es caracterizado por

$$\Delta P_\mu = \frac{P^\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\alpha\beta,\mu} dx^\beta. \quad (14)$$

Para continuar con el desarrollo teorico, se considera oportuno establecer el siguiente sistema de referencia

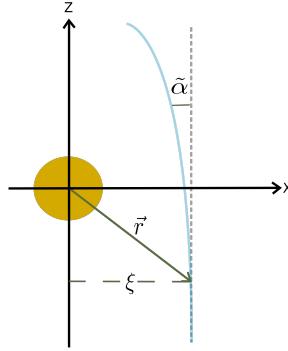


Figura 1: Deflexión de un haz de luz debido a un cuerpo masivo con simetría esférica, dando como resultado el ángulo de deflexión ($\tilde{\alpha}$)

En donde la Figura 1 introduce el parámetro de impacto, comúnmente denominado por ξ . Este parámetro representa respecto al eje x , la distancia a la cual el haz de luz comienza a ser deflectado respecto al centro gravitacional de la distribución de masa.

Ahora, dada la relación existente entre espacio-tiempo, es posible analizar el cambio en la trayectoria del fotón por medio de la siguiente representación $dx^\mu = (dz, 0, 0, dz)$. Como consecuencia, se tiene que la descripción de los cuadri-momentos es

$$P^\mu \cong (P^3, 0, 0, P^3). \quad (15)$$

Implementando este resultado sobre la ecuación 14, se obtiene que el cambio en el momento del haz de luz resulta en

$$\Delta P_1 = \frac{P^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (h_{00,1} + h_{03,1} + h_{30,1} + h_{33,1}) dz . \quad (16)$$

Por otro lado, la representación matricial de la métrica de Schwarzschild en coordenadas cartesianas, bajo la aproximación de campo débil 4, corresponde a

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \frac{2GM}{rc^2} \end{pmatrix} , \quad (17)$$

y dado que la métrica es descrita por medio de $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, se encuentra que las componentes diferentes de cero en el termino de perturbación se ubican sobre la diagonal principal, es decir

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2GM}{rc^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2GM}{rc^2} \end{pmatrix} . \quad (18)$$

Tomando en cuenta lo anterior, y considerando que $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, la ecuación 16 pasa a ser de la siguiente forma

$$\Delta P_1 = -\frac{2GMP^3}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \Big|_{x=\xi} \right] dz , \quad (19)$$

de modo que, tras el desarrollo matemático de la derivada e integral, se deduce que el cambio sobre el eje x del momento del haz de luz es descrito por

$$\Delta P_1 = \frac{4GM}{c^2\xi} P^3 , \quad (20)$$

además, de acuerdo con el sistema de referencia, se determina que la magnitud del ángulo de deflexión corresponde a $\tilde{\alpha} = \Delta P_x / P_z$. Como resultado, el modulo del ángulo de deflexión está caracterizado por

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi} . \quad (21)$$

Es necesario mencionar que, en general, la deducción del ángulo de deflexión mediante esta aproximación es correcta. Sin embargo, en casos específicos, como cuando la lente es muy compacta (estrella de neutrones o agujero negro), la solución deja de ser viable dado que los fotones interactúan con un campo gravitacional extremadamente fuerte. Es posible determinar un ángulo de deflexión para estos casos puntuales, pero la solución requiere de un enfoque numérico. Una manera de evaluar la validez de la aproximación del ángulo de deflexión es considerar la relación de este respecto al parámetro de impacto. Al representar tanto la solución numérica como la obtenida desde la aproximación lineal, se observa que, al alejarse de la

lente, ambas soluciones son congruentes, mientras que, al acercarse, las soluciones divergen completamente.

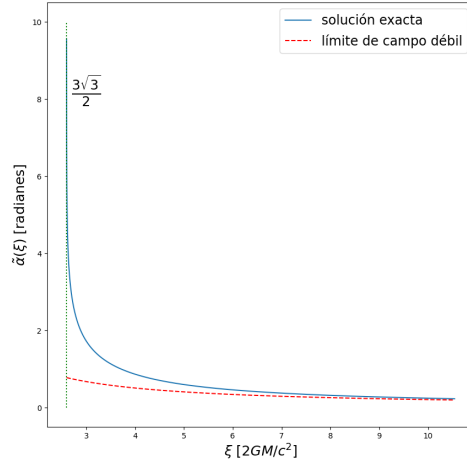


Figura 2: Ángulo de deflexion en su aproximacion y solucion numérica en funcion del parametro de impacto [28].

La Figura 2 describe el comportamiento de ambas soluciones (bajo la influencia de un campo gravitacional fuerte) en función del parámetro de impacto ξ , el cual se encuentra descrito en relación al radio de Schwarzschild. Se aprecia el punto en el cual la solución numérica diverge, correspondiente a $\xi = 3\sqrt{3}GM/c^2$ (línea verde), representando físicamente el punto en el cual el fotón ya no logra escapar del campo gravitacional, manteniéndose así girando alrededor de la distribución de masa [28]. Por otro lado, demuestra cómo ambas soluciones son congruentes a partir de $\sim 6r_s$.

4.2. Distancia de diámetro angular.

Es la cosmología la encargada de estudiar el universo observable a gran escala, considerando su origen, estructura y dinámica, permitiendo así la descripción de múltiples fenómenos físicos, entre los cuales se encuentra el efecto de lente gravitacional. Una parte importante dentro de esta disciplina es la estimación de las distancias cósmicas, que, debido a la magnitud de las escalas, puede presentar un reto al momento de la estimación del tamaño de un objeto, obteniendo que, según el método empleado, existan variaciones respecto a la magnitud del mismo [26]. Por lo anterior, se considera fundamental la introducción de herramientas que permitan el análisis riguroso de estas distancias, tanto de manera teórica como experimental. En virtud de lo descrito, se introduce la distancia de diámetro angular, la cual describe la relación existente entre el tamaño de un objeto físico y el ángulo que cubre en el cielo desde la perspectiva de un observador, como se representa en la Figura 3. En cuanto a la formulación matemática se sigue la referencia [29].

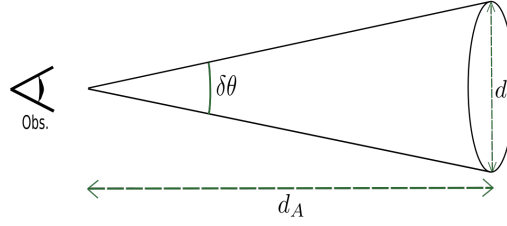


Figura 3: Definición de la distancia de diámetro angular d_A .

Para el desarrollo analítico, es requerida la introducción de los siguientes dos conceptos: primero, la aproximación de ángulo pequeño ($\tan \delta\theta \approx \delta\theta$) y segundo, que la distancia de diámetro angular sea mucho mayor que el tamaño transversal del objeto ($d_A \gg d$). De ahí que, junto a las relaciones trigonométricas de la Figura 3, se describe la distancia de diámetro angular como

$$d_A = \frac{d}{\delta\theta} . \quad (22)$$

Con el fin representar lo anterior sobre el contexto de la cosmología, se describe un nuevo sistema, siendo representado en coordenadas esféricas. Adicionalmente, se propone que para un tiempo t_e , se produzca la emisión de dos rayos provenientes desde los extremos de un objeto distante, de manera que convergan para el observador al mismo instante de tiempo, caracterizado por t_0 . La ilustración de éste sistema corresponde a la Figura 4.

