

Volumen 1

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL



Óscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano



Editorial
Universidad de Nariño

èditorial
Universidad de **Nariño**

**ELEMENTOS DE
ÁLGEBRA LINEAL**
Volumen 1

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Volumen 1

Oscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

èditorial
Universidad de **Nariño**

Soto Ágreda, Oscar Fernando

Elementos de álgebra lineal / Oscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier Caicedo Zambrano--
San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

V. 1 : ilustraciones, gráficas

Contenido : Espacios vectoriales. Transformaciones lineales. Operaciones con transformaciones lineales

Incluye referencias bibliográficas p. 206

ISBN: 978-628-7771-38-3

1. Álgebra lineal—Problemas, ejercicios 2. Espacios vectoriales 3. Matrices 4. Transformaciones lineales I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

512.5 S718e – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

© Editorial Universidad de Nariño

©Oscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

ISBN: 978-628-7771-38-3

Corrección de estilo: Germán Chaves Jurado

Diseño de cubiertas y diagramación: Angie Gabriela Ordoñez

Fecha de publicación: Abril 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus Autores o de la Editorial Universidad de Nariño

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	08
CAPÍTULO 1	
ESPACIOS VECTORIALES	10
1.1. PRELIMINARES	10
1.2. LEYES DE COMPOSICIÓN	10
1.3. IDENTIDADES E INVERSOS	16
1.4. ESTRUCTURA DE GRUPO	19
1.5. ESTRUCTURA DE ANILLO	20
1.6. LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA	24
1.7. ESPACIOS VECTORIALES	24
1.8. PROPIEDAD DE LOS ESPACIOS VECTORIALES	35
1.9. SUB-ESPACIOS VECTORIALES	39
1.10. OPERACIONES CON SUBESPACIOS	44
1.10.1. Adición	44
1.10.2. Intersección de Subespacios	45
1.11. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES	50
1.12. SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES	60
1.13. BASES Y DIMENSIÓN	66
1.14. COORDENADAS DE UN VECTOR	90
CAPÍTULO 2	
TRANSFORMACIONES LINEALES	94
DEFINICIÓN DE HOMOMORFISMO	94
CLASES DE HOMOMORFISMOS	95
DEFINICIÓN DE TRANSFORMACIÓN LINEAL	98
PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES	106
NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL	109
NÚCLEO DE UN HOMOMORFISMO	118
TRANSFORMACIÓN MATRICIAL	124

CAPÍTULO 3

OPERACIONES CON TRANSFORMACIONES LINEALES	135
3.1. IGUALDAD, ADICIÓN Y PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES	135
3.1.1. Igualdad	135
3.1.2. Adición	136
3.1.3. Multiplicación Externa	137
3.2. INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL	148
3.3. MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL	160
3.4. MATRIZ ASOCIADA A LA SUMA DE DOS TRANSFORMACIONES LINEALES	168
3.5. MATRIZ ASOCIADA A LA COMPUESTA DE DOS TRANSFORMACIONES LINEALES	170
3.6. EL ISOMORFISMO DE $\text{Hom}_K(V, W)$ EN $K_{m \times n}$	177
3.7. TRANSFORMACIONES Y MATRICES SEMEJANTES	179
3.8. LOS ALGORITMOS	$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n, \mathbb{R}_n)$ 188
3.9. ISOMORFISMOS ELEMENTALES EN	193
3.10. EJERCICIOS	205
BIBLIOGRAFÍA	207
LISTA DE FIGURAS	208

INTRODUCCIÓN

El libro de texto Elementos de *Álgebra Lineal*, presenta el contenido del curso Álgebra Lineal I que se ofrece en la Universidad de Nariño.

Este libro es una exhaustiva exploración de los conceptos fundamentales, las aplicaciones de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. El contenido de este libro se organiza en tres capítulos, cada uno de los cuales aborda aspectos específicos y fundamentales de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. A continuación, se ofrece un resumen detallado del contenido de cada capítulo, que sirve como guía, para explorar en profundidad los temas tratados.

El Primer Capítulo, comienza con una introducción a los conceptos preliminares y leyes de composición en los espacios vectoriales. A medida que avanzamos, exploramos la estructura de grupo y anillo, así como las propiedades y operaciones relacionadas con los subespacios vectoriales. Además, abordamos la dependencia e independencia lineal de vectores, las bases, la dimensión y las coordenadas de un vector en el contexto de los espacios vectoriales.

En el Segundo Capítulo, nos sumergimos en la definición de homomorfismo, clases de homomorfismos, transformaciones lineales y sus propiedades, así como los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal. También exploramos la transformación matricial y su aplicación en diversas situaciones.

El Tercer Capítulo, aborda aspectos avanzados de las operaciones con transformaciones lineales, incluyendo la equivalencia, adición y producto de transformaciones, la inversa de una transformación lineal, y las matrices asociadas a diferentes operaciones y transformaciones lineales. Además, se exploran conceptos como el grupo de isomorfismos de $\text{Hom}_K(V, W)$ en $K^{m \times n}$, transformaciones y matrices semejantes, isomorfismos elementales en $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, junto con una sección de ejercicios para reforzar el aprendizaje.

Los Autores
Universidad de Nariño
Mayo de 2024.

CAPÍTULO 1

ESPACIOS VECTORIALES

1.1 PRELIMINARES

Si recordamos las cuatro operaciones básicas de la aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división; vemos que ellas poseen determinadas propiedades que nacen como una virtud inductiva o inducida de las reglas de juego que constituyen en sí cada operación. Lo interesante de todo es que estas propiedades pueden generalizar el objetivo que se tiene en un comienzo, como punto de mira.

1.2 LEYES DE COMPOSICIÓN

DEFINICIÓN

Sea A un conjunto no vacío. Llamaremos Ley de Composición Interna definida sobre A a toda función $*$ = $A \times A \rightarrow A$.

Si x y y son elementos de A , es usual escribir $*(x, y) = x * y$. El elemento $x * y$ se denomina la composición por $*$ (asterisco) de x con y . De este modo, la adición y multiplicación usuales entre números naturales ($\mathbb{N}$) constituyen ejemplos de leyes de composición.

DEFINICIÓN

Se llama MONOIDE a toda estructura algebraica determinada por el par $(A, *)$ formada por un conjunto A no vacío y una ley de composición interna $*$.

De inmediato, aseguramos que, los siguientes pares tienen estructura algebraica de monoides:

$$(\mathbb{N}, +); (\mathbb{N}, \cdot); (\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Z}, \cdot); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{Q}, \cdot); (\mathbb{R}, +); (\mathbb{R}, \cdot); (\mathbb{C}, +); (\mathbb{C}, \cdot).$$

EJEMPLOS

- a) Si $A = \mathbb{N}$ y la operación:
 $x * y = (x, y)$ donde $(x, y) = MCD(x, y)$. (Máximo común divisor)
- b) Si $A = \mathbb{N}$ y la operación:
 $x * y = [x, y]$ donde $[x, y] = MCM(x, y)$. (Mínimo común múltiplo)
- c) $A = \mathbb{Z}$;
 $x * y = 0$.
- d) $A = \mathbb{Z}$;
 $x * y = x - y$ (Diferencia usual)
- e) $A = \mathbb{Z}$;
 $x * y = x * y^2$.
- f) $A = \mathbb{Z}$;
 $x * y = x$.

Si X es un conjunto cualquiera, y siendo $A = \mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X , las siguientes estructuras son monoides:

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & A = \mathcal{P}(X); \\ & U * V = U \cup V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & A = \mathcal{P}(X); \\ & U * V = U - V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & A = \mathcal{P}(X); \\ & U * V = U \cap V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad & A = \mathcal{P}(X); \\ & U * V = U \Delta V. \end{aligned}$$

Diremos que el monoide $(A,*)$ es finito, si A es un conjunto finito.

En los ejemplos de $g)$ a $j)$, si X es finito, los monoides constituidos son finitos.

Hemos conocido sin mucho esfuerzo que siendo $(A,*)$ un monoide, y dado que x, y son elementos de A , el elemento $x * y$ también es de A . De este modo, se pueden conseguir los siguientes elementos de A , "via" composición binaria:

$$x * (y * z) \text{ y } (x * y) * z.$$

donde x, y, z son elementos de A .

Si tuviésemos x, y, z, u como elementos de A , podríamos formar los siguientes elementos de A :

$$\begin{aligned} a &= x * (y * (z * u)); \\ b &= x * ((y * z) * u); \\ c &= (x * (y * z)) * u; \\ d &= ((x * y) * z) * u; \\ e &= (x * y) * (z * u). \end{aligned}$$

Estas formas no siempre son iguales entre sí, hecho que se puede verificar para el monoide $(\mathbb{Z}, -)$ que incumple el requisito aquí expuesto.

DEFINICIÓN

Se llama *SEMIGRUPO* a todo monoide $(A, *)$ sobre el que se satisface que:

$x * (y * z) = (x * y) * z$ para cualquier triada de elementos x, y, z en A .

En este caso, se dice que el monoide satisface la Propiedad Asociativa.

EJEMPLO

El monoide $(\mathbb{N}, *)$, donde $x * y = (x, y)$, siendo $(x, y) = MCD(x, y)$, es un semigrupo.

En efecto:

Recordemos la definición de Máximo Común Divisor:

1. $(x, y) \in \mathbb{N}$.
2. (x, y) divide a x y a y .
3. Si $d \in \mathbb{N}$, es tal que divide a x y a y , entonces d divide a (x, y) [No hay divisor mayor que (x, y)].

Ahora debemos probar que:

$$(x, (y, z)) = ((x, y), z) \text{ donde } x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}.$$

Sean $d_1 = (x, (y, z))$ y $d_2 = ((x, y), z)$, por tanto, por (2), se sigue que:

$$d_1 \left| x \quad y \quad d_1 \right|_{(y, z)}.$$

Y por (3), resulta:

$$d_1 \left| x, d_1 \right|_y \quad y \quad d_1 \left| z \right|.$$

Y nuevamente por (3), se sigue que:

$$d_1 \mid_{(x,y)} \text{ y } d_1 \mid_z.$$

Al aplicar (3) nuevamente, se obtiene:

$$d_1 \mid_{((x,y),z)} = d_2.$$

Esto es, d_1 divide a d_2 .

Por un razonamiento análogo, se muestra que d_2 divide a d_1 .

De este modo, d_1 divide a d_2 y d_2 divide a d_1 ; por tanto, $d_1 = d_2$, tal como se quiere probar.

EJEMPLO

Sea x un conjunto no vacío y sea $A = X^X$ (conjunto de funciones de X en X) (En general, con el símbolo A^B se representa al conjunto de todas las funciones de B en A). Entonces, si $f \in A, g \in A$ podemos definir la siguiente aplicación (función):

$$f \circ g: X \rightarrow X \text{ (composición de } f \text{ con } g).$$

$$x \mapsto f(g(x)); \text{ así, } (A, \circ) \text{ es un monoide.}$$

Además, si f, g, h están en A , es claro que:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)));$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f \circ ((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

De manera que,

$$((f \circ g) \circ h) = (f \circ (g \circ h)).$$

En este caso, $(A, \circ)$ es un *semigrupo* (Semigrupo de las aplicaciones de X).

EJERCICIOS

Determinar cuáles de los siguientes *monoides* son semigrupos:

- a) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $x * y = x + y + x \cdot y$
- b) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $x * y = x^2 - y^2$
- c) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $x * y = x$
- d) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $x * y = x + 1$
- e) $(\mathbb{R}^+, *)$ donde $x * y = x \cdot y$

DEFINICIÓN

Diremos que x, y elementos de A , conmutan entre sí, siempre que $x * y = y * x$.

Se dice que $(A, *)$ es un monoide conmutativo, si cualquier par de elementos de A conmutan. La misma definición es válida para semigrupos.

Por ejemplo, en un semigrupo conmutativo, se valida la siguiente relación:

$$(x * y)^n = x^n * y^n, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

La demostración se realiza por inducción, iniciando con $n = 2$.

1.3 IDENTIDADES E INVERSOS

Resulta útil estudiar en $(A, *)$ la existencia de elementos que gozan de propiedades similares al 0 (cero) en $(\mathbb{Z}, +)$ y al 1 (uno) en $(\mathbb{N}, \times)$.

DEFINICIÓN

Se dice que un elemento $e \in A$ es identidad a la izquierda de $*$, si $e * a = a$, para cualquier $a \in A$; $e \in A$ es identidad a la derecha de $*$, si $a * e = a$, para cualquier a en A .

El elemento e se llama identidad de $*$ si es identidad a la derecha y a la izquierda de $*$.

Es obvio que en un monoide conmutativo no hay necesidad de distinguir identidad a derecha ni a izquierda.

Además, dado el monoide $(A, *)$, si e_1 es identidad a la izquierda de $*$ y e_2 es elemento identidad a la derecha de $*$, entonces $e_1 = e_2$.

En efecto, como $e_1 * a = a \ \forall a \in A$, en particular, si $a = e_2$, se satisface; luego:

$$e_1 * e_2 = e_2 \quad (1).$$

Por otro lado, $b * e_2 = b \ \forall b \in A$, en particular, si $b = e_1$ se satisface; luego:

$$e_1 * e_2 = e_1 \quad (2).$$

De (1) y (2), se deduce de inmediato que $e_1 = e_2$, tal como queríamos probar.

Nótese que $e_1 \in A$ y $e_2 \in A$. Es claro que, si un monoide posee identidad, entonces es única, en el sentido en que, posee una única identidad a la izquierda y una única identidad a la derecha.

EJEMPLOS

1. Dado $(\mathbb{N}, *)$ donde $x * y = x$. Todo elemento de $\mathbb{N}$ es identidad a la derecha de $*$, pero no existe identidad a la izquierda. Obsérvese que no es un monoide conmutativo.
2. Dado $(\mathbb{N}, *)$ donde $x * y = (x, y)$. No posee elementos identidad; nótese que es un monoide conmutativo. Recuerde que con (x, y) representamos al máximo común divisor.
3. Dado $(\mathbb{Z}, *)$ donde $x * y = x - y$. 0 es identidad a derecha, pero el monoide no posee identidad a izquierda.
4. En (A, o) con $A = X^X$ $X \neq \emptyset$. La función $I \in A$ tal que $I(x) = x$, es elemento identidad del monoide.

Un monoide con identidad, se puede denotar por $(A, *, e)$, representación que remarca la importancia del elemento identidad.

DEFINICIÓN

Sea $(A, *, e)$ un monoide (con identidad) y sea $a \in A$.

Diremos que:

- 1) a posee inverso a la izquierda respecto de e si existe $b \in A$ tal que $b * a = e$.
- 2) a posee un inverso a la derecha respecto de e si existe $c \in A$ tal que $a * c = e$.
- 3) a posee un inverso respecto de e , si existe $d \in A$ tal que $a * d = d * a = e$.

EJEMPLOS

- 1) En $(\mathbb{N}, \cdot)$ el único elemento con inverso es 1.
- 2) En $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 1 y -1 son los únicos elementos con inverso.
- 3) En $(\mathbb{Q}, \cdot)$ todo elemento distinto de cero posee inverso.

TEOREMA

Sea $(A, *, e)$ un semigrupo.

Si $a \in A$, posee inverso a la izquierda y a la derecha, estos son iguales.

DEMOSTRACIÓN

Sea b inverso a la izquierda de a y c a la derecha de a respecto de e ; por lo cual:

$$b * a = e; \text{ y } a * c = e.$$

De este modo, $b * a * e = (b * a) * e = b * (a * c) = e * c = b * e$; por lo tanto, $c = b$; tal como se quería probar.

1.4 ESTRUCTURA DE GRUPO

DEFINICIÓN

Se dice que un monoide $(A, \star)$ posee una estructura de grupo, si:

- 1) $(A, \star)$ es un semigrupo con identidad.
- 2) Todo elemento de A es inversible (posee inverso).

Explícitamente, lo que queremos precisar es que, $(A, \star)$ es grupo si:

- 1) $\star$ es Ley de Composición Asociativa, esto es, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$, $\forall x, y, z \in A$.
- 2) Existe $e \in A$ tal que, $x \star e = e \star x = x$ para cualquier $x \in A$.
- 3) Para todo $x \in A$, existe $x' \in A$, tal que $x \star x' = x' \star x = e$.

EJEMPLOS

Las siguientes estructuras son grupos; señalamos en cada caso su elemento identidad:

$$(\mathbb{R}, +, 0); (\{1, -1\}, \cdot, 1); (\mathbb{Q}, +, 0); (\mathbb{Q}_0, \cdot, 1), \mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\};$$

$$(\mathbb{R}, +, 0); (\mathbb{R}_0, \cdot, 1), \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$(\mathbb{C}, +, 0); (\mathbb{C}_0, \cdot, 1), \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} - \{0 + 0i\}.$$

Se debe reconocer que, el concepto de grupo es uno de los más importantes de la matemática.

Es obvio llamar a un grupo, *grupo conmutativo*, si su monoide correspondiente lo es.

1.5 ESTRUCTURA DE ANILLO

No nos hemos escapado de la particularidad de introducir en un conjunto más de una Ley de Composición. Si o y $\star$ son dos leyes de composición definidas sobre un conjunto A , algo que debemos esperar es que ellas posean alguna relación entre sí. La relación esperada es el de la Ley Distributiva.

Diremos que:

- 1) $*$ es distributiva a la izquierda respecto de $\circ$, si $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z) \forall x, y, z \in A$.
- 2) $*$ es distributiva a la derecha respecto de $\circ$, si $(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) \forall x, y, z \in A$.
- 3) $*$ es distributiva respecto de $\circ$ si lo es a derecha e izquierda.

Note que, si $*$ es Ley de Composición Conmutativa, los resultados anteriores coinciden entre sí.

EJEMPLO

Sea $A = \mathbb{N}$ y sea $*, \circ$ definidas como sigue:

$$a * b = a;$$

$$a \circ b = a + b.$$

Veamos qué tipo de ley distributiva se satisface, de $*$ respecto a $\circ$.

Sean a, b, c elementos de $\mathbb{N}$.

Distributiva a la izquierda: debemos probar si $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

$$\text{Por una parte: } a * (b \circ c) = a * (b + c) = a \quad (1)$$

$$\text{Por otra parte: } (a * b) \circ (a * c) = a \circ a = a + a = 2a \quad (2)$$

De (1) y (2), se tiene que: $a * (b \circ c) \neq (a * b) \circ (a * c)$, por lo cual, $*$ no es distributiva a la izquierda de $\circ$.

Distributiva a la derecha: debemos probar si $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

$$\text{Por una parte, } a \circ (b * c) = a + (b * c) = a + b \quad (3)$$

$$\text{Por otra parte, } (a \circ b) * (a \circ c) = (a + b) * (a + c) = a + b \quad (4)$$

De (3) y (4), se tiene que: $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$., por lo cual, $*$ es distributiva a la derecha de $\circ$.

Finalmente se concluye que $*$ es distributiva con respecto a $\circ$ a la derecha, pero no a la izquierda.

EJEMPLO

Si $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de un conjunto de X y si definimos:

$$x * y = X \cup Y; \quad x \cdot y = X \cap Y.$$

Se obtiene que $*$ es distributiva respecto de $\circ$ y viceversa.

En este punto ya se tiene necesidad de introducir una nueva notación y ciertas condiciones:

" + " denotará una Ley de Composición Conmutativa

" $\circ$ " Ley de Composición sin condición especial.

Abusando del lenguaje conocido, a " + " llamaremos adición, y a " $\circ$ " multiplicación; y ajustamos la notación anterior como se muestra en Cuadro 1 y Cuadro 2.

Adición	Antes	Ahora
	*	+
	e	0
	x'	$-x$

Cuadro 1. representación de la adición

Fuente: elaboración propia

Multiplicación	Antes	Ahora
	o	▪
	e	1
	x'	x^{-1}

Cuadro 2. Representación de la multiplicación

Fuente: elaboración propia

Por otra parte, se suele escribir $x - y$, como sigue: $x - y = x + (-y)$.

DEFINICIÓN

Sean $+$ y $\cdot$ leyes de composición interna, definidas sobre un conjunto A . Ellas determinan una estructura de anillo si existe $0 \in A$ tal que:

- 1) $(A, +, 0)$ es grupo conmutativo.
- 2) $(A, \cdot)$ es un semigrupo.
- 3) $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$ ($\cdot$ es distributiva por izquierda y por derecha de $+$).

Se dice que $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo si $(A, \cdot)$ es semigrupo conmutativo.

$(A, +, \cdot)$ es anillo con unidad si existe $1 \in A$ tal que $1 \neq 0$ y $(A, \cdot, 1)$ es semigrupo con identidad.

DEFINICIÓN

Diremos que un anillo con unidad $(A, +, \cdot)$ es *anillo de división*, si todo elemento de A , excepto 0 , es invertible en $(A, \cdot, 1)$.

DEFINICIÓN

Se denomina *cuerpo o campo*, a todo anillo de división conmutativo; es decir, $(A, +, \cdot)$ es cuerpo, si:

- 1) $(A, +, 0)$ es grupo conmutativo.
- 2) $(A, \cdot, 1)$ es grupo conmutativo.
- 3) " $\cdot$ " es distributiva respecto de " $+$ ".

EJERCICIO

Escribir explícitamente los requerimientos de modo que la estructura $(A, +, \cdot)$ sea cuerpo.

EJEMPLO

- 1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es el cuerpo de los números reales.
- 2) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es el cuerpo de los números complejos.

EJEMPLO

$(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ con " $+$ " reemplazado por " Δ " (diferencia simétrica de conjuntos); y " $\cdot$ " reemplazado por " $\cap$ " (intersección de conjuntos), es anillo conmutativo con unidad.

EJEMPLO

Siendo $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Q}\}$ y las operaciones:

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3};$$

$$(a + b\sqrt{3}) \odot (c + d\sqrt{3}) = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

Se cumple que la estructura $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}], +, \odot)$ constituye un cuerpo.

1.6 LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo arbitrario y sea A un conjunto no vacío dotado de Ley de Composición Interna de Adición. Llamaremos Ley de Composición Externa, a toda aplicación:

$$\odot: K \times A \rightarrow A$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$m1. \quad c \cdot \odot(a_1 + a_2) = c \cdot \odot a_1 + c \cdot \odot a_2$$

$$m2. \quad (c_1 + c_2) \odot a = c_1 \odot a + c_2 \odot a$$

$$m3. \quad (c_1 + c_2) \odot a = c_1 \odot (c_2 \odot a)$$

$$m4. \quad 1 \odot a = a$$

Cualesquiera que sean a, a_1, a_2 en A y c_1 y c_2 en K .

Mas generalmente, vale decir que $\odot$ determina en A una estructura de K – *módulo* a la izquierda sobre A .

1.7 ESPACIOS VECTORIALES

UN EJEMPLO INTUITIVO: FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN PUNTO.

Consideremos un punto material P en el plano. Dadas dos fuerzas F_1, F_2 que actúan sobre un punto P , es posible encontrar la fuerza resultante cuando F_1 y F_2 actúan simultáneamente sobre P .

En general, si $\mathbb{F}$ es el conjunto de fuerzas que pueden actuar sobre P , a cada par de fuerzas F_1 y F_2 podemos hacer corresponder una nueva fuerza F , denotada como $F = F_1 + F_2$, con $F \in \mathbb{F}$.

Valiéndonos de una interpretación geométrica de estas fuerzas mediante vectores, podemos calcular $F = F_1 + F_2$ por la Ley del Paralelogramo (*Figura 1*).

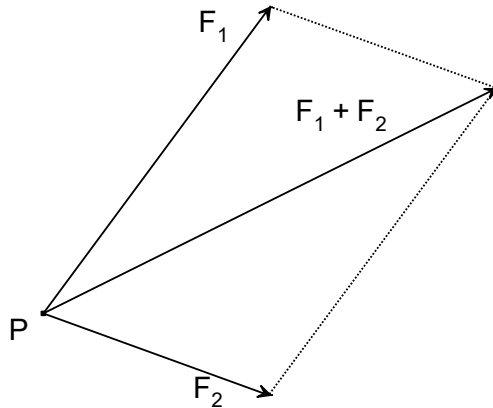


Figura 1. Suma de dos vectores por Método del Paralelogramo

Fuente: elaboración propia

Se observa de este modo, que, la adición es Ley de Composición Interna sobre $\mathbb{F}$, es decir:

$$+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}.$$

Si tenemos tres fuerzas F_1, F_2, F_3 en $\mathbb{F}$, podemos obtener su resultante de dos formas distintas (*Figura 2 y Figura 3*):

$$(F_1 + F_2) + F_3 \text{ o } F_1 + (F_2 + F_3).$$

Veamos el razonamiento geométrico.

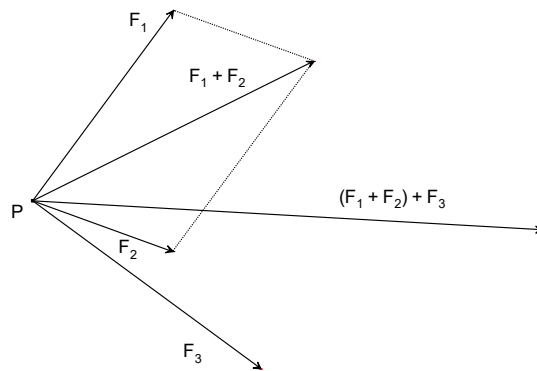


Figura 2. Suma de tres vectores - Parte 1

Fuente: elaboración propia

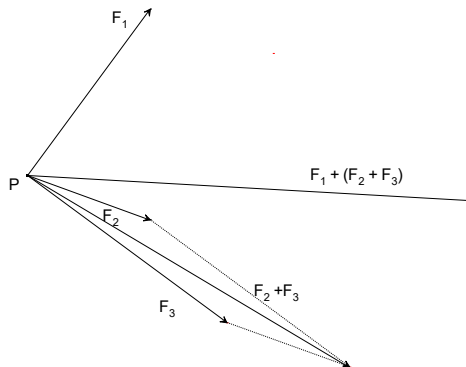


Figura 3. Suma de tres vectores - Parte 2

Fuente: elaboración propia

De este modo, se obtiene como regla general, que:

$$(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3) \quad (1)$$

Del mismo modo, puede verificarse que:

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1.$$

También existe una fuerza nula, o sea, una fuerza de intensidad cero, que no posee dirección determinada, y es tal que, $0 + F = F$ para cualquier $F \in \mathbb{F}$.

Por último, también existe una fuerza F' opuesta a F , de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario, tal que, la resultante de las dos es la fuerza nula: $F + F' = 0$. Generalmente se escribe $F' = -F$.

Ahora definamos una nueva operación (multiplicación por un escalar). Para ello, escogemos al conjunto de los reales con su estructura de cuerpo y nuestro conjunto $\mathbb{F}$.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $F \in \mathbb{F}$ vamos a llamar aF la fuerza que tiene la misma dirección de F , cuya intensidad es $|a|$ veces la de F y su sentido es igual a F cuando $a > 0$ y contrario si $a < 0$.

Algunas propiedades de esta operación son (Figura 4):

$$P_1: \text{ Si } a \in \mathbb{R} \text{ y } F \in \mathbb{F}, aF \in \mathbb{F}$$

$$P_2: a(bF) = (ab)F \text{ (cada producto tiene distinto significado)}$$

Estas dos propiedades se siguen de inmediato, por la definición del producto.

$$P_3: a(F_1 + F_2) = aF_1 + aF_2 \text{ que se verifica por semejanza de triángulos.}$$

$$P_4: (a + b)F = aF + bF.$$

$$P_5: 1F = F.$$

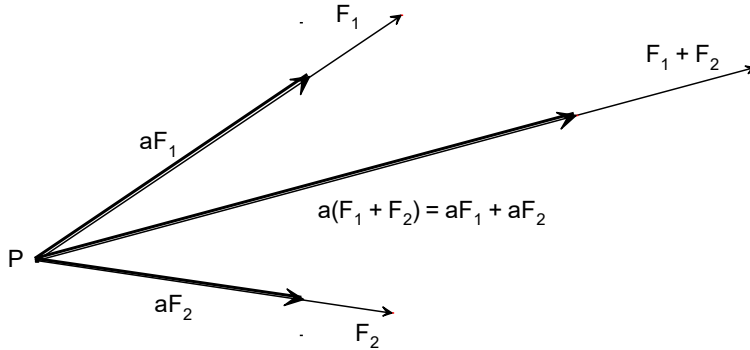


Figura 4. Propiedades de las fuerzas

Fuente: elaboración propia

DEFINICIÓN

Llamaremos ESPACIO VECTORIAL, a la estructura algebraica constituida por un conjunto V no vacío, donde se define la “ADICIÓN”, que es una Ley de Composición Interna y una multiplicación por un escalar. Los elementos de V se llaman vectores y los escalares deben pertenecer a un cuerpo $(K, +, \cdot)$.

Las operaciones son tales que, $\forall a, b$ en K y $\forall A, B$ en V , se cumple lo siguiente:

1) $(V, \oplus)$ es grupo abeliano.

2) $\odot: K \times V \rightarrow V$ es tal que

$$M_1: (a \cdot b) \odot A = a \odot (b \odot A)$$

$$M_2: a \odot (A \oplus B) = a \odot A \oplus a \odot B$$

$$M_3: (a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A$$

$$M_4: 1 \odot A = A$$

Con estas condiciones decimos explícitamente que, $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $(K, +, \cdot)$, si:

Adición:

$$A_1 \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \text{ para } A, B, C \text{ en } V.$$

$$A_2 \quad A \oplus B = B \oplus A \text{ para cualquier } A, B \text{ en } V.$$

$$A_3 \quad \text{Existe } 0 \in V \text{ tal que } A \oplus 0 = 0 \oplus A = A \text{ para } A \text{ en } V.$$

$$A_4 \quad \text{para cada } A \in A, \text{ existe } A' \text{ en } A, \text{ tal que } A + A' = 0.$$

Multipliación:

$$M_1 \quad (a \cdot b) \odot A = a \odot (b \odot A) \quad \forall a, b \text{ en } K \quad A \text{ en } V.$$

$$M_2 \quad a \odot (A \oplus B) = a \odot A \oplus a \odot B \quad \forall a \text{ en } K \quad A, B \text{ en } V.$$

$$M_3 \quad (a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A.$$

$$M_4 \quad 1 \odot A = A.$$

Se debe observar, que, $\odot: V \times V \rightarrow V$ y $\odot: K \times V \rightarrow V$.

El vector A' expresado en la propiedad A_4 se suele llamar $-A$ y se escribe $A - B = A \oplus (-B)$.

EJEMPLOS

1. Siendo $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones:

$$\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que, } (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que, } x \odot (a, b) = (x \cdot a, x \cdot b).$$

De este modo, $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

NOTA

El espacio vectorial de este ejemplo se puede ampliar a las n -uplas de $\mathbb{R}^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y, en general, a las n -uplas de cualquier cuerpo $(K, +, \cdot)$.

NOTA

Más aún, si $\mathbb{A}$ es el conjunto de todas las sucesiones $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, es factible definir las operaciones $\oplus$ y $\odot$, así:

$\oplus: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que, $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \oplus (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$:

$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que, $x \odot (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (xa_1, xa_2, \dots, xa_n, \dots)$.

De este modo, $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2. Sea $\mathcal{P}[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i / a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$

Esto es, $\mathcal{P}[x]$ es el conjunto de los polinomios en $\mathbb{R}$, de grado n o menor.

Podemos definir $\oplus$ y $\odot$, así:

$\oplus: \mathcal{P}[x] \times \mathcal{P}[x] \rightarrow \mathcal{P}[x]$ tal que:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

$\odot: \mathbb{R} \times \mathcal{P}[x]$ tal que,

$$c \odot p(x) = c \odot \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n (ca_i) x^i.$$

De este modo, $(\mathcal{P}[x], \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3. Llamemos $\mathbb{F} = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es función continua}\}$ al conjunto de las funciones continuas sobre $[a, b]$ y las operaciones $\oplus$ y $\odot$, definidas como sigue:

$\oplus: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$;

$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $(a \odot f)(x) = af(x)$.

De este modo, $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido sobre $\mathbb{R}$.

Estas operaciones se denominan adición y multiplicación puntual.

OTROS EJEMPLOS

EJEMPLO 1.

Probar que $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, donde $\oplus$ y $\odot$, se definen así:

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que, } u \oplus v = u \cdot v;$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que, } \alpha \odot u = u^\alpha.$$

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que $\mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, dado que existe al menos el real positivo 1, el cual pertenece a $\mathbb{R}^+$.

Además, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es cuerpo.

De aquí resulta fácil comprobar como $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ es un grupo abeliano.

Veamos si se satisfacen los axiomas de la multiplicación por un escalar.

$$M_1 \quad (a \cdot b) \odot u = u^{a \cdot b} = u^{b \cdot a} = (u^b)^a = a \odot u^b = a \odot (b \odot u) \text{ siendo } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+.$$

$$M_2 \quad a \odot (u \oplus v) = a \odot (u \cdot v) = (u \cdot v)^a = u^a \cdot v^a = u^a \oplus v^a = (a \odot u) \oplus (a \odot v) \text{ con } a \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R}^+$$

$$M_3 \quad (a + b) \odot u = u^{a+b} = u^a \cdot u^b = u^a \oplus u^b = (a \odot u) \oplus (b \odot u) \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+.$$

$$M_4 \quad 1 \odot u = u^1 = u.$$

Luego, $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ definidos como $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a + b + c = 0\}$

Probar que $(A, \oplus, \odot)$ es espacio vectorial sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde $\oplus$ y $\odot$, se definen así:

$$\oplus: A \times A \rightarrow A \text{ tal que } (a, b, c) \oplus (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z);$$

$$\odot: \mathbb{R} \times A \rightarrow A \text{ tal que, } \alpha \odot (a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c).$$

DEMOSTRACIÓN

Debemos probar, inicialmente, si $(A, \oplus)$ es grupo abeliano.

