

Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Masas y mezclas en el sector de quarks del Modelo Estándar

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título de:
Magister en Física

Larry S. Burbano Pantoja

San Juan de Pasto

Nariño Colombia

17 de octubre de 2025.

Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Masas y mezclas en el sector de quarks del Modelo Estándar

Larry Segundo Burbano Pantoja

TRABAJO DE GRADO

Director:

Yithsbey Giraldo
PhD en Física

San Juan de Pasto

Nariño Colombia

17 de octubre de 2025.

©2018- LARRY SEGUNDO BURBANO PANTOJA

Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la
Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de aceptación

Yithsbey Giraldo

Director

Willian Ponce

Jurado

Eduardo Rojas

Jurado

Juan Carlos Salazar

Jurado

Agradecimientos

A la Universidad de Nariño, al Departamento de Física y a cada uno de mis profesores, muchas gracias por compartir sus conocimientos y abrirme las puertas del fascinante mundo de la ciencia. Mis más sinceros agradecimientos al Ph.D. Yithsbey Giraldo, por su dirección y constante apoyo durante la realización del presente trabajo de grado.

*Las matemáticas nos ayudan a descubrir la lógica que subyace
al mundo tan complejo y caótico en el que vivimos.*
Marcus du Sautoy.

Masas y mezclas en el sector de quarks del Modelo Estándar

Resumen

Esta investigación se centra en el estudio de los ceros de textura en el sector fermiónico, específicamente en las matrices de Yukawa asociadas a los quarks. El objetivo es reducir al mínimo los parámetros libres del modelo, con el fin de explorar posibles relaciones entre las masas de los quarks y los ángulos de mezcla presentes en la matriz CKM. Para ello, se consideran diferentes configuraciones de texturas con ceros, tomando como punto de partida las propuestas de Fritzsch y sus extensiones. El análisis se desarrolla mediante técnicas analíticas y numéricas, evaluando la compatibilidad de dichas texturas con los valores experimentales actuales de masas y parámetros de mezcla. Con este enfoque se busca determinar cuáles estructuras de textura conservan poder predictivo y pueden servir como base para entender mejor los patrones observados en el sector de sabores. Los resultados permiten identificar limitaciones de los esquemas tradicionales y señalar posibles rutas hacia modelos más realistas que contribuyan a la comprensión de la física más allá del Modelo Estándar.

Masses and Mixtures in the Quark Sector of the Standard Model.

Abstract

This research focuses on the study of texture zeros in the fermionic sector, specifically in the Yukawa matrices associated with quarks. The aim is to minimize the number of free parameters in the model in order to explore possible relationships between quark masses and the mixing angles present in the CKM matrix. Different texture configurations with zeros are considered, taking as a starting point the proposals by Fritzsch and their extensions. The analysis is carried out through analytical and numerical techniques, evaluating the compatibility of these textures with the current experimental values of masses and mixing parameters. This approach seeks to determine which texture structures retain predictive power and can serve as a basis for a better understanding of the observed patterns in the flavor sector. The results allow us to identify the limitations of traditional schemes and to point out possible directions toward more realistic models that may contribute to the understanding of physics beyond the Standard Model.

Índice general

1	El Sector Electrodébil en el Modelo Estándar	13
1.1	El lagrangiano de Yukawa para el sector de quarks	14
1.2	El lagrangiano de las corrientes cargadas para el sector de quarks	16
2	La transformación de base débil (WBT)	19
3	Ceros de textura en el sector de quarks	22
3.1	Patrón con dos ceros de textura en la diagonal	23
3.2	Patrón con un cero de textura en la diagonal	24
3.3	Análisis de los parámetros en el modelo con uno y dos ceros de textura en la diagonal	25
3.3.1	CASO I: Tres ceros de textura con dos de ellos en la diagonal	27
3.3.2	CASO II: Tres ceros de textura con un cero en la diagonal	28
4	Modelos analíticos con cinco ceros de textura	30
4.1	Caso I	30
4.2	Caso II	33
5	Conclusiones y Recomendaciones	36
A	La ruptura espontánea de simetría en el Modelo Estándar	38
A.1	Ruptura espontánea de simetrías continuas no abelianas	40
B	El lagrangiano de corrientes neutras y cargadas para el sector de quarks	43
C	Del estado de interacción al estado de masa en el lagrangiano del sector de quarks	48
D	El teorema de la descomposición polar	50
E	La matriz CKM	55
F	Cálculos en Wolfram Mathematica.	56
F.1	Descomposición polar	56
F.2	Operadores de permutación en las matrices de masa	57
F.3	Las matrices M_q y U	59
F.3.1	Construcción de la matriz M_q	59
F.3.2	Construcción de la matriz U	59
F.3.3	Diagonalización de la matriz M_q	60
F.3.4	Comprobación numérica de la matriz M_q y la matriz unitaria U_q	60

Introducción

El Modelo Estándar (S.M) de la Física de Partículas es una estructura teórica que representa una de las piedras angulares de nuestra comprensión actual de la naturaleza fundamental del universo. Esta teoría describe las interacciones y propiedades de las partículas elementales que componen la materia y las fuerzas que gobiernan su comportamiento.

Una de las características más notables del Modelo Estándar es su capacidad para predecir diferentes propiedades de las partículas dependiendo de la energía a la que se observen. Esto se debe a que las partículas elementales interactúan a través de varias fuerzas fundamentales, como la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte, y estas interacciones pueden tener un impacto significativo en sus propiedades observables.

Un ejemplo destacado de esta capacidad predictiva del Modelo Estándar es la masa de las partículas. La masa de una partícula puede variar dependiendo de la energía a la que se la observe, un fenómeno que ha sido corroborado experimentalmente mediante el uso de grandes aceleradores de partículas. Estos aceleradores, como el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el CERN, han permitido a los científicos estudiar las propiedades de las partículas subatómicas con una precisión sin precedentes.

En particular, el sector fermiónico del Modelo Estándar, que incluye partículas como los quarks, juega un papel crucial en nuestra comprensión de la estructura de la materia. Los quarks son los constituyentes fundamentales de los hadrones, como los protones y neutrones, que a su vez forman los núcleos atómicos. Estudiar las propiedades de los quarks y cómo interactúan entre sí nos proporciona información invaluable sobre la naturaleza de la materia y las fuerzas que la gobiernan.

Por lo tanto, el análisis detallado del sector fermiónico del Modelo Estándar, especialmente el estudio de los quarks, es fundamental para avanzar en nuestra comprensión de la física de partículas y para explorar las fronteras de la investigación en el campo de la física de altas energías.

A pesar de su éxito en la descripción de una amplia gama de fenómenos observados en el mundo subatómico, el Modelo Estándar de la Física de Partículas tiene varias limitaciones importantes que indican la necesidad de una teoría más completa. Algunas de estas limitaciones incluyen:

- **Gravedad:** El Modelo Estándar no incluye la gravedad en su formulación. La gravedad es una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, pero aún no ha sido unificada con las otras tres fuerzas descritas por el Modelo Estándar (fuerza electromagnética, fuerza débil y fuerza fuerte) en un marco teórico coherente. Esta falta de inclusión de la gravedad limita la capacidad del Modelo Estándar para describir fenómenos a escalas de energía muy altas o en condiciones extremas, como las que se encuentran en los agujeros negros o en el Big Bang.
- **Materia oscura y energía oscura:** El Modelo Estándar no puede explicar la presencia de materia oscura en el universo, que constituye aproximadamente el 27 % de la densidad de energía-materia total del universo. Tampoco puede explicar la naturaleza de la energía

oscura, que constituye aproximadamente el 68 % de la densidad de energía-materia total y es responsable de la aceleración en la expansión del universo. Estos dos componentes son fundamentales para entender la estructura a gran escala y la evolución del universo, pero aún no se comprenden completamente dentro del marco del Modelo Estándar.

■ **Problemas de la jerarquía en el Modelo Estándar:**

- **Jerarquía de Yukawa:** El SM no explica por qué los acoplamientos de quarks y leptones cubren varios órdenes de magnitud, dando lugar a las masas tan dispares observadas.
- **Jerarquía electrodébil:** La masa del bosón de Higgs es inusualmente pequeña frente a la escala ultravioleta, ya que las correcciones cuadráticas requieren un ajuste fino para mantener ligero. Ambos hechos sugieren la existencia de nueva física o de mecanismos de simetría más allá del Modelo Estándar.

El Modelo Estándar no proporciona una explicación satisfactoria para la jerarquía de masas observada entre las partículas elementales. Por ejemplo, el bosón de Higgs, que es responsable de dar masa a otras partículas en el Modelo Estándar, tiene una masa muy baja en comparación con la escala de energía en la que se espera que ocurran ciertos fenómenos físicos, lo que plantea preguntas sobre la estabilidad del modelo en estas escalas de energía.

- **Neutrinos con masa:** Aunque el Modelo Estándar inicialmente consideraba a los neutrinos como partículas sin masa, los experimentos han demostrado que tienen una masa muy pequeña. Sin embargo, el Modelo Estándar no puede explicar por qué los neutrinos tienen masas tan bajas y cómo se relacionan estas masas con las masas de otras partículas en el modelo.

Estas son solo algunas de las limitaciones más prominentes del Modelo Estándar. Su incapacidad para abordar estos problemas sugiere que es parte de una teoría más completa que aún está por descubrirse. Los físicos teóricos están trabajando en varias direcciones, como las teorías de gran unificación, la supersimetría y las teorías de cuerdas, en un esfuerzo por superar estas limitaciones y desarrollar un marco teórico más completo y fundamental que pueda describir todos los aspectos de la física fundamental.

Sería excelente poder responder a todas estas cuestiones mediante esta investigación. Sin embargo, nos vamos a centrar en el método de los cerros de textura, el cual busca reducir al máximo el número de parámetros libres en el sector de Yukawa. Específicamente, buscamos comprender las relaciones existentes entre las masas y mezclas en el sector de quarks.

Esta investigación cuenta con un respaldo bibliográfico F.3.4 que nos proporciona un punto de partida para estudiar el modelo de los cerros de textura en sus inicios, como los de Fritzsch, quien trabajó con seis cerros de textura. Sin embargo, este enfoque fue descartado debido a que no coincidía el valor de la masa del quark top con los datos experimentales.

En el Capítulo 1, encontramos una descripción del sector electrodébil, junto con el lagrangiano que lo describe. Sin embargo, nos enfocamos principalmente en el sector de quarks y el sector de corrientes neutras y cargadas, llegando a una representación general en el estado de interacción.

Una vez comprendida la estructura matemática de la interacción electrodébil, nos enfocamos en el número de parámetros libres presentes en las matrices de masa complejas 3×3 del sector de

Yukawa para los quarks. Como se muestra en el Capítulo 2, los parámetros libres son demasiados en comparación al número de cantidades experimentales que se deben ajustar. En otras palabras, con ese número de parámetros no se pueden hacer predicciones por lo que es necesario reducirlos. Un primer paso consiste en utilizar el teorema de la descomposición polar, lo que permite reducir a la mitad dichos parámetros, pues las matrices de masa pasan a ser hermíticas. Sin embargo, los 18 parámetros que quedan siguen siendo muchos para nuestro propósito. Por esta razón, en este capítulo explicaremos el método de la Transformación en Base Débil (WBT), que mediante el uso de transformaciones unitarias arbitrarias nos permite obtener representaciones matriciales equivalentes como se ha demostrado en la literatura [1] — por ejemplo, que partiendo de matrices de masas arbitrarias ciertas texturas con ceros se obtienen simplemente con una WBT y, por tanto, no poseen contenido físico genuino. Además, demostraremos que el sector de corrientes cargadas permanece invariante ante una WBT.

En el Capítulo 3, nos centraremos en calcular la estructura de la matriz unitaria de diagonalización para cada matriz de masa, y al aplicarla notaremos una reducción del número de parámetros libres, lo que nos permite deducir modelos consistentes con los datos experimentales.

Finalmente, en el Capítulo 4, expondremos las relaciones entre las masas y mezclas que son consistentes con los resultados presentados en la literatura. Este trabajo incluye apéndices donde se profundiza cada uno de los resultados expuestos en los capítulos, así como una amplia bibliografía que permite explorar y respaldar el tema tratado.

Capítulo 1

El Sector Electrodébil en el Modelo Estándar

El Modelo Estándar es una teoría cuántica de campos ampliamente aceptada en la física de partículas. Esta teoría describe las interacciones fundamentales entre las partículas elementales y se considera uno de los pilares de nuestra actual comprensión de la naturaleza. En el Modelo Estándar, los constituyentes fundamentales de la materia son los quarks y los leptones. Los quarks son partículas que experimentan la interacción fuerte y electrodébil, la cual es responsable de la cohesión de los núcleos atómicos. Por otro lado, los leptones interactúan a través de la fuerza electrodébil, que combina tanto la interacción electromagnética como la interacción débil, esta fuerza electrodébil es responsable de ciertos procesos de desintegración nuclear. Es por eso que los leptones y los quarks, junto con los escalares mediadores de las fuerzas de interacción, (como el fotón, el gluón, el Higgs y los bosones W y Z), constituyen el espectro completo de partículas dentro del Modelo Estándar.

Uno de los enigmas que el Modelo Estándar busca resolver, es la cuestión de cómo las partículas fermiónicas, es decir, los quarks y los leptones, obtienen masa. Este desafío se aborda mediante el sector de Yukawa, que introduce acoplamientos entre los fermiones y un campo escalar. El mecanismo de Higgs, propuesto por Peter Higgs y otros físicos, implica la existencia de un campo de Higgs que permea todo el espacio y confiere masa a las partículas fermiónicas a través de su interacción con ellas.

Matemáticamente, el Lagrangiano asociado al Modelo Estándar, que describe las interacciones y masas de las partículas, se expresa en términos de campos y sus derivadas. Estos campos y sus interacciones están regidos por simetrías y principios fundamentales, lo que facilita la realización de cálculos y la formulación de predicciones sobre las propiedades de las partículas y los procesos físicos que tienen lugar a nivel subatómico. Aunque el Modelo Estándar ha demostrado ser muy exitoso en la descripción de una amplia gama de fenómenos subatómicos, aún existen preguntas abiertas en la física de partículas, como la naturaleza de la materia oscura y la falta de inclusión de la gravedad en la teoría. La búsqueda de una teoría más completa que vaya más allá del Modelo Estándar continúa siendo un tema activo de investigación en el campo de la física de partículas.

El Lagrangiano invariante de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que mejor describe el sector electrodébil se puede dividir en dos partes: una que contiene los campos bosónicos y otra a los campos fermionicos. La parte bosónica, a su vez se subdivide en los sectores de Higgs ($\mathcal{L}^H$) y de Yang-Mills ($\mathcal{L}^{YM}$);

mientras que el sector de fermiones se desglosa en los sectores de: corrientes neutras ($\mathcal{L}^N$), corrientes cargadas ($\mathcal{L}^C$), el sector de Yukawa ($\mathcal{L}^Y$) y el lagrangiano cinético ($\mathcal{L}^K$) que puede ser desplegado en el sector leptónico y de quarks. En consecuencia, el Lagrangiano de la teoría electrodébil se puede dividir en varios sectores de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM} + \mathcal{L}^Y + \mathcal{L}^N + \mathcal{L}^C + \mathcal{L}^K. \quad (1.1)$$

De aquí, nos interesan básicamente los $\mathcal{L}^Y$ y $\mathcal{L}^C$ para el sector de quarks, que los identificaremos como $\mathcal{L}_q^Y$ y $\mathcal{L}_q^C$.