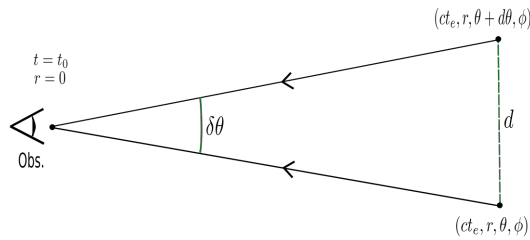


Figura 4: Distancia de diámetro angular para un objeto en un universo en expansión.

Además, dado que el diámetro angular es muy pequeño y que, por la configuración, r y ϕ son constantes, se deduce que el tamaño angular del objeto corresponde a

$$\delta\theta = \frac{d}{a(t_e)r} , \quad (23)$$

sobre el cual se ha incluido el factor de escala¹ ($a(t)$), para representar cómo se modifica la distancia al objeto como consecuencia de la expansión del universo.

¹El factor de escala es una función que describe como cambian las distancias y los tiempos a medida que el universo se expande.

De lo anterior, al sustituir el tamaño angular del objeto en la ecuación 22, se permite determinar que en general, la distancia de diámetro angular de un objeto en un universo en expansión es

$$d_A = a(t_e)r . \quad (24)$$

En este punto, es importante introducir la definición de distancia propia, la cual representa la separación entre dos puntos en el cosmos considerando tanto la geometría del universo, como su expansión. Es caracterizada por cantidades claves, como lo son: La distancia de Hubble crucial para relacionar la velocidad de recesión y la distancia de los objetos, representada por ($D_H = c/H_0$), donde H_0 es la constante de Hubble; El corrimiento al rojo (z), que indica cómo la longitud de onda asociada a la luz de los objetos varía debido a la expansión del universo; y, por último, el factor de evolución ($E(z)$), el cual describe cómo es la expansión del universo en función del corrimiento al rojo, el cual es matemáticamente

$$E(z)^2 = \Omega_{m[0]}(1+z)^3 + \Omega_{\gamma[0]}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k[0]}(1+z)^2 , \quad (25)$$

siendo descrito mediante los parámetros de densidad de materia (Ω_m), radiación (Ω_γ), energía oscura (Ω_Λ) y curvatura (Ω_k) en la actualidad.

De lo anterior, se tiene que, la distancia propia (d_p) es matemáticamente representada de la siguiente manera

$$d_p = \frac{D_H}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} . \quad (26)$$

Ahora se tiene que la magnitud entre el observador y el lugar en el cual se encontraba el objeto al momento de emitir los dos haces de luz en el instante (t_e) corresponde a la distancia propia, es decir, $r \equiv d_p$. En consecuencia, la distancia de diámetro angular toma la siguiente forma:

$$d_A = \frac{D_H}{(1+z)^2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} . \quad (27)$$

Esta última es relevante en el contexto tratado a lo largo de esta sección, permitiendo, por ejemplo, el estudio de los diferentes modelos cosmológicos, los cuales son fundamentales para entender la evolución del universo. Otra aplicación de interés es la estimación de distancias a objetos lejanos en el cosmos, lo que representa una herramienta esencial para el desarrollo teórico de la teoría de lentes gravitacionales.

4.3. Ecuación de la lente para una masa puntual

Como se ha descrito en capítulos anteriores, las herramientas para la descripción del fenómeno de lente gravitacional abarcan tanto la relatividad general como la cosmología. La convergencia de estas disciplinas resalta la importancia de estudiar este fenómeno, ya que su comprensión objetiva implica una profundización en múltiples áreas clave de la física. Ahora bien,

para la descripción teórica, debido a la magnitud de las distancias involucradas, el desarrollo se realiza desde la perspectiva de la óptica geométrica y se modela a las lentes como objetos bidimensionales.

En general, un sistema de lente gravitacional considera la formación de una o varias imágenes (I) como consecuencia de la interacción entre la lente (L) y la fuente (S) respecto a un observador (O). Por lo anterior, se toma como punto de partida el caso de mayor simplicidad, es decir, cuando la lente corresponde a una distribución de masa puntual, siendo esquematizado el sistema en la Figura 5. Los cálculos están basados en la sección 3.1.1 de la fuente [30].

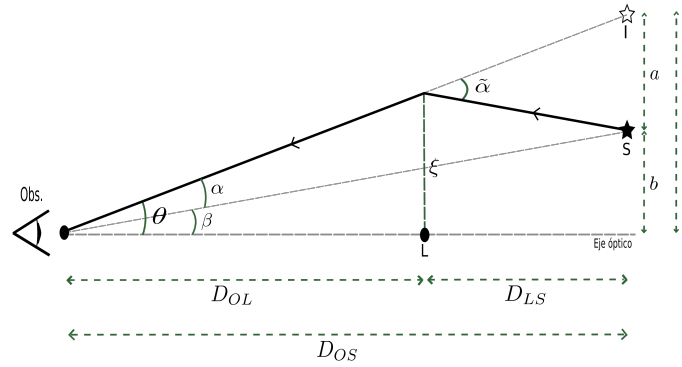


Figura 5: Configuración de un sistema lente gravitacional debido a una masa puntual

De lo anterior, se tiene que respecto a la parte espacial, las distancias que caracterizan el sistema son: distancia entre observador y lente (D_{OL}), distancia entre observador y fuente (D_{OS}) y distancia entre lente y fuente (D_{LS}). La unidad de medida de las anteriores es el megapársec [Mpc].

Por otro lado, para el observador, es posible representar la posición de cada uno de los objetos mediante un ángulo respecto al eje óptico², denotándolos como: posición de la fuente (β), posición de la(s) imagen(es) (θ), posición de las imágenes respecto a la posición de la fuente (α) y finalmente el ángulo de deflexión ($\hat{\alpha}$). La unidad correspondiente a estos ángulos es el arcosegundo [arcsec].

Ahora bien, dado que el orden de magnitud de las distancias que componen el sistema es significativo respecto al tamaño angular de los objetos, es razonable considerar las siguientes aproximaciones:

$$\tan(\theta) \approx \frac{l}{D_{OS}} \quad , \quad \tan(\hat{\alpha}) \approx \frac{a}{D_{LS}} \quad , \quad \tan(\beta) \approx \frac{b}{D_{OS}} \quad . \quad (28)$$

De manera similar, bajo el argumento anterior se tiene que es viable la aplicación de la aproximación de ángulo pequeño ($\tan x \approx x$), tal que al ser empleado sobre la relación 28 y

²Por definición el eje óptico es la línea imaginaria que conecta el observador, la lente gravitacional y la fuente de luz

considerar que $l = a + b$, se deduce

$$\theta D_{OS} \approx \beta D_{OS} + \tilde{\alpha} D_{LS} . \quad (29)$$

Con el objetivo de obtener una ecuación que relacione únicamente los términos angulares del sistema, se define al ángulo de deflexión reducido como

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} , \quad (30)$$

permitiendo así que, al reemplazar la anterior sobre 29, se obtenga la denominada ecuación de la lente para un sistema de lente gravitacional, siendo representada por la siguiente ecuación

$$\beta = \theta - \alpha . \quad (31)$$

Esta relación describe para un observador la posición real de la fuente como función de la posición de las imágenes observadas y la diferencia de las anteriores con respecto a la posición aparente de la fuente. Más adelante α se lo relacionara con el potencial gravitacional asociado a la lente.