Primero, probemos si $\oplus$ es Ley de Composición Interna en A :

Sea $(a_1, b_1, c_1) \in A$ y $(a_2, b_2, c_2) \in A$, luego,

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0 \text{ y } a_2 + b_2 + c_2 = 0.$$

Ahora bien:

$$(a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Pero,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 &= (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

dado que estamos trabajando en última instancia sobre $(\mathbb{R}, +)$.

A_1 .

Sean $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ en A , entonces,

$$\begin{aligned} [(a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2)] \oplus (a_3, b_3, c_3) &= \\ = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \oplus (a_3, b_3, c_3) & \text{ (por definicion)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3, (c_1 + c_2) + c_3) \text{ (por definicion)} \\
 &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3), c_1 + (c_2 + c_3)) \text{ (} (\mathbb{R}, +) \text{ es grupo)} \\
 &= (a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3) \text{ (por definición)} \\
 &= (a_1, b_1, c_1) \oplus [(a_2, b_2, c_2) \oplus (a_3, b_3, c_3)] \text{ (por definición)}
 \end{aligned}$$

A_2

Sean $(a_1, b_1, c_1) \in A$ y $(a_2, b_2, c_2) \in A$; así:

$$\begin{aligned}
 (a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \text{ (por definición)} \\
 &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1, c_2 + c_1) \text{ (} (\mathbb{R}, +) \text{ es grupo abeliano)} \\
 &= (a_2, b_2, c_2) \oplus (a_1, b_1, c_1) \text{ (por definición).}
 \end{aligned}$$

A_3

Existe $0 = (0,0,0)$ en dado que $0 + 0 + 0 = 0$ y es tal que, para cualquier terma $(a, b, c) \in A$, se cumple que:

$$(a + b + c) + (0,0,0) = (a + 0, b + 0, c + 0) = (a, b, c).$$

A_4

Para cada $(a, b, c) \in A$, existe $(-a, -b, -c) \in A$, tal que $(a, b, c) \oplus (-a, -b, -c) = (0,0,0)$, como se evidencia.

Como $a + b + c = 0$:

$$-a + (-b) + (-c) = -(a + b + c) = -0 = 0. \text{ Luego } (-a, -b, -c) \in A.$$

Por lo tanto, $(A, \oplus)$ es grupo abeliano.

Ahora bien, $\odot : \mathbb{R} \times A \rightarrow A$ es Ley de Composición Externa. dado que, si $x \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \in A$, entonces:

$$x \odot (a, b, c) = (xa, xb, xc)$$

Pero,

$$xa + xb + xc = x(a + b + c) = x \cdot 0 = 0.$$

M_1

Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \in A$, entonces,

$$\begin{aligned} (xy) \odot (a, b, c) &= ((xy)a, (xy)b, (xy)c) = (x(ya), x(yb), x(yc)) \\ &= x \odot (ya, yb, yc) \\ &= x \odot [y \odot (a, b, c)] \end{aligned}$$

M_2

$$\begin{aligned} x \odot [(a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2)] &= \\ &= x \odot (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\ &= (x(a_1 + a_2), x(b_1 + b_2), x(c_1 + c_2)) \\ &= (xa_1 + xa_2, xb_1 + xb_2, xc_1 + xc_2) \\ &= (xa_1, xb_1, xc_1) \oplus (xa_2, xb_2, xc_2) \\ &= x \odot (a_1, b_1, c_1) \oplus x \odot (a_2, b_2, c_2). \end{aligned}$$

M_3

$$\begin{aligned} (x + y) \odot (a, b, c) &= \\ &= ((x + y)a, (x + y)b, (x + y)c) = (xa + ya, xb + yb, xc + yc) \\ &= (xa, xb, xc) \oplus (ya, yb, yc) \\ &= x \odot (a, b, c) \oplus y \odot (a, b, c). \end{aligned}$$

M_4 $1 \odot (a, b, c) = (1a, 1b, 1c) = (a, b, c)$

Por lo tanto, $(A, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Muestre si el conjunto de las ternas $(a, b, c) \in \mathbb{R}^+$, tales que, $a + b + c = 1$, con las operaciones conocidas, es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
2. Igualmente, si $A \in \mathbb{R}^2$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$.
3. Igualmente, si $A \in \mathbb{R}^2$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 4y = 0\}$.
4. Mostrar que, el sistema de matrices $m \times n$, con elementos reales, es un espacio vectorial con la adición ordinaria de matrices y la multiplicación escalar conocida.

1.8 PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

TEOREMA 1.

En un espacio vectorial $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ solamente existe un vector cero.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, es decir, que no es único; en tal sentido, existe O' , otro vector cero aparte de O en V , tal que $O \neq O'$.

Así, $O \oplus O' = 0$ y $O \oplus O' = O'$, ya que son neutro a derecha e izquierda. Luego $O = O'$.

Así, $O \neq O'$ y $O = O'$ lo que es contradictorio y, por tanto, no se puede suponer que no haya otro aparte de O .

TEOREMA 2.

Para cada $A \in V$, existe un único $A' \in V$, tal que $A \oplus A' = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Como $(V, \oplus)$ es Grupo Conmutativo, es obvio, que, para cada A de V existe $A' \in V$, tal que,

$A \oplus A' = 0$. Falta probar que A' es único.

Supongamos que $A'' \neq A'$ es otro aditivo inverso, por tanto, $A \oplus A' = 0$ y $A \oplus A'' = 0$.

De este modo:

$$A' = 0 \oplus A' = A' \oplus 0; \text{ conmutativa por } (V, \oplus);$$

$$= A' \oplus (A \oplus A''); A'' \text{ es inverso de } A;$$

$$= (A' \oplus A) \oplus A''; \text{ asociatividad de } (V, \oplus);$$

$$= 0 \oplus A''; A' \text{ es inverso de } A;$$

$$= A''; 0 \text{ es neutro.}$$

Por tanto, $A' = A''$.

Si $A' \neq A''$ y $A' = A''$, se presenta una contradicción, por lo cual, A' es único.

TEOREMA 3.

Si 0 es el numero cero del cuerpo $(K, +, \cdot)$, entonces $0 \cdot A = 0$ para cada $A \in V$.

DEMOSTRACIÓN

Por M_4 , vimos como $1 \odot A = A$ para todo $A \in V$.

Pero $1 = 1 + 0$ en $(K, +, \cdot)$, de este modo:

$$(1 + 0) \odot A = A = (1 \odot A) \oplus (0 \odot A) = A \oplus (0 \odot A) \text{ por } M_3.$$

Luego, $A = A \oplus (0 \odot A)$. Sumando A' a ambos miembros, resulta:

$$A' \oplus A = A' \oplus (A \oplus (0 \odot A)) = (A' \oplus A) \oplus (0 \odot A).$$

Por tanto, $0 = 0 \oplus (0 \odot A)$; o mejor, $0 \odot A = 0$, ya que cero es neutro de $(V, \oplus)$.

TEOREMA 4.

Si a es un escalar $(-a) \odot A = -(a \odot A)$ (Observe que, el $-$ (menos) tiene carácter distinto en cada miembro).

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}(a \odot A) \oplus (- (a \odot A)) &= (a - a) \odot A; \text{ por } M_3 \\ &= 0 \odot A; \text{ } (K, +, \cdot) \text{ cuerpo.} \\ &= 0; \text{ (teorema anterior.)}\end{aligned}$$

Ahora, sumamos $-(a \odot A)$ opuesto de $(a \odot A)$ a cada miembro para encontrar

$$-(a \odot A) \oplus (a \odot A) \oplus (-a) \odot A = -(a \odot A) \oplus 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}(-(a \odot A) \oplus (a \odot A)) \oplus (-a) \odot A \\ -(a \odot A) \text{ en razón a que } (V, \oplus) \text{ es grupo, por tanto,} \\ 0 \oplus (-a) \odot A = -(a \odot A).\end{aligned}$$

Y por consiguiente,

$$(-a) \odot A = -(a \odot A).$$

como queríamos probar.

TEOREMA 5.

Para todo escalar a , $a \odot 0 = 0$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}a \odot A &= a \odot (A \oplus 0); \text{ } (V, \oplus) \text{ grupo.} \\ a \odot A &= (a \odot A) \oplus (a \odot 0); \text{ y sumando } -(a \odot A) \text{ a ambos} \\ &\text{miembros y por } M_2 \text{ se sigue que:}\end{aligned}$$

$$-(a \odot A) \oplus (a \odot A) = -(a \odot A) \oplus ((a \odot A) \oplus (a \odot 0))$$

$$\text{Luego, } 0 = -(a \odot A) \oplus (a \odot A) \oplus (a \odot 0).$$

$$\text{Es decir, } 0 = 0 \oplus (a \odot 0).$$

Por tanto, $a \odot 0 = 0$, ya que 0 es neutro en $(V, \oplus)$.

TEOREMA 6.

$a \odot A = 0$, si y solo si, $a = 0$ o $A = 0$. (Vector nulo)

DEMOSTRACIÓN

($\Leftarrow$) **necesidad**

$$\text{Si } a = 0 \text{ o } A = 0 \Rightarrow a \odot A = 0.$$

Esta demostrado, ya que, $0 \odot A = 0$ por teorema 3 y $a \odot 0 = 0$ por teorema 5.

($\Rightarrow$) **suficiencia**

Supongamos que $a \odot A = 0$; como $a \in K$ y $(K, +, \cdot)$ es cuerpo, existe a^{-1} de modo que:

$$a^{-1} \odot (a \odot A) = a^{-1} \odot 0 = 0; \text{ por teorema 5.}$$

Por tanto,

$$(a^{-1} \cdot a) \odot A = 0; \text{ y así:}$$

$$1 \odot A = 0, \text{ pero } 1 \odot A = A; \text{ por } M_4.$$

Por tanto, $A = 0$.

Además, si $a \odot A = 0$, como $1 \odot A = A$, se sigue que:

$$(a + 1) \odot A = (a \odot A) \oplus (1 \odot A) = 0 \oplus A = A.$$

Por tanto,

$$(a + 1) \odot A = A.$$

Como $\odot$ es en esencia una FUNCIÓN en la generalidad de los casos, esto ocurre siempre y cuando $a + 1 = 1$ y por ende $a + 1 = 1$ y así, $a = 0$ como queríamos probar.

1.9 SUB-ESPACIOS VECTORIALES

Vimos que $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ donde $\mathbb{F}$ es el conjunto de las funciones continuas en $[a, b]$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; ocurre que $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{D}$ es el conjunto de las funciones diferenciales en el intervalo $[a, b]$. Dado que $\mathbb{F} \subset \mathbb{D}$, se dice que $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ es SUB ESPACIO VECTORIAL DE $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$.

$(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ es Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; sin embargo, dado que $A \subset \mathbb{R}^3$ formado por las triadas (a, b, c) tal que $a + b + c = 0$, es tal que $(A, \oplus, \odot)$ es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Por tanto, es útil decir que $(A, \oplus, \odot)$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$.

DEFINICIÓN

Si $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial definido en K , S no vacío, de modo que $S \subseteq V$, se llama subespacio de V , si S con las operaciones definidas en V forma otro espacio vectorial sobre K .

Existen dos subespacios triviales en todo espacio vectorial, uno es todo el espacio en sí mismo, y el otro, el espacio cero, formado únicamente por el vector cero. Se llaman subespacios triviales porque, de forma natural, heredan todas las propiedades del espacio vectorial.

La tarea lógica que sucede, es el saber reconocer un subespacio vectorial. Es obvio que se deben satisfacer los axiomas de espacio vectorial.

Pero si $(S, \oplus, \odot)$ es subespacio de $(V, \oplus, \odot)$ sobre un cuerpo K , y dado que se manejan exactamente las mismas operaciones, existen propiedades de carácter general sobre V , que, de modo particular, se deben satisfacer en S ; ellas son:

$$G_1 \text{ Si } A, B, C \text{ están en } S: (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

$$G_2 \text{ Si } A, B \text{ están en } S: A \oplus B = B \oplus A.$$

$$M_1 \quad (a \cdot b) \odot A = a \odot (b \odot A); \quad a \in K, b \in K, A \subset S.$$

$$M_2 \text{ Si } A, B \text{ están en } S \text{ y } a \in K, a \odot (A \oplus B) = a \odot A \oplus a \odot B.$$

$$M_3 \text{ Si } a, b \text{ están en } K \text{ y } A \text{ en } S, \text{ entonces } (a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A$$

$$M_4 \quad 1 \odot A = A.$$

Así, no hay necesidad de verificar si se cumplen en S porque se convierten en un derecho ganado por ser S subconjunto de V .

Por lo tanto, solo se requiere reconocer que $\oplus$ es Ley de Composición Interna en S ; $\odot$ externa; y si 0 , es cero tanto en S como lo es en V .

DEFINICIÓN

S es subespacio de V si y solo si:

- 1) Para todo A y B en S , $A \oplus B$ está en S .
- 2) Si A esta en S y $a \in K$, $a \odot A$ está en S .
- 3) El 0 que está en S , es exactamente el mismo de V .

TEOREMA

Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V . Las siguientes condiciones son equivalentes.

- 1) Para todo A, B en S y para todo a, b escalares en K , se sigue que:
 $a \odot A \oplus b \odot B \in S$.
- 2)
 - a) Si A y B están en S , se tiene que $A - B \in S$.
 - b) Si $A \in S$ y a escalar, entonces $a \odot A \in S$.
- 3) S es un subespacio de V .

DEMOSTRACIÓN:

(1 $\Rightarrow$ 2) Supongamos que para todo A, B en S y a, b en K , se sigue que $a \odot A \oplus b \odot B \in S$; en particular, si $a = 1$ y $b = -1$; se tiene, $1 \odot A \oplus (-1) \odot B \in S$. Es decir, $A - B \in S$

Ahora, si hacemos solo $b = 0$, se sigue de inmediato que, $a \odot A \oplus 0 \odot B \in S$; es decir, $a \odot A \in S$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Supongamos que A y B están en S ; como $A - B \in S$ por 2a, en particular, si $A = B$ se obtiene que $A - A \in S$, pero $A - A = 0$; luego, $0 \in S$ (1).

Ahora bien, dado que $A - B \in S$ cuando $A \in S$ y $B \in S$ si hacemos que $0 = A$, entonces:

$$0 - B = -B \in S.$$

Luego, si $A \in S, B \in S, -B \in S$ y por ello, $A - (-B) \in S$; es decir:

$$A \oplus B \in S \quad (2)$$

Por la definición de la multiplicación externa, se tiene:

$$a \odot A \in S \text{ si } a \in K \text{ y } A \in S \quad (3).$$

De (1), (2) y (3), se sigue que S es subespacio de V (por definición)

(3 $\Rightarrow$ 1) Supongamos ahora que S es subespacio de V . De este modo, si A y B están en S y a, b en K , por definición Parte 2), $a \odot A \in S$

S y $b \odot B \in S$, y por definición Parte 1), $a \odot A \oplus b \odot B \in S$. Con lo cual se termina la demostración.

Nótese que, intermedias se ha probado que el vector cero de un subespacio es exactamente el mismo vector cero del espacio.

Obsérvese, además, que el resultado más fácil para determinar si una estructura es subespacio de otra, es la Parte 1 del teorema anterior.

EJEMPLO.

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{R}$; probar si $(A, \oplus, \odot)$ y $(B, \oplus, \odot)$ son subespacios de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{R}$, donde $A = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(x, y) / x + ky = 0\}$, k fijo.

PRUEBA

Para $(A, \oplus, \odot)$, sean $(a, 0)$ y $(b, 0)$ en A , por tanto:

$$\alpha \odot (a, 0) = (\alpha a, 0) \text{ y } \beta \odot (b, 0) = (\beta b, 0).$$

Por consiguiente:

$\alpha \odot (a, 0) \oplus \beta \odot (b, 0) = (\alpha a + \beta b, 0)$, que está en A , ya que la exigencia para los elementos de A es poseer la segunda componente igual a cero.

De este modo:

$(A, \oplus, \odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$.

Para $(B, \oplus, \odot)$, sean (a, b) y (c, d) en B .

Así las cosas, se tiene $a + kb = 0$ y $c + kd = 0$.

Ahora bien:

$$\alpha \odot (a, b) \oplus \beta \odot (c, d) = (\alpha a, \alpha b) \oplus (\beta c, \beta d) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d).$$

Además:

$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta c) + k(\alpha b + \beta d) &= (\alpha a + k\alpha b) + (\beta c + k\beta d) = \\ &= \alpha(a + kb) + \beta(c + kd) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Esto indica que $\alpha \odot (a, b) \oplus \beta \odot (c, d)$ esta en B ; por tanto, $(B, \oplus, \odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$.

Nótese que $(A, \oplus, \odot)$ está interpretando al eje x del plano cartesiano; en cambio, el subespacio $(B, \oplus, \odot)$ representa una familia de rectas que tienen al origen de coordenadas como uno de sus puntos.

EJERCICIOS

- 1) Muestre que si $\mathbb{F}$ es el conjunto de funciones continuas en $[a, b]$ (variable real) y $\mathbb{D}$ el conjunto de las funciones diferenciales en $[a, b]$ y las operaciones conocidas, entonces $\mathbb{F}$ es subespacio de $\mathbb{D}$.
- 2) Si $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / b = 0\}$ muestre que V , con las operaciones conocidas, es subespacio de $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$
- 3) Muestre que si V es el espacio de las matrices cuadradas $n \times n$ y S es el conjunto de las matrices $n \times n$ simétricas, S es subespacio vectorial V .
- 4) Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de las funciones de variables real en $[a, b]$ y sea $\mathbb{A}$ el conjutno de las funciones de variable real acotadas; verificar si $\mathbb{A}$ es subespacio de $\mathbb{F}$ con las operaciones conocidas:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (a \odot f)(x) = af(x).$$

1.10 OPERACIONES CON SUBESPACIOS

1.10.1 Adición

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V ; la adición de S y T escrita como $S + T$, consta de todas las sumas de $A \oplus B$ tales que $A \in S$ y $B \in T$.

Es decir,

$$S + T = \{A \oplus B / A \in S, B \in T\}.$$

TEOREMA

La suma de dos subespacios vectoriales S y T de un espacio V sobre el cuerpo $(K, +, \cdot)$, también es un subespacio de V .

DEMOSTRACIÓN

Sean $A_1 \oplus B_1$ y $A_2 \oplus B_2$ elementos de $S + T$, esto es, A_1 y A_2 están en S y B_1 y B_2 en T .

De este modo,

$$\begin{aligned} a \odot (A_1 \oplus B_1) \oplus b \odot (A_2 \oplus B_2) &= \\ (a \odot A_1 \oplus a \odot B_1) \oplus (b \odot A_2 \oplus b \odot B_2); &\text{ por } M_3, a, b \text{ en } K; \\ = (a \odot A_1 \oplus b \odot A_2) \oplus (a \odot B_1 \oplus b \odot B_2); & (V, \oplus) \text{ grupo abeliano.} \end{aligned}$$

Pero $(a \odot A_1 \oplus b \odot A_2)$ esta en el subespacio S y $(a \odot B_1 \oplus b \odot B_2)$ esta en T , lo que significa, según la definición, que: $a \odot (A_1 \oplus B_1) \oplus b \odot (A_2 \oplus B_2)$ es miembro de $S + T$.

Con todo esto, se ha probado que $S + T$ es subespacio de V .

EJEMPLO

Sea el espacio $(\mathbb{R}^4, \oplus, \odot)$ y los subespacios S y T tomados como sigue:

$$S = \{(a, 0, b, 0) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\};$$

$$T = \{(a, b, 0, 0) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

De este modo, $S + T$ es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$, tal que:

$$S + T = \{(a, b, c, 0) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}.$$

GENERALIZACIÓN

La adición de subespacios S_i de un espacio vectorial V se establece como

$$\sum_{i=1}^n S_i$$

Y es subespacio de V sobre K , siempre que S_i sea subespacio de $(V, \oplus, \odot)$ sobre K , $i \in I_n$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que $S + T = T + S$ donde S y T son subespacios de V .
2. Demostrar que $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$ donde S_1, S_2 y S_3 son subespacios de V .
3. Demuestre que, si $S_1 \subseteq S_2$ entonces, $S_1 + S_2 + S_3 = S_2 + S_3$, donde S_1, S_2 y S_3 son subespacios de V .

1.10.2 Intersección de Subespacios

Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V , se define $S \cap T = \{A / A \in S \text{ y } A \in T\}$.

TEOREMA

Si S y T son subespacios de un espacio vectorial V , $S \cap T$ también es subespacio de V sobre K .

DEMOSTRACIÓN

Sean A y B en $S \cap T$, por tanto, A y B están en S y A y B están en T ; y como S y T son subespacios de V , se sigue que para cualquier par de escalares a y b en K ; $a \odot A \oplus b \odot B$ está en S y también está en T ; esto es, está en $S \cap T$. Por consiguiente $S \cap T$ es subespacio de V .

El anterior teorema se puede generalizar así:

Sea $\{S_i\} i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto vacío de subespacios de V (y finito), entonces:

$$\bigcap_{i=1}^n S_i$$

es un subespacio de V . Su demostración es una copia fiel a la anterior, por lo cual, se deja como ejercicio.

EJEMPLOS

- 1) Siendo $\mathbb{F}$ el conjunto de las funciones reales continuas, definidas sobre un intervalo $[a, b]$; además, sea S el conjunto de las funciones de $\mathbb{F}$ que se anulan en a , y T el de las funciones de $\mathbb{F}$ que se anulan en b . Así, S y T determinan subespacios de $\mathbb{F}$.

De este modo, $S \cap T$ es el subespacio de las funciones de $\mathbb{F}$ que se anulan en a y b al mismo tiempo.

- 2) Sea $P[x]$ el espacio de los polinomios de variable real de grado menor o igual que n . (supongamos $n = 10$).

Sean $S \subset P_n[x]$ tal que, si $f \in S$ entonces $\text{gra}(f) \geq 5$; $T \subset P_n[x]$ tal que, si $f \in T$, $\text{gra}(f) \leq 8$.

De este modo, $S \cap T$ es el subespacio de $P_n[x]$, así, $5 \leq \text{gra}(f) \leq 8$ si $f \in S \cap T$.

SUMA DIRECTA

Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V ; se dice que V es la SUMA DIRECTA de S y T y se escribe $V = S \oplus T$ si y solo si:

1. $V = S + T$.
2. $S \cap T = \{0\}$ (Vector cero).

EJEMPLO

Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tomando los subespacios:

$$S = \{(a, b, 0) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(0, a, b) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ no es la suma directa de S y T , dado que, $S \cap T \neq \{0\}$; ya que, por ejemplo, $(0, 2, 0)$ está en S y T , pero $(0, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$.

En general,

$$S \cap T = \{(0, a, 0) / a \in \mathbb{R}\}.$$

EJEMPLO

El espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ es suma directa de los siguientes subespacios:

$$S = \{(0, a, 0, b) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(a, 0, b, 0) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Esto es, $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

TEOREMA.

Sea V un espacio vectorial, S y T subespacios de V ; de este modo, $V = S \oplus T$ si y solo si, todo vector A de V puede escribirse de forma única como $A = A_1 \oplus A_2$ donde A_1 están en S y A_2 esta en T .

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Supongamos que $V = S \oplus T$, entonces por definición, $V = S + T$ y $S \cap T = \{0\}$.

Por definición de adición de subespacios, para cada vector A de V , existen A_1, A_2 en S y T respectivamente, de modo que, $A = A_1 \oplus A_2$.

Debemos probar ahora que esa es una manera única.

Supongamos que $A = A'_1 + A'_2$, donde $A'_1 \in S$ y $A'_2 \in T$, esto señala también que, $A_1 \neq A'_1$ y $A_2 \neq A'_2$, y por tanto, $A_1 \oplus A_2 = A'_1 \oplus A'_2$. Al sumar $-A'_1$ y $-A'_2$ por izquierda y derecha, respectivamente, resulta:

$$(A'_1) \oplus (A_1 \oplus A_2) \oplus A'_2 = (-A'_1) \oplus (A'_1 \oplus A'_2) \oplus (-A_2)$$

Así,

$$\begin{aligned} ((-A'_1) \oplus A_1) \oplus (A_2 \oplus (-A_2)) \\ = ((-A'_1) \oplus A'_1) \oplus (A'_2 \oplus (-A_2)). \end{aligned}$$

Esto es,

$$((-A'_1) \oplus A_1) \oplus 0 = 0 \oplus (A'_2 \oplus (-A_2)).$$

Es decir,

$$(-A'_1) \oplus A_1 = A'_2 \oplus (-A_2).$$

Pero $(-A'_1) \oplus A_1$ esta en S y $A'_2 \oplus (-A_2)$ está en T ; y como $S \cap T = \{0\}$, lo que debe ocurrir es que, $A'_2 \oplus (-A_2) = (-A'_1) \oplus A_1 = 0$, de donde $A_2 = A'_2$ y $A_1 = A'_1$ hecho que se contradice con $A_1 \neq A'_1$ y $A_2 \neq A'_2$.

Por tanto, no puede suponerse que algún vector de V pueda escribirse de dos maneras distintas en $S + T$.

($\Leftarrow$)

Ahora supongamos que todo vector A de V puede escribirse de manera única en $S + T$; como $A = A_1 \oplus A_2$, donde $A_1 \in S$ y $A_2 \in T$. De este modo, resulta claro que $V = S + T$, por simple definición. Falta probar que $S \cap T = \{0\}$.

Sea $B \in S \cap T$, entonces que $0 \in S$ y $0 \in T$, por ser subespacios de V , se sigue que $B \in S$ y $B \in T$; así:

$B = B \oplus 0 = 0 \oplus B$ que está en $S + T$; así, B que está en V , debe escribirse de forma única en $S + T$ y como $B \oplus 0 = 0 \oplus B = B$, la único que puede ocurrir es que $B = 0$; luego, $S \cap T = \{0\}$. Esto muestra que, $V = S \oplus T$.

EJERCICIOS

- 1) Demostrar que, si S es subespacio de V , $S + S = S$.
- 2) Demostrar que, si $S_1, S_2, \dots, S_n$ son subespacios de V , entonces $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ es subespacio de V .

- 3) Sea el espacio $\mathbb{R}^3$ y los siguientes subespacios de él:

$$S = \{(a, b, c) / a + b + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$$T = \{(a, b, c) / a = c; a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$$R = \{(0, 0, c) / c \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que, $\mathbb{R}^3 = S + T$, $\mathbb{R}^3 = S + R$, $\mathbb{R}^3 = T + R$; indicar cuándo cada suma puede ser directa.

NOTA

De ahora en adelante, a menos que expliquemos lo contrario, tomaremos “+” en lugar de “ $\oplus$ ” y “ $\cdot$ ” en lugar de “ $\odot$ ”; y más aún, por ninguna señal. Por ejemplo, escribiremos $A + B$ por $A \oplus B$ y $aB = a \odot B$. Todo esto, solo por agilizar la escritura.

1.11 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Supongamos que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ es un conjunto finito de vectores, de un espacio vectorial V . Una *combinación lineal* de tales vectores, es una suma de la forma:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \dots + a_nA_n = \sum_{i=1}^n a_iA_i$$

donde cada a_i es un escalar del cuerpo K .

Con las consideraciones anteriores, se sigue que, las combinaciones lineales pueden ser sumadas, restadas y multiplicadas por cualquier escalar.

DEFINICIÓN

Un conjunto de vectores $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ se dice linealmente independiente, si dada la combinación lineal: $\sum_{i=1}^n a_iA_i = 0$, se satisface solo cuando todas y cada uno de los escalares a_i es cero; esto es, $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

En otras palabras, $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, si $\sum_{i=1}^n a_iA_i \neq 0$ cada vez que por lo menos unos de los escalares a_i es diferente de cero (*familia libre*)

En caso contrario, el conjunto se llama linealmente dependiente (*familia ligada*), y en este caso, $\sum_{i=1}^n a_iA_i = 0$ se satisface cuando alguno o algunos escalares a_i son diferentes de cero; esto es, existe $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $a_i \neq 0$ para algún i , y con ello se tiene que $\sum_{i=1}^n a_iA_i = 0$.

EJEMPLO

Verificar si en $\mathbb{R}^2$, los vectores $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ son linealmente independientes.

Dada la definición, formamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{2}, 8\right) + b\left(\frac{1}{4}, 4\right) &= (0,0) \Rightarrow \left(\frac{a}{2}, 3a\right) + \left(\frac{b}{4}, 4b\right) = (0,0) \\ &\Rightarrow \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}, 8a + 4b\right) = (0,0) \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} = 0; \quad 8a + 4b = 0.$$

Entonces, $2a + b = 0$ y $2a + b = 0$.

Llegado a este punto y por ejemplo, si $a = 1$ y $b = -2$ se satisface la ecuación inicial. y por tanto, los vectores $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO

Verificar que los polinomios x y x^2 de $P[x]$, son linealmente independientes.

Es claro ya que, la ecuación que se debe construir es: $ax + bx^2 = 0x + 0x^2$.

Por igualdad de polinomios, se tiene que: $a = 0$ y $b = 0$.

Por lo tanto, los polinomios x y x^2 son linealmente independientes.

EJEMPLO

Demostrar que en $\mathbb{F}$, espacio vectorial de las funciones reales, las funciones $x, \text{Sen}x, \text{Cos}x$ son linealmente independientes.

Formamos la ecuación $ax + b\text{Sen}x + c\text{Cos}x = 0$ y buscamos los valores de a, b, c (variables) que satisfagan tal ecuación.

Nótese que para tales valores de a, b, c debe satisfacerse la ecuación, sin importar el valor de x . En otras palabras, cualquiera sea el valor de x , la ecuación $ax + b\text{Sen}x + c\text{Cos}x = 0$ se convierte en identidad para los valores a, b, c que la satisfacen. Nos apoyamos en este argumento para encontrar los escalares a, b, c .

- Si $x = 0$, se obtiene la ecuación: $a0 + b\text{Sen}0 + c\text{Cos}0 = 0$, de donde $c = 0$.
- Si $x = 2\pi$, se obtiene la ecuación: $2\pi a + b\text{Sen}2\pi + c\text{Cos}2\pi = 0$; es decir, $2\pi a + c = 0$; pero $c = 0$; luego, $2\pi a = 0$. De donde, $a = 0$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, se obtiene la ecuación: $\frac{\pi}{2}a + b\text{Sen}\frac{\pi}{2} + c\text{Cos}\frac{\pi}{2} = 0$; así, $\frac{\pi}{2}a + b + c0 = 0$. Esto es, $\frac{\pi}{2}a + b = 0$; pero $a = 0$; por tanto, $b = 0$.

Luego $a = b = c = 0$.

Por tanto, las funciones $x, \text{Sen}x, \text{Cos}x$ constituyen una familia libre sobre el espacio de las funciones reales.

EJEMPLO

Demostrar que en $\mathbb{F}$, las funciones $\text{Sen}x, \text{Cos}x$ son linealmente independientes.

Anteriormente mostramos como $x, \text{Sen}x, \text{Cos}x$ son linealmente independientes. en $\mathbb{F}$. Una consecuencia natural (que mostraremos más adelante) es que $\text{Sen}x$ y $\text{Cos}x$ también lo sean.

La ecuación de partida para estudiar la dependencia es $a\text{Sen}x + b\text{Cos}x = 0$. Si $x = 0$, se sigue que $b = 0$; y si $x = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$; luego, $\text{Sen}x$ y $\text{Cos}x$ son linealmente independientes (LI) en $\mathbb{F}$.

Al respecto de la dependencia lineal de funciones, es conocido el siguiente teorema:

TEOREMA

Un conjunto de funciones de valor real: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, derivables $k - 1$ veces en el intervalo $[a, b]$ son independientes, si el Wronskiano $W(x) \neq 0$ en todo punto x_0 del intervalo de definición de las funciones.

El Wronskiano es un determinante que se define así:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_k(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{k-1}_1(x) & f^{k-1}_2(x) & \dots & f^{k-1}_k(x) \end{vmatrix}$$

Así, por ejemplo, para las funciones $x, \text{Sen}x, \text{Cos}x$, el Wronskiano es:

$$W = \begin{vmatrix} x & \text{Sen } x & \text{Cos } x \\ 1 & \text{Cos } x & -\text{Sen } x \\ 0 & -\text{Sen } x & -\text{Cos } x \end{vmatrix} = -x, \text{ que es cero solo en } x = 0.$$

Obsérvese que, en este punto, $ax + b\text{Sen}x + c\text{Cos}x = 0$. si $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$.

EJEMPLO

Mostrar que las funciones $\text{Sen}x, \text{Sen}2x, \dots, \text{Sen}kx$ son independientes en el espacio vectorial de las funciones de variable real continuas y definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Se puede utilizar el Wronskiano, pero en realidad, por la generalidad de k , podemos ampliar el arsenal de posibilidades utilizando como método el concepto de integral definida.

La ecuación a formar, es:

$$a_1\text{Sen}x + a_2\text{Sen}2x + a_3\text{Sen}3x + \dots + a_k\text{Sen}kx = 0 \quad (1)$$

Ahora bien, multiplicamos por $\text{Sen}x$ e integramos de 0 a 2π , se obtiene:

$$a_1 \int_0^{2\pi} \text{Sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \text{Cos}2x) dx = a_1 \pi$$

Ahora bien, para $n \neq m$, debido a que $\text{Sen}a\text{Sen}b = \frac{1}{2}[\text{Cos}(a-b) - \text{Cos}(a+b)]$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{Sen} nx \text{Sen} mx dx &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \text{Cos}(n-m)x - \text{Cos}(n+m)x dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Sen}(n-m)x}{n-m} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\text{Sen}(n+m)x}{n+m} \Big|_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Siendo así, cuando $n \neq 1$, como caso particular, al multiplicar la ecuación inicial por $\text{Sen}x$, las restantes integrales $\int_0^{2\pi} \text{Sen} nx \text{Sen} mx dx$ son iguales a cero, es decir $\int_0^{2\pi} \text{Sen} nx \text{Sen} x dx = 0$ cuando $n \neq 1$. Así se obtiene que, $a_1 \pi = 0$; de donde, $a_1 = 0$.