En la teoría electrodébil, se postula que el sector de Yukawa es responsable de conferir masa a los fermiones, incluyendo a los quarks; este mecanismo se logra mediante la ruptura espontánea de simetría: $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$.¹

El Lagrangiano del sector de Yukawa fermiónico $\mathcal{L}^Y$ se puede dividir de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^Y = \mathcal{L}_l^Y + \mathcal{L}_q^Y, \quad (1.2)$$

donde el primer término ($\mathcal{L}_l^Y$) se refiere al sector de Yukawa leptónico, mientras que el segundo término $\mathcal{L}_q^Y$ representa el sector de Yukawa de los quarks, que será el enfoque principal de nuestro estudio². En la teoría electrodébil, los quarks se agrupan en tres dobletes izquierdos conocidos como familias, los cuales comparten características similares, excepto por sus masas. Estos dobletes se representan para las tres familias de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L; \quad u_R, \quad d_R, \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L; \quad c_R, \quad s_R, \quad (1.4)$$

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L; \quad t_R, \quad b_R, \quad (1.5)$$

que podemos resumirlo como:

$$Q_L^k = \begin{pmatrix} u^k \\ d^k \end{pmatrix}_L; \quad u_R^k, \quad d_R^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.6)$$

donde el índice k representa a las familias de quarks. En nuestro caso, nos interesa analizar el lagrangiano de Yukawa y la corriente cargada presente en el sector de quarks. Estos aspectos serán el núcleo central de nuestro análisis.

1.1. El lagrangiano de Yukawa para el sector de quarks

Los invariantes de este sector se construyen mediante el producto de estados propios de campos de norma que conectan fermiones de diferentes cargas gauge acoplados al doblete de Higgs.

¹El mecanismo de la ruptura espontánea de simetría lo explicaremos con más detalle en el apéndice A

²Un tratamiento similar al que vamos a trabajar, se puede llevar a cabo en el sector leptónico, sobre todo si se trabaja con neutrinos de Dirac [3]

El sector de Yukawa corresponde a invariantes electrodébiles de dimensión cuatro que se pueden construir utilizando los dobletes izquierdos de los fermiones, los singletes derechos y el doblete de Higgs. Estas combinaciones permiten establecer las interacciones fundamentales entre estas partículas y juegan un papel crucial en la generación de masas para los fermiones a través de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil. Por lo tanto el lagrangiano de Yukawa para el sector de quarks tiene la forma:

$$\mathcal{L}_q^Y = -Y_{kj}^u \bar{Q}_L^k \tilde{\phi} u_R^j - Y_{kj}^d \bar{Q}_L^k \phi d_R^j + h.c. , \quad (1.7)$$

hemos usado la notación de Einstein de que dos índices repetidos se suman, en este caso k y j suman de 1 a 3 para abarcar las tres familias de los quarks. Además $\bar{Q}_L^k = Q_L^{k\dagger} \gamma^0$, Y_{kj}^u y Y_{kj}^d son los parámetros adimensionales de Yukawa, ϕ corresponde al campo escalar complejo definido usualmente como un doblete de Higgs de la forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} , \quad (1.8)$$

su complejo conjugado será:

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} , \quad (1.9)$$

donde σ_2 es la segunda matriz de Pauli. Ahora, como se explica en la literatura [4], el doblete de Higgs (1.8) después del rompimiento espontáneo de simetría³ adquiere el siguiente valor esperado:

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad (1.10)$$

por lo tanto, bajo esta sustitución el Lagrangiano (1.7) toma la forma:

$$\mathcal{L}_q^Y = -Y_{kj}^u (\bar{u}^k, \bar{d}^k)_L \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} u_R^j - Y_{kj}^d (\bar{u}^k, \bar{d}^k)_L \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} d_R^j + h.c. ,$$

donde hemos escrito los vectores en el espacio de sabor

$$u_L = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L , \quad d_L = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L , \quad (1.11)$$

por lo tanto, efectuando los cálculos tenemos:

$$\mathcal{L}_q^Y = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{kj}^u \bar{u}_L^k u_R^j - \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{kj}^d \bar{d}_L^k d_R^j + h.c. ,$$

que en forma matricial lo escribimos como:

$$\mathcal{L}_q^Y = -\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L Y^u u_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L Y^d d_R + h.c. ,$$

que también podemos escribir como:

$$-\mathcal{L}_q^Y = \bar{u}_L \frac{v}{\sqrt{2}} Y^u u_R + \bar{d}_L \frac{v}{\sqrt{2}} Y^d d_R + h.c. ,$$

³Explicamos con mas detalle el rompimiento espontáneo de simetría en el apéndice A,

en la que identificamos a $\frac{v}{\sqrt{2}}Y^u$ como la matriz de masa para los quarks tipo “up” y $\frac{v}{\sqrt{2}}Y^d$ como la matriz de masa para los quarks tipo “down” y las puedo renombrar como las matrices 3×3 complejas M_u y M_d respectivamente, y tienen una representación general hasta el momento, las cuales deben ser diagonalizadas para determinar las masas de los quarks.

Por lo tanto, el lagrangiano de Yukawa para la masa del sector de quarks se resume como :

$$-\mathcal{L}_q^Y = \bar{u}_L M_u u_R + \bar{d}_L M_d d_R + h.c. \quad (1.12)$$

1.2. El lagrangiano de las corrientes cargadas para el sector de quarks

Para caracterizar las interacciones entre las partículas fermiónicas y los campos bosónicos, utilizamos el lagrangiano de Dirac correspondiente al sector de corrientes cargadas y neutras. En el contexto de las interacciones débiles, este lagrangiano, invariante gauge, tienen la siguiente estructura [5]:

$$\mathcal{L}_q^k = \bar{Q}_L^k i \not{D} Q_L^k + \bar{u}_R^k i \not{D} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{D} d_R^k, \quad (1.13)$$

donde Q_L^k lo definimos en (1.6) y $\not{D}$ es la derivada covariante que para los dobletes de $SU(2)_L$ se define de la siguiente manera:

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu Y + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu \right). \quad (1.14)$$

y para los singletes, se define como:

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{6} \mathbf{B}_\mu \right). \quad (1.15)$$

donde g es la constante de acoplamiento del grupo isospín débil $SU(2)_L$, g' es la constante de acoplamiento del grupo de hipercarga $U(1)_Y$, y los campos $\mathbf{A}_\mu$ son los bosones gauge asociados a el grupo de simetría $SU(2)$, $\mathbf{B}_\mu$ corresponde al bosón gauge asociado al grupo $U(1)$. Los τ son las matrices de Pauli que en forma general las podemos escribir de la forma:

$$\tau_j = \begin{pmatrix} \delta_{j,3} & \delta_{j,1} - i\delta_{j,2} \\ \delta_{j,1} + i\delta_{j,2} & \delta_{j,3} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

En primer lugar, de la expresión (1.13), desarrollamos el primer término y obtenemos:

$$\bar{Q}_L^k i \not{D} Q_L^k = \bar{Q}_L^k i \gamma^\mu D_\mu Q_L^k, \quad (1.17)$$

que al tener en cuenta (1.14), escribimos:

$$\begin{aligned}
&= i (\bar{u}^k, \bar{d}^k)_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu Y + \frac{ig}{2} \tau \cdot \mathbf{A}_\mu \right) \begin{pmatrix} u^k \\ d^k \end{pmatrix}_L, \\
&= i (\bar{u}^k, \bar{d}^k)_L \gamma^\mu \left[\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \tau^j A_\mu^j \right] \begin{pmatrix} u^k \\ d^k \end{pmatrix}_L, \\
&= (i\bar{u}_L^k \gamma^\mu, i\bar{d}_L^k \gamma^\mu)_L \left[\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} A_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_\mu^3 \right) \right] \begin{pmatrix} u^k \\ d^k \end{pmatrix}_L, \\
&= (i\bar{u}_L^k \gamma^\mu, i\bar{d}_L^k \gamma^\mu) \left[\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_L^k \\ d_L^k \end{pmatrix}, \\
&= (i\bar{u}_L^k \gamma^\mu, i\bar{d}_L^k \gamma^\mu) \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu + \frac{ig}{2} A_\mu^3 & \frac{ig}{2} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ \frac{ig}{2} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) & \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L^k \\ d_L^k \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Usamos la definición para los campos de interacción débil cargados:

$$W^\pm = \frac{A_\mu^{(1)} \mp iA_\mu^{(2)}}{2}. \tag{1.19}$$

Por lo tanto,

$$(i\bar{u}_L^k \gamma^\mu, i\bar{d}_L^k \gamma^\mu) \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu + \frac{ig}{2} A_\mu^3 & W^+ \\ W^- & \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L^k \\ d_L^k \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

y de esta manera, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_L^k i \not{D} Q_L^k &= i\bar{u}_L^k \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} A_\mu^3 + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) u_L^k - \bar{u}_L^k \gamma^\mu \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d_L^k - \bar{d}_L^k \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu W_\mu^- u_L^k \\
&\quad + i\bar{d}_L^k \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu^3 + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) d_L^k,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

que al organizar el resultado anterior (1.21), el sector cinético izquierdo incluyendo corrientes neutras y cargadas, sería:

$$\bar{Q}_L^k i \not{D} Q_L^k = \underbrace{i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k}_{\mathcal{L}_{qL}^K} - \underbrace{\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k}_{\mathcal{L}_q^C} + \mathcal{L}_q^N, \tag{1.22}$$

donde $\mathcal{L}_{qL}^K$ es el Lagrangiano cinético para el sector de quiralidad izquierda de quarks, $\mathcal{L}_q^C$ como ya lo mencionamos después de la ecuación (1.1), representa el sector de corrientes cargadas del sector de quarks y $\mathcal{L}_q^N$ representa los términos asociados con las corrientes neutras del mismo sector, que no son relevantes debido a que solo mezclan los quarks de tipo “up” o “down”. Sin embargo, las estudiamos con mas detalle en el apéndice B.

El lagrangiano del sector de quarks al que deseamos llegar surge de la combinación del sector de Yukawa y el de corrientes cargadas. Esta conjunción se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^q = \mathcal{L}_q^Y + \mathcal{L}_q^C, \tag{1.23}$$

que de acuerdo a los resultados obtenidos en las ecuaciones (1.12) y (1.22) da como resultado la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}^q = -\bar{u}_L M_u u_R - \bar{d}_L M_d d_R - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + h.c. , \quad (1.24)$$

donde los campos “up” y “down” están definidos en forma vectorial en la expresión (1.11), tanto para la parte izquierda como la derecha. Como podemos ver, el lagrangiano $\mathcal{L}^q$ obtenido está definido en el estado de interacción, por lo tanto, para deducir el lagrangiano en el estado de masa, es necesario llevar a cabo una rotación de los campos mediante transformaciones unitarias. De este modo, las matrices de masa M_u y M_d presentes en el lagrangiano se diagonalizan, y los autovalores de las mismas nos dan información de las masas de los quarks (Ver apéndice C). Principalmente, nuestro objetivo radica en la disminución de la cantidad de parámetros reales independientes presentes en las matrices de masa M_u y M_d del sector Yukawa a fin de encontrar relaciones entre las masas y las mezclas en el sector de quarks ⁴.

⁴relaciones entre masas y mezclas en el sector de quarks veremos con mas detalle en el capítulo 4

Capítulo 2

La transformación de base débil (WBT)

En este capítulo trabajaremos con las matrices de masa del sector de quarks M_u y M_d , que se derivan del lagrangiano del sector de Yukawa definido en el capítulo anterior en la ecuación (1.12). En primer lugar, estas matrices son arbitrarias, de entradas complejas, con 36 parámetros reales independientes¹, que representan un número excesivo de parámetros para describir los 10 observables físicos a saber: (6) masas de quarks, (3) ángulos de mezcla de sabor y una (1) fase que viola la simetría CP. Es por eso que uno de nuestros principales objetivos es reducir la cantidad de parámetros para poder hacer predicciones.

Para comenzar, podemos respaldarnos en el teorema de la descomposición polar del álgebra lineal [8], que permite descomponer cada una de las matrices de masa M_u y M_d como el producto de una matriz hermítica, y una matriz unitaria, lo que simplifica nuestro trabajo, al considerar matrices de masa hermíticas y reduciendo a la mitad el número de parámetros reales independientes². A continuación, expliquemos en detalle cómo se logra la hermiticidad de las matrices de masa. De acuerdo con la descomposición polar, cada una de las matrices de masa del sector de quarks (1.24) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} M_u &= M'_u U_u , \\ M_d &= M'_d U_d , \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde las nuevas matrices de masa M'_u y M'_d son hermíticas y las matrices U_u y U_d unitarias. Sin embargo, en el marco de las simetrías gauge del grupo $SU(2)$, los campos derechos son singletes, por lo que las matrices unitarias pueden ser absorbidas al redefinir estos campos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U_u u_R &\rightarrow u'_R , \\ U_d d_R &\rightarrow d'_R , \end{aligned} \tag{2.2}$$

y al reemplazar en el Lagrangiano (1.24), se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^q &= -\bar{u}_L M'_u \underbrace{U_u u_R}_{u'_R} - \bar{d}_L M'_d \underbrace{U_d d_R}_{d'_R} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + h.c. , \\ \mathcal{L}^q &= -\bar{u}_L M'_u u'_R - \bar{d}_L M'_d d'_R - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + h.c. , \end{aligned} \tag{2.3}$$

¹Loa 36 parámetros reales se deben a que las entradas en las matrices de masa son números complejos que se componen de un aparte real y otra imaginaria y como cada matriz es de 3×3 cada una tendría 18 parámetros reales

²Para obtener más información acerca de la descomposición polar consúltese el Apéndice D.

donde las cantidades primadas las podemos redefinir como no primadas, volviendo de nuevo a la ecuación (1.24). Además, como podemos enfatizar, tras la descomposición polar y la definición (2.2), el Lagrangiano (1.24) permanece invariante manteniendo su estructura tal como se puede ver en la ecuación (2.3), con la diferencia que las matrices de masa M_u y M_d son ahora hermíticas. En consecuencia, estas matrices de masa hermíticas experimentan una reducción en el número de parámetros independientes, como ya habíamos mencionado, pasando de 36 a 18 parámetros. Aún así, no es suficiente, pues siguen siendo un número grande comparado con los diez parámetros físicos que debe reproducir, las seis masas de quarks y los cuatro parámetros físicos de la matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM).

Adicionalmente, podemos recurrir a lo que se conoce como una “Transformación de Base Débil” (por las siglas en inglés de WB transformation) que en esencia, consiste en una transformación unitaria (U) que opera sobre las matrices de masa de los quarks generando nuevas matrices equivalentes, manteniendo invariante el Lagrangiano (1.24), específicamente el sector asociado a las corrientes gauge cargadas. La WBT más general consiste en la transformación

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow M'_u = U^\dagger M_u U , \\ M_d &\rightarrow M'_d = U^\dagger M_d U , \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la matriz U es unitaria tal que $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$.

Una característica importante del Modelo Estándar, es que podemos hacer transformaciones unitarias sobre los quarks y no alterar la estructura del Lagrangiano (1.24), como lo demostramos a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^q &= -\bar{u}_L M_u u_R - \bar{d}_L M_d d_R - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + h.c. , \\ &= -\bar{u}_L \underbrace{UU^\dagger}_1 M_u \underbrace{UU^\dagger}_1 u_R - \bar{d}_L \underbrace{UU^\dagger}_1 M_d \underbrace{UU^\dagger}_1 d_R - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \underbrace{UU^\dagger}_1 \gamma^\mu \underbrace{UU^\dagger}_1 d_L + h.c. , \\ &= -\underbrace{\bar{u}_L U U^\dagger}_{\bar{u}'_L} \underbrace{M_u U U^\dagger}_{M'_u} \underbrace{u_R}_{u'_R} - \underbrace{\bar{d}_L U U^\dagger}_{\bar{d}'_L} \underbrace{M_d U U^\dagger}_{M'_d} \underbrace{d_R}_{d'_R} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \underbrace{\bar{u}_L U U^\dagger}_{\bar{u}'_L} \gamma^\mu \underbrace{U U^\dagger}_{d'_L} d_L + h.c. , \\ &= -\underbrace{\bar{u}_L U U^\dagger}_{\bar{u}'_L} \underbrace{M_u U U^\dagger}_{M'_u} \underbrace{u_R}_{u'_R} - \underbrace{\bar{d}_L U U^\dagger}_{\bar{d}'_L} \underbrace{M_d U U^\dagger}_{M'_d} \underbrace{d_R}_{d'_R} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \underbrace{\bar{u}_L U}_{\bar{u}'_L} \gamma^\mu \underbrace{U^\dagger U}_1 \underbrace{U^\dagger d_L}_{d'_L} + h.c. , \\ &= -\bar{u}'_L M'_u u'_R - \bar{d}'_L M'_d d'_R - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L + h.c. , \end{aligned}$$

donde las cantidades primadas las podemos definir como no primadas y de esta manera vemos que el Lagrangiano (1.24) mantiene su presentación original.