Por otro lado, en analogía con la descripción geométrica del sistema y las aproximaciones consideradas previamente, se deduce que el parámetro de impacto corresponde a $\xi \approx \theta D_{OL}$, permitiendo ser reemplazado en el ángulo de deflexión 21 y considerando la definición del ángulo de deflexión reducido, es posible representar a α de la siguiente manera

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_{Os} D_{OL}} \frac{4GM}{\theta} . \quad (32)$$

Lo anterior facilita la introducción de una nueva definición, el ángulo de Einstein (θ_E) expresado por

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{Os} D_{OL}} 4GM} . \quad (33)$$

Al reemplazar 33 en 31, se consigue una función de segundo grado respecto a la posición de las imágenes, es decir,

$$\theta^2 - \theta\beta - \theta_E^2 = 0 , \quad (34)$$

en consecuencia, para una masa puntual se tiene la formación de dos imágenes, cuyas posiciones están dadas por

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \pm \theta_E \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4\theta_E^2}} . \quad (35)$$

Para analizar el comportamiento de ésta solución, se toma como objeto de estudio el sistema de lente gravitacional NGC3031 [24]. En la Figura 6 se resaltan dos regiones de interés:

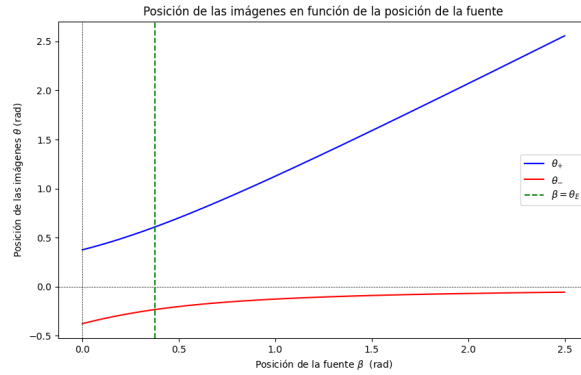


Figura 6: Comportamiento de la 2 soluciones de la ecuacion de la lente para un sistema de lente gravitacional debido a una masa puntual

la primera, cuando la magnitud en la posición de la fuente es menor que el ángulo de Einstein ($\beta \leq \theta_E$), donde se permite la visualización de dos imágenes, en particular, cuando la fuente se encuentra perfectamente alineada con la lente ($\beta = 0$), la distancia de las imágenes respecto al eje óptico es la misma ($|\theta_1| = |\theta_2|$); la segunda región, caracterizada por que la posición de la fuente es mayor que el ángulo de Einstein ($\beta > \theta_E$), muestra que, conforme la fuente se aleja, una de las imágenes desaparece. Físicamente, éste escenario representa una deflexión nula debido a que la posición angular de la fuente con respecto al eje óptico es mayor que el ángulo de Einstein, impidiendo así la formación de la segunda imagen. Como resultado, el observador visualiza únicamente una imagen. Por último, el signo negativo representa que la imagen está por debajo del eje óptico.

4.4. Superficie tiempo de atraso

Las imágenes son uno de los principales observables para el análisis de los sistemas de lente gravitacional, permitiendo estudiar entre otros, la geometría del sistema, las distancias de la fuente y la lente, la distribución masa de la lente, los parámetros cosmológicos y el tiempo de atraso entre las imágenes. En específico, es de interés este último, ya que se origina como resultado de las diferentes trayectorias posibles generadas por la geometría del sistema y los efectos gravitacionales asociados a la lente. Lo descrito anteriormente es clave para entender el concepto de la superficie de tiempo de atraso, que describe por del medio principio de Fermat cómo varía el tiempo entre los haces de luz que dan lugar a las distintas imágenes. En las siguientes secciones se analiza este fenómeno, tomando como referencia las secciones 2.2.2, 3.5 de [30] y 16.2 de [31].

4.4.1. Tiempo de atraso gravitacional

También denominado tiempo de Shapiro, es causado por el fenómeno de dilatación temporal, donde el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia aumenta desde la perspectiva de un observador externo.

Para la estimación de este parámetro, se toma como base la ecuación 2, en la cual se introduce $r = R \left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^2$, correspondiente a un término de reescalado sobre la componente radial. A partir de lo anterior, se realiza un cambio hacia coordenadas cartesianas reescaladas, es decir, las ecuaciones de transformación contienen el término R . Así, se deduce que el intervalo espacio-temporal se representa como

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{GM}{2Rc^2}}{1 + \frac{GM}{2Rc^2}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (36)$$

por otro lado, al considerar el límite asintótico sobre la anterior ecuación, se deduce el siguiente resultado

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{Rc^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (37)$$

siendo que esta última, debido a su representación, permite la recuperación de un concepto de la teoría de la gravitación Newtoniana, el cual es, el potencial gravitacional ($\varphi = -\frac{GM}{R}$). En consecuencia, el intervalo espacio-temporal toma la forma

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (38)$$

Para este momento, es de interés remarcar que los fotones son el objeto principal de estudio, y que, debido a que se mueven a la velocidad de la luz, satisfacen la siguiente relación: $ds = 0$. Ahora bien, por simplicidad en los cálculos, se considera que la trayectoria de los haces de luz sea descrita únicamente a lo largo del eje z , facilitando así la obtención de la próxima relación

$$\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 \approx \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) dz^2, \quad (39)$$

desde la cual es posible determinar el tiempo de atraso gravitacional. Así, tras una breve manipulación algebraica, se expresa matemáticamente que el diferencial del tiempo es igual a

$$dt \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) dz, \quad (40)$$

en donde el segundo término dentro del paréntesis representa la magnitud de interés. Así, al integrar, se resuelve que el tiempo de atraso gravitacional está caracterizado por

$$\delta t_{grav} \equiv -\frac{2}{c^3} \int_{z_A}^{z_B} \varphi(z) dz. \quad (41)$$

Si bien la ecuación anterior ya permite determinar el tiempo de atraso gravitacional, es de interés describir la anterior en términos del potencial gravitacional asociado a la lente. Para esto, al considerar la proyección de la distribución de masa sobre su mismo plano, se infiere un potencial gravitacional proyectado (Ψ), siendo representado por medio de

$$\Psi = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \int_{z_A}^{z_B} \varphi(z) dz , \quad (42)$$

es así que, como consecuencia, el tiempo de atraso en función del potencial gravitacional proyectado es finalmente:

$$\delta t_{grav} = - \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} \Psi . \quad (43)$$

4.4.2. Tiempo de atraso geométrico

Este concepto es consecuencia de la geometría bidimensional de la fuente, siendo que, al emitir los fotones desde diferentes regiones, éstas describen diferentes trayectorias, las cuales, hasta alcanzar al observador, producen una distorsión temporal.

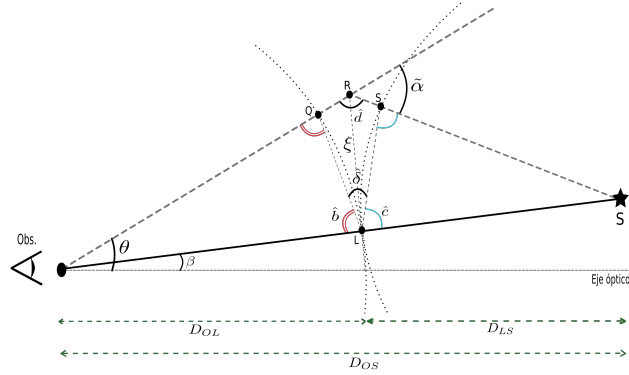


Figura 7: Sistema para describir tiempo de atraso geométrico

Con el fin de estudiar este fenómeno, se analiza el sistema representado en la Figura 7, en el cual se destacan dos trayectorias. La primera, denotada por la línea segmentada, representa un haz de luz que ha sido deflectado una cantidad $\tilde{\alpha}$ y llega hasta el observador; la segunda, caracterizada por la línea sólida, indica la trayectoria que tomaría la luz en ausencia de la lente ($\overline{OS}$). Así, para determinar el tiempo de atraso geométrico, se propone calcular la diferencia entre estas trayectorias.

