



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904



Universidad de **Nariño**
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023



Universidad de **Nariño**

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
TRABAJO DE GRADO



Caracterización de las imágenes de un sistema de lente gravitacional mediante el análisis de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso

James Fernando Insandaré Tacán
Director: Dr. Edwin Alexander Delgado Insuasty



Índice

0

1. Introducción
2. Problema y objetivo principal
3. Fenómeno de lente gravitacional
4. Superficie tiempo de atraso
5. Líneas críticas
6. Clasificación de múltiples imágenes
7. Análisis topológico
8. Modelos de lente
9. Lenstronomy
10. Conclusiones y recomendaciones

1. Introducción

¿Qué es un sistema de lente gravitacional y por qué es importante su estudio?

Es una configuración astrofísica/cosmológica en la que la luz de un objeto distante, es desviada por el campo gravitacional de un objeto masivo (lente), dando lugar a la formación de múltiples imágenes para un observador.

Son de alto interés investigativo dado que conectan diferentes áreas de la física.

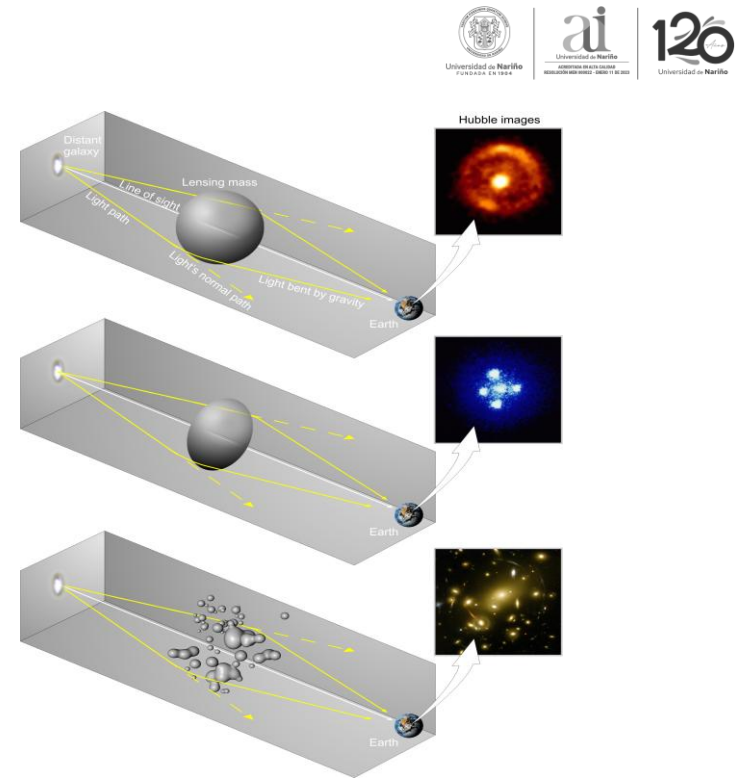


Figura 1. Ilustración del fenómeno de lente gravitacional en función de la forma del cuerpo deflector. Imagen cortesía de [\[ESA/Hubble, 2004\]](#).

2. Problema y objetivo principal

El proyecto pretende responder la siguiente pregunta:

¿Cómo se caracterizan las imágenes de un sistema de lente gravitacional de acuerdo con la topología de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, y cuál es el papel de las líneas críticas en este fenómeno?

El objetivo general es:

Realizar un análisis de la formación de imágenes en diversos sistemas de lente gravitacional, mediante una categorización basada en el estudio de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso, vinculada a la distribución de masa del objeto deflector, a través del potencial gravitacional.

3. Fenómeno de lente gravitacional

- Métrica perturbada

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (1)$$

- Elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{\Phi_N}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\frac{\Phi_N}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2)$$

- Ángulo de deflexión: masa puntual

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi} \hat{e}_\xi \quad (3)$$

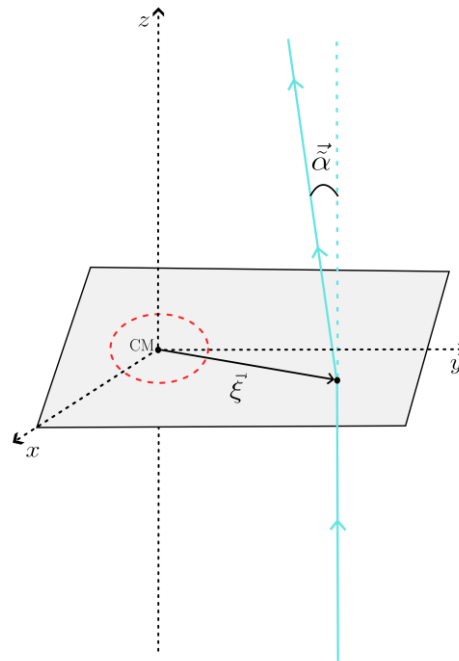


Figura 2. Deflexión de un haz de luz bajo la aproximación de Born, donde el ángulo se mide por el cambio de dirección respecto al plano transversal a la trayectoria no perturbada.

3. Fenómeno de lente gravitacional

- Densidad superficial

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz \quad (4)$$

- Ángulo de deflexión: destrucción continua de masa puntual

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d\vec{\xi}' \quad (5)$$

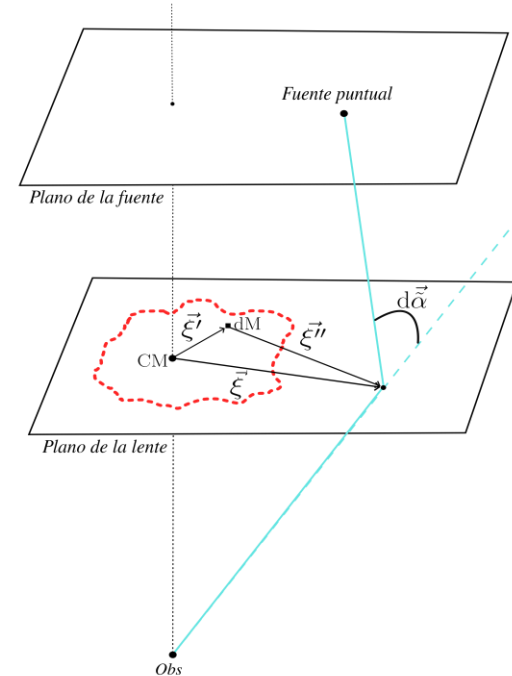


Figura 3. Representación gráfica del diferencial del ángulo de deflexión, considerando la proyección sobre el plano de la lente de una distribución continua de masa con geometría arbitraria.

3. Fenómeno de lente gravitacional

- Ecuación de la lente.

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (6)$$

- Ángulo de deflexión reducido.

$$\vec{\alpha} \equiv \tilde{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \quad (7)$$

- Potencial gravitacional.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla} \Psi(\vec{\theta}) \quad (8)$$

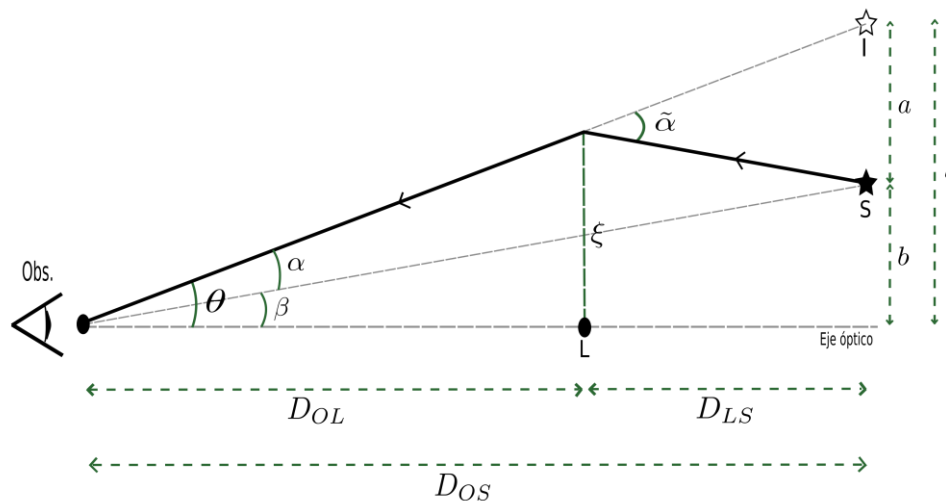


Figura 4. Configuración en una dimensión de un sistema lente gravitacional debido a una masa puntual.