Si multiplicamos (1) por $\text{Sen}2x$ se consigue que $a_2 = 0$; si multiplicamos por $\text{Sen}3x$, se llega, a que, $a_3 = 0$; y si multiplicamos por $\text{Sen}kx$, se llega, a que $a_k = 0$.

Lo cual muestra que $\text{Sen}x, \text{Sen}2x, \dots, \text{Sen}kx$ es una familia libre sobre el espacio de las funciones de variable real y continua, definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

EJERCICIOS

1. Mostrar que las funciones $1, x, x^2, \dots, x^k$ son independientes en el espacio de funciones de variable real continuas y definidas en el intervalo $[0, 1]$.

2. En el espacio de funciones de valor real continuas y definidas en el intervalo $[0,1]$, ¿las funciones $x, x^2 - 1$ y $x^2 + 2x + 1$ son dependientes o independientes?
3. En el espacio de polinomios de valor real y grado menor o igual que 3, mostrar que son independientes los siguientes polinomios:

$$P_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3);$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3);$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3).$$

Muestre, además, que cualquier polinomio de $P_3(x)$ se puede expresar de manera única por:

$$P(x) = p(0)P_0(x) + p(1)P_1(x) + p(2)P_2(x) + p(3)P_3(x)$$

4. Muestre que las funciones $1, x + 1, x^2 + x + 1, \dots, x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$, son independientes en el intervalo $[0,1]$ en el espacio de las funciones reales.
5. Mostrar que las funciones e^x, e^{2x}, e^{3x} son independientes en el intervalo $[0,1]$.
6. Las funciones e^x, xe^x, x^2e^x son dependientes (LD) o independientes (LI) en el intervalo $[0,1]$.
7. Determinar si las funciones $\text{Sen}x, \text{Cos}x, x\text{Sen}x, x\text{Cos}x$ son LD en el intervalo $[0, 2\pi]$.
8. Muestre que los vectores $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$ son LI en $\mathbb{R}^3$. ¿Se puede esperar el vector $(1,2,3)$ como combinación lineal de ellos?
9. Determinar si los vectores $(1, -1, 1, -1), (2, 0, 3, -1), (0, 1, 2, -1), (4, -3, -3, 0)$ son dependientes o independientes en $\mathbb{R}^4$. ¿Se puede expresar el vector $(1, 2, 3, 4)$ como combinación lineal de estos vectores?

10. Determinar si los vectores $(1, i, -1), (1 + i, 0, 1 - i), (i, -1, -i)$ son LD o LI en $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
11. Muestre que $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos kx$ son Linealmente independiente en $[0, 2\pi]$.
12. Muestre que los polinomios $1, x + 1, x^2 + x + 1, \dots, x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$, configuran una familia linealmente independiente. Argumente las razones que le obligan a trabajar de un modo diferente al problema 4.

TEOREMA

Un conjunto de funciones de valor real $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$, derivable $k - 1$ veces en el intervalo $[a, b]$ son independientes, si su Wronskiano $W(x_0) \neq 0$ en cualquier punto $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Escribimos $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x) = 0$, que se cumple en todo el intervalo $[a, b]$. Derivando $k - 1$ veces, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x) &= 0 \\ a_1 f'_1(x) + a_2 f'_2(x) + \dots + a_k f'_k(x) &= 0 \\ a_1 f''_1(x) + a_2 f''_2(x) + \dots + a_k f''_k(x) &= 0 \\ \vdots \\ a_1 f^{k-1}_1(x) + a_2 f^{k-1}_2(x) + \dots + a_k f^{k-1}_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $x = x_0$, donde $x_0 \in [a, b]$, se consigue el sistema:

$$\begin{aligned} a_1 f_1(x_0) + a_2 f_2(x_0) + \dots + a_k f_k(x_0) &= 0 \\ \vdots \\ a_1 f^{k-1}_1(x_0) + a_2 f^{k-1}_2(x_0) + \dots + a_k f^{k-1}_k(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Que es un sistema homogéneo con sus derivadas hasta el orden $k - 1$ y de coeficientes $f_i(x_0)$.

De este modo, el determinante de la matriz de coeficientes, no es nulo (Wronskiano), y por ende, tal sistema, solo posee la solución trivial $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = a_k = 0$; y así, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) = 0$, son linealmente independientes.

Este teorema, es de mucha aplicación en la solución de los anteriores ejercicios (la mayoría de ellos). El inverso del teorema no es cierto.

■

TEOREMA. Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores; entonces, todo subconjunto no vacío, de este conjunto, es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN

Sea $S \subset \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, podemos reorganizar los subíndices de modo que, $S = \{A_1, A_2, \dots, A_\rho\}$, donde $\rho < n$.

Supongamos que S es una familia ligada (LD). Entonces, existen escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\rho$ tales que,

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots + a_\rho A_\rho = 0.$$

De este modo, podemos elegir $a_{\rho+1} = a_{\rho+2} = \dots = a_n = 0$, con lo cual,

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_\rho A_\rho + 0 A_{\rho+1} + \dots + 0 A_n = 0$$

donde algunos $a_1, a_2, \dots, a_n$ no son nulos.

Esto indica que, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ no es una familia libre (no es LI). Así, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es libre y a la vez, es ligada, lo que es una contradicción. Por tanto, no se puede suponer que S no sea libre, y así, su contrario es cierto; esto es, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es linealmente independiente.

OBSERVACIÓN

El contrario del teorema no es cierto, ya que, por ejemplo, si se toma $\{(0, -1)(1, 0)(1, 2)\}$ en $\mathbb{R}^2$, ocurre que $\{(0, -1), (1, 0)\}$ son linealmente independientes, pero $\{(0, -1)(1, 0)(1, 2)\}$, no lo es.

TEOREMA

Un conjunto formado por un solo vector A es linealmente independiente, si y solo si, $A \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

($\Leftarrow$)

Sea $A \neq 0$ y supongamos que $\{A\}$ no es LI.

Así, existe $a \neq 0$, tal que $aA \neq 0$; pero en K existe a^{-1} , con lo cual, $a^{-1}(aA) = a^{-1}0 = 0$.

Luego, $a^{-1}a(A) = 0$; con lo cual, $1 \cdot A = A = 0$.

Lo que contraría a la hipótesis; por tanto, $a = 0$ y $\{A\}$ es LI.

($\Rightarrow$)

Si $\{A\}$ es linealmente independiente, entonces $aA = 0$ solo cuando $a = 0$; y como $0A = 0$ para todo A en V , debe ocurrir que $A \neq 0$, ya que, si $A = 0$, $aA = 0$ por tanto a en K , con lo cual, $\{A\}$ es linealmente dependiente.

DEFINICIÓN

Un conjunto infinito de vectores es linealmente independiente si todo subconjunto finito de él, lo es.

Esta definición permite verificar, por ejemplo, que $\{1, x, x^2, \dots, x^n \dots\}$ es linealmente independiente. Para ello, basta probar que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es linealmente independiente para cada n .

En efecto, si $a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ es una función que vale 0 en todos los puntos, en particular, si vamos dando a x los valores 0,1,2 hasta n , se consigue el siguiente sistema:

$$a_0 = 0$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^n a_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_0 + na_1 + n^2 a_2 + \cdots + n^n a_n = 0$$

Y como $a_0 = 0$, resulta el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

$$2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^n a_n = 0$$

$$\vdots$$

$$na_1 + n^2 a_2 + \cdots + n^n a_n = 0$$

Su determinante es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\frac{2^1}{n} & -\frac{2^2}{n^2} & \cdots & -\frac{2^n}{n^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Y por tanto, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ es la solución trivial de la ecuación inicial.

Luego, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es linealmente independiente, y por tanto, $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ también lo es, siendo esta última una familia infinita.

EJERCICIO

Probar que, $G = \{1, i\}$ es libre en el espacio $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ y ligado en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

1.12 SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Sea V un espacio vectorial arbitrario, definido sobre un cuerpo $(K, +, \cdot)$.

Sea $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de vectores de V .

Se denota por $\langle G \rangle$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de G ; esto es,

$$\langle G \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i A_i \mid a_i \in K, A_i \in G, G \subset V \right\}.$$

Así, todo elemento A de G , es de la forma $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$

TEOREMA

$\langle G \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

DEMOSTRACIÓN

Sean A y B en $\langle G \rangle$ entonces por definición se tienen las siguientes expresiones:

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n;$$

$$B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_n A_n.$$

De este modo, siendo α y β escalares de K , se sigue que:

$$\alpha A = \alpha a_1 A_1 + \alpha a_2 A_2 + \dots + \alpha a_n A_n;$$

$$\beta B = \beta b_1 A_1 + \beta b_2 A_2 + \dots + \beta b_n A_n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &= (\alpha a_1 + \beta b_1) A_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2) A_2 + \dots \\ &\quad + (\alpha a_n + \beta b_n) A_n \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ están en K ; luego, cada $\alpha A + \beta B \in V$. Esto significa que:

$(\alpha A + \beta B) \in \langle G \rangle$, por consiguiente, $\langle G \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

NOTA

Obsérvese que $0 \in \langle G \rangle$; basta tomar una continuación lineal en la que cada

$$a_i = 0, \quad i \in I,$$

$I = \{1, 2, \dots, n\}$; y dado que, $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$, es claro que su opuesto

es:

$$-A = -a_1 A_1 - a_2 A_2 - \dots - a_n A_n, \text{ que está en } \langle G \rangle.$$

$\langle G \rangle$ se denomina SUBESPACIO GENERADO POR G .

$\langle G \rangle$ satisface las siguientes propiedades:

1) $G \subset \langle G \rangle$

En efecto:

$$A_1 = 1A_1 + 0A_2 + \dots + 0A_n$$

$$A_2 = 0A_1 + 1A_2 + \dots + 0A_n$$

$$A_n = 0A_1 + 0A_2 + \dots + 1A_n$$

2) Todo subespacio S tal que $G \subset S$, es tal que, $\langle G \rangle \subset S$.

Esto también es claro, ya que, si $A_1 \in G, A_2 \in G$, entonces $A_1 \in S, A_2 \in S$. Luego el elemento $aA_1 + bA_2 \in \langle G \rangle$, también está en S .

Es decir, si $\langle G \rangle \not\subset S$, existe $A \in \langle G \rangle$ tal que $A \notin S$; pero $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$ y dado que, $A_1, \dots, A_n$ están en $G \subset S, A \in S$. (S es supespacio de V). Así, $A \notin S$ y $A \in S$ que es contradictorio. Luego, lo que debe ocurrir es que $\langle G \rangle \subset S$.

De este modo, $\langle G \rangle$ es el espacio mínimo de los espacios de V que contiene a G .

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ $H = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ subconjuntos finitos de V . Si cada $A_i \in G$ es tal que $A_i = \sum_{j=1}^m a_j B_j$, entonces $\langle G \rangle \subseteq \langle H \rangle$.

DEMOSTRACIÓN

Es claro que, $G \subset \langle G \rangle$; además, por hipótesis: $G \subset \langle H \rangle$ y por (2), de las propiedades arriba mencionadas, todo subespacio S tal que $G \subset S$, es tal que, $\langle G \rangle \subset S$. En este caso, se evidencia como antes que $G \subset \langle H \rangle$ y por ello ocurre que, $\langle G \rangle \subset \langle H \rangle$.

■

DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial y $G = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de V . Si $V = \langle G \rangle$, decimos que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ genera a V .

DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial y $A_1, A_2, \dots, A_n$ un conjunto finito de V . Si algún vector A de V , es tal que, $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$, se dice que A es linealmente dependiente de $A_1, A_2, \dots, A_n$.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial y $G = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto contenido en V . G es linealmente dependiente, si y solo si, por lo menos un vector A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, es linealmente dependiente de los demás A_i .

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Sea el espacio vectorial V y G linealmente dependiente, entonces,

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n = 0.$$

A pesar de que algún escalar $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; supongamos que tal escalar es a_m , $1 \leq m \leq n$.

Luego,

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_{m-1}A_{m-1} + a_mA_m + \cdots + a_nA_n = 0.$$

Sumando a ambos miembros el opuesto de a_mA_m , resulta:

$$\begin{aligned} (-a_m)A_m &= a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_{m-1}A_{m-1} + a_mA_m + a_{m+1}A_{m+1} \\ &\quad + \cdots + a_nA_n + (-a_m)A_m. \end{aligned}$$

Como $a_m \neq 0$, podemos dividir por él en el cuerpo $(K, +, \cdot)$; es decir, multiplicar por $(-a_m)^{-1}$, con lo cual, se obtiene:

$$A_m = b_1A_1 + b_2A_2 + \cdots + b_{m-1}A_{m-1} + b_{m+1}A_{m+1} + \cdots + a_nA_n.$$

Donde cada $b_i = a_i(-a_m)^{-1}$, $i = 1, \dots, n$; $i \neq m$. Por tanto, al menos un vector de G es linealmente dependiente de los demás.

($\Leftarrow$)

Supongamos que A_m en G , $1 \leq m \leq n$, es linealmente dependiente de los demás; así que:

$$A_m = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_{m-1}A_{m-1} + a_{m+1}A_{m+1} + \cdots + a_nA_n$$

Sumando a ambas partes el puesto de A_m , se sigue que:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_{m-1}A_{m-1} + (-1)A_m + a_{m+1}A_{m+1} + \cdots \\ &\quad + a_nA_n. \end{aligned}$$

Dado que, $-1 \neq 0$, se sigue que, G es linealmente dependiente; con lo que termina la demostración ■.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial y $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tal que $G \subseteq V$.

G es familia ligada en V , si y solo si, el subespacio $\langle G \rangle$ es generado por un subconjunto propio de G .

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Sea $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ linealmente dependiente.

Por teorema anterior, existe $A_m \in G, 1 \leq m \leq n$ linealmente dependiente de los demás.

Luego $A_m \in \langle A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_n \rangle$; por lo tanto, $G \subset \langle A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_n \rangle$; y por propiedad anterior, se tiene que, $\langle G \rangle \subset \langle A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_n \rangle$.

($\Leftarrow$)

Supongamos que H es subconjunto propio de G y que $\langle G \rangle$ es generado por $\langle H \rangle$; es decir, todo $A \in \langle G \rangle$, es combinación de los vectores de H . Aquí, lo que decimos es que $\langle H \rangle = \langle G \rangle$.

De este modo, existe $A_m \in G$, tal que $A_m \notin H$; pero $G \subset \langle G \rangle$, luego $A_m \in \langle G \rangle$, y, por tanto, es combinación lineal de los vectores de H ; es decir, A_m es linealmente dependiente de los demás vectores de G , y por teorema anterior, se sigue que, G es linealmente dependiente.

■

EJEMPLO

El conjunto $\{(1,0,5) (0,2,-3) (2,6,1)\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$, ya que, $2(1,0,5) + 3(0,2,-3) = (2,6,1)$; es decir, el vector $(2,6,1)$ es linealmente dependiente de los otros dos vectores.

TEOREMA

Sea $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ linealmente independientes en el espacio vectorial V , y sea A un vector de V ; $G \cup \{A\}$ es linealmente independiente, si y solo si, $A \notin \langle G \rangle$.

Este teorema indica que, cualquier vector (excepto algunos), es la combinación lineal de un conjunto de vectores $A_1, A_2, \dots, A_n$; y que, si $A \in \langle G \rangle$, $G \cup \{A\}$ es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Supongamos que $G \cup \{A\}$ es libre y demostremos que $A \notin \langle G \rangle$.

Si suponemos que $G \cup \{A\}$ es linealmente dependiente de los vectores de G y por tanto, $G \cup \{A\}$ es linealmente dependiente, esto contradice la hipótesis; luego, no se puede pensar que $A \in \langle G \rangle$, y así, $A \notin \langle G \rangle$.

($\Leftarrow$)

Supongamos ahora que $A \notin \langle G \rangle$ y supongamos que $G \cup \{A\}$ es linealmente dependiente; de este modo, $\sum_{i=0}^n a_i A_i + aA = 0$, donde al menos a o un a_i , no es cero. Supongamos que $a = 0$.

En este caso, $\sum_{i=0}^n a_i A_i = 0$ y como G es linealmente independiente, cada $a_i = 0$. Por tanto, el único escalar que no podría ser no cero es a ; luego, $a \neq 0$.

Así,

$$(-a)A = \sum_{i=0}^n a_i A_i.$$

Entonces,

$$A = -\frac{1}{a} \sum_{i=0}^n a_i A_i.$$

Es decir, $A \in \langle G \rangle$, lo cual contradice la hipótesis. Luego no podemos suponer que $G \cup \{A\}$ sea linealmente dependiente, y así, $G \cup \{A\}$ es linealmente independiente.

■

1.13 BASES Y DIMENSIÓN

DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $B \subset V$ un conjunto no vacío.

El conjunto B es una base de V , siempre que,

- 1) B es linealmente independiente.
- 2) $V = \langle B \rangle$, es decir, el espacio vectorial V es generado por B .

EJEMPLO

Verificar si $B = \{(2,3) \ (-1,4)\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}^2$.

Inicialmente, verifiquemos si tal conjunto es linealmente independiente.

Sean a, b en $\mathbb{R}$, tales que, $a(2,3) + b(-1,4) = (0,0)$.

De aquí, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2a - b = 0$$

$$3a + 4b = 0$$

El determinante del sistema es diferente de cero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \text{ y se sabe que } 1 \neq 0..$$

Se deduce que, la solución del sistema es la trivial y única; por lo tanto, $a = 0 = b$, con lo cual, el conjunto $B = \{(2,3) (-1,4)\}$ es linealmente independiente.

Veamos que B genera a $\mathbb{R}^2$, es decir, que $\mathbb{R}^2 = \langle B \rangle$.

Para el efecto, probemos que cualquier vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $(2,3)$ y $(-1,4)$; así que,

$$a(2,3) + b(-1,4) = (x,y).$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2a - b = x$$

$$3a + 4b = y$$

De donde,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 4x + y.$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{vmatrix} = 2y - 3x.$$

Y en concordancia con la Regla de Cramer, se tiene en definitiva que

$$a = \frac{4x + y}{11}; \quad b = \frac{2y - 3x}{11}.$$

De este modo, si $(x, y) = (8, 7)$, por ejemplo, entonces:

$$a = \frac{32 + 7}{11} = \frac{39}{11};$$

$$b = \frac{14 - 24}{11} = -\frac{10}{11}.$$

Y por ello,

$$\frac{39}{11}(2, 3) + \left(-\frac{10}{11}\right)(-1, 4) = \left(\frac{78}{11}, \frac{117}{11}\right) + \left(\frac{10}{11}, \frac{40}{11}\right) = \left(\frac{88}{11}, \frac{157}{11}\right) = (8, 14).$$

Esto indica que, $\langle B \rangle = \langle (2, 3), (-1, 4) \rangle = \mathbb{R}^2$.

Y con esto se ha probado que $B = \{(2, 3), (-1, 4)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

■

EJEMPLO

$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ es base de $P[x]$.

Obsérvese que esta es una base infinita.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial sobre K y $B \subset V$ un conjunto no vacío.

B es base de V , si y solo si, todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B , de manera única.

DEMOSTRACIÓN

$(\Rightarrow)$

Sea $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una base de V .

Entonces, B es linealmente independiente y $\langle B \rangle = V$ por definición.

Luego, todo vector $A \in V$ es tal que, $A = \sum_{i=1}^n a_i A_i$, $a_i \in K$.

Se debe probar que esta es la única manera. Supongamos que no es la única; entonces, existen $b_i \in K$, tales que, $b_i \neq a_i$, de modo que, $A = \sum_{i=1}^n b_i A_i$; es decir,

$$\sum_{i=1}^n a_i A_i = \sum_{i=1}^n b_i A_i$$

Esto es,

$$\sum_{i=1}^n a_i A_i - \sum_{i=1}^n b_i A_i = 0.$$

O mejor,

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) A_i = 0.$$

Pero B es linealmente independiente, por tanto, para que esto ocurra, $a_i - b_i = 0$ para todo i ; y esto implica que, $a_i = b_i$ cualquiera que sea el indicador i . De este modo, $a_i \neq b_i$ y $a_i = b_i$; lo que señala que no podemos suponer que A no se puede interpretar de manera única en $\langle B \rangle$.

($\Leftarrow$)

Supongamos ahora que, todo vector de V se puede interpretar de manera única en $\langle B \rangle$; esto significa que, $\langle B \rangle = V$.

Debemos probar que B es linealmente independiente.

Sea $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_n A_n = 0$.

Como $0A_1 + 0A_2 + \cdots + 0A_n = 0$, ocurre que $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$, esto dado que solo existe una manera única en $\langle B \rangle$ de conseguir el vector 0.

Por lo tanto, B es linealmente independiente.

■

DEFINICIÓN

Sea V un espacio vectorial sobre K , y $M \subset V$ no vacío y $M \neq \{0\}$ (este es linealmente dependiente). M es *subconjunto maximal* en V si,

- 1) M es linealmente independiente.
- 2) si $M \subset N \subset V$, entonces N es linealmente dependiente.

EJEMPLO

Mostrar que $p_1(x) = \frac{1}{2}x(x-a)$, $p_2(x) = -(x-1)(x+1)$, $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$ es un conjunto maximal para $P_2[x]$.

Se requiere verificar, en principio, que $p_1(x), p_2(x)$ y $p_3(x)$ es linealmente independiente.

Escojamos reales a, b, c tales que, $\frac{a}{2}x(x-1) - b(x-1)(x+1) + \frac{c}{2}x(x+1) = 0$, que es independiente del valor de x .

De este modo:

Si $x = 0$, se obtiene $b = 0$.

Si $x = 1$, $\frac{c}{2}(1+1) = c = 0$.

Si $x = -1$, se encuentra que $a = 0$.

Luego, el conjunto $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es linealmente independiente.

Ahora verifiquemos, por ejemplo, que $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ es linealmente dependiente, siendo $p_4(x)$ cualquier otro polinomio de $P_2[x]$.

Podemos mostrar que cualquier otro polinomio de $P_2[x]$ está en $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$; de este modo, si es $p_4(x)$ tal polinomio, por teorema anterior, queda probado que el conjunto $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ es LD (linealmente dependiente).

Sea $p_4(x) = a + bx + cx^2$.

Calculemos escalares m_1, m_2, m_3 , tales que $m_1 p_1(x) + m_2 p_2(x) + m_3 p_3(x) = a + bx + cx^2$. Específicamente se tiene:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{m_1}{2} x(x - a) - m_2(x - 1)(x + 1) + \frac{m_3}{2} x(x + 1) \\ &= a + bx + cx^2 \end{aligned}$$

Nuevamente,

Si $x = 0$, $m_2 = a$.

Si $x = 1$, $m_3 = a + b + c$.

Si $x = -1$, $m_1 = a - b + c$.

Al haber encontrado los valores de m_1 , m_2 y m_3 se ha demostrado que, en efecto, el conjunto de vectores $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ de $P_2[x]$ es un conjunto maximal.

Así, si queremos expresar $10 - 8x + 7x^2$, como combinación lineal de los elementos de este conjunto maximal, escogemos:

$$m_1 = 25; m_2 = 10; m_3 = 9.$$

De modo que,

$$\begin{aligned} &\frac{25}{2} x(x - 1) - 10(x - 1)(x + 1) + \frac{9}{2} x(x + 1) \\ &= \frac{25}{2} (x^2 - x) - 10(x^2 - 1) + \frac{9}{2} (x^2 + x) \\ &= \frac{25}{2} x^2 - \frac{25}{2} x - 10x^2 + 10 + \frac{9}{2} x^2 + \frac{9}{2} x \\ &= 10 - 8x + 7x^2 \end{aligned}$$

Con esto, hemos probado que, $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ es linealmente dependiente; luego, $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es maximal en $P_2[x]$. Y como se ha probado en intermedias, es una base de $P_2[x]$. Esto nos da seguridad para enunciar el teorema que sigue.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial sobre $(K, +, \cdot)$ y $B \subseteq V$.

B es una base de V , si y solo si, B es subconjunto maximal en V .

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Sea B una base de V y probemos que B es maximal.

Por hipótesis, B es linealmente independiente y $\langle B \rangle = V$.

Debemos probar que, B es linealmente independiente, y que si $B \subset N \subset V$ propiamente, N es linealmente dependiente.

La hipótesis prueba que B es LI.

Ahora bien, como todo vector $A \in V$ es tal que $A \in \langle B \rangle$, entonces siendo $T = B \cup \{A\}$, T es linealmente dependiente; así, B es maximal en V .

($\Leftarrow$)

Supongamos ahora que B es maximal en V . De este modo, B es linealmente independiente, y para todo T , tal que $B \subset T \subset V$, es tal que T es linealmente dependiente. Ya se sabe que B es linealmente independiente; solo debemos probar que $\langle B \rangle = V$.

Como T contiene propiamente a B , existe $A \in T$, tal que, $A \notin B$. De este modo, $B \cup \{A\}$ es linealmente dependiente, y como B es libre, entonces por teorema anterior, $A \in \langle B \rangle$; por lo tanto, $\langle B \rangle = V$.

■

EJERCICIOS

- Muestre cuál de los siguientes conjuntos de vectores configuran una base de $\mathbb{R}^3$:
 - $\{(1,1,1) (1, -1,1) (0,1,0)\}$.
 - $\{(1,2,3) (1,0,1) (0, -1,2)\}$.
 - $\{(0,0,1) (0,1, -1) (-1,1,0)\}$.
 - $\{(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)\}$ (base canónica de $\mathbb{R}^3$).
- Cuáles de los siguientes conjuntos de los vectores forma una base para $\mathbb{C}^4$ definido sobre $\mathbb{R}$. Repita la demostración tomando el espacio vectorial respectivo definido sobre $\mathbb{C}$.
 - $\{(i, 0,0,0) (0, i, 0,0) (0,0, i, 0) (0,0,0, i)\}$.
 - $\{(1,0,0,0) (1,1,0,0) (1,1,1,0) (1,1,1,1)\}$.
 - $\{(1,1,1,1) (i, i, i, i) (0,1,0,1) (i, 0, i, 0)\}$.
- Sea D el conjunto de funciones de variable real, infinitamente diferenciables sobre $[0,1]$; este conjunto forma un espacio vectorial. Determinar una base para este espacio, si esto es posible (serie de Taylor).
- Muestre si,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } M_2.$$
- Calcular una base de M_3 .
- Muestre que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$ y planos que pasan por el origen de coordenadas.

DEFINICIÓN

Un conjunto B que es base de un espacio V , siendo finito, determina una base finita de V ; de este modo, la cardinalidad de B o cantidad de elementos de B expresada por $\#B$, se llama dimensión del espacio V . B es una base infinita si no es finita.

TEOREMA

Sea $\{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de generadores de un espacio V y $\{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ linealmente independiente en V , entonces $s \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

Debemos probar que todo conjunto de más de n vectores, es linealmente dependiente.

Supongamos que $s \not\leq n$, es decir, que $s > n$.

Como $\{A_1, \dots, A_n\}$ es generador de V , existen escalares a_{ij} , $1 \leq i \leq s$, $i \leq j \leq n$ en K , tales que,

$$B_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + \dots + a_{1n}A_n = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_j$$

$$B_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + \dots + a_{2n}A_n = \sum_{j=1}^n a_{2j} A_j$$

$\vdots$

$$B_s = a_{s1}A_1 + a_{s2}A_2 + \dots + a_{sn}A_n = \sum_{j=1}^n a_{sj} A_j$$

Nótese que los a_{ij} no son todo nulos.

De este modo, si existen escalares $c, c_2, \dots, c_s$, tales que, $c_1B_1 + c_2B_2 + \dots + c_sB_s = 0$, se encuentra que,

$$c_1 \sum_{j=1}^n a_{1j} A_j + c_2 \sum_{j=1}^n a_{2j} A_j + \dots + c_s \sum_{j=1}^n a_{sj} A_j = 0$$

Esto es,

$$\sum_{i=1}^s c_i \sum_{j=1}^n (a_{ij} A_j) = 0$$

que puede escribirse como sigue:

$$\sum_{j=1}^n c_i \left(\sum_{i=1}^n (c_i a_{ij}) \right) A_j = 0.$$

es decir, se factoriza cada A_j .

Así, se consigue una expresión de la forma:

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \cdots + c_s a_{s1}) A_1 + (c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \cdots + c_s a_{s2}) A_2 \\ + \cdots + (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \cdots + c_s a_{sn}) A_n = 0.$$

Dado que, $\{A_1, \dots, A_n\}$ genera a V , en este caso, al vector 0, debe darse que (esta es una forma por lo menos de generar a 0):

$$c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \cdots + c_s a_{s1} = 0$$

$$c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \cdots + c_s a_{s2} = 0$$

$\vdots$

$$c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \cdots + c_s a_{sn} = 0$$

Y dado que $s > n$, este es un sistema de n ecuaciones por s variables (más variables que ecuaciones), existen infinitas soluciones, aparte de la trivial, no todas nulas; es decir, existe al menos un $c_i \neq 0$, donde $1 \leq i \leq s$.

Así que, $c_1 B_1 + c_2 B_2 + \cdots + c_s B_s = 0$, a pesar de que algún $c_i \neq 0$. Por tanto, $\{B_1, \dots, B_s\}$ es linealmente dependiente. Pero esto es absurdo, ya que es linealmente independiente. Por tanto, no podemos suponer que $s > n$, con lo cual, $s \leq n$.

■

COROLARIO

Si dos conjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ y $\{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ son bases de un espacio V , entonces $p = s$.

DEMOSTRACIÓN

Llamemos $G = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ y $H = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ como ambos conjuntos son base de V , razonamos así:

- a) $\langle G \rangle = V$ (G genera a V) y H es linealmente independiente, por tanto, $s \leq p$.
- b) $\langle H \rangle = V$ (H genera a V) y G es linealmente independiente, por tanto, $p \leq s$.

De a) y b) se sigue que $p = s$, tal como queríamos probar.

Obsérvese que el corolario muestra que la dimensión de un espacio finito es única; es decir, si el espacio V posee dimensión finita, otra base de V también es finita, esto es, no puede ser infinito.



DEFINICIÓN

Un espacio V se dice de dimensión r , si tiene una base de r vectores, y escribimos $\dim(V) = r$.

En este caso, se dice que el espacio es finito.

TEOREMA

Sea V un espacio de dimensión finita, y sea $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ linealmente independiente, entonces existen vectores $A_{s+1}, \dots, A_n$ tales que $\{A_1, \dots, A_s, A_{s+1}, \dots, A_n\}$ es una base de V .

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $G = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ es linealmente independiente; si $\langle G \rangle = V$, entonces G es base de V , y en este caso, no hay nada que probar.

Si G no genera a V , existe un vector A_{s+1} , tal que, $A_{s+1} \notin \langle G \rangle$; por tanto, por teorema anterior, $G \cup \{A_{s+1}\}$ es linealmente independiente.

Ahora, si $\langle G \cup \{A_{s+1}\} \rangle = V$, la demostración terminaría; si esto no ocurre, existe un vector $A_{s+2} \in V$, tal que, $G \cup \{A_{s+1}, A_{s+2}\}$ es linealmente independiente.

Sucesivamente se puede agregar vectores, de manera que:

1. El conjunto obtenido es linealmente independiente.
2. Si el conjunto obtenido no genera a V , se puede agregar otro vector. Pero V es finito, así existe un conjunto finito, digamos de r generadores, y como los conjuntos obtenidos son linealmente independientes, por teorema anterior no pueden tener más de r vectores; esto indica que el proceso termina en alguna parte. Esto demuestra el teorema.



COROLARIO

Si V es un espacio no nulo, de dimensión finita, V tiene al menos una base.

DEMOSTRACIÓN

Si V es un no nulo, existe un vector $A_1 \neq 0$.

Por teorema anterior, $\{A_1\}$ es linealmente independiente. De aquí en adelante, es válido el teorema anterior.

TEOREMA

Si V es un espacio tal que, $\dim(V) = r$, todo conjunto linealmente independiente de r vectores de V , es una base de V .

DEMOSTRACIÓN

Como $\dim(V) = r$, existe una base $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$.

Supongamos que $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ es linealmente independiente en V ; por teorema anterior. podemos ampliarlo hasta conseguir una base de V ; pero, por corolario¹, toda base de V posee r vectores; así que, $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$, no necesita ser ampliado, es decir, es una base de V .

Por lo que se había visto en los teoremas anteriores construir bases para un espacio finito (de dimensión finita), es una tarea sencilla.

■

EJEMPLO

Construir una base para $\mathbb{R}^2$.

Es sabido que $\{(1,0), (0,1)\}$ es la base canónica de este espacio vectorial.

De modo que, por un corolario anterior, cualquier base debe contener exactamente dos (2) vectores.; por el último teorema demostrado, dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$, forman una base.

Pero bien, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, y es tal que, $(a,b) \neq (0,0)$, un teorema anterior ratifica que $\{(a,b)\}$ es linealmente independiente. Ahora, debemos escoger otro vector (c,d) , tal que (por teorema anterior) $(c,d) \notin \langle (a,b) \rangle$ para que el conjunto $\{(a,b), (c,d)\}$ sea, sin duda, linealmente independiente. Así que, debemos tomar $(c,d) \neq (ka, kb)$, $k \in \mathbb{R}$.