Como punto de partida, se trazan dos círculos centrados en O y S , respectivamente, imponiendo que sean tangentes a L . De este modo, bajo la aproximación de ángulo pequeño, la diferencia en las trayectorias (Δl) es

$$\Delta l \approx \xi \hat{\delta} . \quad (44)$$

También, con respecto a la geometría se deduce, que los triángulos $\triangle OQH$ y $\triangle SHR$ son isósceles y las siguientes relaciones

$$\hat{d} + \tilde{\alpha} = \pi, \quad \hat{b} + \hat{c} + \hat{\delta} = \pi, \quad \hat{b} + \hat{c} = \hat{d} + \hat{\delta}. \quad (45)$$

A partir de las anteriores, es posible representar a $\hat{\delta}$ en términos de $\tilde{\alpha}$, así la ecuación 44 toma la siguiente forma

$$\delta l \approx \xi \frac{\tilde{\alpha}}{2}. \quad (46)$$

Por último, a partir de las relaciones trigonométricas, se tiene que $\xi = (\theta - \beta)D_{OL}$. Al considerar 31 y 30, y al sustituir sobre 46, se deduce que la diferencia en las trayectorias corresponde a

$$\delta l = \frac{1}{2} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2, \quad (47)$$

tal que de la anterior, se determina el tiempo de atraso geométrico. Así, al considerar simplemente que $\delta t_{geom} = \delta l/c$, se concluye

$$\delta t_{geom} = \frac{1}{2c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2. \quad (48)$$

4.4.3. Tiempo de atraso total

La deducción de los anteriores tiempos de atraso se ha realizado bajo la consideración de que el universo es estático; sin embargo, se conoce que el mismo se encuentra en expansión, por lo cual, para describir de manera apropiada el fenómeno de lente gravitacional, se debe incluir dicho término. Así, las ecuaciones 43 y 48 toman la forma

$$\delta t_{grav} = -(1 + z_L) \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} \Psi, \quad (49)$$

$$\delta t_{geom} = \frac{1 + z_L}{2c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2. \quad (50)$$

Tras el proceso anterior, es posible representar el tiempo de atraso total como la suma de los dos anteriores, tal que

$$\delta t = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{OL}D_{OS}}{D_{LS}} \left(\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi \right). \quad (51)$$

Una característica de alto interés sobre el resultado anterior es que la luz, al propagarse de un punto a otro, lo hace siempre por el trayecto que tenga asociado el menor tiempo. La anterior descripción corresponde al principio de Fermat, el cual, bajo este contexto, matemáticamente se representa como

$$\nabla_{\theta}(\delta t) = 0, \quad (52)$$

donde, la anterior describe que la formación de las imágenes tendrá correspondencia con las trayectorias que sean un extremal. Su representación corresponde a una superficie parametrizada por la posición de las imágenes, cuyo nombre es superficie tiempo de atraso (Figura 8). Particularmente, se tiene que el objeto principal de estudio de este proyecto es la proyección de los contornos de nivel de esta superficie sobre el plano de la lente, permitiendo, desde los mismos, analizar la formación de imágenes.

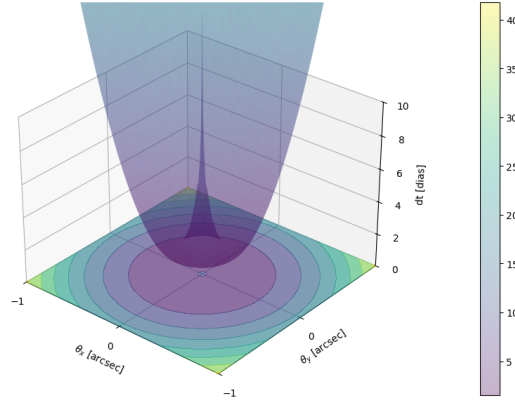


Figura 8: Superficie tiempo de atraso e isocontornos para una lente puntual

4.5. Amplificación y Magnificación

Al realizar el estudio del fenómeno de lente gravitacional, se encuentran que surgen dos conceptos clave: la amplificación y magnificación. Estos efectos describen diferentes características, las cuales son complementarias en cuanto al estudio en la formación de las imágenes.

En primera instancia, se abordará la amplificación, siendo referida al aumento en la intensidad de la luz de un objeto distante, dando como resultado una imagen más brillante debido a la curvatura del espacio-tiempo.

Su definición formal establece que: el flujo percibido por el observador desde una superficie corresponde al producto de su brillo superficial con el ángulo sólido que abarca. Es importante destacar que, si bien el brillo superficial se conserva, la luminosidad de la fuente se verá amplificada, dado que la desviación presente en los rayos de luz modifica la forma y el ángulo sólido de la fuente. Éste aumento es caracterizado por

$$A = \frac{d\Omega}{d\Omega_0} , \quad (53)$$

siendo, $d\Omega$ el ángulo sólido observado y $d\Omega_0$ el ángulo sólido en ausencia de la lente.

En particular, al considerar el caso de una masa puntual, se obtiene que el ángulo solido cubierto por las imágenes puede ser representado por medio $d\Omega_{\pm} = \theta_{\pm}d\theta_{\pm}d\phi_{\pm}$, tal como se demuestra en la Figura 9

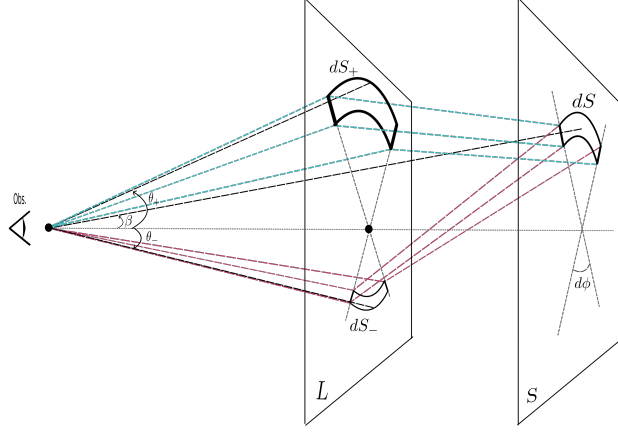


Figura 9: Fenómeno de amplificación y magnificación sobre un elemento de una fuente

Así, en consideración de la definición de ángulo sólido, el asociado a la imagen en ausencia de una lente correspondería a $d\Omega_0 = \frac{dS}{D_{OS}^2} = \beta d\beta d\phi$, y en consecuencia, es correcto representar el ángulo solido de las imágenes como $d\Omega_{\pm} = \frac{dS_{\pm}}{D_{OL}^2} = \beta d\beta d\phi$. Es así que, a raíz de lo anterior, se tiene que tal amplificación en este caso puntual es

$$A = \frac{\theta_{\pm}d\theta_{\pm}}{\beta d\beta}, \quad (54)$$

tal que, al resolver la anterior en función de 35, el efecto de amplificación para una lente puntual es igual a

$$A = \frac{1}{2} \pm \frac{2\theta_E^2 + \beta^2}{2\beta\sqrt{4\theta_E^2 + \beta^2}}. \quad (55)$$

Para concluir, se tiene que, dada la posición de la fuente, una de las imágenes tendrá asignada una amplificación negativa, logrando así la formación de una imagen invertida; en la literatura se denomina a esta característica como paridad negativa.