4. Superficie tiempo de atraso

- Superficie tiempo de atraso.

$$\delta t = \frac{(1 + z_L)}{c} \frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \left(\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \psi \right) \quad (9)$$

$$\nabla_{\theta}(\delta t) = 0 \quad (10)$$

La representación de (7) corresponde a una superficie parametrizada por la posición de las imágenes, cuyo nombre es superficie tiempo de atraso.

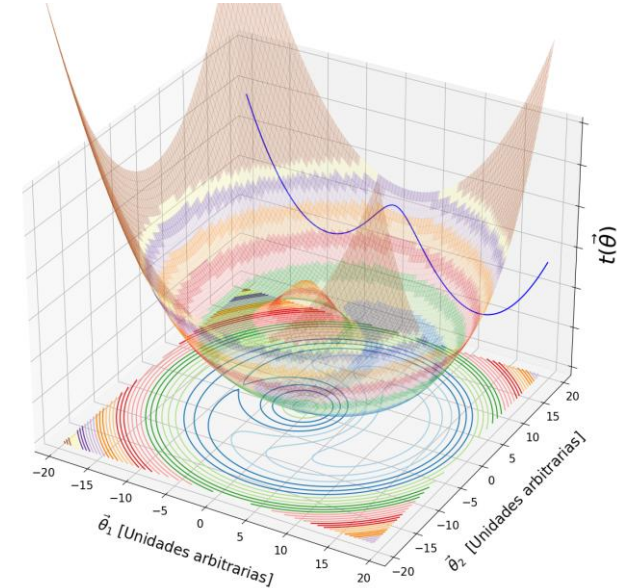


Figura 5. Representación de la superficie tiempo de atraso (NIS) con la proyección de sus líneas de contorno sobre el plano de la lente.

4. Superficie tiempo de atraso

- Visualización de la superficie tiempo de atraso en una dimensión.

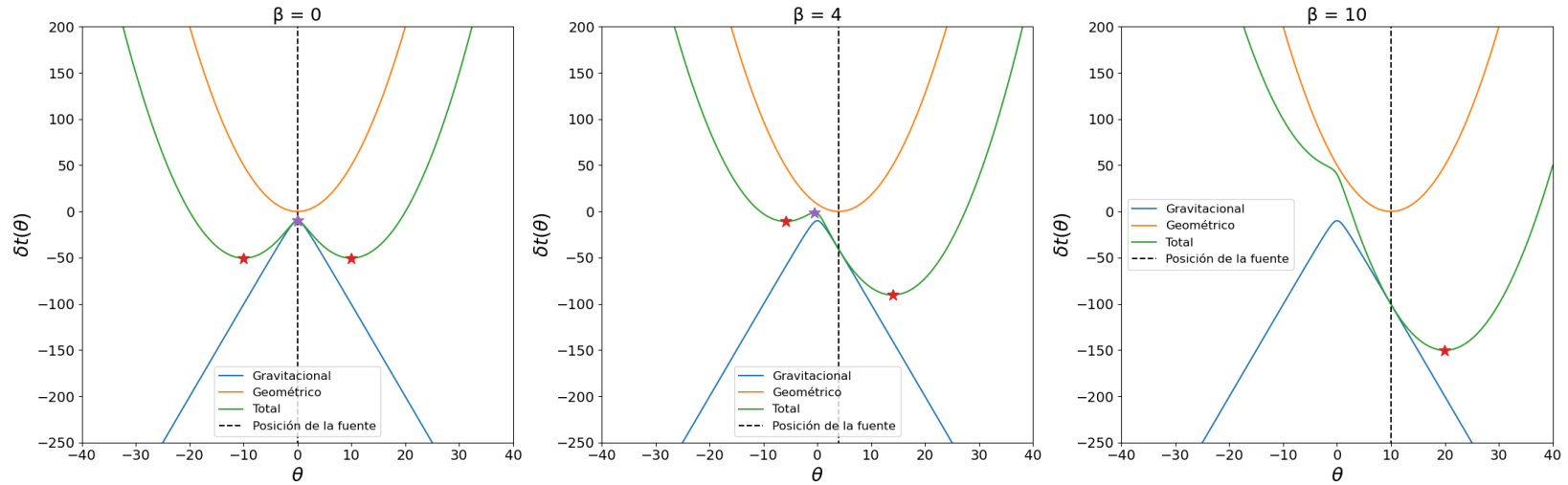


Figura 6. Superficie de tiempo de atraso en 1D para una distribución de masa esférica con núcleo, con la fuente variando su posición. Las unidades son arbitrarias.

5. Líneas críticas

- Magnificación y Amplificación:

$$\mu = A = \left| \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \right|^{-1} \quad (11)$$

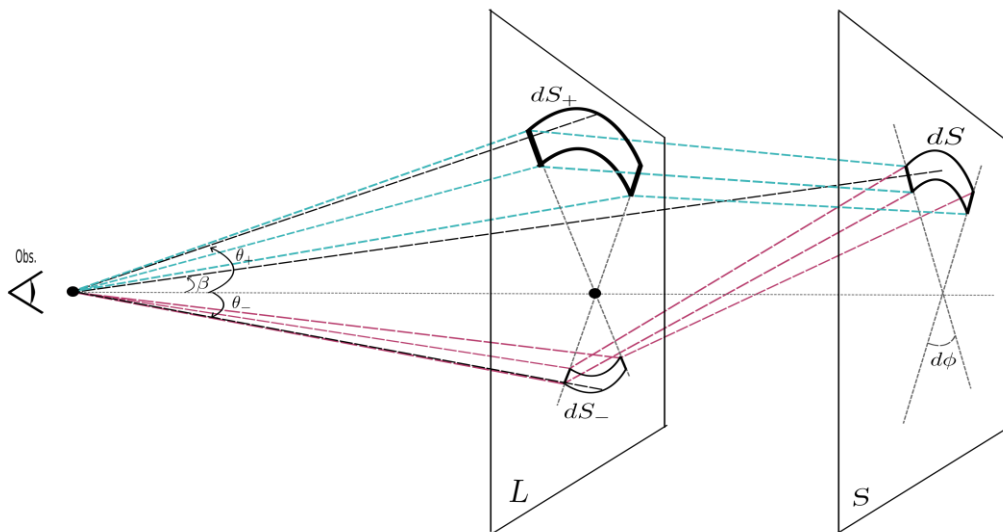


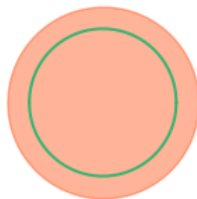
Figura 7. Fenómeno de amplificación y magnificación sobre un elemento de una fuente. Las líneas azules caracterizan la imagen con paridad positiva, mientras que las rojas, invierten la orientación de la fuente resultando en una imagen con paridad negativa.

5. Líneas críticas

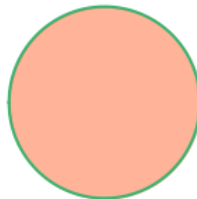
- Convergencia.

$$2\kappa = \nabla_{\theta}^2 \Psi \quad (12)$$

$\kappa = -0.3$



$\kappa = 0$



$\kappa = +0.3$

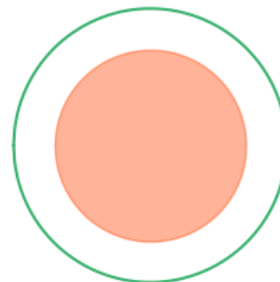


Figura 8. Representación del efecto de la convergencia para distintos valores de κ , con líneas verdes que indican el contorno de la imagen generada.

5. Líneas críticas

- Cizallamiento.

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (13)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \quad (14)$$

$$\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \quad (15)$$

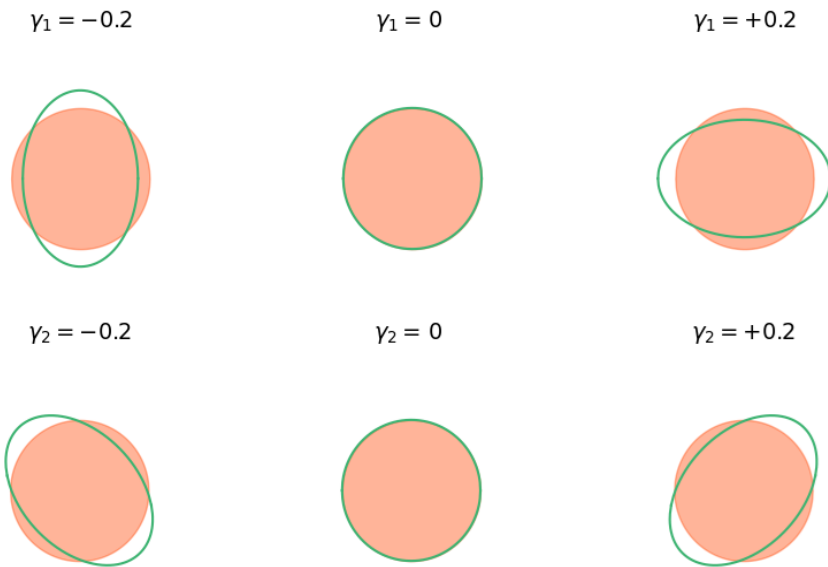


Figura 9. Ilustración del efecto de la cizalladura para distintos valores de γ_1 y γ_2 donde las líneas verdes representan el contorno de la imagen deformada.