Observamos que, tras la WBT, a excepción del sector de Yukawa, los demás términos permanecen invariantes, por tal motivo no los tendremos en cuenta en nuestros análisis subsiguientes.

Cabe destacar que la arbitrariedad de la matriz unitaria U empleada en la WBT, implica que el número de representaciones de las matrices de masa equivalentes es infinito. Por otro lado, la WBT no afecta la hermiticidad de las matrices de masa M_u y M_d , ya que

$$M_q'^\dagger = (U^\dagger M_q U)^\dagger = U^\dagger M_q^\dagger U = U^\dagger M_q U = M_q' ,$$

donde el subíndice q representa el tipo de quark ya sea “up” (u) o “down” (d) .

Ahora, realicemos una WBT con una matriz unitaria U_u de tal forma que diagonalice la matriz de masa M_u . Es decir, haciendo $U = U_u$, de este modo, las matrices de masa (2.4) toman la forma:

$$M'_u = U_u^\dagger M_u U_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix} = D_u \quad (2.5)$$

$$M'_d = U_u^\dagger M_d U_u = U_u^\dagger (U_d D_d U_d^\dagger) U_u = (U_u^\dagger U_d) D_d (U_d^\dagger U_u),$$

donde U_d es la matriz unitaria que diagonaliza a M_d , es decir,

$$U_d^\dagger M_d U_d = \begin{pmatrix} \lambda_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3d} \end{pmatrix} = D_d. \quad (2.6)$$

Así que los λ_{iu} y λ_{id} con $i = 1, 2, 3$, son los autovalores de las matrices M_u y M_d respectivamente, cuyos valores absolutos corresponden a las masas de los quarks tipo “up” y “down”,

$$|\lambda_{1u}| = m_u, \quad |\lambda_{2u}| = m_c, \quad |\lambda_{3u}| = m_t, \quad |\lambda_{1d}| = m_d, \quad |\lambda_{2d}| = m_s, \quad |\lambda_{3d}| = m_b, \quad (2.7)$$

donde m_u, m_c, m_t son las masas de los quarks “up”, “charm” y “top” y m_d, m_s, m_b corresponde a las masas de los quarks “down”, “strange” y “bottom”. Estas masas obedecen a las jerarquías:

$$\begin{aligned} |m_u| &\ll |m_c| \ll |m_t|, \\ |m_d| &\ll |m_s| \ll |m_b|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Además, la matriz $U_u^\dagger U_d$ en (2.5) corresponde a la matriz unitaria CKM, $V = U_u^\dagger U_d$, como se explica en el apéndice E.

Por lo tanto, el Lagrangiano del sector de Yukawa (1.12), después de aplicar la WBT, toma la forma:

$$-\mathcal{L}_q^Y = \bar{u}_L D_u u_R + \bar{d}_L V D_d V^\dagger d_R. \quad (2.9)$$

En conclusión, las matrices de masa del sector de quarks se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow D_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix}, \\ M_d &\rightarrow V D_d V^\dagger, \end{aligned} \quad (2.10)$$

o también, si hacemos una WBT, usando la matriz unitaria U_d , que diagonaliza la matriz de masa M_d , podemos llegar a la siguiente representación:

$$\begin{aligned} M_u &\rightarrow V^\dagger D_u V, \\ M_d &\rightarrow D_d = \begin{pmatrix} \lambda_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3d} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Estas dos representaciones (2.10) y (2.11) pueden usarse como puntos de partida para generar cualquier representación viable de las matrices de masa de los quarks, sobre todo aquellas representaciones que generan varios ceros de textura en las matrices de masa que reduzcan el número de parámetros libres en el sector de Yukawa.

Capítulo 3

Ceros de textura en el sector de quarks

En este capítulo, estudiaremos el método de los ceros de textura, que surge de la necesidad de reducir aún más el número de parámetros libres en las matrices de masa del sector de quarks. Aunque en el capítulo anterior logramos una reducción significativa mediante la descomposición polar, disminuyendo los 36 parámetros libres a la mitad, esta reducción resulta insuficiente. Aún necesitamos hacer predicciones sobre 10 parámetros físicos clave, que incluyen las 6 masas de los quarks, los 3 ángulos de mezcla y la fase de violación de la simetría CP. Con 18 parámetros libres, el número sigue siendo excesivo, por lo que es imprescindible reducirlos aún más.

Entre los diversos casos específicos de ceros de texturas para las matrices de masa hermíticas de los quarks se encuentran los de tipo Fritzsch, con seis ceros de textura planteadas en la literatura [12, 13], donde ambas matrices, M_u y M_d , tienen el paralelismo de texturas “up-down”, cada una con tres ceros. Sin embargo, este modelo fue descartado debido a la predicción demasiado grande para la masa del quark top, de tal manera que la predicción está muy lejos de los datos experimentales [14, 15].

En general, hay varias técnicas para analizar ceros de textura: en algunos casos se usan aproximaciones algebraicas que aprovechan la fuerte jerarquía de las masas de los quarks y los ángulos de mezcla que motivan ciertas texturas [14, 16], o se hacen cálculos directos sobre propuestas de ceros de textura que son analizadas analítica y numéricamente para verificar su viabilidad [15, 17, 18]. En general, nuestro trabajo apunta a implementar la WBT.

Si observamos de los resultados (2.10) y (2.11), notamos que la WBT nos permite analizar todos los posibles casos de distribución de los ceros de textura en la matriz de masa de los quarks.

Nosotros estudiaremos texturas con cinco ceros, ya que los estudios muestran que son casos posibles. Algunos ejemplos analíticos y numéricos fueron reportados en los artículos [17–21], que reproducen las masas de los quarks y la matriz CKM con suficiente precisión.

Aunque el método de los ceros de textura se aplica a todo el sector leptónico, nosotros lo enfocaremos solo al sector de quarks y durante el proceso, implantaremos la técnica y exploraremos la posibilidad de encontrar más modelos de matrices de masa con cinco ceros de textura.

Como punto de partida, sabemos que los quarks son partículas masivas, como lo evidencian los experimentos. Por lo tanto, en nuestro análisis es importante que el determinante ($\det$) de las matrices de masa de los quarks no sea nulo en el proceso de diagonalización de las matrices de masa de los quarks,¹ como lo demostramos a continuación:

$$\det(M_q) = \text{Det}(\underbrace{U U^\dagger M_q U U^\dagger}_{D_q}) = \text{Det}(U D_q U^\dagger) = \text{Det}(D_q \underbrace{U U^\dagger}_1) = \text{Det}(D_q) = m_1 m_2 m_3 = 0 \quad (3.1)$$

¹Los valores experimentales mas recientes para las masas de los quarks se indican en el apéndice (E)

para que la igualdad sea válida, implica que al menos una de las masas $\langle m_i \rangle$ de los quarks tenga masa cero, que no es posible ya que los quarks son partículas masivas. Por lo tanto, para que el determinante de la matriz de masa sea distinto de cero, debe haber, como máximo, tres ceros de textura distribuidos de diversas maneras. Si tuviéramos más de tres ceros de textura, implicaría que al menos una masa de los quarks sería cero o que dos de las masas serían iguales, lo cual tampoco es cierto. Por lo tanto, un análisis de la situación muestra que solo son posibles dos tipos distintos de configuraciones de ceros de textura, dependiendo de cómo se distribuyan los ceros en las entradas de la matriz de masa, como lo exponemos a continuación.

3.1. Patrón con dos ceros de textura en la diagonal

El número máximo de ceros de textura que se puede lograr en una matriz de masa hermítica de quarks es tres, un modelo con cuatro ceros de textura es inconsistente, para arrojar masas no nulas y reales. Una manera de distribuir estos tres ceros en la matriz de masa “up” o “down”, es ubicar dos de ellos sobre la diagonal como lo indicamos a continuación:

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde las x representan la entradas diferentes de cero, y u puede ser q o d , dependiendo de si se trata de la matriz de masa de los quarks “up” o “down”, respectivamente.

Otras posibles maneras de distribuir estos tres ceros, se puede lograr mediante matrices de permutación $P_i = i = 1, 2, \dots, 6$ a través de una WBT que genera todas las posibles maneras consistentes equivalentes de acomodar los tres ceros, manteniendo dos de ellos en la diagonal. Teniendo en cuenta que las matrices de permutación se escriben como:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & P_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Veamos a continuación los diferentes casos que se presentan al hacer uso de estas matrices :

$$\begin{aligned}
 M'_q &= P_1 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_1^T = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} , \\
 M'_q &= P_2 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix} , \\
 M'_q &= P_3 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_3^T = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} , \\
 M'_q &= P_4 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_4^T = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} , \\
 M'_q &= P_5 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_5^T = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix} , \\
 M'_q &= P_6 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} P_6^T = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así que tenemos por defecto, la configuración de los tres ceros, con dos de ellos en la diagonal, dada en la ecuación (3.2)

3.2. Patrón con un cero de textura en la diagonal

De la misma manera, otra posible distribución de los tres ceros de textura, consiste en acomodar uno de ellos en la diagonal, como lo indicamos a continuación:

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} , \tag{3.5}$$

De nuevo, las permutaciones generan nuevas distribuciones de tres ceros equivalentes, manteniendo uno de ellos en la diagonal.

$$\begin{aligned}
M'_q &= P_1 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_1^T = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} , \\
M'_q &= P_2 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} , \\
M'_q &= P_3 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_3^T = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} , \\
M'_q &= P_4 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_4^T = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} , \\
M'_q &= P_5 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_5^T = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} , \\
M'_q &= P_6 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} P_6^T = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Cabe señalar que las demás posibles formas de ubicar tres ceros, ya sea sobre la diagonal o fuera de ella, corresponden a texturas físicamente inviables. Esto se debe a que añadir un cero adicional en alguna de las matrices conduce a masas nulas, lo cual no es compatible con los resultados experimentales. Por lo tanto, es suficiente considerar texturas con tres ceros, siempre que uno de ellos esté ubicado en la diagonal, ecuación (3.5).

3.3. Análisis de los parámetros en el modelo con uno y dos ceros de textura en la diagonal

Para realizar el análisis de los parámetros x en las entradas de las matrices (3.2) y (3.5), resumamos los dos casos con la siguiente matriz de masa

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_q| & 0 \\ |\xi_q| & \gamma_q & |\beta_q| \\ 0 & |\beta_q| & \alpha_q \end{pmatrix} , \tag{3.7}$$

ya sea tomando $\gamma_q = 0$ o $\beta_q = 0$ respectivamente. Los parámetros γ_q y α_q son reales debido a que la matriz M_q es hermítica. El parámetro ξ_q no puede ser cero por la condición (3.1). Las entradas fuera de la diagonal son números complejos que parametrizamos en forma polar, de tal manera que $|\xi_q|$ y $|\beta_q|$ representan sus normas. No es necesario considerar las fases, ya que pueden ser absorbidas mediante una WBT adecuada [2].

Diagonalizamos la matriz (3.7)

$$U_q^\dagger M_q U_q = \begin{pmatrix} \lambda_{1q} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2q} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3q} \end{pmatrix} , \tag{3.8}$$

donde podemos encontrar en forma analítica la matriz unitaria U_q que diagonaliza a M_q , conocida en la literatura [6], [16] con la siguiente estructura:

$$U_q = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{i\theta_2} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{3q}(\lambda_{2q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ -e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\lambda_{1q} - \alpha_q)}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{i\theta_2} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{2q})}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\alpha_q - \lambda_{2q})(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & -e^{i\theta_2} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

añadimos fases para ajustar la CKM al modelo convencional que se muestra en el apéndice E, las fases en la tercera columna no son necesarias, ya que las demás columnas las absorben a través de una fase global. Los elementos λ_{iq} con $i = 1, 2, 3$, de (3.7) son los autovalores de la matriz de masa M_q definidos en (2.7). Ahora, si aplicamos operaciones matriciales que permanecen invariantes bajo la diagonalización, como la traza, el determinante, y la traza de M_q^2 , podemos expresar los parámetros γ_q , β_q y ξ_q de (3.7) en términos de los λ_{iq} , como indicamos a continuación:

$$\gamma_q = \lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \lambda_{3q} - \alpha_q, \quad (3.10a)$$

$$|\xi_q| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1q}\lambda_{2q}\lambda_{3q}}{\alpha_q}}, \quad (3.10b)$$

$$|\beta_q| = \sqrt{\frac{(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q}}. \quad (3.10c)$$

Es evidente, a partir de las expresiones (3.10b) y (3.10c), se deduce que el parámetro α_q es necesariamente distinto de 0 ($\alpha_q \neq 0$). Por otra parte, conforme a los criterios establecidos en la literatura [1] y en el artículo [21], la matriz en cuestión debe poseer al menos un autovalor negativo, esta condición es satisfecha por la relación (3.10b), lo cual implica adicionalmente que $\alpha_q > 0$. También, considerando la relación (3.10c) y la jerarquía de masa en (2.8), podemos encontrar que α_q se encuentra en alguno de los siguientes intervalos:

$$\text{si } \lambda_{1q} < 0, \lambda_{2q} > 0, \lambda_{3q} > 0 \rightarrow |\lambda_{2q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{3q}|, \quad (3.11)$$

$$\text{si } \lambda_{1q} > 0, \lambda_{2q} < 0, \lambda_{3q} > 0 \rightarrow |\lambda_{1q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{3q}|, \quad (3.12)$$

$$\text{si } \lambda_{1q} > 0, \lambda_{2q} > 0, \lambda_{3q} < 0 \rightarrow |\lambda_{1q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{2q}|. \quad (3.13)$$

La matriz (3.9) la podemos usar para implementar la WBT aplicada a la base (2.10) o (2.11). En cada caso tenemos:

- Cuando la matriz de diagonalización $U_q = U_u$,

$$M'_u \rightarrow U_u D_u U_u^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_u| & 0 \\ |\xi_u| & \gamma_u & |\beta_u| \\ 0 & |\beta_u| & \alpha_u \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$M'_d \rightarrow U_u (V D_d V^\dagger) U_u^\dagger.$$

- Cuando la matriz de diagonalización $U_q = U_d$,

$$M'_u \rightarrow U_d (V^\dagger D_u V) U_d^\dagger,$$

$$M'_d \rightarrow U_d D_d U_d^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & \gamma_d & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \alpha_d \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

En ambos casos estamos usando el resultado (3.8).