Ahora, se describirá la magnificación, estando asociada con el aumento del tamaño aparente de la imagen del objeto, permitiendo que, por ejemplo, detalles más finos sean apreciables para el observador. Éste fenómeno es consecuencia de la desviación diferencial en los haces de luz, como se mencionó al introducir la amplificación. La Figura 9 representa también éste fenómeno.

Para su descripción, es necesario considerar conceptos más generales a los tratados hasta ahora, como, por ejemplo, que la lente corresponda a una distribución de masa sin un eje

de simetría. Bajo esta consideración, se tiene que las cantidades involucradas en la explicación del efecto de lente gravitacional tengan características vectoriales, como por ejemplo, el ángulo de deflexión, que ahora corresponde a una cantidad bidimensional y es representado como “ $\vec{\alpha}$ ” y, por ende, la ecuación de la lente 31 será de la misma naturaleza.

Respecto a la formulación matemática, se toma como punto de partida que la distorsión en las imágenes puede ser representada mediante la introducción de una matriz Jacobiana denominada matriz de magnificación, la cual es

$$M = \det \left(\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \vec{\beta}} \right) . \quad (56)$$

Es así que la amplificación en las imágenes puede analizarse a partir de las relaciones entre los ángulos sólidos. Es decir, que se relaciona un elemento diferencial del ángulo sólido en el plano de las imágenes ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$) con su contraparte en el plano de la fuente ($d\Omega_0 = \sin \beta d\beta d\phi$), por medio del Jacobiano, es decir:

$$d\Omega = M^{-1} d\Omega_0 , \quad (57)$$

de modo que la cantidad que describe cuánto una imagen aumenta o disminuye su tamaño respecto a la fuente es la matriz M^{-1} , la cual puede relacionarse con la matriz de amplificación (A), es así que, describiendo las matrices respecto a sus componentes, se tiene

$$A \equiv M^{-1} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} . \quad (58)$$

La anterior representación permite la inclusión del potencial gravitacional de la lente, ya que al utilizar la ecuación de la lente para un sistema de lente gravitacional 31, y considerando que de la literatura se conoce que $\vec{\alpha} = \nabla_{\theta} \Psi$, se obtiene que las componentes en la matriz de amplificación son:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} . \quad (59)$$

En este punto, se introducen otros dos conceptos para la descripción de una imagen en el contexto de las lentes gravitacionales, los cuales son la convergencia y la cizalladura.

Así, se tiene que la convergencia (κ) cambia el tamaño de la imagen sin modificar su forma. Matemáticamente, se representa como

$$2\kappa = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} = \nabla^2 \Psi . \quad (60)$$

Por otro lado, se tienen los términos de cizalladura (γ_i) como responsables de las distorsiones en la forma de las imágenes. Estos se representan mediante la combinación de las segundas derivadas del potencial gravitacional reescalado con respecto a la posición de las imágenes, tal que

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right), \quad \gamma_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (61)$$

Se tiene que la representación matricial de A como función de lo anteriores es

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Con el fin de implementar una representación más compacta, se define un término general de cizalladura como $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$. Con respecto a lo anterior, si se determinan los valores propios de la matriz de amplificación, se tiene que son, respectivamente

$$\lambda_t = 1 - \kappa + \gamma, \quad \lambda_r = 1 - \kappa - \gamma, \quad (63)$$

en donde los autovalores, al estar relacionados por la convergencia y el término general de cizalladura, describen la manera en la que el tamaño de las imágenes sufre distorsiones. En específico, se define λ_t como la distorsión tangencial, mientras que λ_r caracteriza la distorsión radial. De lo anterior, se tiene que la magnificación (μ) corresponde al determinante de la matriz de magnificación, siendo que, al considerar lo descrito anteriormente, es igual a

$$\mu = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|} = \frac{1}{|\lambda_r| |\lambda_t|}. \quad (64)$$

4.5.1. Formación de imágenes y líneas críticas

La comprensión sobre la formación de imágenes en un sistema de lente gravitacional, como se ha mencionado a lo largo del proyecto, está vinculada a la profundización en múltiples campos, pero en particular, a la necesidad de resolver sistemas existentes en la naturaleza que, desde la descripción teórica, no son justificables [19, 31]. Por lo expuesto, surge el interés de discutir diferentes aspectos respecto a las mismas y sus características, como por ejemplo: ¿cuántas de ellas se forman?, ¿en qué regiones lo hacen?, ¿qué propiedades las caracterizan?, entre otras. El análisis matemático se basa en la sección 16.4 de la referencia [31].

Para dar respuesta a lo anterior, se introduce el concepto de que las imágenes corresponden a los extremos del potencial de Fermat, lo que permite que tanto el número de imágenes generadas como su posición sean descritos a partir de la forma topológica del mismo. Por lo tanto, al partir de la descripción más general, se tiene que las imágenes son objetos con extensión sobre la visual del observador; en consecuencia, se requiere la implementación de la matriz de magnificación (A), tal que es posible representar la anterior como el Hessiano del potencial de Fermat, como se muestra a continuación.

$$A = \frac{\partial^2 \tau(\theta; \beta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad (65)$$

donde la paridad y magnificación en las imágenes están determinadas por λ_t y λ_r de la matriz de magnificación; es decir, ambas cantidades se derivan de la curvatura del potencial de

Fermat.

Topología del potencial de Fermat

Al considerar que la topología permite caracterizar las diversas combinaciones en las paridades de las imágenes observadas, se obtiene de la literatura las siguientes afirmaciones

- I Para una lente no singular y transparente³, las imágenes que posean una paridad total positiva serán $n + 1$ o $2n + 1$ ⁴, mientras que serán n las que posean una paridad total negativa. Esto implica que, para la adición de un par de imágenes debido al aumento en la densidad superficial de masa, siempre se tenga la introducción de un punto de silla, ya sea con un mínimo o con un máximo. Cabe resaltar que, la suma total de las paridades es igual a uno siempre.
- II El mínimo global tiene paridad total y parcial positiva. Para una fuente variable, el mínimo global se interpreta como aquella imagen que es observada en primera instancia, dado que corresponde al mínimo de la superficie de tiempo de atraso.
- III Las imágenes que son mínimos tienen magnificaciones $\mu > 1$. Lo anterior es consecuencia de que poseen dos paridades parciales positivas, es decir, $\lambda_t = 1 - \kappa \pm \gamma > 1$ y $|\gamma| < 1 - \kappa < 1$. Así, 64 toma la siguiente forma

$$\mu = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|} > 1, \quad (66)$$

ya que $(1 - \kappa)^2 - \gamma^2 < -\gamma^2 < 1$. No obstante, el mínimo global siempre debe existir, por lo que existirá una imagen con mayor flujo que el de la fuente en ausencia de la lente; esto demuestra que, para el observador, el efecto de lente gravitacional aumenta el flujo total recibido desde el objeto emisor.