5. Líneas críticas

- Línea crítica tangencial.

$$\lambda_t = 1 - \kappa - \gamma \quad (16)$$

- Línea crítica radial.

$$\lambda_r = 1 - \kappa + \gamma \quad (17)$$

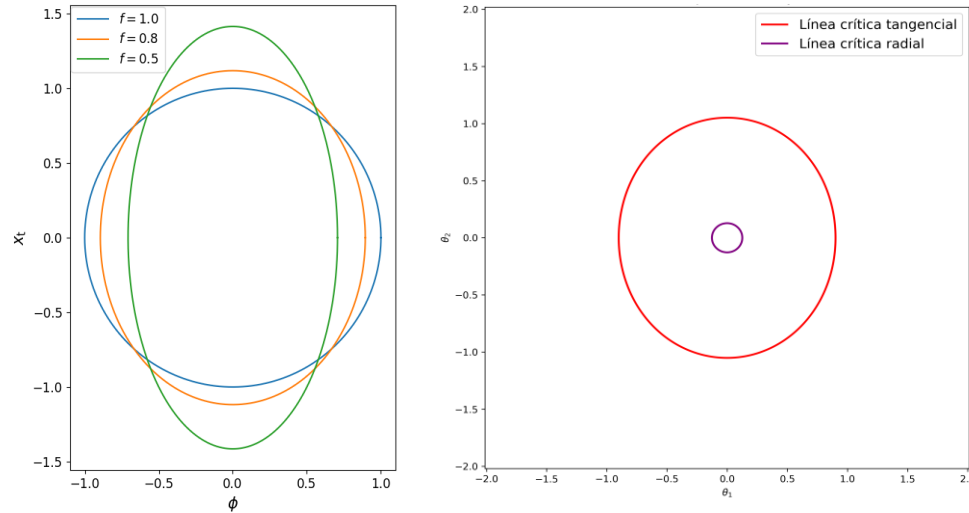


Figura 10. Líneas críticas y radiales en lentes con simetría elíptica. La figura de la derecha representa una lente elíptica con un valor de $f = 0.95$ y un núcleo dentro de la elipse de radio $\theta_c = 0.05''$. Las unidades son arbitrarias.

6. Clasificación de múltiples imágenes

- Matriz jacobiana de la lente.

$$\mathcal{A}_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \quad (18)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \quad (19)$$

- Imagen Tipo I.

$$\det(\mathcal{A}) > 0 \quad (20)$$

$$\text{tr}(\mathcal{A}) > 0 \quad (21)$$

- Imagen Tipo II.

$$\det(\mathcal{A}) < 0 \quad (22)$$

- Imagen Tipo III.

$$\det(\mathcal{A}) > 0 \quad (23)$$

$$\text{tr}(\mathcal{A}) < 0 \quad (24)$$

7. Análisis topológico

- Análisis topológico de un punto de silla.

$$\mathcal{T}(\vec{x}, \vec{y}) \approx \mathcal{T}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_1^2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x_2^2} x_2^2 \quad (25)$$

$$x_1 = \pm \sqrt{-\frac{(\partial^2 \mathcal{T} / \partial x_2^2)}{(\partial^2 \mathcal{T} / \partial x_1^2)}} x_2 \quad (26)$$

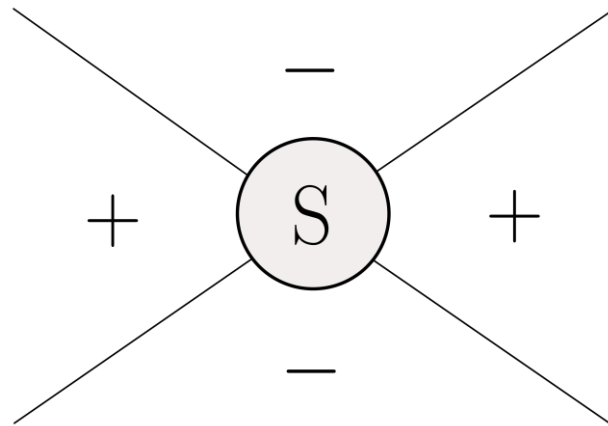


Figura 11. Representación didáctica de un punto de silla, caracterizando las regiones alrededor del mismo con los signos + y - de acuerdo a su comportamiento.

7. Análisis topológico

- Topología para la formación de tres imágenes.

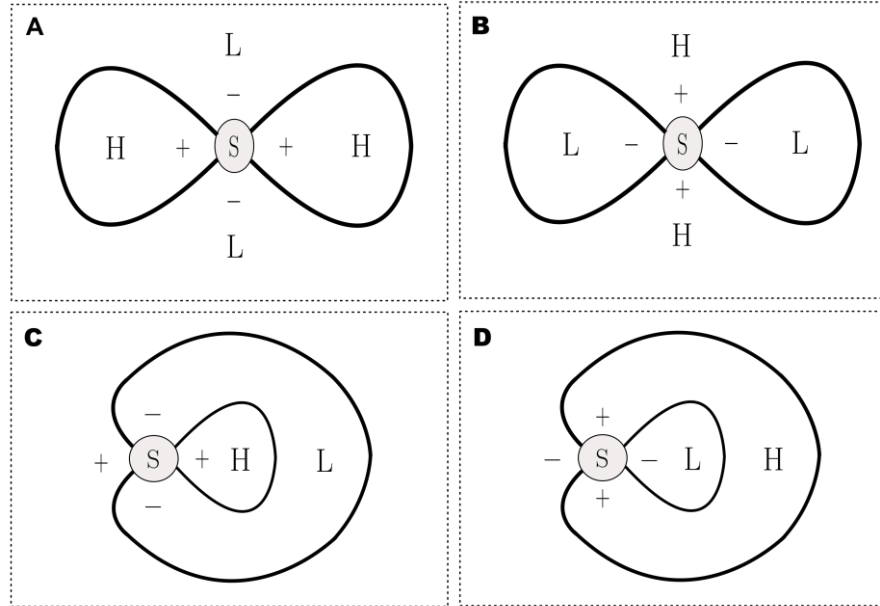


Figura 12. Ilustración de las geometrías teóricas de los isocontornos de la superficie de tiempo de atraso que representan la formación de tres imágenes en un sistema de lente gravitacional. Las regiones han sido caracterizadas mediante las siglas en inglés correspondientes a máximo (H), mínimo (L) y punto de silla (S).

7. Análisis topológico

- Topología para formación de cinco imágenes.

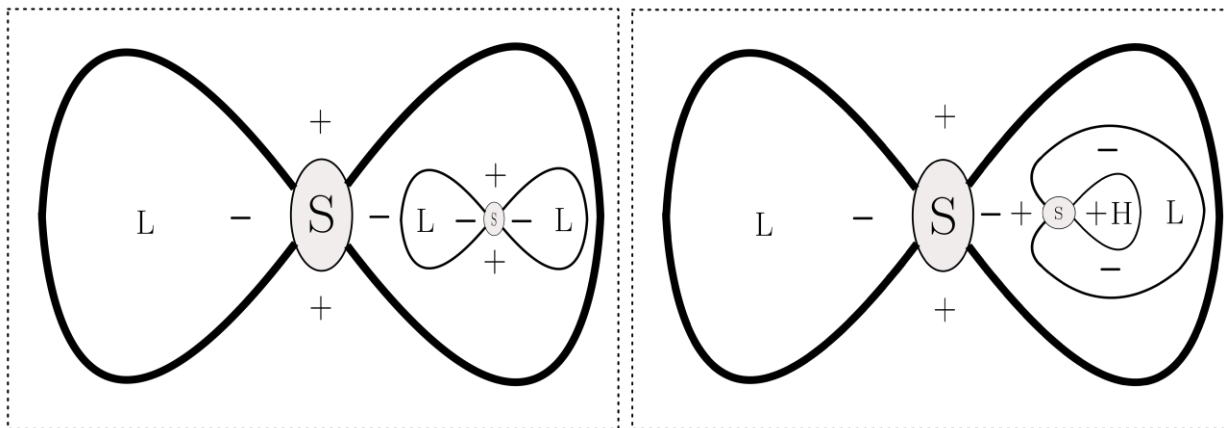


Figura 13. Ilustración de la formación de 5 imágenes considerando una curva de nivel exterior con la geometría de una lemniscata.