3.3.1. CASO I: Tres ceros de textura con dos de ellos en la diagonal

Para trabajar con este modelo, usamos la estructura matricial de masa (3.14), donde $U_q = U_u$, y hacemos $\gamma_u = 0$. En consecuencia, las relaciones (3.10a), (3.10b), (3.10c) toman la siguiente forma:

$$\alpha_u = \lambda_{1u} + \lambda_{2u} + \lambda_{3u} , \quad (3.16)$$

$$|\xi_u| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1u}\lambda_{2u}\lambda_{3u}}{\lambda_{1u} + \lambda_{2u} + \lambda_{3u}}} , \quad (3.17)$$

$$|\beta_u| = \sqrt{\frac{-(\lambda_{2u} + \lambda_{3u})(\lambda_{1u} + \lambda_{3u})(\lambda_{1u} + \lambda_{2u})}{\alpha_u}} . \quad (3.18)$$

Es evidente, de (3.17), que solo un autovalor λ_{iu} puede ser negativo. Sin embargo, si consideramos que λ_{1u} sea negativo, de la relación (3.16) hace que la relación (3.18) no resultaría en una cantidad real. Por esta razón, descartamos esa posibilidad. Del mismo modo, si λ_{3u} fuera negativo, observamos que las relaciones (3.17) y (3.18) tampoco serían reales. Por lo tanto, λ_{3u} no puede ser negativo. De aquí se concluye que solo λ_{2u} puede ser negativo, ya que las relaciones (3.17) y (3.18) son reales en este caso. Como nuestro objetivo es construir un modelo con cinco ceros de textura, de los cuales tres de ellos están en la matriz de masa “up” en (3.14), los dos ceros restantes se deducen de la matriz de masa M'_d en (3.14), a través de un ajuste de los parámetros libres θ_1 y θ_2 presentes en la matriz de diagonalización (3.9) con $q = u$. Después de hacer un análisis numérico ², y comparar con los datos que tenemos a disposición como las cotas experimentales para las masas de los quarks (E.3), (E.4) y la matriz de mezcla CKM (E.2) a la escala de energía del bosón Z, no encontramos resultados consistentes con lo suministrado experimentalmente. Por lo tanto descartamos este primer caso.

Hacemos el análisis para el caso en que $U_q = U_d$, en donde ahora $\gamma_d = 0$ y en consecuencia, las relaciones (3.10a), (3.10b), (3.10c) toman la siguiente forma:

$$\alpha_d = \lambda_{1d} + \lambda_{2d} + \lambda_{3d} , \quad (3.19)$$

$$|\xi_d| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1d}\lambda_{2d}\lambda_{3d}}{\lambda_{1d} + \lambda_{2d} + \lambda_{3d}}} , \quad (3.20)$$

$$|\beta_d| = \sqrt{\frac{-(\lambda_{2d} + \lambda_{3d})(\lambda_{1d} + \lambda_{3d})(\lambda_{1d} + \lambda_{2d})}{\alpha_d}} . \quad (3.21)$$

Como en el caso anterior, solo λ_{2d} debe ser negativo. De los cinco ceros de textura, de los cuales tres de ellos están en la matriz de masa “down” en (3.15), los dos ceros restantes se deducen de la matriz de masa M'_u en (3.15), a través de un ajuste de los parámetros libres θ_1 y θ_2 presentes en la matriz de diagonalización (3.9) con $q = d$. Una exploración exhaustiva nos conduce a los resultados suministrados en la tabla 3.1 donde podemos observar las soluciones viables para la estructura de masa (3.15)

²El software utilizado para hacer este análisis fue el MATHEMATICA debido a sus prestaciones numéricas y analíticas. En el apéndice F suministramos algunos cálculos hechos con este software.

CASO I	TEXTURAS NUMÉRICAS DE CINCO CEROS DE TEXTURA (MeV)	Autovalores negativos
a	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -85.4679 + 157.016i \\ 0 & 6053.87 & 29579. + 5434.63i \\ -85.4679 - 157.016i & 29579. - 5434.63i & 167190. \end{pmatrix}$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & 14.5259. & 0 \\ 14.5259 & 0 & 442.526 \\ 0 & 442.556 & 2904.18 \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$
b	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21.0411 - 284.492i \\ 0 & 1690.29 & 18947.5 + 5841.49i \\ 21.0411 + 284.492i & 18947.5 - 5891.49i & 168946. \end{pmatrix}$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & 13.4128 & 0 \\ 13.4128 & 0 & 392.604 \\ 0 & 392.604 & 2857.04 \end{pmatrix}$	$\lambda_{2u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$

Tabla 3.1: Resultados numéricos para los modelos con cinco ceros de textura con dos de ellos en la diagonal de la matriz de masa M_d en donde $\lambda_{2d} < 0$ y se obtienen dos subcasos, **Ia** cuando $\lambda_{1u} < 0$ y **Ib** cuando $\lambda_{2u} < 0$.

3.3.2. CASO II: Tres ceros de textura con un cero en la diagonal

En este caso, en las matrices de masa (3.14) o (3.15), con $q = u$ o d , establecemos que uno de los parámetros fuera de la diagonal sea igual a cero. Sin embargo, no se puede imponer $|\xi_q| = 0$, ya que esto implicaría que el determinante de la matriz de masa correspondiente sería nulo, lo cual, como se menciona en la ecuación (3.1), no es consistente con la teoría. Por lo tanto, la única opción viable es que $|\beta_q| = 0$ para $q = u$ o d .

En primer lugar trabajamos con $q = u$, en (3.10a), (3.10b) y (3.10c) de esta manera, obtenemos:

$$(\alpha_u - \lambda_{1u})(\alpha_u - \lambda_{2u})(\lambda_{3u} - \alpha_u) = 0 , \quad (3.22)$$

para que la igualdad se cumpla α_u puede tomar el valor de λ_{1u} o λ_{2u} o λ_{3u} , y teniendo en cuenta (3.10b), se puede observar los siguientes seis casos posibles:

- Cuando $\alpha_u = \lambda_{1u}$. En ese caso se puede dar que $\lambda_{2u} < 0$ o $\lambda_{3u} < 0$ para que el parametro $|\xi_u|$ sea real.
- Cuando $\alpha_u = \lambda_{2u}$. En ese caso se puede dar que $\lambda_{1u} < 0$ o $\lambda_{3u} < 0$.
- Cuando $\alpha_u = \lambda_{3u}$. En ese caso se puede dar que $\lambda_{1u} < 0$ o $\lambda_{2u} < 0$.

CASO II	TEXTURAS NUMÉRICAS DE CINCO CEROS DE TEXTURA (MeV)	Autovalores negativos
a	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 431.461 \\ 0 & 957.898 & 7251.27 \\ 431.461 & 7251.27 & 171225. \end{pmatrix}$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & 4.31591 + 14.2586i & 0 \\ 4.31591 - 14.2586i & 64.1289 & 0 \\ 0 & 0 & 2968.58 \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{1d} < 0$
b	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 426.288 \\ 0 & 868.054 & 7335.94 \\ 426.288 & 7335.94 & 172542. \end{pmatrix}$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & -4.1517 - 13.8072i & 0 \\ -4.1517 + 13.8072i & -62.495 & 0 \\ 0 & 0 & 2915.72 \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$

Tabla 3.2: Resultados numéricos para los modelos con cinco ceros de textura con dos de ellos en la diagonal de la matriz de masa M_u en donde $\lambda_{1u} < 0$ y se obtienen dos subcasos, **IIa** cuando $\lambda_{1d} < 0$ y **IIb** cuando $\lambda_{2d} < 0$.

De la misma forma, hacemos el análisis cuando $q = d$ y vemos que para cualquiera de estos casos, uno de los λ_{iq} restantes debe ser negativo, y de la misma forma que el caso anterior, los dos ceros que faltan para completar el modelo de los cinco ceros de textura, se obtienen de la matriz de masa restante M'_q en (3.14) o en (3.15), ajustando los parámetros libres θ_1 y θ_2 en la matriz de diagonalización (3.9). La tabla 3.2 resume los resultados numéricos después de una exploración exhaustiva de los diferentes casos. La única solución viable se logra con la configuración (3.15)³

En la siguiente sección trabajaremos con los resultados de las tablas 3.1 y 3.2 para encontrar en forma analítica relaciones entre la masa de los quarks y las entradas de la matriz de mezcla CKM.

³El software utilizado para hacer este análisis, fue el Mathematica, debido a sus precisiones numéricas y analíticas. En el apéndice F suministramos algunos cálculos hechos con este programa.

Capítulo 4

Modelos analíticos con cinco ceros de textura

Cuando tenemos un modelo de ceros de textura para la matriz de masa de los quarks, es posible encontrar relaciones entre los valores de estas masas y los parámetros de mezcla de la matriz CKM. Basándonos en los modelos obtenidos en la sección anterior con cinco ceros de textura, que se resumen en las tablas 3.1 y 3.2, podemos realizar un estudio analítico que nos permita deducir, principalmente, los valores absolutos de los parámetros de la matriz de mezcla CKM, en términos de las masas de los quarks.

A continuación exponemos el análisis para cada caso obtenido de la sección anterior.

4.1. Caso I

Como podemos ver de la tabla 3.1, en ambos modelos, de los cinco ceros de textura, tres se encuentran en la matriz de masa de los quarks down y dos de ellos en su diagonal.

Una estructura analítica para este primer caso la podemos expresar de la siguiente manera:

$$M_{Iu} = F^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\xi_u| \\ 0 & \alpha_u & |\beta_u| \\ |\xi_u| & |\beta_u| & \gamma_u \end{pmatrix} F, \quad M_{Id} = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & 0 & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \gamma_d \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Las fases en la matriz de mezcla “down”, son absorbidas a través de una WBT. La matriz diagonal de fase F:

$$F = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_{\xi_u}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_{\beta_u}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

en donde ϕ_{ξ_u} y ϕ_{β_u} son los argumentos de ξ_u y β_u respectivamente. Tenemos 7 parámetros reales y dos fases para describir 10 cantidades físicas: 6 masas de los quarks, 3 ángulos de mezcla y una fase responsable de la violación CP.

Para diagonalizar la matriz de masa M_{Iu} , usamos la matriz de permutación P_2 en (3.3) para llevarla a la forma (3.7) y así poder usar la matriz unitaria (3.9), con $q = u$. De esta manera, la matriz de diagonalización de M_{Iu} toma la forma, $F^\dagger P_2 U_u$. Para la matriz M_{Id} podemos usar directamente (3.7) con $q = d$ y $\gamma_d = 0$.

Por lo tanto, de acuerdo al procedimiento estudiado en la sección anterior, ecuaciones (3.10), los

parámetros para las matrices de masa toman la forma:

$$\gamma_u = \mp m_u \pm m_c + m_t - \alpha_u , \quad (4.3)$$

$$|\beta_u| = \sqrt{\frac{(\alpha_u \pm m_u)(\alpha_u \mp m_c)(m_t - \alpha_u)}{\alpha_u}} , \quad (4.4)$$

$$|\xi_u| = \sqrt{\frac{m_u m_c m_t}{\alpha_u}} , \quad (4.5)$$

$$\alpha_d = m_d - m_s + m_b , \quad (4.6)$$

$$|\beta_d| = \sqrt{\frac{(m_b - m_s)(m_d + m_b)(m_s - m_d)}{m_d - m_s + m_b}} , \quad (4.7)$$

$$|\xi_d| = \sqrt{\frac{m_d m_s m_b}{m_d - m_s + m_b}} , \quad (4.8)$$

el signo superior corresponde a $\lambda_{1u} < 0$ y el signo inferior corresponde a $\lambda_{2u} < 0$. El parámetro α_u es libre, y está acotado a las siguientes regiones:

$$m_c \leq \alpha_u \leq m_t, \text{ para } \lambda_{1u} < 0 ,$$

$$m_u \leq \alpha_u \leq m_t, \text{ para } \lambda_{2u} < 0 .$$

De esta manera, las matrices de diagonalización para las matrices de masa M_{Iu} y M_{Id} son respectivamente:

$$U_{Iu} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_{\xi u} + \theta_{1u})} \sqrt{\frac{m_c m_t (\alpha_u \pm m_u)}{\alpha_u (m_c + m_u) (m_t \pm m_u)}} & \pm e^{i(\phi_{\xi u} + \theta_{2u})} \sqrt{\frac{(\alpha_u \mp m_c) m_t m_u}{\alpha_u (m_t \mp m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i(\phi_{\xi u} - \theta_{3u})} \sqrt{\frac{m_c (m_t - \alpha_u) m_u}{\alpha_u (m_t \mp m_c) (m_t \pm m_u)}} \\ \pm e^{i(\phi_{\beta u} + \theta_{1u})} \sqrt{\frac{(\alpha_u \mp m_c) (m_t - \alpha_u) m_u}{\alpha_u (m_c + m_u) (m_t \pm m_u)}} & -e^{i(\phi_{\beta u} + \theta_{2u})} \sqrt{\frac{m_c (m_t - \alpha_u) (\alpha_u \pm m_u)}{\alpha_u (m_t \mp m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i(\phi_{\beta u} - \theta_{3u})} \sqrt{\frac{(\alpha_u \mp m_c) m_t (\alpha_u \pm m_u)}{\alpha_u (m_t \mp m_c) (m_t \pm m_u)}} \\ \mp e^{i\theta_{1u}} \sqrt{\frac{m_u (\alpha_u \pm m_u)}{(m_c + m_u) (m_t \pm m_u)}} & e^{i\theta_{2u}} \sqrt{\frac{m_c (\alpha_u \mp m_c)}{(m_t \mp m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i\theta_{3u}} \sqrt{\frac{m_t (m_t - \alpha_u)}{(m_t \mp m_c) (m_t \pm m_u)}} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$U_{Id} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{1d}} \sqrt{\frac{m_d (m_b - m_s) m_s}{(m_b - m_d) (m_d - m_s) (m_b + m_d - m_s)}} & e^{-i\theta_{2d}} \sqrt{\frac{m_b (m_b + m_d) m_d}{(m_d + m_s) (m_b + m_d - m_s) (m_b + m_s)}} & \sqrt{\frac{m_d (m_s - m_d) m_s}{(m_b - m_d) (m_b + m_d - m_s) (m_b + m_s)}} \\ e^{i\theta_{1d}} \sqrt{\frac{m_d (m_b - m_s)}{(m_b - m_d) (m_d + m_s)}} & e^{i\theta_{2d}} \sqrt{\frac{m_b (m_b + m_d) m_s}{(m_d + m_s) (m_b + m_s)}} & \sqrt{\frac{m_b (m_s - m_d)}{(m_b - m_d) (m_b + m_s)}} \\ -e^{i\theta_{1d}} \sqrt{\frac{m_d (m_b + m_d) (m_s - m_d)}{(m_b - m_d) (m_d + m_s) (m_b + m_d - m_s)}} & e^{-i\theta_{2d}} \sqrt{\frac{(m_b - m_s) m_s (m_s - m_d)}{(m_d + m_s) (m_b + m_d - m_s) (m_b + m_s)}} & \sqrt{\frac{m_b (m_b + m_d) (m_b + m_s)}{(m_b - m_d) (m_b + m_d - m_s) (m_b + m_s)}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde es necesario incluir las fases no físicas, $\theta_{1u}, \theta_{2u}, \theta_{3u}, \theta_{1d}$ y θ_{2d} , a fin de ajustar nuestra predicción teórica de la CKM a la convención establecida. Los mejores valores calculados los encontramos en la tabla 4.1. Además, los valores para las entradas de la CKM obtenidos a primer orden, teniendo en cuenta la jerarquía de masas (2.8) los podemos ver en la tabla 4.2.

La matriz CKM se calcula con:

$$V_{CKM} = U_{IU}^\dagger U_{Id} .$$

CASO I		
	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$	$\lambda_{2u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$
θ_{1u}	-1.42318	-2.84403
θ_{2u}	0.670068	1.85606
θ_{3u}	0.00473665	-0.00461668
θ_{1d}	0.636035	1.93013
θ_{2d}	-2.2845	-0.976639
$\phi_{\xi u}$	2.06927	-1.49697
$\phi_{\beta u}$	0.181706	0.301461
α_u (MeV)	6053.87	1690.29
m_u (MeV)	1.79188	1.2684
m_c (MeV)	625.493	633.197
m_t (MeV)	172620	171268
m_d (MeV)	2.99323	3.14751
m_s (MeV)	68.9279	56.1169
m_b (MeV)	2970.12	2910.01

Tabla 4.1: Valores numéricos de ajuste de los parámetros para el Caso I.