- IV Las imágenes que se encuentran cerca entre sí tienden a tener una mayor magnificación. Se concluye de manera cualitativa que esto es consecuencia de que no existe una curvatura suficiente para ir de un extremo a otro en la superficie de tiempo de atraso. Matemáticamente, se encuentra una singularidad, ya que, cuando dos imágenes se fusionan, el potencial de Fermat se torna plano entre ellas, haciendo que la magnificación tienda a infinito.

De lo anterior, se obtiene un obstáculo; al ser inviable la visualización directa de la fuente (eliminando la lente), resulta imposible dilucidar la paridad en cada una de las imágenes. Es así que se recurre a determinar la paridad relativa de todas las imágenes, de tal manera que, al conocer el tiempo de atraso, es posible determinar el mínimo global y, por ende, establecer la paridad absoluta de todas las imágenes.

³Una lente no singular y transparente es una herramienta óptica que permite el paso de la luz sin absorberla y no presenta problemas debidos a la aberración

⁴Al estar asociado al número de imágenes, n comienza a contar desde cero.

Como consecuencia de lo mencionado, se obtienen las siguientes generalidades en cuanto a la formación de imágenes.

- Para una única imagen, se tiene que esta corresponde a un mínimo (L), con paridad total y parcial positiva, es decir, tiene un tamaño y flujo mayor que la fuente. Este caso se deriva de una densidad superficial de masa muy baja, tal que impide la generación de más imágenes.
- En el caso de tres imágenes, una debe ser un mínimo (L), otra corresponde a un punto de silla (S) y, por último, la tercera puede ser ya sea un mínimo (L) o un máximo (H). El contorno sobre el punto de silla puede tener diferentes topologías, una de ellas en forma de “ocho” o bien, en forma de “caracol”.
- En el caso de cinco imágenes, se tienen seis combinaciones posibles. Cada una de las anteriores se construye a partir de la topología de sus mismos contornos; es decir, del contorno asociado a las primeras imágenes se construye un segundo contorno que contendrá las nuevas imágenes, este se forma a partir de la división de uno de los máximos o mínimos.

Para finalizar, se abre la posibilidad de la existencia de sistemas con más de cinco imágenes, pero resultan ser casos excepcionales debido a que las distribuciones de masa no son típicas.

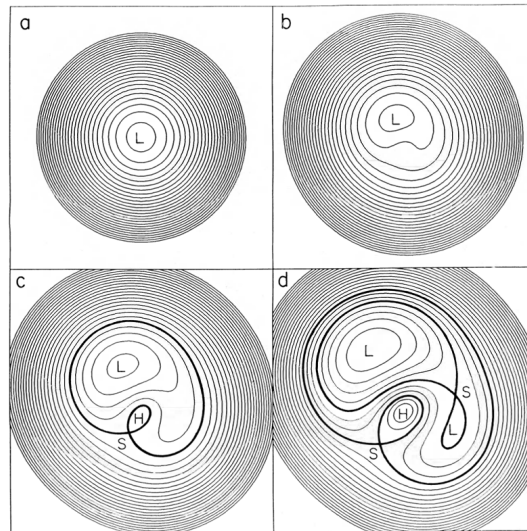


Figura 10: Análisis de la formación de imágenes en función de las intersecciones de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso. La distribución de masa de la lente tiene una forma elíptica. Figura 2 de [19], todos los derechos reservados.

En la Figura 10 es descrita la formación de imágenes tomando como base lo anterior. La imagen a corresponde a un sistema sin lente, permitiendo la visualización de una imagen correspondiente al mínimo (L). En b se analiza la formación de una imagen debido a una

densidad superficial de masa débil. Para c , se describe que al aumentar la densidad superficial, es posible distinguir un mínimo (L), un punto de silla (S) y un máximo (H). Se observa que la topología es la de un “caracol” en este caso. Por último, en d , se determina que al incrementar aún más la densidad superficial, se genera un punto de silla (S) y otro mínimo (L) a partir del mínimo del caso anterior [19].

Líneas críticas

Como se mencionó con anterioridad, en el caso de una lente extendida, como la elíptica por ejemplo, es posible la producción de múltiples imágenes. En consecuencia, se tiene que la posición de las mismas ocurre en determinadas zonas del plano de la lente. El lugar en el cual ocurre la formación está caracterizado por una línea en el plano que representa todos los puntos sobre los cuales la amplificación debería divergir. Esta línea recibe el nombre de línea crítica. Es pertinente mencionar que al trasladar los puntos sobre los cuales diverge la magnificación al plano de la fuente, se configura otra línea denominada línea caustica [31].

En sistemas de lente gravitacional reales, dado que la amplificación no puede tener un valor indefinido, se observa que al pasar a través de una caustica se realiza un promedio con el fin de obtener un valor finito de amplificación, describiendo así la amplificación como una magnitud finita.

Las líneas críticas se determinan a partir de los valores propios de la matriz de magnificación, describiendo características importantes de las imágenes, como por ejemplo su número y paridad. Así, la magnificación, representada en 64, no es finita cuando $|\lambda_r| = 0$, lo que da lugar a una **línea crítica radial**. Por otro lado, cuando $|\lambda_t| = 0$, se produce una **línea crítica tangencial**.

Las líneas críticas dependen en gran medida de la forma de la distribución de masa de la lente. Por ejemplo, para el caso de una lente puntual, la amplificación diverge cuando la fuente, la lente y el observador están completamente alineados, lo que da como resultado que la línea crítica corresponda al anillo de Einstein.

4.6. Análisis del sistema PG1115+80.

Las pretensiones del proyecto radican en estudiar la formación de las imágenes a partir de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso. Es así que, partiendo del conocimiento presentado, se modela el sistema de lente gravitacional PG 1115+80, considerando la lente como una distribución de masa puntual.

Como punto de partida, se analiza la formación de las imágenes desde los isocontornos derivados de la superficie de tiempo de atraso. Para esto, se toma el corrimiento al rojo de los objetos involucrados, descrito en [32].

En la Figura 11 se evidencia que, debido a la simetría de la lente, ésta no genera puntos de corte en los isocontornos representados en la gráfica 10; es decir, el modelo de masa puntual

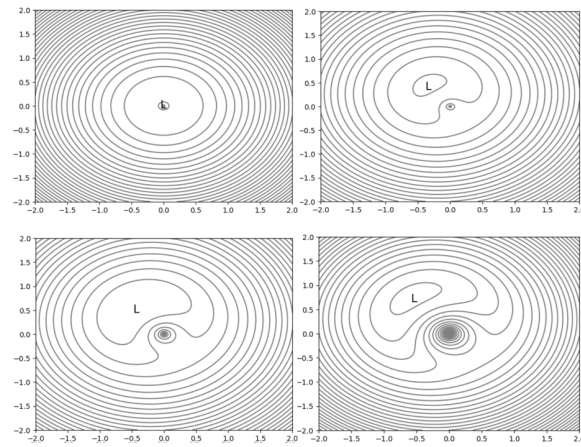


Figura 11: Isocontornos sobre PG 11150+80 descrito desde una lente de masa puntual.

no permite analizar la formación de múltiples imágenes, dado que, independientemente de la densidad superficial de la lente y la posición de la fuente respecto al observador, se resuelve una única imagen caracterizada por L .

