



ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA CÓNICAS

**Héctor Jairo Portilla Obando
Segundo Javier Caicedo Zambrano**



Editorial
Universidad de Nariño

èditorial
Universidad de **Nariño**

**ELEMENTOS DE
GEOMETRÍA ANALÍTICA
CÓNICAS**

**ELEMENTOS DE
GEOMETRÍA ANALÍTICA
CÓNICAS**

Héctor Jairo Portilla Obando
Segundo Javier Caicedo Zambrano

èditorial
Universidad de **Nariño**

Portilla Obando, Héctor Jairo

Elementos de geometría analítica : cónicas / Héctor Jairo Portilla Obando, Segundo Javier Caicedo Zambrano – San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

127 páginas : ilustraciones, gráficos

Incluye referencias bibliográficas p. 125

ISBN: 978-628-7771-28-4

1. Geometría analítica--Cónicas--definición 2. Secciones cónicas 3. Geometría analítica—Ecuaciones canónicas 4. Elipse 5. Parábola 6. Geometría analítica—Cónicas rotadas. I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

516.3 P852e – SCDD-Ed. 22



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

ai

Universidad de Nariño
SECRETARÍA DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN 0001-000001-2025-11-03-2025

SELECCIÓN DE BIBLIOTECA

© Editorial Universidad de Nariño

© Héctor Jairo Portilla Obando

Segundo Javier Caicedo Zambrano

ISBN: 978-628-7771-28-4

Corrección de estilo: Germán Chaves Jurado

Diseño de cubiertas y diagramación: Angie Gabriela Ordoñez

Fecha de publicación: Abril 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus Autores o de la Editorial Universidad de Nariño

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO.....	6
INTRODUCCIÓN.....	8
1. CÓNICAS.....	11
DEFINICIÓN.....	11
ELEMENTOS DE UNA CÓNICA.....	12
2. ECUACIONES CANÓNICAS.....	14
ECUACIONES CANÓNICAS DE UNA ELIPSE.....	14
<i>Caso 1a</i>	14
<i>Caso 1b</i>	21
ECUACIONES CANÓNICAS DE UNA PARÁBOLA.....	28
<i>Caso 2a</i>	28
<i>Caso 2b</i>	30
ECUACIONES CANÓNICAS DE UNA HIPÉRBOLA.....	34
<i>Caso 3a</i>	34
<i>Caso 3b</i>	41
3. CÓNICAS TRASLADADAS.....	52
ELIPSES TRASLADADAS.....	53
<i>Caso 1a'</i>	53
<i>Caso 1b'</i>	54
PARÁBOLAS TRASLADADAS.....	65
<i>Caso 2a'</i>	65
<i>Caso 2b'</i>	66
HIPÉRBOLAS TRASLADADAS.....	73
<i>Caso 3a'</i>	73
<i>Caso 3b'</i>	74

4. CÓNICAS ROTADAS.....	81
ELIPSES ROTADAS.....	82
<i>Caso 1a''</i>	82
<i>Caso 1b''</i>	82
PARÁBOLAS ROTADAS	83
<i>Caso 2a''</i>	83
<i>Caso 2b''</i>	83
HIPÉRBOLAS ROTADAS.....	84
<i>Caso 3a''</i>	84
<i>Caso 3b''</i>	84
ÁNGULO DE ROTACIÓN.....	88
5. CÓNICAS TRASLADADAS Y ROTADAS	102
6. RESUMEN GENERAL	121
BIBLIOGRAFÍA.....	125

INTRODUCCIÓN

El núcleo principal de este texto, es un tema de Geometría Analítica que aborda el estudio de las cónicas. Además, se tratan otros temas relevantes para el estudio integral de estas formas cuadráticas, conocidas también como secciones cónicas.

El nombre de *cónica*, se debe a que son producto de intersecciones especiales de un plano con un cono circular recto de dos hojas; dichas intersecciones, particularmente reciben el nombre de: elipse, parábola e hipérbola (Figura 1).

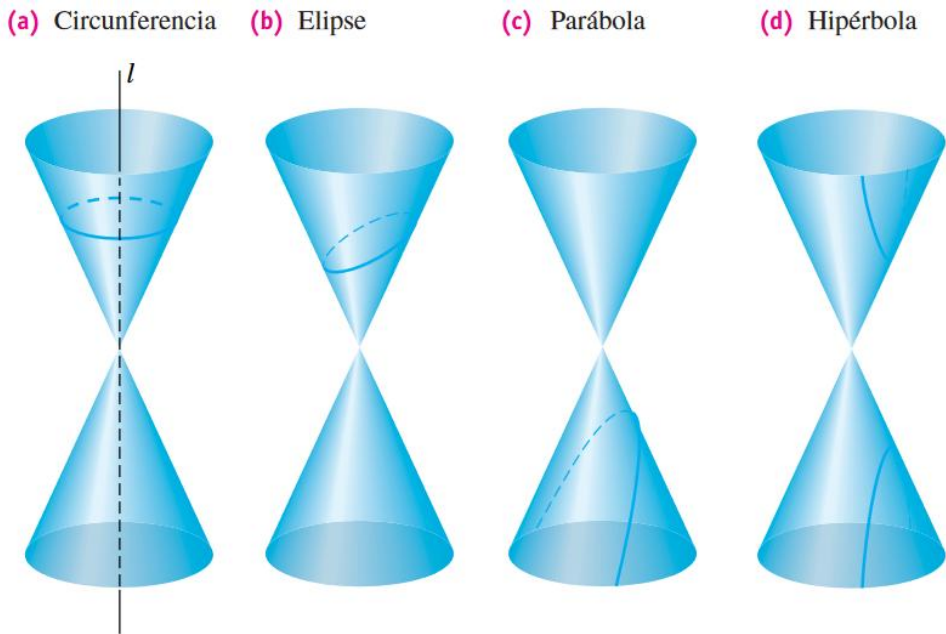


Figura 1. Cónicas.

Fuente: Swokowski y Cole (2009), p. 816.

Además, una intersección puede dar lugar a un punto, una línea recta, dos rectas que se cruzan en un punto (consideradas como cónicas degeneradas), o incluso, puede dar lugar a una circunferencia, la cual no se clasifica como cónica. En el caso de una circunferencia, como se explicará en este libro, no cumple con la definición general para las cónicas; sin embargo, en ciertos contextos matemáticos, la circunferencia se puede considerar como una cónica, al margen de la definición general y de las condiciones establecidas para ser un tipo de cónica, tal como sucede con la elipse, la parábola y la hipérbola.

La intersección de un cono circular recto con un plano, donde el eje del cono es perpendicular al plano, sí es una circunferencia.

Hablando en términos de límites, se podría considerar la siguiente afirmación:

Cuando la longitud del semieje mayor de una elipse “*tiende*” a la longitud del semieje menor, entonces la elipse “*tiende*” a una circunferencia. En este caso, el semieje mayor, así como el semieje menor, tienden al radio de la circunferencia. También, la distancia entre los focos de la elipse y su excentricidad, tienden a cero. Debido a esto último, en las circunferencias no existe la recta directriz.

En este libro se llevan a cabo los procedimientos algebraicos para obtener las distintas ecuaciones de las cónicas, así como las ecuaciones de las rectas y las coordenadas de los puntos mencionados en su análisis, a partir de las definiciones y otros elementos considerados en el mismo.

Hacer la lectura de estos procesos algebraicos, puede resultar un poco tedioso para el lector, pero se realizan para dar coherencia y justificación de los resultados y no exponer o plantear los temas en forma directa y de manera algorítmica. Muchos estudiantes tienen la inquietud del por qué o desean saber el cómo se obtienen. Esta metodología también puede

servir como base y motivación para que los lectores apliquen procesos similares en otros temas o campos de la matemática.

Es fundamental reconocer el tipo de cónica que resulta de una ecuación cuadrática con dos variables, al llevar la ecuación a la forma canónica de la cónica correspondiente, mediante la rotación o traslación de sistemas de coordenadas lineales. Esto nos permite determinar las coordenadas de los puntos, las ecuaciones de las rectas y otros elementos mencionados en el estudio de las cónicas. Estos temas son abordados en este libro, el cual es desarrollado como notas de clase.

Finalmente, este libro está dirigido principalmente a estudiantes de las carreras de ingeniería, particularmente de electrónica, sistemas, civil; como también a estudiantes de Física y de Matemáticas.



1. CÓNICAS

Ciertos elementos geométricos que tienen representación analítica mediante expresiones algebraicas de grado dos (formas cuadráticas), tales como la parábola, elipse, hipérbola y ciertas superficies y volúmenes de revolución, se les denomina cónicas.

Definición

En un plano $\mathcal{P}$, sean un punto fijo F , llamado **foco**; una recta fija D , llamada **directriz**, tal que $F \notin D$.

Una cónica se define como el conjunto de todos los puntos P de un plano $\mathcal{P}$, tales que, $PF = e \times d(P, D)$, donde la expresión $d(P, D)$ expresa la distancia del punto P a la recta D y e es un número real positivo, llamado *excentricidad* de la cónica.

Cuando $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse** (Figura 2).

Cuando $e = 1$, la cónica es una **parábola** (Figura 3).

Cuando $1 < e$, la cónica es una **hipérbola** (Figura 4).

Nota

De la definición anterior, se deduce que una circunferencia no es una cónica porque no tiene excentricidad, tal como se observará más adelante.

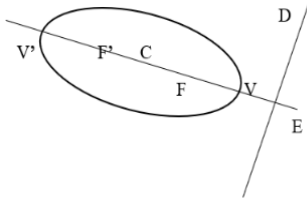


Figura 2. Elipse
Fuente: Elaboración propia

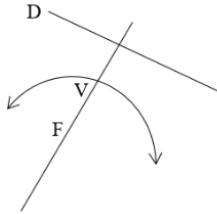


Figura 3. Parábola
Fuente: Elaboración propia

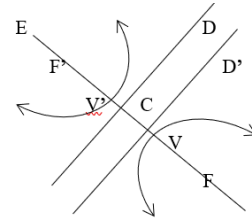


Figura 4. Hipérbola
Fuente: Elaboración propia

Elementos de una cónica

Eje focal. Es la recta perpendicular a la directriz y que contiene al foco (recta E).

Vértices. Son los puntos de corte de la cónica con el eje focal (puntos V y V')

Centro de la cónica. Es el punto medio entre los vértices (punto C, *Figura 2, Figura 4*).

Lado recto. Es el segmento de recta con extremos en la cónica, perpendicular al eje focal y que contiene al foco.

Nota

Una elipse y una hipérbola tiene cada una dos focos, dos directrices, dos lados rectos y un centro.

Una parábola tiene un solo vértice y un solo foco, de hecho, un solo lado recto y una sola directriz. No tiene centro.

Particularmente, cada cónica tiene su propia definición, como se presenta en seguida.

Elipse. Es el lugar geométrico o conjunto de todos los puntos P de un plano $\mathcal{P}$, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' (focos de la elipse) es igual a una constante k ; así:

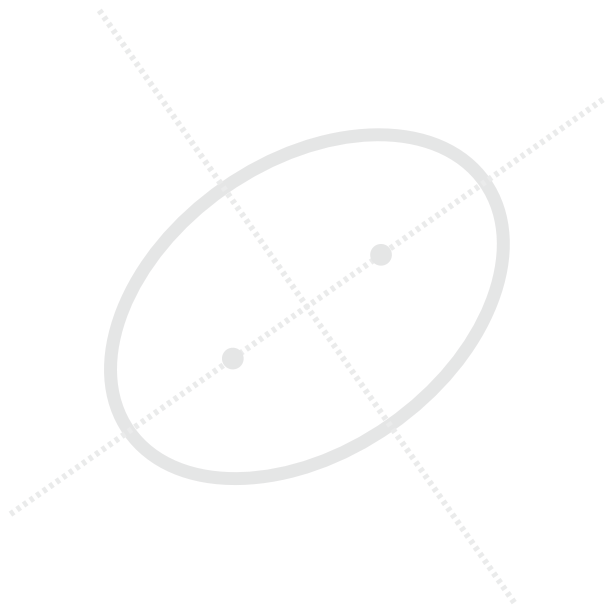
$$E = \{P \in \mathcal{P} / PF + PF' = k\} \quad \textcircled{1}$$

Parábola. Es el lugar geométrico o conjunto de todos los puntos P de un plano $\mathcal{P}$, equidistante de un punto fijo F (foco) y de una recta fija D (directriz); así:

$$P = \{P \in \mathcal{P} / PF = d(P, D)\} \quad \textcircled{2}$$

Hipérbola. Es el lugar geométrico o conjunto de todos los puntos P de un plano $\mathcal{P}$, tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a dos puntos fijos F y F' (focos de la hipérbola) es igual a una constante k ; así:

$$H = \{P \in \mathcal{P} / |PF - PF'| = k\} \quad \textcircled{3}$$



2. ECUACIONES CANÓNICAS

La ecuación *canónica* de una cónica, en un sistema cartesiano rectangular XYO , se la obtiene cuando el eje focal es un eje coordenado, y el punto O es el centro de la elipse o de la hipérbola y el vértice de una parábola.

En este libro, primero se obtiene una ecuación canónica de cada cónica y, luego, mediante traslación y rotación de ejes, se obtiene o se deduce la respectiva ecuación de cada cónica, finalmente se establece la ecuación general correspondiente.

Ecuaciones canónicas de una elipse

Se presentan dos casos, dependiendo del eje focal.

Caso 1a

Si el origen O es el centro de la elipse y el eje focal es el eje X , entonces, los focos y los vértices de la elipse están en el eje X (*Figura 5*).

Se establecen los puntos $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ de corte del eje Y con la elipse.

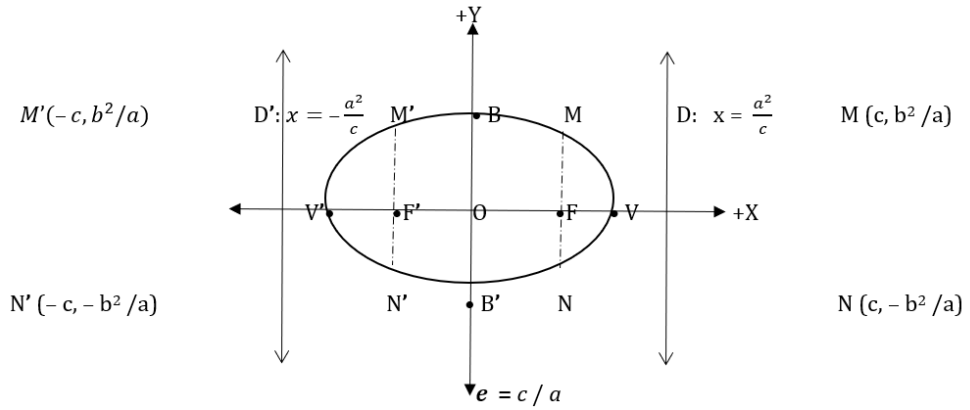


Figura 5. Caso 1a

Fuente: elaboración propia

Como V y V' son puntos particulares de la elipse, entonces según 1, aplicando la distancia entre puntos, se tiene:

$$VF + VF' = \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(a+c)^2} = k.$$

De lo cual, $|a-c| + |a+c| = k$.

Dado que, $0 < c < a$, se tiene: $0 < a-c$ y $0 < a+c$; en consecuencia, $(a-c) + (a+c) = k$; de donde, $2a = k$.

$$\begin{aligned} BF + BF' &= \sqrt{(0-c)^2 + (b-0)^2} + \sqrt{(0+c)^2 + (b-0)^2} = k \\ &= 2a \\ &= \sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} = 2a \\ &= 2\sqrt{c^2 + b^2} = 2a. \end{aligned}$$

Entonces,

$$BF + BF' = \sqrt{c^2 + b^2} = a.$$

Al elevar al cuadrado la última igualdad, se obtiene:

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

De este modo,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2.$$

Según los procesos anteriores,

$$VF = a - c; VF' = a + c; BF = BF' = a.$$

Ahora bien, para todo punto $P(x, y)$ de la elipse, según ①, se tiene:

$$\begin{aligned} PF + PF' &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = k \\ &= 2a \\ &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \end{aligned}$$

De aquí, resulta:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Al elevar al cuadrado y desarrollar los cuadrados de los binomios, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Al cancelar, reducir términos semejantes y despejar el radical, resulta:

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

De aquí, se obtiene:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

En esta igualdad, elevando al cuadrado y desarrollando los cuadrados de los binomios, resulta:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$$

Al cancelar $2a^2cx$ y transponer términos, resulta:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Al factorizar $a^2 - c^2$, se obtiene:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dado que, $a^2 - c^2 = b^2$, expresión que se obtuvo anteriormente, resulta:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Al dividir por a^2b^2 y simplificar, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1a)$$

Esta ecuación corresponde a una elipse con centro en el punto O y eje focal X , en la cual, $a > b$.

Consideraciones:

El segmento de recta $\overline{VV'}$ es el **eje mayor** y el segmento $\overline{BB'}$ es el **eje menor** de la elipse. B y B' son los sub vértices.

$VV' = 2a = k$ es la longitud del eje mayor, es la constante k en la definición ①.

$\overline{VO}$ es semieje mayor, al igual que $\overline{V'O}$.

$\overline{BO}$ es semieje menor, al igual que $\overline{B'O}$.

Ecuación de la directriz:

Como el eje focal y la directriz son rectas perpendiculares, y en este caso, el eje focal es eje X , entonces la directriz es perpendicular a X o paralela al eje Y .

Según lo anterior, la ecuación de la directriz D es $x = t$, para $t \in \mathbb{R}$.

Al foco F le corresponde la directriz D ; en este caso, $t > 0$; al foco F' le *corresponde* la directriz D' , $t < 0$.

Para obtener el valor de t , se establece la ecuación de D , así: $x + 0y - t = 0$.

En primer lugar, aplicando la distancia de un punto a una recta, se tiene:

Para los puntos V y B :

$$d(V, D) = \frac{|a + 0 - t|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |a - t|;$$

$$d(B, D) = |0 + 0b - t| / \sqrt{1^2 + 0^2} = |-t| = |t|.$$

Entonces,

$$d(V, D) = |a - t|;$$

$$d(B, D) = |-t| = |t|.$$

Aplicando la definición general de una cónica con los puntos V y B , resulta:

$$VF = e \times d(V, D);$$

$$BF = e \times d(B, D).$$

Despejando e :

$$VF/d(V, D) = e;$$

$$BF/d(B, D) = e.$$

De aquí, se obtiene:

$$\frac{VF}{d(V, D)} = \frac{BF}{d(B, D)}.$$

$$VF \times d(B, D) = BF \times d(V, D).$$

Al reemplazar los valores VF , BF , $d(V, D)$ y $d(B, D)$, obtenidos anteriormente, resulta:

$$(a-c) \times |t| = a \times |a-t|.$$

Como $(a-c) > 0$ y $a > 0$, entonces:

$$|(a-c)t| = |a(a-t)|.$$

Aplicando propiedades de valor absoluto, resulta:

$$(a-c)t = a(a-t) \text{ o } (a-c)t = -a(a-t).$$

De la expresión: $(a-c)t = a(a-t)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$at - ct = a^2 - at.$$

Esta ecuación no corresponde a la directriz D : $t = \frac{a^2}{2a-c}$.

De la expresión: $(a-c)t = -a(a-t)$, se obtiene:

$$at - ct = a^2 + at;$$

$$t = \frac{a^2}{c}.$$

Esta ecuación corresponde a la directriz $D: t = \frac{a^2}{c}$.

Luego, la directriz D , está determinada por la siguiente expresión:

$$D: x = \frac{a^2}{c}, \text{ para todo real } y, c \neq 0.$$

De igual manera, realizando proceso similar al anterior tomando el foco F' y el punto B , o bien con B' , se deduce que,

$$D': x = -\frac{a^2}{c}, \text{ para todo real } y, c \neq 0.$$

Excentricidad:

Como $d(V, D) = |a - t|$, entonces:

$$d(V, D) = \left| a - \frac{a^2}{c} \right| = \frac{|ac - a^2|}{c} = \frac{a|c - a|}{c} = \frac{a|a - c|}{c}.$$

La excentricidad e es constante, entonces, se la puede obtener con cualquier punto de la elipse.

Se tiene que, $VF = e \times d(V, D)$, entonces, $(a - c) = e \times \frac{a|a - c|}{c}$.

Como $a - c > 0$, entonces, $(a - c) = e \times a(a - c)/c$; al cancelar $(a - c)$ y despejar e , se obtiene: $e = \frac{c}{a}, a \neq 0$.

De esta expresión se deduce que, $0 < e < 1$, pues, $0 < c < a$.

Afirmación:

La excentricidad de una elipse es el cociente entre la distancia de sus focos al centro de la elipse y la distancia de sus vértices al centro de la elipse.

Lado recto:

Si el segmento $\overline{MN}$ es el lado recto que pasa por F , entonces $M(c, m)$; $N(c, n)$.

Para obtener m se reemplaza la variable y por m , x por c en la ecuación (1a), porque M es punto de la elipse.