CASO	Texturas de cinco ceros analíticas	Predicción para la matriz de mezcla
I	$M_u = P^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_u \\ 0 & \alpha_u & \beta_u \\ \xi_u & \beta_u & \gamma_u \end{pmatrix} P,$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & \xi_d & 0 \\ \xi_d & 0 & \beta_d \\ 0 & \beta_d & \alpha_d \end{pmatrix},$ donde $P = (e^{-i\phi_{\xi u}}, e^{-i\phi_{\beta u}}, 1)$. Además $m_c < \alpha_u \ll m_t$. Con : “-” para el Caso Ia, en la tabla 3.1, $\lambda_{1u}, \lambda_{2d} < 0$. Con “+” para el Caso Ib, en la tabla 3.1, $\lambda_{2u} < 0$ y $\lambda_{2d} < 0$.	$ V_{ud} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} + \dots,$ $ V_{cs} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) + \dots,$ $ V_{tb} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_u}{m_t}} + \dots,$ $ V_{us} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} + \dots \right ,$ $ V_{cd} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) + \dots \right ,$ $ V_{ts} = \left \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} \left[\sqrt{\frac{m_s - m_d}{m_b}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) - e^{i\phi_{\beta u}} \sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}} \right] + \dots \right ,$ $ V_{cb} = \left \sqrt{\frac{m_s - m_d}{m_b}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) - e^{i\phi_{\beta u}} \sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}} + \dots \right ,$ $ V_{ub} = \left \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{\alpha_u}{m_t}} - e^{i\phi_{\beta u}} \sqrt{\frac{m_u(m_s - m_d)}{m_b}} \left(\frac{1}{m_c} \mp \frac{1}{\alpha_u}\right) \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) + \dots \right ,$ $ V_{td} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} \left[\sqrt{\frac{m_s - m_d}{m_b}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) - e^{i\phi_{\beta u}} \sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}} \right] + \dots \right .$

Tabla 4.2: Caso I para las matrices de masa de quarks con cinco ceros de textura. Y sus correspondientes predicciones a primer orden para los elementos de la matriz CKM en términos de las masas de los quarks.

4.2. Caso II

Ahora utilizamos la tabla 3.2, donde los resultados numéricos sugieren la siguiente forma para las matrices de masa:

$$M_{IIu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\xi_u| \\ 0 & \alpha_u & |\beta_u| \\ |\xi_u| & |\beta_u| & \gamma_u \end{pmatrix}, \quad M_{II d} = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d|e^{i\phi_{\xi_d}} & 0 \\ |\xi_d|e^{i\phi_{\xi_d}} & \gamma_d & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_d \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Vemos que en este caso hay solo una fase presente en la matriz de masa de los quarks “down”, donde ϕ_{ξ_d} es el argumento de ξ_d y es responsable de la violación CP.

En primer lugar, como en el caso anterior buscamos las matrices de diagonalización correspondiente a cada matriz de masa. Para la matriz M_{IIu} , la matriz de diagonalización tiene la forma $P_2 U_u$, donde P_2 es la matriz de permutación en (3.4) y U_u tiene la forma (3.9) con $q = u$. Para $M_{II d}$ la matriz de diagonalización es de la forma $F_d^\dagger U_d$, donde la matriz diagonal F_d que contiene la fase y es de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\phi_{\xi_d}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y U_d es de la forma (3.9) con $q = d$.

Debemos tomar en cuenta, por lo considerado en la sección (3.3.2), que en la matriz $M_{II d}$, de acuerdo a (3.15) $\beta_d = 0$ y en consecuencia de (3.22) con d en vez de u , se presentan las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} \text{Cuando } \alpha_d = \lambda_{1d} \quad \text{entonces } |\xi_d| &= \sqrt{-\lambda_{2d}\lambda_{3d}} \quad \text{y} \quad \gamma_d = \lambda_{2d} + \lambda_{3d}, \\ \text{Cuando } \alpha_d = \lambda_{2d} \quad \text{entonces } |\xi_d| &= \sqrt{-\lambda_{1d}\lambda_{3d}} \quad \text{y} \quad \gamma_d = \lambda_{1d} + \lambda_{3d}, \\ \text{Cuando } \alpha_d = \lambda_{3d} \quad \text{entonces } |\xi_d| &= \sqrt{-\lambda_{1d}\lambda_{2d}} \quad \text{y} \quad \gamma_d = \lambda_{1d} + \lambda_{2d}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Debemos tomar en cuenta que para cualquiera de estos casos, uno de los λ_{id} restantes debe ser negativo.

Resumiendo, los parámetros del modelo toman la forma:

$$\begin{aligned} \gamma_u &= -m_u + m_c + m_t - \alpha_u, \\ |\beta_u| &= \sqrt{\frac{(\alpha_u + m_u)(\alpha_u - m_c)(m_t - \alpha_u)}{\alpha_u}}, \\ |\xi_u| &= \sqrt{\frac{m_u m_c m_t}{\alpha_u}} \\ \alpha_d &= m_b, \\ \gamma_d &= \mp m_d \pm m_s, \\ |\xi_d| &= \sqrt{m_d m_s}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

en donde hemos trabajado de acuerdo a la tabla 3.2 y a las relaciones (3.11) y 4.12, con $\lambda_{1u} = -m_u < 0$ y donde el signo superior es para $\lambda_1 = -m_d < 0$ y el signo inferior cuando $\lambda_{2d} = -m_s < 0$, con $\alpha_u > 0$ y se encuentra en el intervalo $m_c \leq \alpha_u \leq m_t$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, las matrices de diagonalización para las matrices de masa de los quarks M_{IIu} y $M_{II d}$ tienen la siguiente forma analítica respectiva:

$$U_{IIu} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{1u}} \sqrt{\frac{m_c m_t (\alpha_u + m_u)}{\alpha_u (m_c + m_u) (m_t + m_u)}} & e^{i\theta_{2u}} \sqrt{\frac{m_t m_u (\alpha_u - m_c)}{\alpha_u (m_t - m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i\theta_{3u}} \sqrt{\frac{m_c m_u (m_t - \alpha_u)}{\alpha_u (m_t - m_c) (m_t + m_u)}} \\ e^{i\theta_{1u}} \sqrt{\frac{m_u (\alpha_u - m_c) (m_t - \alpha_u)}{\alpha_u (m_c + m_u) (m_t + m_u)}} & -e^{i\theta_{2u}} \sqrt{\frac{m_c (m_t - \alpha_u) (\alpha_u + m_u)}{\alpha_u (m_t - m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i\theta_{3u}} \sqrt{\frac{m_t (\alpha_u - m_c) (\alpha_u + m_u)}{\alpha_u (m_t - m_c) (m_t + m_u)}} \\ -e^{i\theta_{1u}} \sqrt{\frac{m_u (\alpha_u + m_u)}{(m_c + m_u) (m_t + m_u)}} & e^{i\theta_{2u}} \sqrt{\frac{m_c (\alpha_u - m_c)}{(m_t - m_c) (m_c + m_u)}} & e^{i\theta_{3u}} \sqrt{\frac{m_t (m_t - \alpha_u)}{(m_t - m_c) (m_t - m_u)}} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

$$U_{II d} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_{\xi d} + \theta_{1d})} \sqrt{\frac{m_s}{m_d + m_s}} & \mp e^{i(\phi_{\xi d} + \theta_{2d})} \sqrt{\frac{m_d}{m_d + m_s}} & 0 \\ \mp e^{i\phi_{\xi d}} \sqrt{\frac{m_d}{m_d + m_s}} & e^{i\theta_{2d}} \sqrt{\frac{m_s}{m_d + m_s}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Los mejores parámetros de ajuste para el caso II los indicamos en la tabla 4.3.

	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{1d} < 0$	$\lambda_{1u} < 0$ $\lambda_{2d} < 0$
θ_{1u}	-1.97527	-1.99113
θ_{2u}	0	0
θ_{3u}	0	0
θ_{1d}	3.02511	-0.135088
θ_{2d}	3.14753	3.14844
$\phi_{\xi d}$	1.27688	-1.86289
α_u (MeV)	957.898	868.054
m_u (MeV)	1.59895	1.64209
m_c (MeV)	650.157	555.739
m_t (MeV)	171534	172856
m_d (MeV)	3.29179	3.1659
m_s (MeV)	67.4207	65.6609
m_b (MeV)	2968.58	2915.72

Tabla 4.3: Valores numéricos de ajuste de los parámetros el caso II.

La matriz CKM se calcula

$$V_{CKM} = U_{IIu}^\dagger U_{II d}.$$

Los términos de la matriz de mezcla CKM teniendo en cuenta la jerarquía de masas se exponen en la tabla 4.4.

En el siguiente capítulo hablaremos de las conclusiones extraídas de estos modelos analíticos.

CASO	Texturas analíticas de cinco ceros	Predicción para la matriz de mezcla
II	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_u \\ 0 & \alpha_u & \beta_u \\ \xi_u & \beta_u & \gamma_u \end{pmatrix},$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & \xi_d e^{i\phi_{\xi d}} & 0 \\ \xi_d e^{-i\phi_{\xi d}} & \alpha_d & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_d \end{pmatrix},$ donde $m_c < \alpha_u \ll m_t$ y : - para λ_{1u} y $\lambda_{1d} < 0$ - para $\lambda_{1u} < 0$ y $\lambda_{2d} < 0$	$ V_{ud} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} + \dots$ $ V_{cs} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) + \dots$ $ V_{tb} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_u}{m_t}} + \dots$ $ V_{us} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} + \dots \right $ $ V_{cd} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} \left(1 - \frac{\alpha_u}{m_t}\right) + \dots \right $ $ V_{ts} = \left \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_d}} \left(\frac{\alpha_u}{m_t} - \frac{m_c}{m_t}\right) + \dots \right $ $ V_{cb} = \left \sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t - \frac{m_c}{m_t}}} + \dots \right $ $ V_{ub} = \left \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{\alpha_u}{m_t}} + \dots \right $ $ V_{td} = \left \sqrt{\frac{m_d}{m_s + m_d}} \left(\frac{\alpha_u}{m_t} - \frac{m_c}{m_t}\right) \mp e^{i\phi_{\xi d}} \sqrt{\frac{m_s m_c m_u}{m_s + m_d} \frac{1}{m_t}} \left(\frac{1}{\alpha_u} - \frac{1}{m_t}\right) + \dots \right $

Tabla 4.4: Casos II para las matrices de masa de quarks con cinco ceros de textura. Y sus correspondientes predicciones de primer orden para los elementos de la matriz CKM.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo, nos hemos enfocado en el sector de Yukawa del Modelo Estándar, el cual describe los acoplamientos entre los campos y el bosón de Higgs, responsable de dotar de masa a las partículas. De esta forma, hemos logrado cumplir con el objetivo de nuestra investigación: encontrar relaciones entre las masas de los quarks y los ángulos de mezcla en el sector de Yukawa. Este objetivo se ha alcanzado de la siguiente manera:

- En primer lugar, explicamos la estructura del Modelo Estándar y centramos nuestra atención en el sector fermiónico, donde se encuentra el sector de Yukawa que contiene los parámetros libres de las matrices de masa. Modelamos las tres familias de quarks como dobletes izquierdos y singletes derechos, de tal forma que se acoplen con el doblete de Higgs para el mecanismo de generación de masa. Además, trabajamos solo con el lagrangiano de las corrientes cargadas, omitiendo los términos que no resultaban relevantes para nuestra investigación.
- Una vez establecido el lagrangiano del sector de quarks y el de corrientes, notamos para el sector de masas que la presencia de 36 parámetros libres resultaba excesiva para realizar algún tipo de predicción. Por lo tanto, buscamos reducir esta cantidad. En primer lugar, utilizamos el teorema de la descomposición polar, que nos permitió trabajar con las matrices de masa del sector de quarks como hermíticas, logrando así reducir los parámetros libres a la mitad. Sin embargo, esta cantidad sigue siendo elevada, por lo que implementamos una WBT, demostramos que, bajo dicha transformación, los lagrangianos permanecen invariantes, esto nos permitió obtener una representación equivalente y, al mismo tiempo, facilitar la introducción de cinco ceros de textura en total, logrando así un número adecuado de parámetros libres para nuestro análisis.
- Dado que las masas de los quarks se han calculado experimentalmente y exhiben una jerarquía, la introducción de ceros de textura en las matrices de masa exige que las matrices resultantes sean compatibles con dichos valores experimentales. Por esta razón, realizamos un análisis exhaustivo de los parámetros propuestos para determinar tanto el número de ceros de textura que podían introducirse como su ubicación dentro de las matrices.

Por lo tanto, hemos desarrollado una explicación del modelo con cinco ceros de textura, a partir del cual se derivan dos posibles escenarios: el primero con tres ceros de textura, incluyendo uno en la diagonal, y el segundo también con tres ceros, pero distribuidos de manera que dos de ellos se ubican en la diagonal. En ambos casos se obtuvieron resultados consistentes.

Asimismo, construimos la matriz unitaria que diagonaliza las matrices de masa, asegurándonos de que fuera compatible con la matriz de mezcla CKM a la escala de energía de la masa del bosón Z, ampliamente conocida en la literatura así como las cotas experimentales de las masas de los quarks.

Una vez completado este análisis y con el apoyo del software *Mathematica*, obtuvimos valores numéricos que resultaron compatibles con los datos experimentales de las masas de los quarks.

- Trabajamos con los valores numéricos obtenidos y realizamos un estudio analítico de los mismos, lo que nos permitió establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el modelo de ceros de textura fuera compatible con los datos experimentales. Este análisis abarcó los dos casos mencionados en el apartado anterior.

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, mostrando coherencia tanto con los valores experimentales de las masas de los quarks como con los elementos de la matriz de mezcla CKM.

- Por último, los resultados mas importantes de este trabajo se recogen en las tablas (4.2) y (4.4) donde puede observar una relación entre las masas de los quarks y la CKM a primer orden

De esta manera, damos por finalizada nuestra investigación sobre el modelo teórico de los ceros de textura. Como recomendación, destacamos que este mecanismo debe someterse a prueba cada vez que los experimentos proporcionen datos más actualizados.

Es importante señalar que, aunque nuestro trabajo se centró en el sector de quarks, este modelo es aplicable a todo el sector fermiónico del Modelo Estándar. Por ello, dejamos este estudio como punto de partida para quienes deseen investigar en el sector leptónico y demostrar su validez en dicho contexto.

Además, sugerimos explorar el uso de herramientas de análisis numérico más avanzado, que permita identificar ceros de textura de manera más rápida y precisa, acelerando así una posible publicación de resultados y/o predicciones que puedan ser verificadas mas adelante.

Apéndice A

La ruptura espontánea de simetría en el Modelo Estándar

En la teoría clásica de campos, el Lagrangiano se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema, se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = T - V , \quad (\text{A.1})$$

donde la primera parte representa el término cinético (derivado del campo en espacio y tiempo) y el segundo es el término de masa o potencial.

El Lagrangiano describe la dinámica de un sistema físico y se utiliza para obtener las ecuaciones de movimiento del campo. Un ejemplo común es el campo escalar libre de masa m , cuya densidad lagrangiana la podemos escribir como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 , \quad (\text{A.2})$$

que tiene la misma estructura de (A.1).