7. Análisis topológico

- Topología para la formación de cinco imágenes.

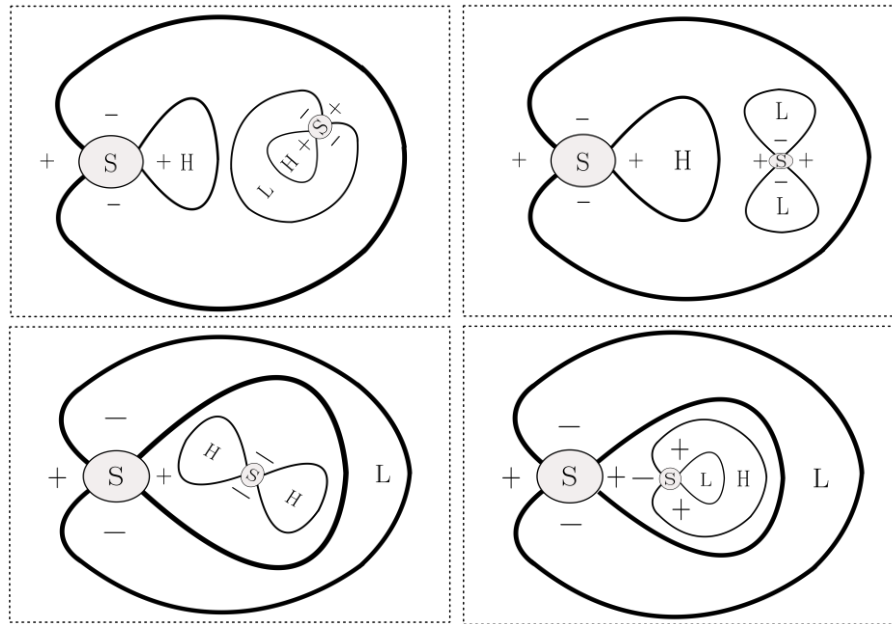


Figura 14. Formación de cinco imágenes para el caso en el que la línea de nivel exterior presenta la geometría de un caracol de Pascal, mientras que la línea de nivel interior adopta la forma de una lemniscata o de caracol de Pascal.

8. Modelos de lente

- Masa puntual
- Esfera isoterma singular (SIS)
- Esfera isoterma no singular (NIS)
- Elipsoide isoterma singular (SIE)
- Elipsoide isoterma no singular (NIE)
- Pseudo-elipsoide isoterma singular (pSIE)
- Pseudo-elipsoide isoterma no singular (pNIE)

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de Hubble	H_0	2.182×10^{-18}	s^{-1}
Velocidad de la luz	c	9.715×10^{-15}	Mpc s^{-1}
Constante gravitacional	G	2.272×10^{-78}	$\text{Mpc}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Masa solar	$M_\odot$	1.981×10^{30}	kg
Densidad de materia	Ω_m	0.316	—
Densidad de radiación	Ω_r	0	—
Densidad de energía oscura	Ω_Λ	0.684	—
Densidad de curvatura	Ω_k	0	—

Tabla 1. Parámetros usados en este trabajo. En particular, las magnitudes correspondientes a la densidad de materia, radiación, energía oscura y curvatura han sido tomadas de [\[Aghanim et al., 2020\]](#).

8. Sistema: PG 1115+080

- Corrimiento al rojo de la lente y de la fuente.

$$z_l = 0.311 \quad (27) \quad z_s = 1.735 \quad (28)$$

- Coordenadas del sistema.

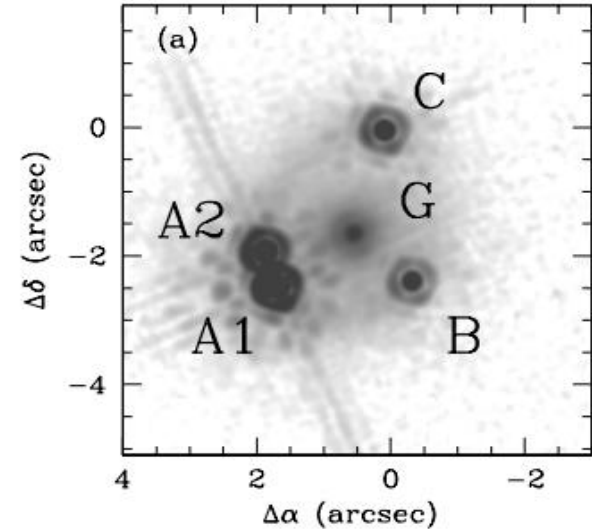
Objeto	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
Fuente	-0.011	-0.018
Imagen A1	-0.930	-0.780
Imagen A2	-1.120	-0.310
Imagen B	0.730	-0.650
Imagen C	0.340	1.300

Tabla 2. Coordenadas en arcosegundos de la fuente y de las imágenes respecto a la lente. Valores obtenidos de [Yoshida & Omote, 1988].

- Distancia comóvil.

$$D_C \equiv D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (29)$$

Figura 15. Imagen del sistema de lente gravitacional PG,1115 + 080 obtenida con NICMOS a bordo del telescopio espacial Hubble. El origen del sistema de coordenadas se encuentra situado en la imagen C. Fotografía tomada de la Figura 1 de [Impey et al., 1998].



8. Sistema: PG 1115+080

- Distancia comóvil transversa.

$$D_M(z) = \begin{cases} D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} D_C / D_H) & \text{si } \Omega_k > 0, \\ D_C & \text{si } \Omega_k = 0, \\ D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|} D_C / D_H) & \text{si } \Omega_k < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (30) \\ (31) \\ (32) \end{matrix}$$

- Distancia de diámetro angular.

$$D_A \equiv \frac{D_M}{1+z} \quad (33)$$

Distancia	Símbolo	Valor (Mpc)
Distancia de la lente	D_{OL}	975.625
Distancia de la fuente	D_{OS}	1791.243
Distancia entre lente y fuente	D_{LS}	1323.585

Tabla 3. Distancias de diámetro angular para el sistema PG 1115 + 080.

8. Modelo: Masa puntual

- Ángulo de deflexión.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{\theta}}{\theta^2} \quad (34)$$

- Ángulo de Einstein.

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}} \frac{4GM}{c^2} \quad (35)$$

- Potencial gravitacional.

$$\Psi(\theta) = \theta_E^2 \ln\left(\frac{\theta}{\theta_E}\right) \quad (36)$$

- Función tiempo de atraso.

$$\mathcal{T} = \frac{(1+z_L)}{c} \frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\theta - \beta|^2 - \theta_E^2 \ln\left(\frac{\theta}{\theta_E}\right) \right] \quad (37)$$

- Ecuación de la lente.

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E}{\theta} \quad (38)$$

- Líneas críticas.

$$\lambda_{tan} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (39)$$

$$\lambda_{rad} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (40)$$

8. Modelo: Masa puntual

21

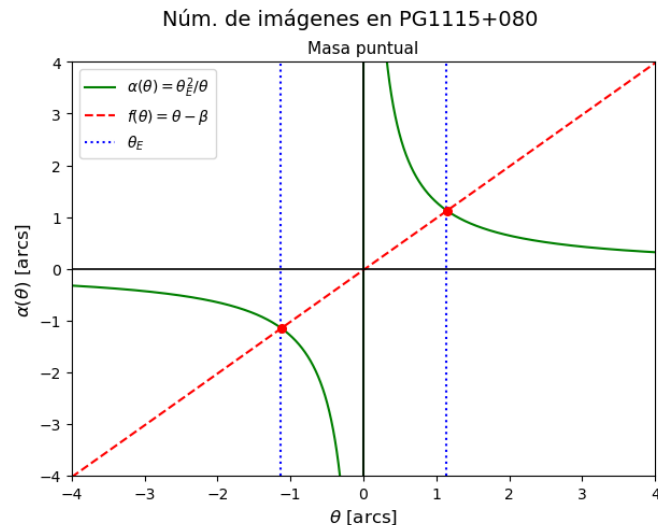


Figura 16. Número de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080 en el modelo de masa puntual.