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} &= 1 \Rightarrow \frac{m^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow m^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \\ &= b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2 \cdot b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{b^2}{a} \\ &\Rightarrow m = \frac{b^2}{a}.\end{aligned}$$

Dado que los puntos M y N son simétricos respecto al eje X , sus coordenadas son:

$$M\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } N\left(c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Si $\overline{M'N'}$ es el lado recto que pasa por F' , entonces,

$$M'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } N'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Se establece las anteriores coordenadas teniendo en cuenta que, M con M' y N con N' son simétricos respecto al eje Y .

Caso 1b

Si el origen O es el centro de la elipse y el eje focal es el eje Y , entonces, los focos y los vértices de la elipse están en el eje Y (Figura 6).

Se establece $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $V(0, b)$, $V'(0, -b)$ y los puntos $B(a, 0)$, $B'(-a, 0)$ corte del eje X con la elipse.

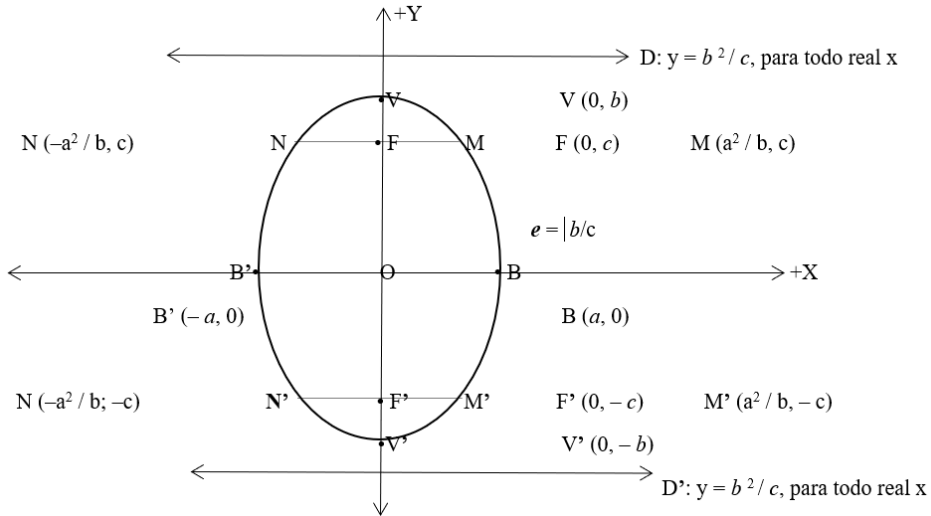


Figura 6. Caso 1b

Fuente: elaboración propia

Realizando procesos similares a los efectuados en el caso 1a, se obtiene la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1b)$$

Pero en este caso, $c < b$, $a^2 + c^2 = b^2$; esto es, $b^2 = a^2 + c^2$. Por lo cual, $a < b$.

La constante k de la definición 1 es $2b$, longitud del eje mayor, igual que en el caso anterior.

Excentricidad $e = b/c$: distancia de los vértices al centro de la elipse sobre distancia de los focos al centro de la elipse.

Directrices. $D: y = b^2/c$, para todo real x .

$D': y = b^2/c$, para todo real x .

Resumen:

La ecuación en un sistema rectangular cartesiano XYO de una elipse con centro O , eje focal el eje X o el eje Y es.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (I)$$

Cuando $a > b$, el eje focal es el eje X y si $b > a$, entonces el eje focal es el eje Y .

Las coordenadas de los focos, vértices, sub vértices y ecuaciones de las directrices, ya están establecidas en cada caso.

La excentricidad en cualquier caso es:

Distancia de los vértices al centro de la elipse sobre distancia de los focos al centro de la elipse.

La constante k en la definición general de la ecuación para la elipse, es:

k : Longitud del eje mayor.

Ejemplos:

1. Dada la ecuación en un sistema rectangular XYO , establecer en cada caso los elementos de la elipse dada:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$

c) $81x^2 + 225y^2 = 18.225.$

Solución

a) Si $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, entonces $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Como $5 > 4$, entonces, los focos y vértices están en el eje X .

Así, para $a = 5, b = 4: c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2; c = 3$.

$$\frac{a^2}{c} = \frac{25}{3}; \frac{c}{a} = \frac{3}{5}; 2a = 10; \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}.$$

Coordenadas de focos, vértices y sub vértices:

$$F(3,0); F'(-3,0); V(5,0); V'(-5,0); B(0,4); B'(0,-4).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x = 25/3, \text{ para todo real } y.$$

$$D': x = -25/3, \text{ para todo real } y.$$

Excentricidad: $e = 3/5$.

Constante $k: k = 10$.

Extremos de lados rectos:

Si el segmento $\overline{MN}$ es el lado recto que pasa por F , entonces: $M(3, 16/5)$ y $N(3, -16/5)$.

Si el segmento $\overline{M'N'}$ es el lado recto que pasa por F' , entonces: $M'(-3, 16/5)$ y $N'(-3, -16/5)$.

b) Si $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$, entonces $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$.

Como $10 > 6$, entonces los focos y vértices están en Y .

Así, para $a = 6, b = 10$: $c^2 = b^2 - a^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$; $c = 8$.

$$\frac{b^2}{c} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}; \frac{c}{b} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; 2b = 20; \frac{a^2}{b} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}.$$

Coordenadas de focos, vértices y sub vértices:

$$F(0,8); F'(0,-8); V(0,10); V'(0,-10); B(6,0); B'(-6,0).$$

Ecuación de directrices:

$$D: y = 25/2, \text{ para todo real } x.$$

$$D': y = -25/2, \text{ para todo real } x.$$

Excentricidad: $e = 4/5$.

Constante k : $k = 20$.

Extremos de lados rectos:

Si el segmento $\overline{MN}$ es el lado recto que pasa por F , entonces: $M(18/5, 8)$ y $N(-18/5, 8)$.

Si el segmento $\overline{M'N'}$ es el lado recto que pasa por F' , entonces, $M'(18/5, -8)$ y $N'(-18/5, -8)$.

c) Si $81x^2 + 225y^2 = 18.225$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{81x^2}{18.225} + \frac{225y^2}{18.225} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{18.225}{81}} + \frac{225y^2}{\frac{18.225}{225}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{225} + \frac{225y^2}{81} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1. \end{aligned}$$

Según la última ecuación, se trata de una elipse con centro en el origen O del sistema coordenado. Además, como $15 > 9$, los con focos y vértices

están en el eje X , sub vértices en el eje Y y directrices perpendiculares al eje X (*Caso 1a*).

Así, para $a = 15, b = 9: c^2 = a^2 - b^2 = 225 - 81 = 144 = 12^2, c = 12$.

$$\frac{a^2}{c} = \frac{225}{12} = \frac{75}{4}; \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; 2a = 30; \frac{b^2}{a} = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}.$$

Coordenadas de focos, vértices y sub vértices:

$$F(12,0); F'(-12,0); V(15,0); V'(-15,0); B(0,9); B'(0,-9).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x = 75/4, \text{ para todo real } y.$$

$$D': x = -75/4, \text{ para todo real } y.$$

Excentricidad: $e = 12/15 = 4/5$.

Constante $k: k = 30$.

Extremos de lados rectos:

Si el segmento $\overline{MN}$ es el lado recto que pasa por F , entonces:
 $M\left(12, \frac{27}{5}\right); N\left(-12, \frac{27}{5}\right).$

Si el segmento $\overline{M'N'}$ es el lado recto que pasa por F' , entonces:
 $M'\left(-12, \frac{27}{5}\right); N'\left(-12, -\frac{27}{5}\right).$

2. Teniendo en cuenta la forma de la ecuación canónica de la elipse, analizar la gráfica de la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Solución

Si $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1$, entonces $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$.

En este caso, $a = 7 = b$; $c = 7^2 - 7^2 = 0$.

Según lo anterior, el *semieje menor* es igual al *semieje mayor*, es decir, no hay semieje menor ni mayor.

En este caso, el semieje se lo denomina radio y su longitud es 7.

La gráfica es una circunferencia de radio 7 y centro el origen de coordenadas.

Además, $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 49 = 0$; $c = 0 = -c$.

Según lo anterior, hay un solo foco y es el punto O , origen de coordenadas.

Aplicando la fórmula de la excentricidad: $e = c/a = c/b = 0/7 = 0$; por lo cual, no cumple con la condición de la excentricidad planteada en la definición general de una cónica, que requiere que sea un real positivo; ni con la condición particular para la elipse: $0 < e < 1$.

Por otra parte, la ecuación de una de las directrices:

$D: x = a^2/c = 49/0$, para todo real y , configura una indeterminación.

$D': x = a^2/c = 49/0$, para todo real y ; corresponde a una indeterminación.

Conclusión:

Según los anteriores análisis y resultados, se concluye que una circunferencia no cumple con las condiciones de la definición general de una cónica ni con las de una elipse.

Ejercicios

1. Establecer los elementos de cada una de las siguientes elipses:

a) $400x^2 + 144y^2 = 57.600$

b) $100x^2 + 36y^2 = 3.600$

c) $144x^2 + 225y^2 = 32.400$

d) $256x^2 + 400y^2 - 102.400 = 0$

2. Obtener la ecuación canónica de la elipse, de las directrices, coordenada de vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, excentricidad; si sus focos son $F(0,16)$, $F'(0, -16)$ y la constante k de la definición ①, es 40.

3. 3. Obtener la ecuación canónica de la elipse, directriz D' , coordenadas de vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, del foco F' ; si un foco es $F(12,0)$, la excentricidad es $4/5$ y directriz $D: 4x-75=0$.

Ecuaciones canónicas de una parábola

Caso 2a

El vértice de la parábola es el punto O y el foco está en el eje X .

Si $F(c, 0)$ es el foco y el vértice V es el origen de coordenadas O , entonces, el eje focal es el eje X y la directriz D es perpendicular al eje X ; en consecuencia, la ecuación de la directriz D es: $D: x = k$, o bien $x - k = 0$ para todo real y .

El valor de k es un real fijo, constante.

Aplicando la definición ②, $VF = d(V, D)$, porque V es un punto particular de la parábola; además, $V(0,0)$.

Como $V(0,0)$, entonces:

$$d(V, D) = \frac{|0 - k|}{\sqrt{1^2 + 0}} = |-k| = |k|.$$

Para $c > 0$, $VF = c$ (Figura); para $c < 0$, $VF = -c$ (Figura); en cualquier caso, $VF = |c| = |k|$.

Por propiedad de valor absoluto: $k = c$ o $k = -c$.

Según lo anterior, y teniendo en cuenta que $F \notin D$, solo se cumple que $k = -c$, ya sea $c > 0$ o $c < 0$.

Cuando $c > 0$, entonces $k < 0$ (Figura), y cuando $c < 0$, se tiene que $k > 0$ (Figura).

En definitiva, $D: x = -c$, esto es, $D: x + c = 0$ para todo real y .

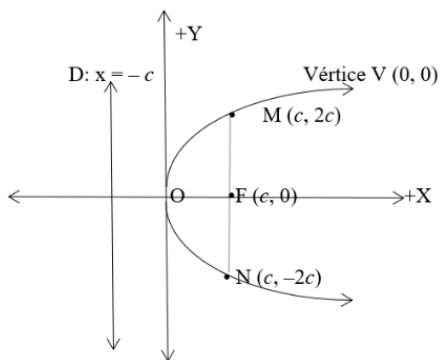


Figura 7. Caso 2a-1
Fuente: elaboración propia

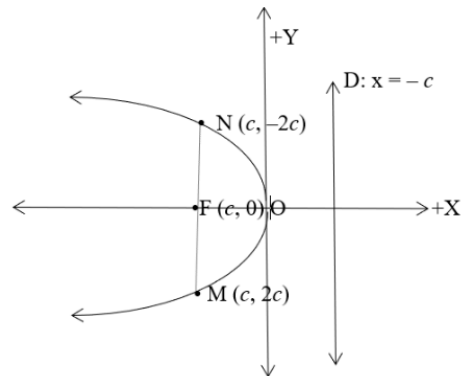


Figura 8. Caso 2a-2
Fuente: elaboración propia

Para todo punto $P(x, y)$ de la parábola, aplicando la definición ②, se tiene: $PF = d(P, D)$.

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \frac{|x + c|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + c|.$$

Elevando al cuadrado y desarrollando los cuadrados de los binomios, resulta:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2.$$

Simplificando términos semejantes, se obtiene:

$$y^2 = 4cx. \quad (2a)$$

La expresión **(2a)** corresponde a la ecuación canónica de una parábola, con vértices el punto O y como eje focal el eje coordenado X .

Si $c > 0$, entonces, $x \geq 0$ (Figura 2a.1); si $c < 0$, entonces, $x \leq 0$ (Figura 2a.2). Lo anterior porque, $y^2 \geq 0$, para todo real y .

Extremos del lado recto:

Si M y N son los extremos del lado recto, entonces $M(c, t)$ y $N(c, -t)$.

Como M es un punto de la parábola, entonces, en **(2a)**, se obtiene:

$$t^2 = 4cc = 4c^2; \quad t = \pm 2c; \quad M(c, 2c); \quad N(c, -2c).$$

Caso 2b

El vértice de la parábola es el punto O y el foco está en el eje Y .

Si $F(0, c)$ es el foco y el vértice V es origen de coordenadas O , entonces, el eje focal es el eje Y y la directriz D es perpendicular al eje Y ; en consecuencia, la ecuación de la directriz es: $D: y = k$, o bien, $y - k = 0$ para todo real x ; el valor de k es un real fijo, constante.

Aplicando la definición ② se tiene que, $VF = d(V, D)$, porque V es un punto particular de la parábola, además $V(0,0)$.

Dado que, $V(0,0)$, entonces:

$$d(V, D) = \frac{|0 - k|}{\sqrt{1^2 + 0}} = |-k| = |k|.$$

Para $c > 0$, $VF = c$ (figura 2b.1) y para $c < 0$, $VF = -c$ (figura 2b.2); en cualquier caso, $VF = |c| = |k|$.

Por propiedad de valor absoluto, se tiene que: $k = c$ o $k = -c$.

Según lo anterior, y teniendo en cuenta que $F \notin D$, solo se cumple que $k = -c$, para $c > 0$ o $c < 0$.

Cuando $c > 0$, entonces, $k < 0$ (Figura 9) y cuando $c < 0$, se tiene que $k > 0$ (Figura 10).

En definitiva, $D: y = -c$, es decir, $D: y + c = 0$, para todo real x .

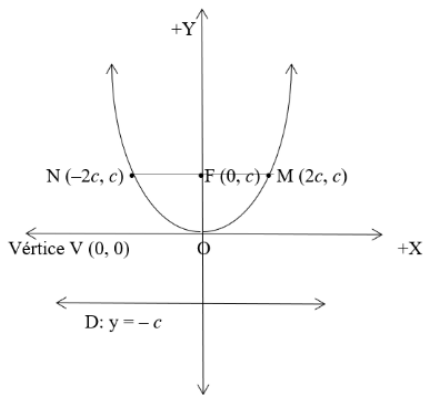


Figura 9. Caso 2b-1
Fuente: elaboración propia

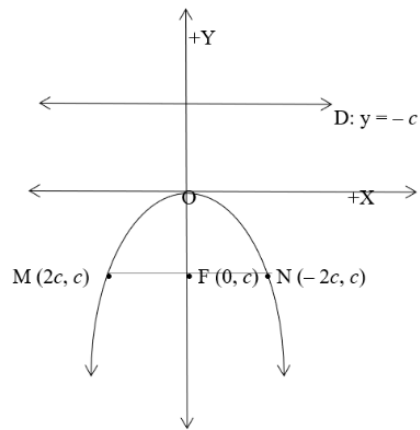


Figura 10. Caso 2b-2
Fuente: elaboración propia

Para todo punto $P(x, y)$ de la parábola aplicando la definición ②, se tiene: $PF = d(P, D)$.

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = \frac{|y + c|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |y + c|.$$

Elevado al cuadrado y desarrollando los cuadrados de los binomios, resulta:

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2.$$

Reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$$x^2 = 4cy \quad (2b).$$

La expresión **(2b)** es la ecuación canónica de una parábola con vértices en el punto O y el eje focal es el eje coordenado Y .

Si $c > 0$, entonces, $y \geq 0$; si $c < 0$, entonces $y \leq 0$; esto porque $x^2 > 0$ para todo real x .

Extremos del lado recto

Si M y N son los extremos del lado recto, entonces $M(t, c)$ y $N(-t, c)$.

Como M es un punto de la parábola, entonces, de **(2b)**, se tiene:

$$t^2 = 4cc = 4c^2; t = \pm 2c; M(2c, c) \text{ y } N(-2c, c).$$

Simetrías:

En el caso **(2a)**, la parábola es simétrica respecto al eje X , el cual, es el eje focal; esto porque, si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces $Q(x, -y)$ también es punto de la parábola.

En el caso **(2b)**, la parábola es simétrica respecto al eje Y , el cual, es el eje focal.

Lo anterior porque, si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces $Q(-x, y)$ también es punto de la parábola.

Ejemplos

1. Si $y^2 = 20x$, entonces $y^2 = 4(5x)$. Teniendo en cuenta que es de la forma de la ecuación **(2a)**, se trata de la ecuación de una parábola con vértice en el punto origen O , el foco F está en el eje X , la directriz es paralela al eje Y .

El valor de c es 5, en consecuencia, $F(5, 0)$; la directriz es $D: x = -5$ para todo real y .

Los extremos de los lados rectos son: $M(5, 10)$ y $N(5, -10)$.

2. Si $x^2 + 80y = 0$, entonces $x^2 = 4(-20y)$. Teniendo en cuenta que es de la forma de la ecuación **(2b)**, se trata de una parábola con vértice el punto origen O , el foco F está en el eje Y , la directriz es paralela al eje X .

El valor de c es -20 , en consecuencia, $F(0, -20)$; la directriz es $D: y = 20$ para todo real x .

Los extremos de los lados rectos son: $M(-40, -20)$ y $N(40, -20)$.

3. Si $(x^2/30) - y = 0$, entonces, $x^2/30 = y$.

$$x^2 = 30y = 4(15/2)y.$$

Según la última ecuación, se trata de una parábola con vértice el punto origen O , el foco F está en el eje Y , la directriz es paralela al eje X .

El valor de c es $15/2 = 7.5$; en consecuencia, $F(0, 7.5)$ y la directriz es $D: y = -7.5$ para todo real x .

Los extremos de los lados rectos son: $M(15; 7.5)$; $N(-15; 7.5)$.

4. Si $64x + 2y^2 = 0$, entonces, $32x + y^2 = 0$; $y^2 = -32x = 4(-8)x$.

Ecuación de una parábola con vértice el punto origen O , el foco F está en el eje X , la directriz es paralela al eje Y .

El valor de c es -8 , en consecuencia, $F(-8,0)$; la directriz es $D: x = 8$ para todo real y .

Los extremos de los lados rectos son: $M(-8,16)$; $N(-8, -16)$.

Ejercicios

Obtener las coordenadas del foco, de los extremos de los lados rectos y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

$$y^2 = 80x; x^2 + 20y = 0; \frac{x^2}{90} - y = 0; 128x + 2y^2 = 0.$$

Comprobar en cada caso las igualdades: $MF = d(M, D)$ $NF = d(N, D)$ donde M y N son los puntos extremos del lado recto.

Ecuaciones Canónicas de una hipérbola

Caso 3a

El centro de la hipérbola es el punto O , los focos y vértices están en el eje X .

Según lo anterior, el eje focal, es el eje X y las directrices, son paralelas al eje Y .

Para $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ y para cualquier punto $P(x, y)$ de la hipérbola, según la definición ③, se tiene: $|PF - PF'| = k$.

En primer lugar, se obtiene la constante k , así:

Si $V(a, 0)$ es un vértice de la hipérbola, y $a > 0$, entonces $0 < a < c$, $2a > 0$ (figura 3a).

Además,

$$VF = \sqrt{(c-a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(c-a)^2} = |c-a| = c-a; \quad \text{esto último, porque } c-a > 0.$$

$$VF' = \sqrt{(c+a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(c+a)^2} = |c+a| = c+a; \quad \text{esto último, porque } c+a > 0.$$

Como V es un punto particular de la hipérbola, entonces: $|VF - VF'| = k$.

Reemplazando VF y VF' en la anterior igualdad: $|c-a - c-a| = |-2a| = |2a| = 2a = k$.

Reemplazando el valor de k en la ecuación general, se obtiene: $|PF - PF'| = 2a$.