El mundo físico manifiesta una serie de leyes de conservación aparentemente exactas, que creemos reflejan la operación de simetrías exactas de la naturaleza. Estas incluyen la conservación de la energía y el momento lineal, del momento angular y de la carga eléctrica. En el lenguaje de la teoría de campos lagrangiana, la simetría se caracteriza por dos condiciones, en primer lugar, el lagrangiano (densidad) es invariante bajo transformaciones de simetría y en segundo lugar el vacío físico debe ser único ante dichas transformaciones. A partir de estos requisitos demostramos cómo ocurre la ruptura espontánea de la simetría usando para nuestro análisis en el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 . \quad (\text{A.3})$$

Si comparamos este lagrangiano con las expresiones (A.1) y (A.2), es fácil reconocer que el primer término corresponde al término cinético, el segundo término corresponde al término del potencial, que es una función de ϕ , o sea

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 . \quad (\text{A.4})$$

Este potencial es invariante bajo una transformación de paridad

$$\phi \rightarrow -\phi . \quad (\text{A.5})$$

Si comparamos el potencial (A.4) con el del lagrangiano (A.2) podemos identificar al término cuadrático como el término de masa de un campo escalar y el término a la cuatro nos garantiza que esté acotado por debajo. Puede haber más términos con potencias mayores que cuatro, pero no las consideramos para mantener la renormalizabilidad de la teoría.

Cuando $\mu > 0$ en (A.4), el potencial tiene un mínimo en

$$\langle \phi \rangle_0 = 0 ,$$

que corresponde al estado de vacío como se puede ver en la siguiente figura

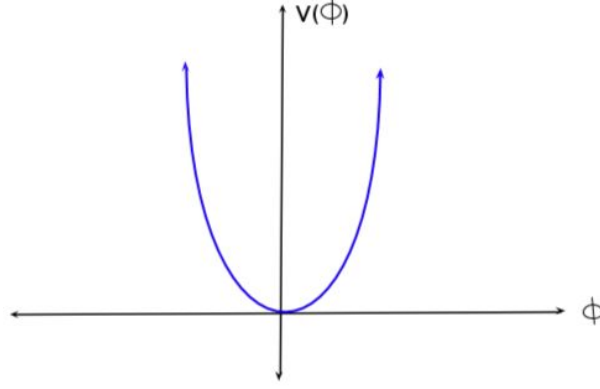


Figura A.1: Potencial escalar con $\mu > 0$ mostrando el estado fundamental en $\phi = 0$

Sin embargo, si $\mu < 0$ en (A.3), el segundo término ya no representa un término de masa, sino que, al igual que el cuarto término, se interpreta como un término de potencial y el lagrangiano (A.3) describiría la dinámica de un campo sin masa. Además, el mínimo del potencial ocurre en:

$$\langle \phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v , \quad (\text{A.6})$$

que corresponde a dos valores para el vacío, como lo podemos ver en la siguiente gráfica

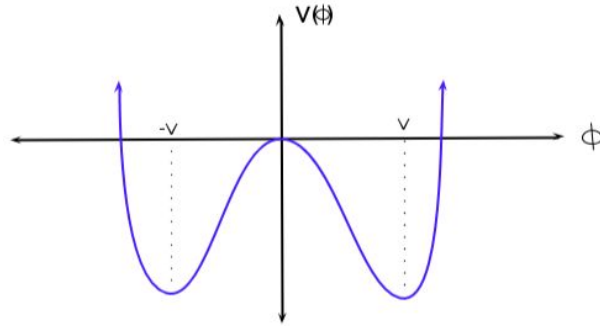


Figura A.2: Potencial escalar con $\mu < 0$ que demuestra el estado degenerado del valor mínimo de energía en el potencial.

Por lo tanto, decimos que el estado base se ha degenerado, en otras palabras ha ocurrido una ruptura espontánea de simetría, aunque el lagrangiano (A.3) siga siendo simétrico bajo la transformación de paridad (A.5) no cumple la condición de tener un solo valor de mínima energía.

Sin embargo podemos escoger como referencia cualquiera de los dos estados base (A.6) y redefinir el campo ϕ' como el campo ϕ desplazado respecto a $+v$, que escogemos como vacío. Por lo tanto:

$$\langle \phi \rangle_0 = +v,$$

de esta manera, tenemos que:

$$\phi' \equiv \phi - \langle \phi \rangle_0 = \phi - v, \quad (\text{A.7})$$

de tal manera, que el Lagrangiano (A.3) en términos de (A.7) lo escribimos como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi') (\partial^\mu \phi') - |\mu^2| \left(\frac{\phi'^4}{4v^2} + \frac{\phi'^3}{v} + \phi'^2 - \frac{v^2}{4} \right). \quad (\text{A.8})$$

Podemos ver que que, este Lagrangiano descrito respecto al vacío $+v$ no tiene simetría de paridad ni del estado base. Pero si consideramos solo las pequeñas oscilaciones del campo ϕ' respecto al vacío escogido, el Lagrangiano toma la forma.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi') (\partial^\mu \phi') - 2|\mu^2| \phi'^2]. \quad (\text{A.9})$$

Como μ^2 es negativo, entonces el anterior lagrangiano describe la oscilación de una partícula de masa $2|\mu^2|$ o sea que $-2\mu^2 > 0$. Este ejemplo ha ilustrado cómo ocurre la ruptura espontánea de simetría cuando una simetría del lagrangiano no se respeta en el estado de vacío definido como el estado de menor energía. Los mismos métodos para elegir un vacío entre un conjunto degenerado de vacíos y para descubrir el espectro de partículas se aplican igualmente bien a situaciones físicas más complicadas e interesantes como las simetrías continuas o no abelianas que se pueden encontrar en la literatura.

A.1. Ruptura espontánea de simetrías continuas no abelianas

Sabemos que las simetrías en la naturaleza preservan las propiedades de un sistema, incluso cuando se realizan ciertas transformaciones sobre él. Si estas transformaciones no ocurren de manera abrupta, sino de forma continua y progresiva, como al realizar una rotación (donde el valor del ángulo varía de manera suave), esperamos que las propiedades del sistema permanezcan invariantes.

En general, las simetrías continuas están estrechamente vinculadas a las leyes de conservación, según lo establece el teorema de Noether. Además, estas simetrías también están relacionadas con las fuerzas fundamentales de la naturaleza y con las partículas que median dichas interacciones.

En este contexto, las simetrías continuas y su ruptura fueron estudiadas en profundidad por Goldstone. A continuación, presentamos un breve resumen del mecanismo de la ruptura de simetría y sus implicaciones.

En este caso trabajamos con la simetría $SU(2)$ usando el doblete escalar complejo de la forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

en donde

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2),$$

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 + i\phi_4) .$$

Usamos el Lagrangiano;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 , \quad (\text{A.10})$$

con el potencial

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\text{A.11})$$

donde

- μ^2 determina la curvatura del potencial
- $\lambda > 0$ asegura que el potencial sea acotado por abajo.

Cuando $\mu^2 > 0$ el potencial tiene un mínimo en $\mu^2 = 0$. Sin embargo, si $\phi < 0$ el potencial tiene un mínimo no trivial donde $\phi^\dagger \phi = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$. Este último caso da lugar a la ruptura espontánea de simetría. Cuando ϕ adquiere un valor esperado en el vacío:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} ,$$

donde $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, ocurre la ruptura espontánea de simetría.

Si consideramos pequeñas oscilaciones alrededor del vacío que hemos escogido, podemos escribir el campo de la siguiente manera:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.12})$$

No olvidemos que se trata de un campo escalar complejo con cuatro grados de libertad que se puede parametrizar en forma exponencial de la siguiente manera:

$$\phi = e^{\frac{i\theta_i(x)\sigma_i}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad (\text{A.13})$$

con σ_i como los generadores del grupo $SU(2)$, que no son más que las matrices de Pauli. Bajo esta parametrización se conservan los cuatro grados de libertad: tres en la fase $\theta_i(x)$ y uno en el módulo $\eta(x)$. Nuestro interés está en el campo real $\eta(x)$ de ahí que busquemos una transformación en $SU(2)$ de la forma

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{\frac{ig\alpha_i(x)\sigma_i}{2}} \phi ,$$

que deje invariante al Lagrangiano y a la vez desaparezca $\theta_i(x)$ como si se perdieran tres grados de libertad quedándonos solo con el campo $\eta(x)$. Sin embargo, los campos θ_i conocidos como los bosones de Goldstone reaparecen como campos masivos, manteniendo la invarianza gauge del Lagrangiano. Lo anteriormente expuesto lo podemos ver al trabajar el sector cinético del lagrangiano (??) desarrollando la derivada covariante para $SU(2)$ que se define:

$$D_\mu = \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu Y + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu \right) , \quad (\text{A.14})$$

donde g es la constante de acoplamiento para $SU(2)$, g' se asocia a $U(1)$, τ_i , $i = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli. de tal manera que el lagrangiano (A.10) con ϕ definido en (A.12) queda expresado de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu Y + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]^2 - \left[\mu^2 \left(\frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^2 + \lambda \left(\frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right].$$

Desarrollando la derivada covariante, la expresión sería:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} A_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_\mu^3 \right) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^2, \\ & \left\{ \left[\partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^2, \\ & \left\{ \left[\partial_\mu + \left[\begin{pmatrix} \frac{ig'}{2} B_\mu + \frac{ig}{2} A_\mu^3 & \frac{ig}{2} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ \frac{ig}{2} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) & \frac{g'}{2} B_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

Podemos hacer la siguiente definición:

$$W^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.15})$$

por lo tanto, el lagrangiano (A.10) es

$$\mathcal{L} = \left\{ \left[\partial_\mu + i \begin{pmatrix} \frac{g'}{2} B_\mu + \frac{g}{2} A_\mu^3 & \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \frac{g'}{2} B_\mu - \frac{g}{2} A_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^2 - \left[\mu^2 \left(\frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^2 + \lambda \left(\frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right],$$

que al resolver, el lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \frac{g^2 v^2}{8} (|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2) + \frac{v^2}{8} (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 + \dots$$

El último término origina una matriz que puede diagonalizarse como se muestra en la literatura [23] [24]. Además, podemos encontrar los siguientes campos:

$$Z_\mu = \frac{g A_\mu^3 - g' B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad A_\mu = \frac{g B_\mu + g' A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}},$$

finalmente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \frac{g^2 v^2}{8} (|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2) + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z^\mu Z_\mu + \dots,$$

podemos ver que el campo físico η conocido como el campo de Higgs ha adquirido masa. al igual que el bosón vectorial cargado W y el bosón intermedio neutro Z . La ausencia del bosón A implica que su masa es cero y se puede identificar como el fotón de la teoría electrodinámica $U(1)$.

Apéndice B

El lagrangiano de corrientes neutras y cargadas para el sector de quarks

Para obtener la ecuación (1.22) partimos de la ecuación (1.21)

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} W_\mu^{(3)} + \frac{ig'}{6} B_\mu \right) u_L^k - \bar{u}_L^k \gamma^\mu \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d_L^k \\
 &\quad - \bar{d}_L^k \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu W_\mu^- u_L^k + \bar{d}_L^k i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2} W_\mu^{(3)} + \frac{ig'}{6} B_\mu \right) d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

En primer lugar, destruimos los paréntesis.

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \gamma^\mu \partial_\mu u_L^k - \frac{g}{2} W_\mu^{(3)} \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k - \frac{g'}{6} B_\mu \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k + i\bar{d}_L^k \gamma^\mu \partial_\mu d_L^k + \frac{g}{2} W_\mu^{(3)} \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g'}{6} B_\mu \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

La expresión puede organizarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \gamma^\mu \partial_\mu u_L^k + i\bar{d}_L^k \gamma^\mu \partial_\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &\quad - \frac{g}{2} W_\mu^{(3)} \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k - \frac{g'}{6} B_\mu \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k + \frac{g}{2} W_\mu^{(3)} \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g'}{6} B_\mu \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Podemos usar la notación de Feynman $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$ y las definiciones para los campos $W_\mu^{(3)}$ y B_μ . Donde:

$$W_\mu^{(3)} = A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu^0 \cos \theta_W \tag{B.4}$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu^0 \sin \theta_W \tag{B.5}$$

De tal forma que la expresión se escribe como:

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &\quad - \frac{g}{2} (A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu^0 \cos \theta_W) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k - \frac{g'}{6} (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu^0 \sin \theta_W) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &\quad + \frac{g}{2} (A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu^0 \cos \theta_W) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g'}{6} (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu^0 \sin \theta_W) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Podemos operar los términos semejantes para luego obtener

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{g'}{6} A_\mu \cos \theta_W - \frac{g'}{6} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{g'}{6} A_\mu \cos \theta_W + \frac{g'}{6} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Organizamos la expresión:

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g'}{6} A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{g'}{6} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g'}{6} A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{g'}{6} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Ahora, si tenemos en cuenta las relaciones entre el ángulo de Weinberg y las cargas $e = g \sin \theta_W$ y $\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{g}{\cos \theta_W}$.¹ tenemos que

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6 \cos \theta_W} \sin \theta_W A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{g \sin \theta_W}{6 \cos \theta_W} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6 \cos \theta_W} \sin \theta_W A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{g \sin \theta_W}{6 \cos \theta_W} Z_\mu^0 \sin \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

¹Cuando despejamos g' tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{g^2 + g'^2} &= \frac{g}{\cos \theta_W} \\
 g^2 + g'^2 &= \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} \\
 g'^2 &= \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} - g^2 \\
 g' &= \sqrt{\frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} - g^2} \\
 g' &= g \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_W} - 1} \\
 g' &= g \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W}} \\
 g' &= \frac{g}{\cos \theta_W} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_W} \\
 g' &= \frac{g}{\cos \theta_W} \sqrt{\sin^2 \theta_W} \\
 g' &= \frac{g \sin \theta_W}{\cos \theta_W}
 \end{aligned}$$

Qué es lo que usamos en la ecuación (B.8) para llegar a (B.9)

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6 \cos \theta_W} \sin \theta_W A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{g}{6 \cos \theta_W} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \quad (\text{B.10}) \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6 \cos \theta_W} \sin \theta_W A_\mu \cos \theta_W + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{g}{6 \cos \theta_W} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \quad (\text{B.11}) \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{g}{6 \cos \theta_W} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial}_\mu u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial}_\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \quad (\text{B.12}) \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{g}{2} Z_\mu^0 \cos \theta_W + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned}$$

Vamos a utilizar la relación del ángulo de Weinberg de la forma $g = \sqrt{g^2 + g'^2} \cos \theta_W$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu^0 \cos^2 \theta_W - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \quad (\text{B.13}) \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu^0 \cos^2 \theta_W + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (3 \cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \quad (\text{B.14}) \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (3 \cos^2 \theta_W + \sin^2 \theta_W) \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W + \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (3 \cos^2 \theta_W - (1 - \cos^2 \theta_W)) \right) \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left(\frac{g}{2} A_\mu \sin \theta_W - \frac{g}{6} \sin \theta_W A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (3 \cos^2 \theta_W + (1 - \cos^2 \theta_W)) \right) \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left[\frac{g}{2} \frac{4}{3} A_\mu \sin \theta_W + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (4 \cos^2 \theta_W - 1) \right] \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left[\frac{g}{2} \frac{2}{3} A_\mu \sin \theta_W + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (2 \cos^2 \theta_W + 1) \right] \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Que en términos de la carga sería:

$$\begin{aligned}
 &= i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &- \left[\frac{1}{2} \frac{4}{3} e A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (4 \cos^2 \theta_W - 1) \right] \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k \\
 &+ \left[\frac{1}{2} \frac{2}{3} e A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (2 \cos^2 \theta_W + 1) \right] \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Para alcanzar nuestro objetivo, no es necesario modificar toda la estructura de este lagrangiano. Por esta razón, realizaré las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} e A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (4 \cos^2 \theta_W - 1) \\
 P_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} e A_\mu + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{6} Z_\mu^0 (2 \cos^2 \theta_W + 1)
 \end{aligned}$$

De tal forma que el lagrangiano se expresa de la siguiente manera

$$\bar{Q}_L^k i \not{\partial} Q_L^k = i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k - P_1 \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k + P_2 \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k \tag{B.18}$$

Simplificando, sería:

$$\bar{Q}_L^k i \not{\partial} Q_L^k = \underbrace{i\bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i\bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k}_{\mathcal{L}^{Cin}} - \underbrace{\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k}_{\mathcal{L}_q^C} + \mathcal{L}_q^N, \tag{B.19}$$

Dirigimos nuestra atención al sector derecho, donde la derivada covariante adopta la siguiente forma:"

$$D_\mu = \partial_\mu - ig' \frac{Y_R}{2} B_\mu \tag{B.20}$$

Por lo tanto, sustituimos en el sector derecho de la ecuación (1.13). En el Modelo Estándar, las hipercargas correctas para los quarks derechos son $Y(u_R) = \frac{4}{3}$ y $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$

$$\bar{u}_R^k i \not{D} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{D} d_R^k = \bar{u}_R^k i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g' \frac{2}{3} B_\mu \right) u_R^k + \bar{d}_R^k i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i g' \frac{1}{3} B_\mu \right) d_R^k \quad (\text{B.21})$$

Distribuimos los términos dentro del paréntesis

$$\bar{u}_R^k i \not{D} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{D} d_R^k = \bar{u}_R^k i \not{\partial} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{\partial} d_R^k + \frac{2g'}{3} B_\mu \bar{u}_R^k i \gamma^\mu u_R^k - \frac{g'}{3} B_\mu \bar{d}_R^k i \gamma^\mu d_R^k. \quad (\text{B.22})$$

Donde definimos:

$$P_3 = \frac{2g'}{3} B_\mu,$$

$$P_4 = -\frac{g'}{3} B_\mu.$$

De esta forma tenemos:

$$\bar{u}_R^k i \not{D} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{D} d_R^k = \bar{u}_R^k i \not{\partial} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{\partial} d_R^k + P_3 \bar{u}_R^k \gamma^\mu u_R^k + P_4 \bar{d}_R^k \gamma^\mu d_R^k \quad (\text{B.23})$$

Al combinar los resultados (B.19) y (B.23) llegamos a la forma general para el lagrangiano de corrientes cargadas y neutras.”