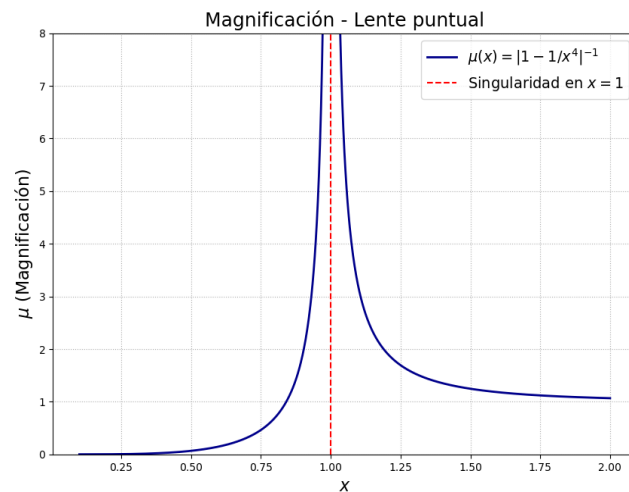


Figura 17. Magnitud de la magnificación de una imagen en el modelo de lente puntual. Esta se encuentra función de la posición de las imágenes en notación adimensional.

8. Modelo: Masa puntual

22

- Modelado.

$$M = 2.091 \times 10^{11} M_{\odot} \quad (41)$$

$$\theta_E = 1.135'' \quad (42)$$

Modelo	Masa ($10^{11} M_{\odot}$)	DRP	θ_E (arcsec)	DRP
Hub/SIS	2.030	3 %	1.030	10 %
De Vauc/SIS	1.910	9 %	1.030	10 %
Hub/Pt	2.030	3 %	1.150	1.3 %
PMXS	—	—	1.137	0.7 %

Tabla 4. Comparación de las masas y ángulos de Einstein para el sistema PG 1115+080. La DRP corresponde a la diferencia relativa porcentual respecto al valor usado en este trabajo.

[Yoshida & Omote, 1988; Schechter et al., 1997; Impey et al., 1998].

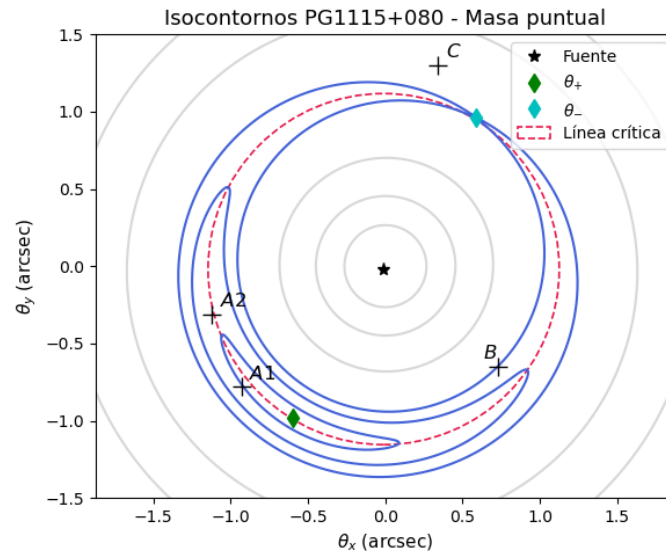


Figura 18. Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para una masa puntual.

8. Modelo: SIS

- Densidad.

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\sigma_V^2}{2\pi G |\vec{r}|^2} \quad (43)$$

- Ángulo de deflexión reducido.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4\pi\sigma_V^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{e}_\theta \quad (44)$$

- Ángulo de Einstein.

$$\theta_{E-sis} \equiv \frac{4\pi\sigma_V^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \quad (45)$$

- Potencial gravitacional.

$$\Psi(\theta) = \theta_{E-sis} \theta \quad (46)$$

- Función tiempo de atraso.

$$\mathcal{T} = \frac{(1+z_L)}{c} \frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\theta - \beta|^2 - \theta_{E-sis} |\vec{\theta}| \right] \quad (47)$$

- Ecuación de la lente.

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{E-sis} \hat{e}_\theta \quad (48)$$

- Líneas críticas.

$$\lambda_{tan} = \left(1 - \frac{1}{|x|} \right) \quad (49)$$

$$\lambda_{rad} = 1 \quad (50)$$



8. Modelo: SIS

24

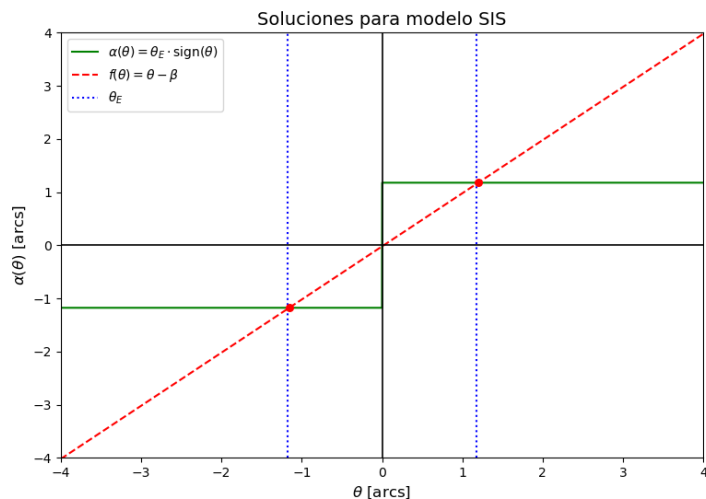


Figura 19. Número de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080 en el modelo SIS.

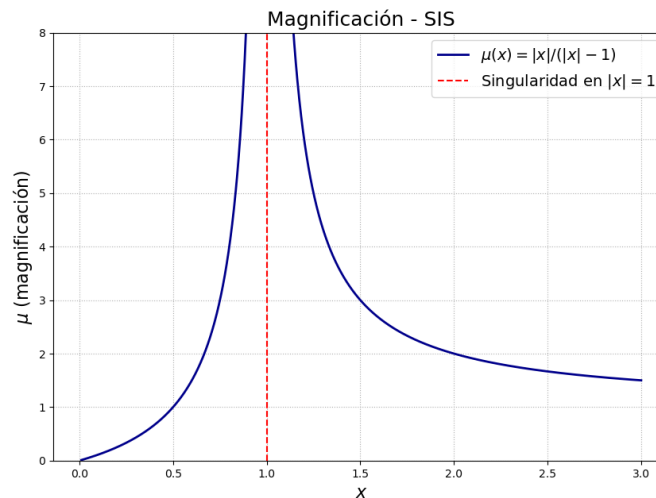


Figura 20. Magnitud de la magnificación de una imagen en el modelo SIS. Esta se encuentra descrita en notación adimensional.

8. Modelo: SIS

- Modelado.

$$\sigma_v = 235 \text{ km/s} \quad (51) \quad [\text{Kundić et al., 1997; Impey et al., 1998}]$$

$$\theta_{E-\text{sis}} = 1.1754'' \quad (52)$$

$$\frac{\Delta \mathcal{J}_{A1C}}{\Delta \mathcal{J}_{A1B}} = 0.6 \quad (53) \quad [\text{Shimanovskaya et al., 2015}]$$

Modelo	σ_v (km/s)	DRP
SIE/SIS	230	2 %
SIE/Pt	243	3 %

Tabla 5. Diferencia relativa porcentual de la velocidad de dispersión para el sistema PG 1115+080 con respecto al valor usado en este trabajo.

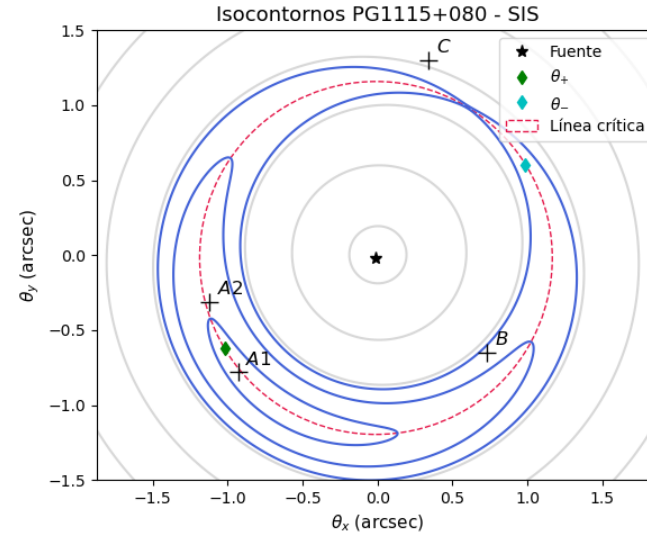


Figura 21. Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para una masa puntual.