En general, para cualquier punto $P(x, y)$ de la hipérbola, se tiene:

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (PF)^2 &= (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + c^2) - 2cx. \end{aligned}$$

$$PF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (PF')^2 &= (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + c^2) + 2cx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (PF)^2 + (PF')^2 &= (x^2 + y^2 + c^2) - 2cx + (x^2 + y^2 + c^2) + 2cx \\ &= 2(x^2 + y^2 + c^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((PF)^2 + (PF')^2)^2 &= 2^2(x^2 + y^2 + c^2)^2 \Rightarrow (PF)^2 + (PF')^2 \\ &= 4(x^2 + y^2 + c^2)^2.\end{aligned}$$

$$(PF)^2(PF')^2 = [(x^2 + y^2 + c^2) - 2cx][(x^2 + y^2 + c^2) + 2cx].$$

Aplicando el producto notable de suma por diferencia, resulta:

$$(PF)^2(PF')^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2$$

Elevando al cuadrado la ecuación general de la hipérbola, resulta:

$$(PF - PF')^2 = 4a^2 \Rightarrow (PF)^2 + (PF')^2 - 2(PF)(PF') = 4a^2 \Rightarrow$$

$$(PF)^2 + (PF')^2 - 4a^2 = 2(PF)(PF')$$

Elevando al cuadrado la última ecuación, se obtiene:

$$[PF^2 + (PF')^2]^2 - 8a^2[PF^2 + (PF')^2] + 16a^4 = 4PF^2(PF')^2$$

Reemplazando en la última igualdad los valores obtenidos anteriormente, resulta:

$$\begin{aligned}4(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 8a^2 \times 2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4 \\ = 4(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 16c^2x^2.\end{aligned}$$

Simplificando términos semejantes, resulta:

$$-16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4 = -16c^2x^2.$$

Simplificando 16 y distribuyendo términos, se obtiene:

$$-a^2x^2 - a^2y^2 - a^2c^2 + a^4 = -c^2x^2.$$

Transponiendo términos y reduciendo términos semejantes, resulta:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

Reemplazando en esta última expresión $(c^2 - a^2)$ por b^2 , se obtiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Pasando a dividir a^2b^2 y simplificando, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3a)$$

La expresión **(3a)** corresponde a la ecuación de una hipérbola con centro en el punto O y eje focal X , en la cual, $b^2 = c^2 - a^2$ (Figura).

Los puntos $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$, los cuales, por supuesto, están en el eje Y , no son puntos de la hipérbola. Se los puede llamar puntos auxiliares y se los ubica de tal manera que, $a^2 + b^2 = c^2$.

Rectángulo auxiliar

Es el rectángulo que contiene los puntos V, V', B y B' .

Asíntotas

Las rectas T y T' que pasan, respectivamente, por las diagonales del rectángulo, son rectas asíntotas de la hipérbola.

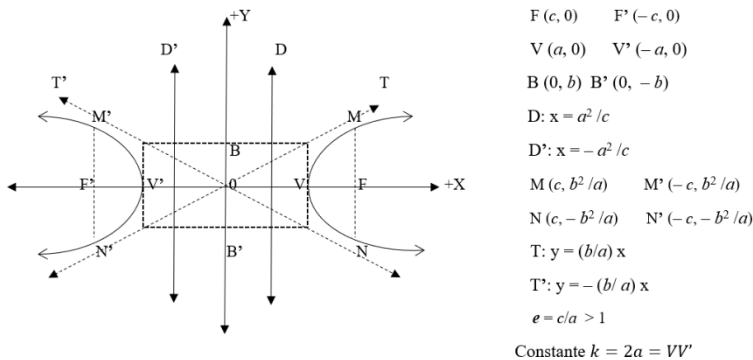


Figura 11. Caso 3a
Fuente: elaboración propia

Ecuación de las directrices

Como $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ son puntos particulares de la hipérbola, entonces según la ecuación general de las cónicas, se tiene:

$$VF = e \times d(V, D); V'F = e \times d(V', D).$$

Despejando e en cada caso:

$$\frac{VF}{d(V, D)} = \frac{V'F}{d(V', D)} = e.$$

Pasando a multiplicar los divisores, resulta:

$$VF \times d(V', D) = V'F \times d(V, D)$$

$$VF = \sqrt{c - a)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{c - a)^2} = |c - a|.$$

$$V'F = \sqrt{(c + a)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(c + a)^2} = |c + a|.$$

Como la directriz D es perpendicular al eje X , entonces su ecuación es:

$$D: x = t; \text{ esto es, } D: x + 0y - t = 0.$$

Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta, se obtiene:

$$d(V, D) = \frac{|a - t|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |a - t|.$$

De igual manera,

$$d(V', D) = |-a - t| = |-(a + t)| = |a + t|.$$

Reemplazando los valores obtenidos:

$$|c - a| \times |a + t| = |c + a| \times |a - t|.$$

Como $c - a > 0$ y $c + a > 0$, entonces por propiedad de valor absoluto, se tiene:

$$|(c - a)(a + t)| = |(c + a)(a - t)|;$$

$$|ca + ct - a^2 - at| = |ca - ct + a^2 - at|.$$

Aplicando la siguiente propiedad de valor absoluto: si $|A| = |B|$ entonces $A = B$ o $A = -B$, se tiene:

$$ca + ct - a^2 - at = ca - ct + a^2 - at;$$

$$ca + ct - a^2 - at = -(ca - ct + a^2 - at) = -ca + ct - a^2 + at.$$

Cancelando y reduciendo términos en la primera igualdad: $2ct = 2a^2 \Rightarrow t = a^2/c$.

Cancelando y reduciendo términos en la segunda igualdad: $2ca = 2at \Rightarrow t = c$.

La igualdad $t = c$ no se cumple porque esto implicaría que el foco F esté en la recta D , lo cual no es posible, porque la condición de las cónicas es que el foco no pertenece a la directriz; en consecuencia:

$$D: x = \frac{a^2}{c}; D': x = -\frac{a^2}{c}.$$

Lo anterior porque D' es simétrica con D respecto al eje Y .

Excentricidad

Como $VF = e \times d(V, D)$, entonces, $|c - a| = e|a - t|$.

Reemplazando el valor de t : $|c - a| = e|a - a^2/c| = e|a(c - a)/c|$.

Dado que, $c - a > 0$, $a > 0$, $c > 0$, entonces, $c - a = e \times a(c - a)/c$.

Cancelando $c - a$ y despejando e , se obtiene: $e = c/a$.

Como a y c son positivos, y $c > a$, entonces, $e > 1$, tal como se afirmó para el caso de la excentricidad de las hipérbolas.

Extremos de lados rectos

Como M es un punto de la hipérbola y si $M(c, h)$, entonces, en la ecuación (3a), se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{h^2}{b^2} \Rightarrow \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} \Rightarrow \frac{b^4}{a^2} \\ &= h^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a} = h.\end{aligned}$$

Luego, $M(c, \frac{b^2}{a})$ y como M es punto simétrico con N respecto a X , con M' respecto a Y , con N' respecto a O , entonces:

$$M\left(c, \frac{b^2}{a}\right); N\left(c, -\frac{b^2}{a}\right); M'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right); N'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Ecuaciones de asíntotas

T pasa por la diagonal del rectángulo auxiliar, entonces, su pendiente es b/a y pasa por el punto origen O ; en consecuencia, para todo punto $P(x, y)$ de T , la ecuación punto-pendiente es: $y - 0 = \frac{b}{a}(x - 0)$.

Despejando y , se obtiene: $y = \frac{b}{a}x$.

De igual manera, como T' pasa por la otra diagonal y también por el punto origen O , la ecuación es: $y = -\frac{b}{a}x$.

Caso 3b

El centro de la hipérbola es el punto O , los focos y vértices están en el eje Y .

Según lo anterior, el eje focal es el eje Y y las directrices son paralelas al eje X .

Considerando los puntos $(0, c), F'(0, -c), V, V'(0, -a), B(b, 0), B'(-b, 0)$ (Figura).

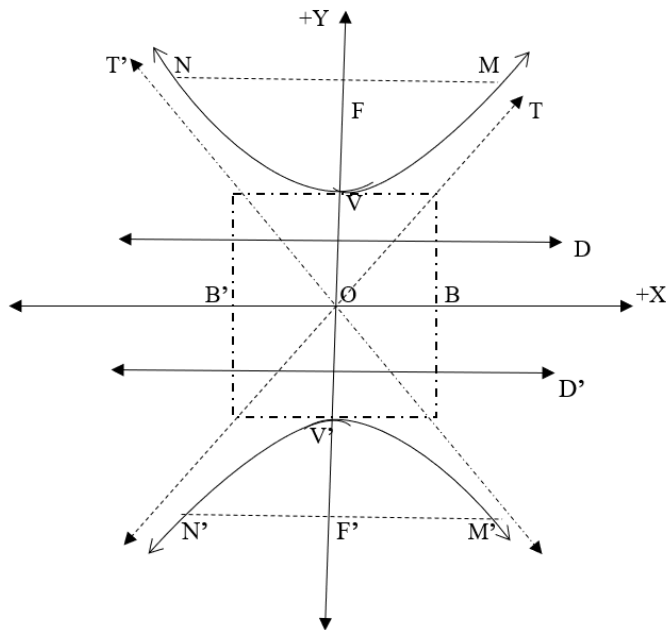


Figura 12. Caso 3b
Fuente: elaboración propia

Siguiendo los procesos algebraicos tal como se realizaron en el caso (3a), lo cual se recomienda al lector desarrollar, se obtienen los resultados que siguen.

Ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (3b).$$

La expresión (3a) corresponde a la ecuación de una hipérbola con centro en el punto O y eje focal el eje Y , en la cual, $b^2 = c^2 - a^2$ (Figura 3b).

Ecuación de las asíntotas:

$$T: y = \frac{a}{b}x; \quad T': y = -\frac{a}{b}x.$$

Ecuación de las directrices:

$$D: y = \frac{a^2}{c}; \quad D': y = -\frac{a^2}{c}.$$

Extremos de los lados rectos:

$$M\left(\frac{b^2}{a}, c\right); N\left(-\frac{b^2}{a}, c\right); M'\left(\frac{b^2}{a}, -c\right); N'\left(-\frac{b^2}{a}, -c\right).$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Distancia de los focos al centro O sobre distancia de vértices al centro, es igual que en el caso **3a**.

Como a y c son positivos y $c > a$, entonces, $e > 1$, tal como se afirmó sobre la excentricidad de las hipérbolas.

Además, en los casos (3a) y (3b), $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es distancia de los focos al centro O , a es la distancia de los vértices al punto O y b es la distancia del punto B al punto O .

La constante k de la definición 3 es: $k = 2a = VV'$.

Cuando $a = b$, se obtiene una *hipérbola equilátera*.

Luego, cada ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ corresponde a una hipérbola equilátera.}$$

Ejemplos

Obtener los diversos elementos de cada hipérbola.

- a) Las ecuaciones que siguen, corresponden a hipérbolas con centro en O y focos en X .

$$1) \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1; 2) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; 3) 64x^2 - 36y^2 = 2.304; 4) 49x^2 = 2.401 + 49y^2.$$

- b) Las siguientes ecuaciones corresponden a hipérbolas con centro en O y focos en Y .

$$5) \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1; 6) \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1; 7) 64y^2 - 36x^2 = 2.304; 8) 49y^2 = 2.401 + 49x^2.$$

Solución

En la solución ya se aplica los resultados obtenidos en el proceso teórico de (3a) y en (3b).

1. En este caso, $a = 4$, $b = 3$ y como $c^2 = a^2 + b^2$, entonces, $c^2 = 16 + 9 = 25$, de lo cual, $c = 5$.

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(5,0); F'(-5,0); V(4,0); V'(-4,0); B(0,3); B'(0,-3).$$

Ecuación de las asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{3}{4}\right)x; T': y = -\left(\frac{3}{4}\right)x.$$

Ecuación de las directrices:

$$D: x = \frac{a^2}{c} = \frac{16}{5}; D': x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{16}{5}.$$

Extremos de los lados rectos:

$$M\left(5, \frac{9}{4}\right); N\left(5, -\frac{9}{4}\right); M'\left(-5, \frac{9}{4}\right); N'\left(-5, -\frac{9}{4}\right).$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$

2. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, entonces, $a = 3, b = 4; c^2 = 9 + 16 = 25$, de lo cual, $c = 5$.

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(5,0); F'(-5,0); V(3,0); V'(-3,0); B(0,4); B'(0,-4).$$

Ecuación de las Asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{4}{3}\right)x; T': y = -\left(\frac{4}{3}\right)x.$$

Ecuación de las Directrices:

$$D: x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}; D': x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{5}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(5, \frac{16}{3}\right); N\left(5, -\frac{16}{3}\right); M'\left(-5, \frac{16}{3}\right); N'\left(-5, -\frac{16}{3}\right).$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

3. Si $64x^2 - 36y^2 = 2.304$, entonces, $64x^2/2.304 - 36y^2/2.304 = 1$.

$$\frac{x^2}{\frac{2.304}{64}} - \frac{y^2}{\frac{2.304}{36}} = 1;$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1;$$

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1.$$

Según lo anterior, $a = 6, b = 8; c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100; c = 10$.

De aquí, se obtiene:

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \frac{a^2}{c} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}; \frac{b^2}{a} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}; \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(10,0); F'(-10,0); V(6,0); V'(-6,0); B(0,8); B'(0,-8).$$

Ecuación de las Asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{4}{3}\right)x; T': y = -\left(\frac{4}{3}\right)x.$$

Ecuación de las Directrices:

$$D: x = \frac{18}{5}; D': x = -\frac{18}{5}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(10, \frac{32}{3}\right); N\left(10, -\frac{32}{3}\right); M'\left(-10, \frac{32}{3}\right); N'\left(-10, -\frac{32}{3}\right).$$

Excentricidad: $e = \frac{5}{3}$.

4. Si $49x^2 = 2.401 + 49y^2$, entonces:

$$\begin{aligned} 49x^2 - 49y^2 = 2.401 &\Rightarrow \frac{49x^2}{2.401} - \frac{49y^2}{2.401} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2.401}{49}} - \frac{y^2}{\frac{2.401}{49}} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{7^2} = 1. \end{aligned}$$

Según la última ecuación, se trata de una hipérbola equilátera.

En este caso, $a = b = 7$, luego, $c^2 = 49 + 49 = 2 \times 49$, de lo cual $c = 7\sqrt{2}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{7}{7} = 1; \frac{a^2}{c} = \frac{49}{7\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{b^2}{a} = \frac{49}{7} = 7; \frac{c}{a} = \frac{7\sqrt{2}}{7} = \sqrt{2}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(7\sqrt{2}, 0); F'(-7\sqrt{2}, 0); V(7, 0); V'(-7, 0); B(0, 7); B'(0, -7).$$

Ecuación de las Asíntotas: $T: y = x; T': y = -x$.

Ecuación de las Directrices:

$$D: x = \frac{7\sqrt{2}}{2}; D': x = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M(7\sqrt{2}, 7); N(7\sqrt{2}, -7); M'(-7\sqrt{2}, 7); N'(-7\sqrt{2}, -7).$$

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$.

Las ecuaciones de 5 a 8 corresponden a hipérbola con centro en O y focos en el eje Y .

5. En esta ecuación $a = 4$ y $b = 3$, entonces, $c^2 = 16 + 9 = 25$, de lo cual, $c = 5$.

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}; \frac{a^2}{c} = \frac{16}{5}; \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}; \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(0,5); F'(0,-5); V(0,4); V'(0,-4); B(3,0); B'(-3,0).$$

Ecuación de las asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{4}{3}\right)x; T': y = -\left(\frac{4}{3}\right)x.$$

Ecuación de las directrices:

$$D: y = \frac{16}{5}; D': y = -\frac{16}{5}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(\frac{9}{4}, 5\right); N\left(-\frac{9}{4}, 5\right); M'\left(\frac{9}{4}, -5\right); N'\left(-\frac{9}{4}, -5\right).$$

Excentricidad: $e = c/a = 5/4$.

6. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, entonces, $a = 3$ y $b = 4$; además, $c^2 = 9 + 16 = 25$, de lo cual, $c = 5$.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}; \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}; \frac{b^2}{a} = \frac{16}{3}; \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(0,5); F'(0,-5); V(0,4); V'(0,-4); B(3,0); B'(-3,0).$$

Ecuación de las Asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{3}{4}\right)x; T': y = -\left(\frac{3}{4}\right)x.$$

Ecuación de las Directrices:

$$D: y = \frac{9}{5}; D': y = -\frac{9}{5}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(\frac{16}{3}, 5\right); N\left(-\frac{16}{3}, 5\right); M'\left(\frac{16}{3}, -5\right); N'\left(-\frac{16}{3}, -5\right).$$

Excentricidad: $e = c/a = 5/4$.

7. Si $64y^2 - 36x^2 = 2.304$, entonces:

$$64y^2 - 36x^2 = 2.304 \Rightarrow \frac{64y^2}{2.304} - \frac{36x^2}{2.304} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{2.304}{64}} - \frac{x^2}{\frac{2.304}{36}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1.$$

Como $a^2 = 36$ y $b^2 = 64$, entonces, $a = 6$, $b = 8$; $c^2 = 36 + 64 = 100$, delo cual, $c = 10$.

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \frac{a^2}{c} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}; \frac{b^2}{a} = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}; \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(0,10); F'(0, -10); V(0,10); V'(0, -10); B(8,0); B'(-8,0).$$

Ecuación de las Asíntotas:

$$T: y = \left(\frac{3}{4}\right)x; T': y = -\left(\frac{3}{4}\right)x.$$

Ecuación de las Directrices:

$$D: y = \frac{18}{5}; D': y = -\frac{18}{5}.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(\frac{32}{5}, 10\right); N\left(-\frac{32}{5}, 10\right); M'\left(\frac{32}{5}, -10\right); N'\left(-\frac{32}{5}, -10\right).$$

Excentricidad: $e = c/a = 5/3$.

8. Si $49y^2 = 2.401 + 49x^2$, entonces:

$$49y^2 - 49x^2 = 2.401 \Rightarrow \frac{49y^2}{2.041} - \frac{49x^2}{2.401} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{2.041}{49}} - \frac{x^2}{\frac{2.401}{49}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{49} = 1.$$

Según la última ecuación, se trata de una hipérbola equilátera.

Como $a^2 = b^2 = 49$, entonces, $a = 7, b = 7$ y $c^2 = 49 + 49 = 2 \times 49$; de donde, $c = 7\sqrt{2}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{7} = 1; \frac{a^2}{c^2} = \frac{49}{7\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{b^2}{a^2} = \frac{49}{7} = 7; \frac{c}{a} = \frac{7\sqrt{2}}{7} = \sqrt{2}.$$

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(0, 7\sqrt{2}); F'(0, -7\sqrt{2}); V(0, 7); V'(0, -7); B(7, 0); B'(-7, 0).$$

Ecuación de las Asíntotas:

$$T: y = x; T': y = -x.$$

Ecuación de las Directrices:

$$D: x = \frac{7\sqrt{2}}{2}; D': x = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Extremos de los lados rectos:

$$M(7, 7\sqrt{2}); N(-7, 7\sqrt{2}); M'(7, -7\sqrt{2}); N'(-7, -7\sqrt{2}).$$

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$.

Consideraciones

Una hipérbola en el caso **3a** y en **3b** es simétrica respecto al eje X, al eje Y y también respecto al origen O.

Si $P(x, y)$ es cualquier punto de una hipérbola, entonces:

$P(x, -y)$ es punto de la hipérbola (simetría respecto al eje X).

$P(-x, y)$ es punto de la hipérbola (simetría respecto al eje Y).

$P(-x, -y)$ es punto de la hipérbola (simetría respecto al punto O).

La constante k de la definición 3 es la distancia entre los vértices: $k = VV'$.

La excentricidad e es el cociente entre la distancia de los focos al centro y la distancia de los vértices al centro.

Ejercicios

1. Obtener los diversos elementos de cada hipérbola:

$$144x^2 - 256y^2 = 36.864 \qquad 256x^2 = 36.864 + 144y^2$$

$$x^2 - 225 - y^2 = 1 \qquad 144y^2 - 256x^2 = 36.864$$

$$256y^2 = 36.864 + 144x^2 \qquad y^2 - 225 - x^2 = 1$$

2. Obtener la ecuación canónica de la hipérbola, las directrices, asíntotas, coordenadas de los vértices, puntos auxiliares y la excentricidad, si sus focos son $F(0,15)$, $F'(0, -15)$ y la constante k es 24.
3. Obtener la ecuación canónica de la hipérbola, de la directriz D' , asíntotas, coordenadas de sus vértices, del foco F' , puntos auxiliares y la constante k ; si un foco es $F(15,0)$, una directriz es $D: x = 48/5$ y la excentricidad es $e = 5/4$.



3. CÓNICAS TRASLADADAS

Cuando el centro de una elipse, de una hipérbola o el vértice de una parábola no es el punto de origen O de un sistema coordenado XYO ; además, el eje focal es paralelo al eje X o bien al eje Y , entonces, se afirma que la *cónica* está *trasladada*. En algunos casos el eje focal es X o es el eje Y .

En este caso, para obtener la ecuación de la cónica en el sistema XYO , se establece un segundo sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(k, h)$ en el primer sistema XYO , donde O' es el centro de la elipse, de la hipérbola o el vértice de la parábola y se establece la respectiva ecuación canónica en el segundo sistema.

En esta sección no se realizan procesos para obtener las ecuaciones canónicas en $X'Y'O'$, simplemente se aplica las obtenidas anteriormente en el sistema XYO . De igual manera se establece las coordenadas de focos, vértices, ecuaciones de las directrices y demás elementos en el sistema $X'Y'O'$, tal como se efectuó en los casos (1a), (1b) y (1c).

Para obtener las ecuaciones en XYO y los demás elementos de la cónica, se aplica las fórmulas que relacionan las coordenadas de un punto en estos dos sistemas.