¹ Lo que se ha visto en los teoremas anteriores, construir bases para un espacio finito (de dimensión finita), es una tarea sencilla.

Por ejemplo, podríamos tomar $(c, d) = (ka, (k + 1)b)$, $k \in \mathbb{R}$, y de este modo, el conjunto $\{(a, b), (ka, (k + 1)b)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo, el conjunto $\{(2,3) (6,12)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$. Nótese que hemos hecho $k = 3$.

Si tomamos $k = 0$, se obtiene el conjunto $\{(2,3) (0,3)\}$ que, indudablemente es base de $\mathbb{R}^2$.

Se debe observar que, $(0,0)$ no puede aparecer en la base; así, se debe buscar restringir este caso. Por ejemplo, se debe evitar que $(a, b) = (1,0)$, es decir, evitar que $k = 0$, ya que, en este caso, $(k1, (k + 1)b) = (0 * 1, 1 * 0) = (0,0)$.

Puede demostrarse con relativa facilidad que en general, si $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ es una base de un espacio vectorial V , también lo es el conjunto $\{A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, \dots, A_1 + A_2 + \dots + A_r\}$.

EJEMPLO

Construir una base para $\mathbb{R}^3$.

Aquí, debemos recordar que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, dado que, el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Así, elegimos $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, tal que, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$; luego, (a, b, c) es linealmente independiente. Ahora bien, sea $(m, n, p) \notin \langle (a, b, c) \rangle$; así, el conjunto $\{(a, b, c), (m, n, p)\}$, es linealmente independiente.

Es decir, debemos escoger $(m, n, p) \neq \langle (ka, kb, kc) \rangle$, $k \neq 0, k \in \mathbb{R}$. Hemos escogido $k \neq 0$ para evitar riesgos; por ejemplo, podemos tomar $(m, n, p) = ((k - 1)a, (k + 1)b, (k + 2)c)$; así, se evita este tipo de riesgos.

De modo que, el conjunto $\{(a, b, c), ((k - 1)a, (k + 1)b, (k + 2)c)\}$ es linealmente independiente. Ahora se debe escoger.

$$(u, v, w) \notin \{(a, b, c), ((k-1)a, (k+1)b, (k+2)c)\}.$$

Es decir,

$$(u, v, w) \neq (xa, xb, xc) + (y(k-1)a, y(k+1)b, y(k+2)c); \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Esto es,

$$(u, v, w) \neq ([x + y(k-1)]a, [x + y(k+1)]b, [x + y(k+2)]c).$$

Por tanto, podemos escoger,

$$(u, v, w) \neq [x + y(k-1)]a, [x + y(k+1)]b, [x - y(k+2)]c$$

Veamos un caso particular:

Sí $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ y escogemos inicialmente $k = 1$, se tiene,

$$(m, n, p) = ((k-1)a, (k+1)b, (k+2)c) = (0, 4, 9).$$

Ahora, escojamos $x = 1$, $y = 1$, con lo cual,

$$(u, v, w) = ([1 - 1(4)]1, [1 + 1(2)]2, [1 + 1(5)]3) = (-3, 6, 18).$$

De este modo, el conjunto $\{(1, 2, 3), (0, 4, 9), (-3, 6, 18)\}$, es base de $\mathbb{R}^3$; únicamente bastaría probar que es linealmente independiente, hecho que queda demostrado en el proceso.

Sin embargo, si hacemos:

$$a(1, 2, 3) + b(0, 4, 9) + c(-3, 6, 18) = (0, 0, 0), \text{ se sigue que:}$$

$$a - 3c = 0$$

$$2a + 4b + 6c = 0$$

$$3a + 9b + 18c = 0$$

Y dado que el determinante del sistema de ecuaciones es cero, se sigue que: $a = 0, b = 0, c = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 18 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 18 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Ahora, preocupémonos exclusivamente de la dimensión de los espacios vectoriales, para el efecto recordemos la definición de Dimensión de Espacio Vectorial.

DEFINICIÓN

Un espacio V se dice de dimensión n , si tiene una base de n vectores y escribimos en ese caso $\dim(V) = n$. Se dice en este caso que V es un espacio finito. $\{0\}$ tiene dimensión cero.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y S un subespacio de V , entonces:

1. S tiene dimensión finita.
2. $\dim(S) \leq \dim(V)$.
3. $\dim(S) = \dim(V)$ si y solo si, $S = V$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una base de V y sea $H = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ linealmente independiente en S ; por tanto, también lo es en V , dado que $S \subset V$. Por esta razón, $\langle B \rangle = V$ y B es linealmente independiente. Por teorema anterior (B es generador y H es linealmente independiente), se sigue que, $r \leq n$.

Por otra parte, existen vectores $B_{r+1}, \dots, B_s$, tales que, $\{B_1, B_2, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_s\}$ es base de S , y por tanto, conjunto maximal en S ; esto implica que es linealmente independiente, por tanto, $r \leq n$; luego, $\dim(S) \leq \dim(V)$. Así, S tiene también dimensión finita.

($\Rightarrow$)

Si $\dim(S) = \dim(V)$, entonces existe una base de n vectores $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ para S ; pero n vectores de V , linealmente independientes son una base de V ; así, todo $A \in V$, es tal que, $A \in \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$; luego $V \subseteq S$, y como por hipótesis $S \subseteq V$, se sigue que $V = S$.

($\Leftarrow$)

Si $S = V$, es claro que $\dim(S) = \dim(V)$.

NOTA

Dado un espacio V de dimensión n , solo tiene un subespacio de dimensión n , que es el mismo V ; y un solo subespacio de dimensión cero, que es $\{0\}$.

Si $\dim(V) = n$, entonces tiene:

1 un subespacio de dimensión n

1 subespacio de dimensión 0

$\binom{n}{n-1}$ subespacios de dimensión $n-1$

$\binom{n}{n-2}$ subespacios de dimensión $n-2$

$\binom{n}{1}$ subespacios de dimensión 1

Es decir, en total posee 2^n tipos de subespacios.

COROLARIO

Si S y P son subespacios de un espacio V , entonces:

1. Si $S \subset P$; $\dim(S) \leq \dim(P)$.
2. Si $S \subseteq P$ y $\dim(S) = \dim(P)$, entonces, $S = P$.

DEMOSTRACIÓN

Esto es claro, dado que: si S_1 y S_2 son subespacios de V y $S_1 \subset S_2$, entonces S_1 es subespacio de S_2 .

■

DEFINICIÓN

Si $V = S \oplus P$, se dice que $S(P)$ es complemento de $P(S)$ respecto de V .

TEOREMA

Sean S y P subespacios de V , donde $\dim(P) = n$ y tales que $S \subset P$; entonces, existe por lo menos un complemento de S respecto a P .

DEMOSTRACIÓN

Como $\dim(P) = n$ y $S \subset P$, entonces $\dim(S) = r$ y tal que $r \leq n$; por tanto, existe una base para S de r vectores, $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ que es linealmente independiente en P ; como $r \leq n$, existen $\{A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_n\}$ tales que $\{A_1, A_2, \dots, A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_n\}$ es base de P . Por tanto, es linealmente independiente y genera a P .

Llamemos por W el subespacio $\langle \{A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_n\} \rangle$ y probemos que W es el complemento de S con respecto a P .

Llamemos $R = S + W$; así $R \supseteq S$ y $R \supseteq W$; además, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq R$, por tanto, $\langle \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \rangle \subseteq R$ ya que R es subespacio; luego, $R = P$, es decir, $R = P = S + W$.

Ahora bien, sea $A \in S \cap W$.

De este modo,

$$A = a_1A_1 + \cdots + a_rA_r$$

$$A = a_{r+1}A_{r+1} + \cdots + a_nA_n$$

De aquí, se sigue que:

$$0 = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_rA_r - a_{r+1}A_{r+1} - \cdots - a_nA_n.$$

Pero el conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es linealmente independiente, por tanto,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r - a_{r+1} = \cdots = a_n = 0.$$

Es decir, $A = 0$; con lo cual, $P = S \oplus W$.

COROLARIO

$$\dim(W) = \dim(P) - \dim(S).$$

DEMOSTRACIÓN

Vimos que $P = S \oplus W$, donde $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ es base de S y $\{A_{r+1}, \dots, A_n\}$ base de W .

Además, $\dim(P) = n$; así que, $n = \dim(P) = \dim(S) + \dim(W) = r + (n - r)$.

Esto es, $\dim(W) = n - r = \dim(P) - \dim(S)$; donde W es complemento de S , P es el espacio de referencia y S es un subespacio arbitrario de V .

TEOREMA

Si V es un espacio de dimensión finita y S_1, S_2 subespacios de V , entonces,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

DEMOSTRACIÓN

Como V es de dimensión finita, cualquier subespacio de V es de dimensión finita.

Como $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$, sea W complemento de $S_1 \cap S_2$; así que, $W \subseteq S_2$ y $S_1 \cap S_2 \subset S_2$; por lo cual, $W \oplus (S_1 \cap S_2) = S_2$. De este modo, $\dim(W) = \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$ (1).

Ahora probemos que W es complemento de S_1 respecto a $S_1 + S_2$.

Dado que, $W \cap S_1 \subseteq W \cap (S_1 \cap S_2)$ y $W \cap S_1 \subseteq W$, se tiene que, $W \cap S_1 \subseteq W \cap (S_2 \cap S_1) = \{0\}$; luego, $W \cap S_1 = \{0\}$ ya que son subespacios.

Por otra parte, $(S_2 \cap S_1) \subseteq S_1$; luego, $W + S_1 = W + S_1 + (S_2 \cap S_1) = [W + (S_2 \cap S_1)] + S_1 = S_2 + S_1$.

Así que,

$W + S_1 = S_2 + S_1$; y como $W \cap S_1 = \{0\}$, se sigue que, $W \oplus S_1 = S_2 + S_1$.

Por tanto,

$$\dim(W) = \dim(S_2 + S_1) - \dim(S_1) \quad (2).$$

Así, de (1) y (2), resulta,

$$\dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1 + S_2) - \dim(S_1).$$

Por tanto,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Este teorema se denomina *Teorema de la Dimensión*.

■

EJEMPLO

Sea el espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $S_1 = \langle \{(1,0,0), (0,1,0)\} \rangle$ y S_2 tal que, $S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b+c=0\}$.

Calcular $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$ y verificar el teorema anterior.

SOLUCIÓN

Es claro que $\dim(S_1) = 2$.

Preocupémonos ahora por encontrar una base para S_2 .

$$(1, -1, 0) \in S_2; (0, 1, -1) \in S_2 \text{ y } (1, 0, -1) \in S_2.$$

Es dado que $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ es linealmente independiente; en cambio, $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$ es linealmente dependiente.

Sea $(a, b, c) \in S_2$, así $a + b + c = 0$; mostremos que, $m(1, -1, 0) + n(0, 1, -1) = (a, b, c)$; así que, $(m, -m, 0) + (0, n, -n) = (a, b, c)$; esto es, $(m, -m + n, -n) = (a, b, c)$. De donde, $m = a, n = -c$ y $-m + n = b$; es decir, $-a - c = b$; o mejor, $a + b + c = 0$; lo que indica que, $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ genera a S_2 . Por tanto, $\dim(S_2) = 2$ (1)

Es claro ya que, geométricamente representa a un plano.

Busquemos ahora el subespacio $S_1 \cap S_2$, el cual está conformado por ternas $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tales que, $a + b + c = 0$, y $m(1, -1, 0) + n(0, 1, -1) = (a, b, c)$; ó sea que $(m, n, 0) = (a, b, c)$, de donde, debe ser el caso que, $c = 0, m = a, n = b$, tales que, $a + b = m + n = 0$.

$$\text{Luego } (S_1 \cap S_2) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + b = 0\}.$$

Resulta fácil comprobar que, $\{(1, -1, 0)\}$ es base de $(S_1 \cap S_2)$, y así, $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ (2).

Se debe observar que el conjunto $\{(1,0,0), (0,-1,0)\}$ no puede ser base, ya que, ninguno de los dos vectores está en $(S_1 \cap S_2)$.

Ahora calculemos $S_1 + S_2$; para ello, podemos trabajar *sumando* únicamente las bases.

Tenemos que la base de S_1 es $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ y la base de S_2 es $\{(1,-1,0), (0,1,-1)\}$.

Ocorre que, $(0,1,-1) \notin \{(1,0,0), (0,1,0)\}$, por tanto, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,-1)\}$ es linealmente independiente; y como $S_1 + S_2$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$, se tiene que, $\dim(S_1 + S_2) \leq 3$.

Luego, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,-1)\}$, es base de $S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 + S_2) = 3$; esto es, $(S_1 + S_2) = \mathbb{R}^3$.

Así, tenemos los siguientes resultados:

$$\dim(S_1 + S_2) = 3, \dim(S_1) = 2, \dim(S_2) = 2, \dim(S_1 \cap S_2) = 1.$$

Y como $3 = 2 + 2 - 1$, se sigue que,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

EJERCICIOS

En los problemas que siguen, verifique el Teorema de la Dimensión, calculando como se sobre entiende, $(S_1 + S_2)$ y $(S_1 \cap S_2)$.

- 1) Dado el espacio $\mathbb{R}^3$ y $S_1 = \langle \{(3,2,1), (1,2,3)\} \rangle$ y $S_2 = \langle \{(1,0,1), (0,1,0)\} \rangle$.
- 2) Dado $\mathbb{R}^3$ y $S_1 = \{(a, b, 0)/a = b\}$ y $S_2 = \{(a, b, c)/a + b = c\}$.
- 3) Dado $\mathbb{R}^3$ y $S_1 = \langle \{(1,4)\} \rangle$ y $S_2 = \langle \{(0,5)\} \rangle$
- 4) Mostrar que el conjunto de funciones de valor real, definidas sobre el intervalo $[0,1]$ y derivables un numero infinito de veces, es de dimensión infinita.

- 5) Demostrar que un espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita posee dimensión infinita.
- 6) A partir del conjunto $\{(1,1,1,1), (0,1,0,1), (1,0,2,0)\}$ construya una base para $\mathbb{R}^4$.
- 7) Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, son base de $P_2[x]$:
- a) $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$.
 - b) $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$.
 - c) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$.
 - d) $-4 + x + 3x^2, 6 + 3x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$.
- 8) Muestre que el conjunto formado por los siguientes vectores, no es una única base de $M_{2 \times 2}$:
- $$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$
- 9) Sea V el espacio generado por $V_1 = \cos^2 x, V_2 = \sin^2 x, V_3 = \cos 2x$:
- a) Muestre que, $S = \{V_1, V_2, V_3\}$ no es base de V .
 - b) Encuentre una base de V .
- 10) Determine la dimensión y encuentre una base del espacio solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:
- a) $x_1 + 2x_2 = 0$
 $x_2 + x_3 = 0$.
 - b) $x + y + z = 0$
 $3x + 2y - z = 0$.

c) $1x - 4y + z = 0$

$$4x + 8y - 3z = 0.$$

$$2x + y - 2z = 0.$$

- 11) Determine la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

a) Todos los vectores de la forma $(a, b, c, 0)$.

b) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d) , donde, $d = a + b, c = a - b$.

c) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d) , donde, $a = b = c = d$.

- 12) Sea $\{V_1, V_2, V_3\}$ base de un espacio V ; muestre que, $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una base de V , donde $A_1 = V_1, A_2 = V_1 + V_2$ y $A_3 = V_1 + V_2 + V_3$.

- 13) Para que valores de λ , los siguientes vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda \right) \right\}.$$

- 14) Determinar la dimensión de la suma de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$, donde:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = z\}.$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}.$$

NOTA

$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$, conclusión lógica del teorema respectivo, dado que, $\dim(\{0\}) = 0$.

1.14 COORDENADAS DE UN VECTOR

Sea V un espacio vectorial de dimensión n ($\dim(V) = n$) y sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una base de V . De este modo, probamos que, si $A \in V$, existen unos únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en el cuerpo K , tales que, $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n = A$.

Esto nos dice que, una vez fijada una base para V , cualquier vector $A \in V$ se representa de manera única en el espacio generado por su base.

Si consideramos la base ordenada, podemos interpretar los escalares como una n -upla ordenada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, para cada vector $A \in V$.

Obsérvese que, como la base de V posee n vectores, esta puede ordenarse de $n!$ maneras; así que, podríamos encontrar $n!$ n -uplas ordenadas para interpretar a un mismo vector; por esto, solo se toma una base ordenada fija.

La n -upla ordenada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ se llama vector coordenado o solo coordenadas de A respecto a la base ordenada dada, y esta base se llama Base de Referencia.

Queda claro, por lo explicado con anticipación, que las coordenadas de un vector dependen de la base y del orden en que se han tomado los vectores de ésta.

EJEMPLO

Si en el espacio de las funciones continuas de variable real, tomamos el espacio generado por las funciones $\text{Sen}^2x, \text{Cos}^2x$, es fácil probar que, $\{\text{Sen}^2x, \text{Cos}^2x\}$ es una base de tal espacio.

Si fijamos ese orden de referencia, puede observarse que las coordenadas del vector $\text{Cos}2x$ son $(-1, 1)$. La función (1) , tiene como

coordenadas $(1,1)$; así que, para indicar un vector dadas todas las estipulaciones anteriores, es suficiente con indicar sus coordenadas.

Supongamos que se tienen los vectores A y B indicadas por sus coordenadas en una base. Entonces, al sumar estos vectores se forman sus coordenadas respectivas, y al multiplicar un vector por un número, todas sus coordenadas se multiplican por tal escalar.

Así, en el ejemplo anterior, si queremos expresar las coordenadas de $1 + \cos 2x$, sumamos *vectorialmente* $(-1,1) + (1,1) = (0,2)$; es decir, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$. Del mismo modo que, $5\cos 2x$, tiene como coordenadas a la dupla $(-5,5)$.

Si las coordenadas del vector A son $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, es usual escribir o determinar el vector A como $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Nótese que, en última instancia, hemos construido una función:

$T_B: V \rightarrow K^n$, de modo que, $T_B(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, donde queda especificado que V es el espacio, B su base, $A \in V$ y K^n , las n -uplas ordenadas sobre el cuerpo K ; y resulta obvio, por la conformación de K^n , que este es en sí mismo, un espacio vectorial definido sobre K y de dimensión finita. T_B se denomina Transformación Coordenada.

EJEMPLO

Calcular las coordenadas de un vector (a, b) respecto a las siguientes bases en el espacio $\mathbb{R}^2$:

- a) $\{(0,1)(1,1)\}$
- b) $\{(1,2)(1,1)\}$
- c) $\{(3,5)(-1,2)\}$

SOLUCIÓN

a) Buscamos m, n en $\mathbb{R}$, tales que, $m(0,1) + n(1,1) = (a,b)$; así que, $(n, m+n) = (a,b)$. De aquí, se obtiene: $n = a$ y $m = b - a$; por tanto, $(a,b) = (b-a, a)$.

b) Igualmente, $m(1,2) + n(1,1) = (a,b)$; así, que, $(m+n, 2m+n) = (a,b)$. De aquí se obtiene:

$$m+n = a; 2m+n = b; \text{ por lo cual, } m = b-a, n = 2a-b.$$

$$\text{Por tanto, } (a,b) = (b-a, 2a-b).$$

c) Se resuelve de modo similar a los dos casos anteriores.

EJEMPLO

Determinar el vector de coordenadas y la matriz de coordenadas de A relativos a

$S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Debemos buscar m, n, p, q en $\mathbb{R}$ tales que:

$$m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-m + n = 2$$

$$m + n = 0$$

$$p = -1$$

$$q = 3$$

De lo cual se obtiene que $n = 1; m = -1; p = -1; q = 3$.

Por lo tanto, el vector de coordenadas es $(-1, 1, -1, 3)$.

Queda verificado que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es base de $M_{2 \times 2}$, ya que:

$$\begin{aligned} -m + n &= 0 \\ m + n &= 0 \end{aligned} \Rightarrow m = n = 0.$$

$$p = 0; q = 0.$$

Esto es, $\dim(M_2) = 4; \dim(M_3) = 9$.

EJERCICIOS

Calcular las coordenadas del vector X con respecto a los vectores A, B, C :

a) $X = (1, 0, 0), A = (1, 1, 1), B = (-1, 1, 0), C = (1, 0, -1).$

b) $X = (1, 1, 1), A = (0, 1, -1), B = (1, 1, 0), C = (1, 0, 2).$

c) $X = (0, 0, 1), A = (1, 1, 1), B = (-1, 1, 0), C = (1, 0, -1).$

CAPÍTULO 2

TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ con la adición y multiplicación ya conocidas de los reales.

Consideremos ahora la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. Se observa, que $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Nos damos cuenta de que la operación interna definida en cada conjunto se preserva. Una aplicación f que satisface esta propiedad se llama un *Homomorfismo* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ respecto de sus correspondientes leyes de composición interna.

Vamos a generalizar esta idea. Sea las estructuras $(A, *)$ y (B, o) donde $*$ y o son leyes de composición interna en A y B respectivamente.

DEFINICIÓN DE HOMOMORFISMO

La función $f: A \rightarrow B$ es homomorfismo respecto de $*$ y o si y solo si, la imagen de la composición en A es igual a la composición de las imágenes en B ; es decir, sí y solo si:

$$f(a * b) = f(a)o f(b).$$

Esta igualdad brinda dos mecanismos para calcular la imagen, a saber:

- 1) Calcular primero $a * b$ luego su imagen por f .
- 2) Calcular $f(a)$, $f(b)$ y luego componentes por o .

CLASES DE HOMOMORFISMO

Sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo respecto de $*$ y o .

- 1) f es un MONOMORFISMO, si y solo si, f es inyectiva.
- 2) f es un EPIMORFISMO, si y solo si, f es sobreyectiva.
- 3) f es un ISOMORFISMO, si y solo si, f es biyectiva.
- 4) f es un ENDOMORFISMO, si y solo si, $A = B$.
- 5) f es un AUTOMORFISMO, si y solo si, f es un endomorfismo biyectivo; es decir, si y solo si, f es endomorfismo e isomorfismo.

EJEMPLO

Sean los espacios vectoriales $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ y $(M_2, \oplus, \odot)$ y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2$, tal que:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & z \\ y & x + y \end{pmatrix}.$$

Probar si f es un homomorfismo.

SOLUCIÓN

Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) en $\mathbb{R}^3$, de este modo:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & z_1 + z_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ y_1 & x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ y_2 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Luego f es homomorfismo; ahora veamos a qué tipo de homomorfismo corresponde.

¿f es inyectiva?

Tenemos dos maneras de probar:

- a) Dos preimágenes distintas deben poseer imágenes distintas; o su contrarrecíproca.
- b) Dos imágenes iguales deben poseer dos preimágenes iguales; siempre resulta más útil esta segunda alternativa.

Sean,

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ y_1 & x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ y_2 & x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Por igualdad de matrices, y haciendo referencia al Principio de Identidad de los Objetos Matemáticos, se sigue que,

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2, x_1 + y_1 = x_2 + y_2.$$

Por tanto, $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$, tal como queríamos probar.

Por tanto, f es un MONOMORFISMO.

¿f es sobreyectiva?

Debemos probar que cualquier matriz de M_2 posee preimágenes en $\mathbb{R}^3$; es decir,

$$\text{si } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \text{ y } (x, y, z) \text{ en } \mathbb{R}^3$$

debe ser el caso que,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \text{ pero } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & z \\ y & x + y \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$x = a, z = b, y = c, d = x + y.$$

Se nota que esta última condición implica que $d = a + c$, hecho que no siempre se cumple; por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ no posee preimágenes. Luego f no es sobreyectiva.

Nótese que f no puede ser ENDOMORFISMO y menos AUTOMORFISMO.

EJEMPLO

Consideremos las estructuras $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

Probar que $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ es un ISOMORFISMO.

SOLUCIÓN

Inicialmente probemos que f es homomorfismo respecto de " $\cdot$ " y "+".

Tomemos x, y en $\mathbb{R}^+$; así, $xy \in \mathbb{R}^+$, luego $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (propiedad de logaritmos); por tanto, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y) = f(xy)$.

Luego, f es homomorfismo.

¿f es inyectiva?

Sean $f(a') = f(b)$ dos imágenes, donde $a' \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$; así, $\log_a a' = \log_a b$; y como $a = a$, se sigue que,

$$a^{\log_a a'} = a^{\log_a b}, \text{ lo que implica que } a' = b.$$

Por tanto, f es un monomorfismo.

¿f es sobreyectiva?

¿Para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}^+$, tal que $\log_a x = y$?

De aquí se sigue que, $x = a^y$, y como $a \in \mathbb{R}^+$, f es sobreyectiva.

Por tanto f es epimorfismo.

Dado que, f es monomorfismo y epimorfismo, f es isomorfismo.

EJERCICIOS

- 1) Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ tal que $f(x) = \text{sign}(x)$ es monomorfismo respecto de la multiplicación de ambos conjuntos.
- 2) Sea $(\mathbb{R}, \cdot)$ y $n \in \mathbb{N}$; probar que $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^n$ es automorfismo si n es impar.
- 3) Sea M_n el conjunto de las matrices cuadradas y sea $f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) = \det(A)$. Probar que f es homomorfismo y epimorfismo respecto de la multiplicación en ambos conjuntos.
- 4) Sean $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}_n, +)$ donde $\mathbb{Z}_n = \{kn/k \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $g_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, tal que, $g_n(x) = nx$ es un isomorfismo.

NOTA

Por la definición de homomorfismo, estos CONSERVAN LAS ESTRUCTURAS del dominio y del codominio; por lo tanto, un homomorfismo de ESPACIOS VECTORIALES debe ser una función que conserve las dos operaciones que definen la estructura de espacio vectorial.

DEFINICIÓN DE TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $(K, +, \cdot)$.

La función $f: V \rightarrow W$ es una Transformación Lineal u homomorfismo, si y solo si,

- 1) La imagen de la suma de vectores en V es igual a la suma de las imágenes en W ; es decir, $f(A + B) = f(A) \oplus f(B)$.
- 2) La imagen del producto de cualquier escalar para todo vector de V , es igual al producto del escalar por la imagen del vector en W ; es decir,

$$f(\alpha A) = \alpha \odot f(A).$$

La clasificación de homomorfismo de espacios vectoriales es idéntica a la vista con anterioridad.

NOTA

En lo que sigue, se evita escribir $\oplus$ y $\odot$, y en su lugar, se señala " + " y " $\cdot$ ". Se debe entender que $(V, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ son espacios distintos y por ende sus operaciones tienen distintas reglas de formación.

EJEMPLOS

1. Sean los espacios $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

La función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que, $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$ es una transformación lineal.

SOLUCIÓN

a) Si (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) pertenecen a $\mathbb{R}^3$, entonces,

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= \\ &= ((x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2), (x_1 + y_1) \\ &\quad + (x_2 + y_2)) = \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_1 + y_1) + (x_2 + y_2 + z_2, x_2 + y_2) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

b) Si (x, y, z) esta en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned} f(k(x, y, z)) &= f(kx, ky, kz) = (kx + ky + kz, kx + kz) = \\ &= k(x + y + z, x + y) = kf(x, y, z). \end{aligned}$$

De a) y b), se concluye que, f es homomorfismo.

¿f es inyectiva?

Obsérvese que, $(1,2,3) \neq (0,3,3)$ en $\mathbb{R}^3$, y sin embargo, $f(1,2,3) = f(0,3,3) = (3,3)$.

Por tanto, f no es inyectiva.

¿f es subyectiva?

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ debe existir (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y) = (a,b)$ hecho que es obvio; suficiente con tomar $z = a - b$, $x + y = b$. Es más, existen infinitas ternas que poseen como imagen a través de f a la pareja (a,b) , dado que la ecuación $x + y = b$ (ecuación de una recta) posee infinitas soluciones.

Esto nos indica que f es EPIMORFISMO.

2. Sean los espacios vectores $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (y,z)$. Probar que f es epimorfismo de espacios vectoriales.

SOLUCIÓN

En efecto,

$$\begin{aligned} \text{a) } f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= (y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (y_1, z_1) + (y_2, z_2) = f(x_1, y_1, z_1) + \\ &+ f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(k(x, y, z)) = f(kx, ky, kz) = (ky, kz) = k(y, z) = kf(x, y, z).$$

De a) y b), se concluye que f es homomorfismo.

c) *¿f es inyectiva?*

f NO es inyectiva ya que $(1,2,3) \neq (5,2,3)$, sin embargo, $f(1,2,3) = f(5,2,3) = (2,3)$.

El lector debe observar aquí, que un solo ejemplo es suficiente para demostrar un hecho negativo, pero un resultado positivo requiere de una demostración general.

d) ¿f es sobreyectiva?

f es sobreyectiva, ya que, toda pareja (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tiene al menos una preimagen en $\mathbb{R}^3$, de la forma $(0, a, b)$. Obviamente hay infinitas ternas que tienen como imagen a (a, b) y son de la forma (k, a, b) , donde $k \in \mathbb{R}$.

De lo anterior, se concluye que f es epimorfismo de espacios vectoriales, pero no monomorfismo.

3. Sea $V = C[0,1]$ el espacio de las funciones continuas de variable real definidas en $[0,1]$ y sea W el subespacio de $C[0,1]$ de todas las funciones reales con primera derivada continua sobre el intervalo $[0,1]$; y sea $D: W \rightarrow V$, tal que, $D(f) = f'$. Entonces D es una transformación lineal.

SOLUCIÓN

En efecto,

- 1) Si f y g están en W , por propiedades de la derivada, se tiene que,

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$
- 2) $D(kf) = (kf)' = kf' = kD(f).$

¿D es inyectiva?

D NO es inyectiva, dado que, por ejemplo, $f(x) = 5$ y $g(x) = 3$ son tales que,

$f'(x) = 0$ y $g'(x) = 0$, sin embargo, $f(x) \neq g(x)$.

Es más, si $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 5$, es evidente que $f(x) \neq g(x)$; sin embargo, $f'(x) = g'(x)$.

¿D es sobreyectiva?

D es sobreyectiva ya que si $f \in V$ existe una función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, tal que, $F'(x) = f(x)$.

Por lo tanto, D es epimorfismo. F es primitiva de $f(x)$.

4. Sea el espacio $V = C[0,1]$ y sea $I:V \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que, $I(f) = \int_0^x f(x)dx$.

Probar que I es una transformación lineal.

SOLUCIÓN

Esto también es claro, ya que,

$$1) I(f + g) = \int_0^1 [f(x) + f(g)] dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = I(f) + I(g).$$

$$2) I(kf) = \int_0^1 kf(x)dx = k \int_0^1 f(x)dx = kI(f).$$

3) f NO es inyectiva, ya que, por ejemplo, $\text{Sen}\pi x \neq (x + 1)$, sin embargo,

$$\int_0^1 \text{Sen}\pi x dx = \int_0^1 (x + 1) dx = 2.$$

4) f es sobreyectiva, ya que, para todo real r existe la función:

$$f(x) = r, \text{ tal que, } \int_0^1 r dx = r \int_0^1 dx = rx|_0^1 = r.$$

Por tanto f es epimorfismo.

Estos dos últimos ejemplos, muestran que, los operadores diferenciales e integrales, en general, son transformaciones lineales.

5. Sea $A_{m \times n}$ una matriz fija con elementos en $\mathbb{R}$, entonces podemos definir la transformación:

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que, $T(X) = AX$, donde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, definida así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta es con toda evidencia una transformación lineal, ya que, por propiedades de la multiplicación de matrices (obsérvese que este es un caso particular de ella), se tiene que,

$$A(B + C) = AB + AC \text{ y } A(kB) = k(AB).$$

Cuando las operaciones definidas son compatibles, a las transformaciones de esta índole se las llama TRANSFORMACIONES MATRICIALES. En general, estas transformaciones son epimorfismos.

Como un caso especial del ejemplo anterior, sea θ un ángulo fijo y sea

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la multiplicación por la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; de este modo, siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ocurre que,

$$T(X) = A \cdot X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

T es una transformación lineal, ya que:

$$\begin{aligned}
 T(X_1 + X_2) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)\cos\theta - (y_1 + y_2)\sin\theta \\ (x_1 + x_2)\sin\theta + (y_1 + y_2)\cos\theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2\cos\theta - y_2\sin\theta \\ x_2\sin\theta + y_2\cos\theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 &= T(X_1) + T(X_2).
 \end{aligned}$$

$$T(kX) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = kT(X).$$

Así, que T es una transformación lineal.

La anterior transformación, se denomina ROTACIÓN de $\mathbb{R}^2$ en un ángulo de θ .

6. Sea V un espacio vectorial, y sea una función $f: V \rightarrow V$, tal que, $f(A) = A$. Es obvio que esta es una transformación lineal; es más, es un isomorfismo y se llama transformación identidad.

7. Sean V y W dos subespacios vectoriales y la transformación $f: V \rightarrow W$, tal que, $f(A) = 0$ ($0 \in W$). f es una transformación lineal, se denomina Transformación Nula (o Transformación Cero).

En efecto,

- 1) $f(A + B) = 0 = 0 + 0 = f(A) + f(B)$.
- 2) $f(kA) = 0 = k0 = kf(A)$.

Obviamente, f no es inyectiva ni sobreyectiva; sería sobreyectiva si $W = \{0\}$.

8. Sea V un espacio vectorial y k fijo en K , es evidente que $f: V \rightarrow V$ tal que $f(A) = kA$ es transformación lineal.

En efecto,

$$1) f(A + B) = k(A + B) = kA + kB = f(A) + f(B).$$

$$2) f(aA) = k(aA) = a(kA) = af(A).$$

Si $k \neq 0$ se puede probar que f es isomorfismo, y si $k = 1$, f es la transformación identidad.