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^C = & i \bar{u}_L^k \not{\partial} u_L^k + i \bar{d}_L^k \not{\partial} d_L^k + \bar{u}_R^k i \not{\partial} u_R^k + \bar{d}_R^k i \not{\partial} d_R^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^k \gamma^\mu d_L^k - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^k - P_1 \bar{u}_L^k \gamma^\mu u_L^k + \\ & P_2 \bar{d}_L^k \gamma^\mu d_L^k + P_3 \bar{u}_R^k \gamma^\mu u_R^k + P_4 \bar{d}_R^k i \gamma^\mu d_R^k \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Esta forma coincide con la ecuación (1.22), que era nuestro objetivo a lograr.

Apéndice C

Del estado de interacción al estado de masa en el lagrangiano del sector de quarks

La expresión matemática en la ecuación (1.24) nos lleva a considerar la conveniencia de efectuar rotaciones en el espacio de sabores de los quarks. Esto tiene como propósito expresar el lagrangiano en función de los autestados de masa.

El cambio de base para los quarks se hace de la siguiente manera:

$$u_L^{i'} = U_u u_L^i$$

$$u_R^{i'} = U_u u_R^i$$

$$d_L^{i'} = U_d d_L^i$$

$$d_R^{i'} = U_d d_R^i$$

Aquí, U_u y U_d son matrices de rotación unitarias que nos permiten realizar la transición hacia los autoestados de masas. Esto conduce a una forma modificada del lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_q = & \bar{u}_L^{i'} M_u u_R^{i'} + \bar{d}_L^{i'} M_d d_R^{i'} + i \bar{u}_L^{i'} \not{\partial} u_L^{i'} + i \bar{d}_L^{i'} \not{\partial} d_L^{i'} + \bar{u}_R^{i'} i \not{\partial} u_R^{i'} + \bar{d}_R^{i'} i \not{\partial} d_R^{i'} - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^{i'} \gamma^\mu d_L^{i'} \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^{i'} \gamma^\mu u_L^{i'} - P_1 \bar{u}_L^{i'} \gamma^\mu u_L^{i'} + P_2 \bar{d}_L^{i'} \gamma^\mu d_L^{i'} + P_3 \bar{u}_R^{i'} \gamma^\mu u_R^{i'} + P_4 \bar{d}_R^{i'} \gamma^\mu d_R^{i'} + h.c. \end{aligned} \quad (C.1)$$

Por consiguiente, al realizar las transformaciones pertinentes, se hace evidente que las matrices de masa se diagonalizan. Sin embargo, en los términos de interacción emerge la matriz de mezcla conocida como CKM (Cabibbo–Kobayashi–Maskawa), definida de la siguiente manera:

$$V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$$

y $V_{CKM}^\dagger = U_d^\dagger U_u$. Es importante destacar que esta matriz es unitaria. Por otra parte, es evidente que en los términos cinéticos y en las corrientes neutras, donde no ocurren mezclas de estados de quarks, las expresiones no experimentan cambios significativos. Esto puede apreciarse en las

siguientes formulaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_q = & \bar{u}_L^i \underbrace{U_u^\dagger M_u U_u}_{D_u} u_R^i + \bar{d}_L^i \underbrace{U_d^\dagger M_d U_d}_{D_d} d_R^i + i \bar{u}_L^i \underbrace{U_u^\dagger U_u}_1 \not{\partial} u_L^i + i \bar{d}_L^i \underbrace{U_d^\dagger U_d}_1 \not{\partial} d_L^i + \bar{u}_R^i \underbrace{U_u^\dagger U_u}_1 i \not{\partial} u_R^i \\
 & + \bar{d}_R^i \underbrace{U_d^\dagger U_d}_1 i \not{\partial} d_R^i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^i \gamma^\mu \underbrace{U_u^\dagger U_d}_{V_{CKM}} d_L^i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^i \gamma^\mu \underbrace{U_d^\dagger U_u}_{V_{CKM}^\dagger} u_L^i - P_1 \bar{u}_L^i \underbrace{U_u^\dagger U_u}_1 \gamma^\mu u_L^i \\
 & + P_2 \bar{d}_L^i \underbrace{U_d^\dagger U_d}_1 \gamma^\mu d_L^i + P_3 \bar{u}_R^i \underbrace{U_u^\dagger U_u}_1 \gamma^\mu u_R^i + P_4 \bar{d}_R^i \underbrace{U_d^\dagger U_d}_1 \gamma^\mu d_R^i + h.c.
 \end{aligned} \quad (C.2)$$

Por lo tanto, el lagrangiano correspondiente al sector de quarks, expresado en términos de los autoestados de masa, se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_q = & \bar{u}_L^i D_u u_R^i + \bar{d}_L^i D_d d_R^i + i \bar{u}_L^i \not{\partial} u_L^i + i \bar{d}_L^i \not{\partial} d_L^i + \bar{u}_R^i i \not{\partial} u_R^i + \bar{d}_R^i i \not{\partial} d_R^i - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L^i \gamma^\mu V_{CKM} d_L^i \\
 & - \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{d}_L^i \gamma^\mu V_{CKM}^\dagger u_L^i - P_1 \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i + P_2 \bar{d}_L^i \gamma^\mu d_L^i + P_3 \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i + P_4 \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i + h.c.
 \end{aligned} \quad (C.3)$$

Las matrices D_u y D_d son diagonales, y sus elementos corresponden a los autovalores de las matrices M_u y M_d respectivamente.

Apéndice D

El teorema de la descomposición polar

El teorema de descomposición polar es un resultado importante en álgebra lineal y se aplica comúnmente en matrices y espacios vectoriales euclídeos o hermíticos. Este teorema establece que cualquier matriz compleja sea invertible o no, puede descomponerse como el producto de una matriz unitaria por una matriz hermitica.¹

Formalmente, el teorema establece que si tenemos una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ la puedo descomponer como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{H},$$

en donde: $\mathbf{U}$ es una matriz unitaria ($\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$), y $\mathbf{H}$ es una matriz hermítica ($\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$). Es importante tener en cuenta que la descomposición polar de una matriz puede no ser única, lo que significa que una matriz $\mathbf{A}$ puede tener diferentes formas de expresar la descomposición polar porque depende de las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{H}$ que elijamos. Sin embargo, todas las descomposiciones polares de $\mathbf{A}$ tendrán la propiedad de que $\mathbf{U}$ es unitaria y $\mathbf{H}$ es hermítica.

El teorema surge de la relación entre los números complejos y la forma matricial de los operadores. o sea que si tengo un número complejo z , puedo escribirlo en forma polar como:

$$z = \sqrt{z^*z} e^{i\theta}$$

Del mismo modo una matriz $\mathbf{A}$ la puedo escribir en forma polar como :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{H}$$

En donde $\mathbf{H}$ es la cantidad positiva y $\mathbf{U}$ hace referencia a las rotaciones que generalmente se expresan como matrices unitarias. Entonces, como la representación polar de un número complejo no es única debido a que el ángulo puede cambiar infinitamente de la forma $z = \sqrt{z^*z} e^{(i\theta+2n\pi)}$ (con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$), la descomposición polar de una matriz tampoco es única, debido a la matriz de rotación unitaria $\mathbf{U}$. Sin embargo, la matriz $\mathbf{H}$ en la descomposición polar sí es única. Pero si la matriz $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{U}$ también es única.

Demostrar este teorema implica demostrar que es posible construir una matriz unitaria $\mathbf{U}$ y una matriz hermítica positiva $\mathbf{H}$ ², que sea hermítica y única. Además, si la matriz $\mathbf{A}$ es invertible, debemos demostrar que la matriz unitaria $\mathbf{U}$ también es única.

¹Aunque en nuestro análisis nos vamos a centrar en matrices complejas, invertibles y cuadradas no significa que la descomposición polar no se pueda aplicar a matrices que no lo sean. Por ejemplo, si la matriz es real, la descomposición polar se expresa como el producto de una matriz ortogonal por una matriz simétrica. Del mismo modo si la matriz no es invertible o cuadrada.

²Una matriz positiva se define como hermítica y que sus autovalores son positivos

Demostración

■ *Demostración que podemos construir la matriz positiva $\mathbf{H}$*

Por el teorema de la descomposición espectral, podemos expresar la matriz $\mathbf{A}$ de la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$$

En donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{U}$ es una matriz formada por los autovectores de $\mathbf{A}$

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger)^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{D}^\dagger\mathbf{U}^\dagger$$

entonces

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{D}^\dagger\mathbf{U}^\dagger)(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger)$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}^\dagger \underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_1 \mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$$

Podemos ver que las matrices $\mathbf{D}^\dagger$ y $\mathbf{D}$ son diagonales formados por sus autovalores de $\mathbf{A}^\dagger$ y $\mathbf{A}$ respectivamente. Por lo tanto:

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & & \\ & \lambda_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1^*\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2^*\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^*\lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger$$

Nótese que $\lambda_i^*\lambda_i = \sigma$ es claramente un valor positivo. Por lo tanto, podemos definir la matriz $\mathbf{H}^2$ como:

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}}_{\text{Autovalores positivos de } \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}} \mathbf{U}^\dagger.$$

La matriz $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ es positiva por tener sus autovalores positivos, por esta razón la matriz $\mathbf{H}$ se define como:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sigma_i} \mathbf{P}_i$$

donde se puede ver por las consideraciones anteriores que $\mathbf{H}$ es una matriz positiva.

Es importante tener en cuenta que un operador positivo (representado aquí como $\mathbf{H}^2$) posee una única raíz cuadrada positiva, que en este contexto se denota como $\mathbf{H}$.

■ **Demostración que la matriz $\mathbf{H}$ es hermítica**

La matriz $\mathbf{H}$ se considera hermítica si cumple que:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger.$$

Por lo tanto, sabemos que

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sigma_i} \mathbf{P}_i$$

En esta instancia, $\mathbf{P}$ se presenta como un operador lineal hermítico, propiedad que se deriva de la teoría de la descomposición espectral en el ámbito del álgebra lineal [8], y como resultado, la hermeticidad también se atribuye al operador $\mathbf{H}$

■ ***Demostración que la matriz unitaria $\mathbf{U}$ existe***

Hasta el momento sabemos que la matriz $\mathbf{H}$ es positiva y en consecuencia invertible. Por lo tanto, definimos

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}.$$

Demostremos que $\mathbf{V}$ es unitaria, si $\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger &= \mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1})^\dagger = \mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^\dagger\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}(\underbrace{\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}}_{\mathbf{H}^2=\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}})^{-1}\mathbf{H}^\dagger \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^\dagger = \underbrace{\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}}_1 \underbrace{(\mathbf{H}^\dagger)^{-1}\mathbf{H}^\dagger}_1 = \mathbf{1} \\ \mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} &= (\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1})^\dagger\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^\dagger)^{-1} \underbrace{\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}}_{\mathbf{H}^2=\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \underbrace{(\mathbf{A}^\dagger)^{-1}\mathbf{A}^\dagger}_1 \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_1 = \mathbf{1} \end{aligned} \tag{D.1}$$

Por lo tanto, $\mathbf{V}$ es unitaria que la podemos redefinir como $\mathbf{U}$.

■ ***Demostración que $\mathbf{H}$ es única***

Para esta demostración supongamos que podemos obtener una descomposición polar de la matriz $\mathbf{A}$ de dos formas diferentes (Demostración por reducción al absurdo). Por lo tanto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}'\mathbf{H}'$$

Lo anterior implica que

$$\mathbf{U}\mathbf{H} = \mathbf{U}'\mathbf{H}'$$

Multiplico por $\mathbf{U}^\dagger$ ambos lados por la izquierda

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{H} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}'\mathbf{H}'$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}'\mathbf{H}'$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^2 &= (\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}'\mathbf{H}')^\dagger (\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}'\mathbf{H}') \\ \mathbf{H}^2 &= (\mathbf{H}')^\dagger (\mathbf{U}')^\dagger \underbrace{(\mathbf{U}^\dagger)^\dagger \mathbf{U}^\dagger}_{\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger=\mathbf{1}} \mathbf{U}'\mathbf{H}' \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{H}')^\dagger \underbrace{(\mathbf{U}')^\dagger \mathbf{U}'}_1 \mathbf{H}'$$

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{H}')^\dagger \mathbf{H}'$$

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}'^2$$

Dado que la transformación positiva $\mathbf{H}$ sólo tiene una raíz cuadrada positiva, se deduce $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$ por lo tanto, se demuestra que $\mathbf{H}$ es única.

- *Para nuestro propósito, no es esencial demostrar la unicidad de $\mathbf{U}$ cuando $\mathbf{A}$ es invertible.*

Demonstremos la validez de este teorema con un ejemplo simple. Abordaremos la búsqueda de la descomposición polar para la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2i & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

En primer lugar calculamos la matriz $\mathbf{H}^2 = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ \sqrt{7} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2i\sqrt{7} \\ -2i\sqrt{7} & 16 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Los autovalores de $\mathbf{H}^2$ son $\lambda_1 = 18$ y $\lambda_2 = 2$, con los autovectores correspondientes denotados como

$$|e_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ i \end{pmatrix}$$

Así los proyectores para cada autovector serán:

$$\mathbf{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{7} \\ -\frac{i}{\sqrt{7}} & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -i\sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos calcular el valor de la matriz $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \sqrt{\lambda_2} \mathbf{P}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & i\sqrt{14} \\ -i\sqrt{14} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz unitaria $\mathbf{U}$ la calculamos de la siguiente manera $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}$ Por lo tanto

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 11\sqrt{2} & -i\sqrt{14} \\ i\sqrt{14} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Así

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -15i\sqrt{2} & 3\sqrt{14} \\ 3i\sqrt{14} & 15\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la matriz $\mathbf{A}$ se descompone en su forma polar de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -15i\sqrt{2} & 3\sqrt{14} \\ 3i\sqrt{14} & 15\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & i\sqrt{14} \\ -i\sqrt{14} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}}$$

Apéndice E

La matriz CKM

La matriz CKM, llamada así por los físicos Nicola Cabibbo, Makoto Kobayashi y Toshihide Maskawa, es una matriz unitaria en la teoría de la física de partículas que describe las mezclas entre los quarks cargados en el Modelo Estándar (ME) de la física de partículas. Esta matriz es esencial para explicar las transiciones de quarks en las interacciones débiles, que son responsables de fenómenos como la desintegración beta y la violación CP.