8. Modelo: NIS

26

- Densidad.

$$\Sigma(\xi) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \xi_c^2}} \quad (54)$$

- Ángulo de deflexión reducido.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \theta_{E-\text{sis}} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}}{\theta} - \frac{\theta_c}{\theta} \right) \vec{e}_\theta \quad (55)$$

- Ángulo de Einstein.

$$\theta_{E-NIS} \equiv \theta_{E-\text{sis}} \sqrt{1 - 2 \frac{\theta_c}{\theta_{E-\text{sis}}}} \quad (56)$$

- Potencial gravitacional.

$$\Psi(\theta) = \theta_{E-\text{sis}} \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln \left| \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right| \right] \quad (57)$$

- Función tiempo de atraso.

$$\mathcal{T} = \frac{(1 + z_L)}{c} \frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\theta - \beta|^2 - \Psi(\theta) \right] \quad (58)$$

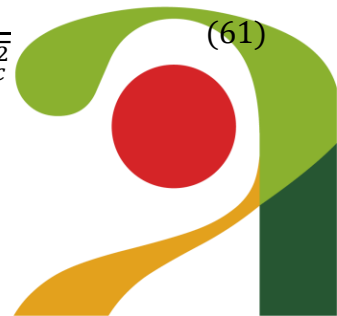
- Ecuación de la lente.

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (59)$$

- Líneas críticas.

$$\lambda_{tan} = \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + x_c^2} + x_c}{x^2} \quad (60)$$

$$\lambda_{rad} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x_c^2}} \quad (61)$$



8. Modelo: NIS

- Posición teóricas de las imágenes.

Imagen	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
θ_+	-1.005	-0.614
θ_-	0.969	0.592
θ_{cen}	1.574×10^{-4}	0.962×10^{-4}

Tabla 6. Coordenadas teóricas de las imágenes del sistema PG1115 + 080 en el modelo NIS.

Núm. de imágenes en PG1115+080 - NIS

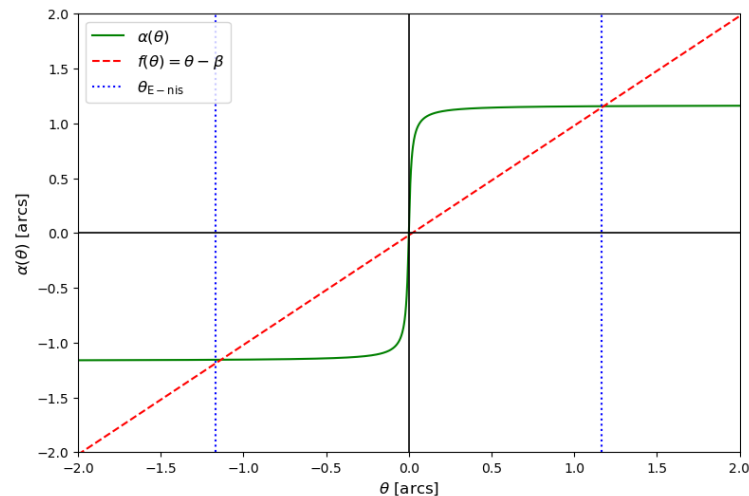


Figura 22. Número de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080 en el modelo de masa puntual.

8. Modelo: NIS

- Posición teóricas de las imágenes.

Imagen	θ_x (arcs)	θ_y (arcs)
θ_+	-1.005	-0.614
θ_-	0.969	0.592
θ_{cen}	1.574×10^{-4}	0.962×10^{-4}

Tabla 6. Coordenadas teóricas de las imágenes del sistema PG1115 + 080 en el modelo NIS.

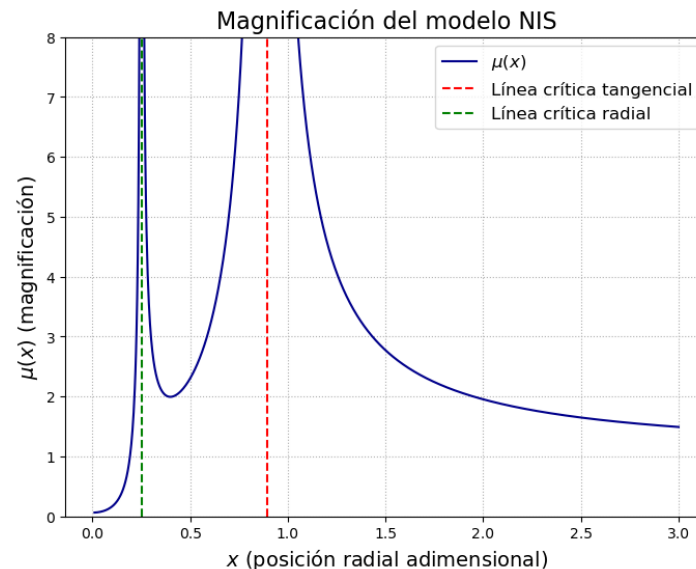


Figura 23. Magnitud de la magnificación de una imagen en el modelo NIS. Esta se encuentra descrita en notación adimensional.

8. Modelo: NIS

- Tiempos de atraso.

Tiempo de atraso	Valor (días)
$\Delta\mathcal{T}_{A1B}$	11.562
$\Delta\mathcal{T}_{A2B}$	8.885
$\Delta\mathcal{T}_{A1C}$	10.545
$\Delta\mathcal{T}_{A2B}$	13.212
$\Delta\mathcal{T}_{BC}$	22.097

Tabla 7. Tiempos de atraso entre imágenes para el sistema de lente gravitacional PG 1115+080 modelado con un perfil NIS.

[Bonvin et al., 2018]

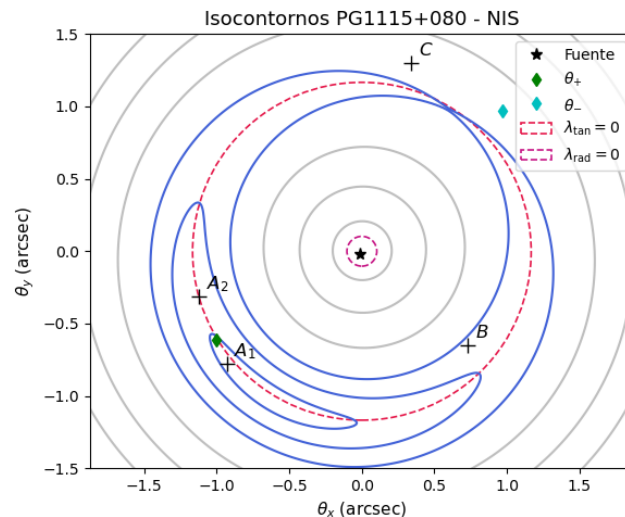


Figura 24. Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso para una masa puntual.

8. Modelo: SIE

30

- Densidad.

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2}} \quad (62)$$

- Ángulo de deflexión reducido.

$$f' = \sqrt{1 - f^2} \quad (63)$$

$$\alpha_1(x) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\arcsin \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right] \quad (64)$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin(f' \sin \phi) \quad (65)$$

- Potencial gravitacional.

$$\hat{\Psi}(x, \phi) = x \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arcsinh} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right) \right] \quad (66)$$

- Líneas críticas.

$$\lambda_{rad} = 1 \quad (67)$$

$$\vec{x}_t = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} (\cos \phi, \sin \phi) \quad (68)$$

8. Modelo: pSIE

- Potencial gravitacional.

$$\Psi(\theta) = \theta_{E-\text{sis}} \sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \quad (69)$$

- Ángulo de deflexión reducido.

$$\alpha_1(\vec{\theta}) = \theta_{E-\text{sis}} \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}} \quad (70)$$

$$\alpha_2(\vec{\theta}) = \theta_{E-\text{sis}} \frac{f^2 \theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2}} \quad (71)$$

- Convergencia.

$$\kappa = \frac{\theta_{E-\text{sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[1 + f^2 - \frac{\theta_1^2 + f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right] \quad (72)$$

- Cizallamiento.

$$\gamma_1 = \frac{\theta_{E-\text{sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[1 - f^2 - \frac{\theta_1^2 - f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right] \quad (73)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\theta_{E-\text{sis}}}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2 \theta_1 \theta_2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2} \right] \quad (74)$$