9. Sea el espacio $P_2[x]$ y definamos:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + b) + (b + c)x + (a + c)x^2.$$

Entonces $f: P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ es transformación lineal.

En efecto, si tomamos $(a + bx + cx^2)$ y $(m + nx + px^2)$ en $P_2[x]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & f[(a + bx + cx^2) + (m + nx + px^2)] \\ &= f[(a + m) + (b + n)x + (c + p)x^2] = \\ &= (a + m + b + n) + (b + n + c + p)x + [(a + m) + (c + p)]x^2 \\ &= \\ &= [(a + b) + (b + c)x + (a + c)x^2] \\ &\quad + [(m + n) + (n + p)x + (m + p)x^2] = \\ &= f(a + bx + cx^2) + f(m + nx + px^2). \end{aligned}$$

Del mismo modo se verifica el cumplimiento del producto externo que debe satisfacer un espacio vectorial.

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Si V y W espacios vectoriales, denotaremos por O_v y O_w los vectores cero de V y W , respectivamente.

TEOREMA

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal de espacios vectoriales, entonces,

$$f(O_v) = O_w \text{ y } f(-A) = -f(A), \text{ para todo } A \in V.$$

DEMOSTRACIÓN

Si $A \in V$, $A + O_v = A$; es obvio que, $f(A + O_v) = f(A) + f(O_v) = f(A) + O_w$, esto, dado que, f es homomorfismo; y como el cero de W es único, se cumple que $f(O_v) = O_w$.

$f(-A) = f((-1)A) = (-1)f(A) = -f(A)$, esto, dado que, f es homomorfismo de espacios vectoriales.

■

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, W un espacio vectorial arbitrario, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ base de V y $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ un conjunto arbitrario de elementos de W . Entonces, existe una única transformación lineal $f: V \rightarrow W$, tal que,

$$f(A_1) = Z_1, f(A_2) = Z_2, \dots, f(A_n) = Z_n.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $A \in V$, entonces existe un único conjunto ordenado de escalares $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tal que, $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n$. De este modo, se puede definir: $f(A) = a_1Z_1 + a_2Z_2 + \dots + a_nZ_n$.

Inicialmente, probemos que f es una transformación lineal.

1) Sean A y B en V , entonces,

$$A = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$$

$$B = b_1B_1 + b_2B_2 + \cdots + b_nB_n$$

Así, que,

$$A + B = (a_1 + b_1)A_1 + (a_2 + b_2)A_2 + \cdots + (a_n + b_n)A_n.$$

Lo que indica que,

$$\begin{aligned} f(A + B) &= (a_1 + b_1)Z_1 + (a_2 + b_2)Z_2 + \cdots + (a_n + b_n)Z_n = \\ &= (a_1Z_1 + a_2Z_2 + \cdots + a_nZ_n) + (b_1Z_1 + b_2Z_2 + \cdots \\ &\quad + b_nZ_n) = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

2) Si $A \in V$ y $k \in K$, entonces

$$A = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$$

De donde,

$$kA = ka_1A_1 + ka_2A_2 + \cdots + ka_nA_n = k(a_1Z_1 + a_2Z_2 + \cdots + a_nZ_n).$$

Por tanto, $f(kA) = kf(A)$.

Ahora, probemos la unicidad de f .

Sea $g \neq f$ otra transformación lineal que satisface las condiciones del teorema; así, para todo $A \in V$, $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$.

Se sigue que,

$$f(A) = a_1f(A_1) + a_2f(A_2) + \cdots + a_nf(A_n) = a_1Z_1 + a_2Z_2 + \cdots + a_nZ_n;$$

$$\begin{aligned} g(A) &= a_1g(A_1) + a_2g(A_2) + \cdots + a_ng(A_n) \\ &= a_1Z_1 + a_2Z_2 + \cdots + a_nZ_n. \end{aligned}$$

Luego, $f(A) = g(A)$ para todo A en V .

Así, que f y g poseen igual dominio, igual codominio y toman los mismos valores, lo que indica que $f = g$. Luego, no se puede suponer que $f \neq g$, porque se llega a $f = g$, que constituye una contradicción.

Por tanto, no se puede pensar que exista otra transformación lineal que satisfaga los requerimientos del teorema, y así, f es *única*.

El lector debe recordar la costumbre matemática de demostrar un teorema de unicidad con el gambito útil de la Demostración por Reducción al Absurdo, también llamado Demostración por Contradicción.

■

TEOREMA

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal,

- 1) Si S es subespacio de V , entonces $T(S)$ es subespacio de W .
- 2) Si $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ genera a S , entonces $G_S = \{T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)\}$ genera $T(S)$.

DEMOSTRACIÓN

Recordemos que $T(S) = \{T(A)/A \in S\}$.

Parte 1:

Sean $B_1 = T(A_1)$ y $B_2 = T(A_2)$, donde A_1 y A_2 están en S ; es decir, B_1 y B_2 están en $T(S)$.

Ahora, sean a y b escalares en K , debemos probar que, $aB_1 + bB_2$ están en $T(S)$.

Dado que T es un homomorfismo lineal, se tiene que,

$$\begin{aligned} aB_1 + bB_2 &= aT(A_1) + bT(A_2) = T(aA_1) + T(bA_2) \\ &= T(aA_1 + bA_2). \end{aligned}$$

Pero A_1 y A_2 están en S , que es subespacio de V ; así que, $(aA_1 + bA_2) \in S$, y de este modo, $T(aA_1 + bA_2) \in T(S)$.

Luego $(aB_1 + bB_2) \in T(S)$.

Esto es, $T(S)$ es subespacio de W ya que $T(S) \subseteq W$.

Parte 2:

Para todo $B \in T(S)$, existe $A \in S$, tal que, $T(A) = B$; pero $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ genera a S . De este modo, $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n$ para algunos escalares $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ en K .

Por tanto,

$$\begin{aligned} T(A) &= B = T(a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n) \\ &= T(a_1A_1) + T(a_2A_2) + \dots + T(a_nA_n) = \\ &= a_1T(A_1) + a_2T(A_2) + \dots + a_nT(A_n) = B. \end{aligned}$$

Como esto ocurre para todo $B \in T(S)$, resulta que, $G_s = \{T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)\}$ genera a $T(S)$.

Esto demuestra completamente el teorema.

■

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, el *núcleo* de V o núcleo de T , denotado por $\text{Ker}(T)$, es el conjunto de todos los vectores A de V , tales que $T(A) = O_w$ (Figura 5).

Es decir,

$$\text{Ker}(T) = \{A \in V / T(A) = O_w\}.$$

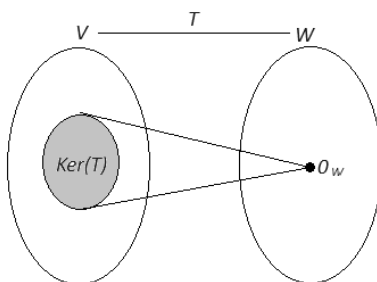


Figura 5. Núcleo de una Transformación Lineal

Fuente: elaboración propia

Esta definición indica que, $A \in \text{Ker}(T)$, si y solo si, $T(A) = 0_W$.

DEFINICIÓN

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal; se llama *imagen* de T , denotada por $\text{Im}(T)$, al conjunto de todos los vectores $B \in W$ que son imagen de al menos un vector de V (Figura 6).

Es decir,

$$\text{Im}(T) = \{B \in W / T(A) = B, A \in V\}.$$

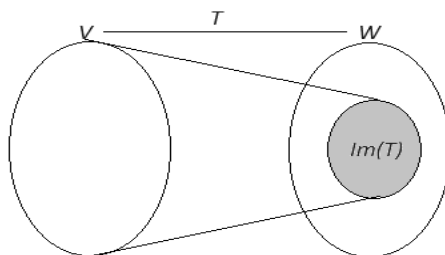


Figura 6. Imagen de una Transformación Lineal

Fuente: elaboración propia

EJEMPLOS

1. Sea $T: V \rightarrow W$ una Transformación Nula, de este modo, resulta fácil ver que,

$$\text{Ker}(T) = V; \text{Im}(T) = \{O_w\}.$$

2. Sean los espacios $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que,

$$f(x, y, z) = (x - z, y - z).$$

De este modo,

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\};$$

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - z, y - z) = (0, 0)\}.$$

De aquí, se sigue, $x - z = 0$; $y - z = 0$; es decir $x = y = z$; luego,

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}.$$

Así, por ejemplo, $(\pi, \pi, \pi) \in \text{Ker}(f)$.

También ocurre que $\text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \text{existe } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 f(a, b, c) = (x, y)\}$.

De allí, se sigue que, $a - b = x$, $b - c = y$; sistema de ecuaciones que posee infinitas soluciones. De modo que, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

De las definiciones de imagen y núcleo, se tiene que,

- 1) $\text{Ker}(T) = V$.
- 2) $\text{Ker}(T) \neq 0$ ya que $T(O_v) = O_w$; es decir, al menos $O_v \in \text{Ker}(T)$.
- 3) $\text{Im}(T) \subset W$.
- 4) $\text{Im}(T) \neq 0$, ya que $T(O_v) = O_w$; esto es, dado que al menos $O_v \in V$, ocurre que $O_w \in \text{Im}(T)$.

TEOREMA

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces $Ker(T)$ es subespacio de V e $Im(T)$ es subespacio de W .

DEMOSTRACIÓN

Inicialmente, probemos que, $Ker(T)$ es subespacio de V .

Sabemos que $Ker(T) = \{A \in V / T(A) = O_w\}$; así que, por definición, se sigue que, $Ker(T) \subset V$.

Ahora, sean A_1 y A_2 en $Ker(T)$ a_1 y a_2 escalar en K .

Como $A_1 \in Ker(T)$ y $A_2 \in Ker(T)$ es claro que, $T(A_1) = O_w$ y $T(A_2) = O_w$; y como T es transformación lineal, podemos escribir:

$$T(a_1A_1 + a_2A_2) = a_1T(A_1) + a_2T(A_2) = a_1O_w + a_2O_w = O_w.$$

Así que, $(a_1A_1 + a_2A_2) \in Ker(T)$; por tanto, $Ker(T)$ es subespacio de V .

Ahora, mostremos que $Im(T)$ es subespacio de W .

Como $Im(T) = \{B \in W / T(A) = B \text{ para algún } A \in V\}$, y además, $Im(T) \neq \emptyset$, queda claro que $Im(T) \subset W$.

Ahora bien; sean B_1, B_2 en $Im(T)$ y a_1 y a_2 escalares en K ; existen, por lo tanto, existen vectores A_1, A_2 en V tales que, $T(A_1) = B_1$ y $T(A_2) = B_2$. Como V es espacio vectorial, $(a_1A_1 + a_2A_2) \in V$, y como T es transformación lineal, $T(a_1A_1 + a_2A_2) = a_1T(A_1) + a_2T(A_2) = a_1B_1 + a_2B_2$.

Es decir, $(a_1B_1 + a_2B_2) \in Im(T)$; lo cual demuestra que $Im(T)$ es subespacio de W .

■

TEOREMA

Si S es un subespacio de un espacio vectorial V , de dimensión finita, entonces existe una transformación $T: V \rightarrow V$, tal que $\text{Ker}(f) = S$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\dim(V) = n$.

Como $S \subseteq V$, entonces existe un conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ base de S , tal que $r \leq n$. En particular, son linealmente independientes en V , y por tanto, se pueden completar para formar una base de V .

Así, existen vectores $B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n$ tales que $\{A_1, A_2, \dots, A_r, B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n\}$ es base de V .

De modo que, todo vector X de V , es tal que,

$$X = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_r A_r + a_{r+1} B_{r+1} + \dots + a_n B_n$$

Definamos $f: V \rightarrow V$, de modo que, $f(X) = a_{r+1} B_{r+1} + \dots + a_n B_n$.

Como $\{B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n\} \subset \{A_1, A_2, \dots, A_r, B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n\}$ que es linealmente independiente en V , ocurre que, $\{B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n\}$ es linealmente independiente; lo que indica que, $f(X) = 0_v$ únicamente cuando $a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_n = 0$.

En otras palabras, si algún $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$ es distinto de cero, $f(X) \neq 0$; sin embargo, para todo $y \in S, y \in V$, $y = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_r A_r + 0 B_{r+1} + 0 B_{r+2} + \dots + 0 B_n$; de este modo, $f(y) = 0 B_{r+1} + 0 B_{r+2} + \dots + 0 B_n = 0$, lo que indica que $\text{Ker}(f) = S$, tal como se quería probar.

■

NOTAS

1. La construcción de la transformación que señala el teorema, no es única. Por ejemplo, si se elige en $\mathbb{R}^4$, $S = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0)\}$, a partir de allí podemos completar las bases $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ y $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (2,5,0,0), (-3,0,0,0)\}$ que determinan dos transformaciones lineales distintas (de acuerdo al teorema) de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$, para las cuales, su Kernel es S . Con esto queda comprobado que la transformación se liga de manera típica a la forma como se complete la base del espacio vectorial de definición.
2. Se observa que la función construida en el teorema anterior $Im(f)$, es el subespacio de V generado por el conjunto $\{B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_n\}$.

En el ejemplo anterior, también es fácil observar que $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$.

EJEMPLO

Consideremos el subespacio generado por $\langle (1,0,0,0) (0,1,0,0) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$; así, toda recta $A \in \mathbb{R}^4$, al completar su base canónica $\{(1,0,0,0) (0,1,0,0) (0,0,1,0) (0,0,0,1)\}$, es tal que, si $A = (x, y, z, u)$, entonces $A = x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + u(0,0,0,1)$.

De este modo, constituimos la función: $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, de modo que, $T(A) = z(0,0,1,0) + u(0,0,0,1)$.

Es decir, $T(A) = \{(0,0,z,u) \in \mathbb{R}^4 / z \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$.

Como todo vector B del subespacio $\langle (1,0,0,0) (0,1,0,0) \rangle$ es de la forma $(x, y, 0, 0)$, se hace evidente que, $T(x, y, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

En este caso, $\dim(Ker(T)) = 2$, y $\dim(Im(T)) = 2$; mientras que, $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

DEFINICIÓN

Si $f: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces $\dim(Ker(T))$ se denomina *nulidad* de T ; mientras que, $\dim(Im(T))$ se llama *rango* de T .

EJEMPLO

1. Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la rotación del plano de un ángulo $\frac{\pi}{4}$, es fácil observar que, $Im(T) = \mathbb{R}^2$; mientras que, $Ker(T) = \{0\}$; por tanto, T tiene rango 2 y nulidad cero.
2. En el ejemplo anterior que formamos sobre $\mathbb{R}^4$, la nulidad de T y el rango de T , es 2.

TEOREMA

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es un conjunto de generadores de V , entonces $\{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)\}$ es un conjunto de generadores de $Im(f)$.

NOTA

Este teorema se demostró con anterioridad, como propiedad de las transformaciones lineales.

TEOREMA

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal, y sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ en V . Si $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ son linealmente independientes en W , entonces $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es linealmente independiente en V .

DEMOSTRACIÓN

Formemos la combinación lineal: $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n = 0_v$; como $f(0_v) = 0_w$, se obtiene que, $a_1f(A_1) + a_2f(A_2) + \dots + a_nf(A_n) = 0_w$.

Pero, $\{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)\}$ es linealmente independiente en W , por lo cual, necesariamente, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Esto implica que, el conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es linealmente independiente en V .

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial n -dimensional; sea $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal de V en W , espacios vectoriales, entonces $\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$.

DEMOSTRACIÓN

Como $\dim(V) = n$, existe un conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ base de V . De este modo, por el teorema mostrado con anterioridad, el conjunto $\{T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)\}$ genera a $Im(T)$, que es subespacio de W . Esto indica que $Im(T)$ es un espacio de dimensión finita, y por ende, existe un conjunto $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ base de $Im(T)$ para las cuales, existen unos vectores $A'_1, A'_2, \dots, A'_p$ en V , de modo que, $T(A'_1) = B_1, T(A'_2) = B_2, \dots, T(A'_p) = B_p$; y por teorema demostrado anteriormente, $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_p\}$ es linealmente independiente en V ; así que, $\dim(Im(T)) = p$. Vimos además que, $Ker(T)$ es subespacio de V , por tanto, $\dim(Ker(T)) \leq n$.

Sea $m = \dim(Ker(T))$; luego, $m \leq n$.

Si $m = n$, T es la transformación cero, y la demostración se hace trivial.

Si $m = 0$, mostraremos más adelante que, T es isomorfismo, y en este caso, $\dim(V) = \dim(Im(T))$.

En el caso más general, $m < n$; así, existe una base $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ de $Ker(T)$.

Probemos, por tanto, que $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_p, V_1, V_2, \dots, V_m\}$ es base de V .

- a) Si $a_1A'_1 + a_2A'_2 + \dots + a_pA'_p + b_1V_1 + b_2V_2 + \dots + b_mV_m = O_v^*$, aplicando T , y como $T(V_i) = O_w$, para $i = 1, 2, \dots, m$; $T(O_v) = O_w$, y $T(A'_i) = B_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, se sigue que,

$a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_pB_p = O_w$; y dado que $Im(T)$ tiene como base a $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$, se sigue que, $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$; así, la ecuación * se traduce en:

$b_1V_1 + b_2V_2 + \dots + b_mV_m = O_v$; y como $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ es linealmente independiente por ser base de $Ker(T)$, se sigue que, $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Esto muestra que $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_p, V_1, V_2, \dots, V_m\}$ es linealmente independiente en V .

- b) Ahora, probemos que $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_p, V_1, V_2, \dots, V_m\}$ genera a V .

Sea $X \in V$, de este modo, $T(X) \in Im(T)$; por tanto, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_p$ tales que, $T(X) = a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_pB_p$, donde, como es sabido, $T(A'_i) = B_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Llamemos $A = X - (a_1A'_1 + a_2A'_2 + \dots + a_pA'_p)$; por tanto,

$T(A) = T(X) - (a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_pB_p) = O_w$; es decir, $A \in Ker(T)$; y como $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ es base de $Ker(T)$, $A = b_1V_1 + b_2V_2 + \dots + b_mV_m$ para algunos escalares $b_1, b_2, \dots, b_m$ en K .

Por tanto, $b_1V_1 + b_2V_2 + \dots + b_mV_m = X - (a_1A'_1 + a_2A'_2 + \dots + a_pA'_p)$.

De aquí, resulta que, $X = a_1A'_1 + a_2A'_2 + \cdots + a_pA'_p + b_1V_1 + b_2V_2 + \cdots + b_mV_m$; y así, $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_p, V_1, V_2, \dots, V_m\}$ genera a V , y es linealmente independiente en V ; es decir, es base de V .

C como $\dim(V) = n$, se sigue que, $n = p + m = m + p$.

Por tanto, $\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$.

■

NÚCLEO DE UN HOMOMORFISMO

TEOREMA

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal, f es inyectiva, si y solo si, $Ker(f) = \{O_v\}$.

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Supongamos que $f: V \rightarrow W$ es un monomorfismo.

Como $O_v \in Ker(f)$ dado que $f(O_v) = O_w$, es obvio que, $\{O_v\} \subset Ker(f)$ (a).

Pero si $A \in Ker(f)$, entonces $f(A) = f(O_v) = O_w$; y como f es inyectiva, $A = O_v$; es decir, $A \in \{O_v\}$ o mejor, $Ker(f) \subset \{O_v\}$ (b).

De (a) y (b), se tiene que $Ker(f) = \{O_v\}$.

($\Leftarrow$)

Ahora, supongamos que $Ker(f) = \{O_v\}$.

Sean A y B en V , tales que $f(A) = f(B)$; se sigue que, $f(A) - f(B) = O_w$; es decir, $f(A - B) = O_w$. Por tanto, $A - B = O_v$; de este modo, f es un monomorfismo.

■

EJEMPLOS

Consideremos la transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de modo que, $f(x, y, z, u) = (x + y, z - u)$. Determinemos una base para $Ker(f)$ y una para $Im(f)$.

SOLUCIÓN

Como $Ker(f) = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4: (x + y, z - u) = (0, 0)\}$; así, $x + y = 0, z - u = 0$; es decir, $x = -y; z = u$; de donde $(1, -1, 0, 0) \in Ker(f)$ y $\{(1, -1, 0, 0)\}$ es linealmente independiente en $Ker(f)$. Pero $(0, 0, 1, 1) \in Ker(f)$ y $(0, 0, 1, 1) \notin \langle \{(1, -1, 0, 0)\} \rangle$; luego, $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ es linealmente independiente en $Ker(f)$, y más aún, es base, hecho que se deduce de las condiciones $x + y = 0, z - u = 0$; así que, $\dim(Ker(f)) = 2$.

Calculemos una base de $Im(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y, z, u) = (a, b) \text{ para algún } (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4\}$.

Es obvio que, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son elementos de $Im(f)$.

Existen infinitas 4-nuplas que las tienen como imagen a cualquier par (a, b) . Como $Im(f)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$, se sigue que, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es base de $Im(f)$; luego, $\dim(Im(f)) = 2$.

Por tanto, $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$; en este caso, se verifica con exactitud.

EJEMPLOS

Consideremos la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que, $f(x, y, z) = (x - y + z, 0)$.

En este caso, $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - y + z, 0) = (0, 0)\}$.

Se sigue que, $x - y + z = 0$; por tanto, $(1, 1, 0), (1, 0, -1)$ están en $Ker(f)$; es más, se puede comprobar que forman una base; así, $\dim(Ker(f)) = 2$.

$Im(f) = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 / (x, y, z) = (0, 0) \text{ para algún } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$

Como la ecuación $x - y + z = 1$ posee infinitas soluciones, se hace evidente que, $\{(1, 0)\}$ es base de $Im(f)$; luego, $\dim(Im(f)) = 1$.

En este caso, también se observa que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$, ya que, $3 = 2 + 1$.

EJERCICIOS

- 1) Sean $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la multiplicación por $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. De los siguientes vectores, determinar los que pertenecen a $Im(T)$:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Y los que pertenecen a $Ker(T)$:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 2) Sea $T: P_2[x] \rightarrow P_3[x]$ transformación lineal definida como $T(p(x)) = xp(x)$. De los siguientes polinomios, determinar los que pertenecen a $Im(T)$ y a $Ker(T)$:

a) $x + x^2$

b) $1 + x$

c) $3 - x^2$

d) x^2

e) 0

f) $1 + x$

Verifique el Teorema de la Dimensión, en referencia a estos subespacios.

- 3) Sea V un espacio vectorial n -dimensional, encuentre el rango y la nulidad de cada transformación lineal $T: V \rightarrow V$, definida por:

a) $T(A) = A$.

b) $T(A) = 0$.

c) $T(A) = kA \quad k \neq 0$.

- 4) Determine la transformación lineal $T: P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ para la cual,
 $T(1) = 1 + x$,
 $T(x) = 3 - x^2$, y $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Calcular $T(1 - 2x + 3x^2)$ y $T(5 + 7x + 8x^2)$.

- 5) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la multiplicación por $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Demuestre que $Im(f)$ es un plano que pasa por el origen y determine su ecuación; además, demuestre que $Ker(T)$ es una recta que pasa por el origen y determine su ecuación paramétrica.

- 6) Sea $D: P_3[x] \rightarrow P_2[x]$ Transformación Diferenciación, de modo que $D(p) = p'$. Describa $Ker(D)$.
- 7) Sea $J: P_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$, la Transformación de Integración $I(p) = \int_0^1 p(x)dx$ describa el núcleo de I .

- 8) Sea la transformación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$. Determinar $Im(f)$ y $Ker(f)$ y calcular sus dimensiones.
- 9) Sea $V = C^n$, $W = C$ y $f(A) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, Demostrar que f es una transformación lineal y determinar el núcleo y la imagen.
- 10) Sea $V = C[0,1]$ y $T: V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $T(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Demostrar que T es transformación lineal y determinar el núcleo y la imagen de T .

EJEMPLO

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que asigna a los vectores de la base $\{(1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ los vectores $(2, 3), (1, 2), (2, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Determinar una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (x, y)$, de modo que:

$$f(1, -1, 1) = (2, 3); f(0, 1, 1) = (1, 2); f(1, 0, 0) = (2, 1).$$

SOLUCIÓN

Vemos que un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es tal que, en la base dada, se interpreta como:

$$(a, b, c) = m(1, -1, 1) + n(0, 1, 1) + p(1, 0, 0).$$

De donde, $a = m + p$; $b = -m + n$; $c = m + n$.

Así, que,

$$n = \frac{b + c}{2}; m = \frac{c - b}{2}; p = \frac{c - b}{2} + a = \frac{2a - c + b}{2}$$

Por tanto,

$$(a, b, c) = \frac{c - b}{2}(1, -1, 1) + \frac{b + c}{2}(0, 1, 1) + \frac{2a - c + b}{2}(1, 0, 0).$$

De este modo, y como f debe ser una transformación lineal, se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \frac{c-b}{2} f(1, -1, 1) + \frac{b+c}{2} f(0, 1, 1) + \frac{2a-c+b}{2} f(1, 0, 0) = \\
 &= \frac{c-b}{2} (2, 3) + \frac{b+c}{2} (1, 2) + \frac{2a-c+b}{2} (2, 1) = \\
 &= \left(\frac{2c-2b+b+c+4a-2c+2b}{2}, \frac{3c-3b+2b+2c+2a-c+b}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{4a+b+c}{2}, \frac{2a+4c}{2} \right) = \left(\frac{4a+b+c}{2}, a+2c \right).
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$f(a, b, c) = \left(\frac{4a+b+c}{2}, a+2c \right).$$

Observe que, tal como se pide, se cumple que:

$$f(1, -1, 1) = \left(\frac{4 \times 1 - 1 + 1}{2}, 1 + 2 \times 1 \right) = (2, 3);$$

$$f(0, 1, 1) = \left(\frac{4 \times 0 + 1 + 1}{2}, 0 + 2 \times 1 \right) = (1, 2);$$

$$f(1, 0, 0) = \left(\frac{4 \times 1 + 0 + 0}{2}, 1 + 2 \times 0 \right) = (2, 1).$$

EJERCICIOS

- 1) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 1) (1, 1, 0) (1, 0, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ encontrar la transformación lineal f tal que
 - a) $f(1, 1, 1) = 1, 2$ $f(1, 1, 0) = (1, 2)$ $f(1, 0, 0) = (-1, 1)$
 - b) $f(1, 1, 1) = (5, 3)$ $f(1, 1, 0) = (3, 2)$ $f(1, 0, 0) = (1, 0)$

TRANSFORMACIÓN MATRICIAL

Estudiemos detalladamente las transformaciones matriciales, en un intento, por ver si el rango y la nulidad de una transformación matricial, se puede obtener de cualquier forma escalonada de la matriz.

DEFINICIÓN

Los vectores columna de una matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, son los vectores $C_1, C_2, \dots, C_n$, que conforman las columnas de A :

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El subespacio de $\mathbb{R}^m$, generado por los vectores columna de la matriz A , se llama *espacio de las columnas de A* .

EJEMPLO

Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sus vectores columnas son $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y el espacio generado por ellos es $\mathbb{R}^2$.

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la multiplicación por una matriz $A_{m \times n}$ un vector $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ pertenece a $Im(T)$, si y solo si, $T(X) = B$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$. Esto equivale a decir, que el sistema $AX = B$ es consistente, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Produce el sistema,

[illegible]

Que puede escribirse como,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sistema que debe poseer solución y para que esto ocurra b debe ser la combinación lineal de los vectores columna de A . Este simple hecho ha mostrado el siguiente teorema

TEOREMA

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la multiplicación por una matriz $A_{m \times n}$, entonces la $Im(T)$ es el espacio de las columnas de A .

EJEMPLO

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la multiplicación por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar una base para $Im(T)$.

Hemos visto que, $Im(T)$ es generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Para ver si son linealmente independiente, escalonemos A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

que es la forma máxima de escalar la matriz. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

De este modo, se ve que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ son base de $Im(T)$.

(Este ejemplo, como queda explicado antes, puede remitirse a solución de sistemas de ecuaciones).

Por otra parte, se ve que, $\dim(\text{Im}(T)) = 3$; y es sabido que,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

De donde, se sigue que, $\text{Ker}(T) = \{(0,0,0)\}$.

En efecto, si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $(x, y, z) \in \text{Ker}(T)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$x - y = 0 \quad (1)$$

$$2x - y + 3z = 0 \quad (2)$$

$$-x + 3y + z = 0 \quad (3)$$

$$-2x + y + 4z = 0 \quad (4)$$

Así, que, $x - y = 0$;y de 2) y 3) se sigue que:

$$2x - y + 3z = 0$$

$$\underline{3x - 9y - 3z = 0}$$

$$5x - 10y = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$$

Así, $x - y = 0$; $x - 2y = 0$.

Por tanto, $x = y = 0$, que en la ecuación (4), produce $z = 0$; luego, si $(x, y, z) \in \text{Ker}(T)$, entonces $(x, y, z) = (0,0,0)$ como queríamos probar.

Es decir $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ lo que verifica la veracidad y validez del Teorema de la Dimensión.

■

En cursos anteriores, se define el rango de una matriz A como el orden de la mayor matriz (submatriz) de A , cuadrada, cuyo determinante es diferente de cero, y para lograr calcular el rango de la matriz es permitido efectuar transformaciones elementales por filas y columnas. Esto permite verificar la verdad del siguiente teorema, dado que el rango de la matriz es único.

TEOREMA

Sea A una matriz, entonces el espacio de las filas de A y el espacio de las columnas de A tienen la misma dimensión.

El teorema verifica cómo el rango de una Transformación Matricial es el número de renglones diferentes de cero en la forma escalonada de la matriz.

Nótese que rango de A es igual a $\dim(\text{Im}(T))$ donde T es la Transformación Matricial asociada a A .

El teorema se puede evidenciar tomando un par de transformaciones lineales

$T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $T_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por la multiplicación por A y A^T respectivamente, y calcular $\dim(\text{Im}(T))$ y $\dim(\text{Im}(T_1))$ en cada una.

EJEMPLO

Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la multiplicación por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y $T': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la multiplicación por:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Inicialmente, vemos que, $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene como espacio imagen al espacio generado por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para ello, escalonemos la matriz A^T :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

Ahora, calcularemos $\dim(\text{Im}(T'))$; para ello, debemos escalar la matriz A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ lo que indica que } \dim(\text{Im}(T')) = 3. \end{aligned}$$

En este caso, hemos visto que, $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\dim(\text{Im}(T)) = 3$; $\dim(\text{Im}(\mathbb{R}^4)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, lo que indica que, $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

En efecto, sea $(x, y, z, u) \in \text{Ker}(T)$.

Entonces,

$$x + 2y - z + 2u = 0$$

$$2x + 5y - 2z + 3u = 0$$

$$x + 2y + z + 2u = 0$$

Sistema equivalente a:

$$x + 4u = 0 \quad (1)$$

$$y - u = 0 \quad (2)$$

$$z = 0 \quad (3)$$

De (1) y (2), se sigue que, $x + 4y = 0$.

Por tanto, $(4, -1, 0, 0) \in \text{Ker}(T)$; y más aún, $\{(4, -1, 0, 0)\}$ es base de $\text{Ker}(T)$.

Todo esto ha probado, aunque no de una manera directa, que si $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación matricial, por la matriz fija $A_{n \times m}$, entonces $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\mathbb{R}^m) - \text{rango}(A)$ ya que característica de A es la dimensión del espacio Imagen de T .

Es claro, que debemos tener presente muchos conceptos y técnicas del Álgebra Matricial. tales como: la inversión de matrices, las transformaciones elementales, el concepto de determinantes y sus modos de cálculo (algoritmos). Todo esto brinda una mejor manera de comprender las transformaciones matriciales.

Un pequeño glosario de la intervención de estos conceptos, lo constituye el siguiente teorema.

TEOREMA

Sea A una matriz $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) A es inversible.
- b) $AX = 0 \quad X \in \mathbb{R}^n$ solamente posee la solución trivial.
- c) $A \sim I_n$ por renglones.
- d) $AX = B$ es consistente para cualquier $B \in \mathbb{R}^n$.

- e) $\det(A) \neq 0$.
- f) Los vectores fila de A son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.
- g) Los vectores columna de A son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIOS

- 1) En cada literal, la matriz A tiene la forma escalonada. Encuentre el rango y la nulidad de $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde T es la multiplicación por A .

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 2) Encuentre la nulidad y el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

- 3) Compruebe que tienen la misma dimensión, el espacio de los renglones y el espacio de las columnas de las matrices siguientes:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

4) En los siguientes literales, sea T la multiplicación por la matriz indicada, determine lo siguiente:

a) Una base para $Im(T)$.

b) Una base para $Ker(T)$.

c) Rango y nulidad de T .

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Construya transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfagan las condiciones que en cada caso se exponen a continuación. En casi todos los casos, existen infinitas transformaciones lineales que cumplen los requisitos expuestos.

a) Que $Ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = y = z\}$

b) Que $Ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = y\}$

- c) Que $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ y además $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$
- d) Que $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ y además $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$
- e) Que $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ y además $\text{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$
- f) Que $\text{Ker}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$ y además $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$
- g) Que $\text{Ker}(T)$ sea el plano determinado por la ecuación $2x + y - z = 0$
- h) Que $\text{Ker}(T)$ sea el plano determinado por la ecuación $2x + y - z = 0$ y la $\text{Im}(T)$ sea el eje X .
- i) Que $\text{Im}(T)$ sea el plano $3x - y + 2z = 0$.
- j) Que $\text{Ker}(T)$ sea el plano $3x - y + 2z = 0$.
- k) Que $\text{Im}(T)$ sea el plano coordenado $x = 0$.
- l) Que $\text{Ker}(T)$ sea el plano coordenado $x = 0$.
- m) Que $\text{Im}(T)$ sea la recta $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}$.
- n) Que $\text{Im}(T)$ sea la recta $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}$ y el $\text{Ker}(T)$ sea el plano coordenado $z = 0$.