Si P es un punto cualquiera de la cónica, tal que, $P(x, y)$ en XYO y $P(x', y')$ en $X'Y'O'$, entonces (Portilla y Caicedo, 2023; Leithold, 1987):

$$x' = x - k; x = x' + k;$$

$$y' = y - h; y = y' + h.$$

Elipses trasladadas

Caso 1a'

Si el centro de la elipse es el punto O' y el eje focal es el eje X' , entonces, la ecuación en el sistema $X'Y'O'$ es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Esta expresión, corresponde a la ecuación de la elipse con centro en el punto O' y eje focal paralelo al eje X ; además, $a > b$; $c^2 = a^2 - b^2$.

La ecuación anterior se obtiene con proceso similar al realizado en el **caso 1a**, por lo cual, en esta sección se aplica dicho proceso.

La excentricidad $e = c/a$, corresponde a la distancia de los focos al centro de la elipse sobre distancia de los vértices al centro de la elipse.

En el sistema $X'Y'O'$:

$$(c, 0); F'(-c, 0); V(a, 0); V'(-a, 0); B(0, b); B'(0, -b).$$

Extremos de los lados rectos:

$$M\left(c, \frac{b^2}{a}\right); N\left(c, -\frac{b^2}{a}\right); M'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right); N'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Ecuaciones de directrices:

$$D: x' = a^2/c \text{ para todo } y'.$$

$$D': x' = -a^2/c \text{ para todo } y'.$$

Reemplazando en la anterior ecuación las coordenadas x' , y' se obtiene (Figura 13):

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1. \quad (1a')$$

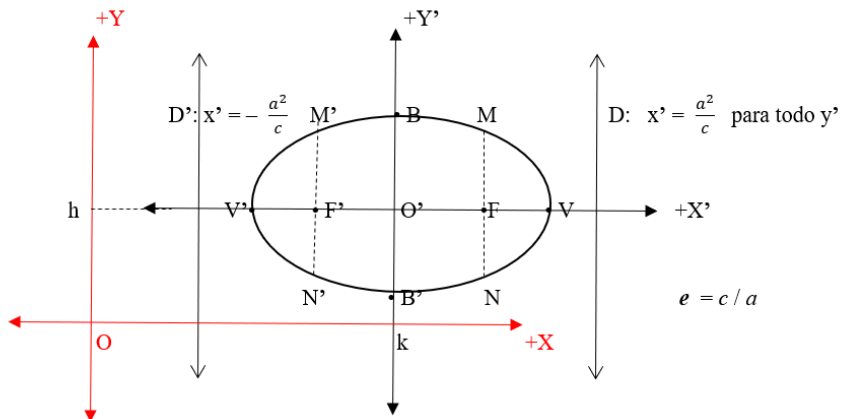


Figura 13. Caso 1a'

Fuente: elaboración propia

Caso 1b'

Si el origen O' es el centro de la elipse y el eje focal es el eje Y' , entonces los focos y los vértices de la elipse están en el eje Y' (Figura).

Aplicando la ecuación del *caso 1b*, se obtiene la ecuación de la elipse en $X'Y'O'$:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

En este caso: $c < b$, $a^2 + c^2 = b^2$ o $b^2 = a^2 - c^2$; por lo cual, $a < b$.

Excentricidad $e = c/b$: distancia de los focos al centro de la elipse sobre distancia de los vértices al centro de la elipse.

La constante k de la definición ① es: $k = 2b$: longitud del eje mayor, igual que en los casos anteriores.

En el sistema $X'Y'O'$:

$$F(0, c); F'(0, -c); V(0, b); V'(0, -b); B(a, 0); B'(-a, 0).$$

Directrices:

$$D: y' = b^2/c, \text{ para todo real } x'.$$

$$D': y' = -b^2/c, \text{ para todo real } x'.$$

Extremos de los lados rectos:

$$M\left(\frac{a^2}{b}, c\right); N\left(-\frac{a^2}{b}, c\right); M'\left(\frac{a^2}{b}, -c\right); N'\left(-\frac{a^2}{b}, -c\right).$$

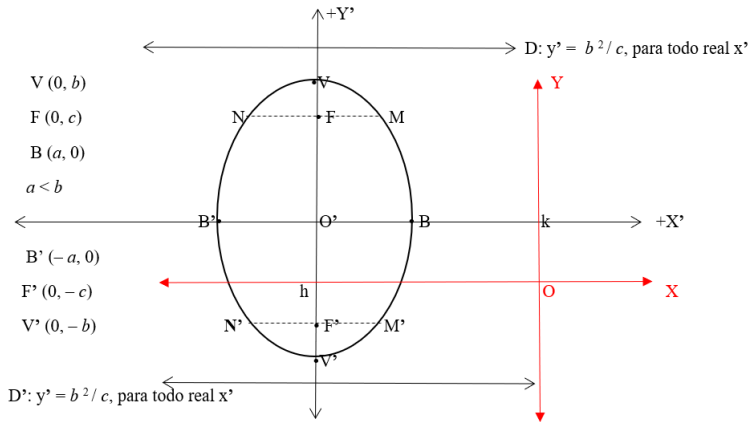


Figura 14. Caso 1b'

Fuente: elaboración propia

Para obtener las coordenadas de los focos, vértices, sub vértices, extremos de lados rectos, ecuación de la elipse, las directrices tanto en como en (1a') como en (1b'), se aplica las fórmulas de traslación establecidas anteriormente.

La ecuación de la elipse en el sistema XYO es:

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1. \quad (1b')$$

Ejemplos

Se establece un sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(6,3)$ en XYO , además X' es paralelo al eje X . Obviamente, como son sistemas lineales rectangulares, entonces Y' es paralelo con Y .

a.

Si $\frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{16} = 1$, en el sistema $X'Y'O'$, entonces, $\frac{(x')^2}{5^2} + \frac{(y')^2}{4^2} = 1$ es la ecuación canónica de una elipse en sistema $X'Y'O'$.

Como $5 > 4$, entonces, los focos y vértices están en X' , los sub vértices en el eje Y' .

Así, para $a = 5, b = 4: c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2; c = 3$.

$$\frac{a^2}{c} = \frac{25}{3}; \frac{c}{a} = \frac{3}{5}; 2a = 10; \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}.$$

La excentricidad es $e = 3/5$; la constante k para la elipse es $k = 10$.

En el sistema $X'Y'O'$ se establece las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de los lados rectos y ecuación de directrices, tal como en el caso (1a):

$$F(3,0); F'(-3,0); V(5,0), V'(-5,0); B(0,4); B'(0,-4).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(3, \frac{16}{5}\right); N\left(3, -\frac{16}{5}\right); M'\left(-3, \frac{16}{5}\right); N'\left(-3, -\frac{16}{5}\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x' = 25/3, \text{ para todo real } y'.$$

$$D': x' = -25/3, \text{ para todo real } y'.$$

Las ecuaciones de traslación correspondientes, son:

$$x' = x - 6; x = x' + 6.$$

$$y' = y - 3; y = y' + 3.$$

Se aplica estas ecuaciones para obtener en XYO ; la ecuación de la elipse, las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de los lados rectos de ecuación de directrices:

La ecuación de la elipse en XYO , es:

$$\frac{(x-6)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1.$$

Como $F(3,0)$ en $X'Y'O'$, entonces: $x = 3 + 6 = 9$; $y = 0 + 3 = 3$; luego, en XYO , $F(9,3)$.

También $V'(-5,0)$ en $X'Y'O'$, entonces, $x = -5 + 6 = 1$; $y = 0 + 3 = 3$; así que, $V'(1,3)$ en XYO .

Ecuación de directriz:

$D: x' = 25/3$, para todo real y' , entonces, $x = 25/3 + 6 = 43/3$ para todo real y .

De esta forma se procede con los demás puntos y la ecuación de la otra directriz.

En resumen, en el sistema XYO , se tiene lo siguiente:

$$F(9,3); F'(3,3); V(11,3), V'(1,3); B(6,7); B'(6,-1).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(9, \frac{31}{5}\right); N\left(9, -\frac{1}{5}\right); M'\left(3, \frac{31}{5}\right); N'\left(3, -\frac{1}{5}\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x = 43/3, \text{ para todo real } y.$$

$$D': x = -7/3, \text{ para todo real } y.$$

Ejercicios

Teniendo en cuenta que $e = 3/5$ y $k = 10$, comprobar que $BF + BF' = k$ y $BF = e \times d(B, D)$.

Para $F(3,0); F'(-3,0); B(0,4); D: x' = 25/3$, para todo real y' , determinar coordenadas y ecuación en el sistema $X'Y'O'$.

Para $F(9,3); F'(3,3); B(6,7); D: x = 43/3$, para todo real y ; determinar coordenadas y ecuación en el sistema XYO .

Tomar cualquier punto P de la elipse con coordenadas en XYO o en $X'Y'O'$ y comprobar las siguientes igualdades:

$$PF + PF' = k \text{ y } PF = e \times d(P, D).$$

b.

Sea la ecuación $100x^2 + 36y^2 + 800x - 144y - 1856 = 0$ en el sistema XYO , entonces:

$$100x^2 + 800x + 36y^2 - 144y - 1.856 = 0$$

$$100(x^2 + 8x) + 36(y^2 - 4y) - 1.856 = 0 \quad (*)$$

Se completa trinomio cuadrado perfecto a partir de los binomios $x^2 + 8x$, $y^2 - 4y$.

$$x^2 + 8x = x^2 + 2x(4) + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 16$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2(y)2 + 2^2 - 2^2 = (y - 2)^2 - 4$$

Reemplazando estos resultados en (*) y realizando procesos algebraicos, resulta:

$$100[(x + 4)^2 - 16] + 36[(y - 2)^2 - 4] - 1.856 = 0;$$

$$100(x + 4)^2 - 1.600 + 36(y - 2)^2 - 144 - 1.856 = 0;$$

$$100(x + 4)^2 + 36(y - 2)^2 - 1.600 - 144 - 1.856 = 0;$$

$$100(x + 4)^2 + 36(y - 2)^2 - 3.600 = 0;$$

$$100(x+4)^2 + 36(y-2)^2 = 3.600;$$

$$\frac{100(x+4)^2}{3.600} + \frac{36(y-2)^2}{3.600} = 1;$$

$$\frac{(x+4)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1;$$

$$\frac{(x+4)^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{10^2} = 1.$$

Esta ecuación corresponde a una elipse con centro en el punto $(-4,2)$; como $10 > 6$, los focos y vértices están en un eje paralelo al eje Y .

Estableciendo por traslación un segundo sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(-4,2)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x + 4; x = x' - 4.$$

$$y' = y - 2; y = y' + 2.$$

Según lo anterior, la ecuación canónica de la elipse en el sistema $X'Y'O'$ es:

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{10^2} = 1.$$

Para $a = 6, b = 10: c^2 = b^2 - a^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2; c = 8$.

$$\frac{b^2}{c} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}; \frac{c}{b} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; 2b = 20; \frac{a^2}{b} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}.$$

Excentricidad: $e = 4/5$.

La constante k para la elipse es: $k = 20$.

Aplicando los resultados obtenidos en el caso (**1b**), se establece las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices en $X'Y'O'$:

Focos, vértices, subvértices:

$$F(0,8); F'(0,-8); V(0,10); V'(0,-10); B(6,0); B'(-6,0).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(\frac{18}{5}, 8\right); N\left(-\frac{18}{5}, 8\right); M'\left(\frac{18}{5}, -8\right); N'\left(-\frac{18}{5}, -8\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: y' = 25/2 \text{ para todo real } x'.$$

$$D': y' = -25/2, \text{ para todo real } x'.$$

Tal como se hizo en el ejemplo anterior, se aplica las ecuaciones de traslación para obtener las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices en XYO :

En XYO :

Focos, vértices, subvértices:

$$F(-4,10); F'(-4,-6); V(-4,12), V'(-4,-8); B(2,2); B'(-10,2).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(-\frac{2}{5}, 10\right); N\left(-\frac{38}{5}, 10\right); M'\left(-\frac{2}{5}, -6\right); N'\left(-\frac{38}{5}, -6\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: y = 29/2 \text{ para todo real } x$$

$$D': y = -21/2 \text{ para todo real } x.$$

Ejercicio:

Teniendo en cuenta que $e = \frac{4}{5}$ y $k = 20$, comprobar que $VF + VF' = k$ y $VF = e \times d(V, D)$.

Para $F(0,8); F'(0,-8); V(0,10), D: y' = 25/2$, para todo real x' , determinar coordenadas y ecuación en $X'Y'O'$.

Para $F(-4,10); F'(-4,-6); V(-4,12); D: y = 29/2$, para todo real x , determinar coordenadas y ecuación en XYO .

Tomar cualquier punto P de la elipse con coordenadas en XYO o en $X'Y'O'$ y comprobar las siguientes igualdades: $PF + PF' = k$ y $PF = e \times d(P, D)$.

c.

Sea la ecuación $81x^2 + 225y^2 + 486x - 17.496 = 0$ en el sistema XYO , entonces:

$$81x^2 + 486x + 225y^2 - 17.496 = 0$$

$$81(x^2 + 6x) + 225y^2 - 17.496 = 0 \quad (*)$$

Se completa trinomio cuadrado perfecto a partir del binomio $x^2 + 6x$:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2x(3) + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9.$$

Reemplazando este resultado en (*) y realizando procesos algebraicos, resulta:

$$81[(x + 3)^2 - 9] + 225y^2 - 17.496 = 0;$$

$$81(x + 3)^2 - 729 + 225y^2 - 17.496 = 0;$$

$$81(x + 3)^2 + 225y^2 - 18.225 = 0;$$

$$81(x + 3)^2 + 225y^2 = 18.225;$$

$$\frac{81(x + 3)^2}{18.225} + \frac{225y^2}{18.225} = 1;$$

$$\frac{(x + 3)^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1;$$

$$\frac{(x + 3)^2}{15^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1.$$

La anterior ecuación corresponde a una elipse con centro en el punto $(-3,0)$; y como $15 > 9$, entonces, los focos y vértices están en el eje coordenado X .

Estableciendo por traslación un segundo sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(-3,0)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x + 3; x = x' - 3;$$

$$y' = y - 0; y = y'.$$

Según lo anterior, la ecuación canónica de la elipse en el sistema $X'Y'O'$ es:

$$\frac{x'^2}{15^2} + \frac{y'^2}{9^2} = 1.$$

Para $a = 15, b = 9: c^2 = a^2 - b^2 = 225 - 81 = 144 = 12^2$ y $c = 12$.

$$\frac{a^2}{c} = \frac{225}{12} = \frac{25}{2}; \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; 2a = 30; \frac{b^2}{a} = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}.$$

Excentricidad: $e = 4/5$.

Constante k para la elipse: $k = 30$.

Aplicando los resultados obtenidos en *el caso (1a)*, se establece las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices en $X'Y'O'$:

Focos, vértices, subvértices:

$$F(12,0); F'(-12,0); V(15,0), V'(-15,0); B(0,9); B'(0,-9).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(12, \frac{27}{5}\right); N\left(12, -\frac{27}{5}\right); M'\left(-12, \frac{27}{5}\right); N'\left(-12, -\frac{27}{5}\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x' = 75/4, \text{ para todo real } y'.$$

$$D': x' = -75/4, \text{ para todo real } y'$$

Tal como se explicó en los ejemplos anteriores, se aplica las ecuaciones de traslación para obtener las coordenadas de focos, vértices, sub vértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices en XYO .

En el sistema XYO :

Focos, vértices, subvértices:

$$F(9,0); F'(-15,0); V(12,0), V'(-18,0); B(-3,9); B'(-3,-9).$$

Extremos de lados rectos:

$$M\left(9, \frac{27}{5}\right); N\left(9, -\frac{27}{5}\right); M'\left(-15, \frac{27}{5}\right); N'\left(-15, -\frac{27}{5}\right).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x=63/4, \text{ para todo real } y.$$

$$D': x = -87/4, \text{ para todo real } y.$$

Ejercicio:

Teniendo en cuenta que $e = 4/5$ y $k = 30$, comprobar que $VF + VF' = k$ y $VF = e \times d(V, D)$.

Para $F(12,0); F'(-12,0); V(15,0); D: x' = 75/4$, para todo real y' , determinar Coordenadas y ecuación en $X'Y'O'$.

Para $F(9,0); F'(-15,0); V(12,0); D: x = 63/4$, para todo real y , determinar coordenadas y ecuación en XYO .

Tomar cualquier punto P de la elipse con coordenadas en XYO o en $X'Y'O'$ y comprobar las siguientes igualdades:

$$PF + PF' = kPF = e \times d(P, D) \text{ y } PF' = e \times d(P, D')$$

Parábolas trasladadas

Caso 2a'

Si el vértice de la parábola es el punto O' y el eje focal es el eje X' , entonces, la ecuación de la parábola en el sistema $X'Y'O'$ es:

$$y'^2 = 4c(x').$$

La anterior igualdad es la ecuación canónica en $X'Y'O'$ de una parábola, con vértices el punto O' y el eje focal es paralelo al eje X , considerando el sistema $X'Y'O'$ como una *traslación* de XYO .

La ecuación anterior se obtiene con proceso similar al *caso (2a)*, por esto ya se aplica este caso.

Como $y'^2 \geq 0$ para todo y' , entonces:

Si $c > 0$, entonces, $x' \geq 0$ (*Figura 15*).

Si $c < 0$, entonces $x' \leq 0$ (*Figura 16*).

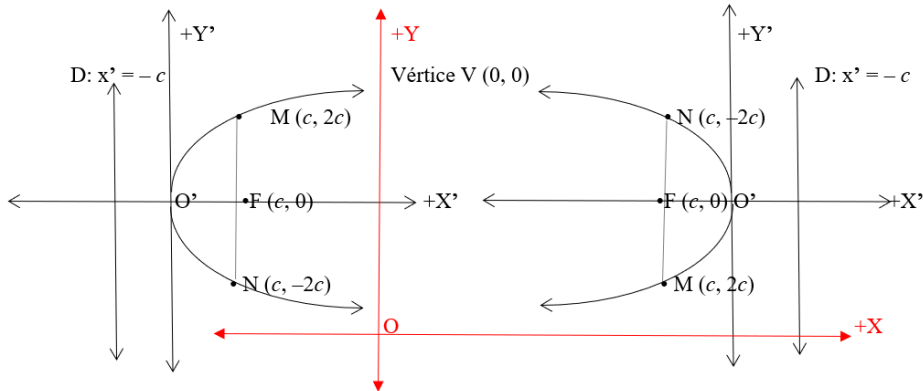


Figura 15. Caso 2a'-1
Fuente: elaboración propia

Figura 16. Caso 2a'-2
Fuente: elaboración propia

Se establece en $X'Y'O'$ las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz, tal como en el caso (**2a**):

$F(c, 0); V(0,0); M(c, 2c); N(c, -2c)$ para $c > 0$ y $c < 0$.

$D: x' = -c$ para todo número real y' .

Aplicando las ecuaciones de traslación, se obtiene en XYO la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz.

$$(y - h)^2 = 4c(x - k) \quad (2a').$$

La expresión (**2a'**) corresponde en XYO a la ecuación de una parábola con eje focal paralelo al eje X y vértice $V(k, h)$.

Caso 2b'

Si el vértice de la parábola es el punto O' y el eje focal es el eje Y' , entonces la ecuación de la parábola en el sistema $X'Y'O'$ es:

$$x'^2 = 4c(y').$$

La anterior igualdad es la ecuación canónica en $X'Y'O'$ de una parábola, con vértices el punto O' y el eje focal paralelo al eje Y .

La ecuación anterior se obtiene con proceso similar al caso (2b), por esto ya se aplica este caso.

Como $x'^2 \geq 0$ para todo x' , entonces:

Si $c > 0$, entonces $y' \geq 0$ (Figura).

Si $c < 0$, entonces $y' \leq 0$ (Figura).

Se establece en $X'Y'O'$ las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz tal como en el caso (2b):

$F(0, c); V(0, 0); M(2c, c); N(-2c, c)$, para $c > 0$ o $c < 0$.

Directriz: $D: y' = -c$ para todo número real x' .

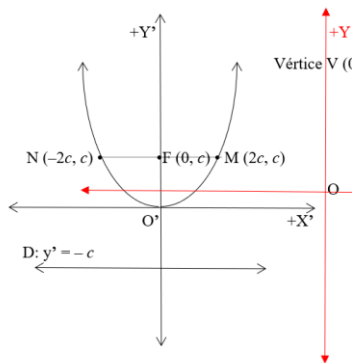


Figura 17. Caso 2b'-1.
Fuente: elaboración propia

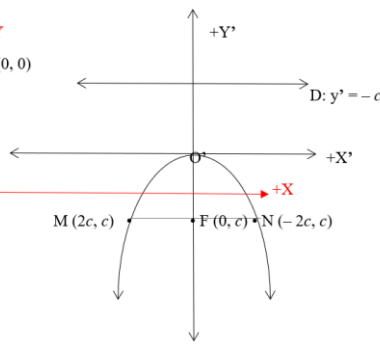


Figura 18. Caso 2b'-2.
Fuente: elaboración propia

Aplicando las ecuaciones de traslación, se obtiene en XYO la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz:

$$(x - k)^2 = 4c(y - h). \quad (2b')$$

La expresión $(2b')$ es la ecuación en XYO de una parábola con eje focal paralelo a Y y vértice $V(k, h)$.