8. Modelos: SIE y pSIE

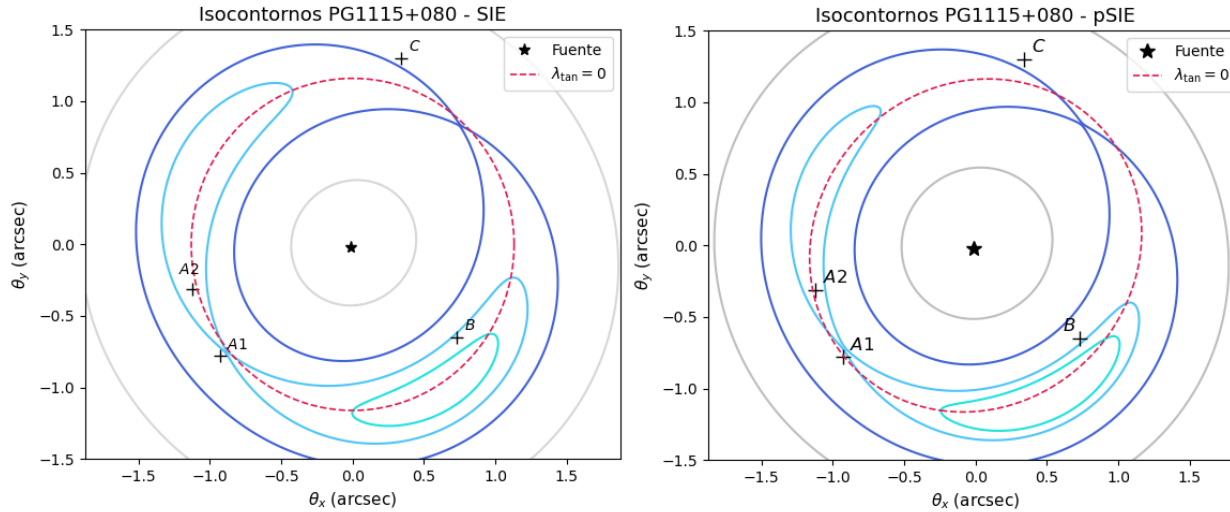


Figura 25. Formación de imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080, mediante el análisis de los isocontornos de la superficie tiempo de atraso.

$$\sigma_v = 235 \text{ km/s} \quad (75)$$

$$f = 0.973 \quad (76)$$

$$\varphi = 45^\circ \quad (77)$$



8. Modelos: SIE y pSIE

- Clasificación de imágenes.

Imagen	Tipo	Paridad
A1	P. de silla - II	-
A2	Mínimo - I	+
B	Mínimo - I	+
C	P. de silla - II	-

Tabla 8. Clasificación de imágenes del sistema PG 1115+080 en el SIE.

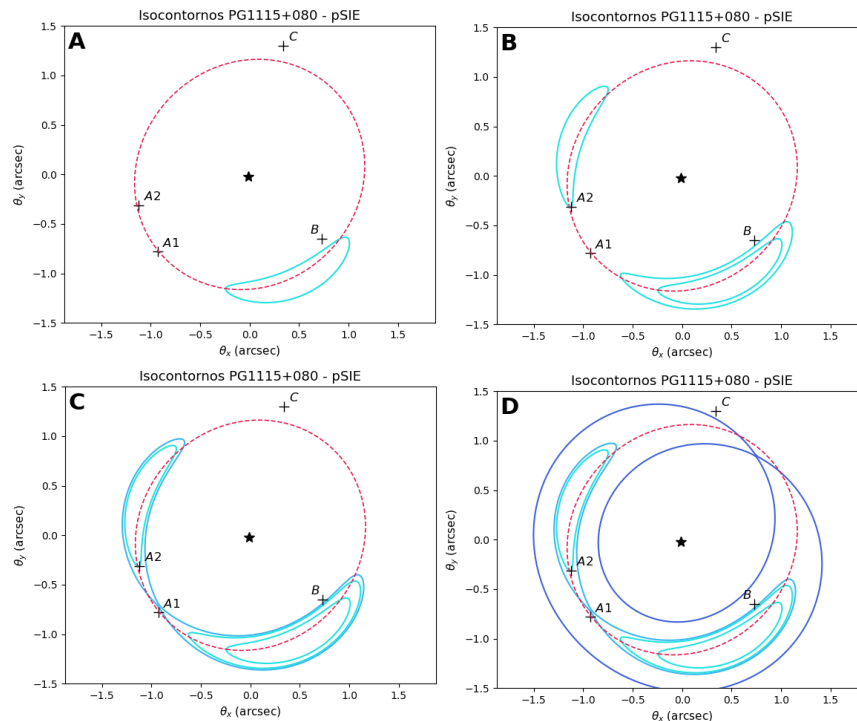


Figura 26. Formación de las imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080 en función de la evolución temporal de las líneas de contorno de la superficie de tiempo de atraso del modelo pSIE. Los isocontornos grises se forman para tiempos mayores, por lo cual su adición es únicamente estética.

8. Modelos: SIE y pSIE

- Comparación con modelo SIE/Pt.

Parámetro	Valor	Unidad	DRP
θ_E	1.15	arcs	2 %
σ_v	243	km/s	3 %
f	0.95	—	3 %

Tabla 9. Diferencia relativa porcentual entre los parámetros usados en este trabajo (modelo SIE) y el modelo SIE/Pt de la referencia [Impey et al., 1998].

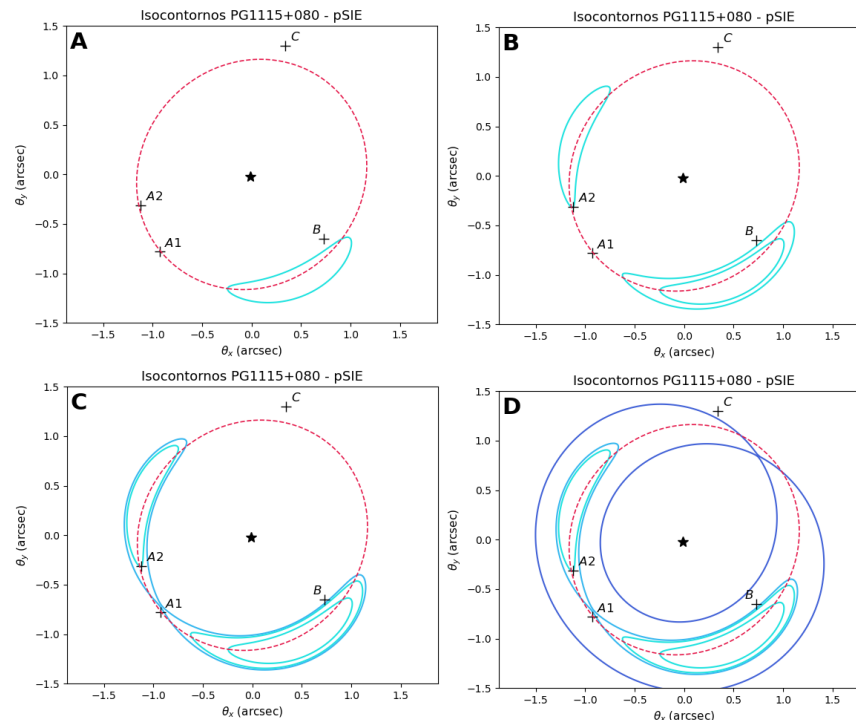


Figura 26. Formación de las imágenes del sistema de lente gravitacional PG 1115+080 en función de la evolución temporal de las líneas de contorno de la superficie de tiempo de atraso del modelo pSIE. Los isocontornos grises se forman para tiempos mayores, por lo cual su adición es únicamente estética.

8. Modelo: NIE

35

- Densidad.

$$\Sigma(\vec{\theta}) \equiv \frac{\sigma_v^2}{2GD_{OL}} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2\theta_2^2 + \theta_c^2}} \quad (78)$$

- Potencial gravitacional.

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \theta_{E\text{-sis}} \frac{\sqrt{f}}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\ln \sqrt{(\theta_1 - \theta'_1)^2 + (\theta_2 - \theta'_2)^2}}{\sqrt{\theta_1'^2 + f^2\theta_2'^2 + \theta_c^2}} d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (79)$$

- Ángulo de deflexión.

$$\alpha^* = \left[\frac{\sqrt{f}}{f'} \arcsin \left(\Xi \sqrt{b'^2 + b_c^2} \right) - \arcsin(\Xi b_c) \right] \quad (80)$$

$$\Xi \equiv \frac{f'}{\sqrt{f^2 x^2 - f'^2 b_c^2}} \quad (81)$$

8. Modelo: pNIE

- Potencial gravitacional.

$$\Psi = \theta_{E\text{-sis}} \left[\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2} \right] \quad (82)$$

- Ángulo de deflexión.

$$\alpha_1 = \theta_{E\text{-sis}} \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2}} \quad (83)$$

$$\alpha_2 = \theta_{E\text{-sis}} \frac{f^2 \theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2}} \quad (84)$$

- Convergencia.

$$\kappa = \frac{\theta_{E\text{-sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[1 + f^2 - \frac{\theta_1^2 + f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2} \right] \quad (85)$$

- Cizallamiento.

$$\gamma_1 = \frac{\theta_{E\text{-sis}}}{2(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[1 - f^2 - \frac{\theta_1^2 - f^4 \theta_2^2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2} \right] \quad (86)$$

$$\gamma_2 = - \frac{\theta_{E\text{-sis}}}{(\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2)^{1/2}} \left[\frac{f^2 \theta_1 \theta_2}{\theta_1^2 + f^2 \theta_2^2 + \theta_c^2} \right] \quad (87)$$