CAPÍTULO 3

OPERACIONES CON TRANSFORMACIONES LINEALES

3.1 IGUALDAD, ADICIÓN Y PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES

3.1.1 Igualdad

Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; denotemos como $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $T: V \rightarrow W$.

Es decir,

$$\mathcal{L}: \{T: V \rightarrow W / T \text{ es Transformacion Lineal}\}.$$

Nuestro interés radica en indagar qué ocurre cuando se trabaja, ya no con una transformación lineal, sino con todas las transformaciones lineales posibles entre dos espacios vectoriales.

DEFINICIÓN

Sean T_1 y T_2 transformaciones lineales en $\mathcal{L}$.

$T_1 = T_2$, si y solo si, $T_1(A) = T_2(A)$ para todo vector A en V .

Se puede observar que la anterior definición es exactamente la misma de las funciones, hecho normal dado que, si $T \in \mathcal{L}$, entonces T , ante todo, es una función.

Dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y toman exactamente los mismos valores.

El lector, debe recordar de su curso de Fundamentos de Matemáticas, que esta ciencia, estudia en el fondo, cuatro clases de objetos: números, conjuntos, estructuras y funciones. Un curso de Álgebra Lineal, en consecuencia, estudia como estructuras los espacios vectoriales que están referidos a las estructuras de cuerpos, una clase especial de funciones que se llaman transformaciones lineales y todo se apoya en números, que ocasionalmente conforman arreglos matriciales.

3.1.2 Adición

DEFINICIÓN

Sean las transformaciones lineales T_1, T_2 en $\mathcal{L}$; llamaremos la suma de T_1 y T_2 , denotado por $T_1 + T_2$, a la función $T_1 + T_2: V \rightarrow W$, tal que $(T_1 + T_2)(A) = T_1(A) + T_2(A)$ para todo A en V .

El estudiante debe recordar que el “+” empleado en $T_1 + T_2$ es una simbología formal para las funciones, mientras que el “+” de $T_1(A) + T_2(A)$ corresponde a la adición de vectores del espacio W .

TEOREMA

La suma de dos transformaciones lineales de $\mathcal{L}$ es una transformación lineal de $\mathcal{L}$.

DEMOSTRACIÓN

Como $T_1 \in \mathcal{L}$ y $T_2 \in \mathcal{L}$, por definición $(T_1 + T_2) \in \mathcal{L}$.

Por otra parte, sean A y B vectores de V , entonces:

$(T_1 + T_2)(A + B) = T_1(A + B) + T_2(A + B)$, por definición.

$= (T_1(A) + T_1(B)) + (T_2(A) + T_2(B))$, ya que T_1 y T_2 son transformaciones lineales.

$= (T_1(A) + T_2(A)) + (T_1(B) + T_2(B))$, ya que W es espacio vectorial.

$= (T_1 + T_2)(A) + (T_1 + T_2)(B)$ (1), por definición de suma de transformaciones lineales.

Sean ahora, $A \in V$ y $k \in K$ de este modo:

$(T_1 + T_2)(kA) = T_1(kA) + T_2(kA)$, por definición de suma.

$= kT_1(A) + kT_2(A)$, ya que T_1 y T_2 son transformaciones.

$= k(T_1(A) + T_2(A))$, ya que W es espacio vectorial sobre k .

$= k[(T_1 + T_2)(A)]$ (2), por definición de suma.

(1) y (2) dicen que:

$$(T_1 + T_2)(A + B) = (T_1 + T_2)(A) + (T_1 + T_2)(B)$$

$$(T_1 + T_2)(kA) = k[(T_1 + T_2)(A)]$$

Por lo tanto, $(T_1 + T_2)$ es transformación lineal en $\mathcal{L}$.

■

3.1.3 Multiplicación Externa

DEFINICIÓN

Sea T una transformación lineal en $\mathcal{L}$ y sea α un escalar en K .

Se llama producto de α por T , denotado por αT a la función $\alpha T: V \rightarrow W$, tal que $(\alpha T)(A) = \alpha T(A)$ para todo A en V .

Debe observarse, como antes, que αT es una notación formal para la multiplicación externa de un escalar con una función, mientras que $\alpha T(A)$ es el producto escalar de α en K por el vector $T(A)$ en W .

TEOREMA

El producto de un escalar por una transformación lineal de $\mathcal{L}$, es una transformación lineal en $\mathcal{L}$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $T \in \mathcal{L}, \alpha \in K; A$ y B vectores en V .

De este modo,

$$(\alpha T)(A + B) = \alpha T(A + B) = \alpha[T(A) + T(B)] = \alpha T(A) + \alpha T(B).$$

De este modo,

$$(\alpha T)(A + B) = (\alpha T)(A) + (\alpha T)(B). \quad (1)$$

Ahora, sea $k \in K$ y $A \in V$, entonces,

$(\alpha T)(kA) = \alpha kT(A)$, ya que T es transformación lineal

$= k\alpha T(A)$, ya que T es transformación lineal

$= k(\alpha T)(A)$, por definición

Luego,

$$(\alpha T)(kA) = k(\alpha T)(A). \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que αT es transformación lineal en $\mathcal{L}$.

En este momento, podemos observar, que se han definido sobre el conjunto

$\mathcal{L}: \{T: V \rightarrow W / T \text{ es Transformación Lineal de espacios vectoriales}\}$ dos operaciones, la una de adición (Ley de Composición Interna) y la otra de multiplicación por un escalar (Ley de Composición Externa). Esto indica, en un nivel de abstracción más alto, que hemos tomado a estas funciones bajo el título de vectores.

Como es de esperarse, hemos conformado un nuevo espacio vectorial: el espacio de todas las transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales V y W .

Este resultado prueba el teorema que sigue.

TEOREMA

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y sea $\mathcal{L}: \{T: V \rightarrow W / T \text{ es Transformación Lineal}\}$; entonces $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre K .

El operador $+$ indica la adición entre transformaciones lineales definida anteriormente, y $\cdot$ es el producto escalar sobre el cuerpo K y el grupo conmutativo definido por $\mathcal{L}$.

DEMOSTRACIÓN

$\mathcal{L} \neq \emptyset$ ya que al menos se puede construir la transformación cero: $T_0: V \rightarrow W$, tal que $T_0(A) = O_w$ para todo A en V .

Mostremos ahora que $(\mathcal{L}, +)$ es un grupo abeliano.

1) Sean T_1, T_2, T_3 en $\mathcal{L}$; probemos que $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$.

En efecto, para todo $A \in V$ y teniendo en cuenta que W es espacio vectorial, se tiene que:

$$\begin{aligned} ((T_1 + T_2) + T_3)(A) &= (T_1 + T_2)(A) + T_3(A) \\ &= T_1(A) + T_2(A) + T_3(A) \\ &= T_1(A) + (T_2(A) + T_3(A)) \\ &= T_1(A) + (T_2 + T_3)(A) = \\ &= (T_1 + (T_2 + T_3))(A). \end{aligned}$$

Luego, por igualdad de funciones, queda claro que $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$.

2) Para todo A en V , se cumple que:

$$(T_1 + T_2)(A) = T_1(A) + T_2(A) = T_2(A) + T_1(A) = (T_2 + T_1)(A)$$

$$\text{Luego } T_1 + T_2 = T_2 + T_1$$

3) Para todo A en V , se cumple que:

$$(T_1 + T_0)(A) = T_1(A) + T_0(A) = T_1(A) + O_W = T_1(A).$$

$$\text{Luego, } T_1 + T_0 = T_1.$$

4) Para cada transformación $T: V \rightarrow W$ y para todo A en V , se puede construir la transformación $(-1)T: V \rightarrow W$, tal que $((-1)T)(A) = T(-A)$.

De este modo,

$$(T + ((-1)T))(A) = T(A) + T(-A) = T(A - A) = O_W = T_0(A).$$

$$\text{Luego, } (T + ((-1)T)) = T_0.$$

Hasta aquí, se concluye que, la estructura $(\mathcal{L}, +)$. es grupo abeliano.

Ahora probemos que se cumplen los siguientes axiomas:

$$M_1: (a \cdot b)T = a \cdot (bT).$$

$$M_2: a \cdot (T_1 + T_2) = aT_1 + aT_2.$$

$$M_3: (a + b)T = aT + bT.$$

$$M_4: 1T = T.$$

Efectivamente:

$$M_1: ((a \cdot b)T)(A) = (ab)T(A) = a(bT(A)) = a[(bT)(A)].$$

Por igualdad de funciones se sigue que, $(a \cdot b)T = a(bT)$.

$$M_2: [a \cdot (T_1 + T_2)](A) = a[(T_1 + T_2)(A)] =$$

$$= a[T_1(A) + T_2(A)] = aT_1(A) + aT_2(A) = (aT_1 + aT_2)(A)$$

$$= aT_1 + aT_2$$

Por lo tanto, $a \cdot (T_1 + T_2) = aT_1 + aT_2$.

$$M_3: ((a + b)T)(A) = (a + b)T(A) = aT(A) + bT(A) = (aT + bT)(A) = aT + bT.$$

Por lo tanto, $(a + b)T = aT + bT$.

$$M_4: 1 \cdot T(A) = 1T(A) = T(A).$$

Luego $1 \cdot T = T$.

No hemos dado la razón de los pasos anotados anteriormente, pero se observa que el gran soporte para tales demostraciones es el hecho que W es un espacio vectorial y por las definiciones de operaciones entre transformaciones lineales que se realizaron antes.

El espacio vectorial mostrado en el teorema precedente, se conoce con el nombre del Espacio de los Homomorfismos de V sobre W , definido sobre el cuerpo K , y generalmente se denota como $Hom_K(V, W)$.

EJEMPLO

Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ y sea el espacio $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Tomemos f y g en este espacio, de modo que, para todo (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z); g(x, y, z) = (2x - y, 3y + z)$$

Siendo así,

$$\begin{aligned} (f + g)(x, y, z) &= f(x, y, z) + g(x, y, z) \\ &= (x + y, y - z) + (2x - y, 3y + z) = (3x, 4y). \end{aligned}$$

Luego $f + g$ está en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Resulta evidente como, $(3f)(x, y, z) = (3x + 3y, 3y - 3z)$.

O digamos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} (2f - 5g)(x, y, z) &= (2x + 2y, 2y - 2z) + (-10x + 5y, -15y - 5z) \\ &= (-8x + 7y, -13y - 7z). \end{aligned}$$

Y así, podemos continuar, pensando en constituir una base para el espacio $\text{Hom}_K(V, W)$, cuando los espacios V y W son finitos. Como se deduce de lo que sigue adelante, la base se corresponderá con la base de las matrices de orden $m \times n$, siendo estos valores las dimensiones respectivas de los espacios V y W .

DEFINICIÓN

Sean U, V y W tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; y sean las funciones: $f: U \rightarrow V$ y $g: V \rightarrow W$ transformaciones lineales.

Se llama producto (compuesta) de g por f a la función que resulta de la aplicación sucesiva de f y g , así, $g \circ f: U \rightarrow W$ tal que, para todo $A \in U$, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Se observa que, el espacio V hace de “puente” entre los espacios U y W a través de la función $g \circ f$.

Es usual denotar $g \circ f$ como gf .

TEOREMA

El producto de transformaciones lineales es una transformación lineal.

DEMOSTRACIÓN

Sea U, V y W espacios vectoriales y sean $f: U \rightarrow V$ y $g: V \rightarrow W$ y los vectores A y B en U .

$$1) \quad gf(A + B) = g(f(A + B)) = g(f(A) + f(B)) = g(f(A)) + g(f(B)) = gf(A) + gf(B)$$

Donde A y B están en U .

La demostración es válida ya que V es espacio vectorial.

$$2) \quad (gf)(kA) = g(f(kA)) = g(kf(A)) = kgf(f(A)) = k(gf(A)).$$

Así, de 1) y 2) queda probado que gf es transformación lineal.

EJEMPLO

Sean los espacios $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ y $P_2[x]$ definidos sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y las siguientes transformaciones lineales:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (a + b, c)$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2[x]$ tal que $g(m, n) = mx^2 + (n - m)x$.

De este modo,

$$gf(a, b, c) = g(f(a, b, c)) = g(a + b, c) = (a + b)x^2 + (c - a - b)x.$$

EJEMPLO

Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y) = (2x - y, 2y - x)$, entonces,

$$\begin{aligned} gf(x, y, z) &= g(f(x, y, z)) - g(x + y, y + z) = \\ &= (2x + 2y - y - z, 2y + 2z - x - y) \\ &= (2x + y - z, -x + y + 2z). \end{aligned}$$

Podemos recordar que la composición de funciones es asociativa, esto indica que el producto de transformaciones lineales también es asociativo; es decir:

Sean U, V, W y S espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; y sean las transformaciones $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ y $h: W \rightarrow S$ entonces $(h \circ g \circ f): U \rightarrow S$; además, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

La conexión de dominios y codominios, se puede observar en la Figura 7, la cual, tácitamente representa los caminos asociativos para llegar de U a S .

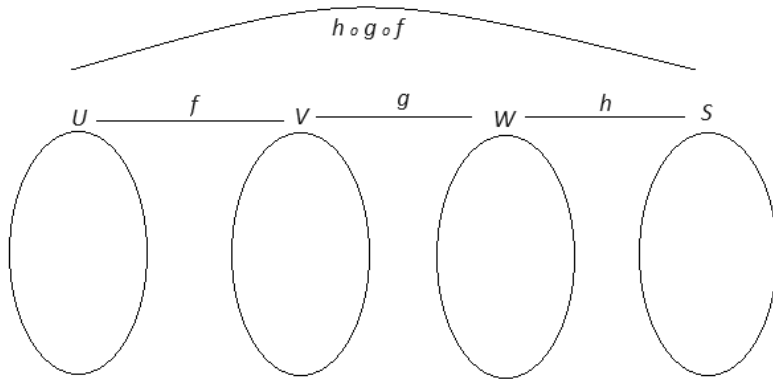


Figura 7. Representación de Composición de Funciones

Fuente: elaboración propia

Por otra parte, el producto de transformaciones lineales no es conmutativo, a menos que, $U = V = W$ y f y g sean las funciones idénticas (transformaciones idénticas) (Figura 8).

Esto último indica como, si $g \circ f$ es la función idéntica, ocurre que $g \circ I = g$, del mismo modo que, $I \circ g = g$.

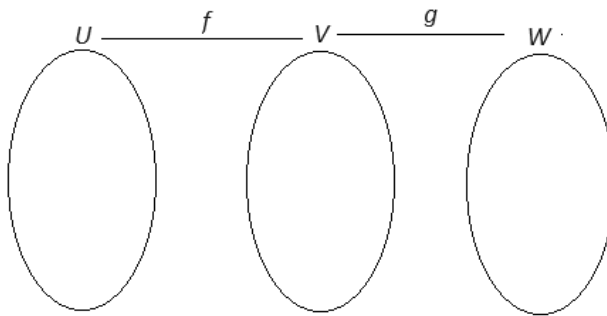


Figura 8. Producto de Transformaciones

Fuente: elaboración propia

TEOREMA

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K , $\lambda \in K$ y sean las transformaciones lineales: $f: U \rightarrow V$; $g: U \rightarrow W$ y $h: V \rightarrow W$.

Entonces:

$$h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$$

$$(\lambda h) \circ f = h \circ (\lambda f).$$

DEMOSTRACIÓN

Para todo vector $A \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (h \circ (f + g))(A) &= h((f + g)(A)) = h(f(A) + g(A)) \\ &= h(f(A)) + h(g(A)) = h(f(A)) + h(g(A)) \\ &= (h \circ f)(A) + (h \circ g)(A) = (h \circ f + h \circ g)(A). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g) = h \circ g + h \circ f.$$

como queríamos probar.

En esta demostración, notamos que la primera parte se demuestra con base en las definiciones y sobre el hecho que V es un espacio vectorial.

Cambiando los dominios y codominios convenientemente, se puede demostrar, con igual facilidad que, $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

Mostremos ahora la segunda parte.

Para todo vector A en U , se tiene que,

$$\begin{aligned} ((\lambda h) \circ f)(A) &= (\lambda h)(f(A)) = \lambda(h(f(A))); y, \\ (h \circ (\lambda f))(A) &= h((\lambda f)(A)) = h(\lambda(f(A))) = \lambda(h(f(A))). \end{aligned}$$

Luego, $(\lambda h) \circ f = h \circ (\lambda f)$.

EJEMPLO

Sean los espacios $M_{2 \times 2}, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y sean las siguientes transformaciones lineales:

$$f: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, c - d)$$

$$g: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, 0)$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } h(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$$

De este modo,

$h \circ (f + g): M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, tal que,

$$\begin{aligned} (h \circ (f + g)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= h \left((f + g) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = h \left[f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \\ &= \\ &= h[(a + b, c - d) + (a + d, 0)] = h(2a + b + d, c - d) = \\ &= (2a + b + c, 2a + b - c + 2d, 4a + 2b + 2d). \end{aligned}$$

Cuando tratamos con el Producto (Compuesta) de transformaciones lineales, si pensamos en $\mathcal{L} = Hom_K(V, V)$, podemos denotar como $f^2 = f \circ f = f \cdot f$; y en general, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n veces).

Por otra parte, si $f \in Hom_K(V, V)$ y $g \in Hom_K(V, V)$, se dice que f y g conmutan si $f \circ g = g \circ f$.

EJERCICIOS

- 1) Sean f y g las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, definidas como sigue, para todo (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (z, y, x); \quad g(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Determinar la imagen de (x, y, z) a través de cada una de las transformaciones siguientes:

$$fg, gf, fg - gf, f^2, g^2, (fg)^2, (gf)^2, (fg - gf)^2, f + g, g - 3f, 2f - 3g.$$

Muestre que, f y g son isomorfismos (automorfismo) y determine si sus compuestas también lo son.

Si I es la transformación identidad, calcule $(g - I)^n$ para cada $n \geq 1$.

2) Sea $V = P[x] = \{p(x)/p \text{ es polinomio real}\}$

Sean $D: P[x] \rightarrow P[x]$ el operador derivación y sea $T: P[x] \rightarrow P[x]$ tal que $T(p(x)) = xp'(x)$.

Supongamos que $q(x) = 5 + 4x - x^2 + 3x^3 - x^4$; determine la imagen de q que a través de las siguientes transformaciones:

$$D; T; DT; TD; DT - TD; T^2D^2 - D^2T^2; 2T - 3D.$$

Determine los polinomios $p \in P[x]$ para los cuales $T(p) = p$.

Determine los polinomios $p \in P[x]$ para los cuales $(DT - 2D)(p) = 0$.

¿Qué significa el operador D^n ?

Determine los polinomios de $P[x]$ para los cuales $D^n(p) = 0$.

Demuestre que, si $T(p(x)) = xp(x)$ (como en el caso inicial), entonces $DT - TD$ es la transformación identidad.

3) Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que:

$$f(x, y, z) = (y, z, x); g(x, y, z) = (x, x - y, y - z).$$

Determine la fórmula que define a las transformaciones lineales $f + g, f - g, 2f + 3g$.

4) Muestre que, si f, g están en $\text{Hom}_K(V, V)$, entonces $f + g = g + f$.

5) Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tales que:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x, z, y); g(x, y, z) = (2x, y + z); h(x, y, z) \\ &= (2x, x + y) \end{aligned}$$

Determinar la imagen de (x, y, z) a través de las siguientes transformaciones lineales: $h \circ (f + g)$; $h \circ (f - g)$, $h \circ (2f - 3g)$, $h \circ f + h \circ g$.

3.2 INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Recordemos que definimos la Transformación Identidad $I: V \rightarrow V$ tal que $I(A) = A$ para todo A de V . Esto indica que para cada espacio vectorial podemos construir esta transformación.

Para dar mayor claridad a la explicación, cuando sea necesario notaremos por I_v o I_w , a la Transformación Identidad de V o de W , según el caso.

DEFINICIÓN

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal biyectiva.

Se llama inversa de f y se denota como f^{-1} a la función $f^{-1}: W \rightarrow V$, tal que:

$$f^{-1}f = I_v \text{ y } ff^{-1} = I_w.$$

Es evidente que NO toda transformación posee inversa. Por ejemplo, es imposible que una transformación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ posea inversa, ya que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$, y en este caso, $\dim(Im(f)) \leq 2$; esto es, el máximo valor de la dimensión de $Im(f)$ es 2 que corresponde a $\dim(\mathbb{R}^2)$; y en este caso $\dim(Ker(f)) \geq 1$ (y obviamente menor que 3), por lo tanto, existen infinitos vectores de $\mathbb{R}^3$ que tienen como imagen a $O_{\mathbb{R}^2}$; y siendo así, la inversa de f, f^{-1} no puede ser función dado que $O_{\mathbb{R}^2}$ tendría infinitas imágenes

Por la definición de inversa, si f^{-1} es inversa de f , es obvio que f es inversa de f^{-1} .

TEOREMA

Si $I: V \rightarrow V$ es la Transformación Identidad, entonces para toda función $f: V \rightarrow W$ y para toda función $g: W \rightarrow V$, se cumple que: $fI = f$ y también $Ig = g$.

DEMOSTRACIÓN

Para todo $A \in V$ ocurre que, $(fI)(A) = f(IA) = f(A)$; por tanto, $fI = f$.

Para todo $B \in W$ ocurre que $(IG)(B) = I(g(B)) = g(B)$; luego, $Ig = g$.

■

TEOREMA

Si $f: V \rightarrow W$ tiene inversa, esta es única.

DEMOSTRACIÓN

Sean g y h inversas de f , tales que $g \neq h$; es decir, $g: W \rightarrow V, h: W \rightarrow V$, tales que, $fg = I_w; hf = I_v$.

De este modo, $g = I_v g = (hf)g = h(fg) = hI_w = h$.

Observe que, en la demostración, los órdenes de I_v, I_w son importantes.

Luego, $g = h$.

Por tanto, no se puede suponer que f posea dos inversas; por lo cual, la inversa, si existe es única.

■

Quedó explicado, tácitamente que, la transformación lineal $f: V \rightarrow W$ posee inversa si es una biyección, o sea, si es un isomorfismo; es decir, el hecho que f sea isomorfismo, es equivalente al de poseer inversa.

La transformación lineal $f: V \rightarrow W$ es no singular, regular o inversible, si y solo si, f es biyectiva.

TEOREMA

La inversa de una transformación lineal Inversible, es una transformación lineal.

DEMOSTRACIÓN

Sea $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal inversible; debemos probar que $f^{-1}: W \rightarrow V$ es una transformación lineal.

Sean B_1, B_2 en W ; dado que, f es biyectiva, existen y son únicos los vectores A_1, A_2 en V para las cuales $f(A_1) = B_1$ y $f(A_2) = B_2$.

De este modo, $A'_1 = f^{-1}(B_1)$ y $A'_2 = f^{-1}(B_2)$.

Ahora,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 + B_2) &= f^{-1}(f(A_1) + f(A_2)) \\ &= f^{-1}(f(A_1 + A_2)) \\ &= (f^{-1}f)(A_1 + A_2) \\ &= I_v(A_1 + A_2) = A_1 + A_2 = f^{-1}(B_1) + f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Así que,

$$f^{-1}(B_1 + B_2) = f^{-1}(B_1) + f^{-1}(B_2). \quad (1)$$

Sean B en W y $k \in K$, entonces, existe un único vector $A \in V$, tal que $f(A) = B$ y $f^{-1}(B) = A$.

Debemos probar que $f^{-1}(kB) = kf^{-1}(B)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(kB) &= f^{-1}(kf(A)) = f^{-1}(f(kA)) = (f^{-1}f)(kA) = I_v(kA) = kA \\ &= kf^{-1}(B). \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } f^{-1}(kB) = kf^{-1}(B) \quad (2).$$

De (1) y (2), se concluye que f^{-1} es una transformación lineal.

■

EJEMPLO

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (z, x, y)$. Resulta fácil probar que f es isomorfismo. Este tipo de transformaciones que cambian el orden de las componentes se denominan Permutaciones.

Si $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$, entonces $(z_1, x_1, y_1) \neq (z_2, x_2, y_2)$; esto es, $f(z_1, x_1, y_1) \neq f(z_2, x_2, y_2)$.

Además, para toda terna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, existe la terna (b, c, a) , tal que $f(b, c, a) = (a, b, c)$.

Es fácil comprobar que, $f^{-1}(x, y, z) = (y, z, x)$.

En efecto,

$$(f^{-1}f)(x, y, z) = (x, y, z) = f^{-1}(f(x, y, z)) = f^{-1}(z, x, y) = (x, y, z).$$

TEOREMA

Sea la transformación lineal $T: V \rightarrow W$.

T es isomorfismo de espacios vectoriales, si y solo si, $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$)

Supongamos que T es isomorfismo; entonces T es inyectiva y sobreyectiva; además, por propiedades de las transformaciones lineales, $T(O_v) = O_w$.

Sea $A \in \text{Ker}(T)$, entonces $T(A) = T(O_v) = O_w$; y como T es inyectiva, es obvio que $A = O_v$. Por tanto, $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

($\Leftarrow$)

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal tal que $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

Probemos que T es isomorfismo de V en W ; es decir, probemos que T es inyectiva y sobreyectiva.

PRUEBA DE INYECCIÓN

Sean B_1 y B_2 en $\text{Im}(T)$ tales que $B_1 = B_2$. Como B_1 y B_2 están en $\text{Im}(T)$, existen los vectores A_1 y A_2 en V , para los cuales $T(A_1) = B_1$ y $T(A_2) = B_2$; pero $B_1 = B_2$, así, que $T(A_1) = T(A_2)$. De aquí, $T(A_1) + (-1)T(A_2) = O_w$; esto es, $T(A_1) + T(-A_2) = O_w$, por lo cual, $T(A_1 - A_2) = O_w$. Luego, $(A_1 - A_2) \in \text{Ker}(T)$; es decir, $(A_1 - A_2) \in \{O_v\}$. De este modo, $A_1 - A_2 = O_v$, por lo cual, $A_1 = A_2$ en V . Esto es, a imágenes iguales corresponden preimágenes iguales; por lo cual, T es inyectiva (T es monomorfismo).

PRUEBA DE SOBREYECCIÓN

Se debe probar que, para todo $B \in W$, existe $A \in V$, para el cual $T(A) = B$.

Probémoslo por contradicción.

Supongamos que T no es sobreyectiva; así que, existe B en W ($B \neq O_w$), para el cual, todo A de V es tal que $T(A) \neq B$. Pero $T(A) \in \text{Im}(T) \subset W$, y así, $T(A) \in W$; y dado que B está en W , existe siempre un vector B' en W para el cual $T(A) + B' = B$, ya que "+" es ley de composición interna en W . De este modo, $T(A) = B + (-1)B'$, pero B' no puede ser O_w ya que, de lo contrario, $T(A) = B$. Ahora, pueden ocurrir dos casos: $B = B'$ o $B \neq B'$.

Si $B = B'$, entonces $B + (-1)B' = O_w$, luego $T(A) = O_w$ para todo A en V ; luego $\text{Ker}(T) = V$, lo cual no puede ser, dado que $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

Si $B \neq B'$, entonces $B + (-1)B' \neq O_w$, por tanto, para todo A de V , $T(A) \neq O_w$ (*).

Sin embargo, $O_v \in V$ y es tal que $T(O_v) = O_w$, lo cual es una contradicción, ya que (*) afirma que $T(O_v) \neq O_w$, y por otra parte, $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

Por tanto, no podemos suponer que T no sea sobreyectiva, en consecuencia, T es sobreyectiva.

En resumen, T es isomorfismo de espacios vectoriales siempre que $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$.

Este resultado, evita un trabajo algebraico que puede ser no simple y que puede precisar el cálculo aritmético operativo que resulta extenuante.

■

COROLARIO

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal inversible, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

DEMOSTRACIÓN

Como T es inversible, T es isomorfismo; por lo cual, $T: V \rightarrow W$ es sobreyectiva y $\text{Ker}(T) = \{O_v\}$. De este modo, $\text{Im}(T) = W$.

Por el teorema anterior, se tiene que, $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$; de donde, $\dim(V) = \dim(\{O_v\}) + \dim(W)$ y como $\dim(\{O_v\}) = 0$, entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Este corolario indica que, entre dos espacios de igual dimensión definidos sobre un mismo cuerpo K , siempre se puede construir un

isomorfismo; y, al contrario, para que V y W definidos sobre K sean isomorfos, deben poseer la misma dimensión como condición necesaria.

TEOREMA

Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si $\dim(V) = \dim(W)$, entonces V y W son isomorfos.

DEMOSTRACIÓN

Sean $n = \dim(V) = \dim(W)$, entonces existen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq V$ y $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq W$, bases de V y W respectivamente. Por el Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales, existe una transformación $T: V \rightarrow W$ tal que $T(A_1) = B_1, T(A_2) = B_2, T(A_3) = B_3, \dots, T(A_n) = B_n$ y T es única. Pero $\{T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)\} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ genera a W y a $\text{Im}(T)$, y por ser linealmente independiente en W , es base de $\text{Im}(T)$.

Luego $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T))$. Esto indica que $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$.

El último resultado implica que $\text{Ker}(T) = \{0_v\}$, por lo cual, T es un isomorfismo.

■

EJEMPLO

Sabemos que los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $P_2[x]$ definidos sobre $\mathbb{R}$ son de dimensión 3; probemos que son isomorfos.

Podemos tomar a $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y a $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base de $P_2[x]$. Debemos definir una transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2[x]$, tal que:

$$T(1,1,0) = 1$$

$$T(0,1,1) = 1+x$$

$$T(1,1,1) = 1 + x + x^2$$

Para todo $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, existen m, n, p en $\mathbb{R}$, tales que, $(\alpha, \beta, \gamma) = m(1,1,0) + n(0,1,1) + p(1,1,1)$.

De donde,

$$m + p = \alpha$$

$$m + n + p = \beta$$

$$n + p = \gamma$$

De aquí se obtiene que,

$$p = \alpha - \beta + \gamma$$

$$m + n + p = \beta$$

$$n = \beta - \alpha$$

Así, que,

$$m = \beta - \gamma$$

$$n = \beta - \alpha$$

$$p = \alpha - \beta + \gamma$$

De modo que, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta - \gamma)(1,1,0) + (\beta - \alpha)(0,1,1) + (\alpha - \beta + \gamma)(1,1,1)$.

Por lo cual, $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta - \gamma)1 + (\beta - \alpha)(1 + x) + (\alpha - \beta + \gamma)(1 + x + x^2)$.

Esto es, $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta - \gamma + \beta - \alpha + \alpha - \beta + \gamma) + (\beta - \alpha + \alpha - \beta + \gamma)x + (\alpha - \beta + \gamma)(x^2)$, de donde, $T(\alpha, \beta, \gamma) = \beta + \gamma x + (\alpha - \beta + \gamma)(x^2)$.

Para ver si T es isomorfismo, calculemos $\text{Ker}(T) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / T(\alpha, \beta, \gamma) = 0 + 0x + 0x^2\}$.

De aquí, se tiene que, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ y $\alpha - \beta + \gamma = 0$; por lo cual, $\alpha = 0 = \beta = \gamma$.

Luego $\text{Ker}(T) = \{(0,0,0)\}$; en consecuencia, T es isomorfismo y esto asegura que los espacios $\mathbb{R}^3$ y $P_2[x]$ tienen la misma dimensión.

EJEMPLO

Probar que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ es isomorfismo de espacios vectoriales.

Para ello, solo calculamos el Kernel de f .

$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0,0,0)\}$; de aquí se obtiene el sistema:

$$x - y = 0$$

$$y - z = 0$$

$$z - x = 0$$

Sistema equivalente con:

$$x - y = 0$$

$$y - x = 0$$

$$y - z = 0$$

Es decir,

$$x - y = 0$$

$$y - z = 0$$

Sistema de infinitas soluciones.

Por ejemplo, de $x - z = 0$ (sumando estas ultimas), se puede obtener, $x = 1, z = 1, y = 1$.

Así, $(1,1,1) \in \text{Ker}(f)$, con lo cual, $\text{Ker}(f) \neq \{O_{\mathbb{R}^3}\}$.

Por lo tanto, f no es isomorfismo de espacios vectoriales.

El lector debe reconocer que $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$ son espacios isomorfos porque se trata del mismo espacio vectorial, pero no toda función (transformación lineal) es un isomorfismo entre estos espacios vectoriales.

EJERCICIOS

1) Determinar cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ son isomorfismos.

a) $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y - z)$

b) $f(x, y, z) = (x, x - y, y + z)$

c) $f(x, y, z) = (y, x - y, z)$

d) $f(x, y, z) = (y, z, 0)$

2) Sean V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea $\lambda \neq 0$ en k . Probar que $T: V \rightarrow V$ tal que $T(V) = \lambda V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Determinar la inversa de T .

3) Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tales que $f(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$; $g(x, y) = (-x, y)$. Demuestre que f, g, f^2, g^2 son isomorfismos. Determinar las inversas respectivas. Para el efecto, haga, por ejemplo, $g(x, y)(u, v)$ y determine $g^{-1}(u, v) = (x, y)$.

Por ejemplo, si $T(x, y) = (2x - y, x + y)$, es evidente que T es isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$.

En este caso tenemos,

$$2x - y = u$$

$$x + y = v$$

Así que, $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que, $T^{-1}(u, v) = (x, y)$.