Ejemplos

1. Si $y'^2 = 80x'$ entonces $y'^2 = 4(20)(x')$ es la ecuación canónica de una parábola en un sistema $X'Y'O'$

El punto vértices es O' , el eje focal es X' . Según el caso $(2a')$, $c = 20$.

Luego, en $X'Y'O'$ se tiene:

$$F(20,0); V(0,0); M(20,40); N(20,-40).$$

Directriz D: $x' = -20$ para todo real y' .

Si el sistema $X'Y'O'$ es obtenido por traslación de XYO , donde $O'(-40, -15)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x + 40; x = x' - 40.$$

$$y' = y + 15; y = y' - 15.$$

Aplicando estas ecuaciones, se obtiene en XYO la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, vértice, extremos del lado recto y la ecuación de la directriz:

$$(y + 15)^2 = 80(x + 40).$$

Es la ecuación en XYO de una parábola con eje focal paralelo a X .

Coordenadas del foco, vértices, extremos lado recto, ecuación de la directriz en XYO :

$$F(-20, -15); V(-40, -15); M(-20,25); N(-20, -55).$$

Directriz D: $x = -60$ para todo real y .

2. Si $6(x')^2 + 100y' = 0$, entonces $6(x')' = -100y'$.

$$(x')^2 = -100y'/6;$$

$$(x')^2 = (-100/6)y';$$

$$(x')^2 = 4(-25/6)y'.$$

La última igualdad corresponde a la ecuación canónica de una parábola en un sistema $X'Y'O'$.

El punto vértice es O' , el eje focal es Y' .

Según el caso $(2b')$: $c = -25/6$.

Luego en $X'Y'O'$ se tiene:

$$F\left(0, -\frac{25}{6}\right); V(0,0); M\left(-\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}\right); N\left(\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}\right).$$

Directriz D : $y' = 25/6$ para todo real x' .

Si el sistema $X'Y'O'$ es obtenido por traslación de XYO , donde $O'(-10,12)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x + 10; x = x' - 10.$$

$$y' = y - 12; y = y' + 12.$$

Aplicando estas ecuaciones, se obtiene en XYO la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz:

$$(x + 10)^2 = 80(y - 12).$$

La anterior igualdad es la ecuación en XYO de una parábola con eje focal paralelo al eje X .

Aplicando las ecuaciones de traslación, se obtiene las coordenadas del foco, vértices, extremos lado recto, ecuación de la directriz en XYO :

$$F\left(-10, \frac{47}{6}\right); V(-10, 12); M\left(-\frac{55}{3}, \frac{47}{6}\right); N\left(-\frac{5}{3}, \frac{47}{6}\right).$$

Directriz D: $x = 97/6$ para todo real y .

3. Si $40x + y^2 + 10y - 695 = 0$ en un sistema XYO , entonces:

A partir de $y^2 + 10y$ se forma un trinomio cuadrado perfecto y se reemplaza el resultado en la ecuación dada:

$$y^2 + 10y = y^2 + 2(5)y + 5^2 - 5^2 = (y + 5)^2 - 25$$

Reemplazando en $40x + y^2 + 10y - 695 = 0$, se obtiene:

$$40x + (y + 5)^2 - 25 - 695 = 0$$

Operando constantes:

$$40x + (y + 5)^2 = 720$$

Transponiendo $40x$:

$$(y + 5)^2 = 720 - 40x$$

Factorizando - 40:

$$(y + 5)^2 = -40(x - 18)$$

Factorizando - 4:

$$(y + 5)^2 = 4(-10)(x - 18)$$

Estableciendo por traslación de XYO un sistema $X'Y'O'$ tal que $O'(18, -5)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x - 18; x = x' + 18.$$

$$y' = y + 5; y = y' - 5.$$

Reemplazando $y + 5, x - 18$ en la ecuación $(y + 5)^2 = 4(-10)(x - 18)$ se obtiene:

$$y'^2 = 4(-10)x'.$$

La anterior igualdad corresponde a la ecuación canónica en $X'Y'O'$ de una parábola con vértices en el punto O' y eje focal X' . Según el caso ($2a'$), $c = -10$.

Luego, en $X'Y'O'$ se tiene:

$$F(-10, 0); V(0, 0); M(-10, 20); N(-10, -20).$$

Directriz:

$$D: x' = 10 \text{ para todo real } y'.$$

Aplicando las ecuaciones de traslación, se obtiene en XYO las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz:

$$F(8, -5); V(18, -5); M(8, 15); N(8, -25).$$

Directriz:

$$D: x = 28 \text{ para todo real } y.$$

4. Si $x^2 - 100y + 1400 = 0$ en un sistema XYO , entonces:

$$x^2 = 100y - 1400 = 100(y - 14).$$

$$x^2 = 4(25)(y - 14).$$

Estableciendo por traslación de XYO un segundo sistema $X'Y'O'$ tal que $O'(0,14)$ en XYO , se tiene:

$$x' = x; x = x'.$$

$$y' = y - 14; y = y' + 14.$$

Reemplazando en $x^2 = 4(25)(y - 14)$ las variables x, y se obtiene:

$$x'^2 = 4(25)y'.$$

La igualdad anterior es la ecuación canónica en $X'Y'O'$ de una parábola con vértice en O' y eje focal Y' .

Lo anterior es similar al *caso (2b')*, en consecuencia, $c = 25$ y se establece en las coordenadas del foco, del vértice del extremo del lado recto y la ecuación de la directriz, tal como este caso:

$$F(0,25); V(0,0); M(50,25); N(-50,25).$$

Directriz:

$$D: y' = -25 \text{ para todo real } x'.$$

Aplicando las ecuaciones de traslación, se obtiene en XYO las coordenadas del foco, vértice, entremos del lado recto y la ecuación de la directriz:

$$F(0,39); V(0,14); M(50,39); N(-50,39).$$

Directriz:

$$D: y = -11 \text{ para todo real } x.$$

Hipérbolas trasladadas

Caso 3a'

Si el centro de una hipérbola en un sistema $X'Y'O'$ es el punto O' y el eje focal es X' , entonces la ecuación canónica en este sistema es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

La anterior ecuación es similar o copia del caso (3a), por lo cual, $a^2 + b^2 = c^2$.

Además, se establece en $X'Y'O'$ las coordenadas de los focos, vértices, sub vértices, extremos de los lados rectos, las ecuaciones de las directrices y de las asíntotas, tal como el caso (3a).

$$F(c, 0); F'(-c, 0); V(a, 0); V'(-a, 0); B(0, b); B'(0, -b).$$

$$M\left(c, \frac{b^2}{a}\right); M'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right); N\left(c, -\frac{b^2}{a}\right); N'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

$$D: x = \frac{a^2}{c}; D': x = -\frac{a^2}{c}; T: y = \frac{b}{a}x; T': y = -\frac{b}{a}x.$$

La excentricidad e y la constante k de la definición 3, no cambian.

Se considera un sistema XYO tal que $O'(k, h)$ en XYO y el eje X es paralelo con el eje X' (Figura 19).

Las rectas T y T' que pasan respectivamente por las diagonales del rectángulo, son recta asíntotas de la hipérbola.

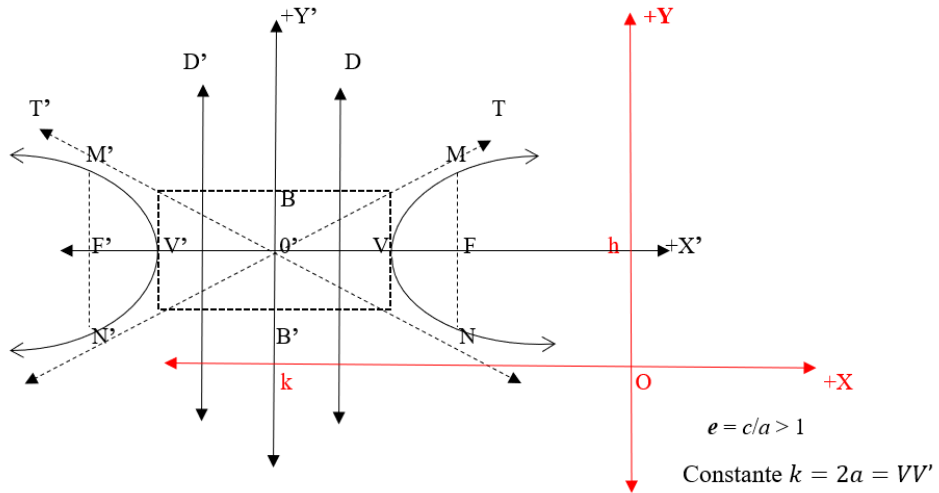


Figura 19. Caso 3a'
Fuente: elaboración propia

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un punto en estos dos sistemas son:

$$x' = x - k; x = x' + k;$$

$$y' = y - h; y = y' + h.$$

Aplicando estas ecuaciones se obtiene en $X'Y'O'$ las coordenadas de los focos, vértices, sub vértices, extremos de los lados rectos, las ecuaciones de las directrices y de las asíntotas.

Caso 3b'.

Si el centro de una hipérbola en un sistema $X'Y'O'$ es el punto O' y el eje focal es Y' , entonces la ecuación canónica en este sistema es:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1.$$

La anterior ecuación es similar o *copia* del caso **3b**, por lo cual, $a^2 + b^2 = c^2$.

Además, se establece en $X'Y'O'$ las coordenadas de los focos, los vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, las ecuaciones de las directrices y de las asíntotas, tal como en el caso (**3b**).

$$F(0, c); F'(0, -c); V(0, a); V'(0, -a); B(b, 0); B'(-b, 0).$$

$$M\left(\frac{b^2}{a}, c\right); M'\left(\frac{b^2}{a}, -c\right); N\left(-\frac{b^2}{a}, c\right); N'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

$$D: y' = \frac{a^2}{c}; D': y' = -\frac{a^2}{c}; T: y' = \frac{a}{b}x'; T': y' = -\frac{a}{b}x'.$$

La excentricidad e y la constante k de la definición 3, no cambian.

Se considera un sistema XYO tal que $O'(k, h)$ en XYO y el eje Y es paralelo con el eje Y' (Figura).

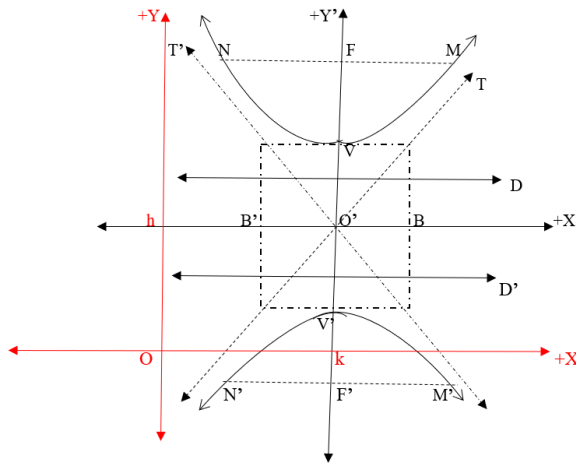


Figura 20. Caso 3b'.

Fuente: elaboración propia

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un punto en estos dos sistemas son:

$$x' = x - k; x = x' + k;$$

$$y' = y - h; y = y' + h.$$

Aplicando estas ecuaciones se obtiene en XYO las las coordenadas de los focos, los vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, las ecuaciones de las directrices y de las asíntotas.

Ejemplos:

1. Si $9x^2 - 16y^2 - 198x + 256y - 79 = 0$ es la ecuación en XYO de una hipérbola, entonces, $9x^2 - 198x - 16y^2 + 256y - 79 = 0$.

A partir de los binomios $9x^2 - 198x$, $-16y^2 + 256y$ se completa un trinomio cuadrado perfecto para reemplazar los resultados en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 198x &= 9(x^2 - 22x) = 9(x^2 - 2(11)x + 11^2 - 11^2) \\ &= 9([x - 11]^2 - 121) = 9[x - 11]^2 - 1.089; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -16y^2 + 256y &= -16(y^2 - 16y) = -16(y^2 - 2(8)y + 8^2 - 8^2) \\ &= -16([y - 8]^2 - 64) = -16[y - 8]^2 + 1.024. \end{aligned}$$

Reemplazando y realizando procesos algebraicos, se obtiene:

$$9[x - 11]^2 - 1.089 - 16[y - 8]^2 + 1.024 - 79 = 0;$$

$$9[x - 11]^2 - 16[y - 8]^2 - 1.089 + 1.024 - 79 = 0;$$

$$9[x - 11]^2 - 16[y - 8]^2 - 144 = 0;$$

$$9[x - 11]^2 - 16[y - 8]^2 = 144;$$

$$\frac{9[x - 11]^2}{144} - \frac{16[y - 8]^2}{144} = 1;$$

$$\frac{[x-11]^2}{16} - \frac{[y-8]^2}{9} = 1;$$

$$\frac{(x-11)^2}{4^2} - \frac{(y-8)^2}{3^2} = 1. \quad (*)$$

Se establece por traslación del sistema XYO un segundo sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(11,8)$ en XYO :

$$x' = x - 11; x = x' + 11.$$

$$y' = y - 8; y = y' + 8.$$

Reemplazando en (*), resulta:

$$\frac{x'^2}{4^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

La anterior igualdad corresponde a una hipérbola con centro en O' y eje focal X' ; similar al caso **(3a)**.

En este ejemplo: $a = 4, b = 9$ y $c^2 = 16 + 9 = 25$, por lo cual, $c = 5$.

Aplicando los resultados del caso **(3a)**, los cuales también están establecidos en la parte teórica del caso **(3a')**, se tiene las coordenadas de los focos, vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, ecuaciones de directrices y de asíntotas en $X'Y'O'$:

$$F(5,0); F'(-5,0); V(4,0); V'(-4,0); B(0,3); B'(0,-3).$$

$$M\left(5, \frac{9}{4}\right); M'\left(-\frac{5,9}{4}\right); N\left(5, -\frac{9}{4}\right); N'\left(-5, -\frac{9}{4}\right).$$

$$D: x' = \frac{16}{5}; D': x' = -\frac{16}{5}; T: y' = \frac{3}{4}x'; T': y' = -\frac{3}{4}x'.$$

Para obtener las coordenadas de los puntos anteriores y las ecuaciones de directrices y asíntotas, se aplica las ecuaciones de traslación obtenidas:

A manera de ejemplos:

Para F : $x = x' + 11 = 5 + 11 = 16$; $y = y' + 8 = 0 + 8 = 8$; así, $F(16,8)$.

Para V' : $x = x' + 11 = -4 + 11 = 7$; $y = y' + 8 = 0 + 8 = 8$; así, $V'(7,8)$.

Para B : $x = x' + 11 = 0 + 11 = 11$; $y = y' + 8 = 3 + 8 = 11$; así, $B(11,11)$.

Para N : $x = x' + 11 = 5 + 11 = 16$; $y = y' + 8 = -\frac{9}{4} + 8 = \frac{23}{4}$; así, $N\left(16, \frac{23}{4}\right)$.

Para D : $x = x' + 11 = 16/5 + 11 = 71/5$; luego: $D: x = 71/5$ para todo real y .

Para T' : $y' = -\frac{3}{4}x'$, entonces, $y - 8 = -\frac{3}{4}(x - 11) = -\frac{3}{4}x + \frac{33}{4}$; $T': y = -\frac{3}{4}x + 65/4$.

De esta forma, se obtiene las coordenadas en XYO de los demás puntos y ecuaciones:

$$F'(6,8); V(15,8); B'(11,5); M\left(16, \frac{41}{4}\right); M'\left(6, \frac{41}{4}\right); N'\left(6, \frac{23}{4}\right).$$

$$D': x = \frac{39}{5}; T: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Ejercicio:

Con los puntos $V(15,8)$, $B(11,5)$ y $M(16,41/4)$, comprobar que sus coordenadas satisfacen la ecuación de la hipérbola en XYO .

Sugerencia: este ejercicio se lo puede resolver utilizando la ecuación inicial dada en este ejemplo o con la ecuación (*).

2. Si $36x^2 - 64y^2 + 720x + 768y + 3.600 = 0$ es la ecuación en XYO de una hipérbola, entonces:

$$36x^2 + 720x - 64y^2 + 768y + 3.600 = 0.$$

$$36(x^2 + 20x) - 64(y^2 - 12y) + 3.600 = 0.$$

Completando trinomios cuadrados perfectos a partir de los binomios $(x^2 + 20x)$; $-64(y^2 - 12y)$, reemplazando los resultados en la anterior igualdad y siguiendo los pasos algebraicos tal como en el ejemplo anterior, los cuales se recomienda al lector que los realice, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{(y-6)^2}{6^2} - \frac{(x+10)^2}{8^2} = 1 \quad (*).$$

Se establece por traslación del sistema XYO un segundo sistema $X'Y'O'$, tal que $O'(-10,6)$ en XYO :

$$x' = x + 10; x = x' - 10$$

$$y' = y - 6; y = y' + 6$$

Reemplazando en (*):

$$\frac{y'^2}{6^2} - \frac{x'^2}{8^2} = 1.$$

La anterior igualdad corresponde a una hipérbola con centro en O' y eje focal Y' ; similar al *caso 3b*.

En este ejemplo, $a = 4, b = 9: c^2 = 16 + 9 = 25$, por lo cual $c = 5$.

Aplicando los resultados del *caso 3b*, los cuales también están establecidos en la parte teórica del *caso 3b'*, se tiene las coordenadas de los focos, vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, ecuaciones de directrices, de asíntotas en $X'Y'O'$.

Aplicando las ecuaciones: $x = x' - 10, y = y' + 6$, se obtiene las coordenadas de los focos, vértices, subvértices, extremos de los lados rectos, ecuaciones de directrices, de asíntotas en XYO .

Ejercicio:

Obtener las coordenadas de los puntos y ecuaciones de directrices, asíntotas en ambos sistemas.

Sugerencia

Los procesos son similares a los realizados en el ejemplo anterior (ejemplo 1).

Con algunos puntos de la hipérbola, comprobar las igualdades en la definición general de cónica y en la definición particular de hipérbola. Se lo puede realizar en cualquier sistema.

Tener en cuenta que la excentricidad y la longitud de los vértices no varían, esto es, en cualquier sistema es lo mismo.

4. CÓNICAS ROTADAS

Cuando el centro de una elipse, de una hipérbola o el vértice de una parábola en un sistema XYO es el punto origen O , además el eje focal no es paralelo al eje X ni al eje Y , se considera una cónica *rotada*.

Se establece un sistema $X'Y'O$, tal que la medida del ángulo de $+X$ a $+X'$ es el ángulo θ , donde $0 < \theta < 90^\circ$ (Figura).

El ángulo θ se establece con el fin de que el eje focal de la cónica sea el eje $+X'$ o bien el eje Y' .