8. Modelos: NIE y pNIE

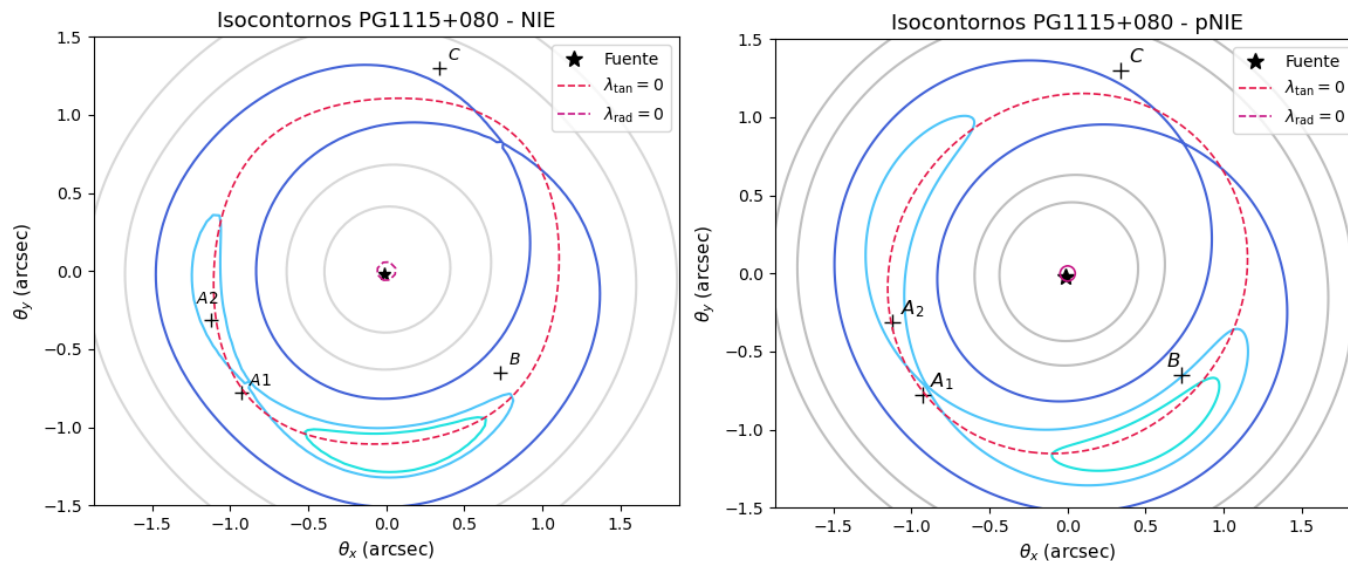


Figura 27. Ilustración modelos NIE y pNIE de los isocontornos de la función tiempo de atraso del sistema PG 1115+080. Los isocontornos grises se forman para tiempos mayores, por lo cual su adición es únicamente estética.

9. Lenstronomy

38

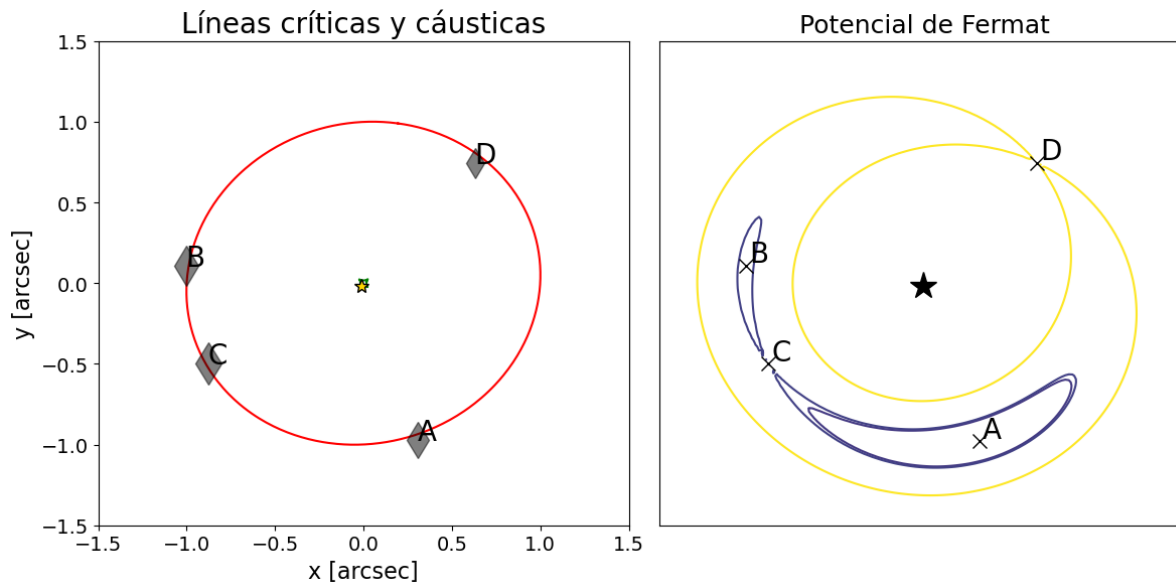


Figura 28. Isocontornos superficie tiempo de atraso, líneas críticas y cáusticas del sistema PG 1115+080 en Lenstronomy. Se considero $q = 0.95$ y $\varphi = 45^\circ$

10. Conclusiones y recomendaciones

39

- A partir de las curvas con geometría de lemniscata y caracol de Pascal definidas por la topología del potencial de Fermat, es posible clasificar las imágenes de sistemas de lente gravitacional presentes en la naturaleza, esto mediante el análisis de la evolución temporal de las líneas de contorno para cada sistema.
- Como primera aproximación, los modelos SIE y pSIE son apropiados para llevar a cabo un estudio topológico de la superficie de tiempo de atraso.
- Las líneas críticas funcionan como una herramienta visual para identificar las regiones del plano donde la magnificación es tan alta que una imagen situada en sus proximidades puede deformarse hasta el punto de dar lugar a nuevas imágenes.
- La formación de imágenes a través de las cáusticas, tanto de forma analítica como mediante métodos computacionales, considerando además la ampliación de los modelos de lente, como lo es el perfil Navarro-Frenk-White (NFW).
- Estudiar sistemas de lente gravitacional no a partir de una única lente, sino a través de un grupo de galaxias en el plano de la lente, o considerando cuerpos deflectores a lo largo del camino del rayo de luz, incluso, se propone el análisis de las lentes gravitacionales desde un enfoque más cercano a la óptica física

10. Bibliografía

ESA/Hubble. (2004). *Different types of gravitational lenses* [Imagen]. ESA/Hubble. <https://esahubble.org/images/heic0404b/>

Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., et al. (2020). *Planck 2018 results—VI. Cosmological parameters*. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.

Yoshida, H., & Omote, M. (1988). General formulation of the gravitational lens and analysis of the multiple quasar PG1115 + 080. *Progress of Theoretical Physics*, 79(5), 1095–1109. <https://doi.org/10.1143/PTP.79.1095>

Schechter, P. L., Bailyn, C. D., Barr, R., Barvainis, R., Becker, C. M., Bernstein, G. M., Blakeslee, J. P., Bus, S. J., Dressler, A., Falco, E. E., & others (1997). The quadruple gravitational lens PG 1115+080: Time delays and models. *The Astrophysical Journal*, 475(2), L85. IOP Publishing.

Impey, C. D., Falco, E. E., Kochanek, C. S., Lehár, J., McLeod, B. A., Rix, H. W., Peng, C. Y., & Keeton, C. R. (1998). An infrared Einstein ring in the gravitational lens PG 1115+080. *Astrophysical Journal*, 509(2, Part I), 551–560. <https://doi.org/10.1086/306521>

Kundić, T., Cohen, J. G., Blandford, R. D., & Lubin, L. M. (1997). *Keck spectroscopy of the gravitational lens system PG 1115+080: Redshifts of the lensing galaxies*. *The Astronomical Journal*, 114, 507. <https://doi.org/10.1086/118489>

Shimanovskaya, E., Oknyansky, V., & Artamonov, B. (2015). *New estimates of time delays in the gravitationally lensed system PG1115+080* [Preprint]. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1502.05392>

Bonvin, V., Chan, J. H. H., Millon, M., Rojas, K., Courbin, F., Chen, G. F., ... & Magain, P. (2018). *COSMOGRAIL-XVII. Time delays for the quadruply imaged quasar PG 1115+080*. *Astronomy & Astrophysics*, 616, A183. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201832601>

¡Gracias!