De modo que,

$$x = \frac{u + y}{2}; y = v - x$$

Esto es,

$$x = \frac{u + v - x}{2} \quad y = v - \frac{u + y}{2}$$

De donde,

$$\frac{3}{2}x = \frac{u + v}{2}; \frac{3}{2}y = \frac{2v - u}{2}$$

O sea que,

$$x = \frac{u + v}{3}; y = \frac{2v - u}{3}$$

- 4) Sea $T: V \rightarrow V$ un isomorfismo de espacios vectoriales. Por inducción se definen las potencias $T^0 = I$ (Identidad), $T^n = TT^{n-1}$ para $n \geq 1$.

Demuestre que, $T^m T^n = T^{m+n}$; además, que T^n es inversible y que $(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$.

- 5) Sea $V = P[x]$ y sean f y g transformaciones lineales que aplican $P[x]$ en $P[x]$, tales que,

$$f(p(x)) = f\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$$

$$g(p(x)) = g\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n a_i x^{i-1}$$

Calcular:

- a) $f(2 + 3x + 5x^2 - 7x^3); g(-3 + 2x + 4x^2 - 5x^3)$.
 - b) Si $p(x) = 1 + x - x^2 - x^3$, determinar las imágenes de p mediante las siguientes transformaciones lineales: $f \circ g, g \circ f, (f \circ g)^2$ y $(g \circ f)^2$.
 - c) Pruebe que g es inversible y determine su inversa.
- 6) Pruebe que los siguientes pares de espacios vectoriales son isomorfos (los espacios están definidos sobre $\mathbb{R}$):
- a) $M_{2 \times 2}$ y $\mathbb{R}^4$.
 - b) $\mathbb{R}^4$ y $P_3[x]$
 - c) $\langle \{(1,1,1,1) (1,0,1,0)\} \rangle$ y $\mathbb{R}^2$

Nota. En cuanto sea posible, no utilizar las bases canónicas de cada espacio.

TEOREMA

Si $f: V \rightarrow V$ es una transformación lineal inyectiva o sobreyectiva de un espacio de dimensión finita en sí mismo, entonces f es no singular.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $f: V \rightarrow V$ es una transformación lineal inyectiva y que $\dim(V) = n$.

Como $f(O_v) = O_v$, no existe un vector $A \in V$, tal que $A \neq O_v$ esté en $\text{Ker}(f)$; luego, $\text{Ker}(f) = \{O_v\}$ y así, f es isomorfismo de espacios vectoriales; por lo cual, f es sobreyectiva.

Ahora, supongamos que f es sobreyectiva y probemos que f es inyectiva.

Como $\dim(V) = n$ y si f es sobreyectiva, $\text{Im}(f) = V$. Sea, por lo tanto, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ base de $\text{Im}(f)$. Así, existen vectores $A_1, A_2, \dots, A_n$ en V para los cuales $f(A_1) = B_1, f(A_2) = B_2, \dots, f(A_n) = B_n$; y como $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ es linealmente independiente en V , ocurre que, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es linealmente independiente en V y por tanto, es base de V .

Sea $A \in \text{Ker}(f)$, entonces $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n$.

De este modo, $f(A) = a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_nB_n = O_v$ ($A \in \text{Ker}(f)$).

Pero $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ es linealmente independiente, luego $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Por tanto, $A = O_v$.

Hemos demostrado que, si $A \in \text{Ker}(f)$, entonces $A = O_v$; es decir, $\text{Ker}(f) = \{O_v\}$ y así, f es inyectiva.

3.3 MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Intentamos decidir que toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, definidos sobre un mismo cuerpo, se puede considerar como una Transformación Matricial.

Muchas de las propiedades estudiadas para los espacios vectoriales, han prescindido de las bases, pero ha quedado explicado tácitamente que no podemos trabajar con ellos haciendo caso omiso de ellas.

Por otra parte, el Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales, explica cómo las transformaciones lineales quedan perfectamente definidas por la forma como actúan sobre cada vector de

la base del espacio dominio de la transformación. Esto exige el conocimiento de tales bases.

El teorema fundamental de las transformaciones lineales explica cómo una transformación $T: V \rightarrow W$ queda totalmente definida si se conocen los vectores $T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)$ de W que son imágenes de los vectores $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ que, a su vez, conforman una base de V .

Sea, por tanto, $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal de espacios vectoriales, definida sobre un cuerpo K , donde $\dim(V) = m$ y $\dim(W) = n$.

De este modo, escojamos los conjuntos

$\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ y $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, bases ordenadas de V y W respectivamente.

Como $T(A_i) \in \text{Im}(T) \subset W$ para todo i en $J_m = \{1, 2, \dots, m\}$ y como $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ es base de W , se sigue que:

$$\begin{aligned} T(A_1) &= a_{11}B_1 + a_{21}B_2 + a_{31}B_3 + \dots + a_{n1}B_n \\ T(A_2) &= a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{32}B_3 + \dots + a_{n2}B_n \\ &\vdots \\ T(A_m) &= a_{1m}B_1 + a_{2m}B_2 + a_{3m}B_3 + \dots + a_{nm}B_n \end{aligned}$$

Donde los a_{ij} , $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$; $j \in J_m = \{1, 2, \dots, m\}$ son únicos en el cuerpo K .

Ahora, elijamos la matriz de orden $n \times m$:

$$A_{vw} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de A son:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Dichos vectores columna son los vectores coordenados de $T(A_1), T(A_2), \dots, T(A_n)$ respectivamente.

La matriz M se llama Matriz Asociada a T en las bases $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ y $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ de V y W , respectivamente. Se observa que, si se cambian las bases, la matriz A_{vw} también cambia. Mas adelante veremos qué cambios se suscitan en la matriz A_{vw} cuando cambian las bases (cambio de base).

Ahora, mostremos que $T: V \rightarrow W$ se puede interpretar como la Transformación Matricial por A .

Sea $A \in V$, como $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ es base de V , existen escalares $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ en K , tales que, $A = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(A) &= x_1T(A_1) + x_2T(A_2) + \dots + x_mT(A_m) = \\ &= x_1(a_{11}B_1 + a_{21}B_2 + a_{31}B_3 + \dots + a_{n1}B_n) \\ &\quad + x_2(a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{32}B_3 + \dots + a_{n2}B_n) + \dots \\ &\quad + x_m(a_{1m}B_1 + a_{2m}B_2 + a_{3m}B_3 + \dots + a_{nm}B_n) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_ma_{1m})B_1 + (a_{21}x_1 + x_2a_{22} + \dots + x_ma_{2m})B_2 \\ &\quad + \dots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + a_{3m}B_3 + \dots + x_ma_{nm})B_n. \end{aligned}$$

Ahora bien, si escribimos al vector A de V de acuerdo con las componentes (coordenadas) de la base ordenada $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Luego, todo vector A de V , es tal que,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Por tanto, $T: V \rightarrow W$ se puede identificar como la transformación T , tal que $T(A) = M \cdot A$, que es una Transformación Matricial, como se dijo antes.

EJEMPLO

Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $T(x, y) = (x + y, x, 2x - 3y)$.

Interpretemos a T como una transformación matricial.

Para ello, escojamos las bases canónicas y ordenadas: $\{(1,0)(0,1)\}$ y $\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

De este modo,

$$T(1,0) = (1,1,2) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

$$T(0,1) = (1,0,-3) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + (-3)(0,0,1)$$

Así,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se puede definir $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$$

Tal como se tiene en principio.

Se dijo antes que, la matriz M depende de las bases elegidas, y obviamente, del orden de estas. Interpretamos la misma transformación, respecto a las siguientes bases ordenadas: $\{(1,0)(0,1)\}$ $\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente

$$T(1,1) = (2,1,-1) = (-1)(1,1,1) + 2(1,1,0) + 1(1,0,0)$$

$$T(1,0) = (1,1,2) = (2)(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 1(1,0,0)$$

Luego,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, sobre dichas bases, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por $f(x,y,z) = (x-y, x+2y, y+z, z)$.

Encuentre la matriz T con respecto a las siguientes bases ordenadas:

$B = \{(2,0,0), (0,3,0)(0,0,4)\}$ y $B' = (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

Resulta que, $f(2,0,0) = (2,2,0,0)$, lo expresamos en la base B' , así:

$$(2,2,0,0) = a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(1,1,1,0) + d(1,1,1,1)$$

De donde,

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 2 \\ b + c + d = 2 \\ c + d = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 0 \\ b = 2 \\ a = 0 \end{array}$$

Así, las coordenadas del vector $(2,20,0)$ respecto de la base referencia B' , son $(0,2,0,0)$; y así, la primera columna de la matriz asociada a la transformación es $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De igual modo, $f(0,3,0) = (-3,6,3,0) = a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(1,1,1,0) + d(1,1,1,1)$, de donde,

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = -3 \\ b + c + d = 6 \\ c + d = 3 \\ d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 3 \\ b = 3 \\ a = -9 \end{array}$$

Así, la segunda columna de $M_{B,B'}$ es $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

También se observa que,

$$f(0,0,4) = (0,0,4,4) = a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(1,1,1,0) + d(1,1,1,1).$$

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ c + d = 4 \\ d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 4 \\ c = 0 \\ b = -4 \\ a = 0 \end{array}$$

Luego, la tercera columna de la matriz $M_{B,B'}$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz buscada es,

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, debe entenderse que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ se interpreta como el producto matricial (Transformación Matricial) por la matriz $M_{B,B'}$:

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde las bases de referencia de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ son respectivamente:

$$B = \{(2,0,0), (0,3,0), (0,0,4)\} \quad y \quad B' = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,10), (1,1,1,1)\}.$$

Es decir, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, es tal que,

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde (x, y, z) son las coordenadas de (a, b, c) respecto de la base de referencia B .

El producto determina las coordenadas de $f(a, b, c)$ respecto de la base B' de $\mathbb{R}^4$.

Por ejemplo, sea $(2,6,12)$ en $\mathbb{R}^3$; es claro que, $f(2,6,12) = (-4,14,18,12)$; imagen calculada directamente.

Ahora, utilicemos la matriz asociada a la transformación lineal; así, que, $(2,6,12) = 1(2,0,0) + 2(0,3,0) + 3(0,0,4)$.

Así, que, $\overline{(2,6,12)} = (1,2,3)$.

Observe que, el último vector es el coordenado respecto de la base de referencia.

Así, que,

$$\begin{aligned} f(2,6,12) &= \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 + 6 - 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \\ &= 18(1,0,0,0) - 4(1,10,0) + 6(1,1,1,0) + 12(1,1,1,1) = (-4,14,18,12) \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el que se obtuvo en principio.

3.4 MATRIZ ASOCIADA A LA SUMA DE DOS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $(K, +, \cdot)$, de tal modo que, $\dim(V) = m$ y $\dim(W) = n$, esto es, existen $B = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $B' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ bases de V y W respectivamente.

Consideremos las transformaciones lineales $f: V \rightarrow W$, $g: V \rightarrow W$, las cuales, por lo expuesto anteriormente, se pueden interpretar como transformaciones matriciales (productos por matrices $M_{n \times m}$).

O sea que, $f: V \rightarrow W$, es tal que se corresponde con la matriz $M_{B,B'}$ del mismo modo que $g: V \rightarrow W$ se corresponde con $M'_{B,B'}$.

De este modo, si $A \in V$, distingamos como $\bar{A}$ al vector coordenado de A respecto de la base de B de V ; por tanto, $M_{B,B'} \cdot \bar{A}$ y $M'_{B,B'} \cdot \bar{A}$ son los vectores coordenados de $f(A)$ y $g(A)$ respecto de la base B' de W .

Debido a que, $M_{B,B'}, M'_{B,B'}$ son matrices del mismo orden, no es difícil observar por propiedades de las matrices, que: $M_{B,B'} \cdot \bar{A} + M'_{B,B'} \cdot \bar{A} = (M_{B,B'} + M'_{B,B'}) \cdot \bar{A}$.

El primer miembro indica que se suman los vectores coordenados de $f(A)$ y $g(A)$, es decir, estamos sumando $f(A) + g(A) = (f + g)(A)$; y la segunda parte, presenta el algoritmo que abrevia el caculo, sumando

inicialmente las matrices asociadas; esto es, la matriz asociada a la transformación $f + g$, es $M_{B,B'} + M'_{B,B'}$.

El lector puede notar que la matriz asociada a una transformación lineal de espacios vectoriales respecto de sus bases de referencia es única, y que, a cada transformación le corresponde una matriz.

Por otra parte, si $\lambda \in K$ y $f: V \rightarrow W$ es transformación lineal, y siendo $M_{B,B'}$ la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' de V y W , respectivamente, y dado que $A \in V$, designemos por $\bar{A}$ el vector coordenado de A en la base B , por tanto $A = \bar{A}$ (el lector debe interpretar correctamente lo que queremos significar con la notación), de donde se sigue que $\lambda A = \lambda \bar{A}$. Utilizando en este momento la transformación matricial, se sigue:

$$f(\lambda A) = M_{B,B'} \cdot \lambda \bar{A} = (\lambda \cdot M_{B,B'}) \bar{A} \Rightarrow (\lambda f)(A) = (\lambda \cdot M_{B,B'}) \bar{A}.$$

Pero, $f(\lambda A) = \lambda \cdot f(A) = (\lambda f)(A)$, lo que indica que la matriz asociada a la transformación λf es $\lambda \cdot M_{B,B'}$.

En resumen, hemos tomado el espacio $Hom_K(V, W)$, donde $\dim(V) = m, \dim(W) = n$, con bases de referencia (Ordenadas) respectivas B y B' , y el espacio vectorial $M_{n \times m}$, y hemos construido la transformación $T: Hom_K(V, W) \rightarrow M_{n \times m}$, tal que $T(f) = M_{B,B'}$ (matriz asociada a T); y además, hemos comprobado que T es transformación lineal.

En un nivel de abstracción más alto, se debe comprender que toda matriz $M \in M_{n \times m}$ representa a alguna (y exactamente una) transformación lineal $f: V \rightarrow W$, respecto de sus bases ordenadas. Esto indica que, hemos construido un par de espacios vectoriales isomorfos, tal como se probará más adelante.

3.5 MATRIZ ASOCIADA A LA COMPUESTA DE DOS TRANSFORMACIONES LINEALES

Antes de proseguir digamos que, si la matriz asociada a una transformación lineal se ha formado tomando como referencia las bases canónicas de los espacios vectoriales, la matriz se denomina *Matriz Estándar Asociada a la Transformación*.

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $(K, +, \cdot)$, tales que $\dim(U) = m, \dim(V) = p$ y $\dim(W) = n$ y sean las transformaciones lineales $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$.

Hemos probado que la función $g \circ f: U \rightarrow W$ es también transformación lineal. Tanto f como g tienen su correspondiente matriz asociada $M_{B,B'} \in K^{p \times m}, M_{B',B''} \in K^{n \times p}$ respecto de las bases B, B' y B'' de U, V y W respectivamente; donde,

$$B = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad B' = \{B_1, B_2, \dots, B_p\} \quad \text{y} \quad B'' = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

Ahora, deseamos calcular la matriz asociada a la transformación $g \circ f: U \rightarrow W$; $M_{B,B''} \in K^{n \times m}$ y buscar la relación con las matrices asociadas a f y g .

Sean, por lo tanto,

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix}$$

$$M_{B',B''} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Y, obviamente, la matriz asociada a la transformación lineal $g \circ f$ es:

$$M_{B, B''} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Por construcción de las matrices asociadas a estas transformaciones, se entiende que,

$$f(A_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} B_i$$

donde $j \in J_m$ y $B_i \in B'$ base de V ; y

$$f(B_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} C_i$$

donde $j \in J_m$ y $C_i \in B''$ base de W .

Todo lo anterior nos indica que,

$$(g \circ f)(A_j) = \sum_{i=1}^n C_{ij} C_i$$

Donde $j \in J_m$ y $C_i \in B''$; pero, por definición de producto de transformaciones, se sigue que,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(A_j) &= g(f(A_j)) = g\left(\sum_{i=1}^p a_{ij} B_i\right) = \sum_{i=1}^p a_{ij} g(B_i) = \\ &= \sum_{i=1}^p a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{ki} C_k = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ij} b_{ki} C_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij}\right) C_k \end{aligned}$$

Y si hacemos

$$(g \circ f)(A_j) = \sum_{k=1}^n C_{kj} C_k$$

por igualdad de funciones (unicidad de imagen) se sigue que,

$$\sum_{k=1}^n C_{kj} C_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij} \right) C_k$$

para cada $j \in J_m$.

Nótese que, los resultados anteriores se basan en propiedades de las sumatorias o lo que se llama comúnmente, del operador sigma.

De este modo,

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ij}$$

para cada k y cada j .

Así, por ejemplo,

$$C_{23} = \sum_{i=1}^p b_{2i} a_{i3} = b_{21} a_{13} + b_{22} a_{23} + b_{23} a_{33} + \cdots + b_{2p} a_{p3}$$

Que, como puede verse, es el producto de matrices (por definición) $M_{B',B''} \cdot M_{B,B'}$.

Es decir, como se esperaba,

$$M_{B,B''} = M_{B',B''} \cdot M_{B,B'}.$$

EJEMPLO

Elijamos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, P_2[x]$ y $\mathbb{R}^2$ y las transformaciones $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2[x]$, $g: P_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tales que,

$$f(a, b, c) = a + (a - b)x + (a + b - c)x^2; \quad g(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c).$$

Tomemos las siguientes bases ordenadas:

$B = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{1, 1 + x, x + x^2\}$ base ordenada de $P_2[x]$ y $B'' = \{(1,1), (1,0)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

Determinemos las matrices asociadas a f y g respecto de las bases de referencia indicadas

Matriz para f

Dado que, $f(1,1,1) = 1 + x^2 = m(1) + n(1 + x) + p(x + x^2) = (m + n)(n + p)x + px^2$, entonces,

$$\begin{array}{rcl} m + n = 1 & & p = 1 \\ n + p = 0 & \Rightarrow & n = 1 \\ p = 1 & & m = 2 \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores coordenados son:

$$f(1,1,1) = (2, -1, 1) \quad (1)$$

$$f(1,0,1) = 1 + x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (x + x^2) = (0, 1, 0) \quad (2)$$

$$f(0,0,1) = -x^2 = m \cdot (1) + n \cdot (1 + x) + p \cdot (x + x^2) = (0, 1, 0)$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} m + n = 0 & & p = -1 \\ n + p = 0 & \Rightarrow & n = 1 \\ p = -1 & & m = -1 \end{array}$$

De este modo,

$$f(0,0,1) = (-1, 1 - 1) \quad (3)$$

Todo esto indica que,

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz para g

$$g(1) = (1,0) = m(1+1) + n(1,0)$$

Así,

$$\begin{array}{l} m + n = 1 \\ m = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 0 \\ n = 1 \end{array}$$

Es decir, los vectores coordenados respecto de la base son:

$$g(1) = (1,0) = (0,1) \quad (1)$$

$$g(1+x) = (2,1) = (1,1) \quad (2)$$

$$g(x+x^2) = (1,0) \quad (3)$$

Por lo tanto,

$$M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto significa que la matriz de $g \circ f$ es,

$$M_{B,B''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En efecto, calculemos directamente la matriz asociada a $g \circ f$.

Ya vimos que $f(1,1,1) = 1 + x^2$; $f(1,0,1) = 1 + x$; $f(0,0,1) = -x^2$, por tanto,

$$g \circ f(1,1,1) = (1, -1) = (-1, 2) \quad (1)$$

$$g \circ f(1,0,1) = g(1 + x) = (2, 1) = (1, 1) \quad (2)$$

$$g \circ f(0,0,1) = g(-x^2) = (0, 1) = (1, -1) \quad (3)$$

Lo que indica que,

$$M_{B, B''} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tal como vimos anteriormente.

EJERCICIOS

- 1) Traduzca las propiedades de los $\text{Hom}_k(V, W)$ en el ámbito de las matrices $K^{m \times n}$ dado que los espacios son isomorfos.
- 2) Determine las matrices estándar para cada uno de los operadores lineales definidos como sigue:

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x - y, x + y)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x, y, z)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, z)$

d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x, x + y, 2x - y)$

e) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$

- 3) Sea $f: P_2[x] \rightarrow P_1[x]$ tal que $f(a + bx + cx^2) = (a - b) + (a + b + c)x$.

Encuentre la matriz de f respecto de las bases canónicas y respecto de las bases $\{1 - x, 1 + x, 1 - x + x^2\}$ y $\{1 + x, 2 - 3x\}$ de $P_2[x]$ y $P_1[x]$ respectivamente.

- 4) Sea $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ el operador lineal definido como $T(A) = A^t$ (transpuesta de A); encuentre la matriz de T , respecto de las bases:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f: (x, y, z) = (x - y, z - x, y - z)$; encuentre la matriz de f respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. Utilice la matriz para conseguir las imágenes de los siguientes vectores: $(2, -3, 0), (1, 1, 0), (5, 4, 3), (2, -4, 5)(4, 4, 2)$.

6) Sea $f: P_2[x] \rightarrow P_3[x]$ tal que $f(p(x)) = xp(x)$. Determine la matriz de f respecto de las bases:

$\{1 + x, 1 + 2x - 3x^2, 1 + x + 2x^2\}$ de $P_2[x]$; y $\{1 - x, 1 + x + x^2, 1 + x^3, 1 - x^2 + x^3\}$ de $P_3[x]$. Utilice la matriz para determinar las imágenes de los siguientes vectores: $(1 + 2x + 3x^2)$ y $(1 - 3x + 4x^2)$.

7) Demuestre que, si $T: V \rightarrow W$ es la transformación cero, la matriz T respecto de cualquier par de bases, es la matriz CERO.

8) Sea $D: P_3[x] \rightarrow P_2[x]$, de modo que, $D(p(x)) = p'(x)$. Determine la matriz D respecto de las bases $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ y $\{1, 1 - x, 1 + x - x^2\}$ respecto de $P_3[x]$ y $P_2[x]$.

9) Sean las bases:

$$a) \{1, \text{Sen}x, \text{Cos}x\}$$

$$b) \{1, e^x, e^{2x}\}$$

$$c) \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$$

bases de subespacios del subespacio de todas las funciones definidas sobre $\mathbb{R}$. Encuentre la matriz con respecto a D , tomando como bases de referencia la dada en cada caso, y donde D es el operador diferencial.

- 10) Sean las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2[x]$; $l: P_2[x] \rightarrow P_3[x]$, tales que, $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$; $g(x, y) = (0, x + y + z, y - x)$; $h(a, b, c) = a + bx + cx^2$; $l(a + bx + cx^2) = \int_0^x (a + bx + cx^2) dx$; y tomemos las bases de referencia:

$$B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1) (0,1)\}$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,1) (1,1,0) (0,1,1)\}$$

$$B_{P_2[x]} = \{1 - x, 1 + x, 1 - x + x^2\}$$

$$B_{P_3[x]} = \{1, 1 + x, 1 + x - x^2, 1 - x^2 + x^3\}$$

Determine las matrices de las siguientes transformaciones lineales respecto de las bases de referencia dadas: $hf, hg, h(f + g), lh, l(hf), (lh) \cdot f, 3hf, -2hg$.

3.6 EL ISOMORFO DE $Hom_k(V, W)$ en $K^{m \times n}$

Denotemos por $K^{m \times n}$ al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos en K .

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre K tales que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, por lo cual, existen las bases $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B' = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ de V y W respectivamente. En este momento se sabe que, $Hom_k(V, W)$ y $K^{m \times n}$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo K ; además, cada $f \in Hom_K(V, W)$ se puede interpretar como una transformación matricial, lo que equivale a decir que, a cada transformación lineal f de $Hom_k(V, W)$, le corresponde una matriz $M \in K^{m \times n}$ respecto a una transformación lineal $f \in Hom_K(V, W)$.

Definamos, la función: $F: Hom_k(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$, tal que $F(f) = M$ (Matriz Asociada respecto de las bases de referencia dadas).

F construida como se observa, es una transformación lineal, ya que, si $F(f) = M$ y $F(g) = N$, vimos cómo $F(f + g) = M + N = F(f) + F(g)$; y que $F(\alpha f) = \alpha M = \alpha F(f)$, donde $\alpha \in K$.

Mostremos ahora que F es isomorfismo, y para ello, calculamos el Kernel:

$$Ker(F) = \{ f \in Hom_k(V, W) / F(f) = 0 \in K^{m \times n} \}.$$

Así, pues la transformación CERO está en el Kernel de F por ser F una transformación lineal de espacios vectoriales.

Si T_0 es la transformación cero de $Hom_k(V, W)$, ocurre que $\{T_0\} \subset Ker(F)$ (1)

Sea $T \in Ker(F)$, así que, $T \in Hom_k(V, W)$ y $F(T) = M$ es la matriz asociada a tal transformación respecto de las bases de referencia B y B' . Como $T \in Ker(F)$, $F(T) = 0 \in K^{m \times n}$; es decir $M = 0$; por lo tanto, la interpretación matricial de T es tal que, $T: V \rightarrow W$ tal que, $T(A) = 0 \cdot A = 0_w$, lo que señala que T es la transformación cero. Por lo tanto, $Ker(F) \subset \{T_0\}$ (2).

De (1) y (2) se concluye que $Ker(F) = \{T_0\}$, y con ello, que F es isomorfismo de espacios vectoriales.

Pero hemos probado tácitamente, algo interesante, que F es inversible; y además, por ser inversible los espacios $Hom_k(V, W)$ y $K^{m \times n}$, tienen exactamente la misma dimensión. Pero $\dim(K^{m \times n}) = nm$, por tanto $\dim(Hom_k(V, W)) = nm = \dim(V) \cdot \dim(W)$

Decir que dos espacios vectoriales son isomorfos, indica que son vectorialmente equivalentes; es decir, se comportan del mismo modo, en el sentido que las propiedades que satisface uno de ellos, también la satisface el

otro. Nos permitimos, por lo tanto, dar algunas muestras de la regularidad de este comportamiento con los espacios $Hom_k(V, W)$ y $K^{m \times n}$.

Propiedades De $Hom_k(V, W)$	Reflejo sobre $K^{m \times n}$
1) $(f + g) + h = f + (g + h)$	1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) $f + g = g + f$	2) $A + B = B + A$
3) $f + T_0 = f$	3) $A + 0 = A$
4) $f + (-1)f = T_0$	4) $A + (-A) = 0$
5) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$	5) $\alpha(A\beta) = (\alpha\beta)A$
6) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$	6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
7) $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$	7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8) $1 \cdot f = f$	8) $1 \cdot A = A$
9) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$	9) $(AB)C = A(BC)$
10) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$	10) $A(B + C) = AB + AC$
11) f es isomorfismo	11) A posee inversa y es la matriz asociada a f^{-1}

Cuando se habla de compuestas, el lector debe suponer la existencia de otro espacio vectorial.

3.7 TRANSFORMACIONES Y MATRICES SEMEJANTES

Por el momento, sabemos que, si $f: V \rightarrow W$ es una transformación lineal de espacios vectoriales, entonces, $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$ (1).

En el caso que f sea un isomorfismo (f es inyectiva y sobreyectiva), entonces $\text{Ker}(f) = \{O_v\}$; $\text{Im}(f) = W$, que según (1) consigue que, $\dim(V) = \dim(W)$. Así que, $\dim(V) = \dim(W)$ es una condición necesaria para que $f: V \rightarrow W$ sea un isomorfismo.

Pero también es una consideración suficiente, ya que, si $\dim(V) = \dim(W) = n$, existen bases $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ de V y W respectivamente. Aquí, es fácil construir una transformación lineal (Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales), tal que, $f: V \rightarrow W$ consiga $f(A_i) = B_i, i \in J_n$ para todo A_i de V . Debido a que la representación de cada vector B_i de W es única como combinación lineal de los elementos de la base, se sigue que:

$$O_w = 0B_1 + 0B_2 + \dots + 0B_n, \text{ o sea que,}$$

$$O_w = 0f(A_1) + 0f(A_2) + \dots + 0f(A_n), \text{ o mejor,}$$

$$O_w = f(0A_1 + 0A_2 + \dots + 0A_n) = f(O_v); \text{ es decir, } O_v \in \text{Ker}(f).$$

Y si $A \in \text{Ker}(f)$, entonces, $A = a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n$; pero $f(A) = a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_nB_n = O_w$; de modo que, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$; ó sea que, $A = O_v$; por lo cual, $\text{Ker}(f) \subset \{O_v\}$. Así, que, $\text{Ker}(f) = \{O_v\}$, lo que equivale a decir que, f es un isomorfismo.

De este modo, hemos comprobado que dos espacios son isomorfos, si y solo si, tienen la misma dimensión.

Nos vamos a alejar momentáneamente de lo alcanzado en el capítulo con relación a cuándo dos espacios son isomorfos. Nos referimos particularmente a los espacios $\mathbb{R}^n$, manteniendo como objetivo principal encontrar un algoritmo para decidir cuándo dos espacios son isomorfos. Para ello, idearemos un método que permita encontrar todas las funciones lineales $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y el algoritmo para reconocer cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas.

Para ello, recordemos inicialmente algunos resultados sobre el producto de funciones, los cuales se dan como hechos conocidos, así:

- 1) La compuesta de sobreyectivas es sobreyectiva.
- 2) La compuesta de inyectivas es inyectiva.
- (1) y (2) la compuesta de biyecciones es biyección.
- 3) Si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, f^{-1} es biyectiva.
- 4) Si f es sobreyectiva y g es inyectiva, $g \circ f$ puede o no ser sobreyectiva o inyectiva.
- 5) Si f es inyectiva y g es sobreyectiva, $g \circ f$ es sobreyectiva.
- 6) Si f es inyectiva (o sobre) y g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva (o sobre).
- 7) Si f es biyectiva y g es sobre (o inyectiva), entonces $g \circ f$ es sobreyectiva (o inyectiva).
- 8) Si $f: A \rightarrow B$ es isomorfismo, $f^{-1}: B \rightarrow A$ es isomorfismo.

Todo esto indica que, si $f: A \rightarrow B$ es una función, la cualidad de ser o no inyectiva o sobreyectiva, permanece si se compone a f a izquierda o a derecha con funciones biyectivas de A en A y de B en B , según corresponda. Esto nos permite definir una relación de equivalencia y dividir las transformaciones lineales en clases, de modo que, cada clase posea un representante que facilite analizar las cualidades de todos los elementos de su clase.

DEFINICIÓN

Sean las transformaciones lineales f y g en $\text{Hom}_k(V, W)$; diremos que f es semejante a g si existen los isomorfismos $p: V \rightarrow V$ y $q: W \rightarrow W$, tal que, $g = q \circ f \circ p$; en este caso, denotaremos $f \sim g$.

La definición dada anteriormente se puede verificar de acuerdo a la Figura 9.

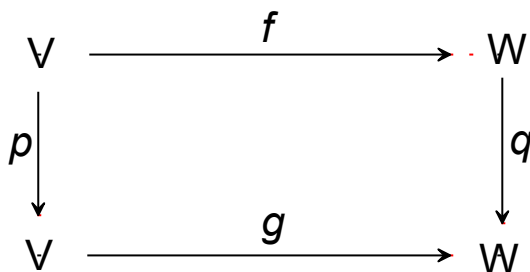


Figura 9. Semejanza de Transformaciones lineales

Fuente: elaboración propia

TEOREMA

La relación $f \sim g$ definida anteriormente, es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

- 1) $f \sim f$ para todo $f \in \text{Hom}_k(V, W)$. En efecto, como las transformaciones identidad: $I_V: V \rightarrow V$ e $I_W: W \rightarrow W$ son isomorfismos, se sigue que, $f = I_W \circ f \circ I_V$; luego, $f \sim f$.
- 2) Si $f \sim g$, entonces $g \sim f$. En efecto, dado que $f \sim g$, existen los isomorfismos

$p: V \rightarrow V$ y $q: W \rightarrow W$, tales que, $p^{-1}: V \rightarrow V$ y $q^{-1}: W \rightarrow W$ también son isomorfismos, y para los cuales, $g = q \circ f \circ p$.

Componiendo a derecha e izquierda por p^{-1} y q^{-1} , respectivamente, se sigue que:

$$q^{-1} \circ g \circ p^{-1} = I_W \circ f \circ I_V = f.$$

de lo cual se infiere que, $g \sim f$.

- 3) Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces, $f \sim h$. En efecto, como $f \sim g$, existen isomorfismos

$$p: V \rightarrow V \text{ y } q: W \rightarrow W, \text{ tal que, } g = q \circ f \circ p \quad (a).$$

Como $f \sim h$, existen isomorfismos $t: V \rightarrow V$ y $u: W \rightarrow W$, tal que, $h = u \circ g \circ t \quad (b)$.

Componiendo adecuadamente las expresiones (a) y (b), se sigue que,

$$h = u \circ (q \circ f \circ p) \circ t$$

y por la propiedad de asociatividad de la composición, se sigue que,

$$h = (u \circ q) \circ f \circ (p \circ t).$$

Luego. $f \sim h$, dado que, $u \circ q: W \rightarrow W$ y $p \circ t: V \rightarrow V$, son isomorfismos.

Ahora bien, algunas de las propiedades, sobre todo las que nos interesa, se conservan a través de esta semejanza, tal como se verifica en el siguiente teorema.

TEOREMA

Sean f y g transformaciones lineales de $Hom_k(V, W)$ si $f \sim g$, entonces:

- 1) f es inyectiva, si y solo si, g es inyectiva.
- 2) f es sobreyectiva, si y solo si, g es sobreyectiva

DEMOSTRACIÓN

- 1) f es inyectiva, si y solo si, g es inyectiva.

Supongamos que f es inyectiva.

Como $f \sim g$, entonces $g = q \circ f \circ p$, donde $p: V \rightarrow V$ y $q: W \rightarrow W$ son isomorfismos de espacios vectoriales.

Para probar si g es inyectiva, podemos suponer que $g(A) = 0_w$ y probar que $A = 0_v$. Esto es, si $g(A) = g(0_v)$, entonces, $A = 0_v$ con lo que termina la prueba.