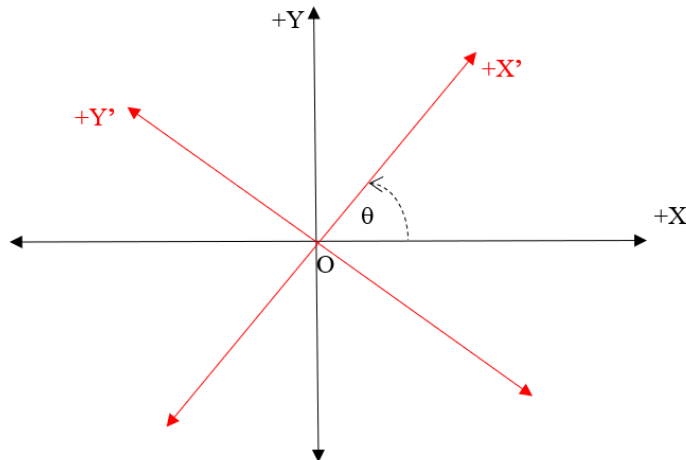


Figura 21. Rotación de cónicas
Fuente: elaboración propia

Para cualquier punto P del plano, si $P(x, y)$ en XYO y $P(x', y')$, las igualdades que relacionan las coordenadas de P en estos dos sistemas, son las siguientes (Portilla y Caicedo, 2003; Leithold, 1987):

$$x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta; x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta.$$

$$y' = y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta; y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta.$$

Elipses rotadas

Caso 1a''

Si el eje focal es el eje X' (Figura), tal como en el caso(1a), la ecuación canónica de la elipse en $X'Y'O$, es

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; a > b; c^2 = a^2 - b^2.$$

Caso 1b''

Si el eje focal es el eje Y' (Figura 23 2) tal como el caso (1b), la ecuación canónica de la elipse en $X'Y'O$, es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; a < b, c^2 = b^2 - a^2.$$

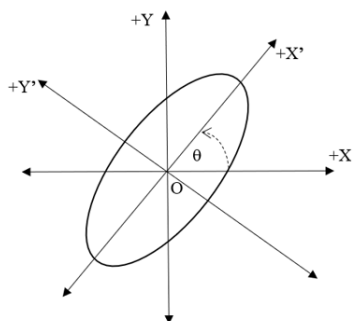


Figura 22. Caso 1a''
Fuente: elaboración propia

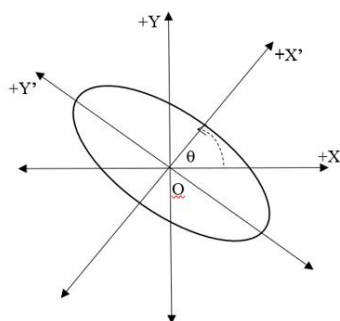


Figura 23 2. Caso 1b''
Fuente: elaboración propia:

Parábolas rotadas

Caso 2a''

Si el eje focal es el eje X'' (Figura) tal como en el *caso 2a*, la ecuación canónica de la parábola en $X'Y'O$, es:

$$y'^2 = 4c(x').$$

Caso 2b''

Si el eje focal es el eje Y' (Figura) tal como en el *caso 2b*, la ecuación canónica de la parábola en $X'Y'O$, es:

$$x'^2 = 4c(y').$$

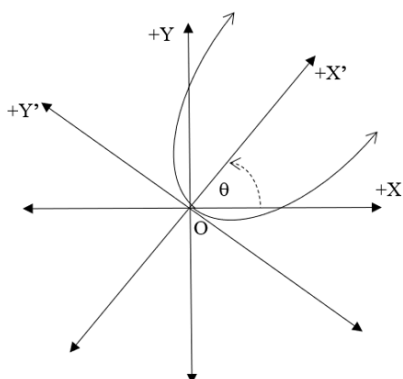


Figura 24. Caso 2a''
Fuente: elaboración propia

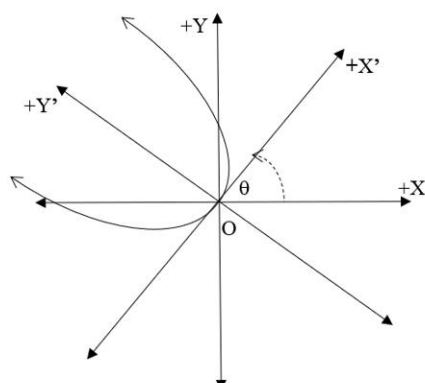


Figura 25. Caso 2b''
Fuente: elaboración propia

Hipérbolas rotadas

Caso 3a''

Si el eje focal es el eje X' (Figura) tal como en el caso 3a, la ecuación canónica de la hipérbola en $X'Y'O$, es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Caso 3b''

Si el eje focal es el eje Y' (Figura) tal como en el caso 3b, la ecuación canónica de la hipérbola en $X'Y'O$, es:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b'^2} = 1.$$

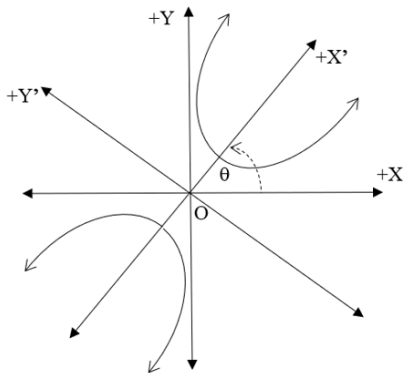


Figura 26. Caso 3a''
Fuente: elaboración propia

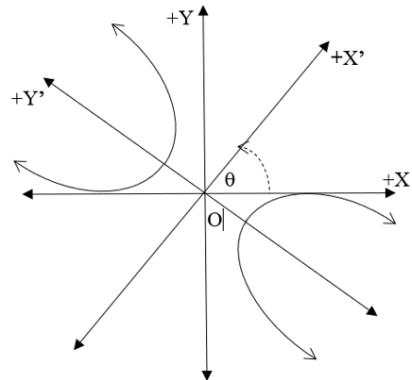


Figura 27. Caso 3b''
Fuente: elaboración propia

Obtenida una ecuación canónica de la cónica en $X'Y'O$, las coordenadas de los focos, vértices, subvértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices y asíntotas en este sistema, son exactamente las mismas que se establecieron en su respectivo caso en XYO y en el sistema establecido por traslación $X'Y'O'$.

Para obtener en XYO las coordenadas y ecuaciones de los elementos mencionados en el párrafo anterior, se aplican las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un punto en los dos sistemas.

La excentricidad de la cónica, así como la distancia entre puntos, es independiente del sistema coordenado.

Cuando la ecuación de la cónica está en el sistema inicial XYO , entonces, se procede a obtener el ángulo de rotación para establecer el sistema $X'Y'O$ y obtener la respectiva ecuación canónica y luego las coordenadas de los elementos de la cónica en este sistema.

Para obtener el ángulo de rotación, se reemplaza en las ecuaciones canónicas establecidas anteriormente las variables x' , y' con el fin de establecer una fórmula para tal fin.

Los procesos son fáciles porque, simplemente se aplica temas elementales de álgebra y trigonometría, pero son muy extensos. A manera de ilustración, se realiza el proceso con la ecuación del *caso 1a*’:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

De esta ecuación se obtiene:

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2.$$

Reemplazando x' , y' , resulta:

$$b^2(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2 + a^2(y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta)^2 = a^2 b^2.$$

Desarrollando los cuadrados y luego multiplicando estos resultados por $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se obtiene:

$$b^2 x^2 \cos^2 \theta + b^2 y^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2b^2 xy \cos \theta \operatorname{sen} \theta + a^2 y^2 \cos^2 \theta + a^2 x^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2a^2 xy \cos \theta \operatorname{sen} \theta = a^2 b^2.$$

Realizando factorizaciones, con factor común: x^2 , y^2 , $2(\cos \theta \operatorname{sen} \theta)xy$:

$$(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)x^2 + (b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)y^2 + (b^2 - a^2)2(\cos \theta \operatorname{sen} \theta)xy - a^2 b^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta que $2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} (2\theta)$ y haciendo las siguientes asignaciones:

$A = (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$; $B = (b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)$; $C = (b^2 - a^2) \operatorname{sen}(2\theta)$; $F = -a^2 b^2$ se obtiene la ecuación en XYO de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + F = 0.$$

$A > 0, B > 0, C < 0, F < 0$. En este caso $b^2 - a^2 < 0$ porque $a > b$.

Se obtiene exactamente la misma ecuación con los mismos valores, realizando el proceso para la ecuación **(1b'')**, pero en este caso, $b^2 - a^2 > 0$ porque $b > a$, por lo cual $C > 0$.

Cuando $\theta = 0$, obviamente no hay rotación, y en este caso, $A = b^2, B = a^2, C = 0$, de donde se obtiene la ecuación: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; de lo cual se concluye:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta expresión corresponde a los casos **(1a)** y **(2a)**; es decir, es la ecuación canónica de una elipse en XYO .

Según lo anterior, se puede afirmar que si $C \neq 0$, el término Cxy indica que se trata de una elipse rotada.

Reemplazando x', y' en las ecuaciones canónicas del caso **(2a'')** y del caso **(2b'')**, tal como se hizo en el anterior ejemplo, se obtiene la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = 0.$$

En el caso **(2a'')**:

$$A = \sen^2 \theta > 0; B = \cos^2 \theta > 0; C = -\sen(2\theta) < 0; D \neq 0; E \neq 0.$$

En el caso **(2b'')**:

$$A = \cos^2 \theta > 0; B = \sen^2 \theta > 0; C = \sen(2\theta) > 0; D \neq 0; E \neq 0.$$

Reemplazando x', y' en las ecuaciones canónicas del caso **(3a'')** y del caso **(3a'')**, se obtiene la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + F = 0.$$

En el caso (**3b''**):

$$A = b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta; B = b^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta; C = (a^2 + b^2) \sin(2\theta); F = a^2 b^2.$$

$$A \neq 0; B \neq 0; C > 0; F < 0.$$

En el caso (**3b''**):

$$A = b^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta; B = b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta; C = -(a^2 + b^2) \sin(2\theta); F = -a^2 b^2.$$

$$A \neq 0; B \neq 0; C < 0; F < 0.$$

Ángulo de rotación

Para obtener el correspondiente ángulo de rotación en términos de A , B y C , se tiene en cuenta los valores de estos coeficientes en cada uno de los casos anteriores y se efectúa procedimientos algebraicos elementales.

En cualquier caso, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

A continuación, se considera tres de estos casos.

En el caso (**1a''**):

$$A = b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta; B = b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta; C = (b^2 - a^2) \sin(2\theta).$$

Se obtiene el valor de $b^2 - a^2$, así:

$$A - B = (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) - (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)$$

Factorizando: $\cos^2\theta$ y $\sen^2\theta$, se obtiene:

$$\begin{aligned} A - B &= (b^2 - a^2)\cos^2\theta + (a^2 - b^2)\sen^2\theta \\ &= (b^2 - a^2)\cos^2\theta - (b^2 - a^2)\sen^2\theta \end{aligned}$$

Factorizando $b^2 - a^2$:

$$A - B = (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sen^2\theta)$$

Por identidad trigonométrica, $\cos^2\theta - \sen^2\theta = \cos(2\theta)$, entonces:

$$A - B = (b^2 - a^2) \cos(2\theta);$$

$$b^2 - a^2 = \frac{A - B}{\cos(2\theta)}.$$

Reemplazando $b^2 - a^2$ en $C = (b^2 - a^2)\sen(2\theta)$, se tiene:

$$C = \frac{(A - B)}{\cos 2\theta} \sen(2\theta) = (A - B) \frac{\sen(2\theta)}{\cos(2\theta)} = (A - B) \tan(2\theta).$$

Por tanto, como se quería demostrar, se tiene que:

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

En el caso ($2b''$):

$$A = \cos^2\theta; B = \sen^2\theta; C = \sen(2\theta).$$

$$A - B = \cos^2\theta - \sen^2\theta = \cos(2\theta).$$

Entonces,

$$\frac{C}{A - B} = \frac{\sen(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta).$$

Esto es,

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

En el caso (**3b''**):

$$\begin{aligned} A &= b^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta; B = b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta; C \\ &= (a^2 + b^2) \sin(2\theta); \end{aligned}$$

$$A - B = (b^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta) - (b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta);$$

$$\begin{aligned} A - B &= (-a^2 - b^2) \cos^2 \theta + (b^2 + a^2) \sin^2 \theta. \\ &= -(a^2 + b^2) \cos^2 \theta + (b^2 + a^2) \sin^2 \theta; \end{aligned}$$

$$A - B = -(a^2 + b^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -(a^2 + b^2) \cos(2\theta);$$

$$\frac{C}{A - B} = \frac{-(a^2 + b^2) \sin(2\theta)}{-(a^2 + b^2) \cos(2\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta).$$

Esto es,

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

Ejercicio

Obtener la expresión anterior para los casos (**1b''**), (**2a''**), (**3b''**).

Ejemplos

Obtener en el sistema XYO las coordenadas de focos, vértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices, asíntotas en cada una de las cónicas cuyas ecuaciones en XYO se dan en seguida.

1.

$$369x^2 + 481y^2 - 384xy - 22.500 = 0.$$

$$A = 369, B = 481, C = -384.$$

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B} = \frac{-384}{369 - 481} = \frac{-384}{-112} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}.$$

$$\text{Entonces, } \tan(2\theta) = \frac{24}{7}.$$

$$\text{De aquí, resulta: } \text{Arc}(\tan(2\theta)) = \text{Arc}(\tan(\frac{24}{7})) = 73,73979529$$

$$\text{Por lo tanto, } \theta = 36,86989765^0.$$

Ahora bien,

$$\sin \theta = \sin(36,86989765) = 0,6; \cos \theta = \cos 36,86989765 = 0,8.$$

Por rotación de XYO se establece un sistema $X'Y'O$ tal que el ángulo de $+X$ a $+X'$, sea θ .

Si $P(x, y)$ en XYO y $P(x', y')$ en $X'Y'O$, se tiene:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = x'(0,8) - y'(0,6)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = x'(0,6) + y'(0,8)$$

Reemplazando x' , y' en la ecuación dada en este ejercicio, resulta:

$$369(0,8x' - 0,6y')^2 + 481(0,6x' + 0,8y')^2 - 384(0,8x' - 0,6y')(0,6x' + 0,8y') - 22.500 = 0$$

Realizando por partes los respectivos procesos algebraicos, se tiene:

$$369[0,64(x')^2 - 0,96(x'y') + 0,36(y')^2] + 481[0,36(x')^2 + 0,96(x'y') + 0,64(y')^2] - 384[0,48(x')^2 + 0,64(x'y') - 0,36(x'y') - 0,48(y')^2] = 22.500$$

$$236,16(x')^2 - 354,24(x'y') + 132,84(y')^2 + 173,16(x')^2 + 461,76(x'y') + 307,84(y')^2 - 184,32(x')^2 - 245,76(x'y') + 138,24(x'y') + 184,32(y')^2 = 22.500$$

Factorizando $(x')^2$, $(y')^2$, $x'y'$ se tiene:

$$[236,16 + 173,16 - 184,32](x')^2 + [132,84 + 307,84 + 184,32](y')^2 + [-354,24 + 461,76 - 245,76 + 138,24](x'y') = 22.500$$

$$225(x')^2 + 625(y')^2 + 0(x'y') = 22.500.$$

$$\frac{(x')^2}{100} + \frac{(y')^2}{36} = 1.$$

Se obtiene la ecuación canónica en $X'Y'O$:

$$\frac{x'^2}{10^2} + \frac{y'^2}{6^2} = 1.$$

$$a = 10; b = 6; c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64; c = 8; \frac{b^2}{a} = \frac{36}{10} = 3,6.$$

Corresponde a una elipse con centro en O , vértices y focos en el eje X' ; en consecuencia, se establece $X'Y'O$ las coordenadas de vértices, subvértices, focos, extremos de los lados rectos, ecuaciones de directrices, tal como en los casos **(1a)** y **(1a')**.

Coordenadas de focos, vértices y subvértices:

$$F(8,0); F'(-6,0); V(10,0); V'(-10,0); B(0,6); B'(0,-6).$$

Ecuación de directrices:

$$D: x' = 25/2, \text{ para todo real } y'.$$

$$D': x' = -25/2, \text{ para todo real } y'.$$

La excentricidad es $e = 4/5$.

La constante k para la elipse es: $k = 20 = VV'$.

Extremos de lados rectos:

Si el segmento $\overline{MN}$ es el lado recto que pasa por F , entonces, $M(8,3,6)$ y $N(8,-3,6)$.

Si el segmento $\overline{M'N'}$ es el lado recto que pasa por F' , entonces, $M'(-8,3,6)$ y $N'(-8,-3,6)$.

Para obtener las coordenadas y ecuaciones en XYO , se aplica las siguientes fórmulas:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = 0,8x' - 0,6y';$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = 0,6x' + 0,8y'.$$

Para $F(8,0)$, $x' = 8$, $y' = 0$; por lo cual, $x = 0,8 \times 8 - 0,6 \times 0 = 6,4$; $y = 0,6 \times 8 + 0,8 \times 0 = 4,8$.

Para $V'(-10,0)$, $x' = -10$, $y' = 0$; por lo cual, $x = 0,8 \times (-10) - 0,6 \times 0 = -8$; $y = 0,6 \times (-10) + 0,8 \times 0 = -6$.

Para $B(0,6)$, $x' = 0$, $y' = 6$; por tanto, $x = 0,8 \times 0 - 0,6 \times 6 = -3,6$; $y = 0,6 \times 0 + 0,8 \times 6 = 4,8$.

Para $M(8; 3,6)$, $x' = 8$, $y' = 3,6$; por lo cual, $x = 0,8 \times 8 - 0,6 \times 3,6 = 4,24$; $y = 0,6 \times 8 + 0,8 \times 3,6 = 7,68$.

$D: x' = 25/2$, para todo real y' ; $x = 0,8(12,5) - 0,6y' = 10 - 0,6y'$; $y = 7,5 + 0,8y'$.

Igualando coeficientes de y' resulta: $0,8x = 8 - 0,48y'$; $0,6y = 4,5 + 0,48y'$.

Sumando: $0,8x + 0,6y = 12,5$; $8x + 6y = 125$.

Según lo anterior, en XYO :

$$F(6,4; 4,8); V'(-8; -6); B(-3,6; 4,8); M(4,24; 7,68); D: 8x + 6y = 125.$$

Ejercicio

Obtener en XYO las coordenadas de F', V, B', N, M', N' y la ecuación de D' .

2.

$$x^2 + y^2 + 2xy + 48x - 48y = 0.$$

En este ejemplo, $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$.

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B} = \frac{-2}{1 - 1} = \frac{-2}{0},$$

lo cual es una indeterminación; pero $2\theta = 90^\circ$ y $\theta = 45^\circ$.

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por rotación de XYO se establece un sistema $X'Y'O$ tal que, el ángulo de $+X$ a $+X'$ sea $\theta = 45^\circ$.

Si $P(x, y)$ en XYO y $P(x', y')$ en $X'Y'O$, se tiene:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = x' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - y' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y').$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = x' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + y' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y').$$

Reemplazando x, y en la ecuación dada en este ejercicio, resulta:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' - y') \right]^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' + y') \right]^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' - y') \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' + y') \\ + 48 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' - y') - 48 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x' + y') = 0.$$

$$\left(\frac{1}{2} \right) [(x')^2 + (y')^2 - 2x'y'] + \left(\frac{1}{2} \right) [(x')^2 + (y')^2 + 2x'y'] + [(x')^2 - (y')^2] \\ + 24\sqrt{2}(x' - y') - 24\sqrt{2}(x' + y') = 0$$

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} - x'y' + \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} + x'y' + (x')^2 - (y')^2 \\ + 24\sqrt{2}x' - 24\sqrt{2}y' - 24\sqrt{2}x' - 24\sqrt{2}y' = 0$$

Reduciendo términos semejantes, resulta:

$$2(x')^2 - 48\sqrt{2}y' = 0$$

Simplificando por 2 y despejando $(x')^2$, se obtiene: $(x')^2 = 24\sqrt{2}y'$.

Finalmente, se tiene que: $x'^2 = 4(6\sqrt{2})y'$.

La anterior ecuación es canónica en el sistema $X'Y'O$ y corresponde a una parábola con vértices en el punto origen O y con foco en el eje Y' , porque $c = 6\sqrt{2}$.

En el sistema $X'Y'O$ se establece las coordenadas del vértice, foco, extremos del lado recto, las ecuaciones de la directriz, tal como en los casos $2b$ y $2b'$.

Foco: $F(0, 6\sqrt{2})$; vértice: $V(0, 0)$, extremos del lado recto: $M(12\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$; $N(-12\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

Directriz: $D: y' = -6\sqrt{2}$ para todo real x' .

Para obtener las coordenadas y ecuaciones en XYO , se aplica las siguientes fórmulas:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y').$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y').$$

$$F(0, 6\sqrt{2}); x = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 - 6\sqrt{2}) = -6; y = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 + 6\sqrt{2}) = 6.$$

$$V(0; 0); x = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 - 0) = 0; y = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 + 0) = 0.$$

$$M(12\sqrt{2}, 6\sqrt{2}); x = \frac{\sqrt{2}}{2} (12\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) = 6; y = \frac{\sqrt{2}}{2} (12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 18.$$

$$N(-12\sqrt{2}, 6\sqrt{2}); x = \frac{\sqrt{2}}{2} (-12\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) = -18; y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = -6.$$

$D: y' = -6\sqrt{2}$ para todo real x' .

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + 6\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + 6$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - 6\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - 6$$

Restando $x - y$, resulta: $x - y = 12$.

Así que, en XYO , se tiene:

$$F(-6, 6); V(0; 0); M(6; 18); N(-18; -6); D: x - y = 12.$$

3.

$$7y^2 + 24xy - 3.600 = 0.$$

En este ejemplo, $A = 0$; coeficiente de y^2 : $B = 1$; $C = 24$.

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B} = \frac{24}{0 - 7} = -\frac{24}{7}.$$

$$(2\theta) = \text{Arc}\left(\tan\left(-\frac{24}{7}\right)\right) = -73,73979529^\circ.$$

Dado que, $0 < \theta < 90^\circ$, entonces, $0 < 2\theta < 180^\circ$.

Según lo anterior:

$$2\theta = 180^\circ - 73,73979529^\circ = 106,2692047^\circ; \theta = 53,13010235^\circ.$$

Para este valor de θ , resulta: $\text{Sen}\theta = 0,8$; $\cos\theta = 0,6$.

Se establece por rotación de XYO un sistema $X'Y'O$ tal que, el ángulo de $+X$ a $+X'$ es θ .