Sin embargo, este modelo permite el análisis en el caso de que la lente y la fuente estén perfectamente alineadas respecto al observador. Este efecto particular es denominado *anillo de Einstein*; teóricamente, su representación gráfica corresponde a la Figura 12

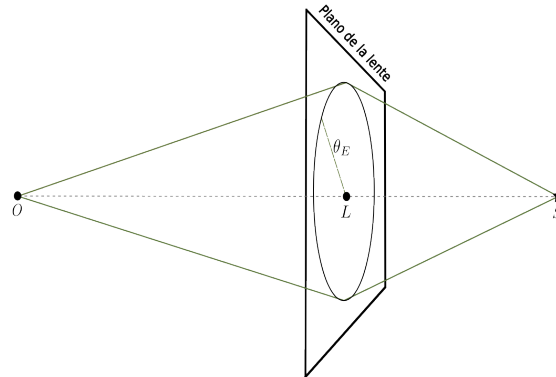


Figura 12: Descripción visual de la formación de un anillo de Einstein.

Al modelar el sistema bajo esta configuración, se ha estimado el tiempo de atraso entre las imágenes, como se representa a continuación

Imágenes	Tiempo de atraso (días)
A-B	8.11
A-C	14.94
B-C	24.42

Los resultados anteriores se ajustan a los datos obtenidos de [33]. Por otra parte, en lo que respecta a los isocontornos, se tiene que estos configurarán círculos concéntricos, generando así diferentes anillos. Bajo estas condiciones, la representación de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso del sistema es

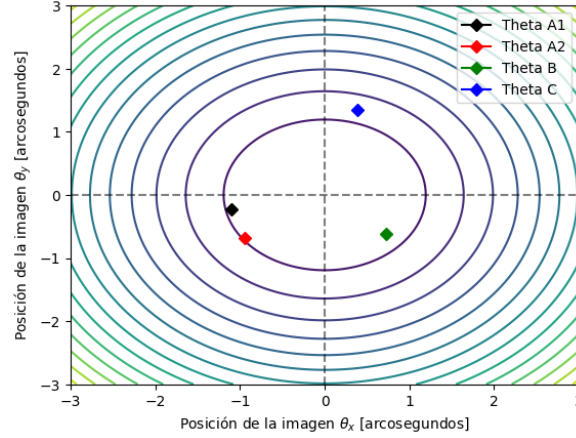


Figura 13: Isocontornos del sistema PG 11150+80, sobre el cual, observador, lente y fuente se encuentran perfectamente alineados.

En la Figura 13 se aprecia la posición real de las imágenes; se observa que, si bien no se encuentran alrededor de una isocontorno completamente alineadas, están muy próximas, concluyendo así que, la descripción del sistema desde una lente puntual sea una aproximación viable, más aún cuando, al observar el sistema desde el infrarrojo, se denota un anillo de Einstein casi por completo, como se describe en [34].

5. Metodología

El desarrollo de proyectos en física se basa en la investigación formal, que permite identificar correlaciones, relaciones y causalidades entre las distintas variables involucradas en los fenómenos naturales. En este contexto, el enfoque metodológico del proyecto es de tipo *investigación*.

Con el objetivo de un correcto desarrollo del proyecto se estipula a continuación la descripción de cada una de las etapas que constituyen el diseño metodológico.

1. Revisión bibliográfica de la teoría de lentes gravitacionales, abarcando su contexto en la relatividad general, óptica geométrica y cosmología.
2. Estudio de los isocontornos de las superficies de tiempo de atraso y líneas críticas para diferentes potenciales gravitacionales, y su relación con la formación de imágenes en un sistema de lente gravitacional.

3. Diseño o adecuación de un código en Python, que permita visualizar y caracterizar las regiones donde, teóricamente, deberían formarse las imágenes de la fuente.
4. Selección de diversos sistemas de lente gravitacional reales para contrastar los resultados experimentales presentes en la literatura con los obtenidos mediante el análisis computacional (tiempo de atraso entre las imágenes) para los diferentes modelos que describen la distribución de masa de la lente.
5. Redacción del documento final y desarrollo de conclusiones que sintetizen los hallazgos y aprendizajes obtenidos a lo largo del proyecto.

Es pertinente mencionar que este proyecto se realizará bajo ciertas simplificaciones, dado que se trata de un proyecto de nivel de pregrado con un tiempo límite de 4 meses. En principio, se considerará que las distancias entre los objetos que configuran un sistema de lente gravitacional (observador, lente y fuente) son lo suficientemente grandes como para que el análisis de la luz se realice desde la perspectiva de la óptica geométrica. Como consecuencia, se asume que los ángulos involucrados son pequeños, lo que permite la implementación de la aproximación de ángulo pequeño. Estas son las simplificaciones básicas para el desarrollo del proyecto; sin embargo, dada la complejidad de los fenómenos que rodean a los sistemas de lente gravitacional, podría ser necesario introducir simplificaciones adicionales que sean coherentes con los objetivos del proyecto.

Para el desarrollo teórico, se tomará como referencia principal el artículo de Blandford y Narayan titulado “Fermat’s Principle, Caustics, and the Classification of Gravitational Lens Images,” en el que se busca comprender la clasificación de la formación de imágenes y la importancia de las líneas críticas en este proceso.

6. Cronograma

El desarrollo de la metodología se distribuirá a lo largo de cuatro meses, de la siguiente manera

No.	Actividades	Meses			
		1	2	3	4
1	Revisión bibliográfica correspondiente a lentes gravitacionales incluyendo su contexto, como lo es la relatividad general, óptica geométrica y cosmología.	x			
2	Estudio de los isocontornos de las superficies de tiempo de atraso y líneas críticas para diferentes potenciales gravitacionales, y su relación.	x	x		
3	Diseño o adecuación de un código en Python, que permita analizar y visualizar las regiones donde, teóricamente, deberían formarse las imágenes de la fuente.		x	x	
4	Selección de diversos sistemas de lente gravitacional reales para contrastar los resultados experimentales presentes en la literatura con los obtenidos mediante el análisis computacional (tiempo de atraso entre las imágenes) para los diferentes modelos que describen la distribución de masa de la lente.		x	x	
5	Redacción del documento final y desarrollo de conclusiones que sintetizan los hallazgos y aprendizajes obtenidos a lo largo del proyecto.	x	x	x	x

Cuadro 1: Cronograma de actividades

Para garantizar el desarrollo adecuado del proyecto, se considera conveniente realizar algunas actividades de manera simultánea. Por ejemplo, mientras se estudian los últimos modelos teóricos contemplados en el proyecto, se iniciará el desarrollo del código en Python para los primeros modelos considerados. De igual forma, la redacción del informe comenzará en etapas tempranas, asegurando que el trabajo final cumpla con el tiempo delimitado para su conclusión.

7. Presupuesto

Para el desarrollo del proyecto y la determinación de su presupuesto, es fundamental considerar tanto el tiempo invertido por las personas involucradas (presupuesto intangible) como las herramientas utilizadas (presupuesto tangible). Lo anterior es expuesto en la siguiente tabla

Presupuesto tangible						
No.	Concepto	Fuente de Financiación	Cantidad	Unidad Comercial	Valor Unitario (\$)	Subtotal (\$)
1	Computador portátil	Estudiante	1	Und	1'890.000,0	1'890.000,0
2	Blog de hojas cuadriculado	Estudiante	1	Und	7.200,0	7.200,0
3	Pack de útiles	Estudiante	2	Und	25.000,0	50.000,0
Presupuesto intangible						
4	Horas de trabajo docente	Docente	32	Hora	50.000,0	1'600.000,0
5	Horas de trabajo	Estudiante	336	Hora	8.000,0	2'688.000,0
Imprevistos						
6	Imprevistos	Estudiante	10 %	%	623.500,0	623.500,0
					Gran Total	6'858.700,0

Cuadro 2: Presupuesto

8. Resultados Esperados

Seguidamente se presentan los resultados previstos de la investigación:

- En función de la topología de la superficie de tiempo de atraso y la configuración de las imágenes, determinar qué tipo de distribución de masa es la más adecuada para describir cada uno de los sistemas de lente gravitacional considerados.
- Modificación de un código que permita visualizar tanto las líneas críticas como las caústicas, y su relación con la formación de imágenes en un sistema de lente gravitacional.
- Profundizar en estudio de la teoría de lentes gravitacionales, como una herramienta importante para la investigación actual, dada su relevancia en la determinación de los parámetros cosmológicos.