Sea, por tanto, $g(A) = 0_w$; por tanto, $(q \circ f \circ p)(A) = 0_w$, o sea que, $q(f \circ p)(A) = 0_w$; pero q es biyección de W en W y particularmente inyectiva, por tanto, $(f \circ p)(A) = 0_w$; y así, $f(p(A)) = 0_w$.

Pero f es inyectiva, por tanto $p(A) = 0_v$, ya que $f: V \rightarrow W$ y como p es isomorfismo de V en V , se sigue que, $A = 0_v$.

En resumen; partimos del hecho que $g(A) = g(0_v)$ y mostramos que $A = 0_v$; luego, g es inyectiva.

Ahora, si g es inyectiva, dado que $f \sim g$, implica que $g \sim f$; entonces, existen

isomorfismos $u: V \rightarrow V$ y $t: W \rightarrow W$, tal que, $f = t \circ g \circ u$; y se repite exactamente la prueba anterior, concluyendo que f es inyectiva; por ello la omitimos.

2) f es sobreyectiva, si y solo si, g es sobreyectiva.

Supongamos que f es sobreyectiva.

Como $f \sim g$, existen los isomorfismos $p: V \rightarrow V$ y $q: W \rightarrow W$, tal que, $g = q \circ f \circ p$.

Debemos probar que, para todo $B \in W$ existe $A \in V$, tal que $g(A) = B$.

Supongamos que g no es sobre; así, existe B en W , tal que, para todo $A \in V$, $g(A) \neq B$. Así que, $(q \circ f \circ p)(A) \neq B$; es decir, $q((f \circ p)(A)) \neq B$ para todo $A \in V$; de modo que, existe $q^{-1}(B)$ en W ($q: W \rightarrow W$), tal

que, para todo $A \in V$, $(f \circ p)(A) \neq q^{-1}(B)$ (recuérdese que es isomorfismo). O sea que, $f(p(A)) \neq q^{-1}(B)$ para todo $A \in V$.

En otras palabras, para todo $p(A) \in V$ (p es isomorfismo de V en V), existen $q^{-1}(B) \in W$ para el cual $f(p(A)) \neq q^{-1}(B)$. Luego, f no es sobreyectiva, lo cual contradice la hipótesis.

Por tanto, g es una función sobreyectiva. La prueba de suficiencia es similar a la dada, por tanto, la omitimos.

Por otra parte, vimos que, si $\dim(V) = n, \dim(W) = m$, siendo V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K , los espacios vectoriales $\text{Hom}_K(V, W)$ y $K^{m \times n}$ (matrices de orden $m \times n$ con elementos en K), son isomorfos; y el isomorfismo que construimos fue:

$F: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$, tal que, $F(f) = M_{B, B'}$, donde $M_{B, B'}$ es la matriz asociada a f respecto de las bases de referencia B y B' de V y W respectivamente.

Construido este isomorfismo, vemos cómo las propiedades estructurales de los elementos de $\text{Hom}_K(V, W)$ se reflejan en $K^{m \times n}$, y particularmente, cómo el producto de matrices nace en su algoritmo de la relación encontrada entre las matrices asociadas a las transformaciones dadas. Todo esto indica que, probar una propiedad de las matrices resulta más cómodo hacerlo a través de las transformaciones lineales y viceversa.

Si llamamos $M_{B, B'} = M$, simplemente es fácil, como se vio anteriormente, construir la transformación matricial: $T: V \rightarrow W$, tal que, $T(A) = M \cdot A$ y $M \in K^{m \times n}$ siendo la matriz que identifica a la transformación f respecto de determinadas bases de referencia B, B' de V y W . Es decir, $M \cdot A$ es otra escritura formal de f .

Ahora podemos construir una función:

$\varphi: K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$, tal que, si X es vector coordenado de algún vector fijo de V , entonces, $\varphi(M) = M \cdot X$.

φ es transformación lineal ya que, si M y N están en $K^{m \times n}$, y a y b en K entonces, por propiedades de las matrices, se tiene que,

$$\varphi(aM + bN) = (aM + bN)X = aMX + bNX = a\varphi(M) + b\varphi(N).$$

Siendo $X = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ donde $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es base de V ; así, M identifica completamente a f .

Entonces, es claro que, $\varphi(M) = MX$, donde M es la matriz asociada a f , está identificando a f .

Así, que, $(\varphi \circ F)f = \varphi(F(f)) = \varphi(M) = I(f)$ (por formalidad).

Luego $F^{-1} = \varphi$, por tanto φ es isomorfismo de espacios vectoriales. Además, F^{-1} debe ser transformación lineal, como se evidencia aquí; de acuerdo con el teorema anterior, asociado al concepto de isomorfismo, aparece la transformación lineal inversa y, por tanto, también el de la matriz inversible.

DEFINICIÓN

Una matriz $M \in K^{m \times n}$ se dice inversible, si la correspondiente función lineal $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ es inversible (es decir es isomorfismo).

La matriz idéntica de orden n (matriz cuadrada) tiene elementos no nulos en la diagonal principal, todos iguales a uno; todos los demás son cero.

$$\text{Así, } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que en la semejanza de transformaciones lineales, se da el caso que, si $M \in K^{m \times n}$, entonces, $I_m M = M$ e $I_n M = M$; hecho que se refleja finalmente, en la teoría de las transformaciones lineales.

Además, si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, y sobre el mismo cuerpo K ; una transformación lineal $f: V \rightarrow W$ es un isomorfismo, si inicialmente $\dim(V) = \dim(W)$; esto nos permite afirmar, que las matrices inversibles deben ser cuadradas. En otras palabras, matrices que no son cuadradas, no puede tener inversa.

De este modo, si $f: V \rightarrow W$ es isomorfismo, existe $g: W \rightarrow V$, tal que, $g \circ f = I_v$ y $f \circ g = I_w$; esto indica que, una matriz cuadrada $M_{n \times n}$ posee inversa, si y solo si, existe una matriz $N_{n \times n}$, tal que $I = NM = MN$.

Asimismo, correspondiendo a la relación de semejanza en $Hom_k(V, W)$, tenemos la definición que sigue.

DEFINICIÓN

Dos matrices M y N de $K^{n \times n}$ se llaman semejantes, si las transformaciones correspondientes a ellas en $Hom_k(V, W)$ son semejantes; en este caso, escribimos $M \sim N$.

En otras palabras, $M \sim N$ si existen las matrices inversibles P y Q de $K^{n \times n}$, tales que $N = QMP$.

De aquí en adelante, denotaremos como $Gl_n(K) = \{M \in K^{n \times n} / M \text{ es inversible}\}$.

Por tanto, decir que $M \in Gl_n(k)(K)$, implica que, existe $N \in K^{n \times n}$ tal que $MN = NM = I_n$; esto es, $N \in Gl_n(K)$; aún más, si $P \in K^{n \times n}$ es otra matriz tal que $MP = PM = I_n$, entonces,

$P = PI_n = P(MN) = (PM)N = I_n N = N$; o sea que $P = N$.

Este resultado explica que, la inversa de una matriz inversible es única. Denotaremos por M^{-1} la inversa de la matriz M .

Vimos ligeramente cómo la compuesta de isomorfismos es un nuevo isomorfismo. Esto se refleja en nuestro conjunto $\text{Gl}_n(k)(k)$ de la manera siguiente:

Si P y Q están en $\text{Gl}(k)$, entonces $PQ = QP$ también lo están. Mostemos lo anterior para PQ .

En efecto:

$$(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) = P(QQ^{-1})P^{-1} = PI_nP^{-1} = (PI_n)P^{-1} = PP^{-1} = I_n.$$

$$(Q^{-1}P^{-1})(PQ) = Q^{-1}(P^{-1}P)Q = Q^{-1}I_nQ = Q^{-1}(I_nQ) = Q^{-1}Q = I_n.$$

Todo esto significa que $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.

De esta manera, hemos construido una ley de composición interna en $\text{Gl}(k)$, llamada *Multiplicación Matricial*, que por correspondencia con la composición de transformaciones lineales de $\text{Hom}_k(V, W)$, es asociativa, no conmutativa; y cada elemento $M \in \text{Gl}_n(K)$ posee su inverso en $\text{Gl}_n(K)$; y por consiguiente, el elemento unidad I_n que está en $\text{Gl}_n(K)$, es tal que $I_n^{-1} = I_n$.

Queda constituido, por lo tanto, el grupo no abeliano. $(\text{Gl}_n(K), \cdot)$ que recibe el nombre de *grupo lineal de orden n* . Particularmente, si $K = \mathbb{R}$, se denomina *Grupo Lineal Real de Orden n* .

3.8 LOS ALGORITMOS

Vamos a construir, debido a nuestra inquietud, un par de algoritmos: el primero, permitirá decidir cuándo una función es inyectiva o sobreyectiva; el segundo, calcularía la inversa de una transformación lineal biyectiva. Obtenemos tácitamente los resultados ya conocidos, como los siguientes:

- 1) Si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces no existe ninguna transformación lineal sobreyectiva de V en W (al contrario, si se puede construir). El lector debe recordar que este es un resultado inmediato: $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$. Si f fuera sobreyectiva, entonces, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$ y, aunque $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, jamás ocurre que $\dim(V) = \dim(W)$.
- 2) Si $n > m$, esto es, si $\dim(V) > \dim(W)$, no existe ninguna función inyectiva de V en W . Esto, ya que, si $f: V \rightarrow W$ es inyectiva, $\text{Ker}(f) = \{0_v\}$, y como $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$, se sigue que, $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f))$; pero $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(W)$, luego, $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(W)$; o mejor, $\dim(V) \leq \dim(W)$, hecho que contraria a la hipótesis. Así que, si $\dim(V) > \dim(W)$, no es posible construir una transformación lineal inyectiva de V en W .

Hemos visto que, si f y g están en $\text{Hom}_k(V, W)$, son semejantes, entonces f es 1 – 1 (sobre), si y solo si, g es 1 – 1 (sobre). De esta manera, pasa saber si f es inyectiva o sobreyectiva, basta encontrar una función g semejante a f , de la cual se decida inmediatamente si es inyectiva o sobreyectiva.

Por ejemplo, si $f \in \text{Hom}_k(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4)$ y por algún mecanismo demostramos que f es semejante a la función $g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4)$, tal que, $g(a, b, c) = (a, b, c, 0)$, entonces f es inyectiva pero no sobreyectiva, clasificación nacida de la clasificación de g .

Si particularizamos el espacio $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^n$, todo lo anterior nos lleva a estudiar un tipo especial de funciones conocidas como *Funciones Canónicas de Hermite*.

DEFINICIÓN

Una función lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice canónica de Hermite, si es una de las funciones siguientes:

- a) $C_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, $C_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.
- b) Para r , tal que $1 \leq r \leq \min\{n, m\}$, $r \in \mathbb{N}$.

$C_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es tal que,

$$C_r((x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0).$$

Sobre estas Funciones Canónicas de Hermite, se ve con facilidad si son sobre ó 1 – 1.

Por ejemplo, las Funciones Canónicas de Hermite de $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, son:

$$C_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \text{ tal que } C_0(x, y, z) = (0, 0, 0, 0).$$

$$C_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tal que } C_1(x, y, z) = (x, 0, 0, 0).$$

$$C_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tal que } C_2(x, y, z) = (x, y, 0, 0).$$

$$C_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tal que } C_3(x, y, z) = (x, y, z, 0).$$

Ninguna de estas funciones es sobreyectiva, y solo C_3 es inyectiva.

C_2 no es inyectiva, ya que, $C_2(a, b, c) = C_2(a, b, d) = (a, b, 0, 0)$; y sin embargo, generalmente $(a, b, c) \neq (a, b, d)$.

Igual hecho se puede verificar para C_1 y C_0 .

Las funciones canónicas de Hermite de $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, son:

$$C_0: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } C_0(x, y, z, t) = (0, 0, 0).$$

$$C_1: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } C_1(x, y, z, t) = (x, 0, 0).$$

$$C_2: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } C_2(x, y, z, t) = (x, y, 0).$$

$$C_3: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } C_3(x, y, z, t) = (x, y, z).$$

Sobre los cuales, puede observarse que, ninguna es inyectiva y solo C_3 es sobreyectiva.

Todo lo visto con estos ejemplos, se puede generalizar de la siguiente manera:

Sea $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces:

- 1) Si $n < m$, ninguna Función Canónica de Hermite en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es sobre, y la única 1 – 1 es: $C_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0 \dots, 0)$
- 2) Si $n > m$, ninguna Función Canónica de Hermite en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es inyectiva, y la única sobreyectiva es: $C_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $C_m(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (recordar la construcción).
- 3) Si $n = m$, la única función canónica de Hermite inyectiva en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, es la identidad; y además, es también la única sobreyectiva.

Como el lector recordará, todo lo anterior se puede formular matricialmente, donde solo aceptaremos para este trabajo, las bases canónicas como base de la referencia, permitiéndonos hablar, de esta manera, de las *Matrices Canónicas de Hermite*.

DEFINICIÓN

Una matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se llama *Matriz Canónica de Hermite* si corresponde a la matriz estándar de una función canónica de Hermite en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Por ejemplo, las Matrices Canónicas de Hermite $\mathbb{R}^{4 \times 3}$ corresponden a las Funciones Canónicas de Hermite en $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ y son las siguientes:

$$M(C_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(C_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(C_2) \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como puede comprender el lector, el problema de semejanza entre transformaciones lineales se reduce al problema de semejanza entre matrices.

Debemos recordar que una matriz $M_{m \times n}$ es semejante a otra N del mismo orden, si existen matrices $P \in Gl_m(\mathbb{R})$ y $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ tal que, $N = PMQ$.

Lo que esperemos, es que $N \sim M$, sea tal que N sea Canónica de Hermite; si N no lo es, se puede continuar el proceso buscando una matriz S semejante con N que puede o no ser canónica de Hermite, y como $M \sim N, N \sim S$ entonces $M \sim S$.

Si S es de Hermite, se termina el proceso, de lo contrario se puede continuar. Comprobaremos más adelante que, con este proceso siempre se llega a una Matriz Canónica de Hermite. Lo importante es conocer las matrices especiales de $Gl_m(\mathbb{R})$ y $Gl_n(\mathbb{R})$ que consigan este objetivo.

Para tal efecto, consideremos las matrices inversibles de $Gl_n(\mathbb{R})$ que llamaremos *Matrices Elementales* que, como se evidencia, corresponden a los isomorfismos elementales en el espacio $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

3.9 ISOMORFISMOS ELEMENTALES EN $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

En virtud de lo expuesto anteriormente, nos preocupa estudiar los isomorfismos elementales en $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que son de tres tipos y se definen como sigue:

- 1) Sea $\sigma: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ una biyección, esto significa que $n = m$; en realidad, σ es una "permutación" de los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ que, originalmente se denota así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ determina la biyección $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tal que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$. Con todo lo anterior, la transformación lineal $f_{\sigma}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que,

$f_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ es un isomorfismo elemental de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, en correspondencia con la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la transformación $f(x, y, z) = (z, x, y)$ es un isomorfismo elemental de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ (*Primer tipo*).

- 2) Sea $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$ y sean i, j en $\{1, 2, \dots, n\}$ de modo que $i \neq j$; entonces, la transformación lineal $f_{ij}^{\rho}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que,

$$f_{ij}^{\rho}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \rho x_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

 es un isomorfismo elemental de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo,

$$f_{2,3}^{\frac{1}{2}}(x, y, z, t) = \left(x, y + \frac{1}{2}z, z, t\right).$$

es un isomorfismo elemental de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ y del tipo definido (*Segundo tipo*).

- 3) Sea $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ y sea $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, entonces $f_i^\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \rho x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es una transformación lineal y es Isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Así, por ejemplo

$$f_3^{i\frac{3}{5}}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tal que}$$

$$f_3^{i\frac{3}{5}}(x, y, z, t) = \left(x, y, \frac{3}{5}t, t\right) \text{ es un isomorfismo de } \mathbb{R}^4 \text{ en } \mathbb{R}^4$$

(*Tercer tipo*).

El hecho que las transformaciones elementales definidas anteriormente sean isomorfismos, es algo que puede verificarse con facilidad, calculando el Kernel de cada transformación. Esto indica que, cada una de estas transformaciones posee su respectiva inversa y deben buscarse como sigue:

- 1) Para las transformaciones $f_\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ su inversa debe buscarse a través de σ^{-1} de modo que, $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma = I_{\mathbb{R}^n}$; así, por ejemplo, basándonos en la biyección (permutación), $\sigma: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $f_\sigma: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es tal que, $f_\sigma(x, y, z, u) = (z, u, x, y)$ y para buscar f_σ^{-1} busquemos inicialmente σ^{-1} como,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ entonces } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Y es tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \vartheta^{-1}$$

Entonces $f_\sigma = f_{\sigma^{-1}}$.

Por ejemplo, si $f_\sigma(x, y, z, u) = (z, u, x, y)$ entonces $f_\sigma^{-1}(x, y, z, u) = (x, u, y, z)$.

Es claro que, $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}}(x, y, z, u) = f_\sigma(x, u, y, z) = (x, y, z, u) = I_{\mathbb{R}^3}(x, y, z, u)$,

2) La inversa del isomorfismo f_{ij}^ρ es $f_{ij}^{-\rho}$.

Así, dada $f_{1,2}^3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_{1,2}^3(x, y, z) = (x + 3, y, z)$, entonces $(f_{1,2}^3)^{-1} = f_{1,2}^{-3}$ ya que $f_{1,2}^{-3}(x, y, z) = (x - 3, y, z)$.

3) La inversa de los isomorfismos f_i^ρ es $f_i^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho \neq 0$ y su compuesta es la idéntica del espacio respectivo.

DEFINICIÓN

Llamaremos *matriz elemental* a toda matriz asociada a un *isomorfismo elemental*. Esto significa que, toda matriz elemental posee su respectiva inversa, que, entre otras cosas, también es elemental.

Por otra parte, cada matriz elemental se consigue a partir de la matriz identidad del orden respectivo permutando filas (columnas), multiplicando por un escalar alguna fila(columna) o sumando a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un escalar; hecho que está asociado completamente a los isomorfismos elementales. Más aún, en asocio con la composición de funciones, está la multiplicación de matrices y a partir de esto se justifican las siguientes afirmaciones:

Sea $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matriz asociada a una transformación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces siendo $A_{m \times m}$ una matriz elemental, el producto $A \cdot M$ es una matriz $\mathbb{R}^{m \times n}$, conseguida a partir de M , así:

- a) Permutando filas. Si A es la matriz elemental en la que se permutan las filas.
- b) Multiplicando una fila por un escalar no nulo y sumándose a otra. Si en A se ha efectuado previamente lo mismo a partir de la identidad.
- c) Multiplica una fila por un escalar distinto de cero. Si la matriz elemental ha sido conseguida a partir de la identidad multiplicando la fila respectiva por dicho escalar.

Del mismo modo se consigue similares efectos, pero sobre columnas, si multiplica a M por una matriz elemental A a derecha (las mismas se denotan por K).

DEFINICIÓN

Llamamos cambios elementales en las filas de una matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a cualquier cambio siguiente:

- 1) Permutación de filas
- 2) Multiplicar a una fila por un escalar ρ y sumarla a otra
- 3) Multiplicar una fila por un escalar no nulo

Si los mismos cambios a) b) y c) se efectúan sobre columnas, se llaman *cambios elementales en columnas*.

Como estos cambios se suscitan al multiplicar a derecha e izquierda por una matriz elemental, hemos construido el algoritmo para conseguir la matriz semejante a otra, y con ello, cuando una transformación lineal es semejante a otra.

Mostremos todo esto con un ejemplo.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que, $f(x, y, z) = (x - y - z, -x - y + z, x + y + z, -x + y - z)$.

La matriz estándar asociada a ésta transformación, se consigue calculando las imágenes de los vectores de la base canónica.

$$f(1,0,0) = (1, -1, 1, -1)$$

$$f(0,1,0) = (-1, -1, 1, 1)$$

$$f(0,0,1) = (-1, 1, 1, -1)$$

Luego,

$$F(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{B,B'}$$

(B y B' son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente)

Ahora suscitamos cambios elementales a M hasta trasformarla en una matriz Hermítica canónica, así:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{K_{2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{K_{3+\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$H_{3+4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} K_{4+1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} K_{3(-1)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Y así, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que,

$f(x, y, z) = (x - y - z, -x - y + z, x + y + z, -x + y - z)$ es semejante a $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que, $g(x, y, z) = (x, y, z, 0)$.

Por tanto, f es inyectiva pero no sobreyectiva. Recuérdese que, g es canónica de Hermite.

Pero cuáles son los isomorfismos $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tales que, $g = q \circ f \circ p$.

El algoritmo empleado en el desarrollo de las matrices semejantes, nos lo determina. Para ello, solo es suficiente recordar que, un cambio elemental de filas es equivalente a multiplicar a izquierda por la matriz elemental respectiva; y que, un cambio elemental por columnas, es equivalente multiplicar a derecha por la matriz elemental respectiva.

En nuestro caso, las matrices elementales a izquierda tienen orden 4×4 y 3×3 las a derecha. Pensando en esto, se concluye que la matriz asociada a q es el producto de las matrices H , en el siguiente orden:

$$\begin{aligned} M(q) &= H_{3,4} \cdot H_{3+2} \cdot H_{4+1} \cdot H_{3+4} \cdot H_{2+1} \cdot I_4 = H \cdot I_4 = H \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= H_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= H_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las notaciones $H_1, H_2, \dots$ solo es notación personal que evita lenguaje en la notación.

Luego $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, es tal que,

$$q(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = (x, x + y, x + u, x + y + z + u).$$

De igual modo, la matriz asociada a p se consigue como el siguiente producto:

$$\begin{aligned} M(p) &= K_{2+1} \cdot K_{3+1} \cdot K_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot K_3 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot K_3(-1) \\ &= I_3 K_{2+1} \cdot K_{3+1} \cdot K_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot K_3 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot K_3(-1) = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} K_4 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es tal que,

$$p(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, -\frac{y}{2}, -\frac{z}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } (q \circ f \circ p)(x, y, z) &= (q \circ f) \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, -\frac{y}{2}, -\frac{z}{2} \right) = q(x, -x + \\ & y, x - y - z, -x + z) \\ &= (x, y, z, 0) = g(x, y, z, u). \end{aligned}$$

Luego, $g = q \circ f \circ p$, tal como lo hemos evidenciado antes.

El anterior ejemplo, que soluciona completamente el problema propuesto, podemos generalizarlo en el teorema que sigue.

TEOREMA

Toda matriz $M \in K^{m \times n}$ es semejante a una Función Lineal Canónica de Hermite de $K^{m \times n}$; o lo que es lo mismo, toda función lineal $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es semejante a una Función Lineal Canónica de Hermite g de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $M \in K^{m \times n}$

Si $M = 0$, como la matriz cero es canónica de Hermite, no hay nada que probar.

Sea, por tanto, $M \neq 0$, esto es, al menos un elemento es no cero.

$$\text{Tomando } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $a_{11} = 0$, suscitamos un cambio elemental por filas o columnas (o de ambas) de tal modo que el lugar que ocupa originalmente a_{11} , sea ocupado por un elemento distinto de cero. Siendo así, no se pierde generalidad en suponer que $a_{11} \neq 0$. Multiplicamos la primera fila por $\frac{1}{a_{11}}$, consiguiendo en la posición sub 1,1 el elemento 1.

Suscitamos entonces, los siguientes cambios elementales:

$$H_{2+1}(-a_{21}), H_{3+1}(-a_{31}), \dots, H_{m+1}(-a_{m1})$$

De igual manera, suscitamos los siguientes cambios elementales:

$$K_{2+1}\left(\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right), K_{3+1}\left(\frac{-a_{13}}{a_{11}}\right), \dots, K_{n+1}\left(\frac{-a_{1n}}{a_{11}}\right)$$

consiguiendo así, la matriz $M_1 \sim M$ de tal modo que,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{23} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dejando intactas la primera fila y columna, y mediante cambios elementales por filas o columnas, se logra que un elemento no nulo de la matriz ocupe el lugar de b_{22} . Nuevamente, no se pierde generalidad en suponer que $b_{22} \neq 0$. Si esto no es posible, todos los elementos de b_{ij} son cero, y por tanto, M_1 es Canónica de Hermite, y allí termina la prueba.

Multiplicamos, si es posible, la segunda fila por $\frac{1}{b_{22}}$ y suscitamos los siguientes cambios elementales:

$$H_{3+2}(-b_{32}), H_{4+2}(-b_{42}), \dots, H_{m+2}(-b_{m2}); y K_{3+2}\left(-\frac{b_{23}}{b_{22}}\right), K_{4+2}\left(-\frac{b_{24}}{b_{22}}\right), \dots, K_{n+2}\left(-\frac{b_{2n}}{b_{22}}\right)$$

consiguiendo la matriz $M_2 \sim M_1$, donde,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, podemos continuar el proceso que termina en un número finito de pasos, ya que existe un número finito de filas y de columnas, consiguiendo matrices $M_3, M_4, \dots, M_p$, tal es que,

$$M \sim M_1 \sim M_2 \sim \cdots \sim M_p$$

de modo que, ahora M_p es canónica de Hermite. De este modo, $M \sim M_p$, tal como se quería comprobar.

■

Por otra parte; el lector debe recordar que, efectuar en una matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ un cambio elemental por filas o columnas, equivale a multiplicar M a izquierda por una matriz elemental $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$; o a derecha por una matriz elemental $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Como se vio antes, estas matrices elementales corresponden a isomorfismos elementales y, por lo que se ha visto, la compuesta de isomorfismos es isomorfismo. Y esto es la esencia del algoritmo. Más aún, hemos descrito el algoritmo, ya que, si $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces $M \sim M(C_\rho)$, es una Matriz Canónica de Hermite; así, $M(C_\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Luego, a través de cambios elementales de filas y columnas, se lleva a M a ser semejante con $M(C_\rho)$.

Sean $H_1, H_2, \dots, H_k$ las matrices elementales correspondientes a los cambios elementales por filas en su orden; y $K_1, K_2, \dots, K_l$ a los cambios por columnas, de modo que,

$$M(C_\rho) = H_k \cdot k_{k-1} \cdot \dots \cdot H_2 \cdot H_1 \cdot M \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_l.$$

Si llamamos,

$$H_k \cdot k_{k-1} \cdot \dots \cdot H_2 \cdot H_1 = Q; \text{ y } P = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_l.$$

Entonces,

$$M(C_\rho) = Q \cdot M \cdot P,$$

donde P y Q son matrices inversibles; es decir, $Q \in Gl_m(\mathbb{R})$ y $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. Más aún, Q es la matriz asociada a la transformación (isomorfismo $q \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$) y P la asociada a $p \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de modo que,

$$C_\rho = q \circ f \circ p, \text{ siendo } F(f) = M.$$

Además, si $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es inversible, entonces (como se vio anteriormente) C_ρ es la transformación idéntica. Por tanto, $M(C_\rho) = I_n = Q \cdot M \cdot P$; o sea, $Q^{-1} = M \cdot P$; de donde, $Q^{-1}P^{-1} = M = (PQ)^{-1}$; o sea que, $M^{-1} = PQ$.

Lo que soluciona completamente el problema.

■

EJEMPLO

Determinar si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2x + y, x - y, z)$ es isomorfismo; si lo es, calcule la inversa. Para el efecto, utilice el algoritmo descrito.

SOLUCIÓN

Calculemos $F(f)$.

$$f(1,0,0) = (2,1,0); \quad f(0,1,0) = (1,-1,0); \quad f(0,0,1) = (0,0,1)$$

Se ve que, $F(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora determinemos por semejanza, partiendo de ella, una Matriz Canónica de Hermite, semejante a la dada, así:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_{1+2} &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_{1(\frac{1}{3})} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_{2(-1)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &H_{2+(-1)1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, $I_3 = H_{2+(-1)1} \cdot H_{1(\frac{1}{3})} \cdot H_{1+2} \cdot F(f) \cdot k_{2(-1)}$.

Luego, $I_3 \sim F(f)$; es decir, f es isomorfismo.

Además, $(F(f))^{-1} = H_{2+(-1)1} \cdot H_{1(\frac{1}{3})} \cdot H_{1+2} \cdot k_{2(-1)}$; es decir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} Q &= H_{2+(-1)1} \cdot H_{1(\frac{1}{3})} \cdot H_{1+2} \cdot I_3 = H_{2+(-1)1} \cdot H_{1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= H_{2+(-1)1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esto indica que, $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que,

$$f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{-x+2y}{3}, z \right).$$

En efecto,

$$(f^{-1} \circ f)(x, y, z) = f^{-1}(2x + y, x - y, z) = (x, y, z).$$

3.10 EJERCICIOS

1. Escriba las transformaciones canónicas de Hermite de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5), \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4), \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4), \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2), \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Determine cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas. Escriba sus matrices asociadas.
2. Escriba algunos isomorfismos elementales en los espacios $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.
3. Determine las Funciones Canónicas de Hermite semejantes a cada una de las siguientes transformaciones:
 - a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x - y, x + z, x - z)$
 - b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z, x + y - z)$
 - c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y - z)$
 - d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z + t)$
 - e) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z, t) = (x - t, y + z, x + t + z, y - z + t)$

f) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z, t) = (x - y, y - z, z - t, x + y - z - t)$

Clasifique las transformaciones lineales. Además, determine las transformaciones que permiten tal semejanza.

4. Determine cuáles de las siguientes matrices son inversibles; si lo son, calcule su inversa.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - y + z)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z, y)$

c) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, t) = (x - y, y - z, z - t, y - t)$

d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$

e) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, t) = (2x + y, 2y - z, z + t, y + 2t)$

f) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + 3y, x - 2y, y + 2z)$

5. Demuestre que, si $M \in Gl_n(\mathbb{R})$, entonces M^{-1} es el producto de matrices elementales.

BIBLIOGRAFÍA

- Ayres, F. (1991). *Teoría y problemas de matrices*. McGraw-Hill.
- Barbolla, R., y Sanz, P. (1998). *Álgebra lineal y Teoría de Matrices*. Prentice Hall.
- Caicedo, Z. S. J., y Portilla, O. H. J. (2020). *Fundamentos de Matemáticas Generales*. Editorial Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.
- Frank, A. (1980). *Fundamentos de Matemáticas Superiores*. McGraw-Hill.
- Grossman, S. I. (1988). *Aplicaciones del Álgebra lineal*. Díaz de Santos, Madrid.
- Grossman, S. I. (1995). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill.
- Grossman, S. I. (1988). *Álgebra Lineal*". 2ª edición. Diaz De Santos, Madrid.
- Gutiérrez, A. y García, F. (1990). *Álgebra lineal*. Tomo 2. Pirámide, Madrid.
- Herstein, I. N. y Winter (1989). *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Díaz de Santos, Madrid.
- Ikrámov, J. (1990). *Problemas de Álgebra Lineal*. Mir. Moscú.
- Pinzón, Á. (1973). *Conjuntos y Estructuras, Edición revisada. Teoría, 350 problemas resueltos, 433 ejercicios propuestos*. Harla, México.
- Portilla, O., H. J., y Caicedo Z., S. J. (2019). *Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales*. Colombia: Editorial Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.
- Rojo, J. (2001). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill.
- Rojo, J. y Martín, I. (1994). *Ejercicios y problemas de álgebra*. McGraw-Hill.
- Wexler, Ch. (1977). *Geometría Analítica: Un enfoque vectorial*. Montaner y Simón, S A. Barcelona.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Suma de dos vectores por método del paralelogramo	28
Figura 2. Suma de tres vectores – parte 1	29
Figura 3. Suma de tres vectores – parte 2	29
Figura 4. Propiedades de las fuerzas	31
Figura 5. Núcleo de una transformación lineal.....	113
Figura 6. Imagen de una transformación lineal.....	113
Figura 7. Representación de composición de funciones.....	146
Figura 8. Producto de transformaciones.....	146
Figura 9. Semejanza de Transformaciones Lineales	184

èditorial

Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: Abril 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El libro de texto *Elementos de Álgebra Lineal*, presenta el contenido del curso Álgebra Lineal, que se ofrece en la Universidad de Nariño.

El contenido de este libro, se organiza en tres capítulos, cada uno de los cuales aborda aspectos específicos y fundamentales de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. A continuación, se ofrece un resumen detallado del contenido de cada capítulo, que sirve como guía, para explorar en profundidad los temas tratados.

El Primer Capítulo, comienza con una introducción a los conceptos preliminares y leyes de composición en los espacios vectoriales. A medida que avanzamos, exploramos la estructura de grupo y anillo, así como las propiedades y operaciones relacionadas con los subespacios vectoriales. Además, abordamos la dependencia e independencia lineal de vectores, las bases, la dimensión y las coordenadas de un vector en el contexto de los espacios vectoriales.

En el Segundo Capítulo, nos sumergimos en la definición de homomorfismo, clases de homomorfismos, transformaciones lineales y sus propiedades, así como los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal. También exploramos la transformación matricial y su aplicación en diversas situaciones.

El Tercer Capítulo, aborda aspectos avanzados de las operaciones con transformaciones lineales, incluyendo la equivalencia, adición y producto de transformaciones, la inversa de una transformación lineal, y las matrices asociadas a diferentes operaciones y transformaciones lineales. Además, se exploran conceptos como el grupo de isomorfismos de $\text{Hom}_K(V, W)$ en $K^{m \times n}$, transformaciones y matrices semejantes, isomorfismos elementales en $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, junto con una sección de ejercicios para reforzar el aprendizaje.



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1994



ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000021 - LÍNEA 11 DE 2023



Universidad de Nariño

editorial
Universidad de Nariño