Si $P(x, y)$ en XYO y $P(x', y')$ en $X'Y'O$ se tiene:

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = 0,6x' - 0,8y'.$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = 0,8x' + 0,6y'.$$

Reemplazando x, y en la ecuación dada en este ejercicio, resulta:

$$7(0,8x' + 0,6y')^2 + 24(0,6x' - 0,8y')(0,8x' + 0,6y') - 3.600 = 0.$$

$$7[0,64(x')^2 + 0,36(y')^2 + 0,96x'y'] + 24[0,48(x')^2 - 0,48(y')^2 + 0,36(x')(y') - 0,64(x')(y')] = 3.600$$

$$4,48(x')^2 + 2,52(y')^2 + 6,72x'y' + 11,52(x')^2 - 11,52(y')^2 + 8,64(x')(y') - 15,36(x')(y') = 3.600.$$

Reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$$4,48(x')^2 + 11,52(x')^2 + 2,52(y')^2 - 11,52(y')^2 + 6,72x'y' + 8,64(x')(y') - 15,36(x')(y') = 3.600.$$

$$16(x')^2 - 9(y')^2 + 0(x')(y') = 3.600.$$

$$\frac{16(x')^2}{3.600} - \frac{9(y')^2}{3.600} = 1.$$

$$\frac{(x')^2}{225} - \frac{(y')^2}{400} = 1.$$

Finalmente, se obtiene:

$$\frac{x'^2}{15^2} - \frac{y'^2}{20^2} = 1.$$

La cual es la ecuación canónica en $X'Y'O$ de una hipérbola con focos y vértices en X' .

Para $a = 15, b = 20$, se tiene que: $c^2 = a^2 + b^2 = 225 + 400 = 625; c = 25$.

Se estable en $X'Y'O$ las coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas, tal como en los casos 3a y 3a'.

Coordenadas de focos vértices y de puntos auxiliares:

$$F(25,0); F'(-25,0); V(15,0); V'(-15,0); B(0,20); B'(0,-20).$$

Ecuación de las asíntotas:

$$T: y' = \frac{4}{3}x'; T': y' = -\frac{4}{3}x'.$$

Ecuación de las directrices:

$$D: x' = \frac{a^2}{c} = 9; D': x' = -\frac{a^2}{c} = -9.$$

Extremos de los Lados rectos:

$$M\left(25, \frac{80}{3}\right); N\left(25, -\frac{80}{3}\right); M'\left(-25, \frac{80}{3}\right); N'\left(-25, -\frac{80}{3}\right).$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

Para obtener las coordenadas y ecuaciones en XYO , se aplica las siguientes fórmulas:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = 0,6x' - 0,8y'$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = 0,8x' + 0,6y'$$

Para $F(25,0), x' = 25, y' = 0$; luego, $x = 0,6 \times 25 - 0,8 \times 0 = 15; y = 0,8 \times 25 + 0,6 \times 0 = 20$.

Para $V'(-15,0); x' = -15, y' = 0$; luego, $x = 0,6 \times (-15) - 0,8 \times 0 = -9; y = 0,8 \times (-15) + 0,6 \times 0 = -12$.

Para $B(0,20)$, $x' = 0, y' = 20$; luego, $x = 0,6 \times 0 - 0,8 \times 20 = -16$; $y = 0,8 \times 0 + 0,6 \times 20 = 12$.

Para $M\left(25; \frac{80}{3}\right)$: $x' = 25, y' = \frac{80}{3}$; luego, $x = 0,6 \times 25 - 0,8 \times \frac{80}{3} = \frac{-19}{3}$; $y = 0,8 \times 25 + 0,6 \times \frac{80}{3} = 36$.

Para $N\left(25, -\frac{80}{3}\right)$: $x' = 25, y' = -\frac{80}{3}$; luego, $x = 0,6 \times 25 - 0,8 \times \left(-\frac{80}{3}\right) = \frac{109}{3}$; $y = 0,8 \times 25 + 0,6 \times \left(-\frac{80}{3}\right) = 4$.

$D: x' = 9$, para todo real y' .

$$\begin{aligned}x &= 0,6 \times 9 - 0,8y' = 5,4 - 0,8y'; y = 0,8 \times 9 + 0,6y' \\ &= 7,2 + 0,6y'.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes de y' :

$$0,6x = 3,24 - 0,48y'; 0,8y = 5,76 + 0,48y'.$$

Sumando:

$$0,6x + 0,8y = 9 \Rightarrow 6x + 8y = 90 \Rightarrow 3x + 4y = 45.$$

$$D: 3x + 4y = 45.$$

Para la asíntota: $T': y' = -\frac{4}{3}x'$; $4x' + 3y' = 0$, para lo cual, se tiene en cuenta las igualdades:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta = 0,6x + 0,8y.$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta = 0,6y - 0,8x.$$

Reemplazando x', y' :

$$4(0,6x + 0,8y) + 3(0,6y - 0,8x) = 0.$$

$$2,4x + 3,2y + 1,8y - 2,4x = 0 \Rightarrow 0x + 5y = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ para todo real } x.$$

Luego $T': y = 0$, para todo real x .

Según lo anterior, T' es la recta X .

De igual manera se obtiene la recta $T: 24x + 7y = 0$ (se deja al lector realizar el proceso).

$$F(15,20); V'(-9, -12); B(-16,12); M\left(\frac{-19}{3}, 36\right); N\left(\frac{109}{3}, 4\right); D: 3x + 4y = 45.$$

Ejercicios

1. Obtener las coordenadas en XYO de F', V, B', M', N' y la ecuación de D' .
2. Obtener en XYO las coordenadas de los puntos fundamentales de cada cónica y las ecuaciones de las rectas directrices, asíntotas según el caso, cuyas ecuaciones se establecen en XYO .

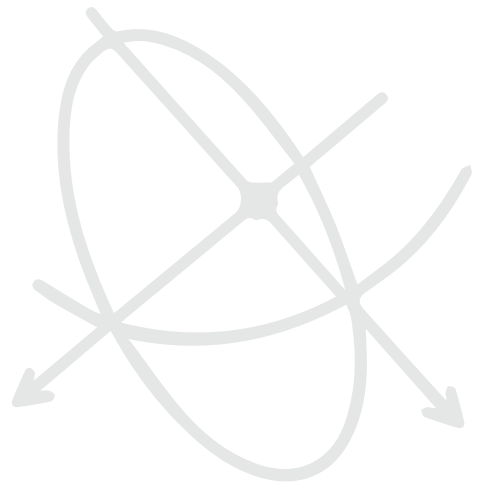
$$a) 544x^2 + 481 + 216xy - 250.000 = 0$$

$$b) x^2 + 3 - 2\sqrt{3}xy - 64\sqrt{3}x - 64y = 0$$

3. Obtener en XYO las coordenadas de los puntos fundamentales de la cónica y las ecuaciones de las rectas directrices, asíntotas según el caso, cuya ecuación se establece en el sistema establecido por rotación $X'Y'O$ y el ángulo de rotación es $\theta = 60^\circ$:

$$\frac{y'^2}{15^2} - \frac{x'^2}{20^2} = 1.$$

4. Obtener la ecuación en XYO de la cónica del ejercicio 3, y comprobar que las coordenadas en XYO de un punto extremo de un lado recto, cumple con la ecuación obtenida.



5. CÓNICAS TRASLADADAS Y ROTADAS

Cuando el centro de una elipse, de una hipérbola o el vértice de una parábola en un punto $C(k, h)$ en XYO y su eje focal no es paralelo al eje X ni al eje Y , entonces, se considera como un cónica trasladada y rotada con respecto al sistema XYO (Figura 28).

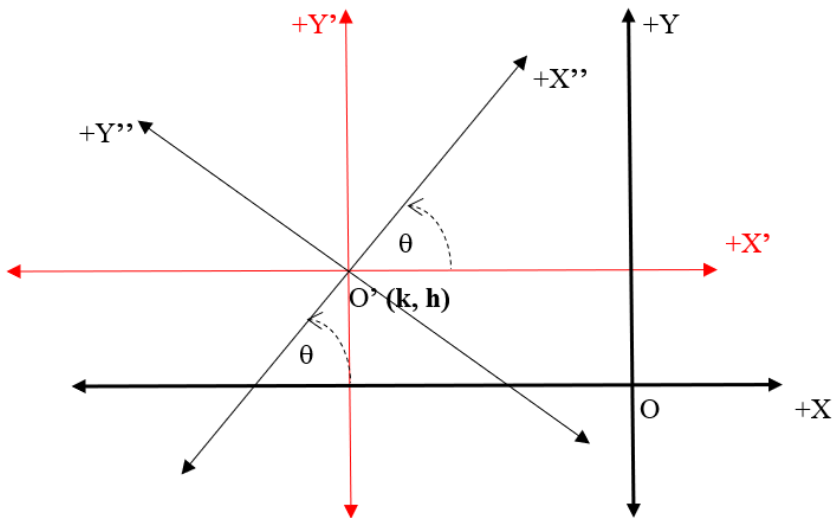


Figura 28. Traslación y rotación de cónicas
Fuente: elaboración propia.

En este caso, para obtener la ecuación canónica de la cónica cuya ecuación está planteada en el sistema XYO , es conveniente primero establecer por rotación de XYO un segundo sistema $X'Y'O$.

Si P es un punto cualquiera tal que $P(x, y)$ en XYO , $P(x', y')$ en $X'Y'O$ y θ es el ángulo de rotación, entonces:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; x = x' \cos \theta - y' \sin \theta;$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta; y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

El ángulo θ se establece con el fin de que el eje focal de la cónica sea paralelo al eje X' o bien al eje Y' .

Luego se establece por traslación de $X'Y'O$ un tercer sistema $X''Y''O'$, tal que O' sea el centro o el vértice de la cónica.

Si $P(x', y')$ en $X'Y'O$, $P(x'', y'')$ en $X''Y''O'$ y $O'(k, h)$ en $X'Y'O$, entonces:

$$x'' = x' - k; x' = x'' + k;$$

$$y'' = y' - h; y' = y'' + h.$$

Para obtener las variables x'' , y'' de la cónica, se factoriza en la ecuación en $X'Y'O$ trinomios cuadrados perfectos, tal como se hizo en los ejemplos dados en la sección de cónicas trasladadas.

De esta manera se llega a obtener la ecuación canónica de la cónica en el tercer sistema $X''Y''O'$ y se establece en el sistema $X''Y''O'$ las coordenadas de focos, vértices, subvértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices, asíntotas tal como se hizo en los casos anteriores cuando se obtenía una ecuación canónica.

Para obtener las coordenadas de estos puntos y las ecuaciones de las rectas en el sistema $X'Y'O$, se aplica las siguientes igualdades:

$$x' = x''\cos\theta - y''\sen\theta;$$

$$y' = x'\sen\theta + y''\cos\theta.$$

Finalmente, para obtener las coordenadas de estos puntos y las ecuaciones de las rectas en el sistema XYO , se aplica las siguientes igualdades:

$$x = x' + k;$$

$$y = y' + h.$$

Como se puede observar de la explicación anterior que, en este caso. no es más que aplicar los procesos realizados en las secciones de cónicas trasladadas y rotadas.

Si la ecuación obtenida en $X''Y''O'$ es de la siguiente forma:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

se sabe que corresponde a una elipse con centro en O' y focos en X'' cuando $a > b$ o focos en Y'' cuando $a < b$.

Si es de la forma:

$$(y'')^2 = 4c(x'') \text{ o } (x'')^2 = 4c(y'')$$

corresponde a una parábola con vértice en O' y foco en X'' en la primera ecuación, o foco en Y'' en la segunda ecuación.

Si es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ o } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

corresponde a una hipérbola con centro en O' y focos en X'' . en la primera ecuación; y focos en el eje Y'' , en la segunda ecuación.

Llevando las anteriores ecuaciones canónicas al sistema XYO aplicando las ecuaciones de traslación y de rotación, tal como se hizo en estos dos casos, se obtiene una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Obviamente, los coeficientes A, B, C, D, E, F toman valores diferentes en cada cónica.

Los coeficientes A y B son números reales no nulos simultáneamente; C es un real no nulo.

Ejemplos:

Obtener en XYO las coordenadas de focos, vértices, subvértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices, asíntotas de cada cónica cuya ecuación está en el sistema XYO :

$$1) 461x^2 + 369 - 384xy + 14.616x - 10.512y + 107.244 = 0.$$

Como se explicó anteriormente, se establece un segundo sistema $X'Y'O$ por rotación de XYO y después un tercer sistema $X''Y''O'$ por traslación $X'Y'O$.

$$\begin{aligned} \text{Para } A = 461, B = 369, C = -384: \tan(2\theta) &= \frac{C}{A - B} = \frac{-384}{461 - 369} \\ &= -\frac{24}{7}. \end{aligned}$$

$$2\theta = \arcsin\left(\tan\left(-\frac{24}{7}\right)\right) = -73,739795529; \text{ o } 2\theta = 180 - 73,739795529 \\ = 106,2602047.$$

Como $0 < \theta < 90^\circ$, entonces, $\theta = 53,13010235^\circ$.

Para este valor de θ : $\sin\theta = 0,8$; $\cos\theta = 0,6$.

Según las fórmulas de rotación, se tiene:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = 0,6x' - 0,8y'.$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = 0,8x' + 0,6y'.$$

Reemplazando x, y en la ecuación dada en este ejercicio y realizado los respectivos procesos algebraicos, se obtiene la ecuación en $X'Y'0$:

$$225(x')^2 + 625(y')^2 + 360x' - 18.000y' + 107.244 = 0.$$

Formando trinomio cuadrados perfectos, resulta:

$$\begin{aligned} 225(x')^2 + 360x' &= 225[(x')^2 + 1,6x'] = 225[(x')^2 + 2 \times 0,8x'] \\ &= 225[(x')^2 + 2 \times 0,8x' + 0,8^2 - 0,8^2] \\ &= 225[(x' + 0,8)^2 - 0,64] = 225(x' + 0,8)^2 - 144. \end{aligned}$$

Siguiendo un proceso similar al anterior, se tiene:

$$625(y')^2 - 18.000y' = 625(y' - 14,4)^2 - 129.600.$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación en $X'Y'0$:

$$225(x' + 0,8)^2 - 144 + 625(y' - 14,4)^2 - 129.600 + 107.244 = 0.$$

$$225(x' + 0,8)^2 + 625(y' - 14,4)^2 - 22.500 = 0.$$

$$225(x' + 0,8)^2 + 625(y' - 14,4)^2 = 22.500.$$

Para $x' + 0,8 = x'', y' - 14,4 = y''$, se obtiene:

$$225(x'')^2 + 625(y'')^2 = 22.500.$$

Según esto, se ha establecido un tercer sistema $X''Y''O'$ donde $O'(-0,8; 14,4)$ en $X'Y'O$; por lo cual:

$$x'' = x' - k = x' + 0,8; y'' = y' - h = y' - 14,4.$$

Pasando a dividir 22500 y simplificando, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{(x'')^2}{10^2} + \frac{(y'')^2}{6^2} = 1.$$

Corresponde a la ecuación canónica en $X''Y''O'$ de una elipse con focos y vértices en X'' y centro en O' .

Para $a = 10$ y $b = 6$, se tiene que:

$$c^2 = 100 - 36 = 64, c = 8; \frac{b^2}{a} = \frac{36}{10} = 3,6; \frac{a^2}{c} = \frac{100}{8} = \frac{50}{4} = 12,5.$$

Según lo anterior, en $X''Y''O'$ se tiene las coordenadas de focos, vértices, subvértices, extremos de lados rectos:

$$F(8,0); F'(-8,0); V(10,0); V'(-10,0); B(0,6); B'(0,-6).$$

$$M(8; 3,6); N(8; -3,6); M'(-8; 3,6); N'(-8; -3,6).$$

Ecuación de las directrices:

$$D: x'' = 12,5; D': x'' = -12,5 \text{ para todo número real } y''.$$

Para obtener las coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas en el sistema $X'Y'O$, se aplica las siguientes fórmulas:

$$x' = x'' + k = x'' - 0,8.$$

$$y' = y'' + h = y'' + 14,4.$$

Para $F(8,0)$: $x' = 8 - 0,8 = 7,2$; $y' = 0 + 14,4 = 14,4$;

luego, $F(7,2; 14,4)$ en $X'Y'O$.

Para $V(10,0)$: $x' = 10 - 0,8 = 9,2$; $y' = 0 + 14,4 = 14,4$;

luego, $V(9,2; 14,4)$ en $X'Y'O$.

Para $B'(0, -6)$: $x' = 0 - 0,8 = -0,8$; $y' = -6 + 14,4 = 8,4$;

luego, $B'(-0,8; 8,4)$ en $X'Y'O$.

$D: x'' = 12,5$ para todo número real y'' .

$x' = 12,5 - 0,8 = 11,7$ para todo número real y' .

De la misma forma se obtiene las coordenadas de los demás puntos y ecuación de D' , lo cual se deja para que lo realice el lector.

Para obtener las coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas en el sistema XYO , se aplica las siguientes fórmulas:

$$x = 0,6x' - 0,8y'.$$

$$y = 0,8x' + 0,6y'.$$

Para $F(7,2; 14,4)$:

$$x = 0,6 \times 7,2 - 0,8 \times 14,4 = 4,32 - 11,52 = -7,2;$$

$$y = 0,8 \times 7,2 + 0,6 \times 14,4 = 5,76 + 8,64 = 14,4.$$

Para $V(9,2; 14,4)$:

$$x = 0,6 \times 9,2 - 0,8 \times 14,4 = 5,52 - 11,52 = -6.$$

$$y = 0,8 \times 9,2 + 0,6 \times 14,4 = 7,36 + 8,64 = 16.$$

Para $B'(-0,8; 8,4)$:

$$x = 0,6 \times (-0,8) - 0,8 \times 8,4 = -0,48 - 6,72 = -7,2.$$

$$y = 0,8 \times (-0,8) + 0,6 \times 8,4 = -0,64 + 5,04 = 4,4.$$

$D: x' = 11,7$ para todo número real y' .

$$x = 0,6x' - 0,8y' = 0,6 \times 11,7 - 0,8y' = 7,02 - 0,8y'$$

$$y = 0,8x' + 0,6y' = 0,8 \times 11,7 + 0,6y' = 9,36 + 0,6y'$$

Igualando coeficiente de y' , se tiene:

$$0,6x = 0,6(7,02 - 0,8y') = 4,212 - 0,48y'.$$

$$0,8y = 0,8(9,36 + 0,6y') = 7,488 + 0,48y'.$$

Sumando: $0,6x + 0,8y = 4,212 + 7,488 = 11,7$.

$$D: 0,6x + 0,8y = 11,7; \text{ esto es, } 6x + 8y = 117.$$

En resumen, en XYO :

$$F(-7,2; 14,4); V(-6; 16); B'(-7,2; 4,4); D: 6x + 8y = 117.$$

Obtener en XYO las coordenadas de los demás puntos y la ecuación de D' .

$$2) 16x^2 + 9 + 24xy + 1.500x - 2.000y - 37.500 = 0.$$

Aquí, se tiene: $A = 16, B = 9, C = 24$.

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \frac{C}{A-B} = \frac{24}{16-9} = \frac{24}{7} \quad \text{y} \quad 2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) \\ &= 73,73979529; \quad \theta = 36,86989765 \end{aligned}$$

Para este valor de θ ; $\sin\theta = 0,6$ y $\cos\theta = 0,8$.

Estableciendo por rotación de XYO un segundo sistema $X'Y'O$, tal que el ángulo de $+X$ a $+X'$ sea θ , se tiene:

$$x = \operatorname{sen}\theta(x') - \cos\theta(y') = 0,8x' - 0,6y'.$$

$$y = \cos\theta(x') + \operatorname{sen}\theta(y') = 0,6x' + 0,8y'.$$

Reemplazando x, y en la ecuación planteada, resulta:

$$\begin{aligned} 16(0,8x' - 0,6y')^2 + 9(0,6x' + 0,8y')^2 \\ + 24(0,8x' - 0,6y')(0,6x' + 0,8y') \\ + 1.500(0,8x' - 0,6y') - 2.000(0,6x' + 0,8y') \\ - 37.500 = 0. \end{aligned}$$

Realizando los respectivos procesos algebraicos, se obtiene la ecuación en $X'Y'O$:

$$(x')^2 - 100y' - 15.000 = 0.$$

$$(x')^2 = 100y' + 15.000 = 100(y' + 15) = 4 \times 25(y' + 15).$$

$$(x' - 0)^2 = 4 \times 25(y' + 15).$$

Se establece por traslación de $X'Y'O$ un tercer sistema $X''Y''O'$, tal que $(0, -15)$ en $X'Y'O$

Para cualquier punto $P(x', y')$ en $X'Y'O$ y $P(x'', y'')$ en $X''Y''O'$:

$$x'' = x' - 0;$$

$$y'' = y' + 15.$$

Reemplazando en la última ecuación, se obtiene la ecuación en $X''Y''O'$:

$$(x'')^2 = 4 \times 25y''.$$

Esta ecuación canónica corresponde a una parábola con vértices en O' y foco F en Y'' .

En $X''Y''O'$: $F(0; 25); V(0; 0)$.

Extremos del lado recto: $M(50; 25); N(50; -25)$.

Ecuación de la directriz:

$D: y'' = -25$ para todo número real x'' .

Para obtener las coordenadas de F, V, M, N y la ecuación de la directriz en $X'Y'O$, se aplica las siguientes fórmulas:

$$x' = x'' + 0;$$

$$y' = y'' - 15.$$

Para $F(0; 25)$: $x' = x'' + 0 = 0 + 0 = 0$; $y' = y'' - 15 = 25 - 15 = 10$.

Para $V(0; 0)$: $x' = x'' + 0 = 0 + 0 = 0$; $y' = y'' - 15 = 0 - 15 = -15$.