Referencias

- [1] Nick Kaiser and Gordon Squires. Mapping the dark matter with weak gravitational lensing. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 404, no. 2, p. 441-450., 404:441–450, 1993.
- [2] Thomas J Broadhurst, AN Taylor, and JA Peacock. Mapping cluster mass distributions via gravitational lensing of background galaxies. *arXiv preprint astro-ph/9406052*, 1994.
- [3] CR Keeton, CS Kochanek, and EE Falco. The optical properties of gravitational lens galaxies as a probe of galaxy structure and evolution. *The Astrophysical Journal*, 509(2):561, 1998.
- [4] Peter Schneider. Gravitational lensing as a probe of structure. In *14th Canary Islands Winter School of Astrophysics: Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, 6 2003.
- [5] Philipp M Merkel and Björn Malte Schäfer. Gravitational lensing of the cosmic microwave background by non-linear structures. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(2):1067–1076, 2011.
- [6] Nick Kaiser. Weak gravitational lensing of distant galaxies. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 388, April 1, 1992, p. 272-286. *Research supported by NSERC and Canadian Institute for Advanced Research.*, 388:272–286, 1992.
- [7] Tommaso Treu. Strong lensing by galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48(1):87–125, 2010.
- [8] B Scott Gaudi. Microlensing surveys for exoplanets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 50(1):411–453, 2012.
- [9] Calen B Henderson, B Scott Gaudi, Cheongho Han, Jan Skowron, Matthew T Penny, David Nataf, and Andrew P Gould. Optimal survey strategies and predicted planet yields for the korean microlensing telescope network. *The Astrophysical Journal*, 794(1):52, 2014.
- [10] Claudio Grillo, M Lombardi, and G Bertin. Cosmological parameters from strong gravitational lensing and stellar dynamics in elliptical galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, 477(2):397–406, 2008.
- [11] Priyamvada Natarajan, LLR Williams, M Bradač, Claudio Grillo, Agniva Ghosh, Keren Sharon, and Jenny Wagner. Strong lensing by galaxy clusters. *Space Science Reviews*, 220(2):19, 2024.
- [12] Jean-François Claeskens and Jean Surdej. Gravitational lensing in quasar samples. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 10:263–311, 2002.

- [13] M. Hildebrand, A. Becker, E. Lopez, F. Gael, and S. Imara. Detailed analysis of gravitational lensing effects in high-redshift galaxies. *Max Planck Institute for Astrophysics*, 2023. Accessed: 2024-08-25.
- [14] Prasenjit Saha, Dominique Sluse, Jenny Wagner, and Liliya L. R. Williams. Essentials of strong gravitational lensing, 2024.
- [15] Darshan Kumar, Deepak Jain, Shobhit Mahajan, Amitabha Mukherjee, and Nisha Rani. Constraining cosmological and galaxy parameters using strong gravitational lensing systems. *Physical Review D*, 103(6):063511, 2021.
- [16] AJ Shajib, G Vernardos, TE Collett, V Motta, D Sluse, LLR Williams, Prasenjit Saha, S Birrer, C Spiniello, and Tommaso Treu. Strong lensing by galaxies. *arXiv preprint arXiv:2210.10790*, 2022.
- [17] Levi G Walls and Liliya LR Williams. Testing the uniqueness of gravitational lens mass models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(1):655–665, 2018.
- [18] Slava G Turyshev and Viktor T Toth. Recovering the mass distribution of an extended gravitational lens. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513(4):5355–5376, 2022.
- [19] Roger Blandford and Ramesh Narayan. Fermat’s principle, caustics, and the classification of gravitational lens images. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 310, Nov. 15, 1986, p. 568-582., 310:568–582, 1986.
- [20] V Bonvin, M Tewes, F Courbin, T Kuntzer, Dominique Sluse, and G Meylan. Cosmograin: the cosmological monitoring of gravitational lenses-xv. assessing the achievability and precision of time-delay measurements. *Astronomy & Astrophysics*, 585:A88, 2016.
- [21] Tommaso Treu and Philip J Marshall. Time delay cosmography. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 24:1–41, 2016.
- [22] Kenneth C Wong, Sherry H Suyu, Geoff CF Chen, Cristian E Rusu, Martin Millon, Dominique Sluse, Vivien Bonvin, Christopher D Fassnacht, Stefan Taubenberger, Matthew W Auger, et al. H0licow–xiii. a 2.4 per cent measurement of h_0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early-and late-universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(1):1420–1439, 2020.
- [23] S Birrer, M Millon, D Sluse, AJ Shajib, F Courbin, S Erickson, LVE Koopmans, SH Suyu, and T Treu. Time-delay cosmography: Measuring the hubble constant and other cosmological parameters with strong gravitational lensing. *Space Science Reviews*, 220(5):48, 2024.
- [24] Holmes Adolfo Molina García. Estudio del efecto de lente gravitacional asociado a una distribución de masa con simetría esférica. Tesis de Maestría, Universidad de Nariño, 2016.

- [25] Edwin Alexander Delgado Insuasty. Espejismos gravitacionales. *Universidad de Nariño*, 2009.
- [26] H.C. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [27] MIT OpenCourseWare. Lecture 1: Introduction and the geometric viewpoint on physics. <https://ocw.mit.edu/courses/8-962-general-relativity-spring-2020/resources/lecture-1-introduction-and-the-geometric-viewpoint-on-physics/>, 2020. Accessed: 2024-10-01.
- [28] M. Meneghetti. *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2021.
- [29] Ruth Durrer. Lecture notes in cosmology, 2021. Lecture Notes.
- [30] Silvia Mollerach and Esteban Roulet. *Gravitational Lensing and Microlensing*. WORLD SCIENTIFIC, 2002.
- [31] G. T. S. H. and R. K. H. Gravitational lensing, 2023. Accessed: 2024-10-06.
- [32] University of Cambridge Institute of Astronomy. Pg 1115+080. <https://research.ast.cam.ac.uk/lensedquasars/indiv/PG1115+080.html>, 2024. Accessed: 2024-10-08.
- [33] Vivien Bonvin, JHH Chan, M Millon, K Rojas, F Courbin, GC-F Chen, CD Fassnacht, E Paic, M Tewes, DC-Y Chao, et al. Cosmograil-xvii. time delays for the quadruply imaged quasar pg 1115+ 080. *Astronomy & Astrophysics*, 616:A183, 2018.
- [34] CD Impey, EE Falco, CS Kochanek, J Lehar, BA McLeod, H-W Rix, CY Peng, and CR Keeton. An infrared einstein ring in the gravitational lens pg 1115+ 080. *The Astrophysical Journal*, 509(2):551, 1998.