Para $M(50; 25)$: $x' = x'' + 0 = 50 + 0 = 50$; $y' = y'' - 15 = 25 - 15 = 10$

Para $N(50; -25)$: $x' = x'' + 0 = 50 + 0 = 50$; $y' = y'' - 15 = -25 - 15 = -35$.

Para $D: y'' = -25$ para todo número real x'' .

$$x' = x'' + 0 = x''; y' = y'' - 15 = -25 - 15 = -50.$$

En resumen, en $X'Y'O$:

$$F(0, 10); V(0, -15); M(50; 10); N(50; -35).$$

$D: y' = -50$, para todo número real x' .

Para obtener las coordenadas de F, V, M, N y la ecuación de la directriz en XYO , se aplica las siguientes fórmulas:

$$x = \cos\theta(x') - \sin\theta(y') = 0,8x' - 0,6y' ;$$

$$y = \sin\theta(x') + \cos\theta(y') = 0,6x' + 0,8y' .$$

Para $F(0,10)$:

$$x = 0,8x' - 0,6y' = 0,8 \times 0 - 0,6 \times 10 = -6;$$

$$y = 0,6x' + 0,8y' = 0,6 \times 0 + 0,8 \times 10 = 8.$$

Para $M(50; 10)$:

$$x = 0,8x' - 0,6y' = 0,8 \times 50 - 0,6 \times 10 = 34;$$

$$y = 0,6x' + 0,8y' = 0,6 \times 50 + 0,8 \times 10 = 38.$$

De igual manera se obtiene las coordenadas de V y N : $V(9; -12)$; $N(61; 2)$

Para D : $y' = -50$, para todo número real x' .

$$x = 0,8x' - 0,6y' = 0,8x' - 0,6 \times (-50) = 0,8x' + 30;$$

$$y = 0,6x' + 0,8y' = 0,6x' + 0,8 \times (-50) = 0,6x' - 40;$$

Igualando coeficientes de x' :

$$0,6x = 0,48x' + 18;$$

$$0,8y = 0,48x' - 32.$$

Restando:

$$0,6x - 0,8y = 18 + 32 = 50; \text{ esto es, } 6x - 8y = 500.$$

En resumen, en XYO :

$$F(-6; 8); V(9, -12); M(34; 38); N(61; 2); D: 6x - 8y = 500.$$

$$3) 7x^2 + 7 + 50xy + 368x + 656y + 8.128 = 0.$$

De aquí, se tiene que: $A = 7, B = 7, C = 50$.

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B} = \frac{50}{7 - 7} = \frac{50}{0}$$

Lo cual es una indeterminación; pero $2\theta = 90^\circ$, entonces, $\theta = 45^\circ$.

Para este valor de θ , se tiene:

$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Estableciendo por rotación de XYO un segundo sistema $X'Y'O$, tal que el ángulo de $+X$ a $+X'$ sea θ , se tiene:

$$x = \sin\theta(x') - \cos\theta(y') = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y');$$

$$y = \cos\theta(x') + \sin\theta(y') = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Reemplazando x, y en la ecuación planteada y realizando los respectivos procesos algebraicos, tales como desarrollo de cuadrados de binomio, reducción de términos semejante, entre otros; se obtiene la ecuación en $X'Y'O$:

$$16(x')^2 - 9(y')^2 + 256\sqrt{2}x' + 72\sqrt{2}y' + 4.064 = 0.$$

Completando y factorizando trinomios cuadrados perfectos, resulta:

$$\begin{aligned}
 16(x')^2 + 256\sqrt{2}x' &= 16[(x')^2 + 16\sqrt{2}x'] \\
 &= 16[(x')^2 + 2(8\sqrt{2})x' + (8\sqrt{2})^2 - (8\sqrt{2})^2] \\
 &= 16[(x') + (8\sqrt{2})]^2 - 16(8\sqrt{2})^2 \\
 &= 16[x' + 8\sqrt{2}]^2 - 2.048.
 \end{aligned}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
 -9(y')^2 + 72\sqrt{2}y' &= -9[(y')^2 - 8\sqrt{2}y'] = -9[(y')^2 - 2(4\sqrt{2})y'] \\
 &= -9[y' - 4\sqrt{2}]^2 + 288.
 \end{aligned}$$

Reemplazando estos dos resultados en la ecuación de la cónica en $X'Y'O$, resulta:

$$16[x' + 8\sqrt{2}]^2 - 2.048 - 9[y' - 4\sqrt{2}]^2 + 288 + 4.064 = 0;$$

$$16[x' + 8\sqrt{2}]^2 - 9[y' - 4\sqrt{2}]^2 + 2.304 = 0;$$

$$-9[y' - 4\sqrt{2}]^2 + 16[x' + 8\sqrt{2}]^2 + 2.304 = 0;$$

$$9[y' - 4\sqrt{2}]^2 - 16[x' + 8\sqrt{2}]^2 - 2.304 = 0;$$

$$9[y' - 4\sqrt{2}]^2 - 16[x' + 8\sqrt{2}]^2 = 2.304.$$

Estableciendo un tercer sistema $X''Y''O'$ por traslación de $X'Y'O$, donde $O'(-8\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ en $X'Y'O$, entonces para cualquier punto $P(x', y')$ en $X'Y'O$ y $P(x'', y'')$ en $X''Y''O'$, se tiene:

$$x'' = x' + 8\sqrt{2};$$

$$y'' = y' - 4\sqrt{2}.$$

Para los puntos de la cónica, reemplazamos en su ecuación:

$$9(y'')^2 - 16(x'')^2 = 2.304.$$

Pasando a dividir 2.304 y simplificando, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{(y'')^2}{16^2} - \frac{(x'')^2}{12^2} = 1.$$

Esta igualdad es la ecuación canónica en $X''Y''O'$ de una hipérbola con focos y vértices en el eje Y'' .

Se establece en este sistema las coordenadas de focos, vértices, extremos de lados rectos, ecuación de directrices, asíntotas, tal como se hizo en ejemplos anteriores cuando se obtiene la ecuación canónica.

Para $a = 16, b = 12: c^2 = a^2 + b^2 = 216 + 144 = 400; c = 20; \frac{b^2}{a} = \frac{144}{16} = 9; \frac{a^2}{c} = \frac{256}{20} = 12,8.$

$$F(0; 20); F'(0; -20); V(0; 16); V'(0; -16); B(12; 0); B'(-12; 0).$$

$$M(9; 20); N(-9; 20); M'(9; -20); N'(-9; -20).$$

Directrices: $D: y'' = 12,8; D': y'' = -12,8$ para todo número real x'' .

Asíntotas:

$$T: y'' = \frac{16}{12}x'' = \frac{4}{3}x''; T': y'' = -\frac{16}{12}x'' = -\frac{4}{3}x''.$$

Para obtener las coordenadas en $X'Y'O$ de los puntos y ecuaciones de las rectas, se aplica las siguientes ecuaciones:

$$x' = x'' - 8\sqrt{2};$$

$$y' = y'' + 4\sqrt{2}.$$

Para ilustración, se toma los puntos $F, V', B; N, M'$; las rectas D y T' .

$$F(0; 20): x' = x'' - 8\sqrt{2} = 0 - 8\sqrt{2} = -8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2} = 20 + 4\sqrt{2}.$$

$$V'(0, -16): x' = x'' - 8\sqrt{2} = 0 - 8\sqrt{2} = -8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2} = -16 + 4\sqrt{2}.$$

$$B(12,0): x' = x'' - 8\sqrt{2} = 12 - 8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2} = 0 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$N(-9,20): x' = x'' - 8\sqrt{2} = -9 - 8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2} = 20 + 4\sqrt{2}.$$

$$M'(9, -20): x' = x'' - 8\sqrt{2} = 9 - 8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2} = -20 + 4\sqrt{2}.$$

En $X'Y'O$:

$$F(-8\sqrt{2}; 20 + 4\sqrt{2}); V'(-8\sqrt{2}; -16 + 4\sqrt{2}); B(12 - 8\sqrt{2}; 4\sqrt{2}).$$

$$N(-9 - 8\sqrt{2}; 20 + 4\sqrt{2}); M'(9 - 8\sqrt{2}; -20 + 4\sqrt{2}).$$

Para la directriz D : $y'' = 12,8$ para todo número real x'' .

$y' = y'' + 4\sqrt{2} = 12,8 + 4\sqrt{2}$; $x' = x'' - 8\sqrt{2}$, como x'' es cualquier real, entonces x' también es cualquier número real.

D : $y' = 12,8 + 4\sqrt{2}$ para todo número real x' .

Para la asíntota T' , se tiene: $T': y'' = \left(-\frac{4}{3}\right)x''$;

$$x' = x'' - 8\sqrt{2}; y' = y'' + 4\sqrt{2}.$$

Reemplazando y'' , se tiene:

$$y' = \left(-\frac{4}{3}\right)x'' + 4\sqrt{2}.$$

Multiplicando por $(-3/4)$ la última igualdad, resulta:

$$(-3/4)y' = x'' + (-3/4)4\sqrt{2} = x'' - 3\sqrt{2}$$

Dado que:

$$x' = x'' - 8\sqrt{2}; \left(-\frac{3}{4}\right)y' = x'' - 3\sqrt{2}.$$

Entonces:

$$x' - \left(-\frac{3}{4}\right)y' = -8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = -5\sqrt{2};$$

$$T': x' + \left(\frac{3}{4}\right)y' + 5\sqrt{2} = 0; T': 4x' + 3y' + 20\sqrt{2} = 0.$$

Para obtener las coordenadas en XYO de los puntos y ecuaciones de las rectas, se aplica las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y');$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

También, a manera de ilustración, se obtendrá las coordenadas de los puntos $F, V', B; N, M'$ y las ecuaciones de D y T' .

$$F(-8\sqrt{2}; 20 + 4\sqrt{2}):$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} - 20 - 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-20 - 12\sqrt{2}) \\ &= -12 - 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(20 - 4\sqrt{2}) \\ &= -4 + 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$V'(-8\sqrt{2}; -16 + 4\sqrt{2}):$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} + 16 - 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(16 - 12\sqrt{2}) \\ = -12 + 8\sqrt{2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} - 16 + 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-16 - 4\sqrt{2}) \\ = -4 - 8\sqrt{2}.$$

$$B(12 - 8\sqrt{2}; 4\sqrt{2}):$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} + 12 - 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(12 - 12\sqrt{2}) \\ = -12 + 6\sqrt{2};$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-8\sqrt{2} + 12 + 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(12 - 4\sqrt{2}) \\ = -4 + 6\sqrt{2}.$$

$$N(-9 - 8\sqrt{2}; 20 + 4\sqrt{2}):$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-9 - 8\sqrt{2} - 20 - 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-29 - 12\sqrt{2}) \\ = -12 - \frac{29\sqrt{2}}{2};$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-9 - 8\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(11 - 4\sqrt{2}) \\ = -4 + \frac{11\sqrt{2}}{2}.$$

$M'(9-8\sqrt{2}; -20+4\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(9-8\sqrt{2} + 20-4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(29-12\sqrt{2}) \\&= -12 + \frac{29\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(9-8\sqrt{2}-20+4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-11-4\sqrt{2}) \\&= -4 - \frac{11\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Resumen:

En XYO :

$$F(-12-10\sqrt{2}; -4+10\sqrt{2}); V'(-12+8\sqrt{2}; -4-8\sqrt{2}); B(-12+6\sqrt{2}; -4+6\sqrt{2}).$$

$$N\left(-12-\frac{29\sqrt{2}}{2}; -4+\frac{11\sqrt{2}}{2}\right); M'\left(-12+\frac{29\sqrt{2}}{2}; -4-\frac{11\sqrt{2}}{2}\right).$$

$D: y' = 12,8 + 4\sqrt{2}$, para todo número real x' :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - 12,8 - 4\sqrt{2}) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}(12,8) - \frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \sqrt{2}(6,4) - 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + 12,8 + 4\sqrt{2}) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}(12,8) + \frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{2}) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \sqrt{2}(6,4) + 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x-y &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \sqrt{2}(6,4) - 4 \right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \sqrt{2}(6,4) + 4 \right] \\&= -2\sqrt{2}(6,4) - 8 = -12,8\sqrt{2} - 8.\end{aligned}$$

En XYO :

$$D: x-y = -12,8\sqrt{2} - 8.$$

$$T': x' + \left(\frac{3}{4}\right)y' + 5\sqrt{2} = 0; T': 4x' + 3y' + 20\sqrt{2} = 0.$$

Reemplazar x', y' , aplicando las ecuaciones:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y);$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y).$$

$$4\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 3\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 20\sqrt{2} = 0;$$

$$2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3\frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\frac{\sqrt{2}}{2}y + 20\sqrt{2} = 0.$$

Multiplicando por $2/\sqrt{2}$, se obtiene:

$$4x + 4 + y + 3x - 3y + 40 = 0;$$

$$7x + y + 40 = 0.$$

En XYO :

$$T': 7x + y + 40 = 0.$$

6. RESUMEN GENERAL

La ecuación general de las cónicas en un sistema rectangular XYO es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Los coeficientes A, B, C, D, E, F son números reales, no todos igual a cero.

Consideraciones:

1. Cuando A y B son positivos o son negativos y $C^2 - 4AB < 0$, entonces, es *posible* que se trate de una elipse.
2. Cuando $(A \geq 0 \text{ y } B \geq 0)$ o $(A \leq 0 \text{ y } B \leq 0)$, donde A, B no nulos a la vez, $C^2 - 4AB = 0$, es *posible* que corresponda a una parábola.
3. Cuando $(A > 0 \text{ y } B < 0)$ o $(A < 0 \text{ y } B > 0)$; $C^2 - 4AB > 0$, es *posible* que corresponda a una hipérbola.
4. La expresión $C^2 - 4AB$ es el *discriminante* de la ecuación general y es condición necesaria pero no suficiente para determinar la cónica.
5. Si $C \neq 0$, entonces se obtiene una cónica que está rotada respecto al sistema XYO , es decir, el eje focal no es paralelo al eje X ni al eje Y . En este caso, se establece por rotación de XYO un segundo sistema $X'Y'O$, tal que el ángulo de $+X$ a $+X'$ sea θ ; esto con el fin de que el eje focal sea X' o sea Y' .

El ángulo θ se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

Para obtenerla ecuación de la cónica en $X'Y'O$, se aplica las siguientes ecuaciones:

$$x = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y';$$

$$y = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'.$$

Reemplazando en la ecuación las variables x, y se obtiene una ecuación en $X'Y'O$ de la forma:

$$A'(x')^2 + B'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Para obtener la ecuación canónica de la cónica, se establece por traslación de $X'Y'O$, un tercer sistema $X''Y''O'$, tal que el punto $O'(k; h)$ en $X'Y'O$ sea el centro de la elipse o de hipérbola, o el vértice de la parábola, si es que se trata de una cónica.

Para obtener las coordenadas k, h se completa y se factoriza trinomios perfectos a partir de la expresión $A'(x')^2 + D'x'$ o de la expresión $B'(y')^2 + E'y'$, cuando esto se posible; es decir, cuando A', D' o cuando B', E' no son iguales a cero. De no ser así, se factoriza el coeficiente A' o el coeficiente B' con F'' . Tener en cuenta que, en una cónica no pueden nulos a la vez A' y B' , pues no se trataría de una forma cuadrática, o en este caso de una cónica.

En definitiva, se obtiene binomios de la forma $(x' \pm k)$ o $(y' \pm h)$, siendo k un real positivo o negativo, al igual que h . En algunos casos puede ser $k = 0$ o $h = 0$, pero no ambos a la vez.

Reemplazando $(x' \pm k)$ por x'' y por $(y' \pm h)$ por y'' , se obtiene la ecuación de la cónica en $X''Y''O'$, la cual será de la forma:

$$A'(x'')^2 + B'(y'')^2 + F'' = 0.$$

Como $O'(k, h)$ en $X'Y'O$, entonces, para cualquier punto $P(x', y')$ en $X'Y'O$ y $P(x'', y'')$ en $X''Y''O'$, se tiene:

$$x'' = x' - k;$$

$$y'' = y' - h.$$

De la ecuación de la cónica, se obtiene una de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 1.$$

$$(y'')^2 = 4c(x'') \text{ o } (x'')^2 = 4c(y'').$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ o } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Cualquiera de ellas, es la ecuación canónica de una cónica en el sistema $X''Y''O'$.

A partir de estas ecuaciones, se establece, según el caso, las coordenadas de focos, vértices, subvértices, extremos de lados rectos, ecuaciones de directrices, de asíntotas en el sistema $X''Y''O'$, tal como se ha hecho cuando se obtiene una ecuación canónica en cualquier sistema.

Para obtener coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas en el sistema $X'Y'O$. se aplica las siguientes igualdades:

$$x' = x'' + k;$$

$$y' = y'' + h.$$

Finalmente, para obtener coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas en XYO se aplica las siguientes igualdades:

$$x = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y';$$

$$y = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'.$$

6. Si $C=0$, entonces la cónica no está rotada respecto al sistema XYO , En este caso, la cónica puede estar trasladada o no estarlo. Si no está trasladada, lo cual se sabe si no se puede formar binomios $(x \pm k)$, también $(y' \pm h)$. De ser así, de la ecuación $Ax^2 + B + Dx + Ey + F = 0$, se obtiene la ecuación canónica.

Si la cónica está traslada, es porque se puede establecer binomios $(x \pm k)$ o $(y' \pm h)$. En este caso se procede a establecer por traslación de XYO un segundo sistema $X'Y'O$ tal como ya se ha explicado anteriormente, $O(k, h)$ en XYO . De esta manera se obtiene la ecuación canónica de la cónica en $X'Y'O$.

Se procede a establecer las coordenadas de punto y ecuaciones de rectas en $X'Y'O$, para luego obtener las coordenadas y ecuaciones en XYO , aplicando las respectivas fórmulas de traslación.

7. Toda cónica es simétrica respecto a su eje focal. La elipse es, además, simétrica al punto centro y respecto al semieje menor, y de hecho, a la recta que contiene al eje menor. La hipérbola también es simétrica respecto a su centro y respecto a la recta perpendicular al eje focal y que pasa por el centro de la hipérbola.

BIBLIOGRAFÍA

- Leithold, L. (1987). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México, Harla. Quinta Edición.
- Portilla, H. J. y Caicedo, S. J. (2023). *Elementos de Álgebra y Geometría Vectorial*. Colombia, Pasto. Editorial Universidad de Nariño. Primera edición.
- Lehmann, C.H. (1989). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa. Noriega Editores. Décimo tercera reimpresión.
[https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/\[Lehmann\]GeometriaAnalitica.pdf](https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Lehmann]GeometriaAnalitica.pdf)
- Raichman, S. R. & Totter, R. (2016). *Geometría analítica para ciencias e ingenierías*. 1a ed ilustrada. Edición Digital. Mendoza : Universidad Nacional de Cuyo. Libro digital, PDF.
https://bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/7224/librogeoeing.pdf
- Kindle, J. H. (s.f.). *Serie de compendios Shawn. Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio*. Trad. Gutiérrez, D. L. y Gutiérrez, V. A. McGraw-Hill.
<https://www.cimat.mx/~gil/docencia/2008/elementales/GeometriaAnalitica-Kindle.pdf>
- Aguilar, M.A., Bravo, V. F. V., Cerón, V. M. & Reyes, F. R. (2009). *Geometría Analítica*. Pearson Educación, México. <https://profefily.com/wp-content/uploads/2019/10/Geometria-Analitica-Pearson.pdf>
- Swokowski, E.W & Cole, J.A. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Décimo Segunda edición. Cengage Learning Editores, México.
<https://www.tamps.cinvestav.mx/~jrubio/libros/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th.pdf>

èditorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: Abril 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El núcleo de este texto es un tema de Geometría Analítica, del cual hacen parte las cónicas.

El libro ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA: CÓNICAS, desarrolla el tema de las cónicas; se desarrollan procedimientos algebraicos para derivar las diversas formas de representación analítica de las cónicas, así como las ecuaciones de las rectas y las coordenadas de los puntos clave de las mismas. Hacer la lectura de estos procesos algebraicos, puede resultar un poco tedioso para el lector, pero se realizan para dar coexistencia y justificación de los resultados y no exponer o plantear los temas en forma directa y de manera algorítmica. Muchos estudiantes tienen la inquietud del por qué o desean saber el cómo se obtienen. Esta metodología también puede servir como base y motivación para que los lectores apliquen procesos similares en otros temas o campos de la matemática.

Es fundamental reconocer el tipo de cónica que resulta de una ecuación cuadrática con dos variables, al llevar la ecuación a la forma canónica de la cónica correspondiente mediante la rotación o traslación de sistemas de coordenadas lineales. Esto nos permite determinar las coordenadas de los puntos, las ecuaciones de las rectas y otros elementos mencionados en el estudio de las cónicas. Estos temas son abordados en este libro, el cual es desarrollado como notas de clase.

Finalmente, este libro está dirigido principalmente a estudiantes de las carreras de ingeniería, particularmente, de Electrónica, Sistemas, Civil; como también, a estudiantes de Física y de Matemáticas.



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1964



Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 00022 - ENERO 11 DE 2023



Universidad de Nariño



Universidad de Nariño