La matriz CKM es una matriz 3×3 compleja con 4 parámetros reales independientes y una fase compleja. Estos parámetros y la fase son fundamentales para describir las propiedades de mezcla de los quarks, es decir, cómo los quarks up, charm, top y down, strange, bottom se transforman entre sí a través de las interacciones débiles.

La importancia de la matriz CKM radica en que establece la conexión entre los aspectos teóricos y experimentales de la física de partículas. A través de la matriz CKM, podemos comprender y predecir los procesos de desintegración de quarks observados experimentalmente, y proporciona información valiosa sobre las diferencias fundamentales entre la materia y la antimateria.

En resumen, la matriz CKM es una herramienta crucial en la física de partículas que ayuda a explicar cómo los quarks interactúan entre sí y cómo se comportan en el mundo subatómico.

El grupo de datos de partículas PDG, por sus siglas en inglés (Particle Data Group [9]) recomienda una parametrización estándar de la matriz CKM que se encuentra en la literatura [10] de la siguiente manera:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

con $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ y δ , parámetros que se obtienen experimentalmente. Los resultados de ajuste para las entradas de la matriz son:

$$\begin{pmatrix} 0.97431 \pm 0.00012 & 0.22514 \pm 0.00055 & (0.00365 \pm 0.00010)e^{i(-66.8 \pm 2.0)^\circ} \\ (-0.22500 \pm 0.00054)e^{i(0.0351 \pm 0.0010)^\circ} & (0.97344 \pm 0.00012)e^{i(-0.001880 \pm 0.000052)^\circ} & (0.04241 \pm 0.00065) \\ (0.00869 \pm 0.00014)e^{i(-22.23 \pm 0.63)^\circ} & (-0.04124 \pm 0.00056)e^{i(1.056 \pm 0.032)^\circ} & (0.999112 \pm 0.000024) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Los parámetros observados para la CKM se dan a una escala de energía inferior a $\mu = M_Z$, por lo que usaremos el valor de la masa de los quarks en unidades de MeV.

$$m_u = 1.38_{-0.41}^{+0.42}, m_c = 6.38_{-84}^{+43}, m_t = 172100 \pm 1200, \quad (\text{E.3})$$

$$m_d = 2.82 \pm 0.48, \quad m_s = 57_{-12}^{+18}, \quad m_b = 2860_{-60}^{+160}. \quad (\text{E.4})$$

Apéndice F

Cálculos en Wolfram Mathematica.

A continuación vamos a demostrar como el software de Mathematica Wolfram es una gran herramienta para reducir el tiempo en cálculos que manualmente serían muy rigurosos. Por otro lado, es un software que nos da confianza y nos permite entregar resultados claros y exactos según lo requiera cada sección.

A continuación exponemos algunos de los comandos mas útiles que hemos usado en el desarrollo de este trabajo.

F.1. Descomposición polar

En el capítulo 2 se presentó el teorema de la descomposición polar como un primer paso para reducir los parámetros en las matrices de masa del sector de Yukawa. Este teorema se explicó con mayor detalle en el apéndice E.

Sin embargo, cuando las matrices involucradas son especialmente complejas, resulta conveniente apoyarse en herramientas computacionales como Mathematica. A continuación, se muestran algunos de los comandos utilizados para estructurar y llevar a cabo la descomposición polar de una matriz, ya sea real o compleja.

A = {{1, 0, 1}, {0, 1, -I}, {1, I, 0}}; (*Definición de la matriz A *)

MatrixForm[A]; (*Para visualizar A en forma de matriz *)

Ad = **ConjugateTranspose[A]**; (*Para encontrar la matriz transpuesta conjugada de A que hemos llamado Ad.*)

R2 = **Ad.A**; (*Este producto permite calcular la matriz R al cuadrado que hemos definido como R2. *)

MatrixForm[R2]; (*para visualizar el R2 en forma de matriz*)

Eigenvectors[R2]; (*Permite calcular los autovectores de R2 *)

Eigenvalues[R2]; (*Permite calcular los autovalores de R2*)

```

e1 = {{1}, {-I}, {1}};
e2 = {{-1}, {0}, {1}};
e3 = {{-I}, {1}, {0}}; (*Con los autovalores y autovectores de R2 hemos definido los vectores bases*)
p1 = MatrixForm[e1.ConjugateTranspose[e1]];
p2 = MatrixForm[e2.ConjugateTranspose[e2]];
p3 = MatrixForm[e3.ConjugateTranspose[e3]]; (* Cada producto define los proyectores P1, P2, P3
respectivamente *)

```

```

R = Sqrt[4] * {{1, I, 1}, {-I, 1, -I}, {1, I, 1}} + Sqrt[1] * {{1, 0, -1}, {0, 0, 0}, {-1, 0, 1}} +
Sqrt[1] * {{1, -I, 0}, {I, 1, 0}, {0, 0, 0}};

```

(* Es la forma de definir el cálculo de la raíz cuadrada
de la matriz R*)

```

Rin = Inverse[R]; (*Calcula la inversa de la matriz R, se ha definido como Rin. *)
U = A.Rin; (*Este producto permite encontrar la matriz unitaria U de la descomposición polar*)
MatrixForm[U.R]; (*Definimos el producto entre U y R que permite demostrar que el resultado
es la matriz inicial A*).

```

F.2. Operadores de permutación en las matrices de masa

En el capítulo 3 trabajamos con los ceros de textura y se analizó que el número máximo de ceros de textura que se puede lograr en una matriz de masa hermítica es tres y mediante los operadores de conmutación se pudo encontrar seis formas diferentes de distribuir los ceros de textura en las matrices de masa en los casos estudiados en las secciones 3.1 y 3.2. A continuación compartimos la forma de estructurar los operadores de conmutación en el software Mathematica.

(*Definimos los operadores de proyección de la siguiente manera*)

```

P1 = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
P2 = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};

```

$$P3 = \{\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\};$$

$$P4 = \{\{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}\};$$

$$P5 = \{\{0, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}\};$$

$$P6 = \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}\};$$

MatrixForm; (*Para visualizar en forma de matriz cada uno de los operadores de proyección*)

En forma de ejemplo, podemos usar el caso 3.1 con dos ceros de textura en la diagonal .

$$M = \{\{0, \xi q, 0\}, \{\xi q, 0, \beta q\}, \{0, \beta q, \alpha q\}\}; \quad (* \text{ Definimos la matriz de masa } M *)$$

(* A continuación definimos los productos de cada operador de proyección aplicados a la matriz de masa M *).

$$\text{MatrixForm}[P1.M.Transpose[P1]]$$

$$\text{MatrixForm}[P2.M.Transpose[P2]]$$

$$\text{MatrixForm}[P3.M.Transpose[P3]]$$

$$\text{MatrixForm}[P4.M.Transpose[P4]]$$

$$\text{MatrixForm}[P5.M.Transpose[P5]]$$

$$\text{MatrixForm}[P6.M.Transpose[P6]]$$

(*Cada producto se puede ver en forma de matriz con la función “MatrixForm”.*)

(*El programa mostrará los seis proyectores para el primer caso.*)

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi q & 0 \\ \xi q & 0 & \beta q \\ 0 & \beta q & \alpha q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi q & \beta q \\ \xi q & 0 & 0 \\ \beta q & 0 & \alpha q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi q \\ 0 & \alpha q & \beta q \\ \xi q & \beta q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha q & 0 & \beta q \\ 0 & 0 & \xi q \\ \beta q & \xi q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha q & \beta q & 0 \\ \beta q & 0 & \xi q \\ 0 & \xi q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta q & \xi q \\ \beta q & \alpha q & 0 \\ \xi q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F.3. Las matrices M_q y U

En el capítulo 3 trabajamos con las matriz de masa (3.7) y la matriz unitaria (3.9). Haciendo uso del software vamos a cosntruir la matriz M_q y la vamos a diagonalizar con la matriz U de la que demostraremos su caracter unitario.

F.3.1. Construcción de la matriz M_q

Para construir la matriz (3.7) debemos cosiderar los valores definidos en (3.10), Por lo tanto:

$$\gamma_q = \lambda_1 q + \lambda_2 q + \lambda_3 q - \alpha q;$$

$$\beta_q = \text{Sqrt}[((\alpha q - \lambda_1 q)(\alpha q - \lambda_2 q)(\lambda_3 q - \alpha q))/\alpha q];$$

$$\xi_q = \text{Sqrt}[-\lambda_1 q \lambda_2 q \lambda_3 q / \alpha q]; \text{ (*Se define el valor para cada parámetro de entrada de la matriz } M_q \text{ *)}$$

$$M_q = \{\{0, \xi_q, 0\}, \{\xi_q, \gamma_q, \beta_q\}, \{0, \beta_q, \alpha q\}\}; \text{ (*Definimos la matriz } M_q \text{ *)}$$

$$\text{MatrixForm}[M_q]; \text{ (*nos permite observar a } M_q \text{ en forma de matriz *)}$$

El programa entregara el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\frac{\lambda_1 q \lambda_2 q \lambda_3 q}{\alpha q}} & 0 \\ \sqrt{-\frac{\lambda_1 q \lambda_2 q \lambda_3 q}{\alpha q}} & -\alpha q + \lambda_1 q + \lambda_2 q + \lambda_3 q & \sqrt{\frac{(\alpha q - \lambda_1 q)(\alpha q - \lambda_2 q)(\lambda_3 q - \alpha q)}{\alpha q}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(\alpha q - \lambda_1 q)(\alpha q - \lambda_2 q)(\lambda_3 q - \alpha q)}{\alpha q}} & \alpha q \end{pmatrix}$$

F.3.2. Construcción de la matriz U

Una vez construida la matriz M_q el siguiente paso es diagonalizarla calculando sus autovalores y autovectores teniendo en cuenta las condiciones (3.11), (3.12) y (3.13), para lograr que el software tenga en cuenta dichas condiciones en los cálculos escribimos los siguientes comandos :

$$\text{Eigenvalues}[M_q, \text{Assumptions}\{\text{Element}[\gamma_q, \text{Reals}], \text{Element}[\beta_q, \text{Reals}], \text{Element}[\xi_q, \text{Reals}], \alpha q > 0\}];$$

$$\text{Eigenvectors}[M_q, \text{Assumptions}\{\text{Element}[\gamma_q, \text{Reals}], \text{Element}[\beta_q, \text{Reals}], \text{Element}[\xi_q, \text{Reals}], \alpha q > 0\}];$$

Una vez obtenido los autovalores y autovectores podemos construir la matriz unitaria U .

El programa arroja el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{i\alpha 1}|\lambda 3q|\sqrt{\frac{\lambda 2q\lambda 3q(\alpha q-\lambda 1q)}{\alpha q(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 1q)}}}{\lambda 3q} & \frac{e^{i\alpha 2}|\lambda 2q|\sqrt{\frac{\lambda 1q\lambda 3q(\lambda 2q-\alpha q)}{\alpha q(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}}}{\lambda 2q} & \sqrt{\frac{\lambda 1q\lambda 2q(\alpha q-\lambda 3q)}{\alpha q(\lambda 3q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}} \\ -\frac{e^{i\alpha 1}|\lambda 2q|\sqrt{\frac{\lambda 1q(\lambda 1q-\alpha q)}{(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 1q)}}}{\lambda 2q} & e^{i\alpha 2}\sqrt{\frac{\lambda 2q(\alpha q-\lambda 2q)}{(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}} & \frac{|\lambda 3q|\sqrt{\frac{\lambda 3q(\lambda 3q-\alpha q)}{(\lambda 3q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}}}{\lambda 3q} \\ \frac{e^{i\alpha 1}|\lambda 2q|\sqrt{\frac{\lambda 1q(\alpha q-\lambda 2q)(\alpha q-\lambda 3q)}{\alpha q(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 1q)}}}{\lambda 2q} & -\frac{e^{i\alpha 2}|\lambda 3q|\sqrt{\frac{\lambda 2q(\alpha q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\alpha q)}{\alpha q(\lambda 2q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}}}{\lambda 3q} & \sqrt{\frac{\lambda 3q(\alpha q-\lambda 1q)(\alpha q-\lambda 2q)}{\alpha q(\lambda 3q-\lambda 1q)(\lambda 3q-\lambda 2q)}} \end{pmatrix}$$

El resultado anterior es la matriz (3.9) que nos permite diagonalizar la matriz de masa M_q .

F.3.3. Diagonalizacion de la matriz M_q

Diagonalizar M_q no es mas que resolver el producto $U_q^\dagger M_q U_q$. Para ello escribimos los siguientes comandos en el software:

```
MatrixForm[
FullSimplify[Ud.Mq.U,
Assumptions->{Element[λ1q, Reals], Element[λ2q, Reals], Element[λ3q, Reals],
Element[αq, Reals]Element[α1, Reals], Element[α2, Reals], λ1q > 0, λ2q < 0, λ3q > 0, λ1q < Abs[λ2q],
Abs[λ2q] < λ3q, λ1q < αq < λ3q}]]
```

(La anterior estructura nos ayuda a realizar el producto de matrices teniendo en cuenta las condiciones para los parametros que compone cada una de las matrices.)

El programa debe entregar el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \lambda 1q & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 2q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3q \end{pmatrix}$$

F.3.4. Comprobación numérica de la matriz M_q y la matriz unitaria U_q

Podemos hacer una comprobación de que la matriz U es unitaria y que diagonaliza la matriz M_q tomando valores albitrarios para los autovalores sugetos a las condiciones 3.11,3.12 y 3.11 y comprobar que al diagonalizar dichos autovalores estarán en la diagonal.

CASO1

En este caso $\lambda_{1q} < 0$. Si tenemos en cuenta que las matrices M_q y U ya están definidas, en el software establecemos las siguientes condiciones :

$$\lambda_{1q} = -3;$$

$$\lambda_{2q} = 6;$$

$$\lambda_{3q} = 9;$$

$$\alpha_q = 7;$$

$$\alpha_1 = 1;$$

$$\alpha_2 = 2; \text{ (*Damos valores a los parámetros en donde el primer autovalor se ha definido negativo*)}$$

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[Ud].U],$$

$$\text{Assumptions->\{Element[\alpha_1, Reals], Element[\alpha_2, Reals], Element[\lambda_{1q}, Reals], Element[\lambda_{2q}, Reals],$$

$$\text{Element}[\lambda_{3q}, \text{Reals}], \lambda_{1q} < 0, \lambda_{2q} > 0, \lambda_{3q} > 0, \text{Abs}[\lambda_{1q}] < \lambda_{2q}, \lambda_{2q} < \lambda_{3q}, \lambda_{2q} < \alpha_q < \lambda_{3q}\}]];$$

(* Se utiliza las funciones: **MatrixForm** sobre el producto $Ud.U$, para obtener el resultado en forma de matriz y sobre ella aplicamos **PowerExpand** para que expandir todos los terminos del producto de las matrices. Finalmente aplicamos **FullSimplify**, para simplificar al maximo la expresión.

El comando **Assumptions** permite establecer las condiciones para los parámetros.

$$\text{FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[U].Mq.U],$$

$$\text{Assumptions->\{Element[\alpha_1, Reals], Element[\alpha_2, Reals], Element[\lambda_{1q}, Reals], Element[\lambda_{2q}, Reals],$$

$$\text{Element}[\lambda_{3q}, \text{Reals}], \lambda_{1q} < 0, \lambda_{2q} > 0, \lambda_{3q} > 0, \text{Abs}[\lambda_{1q}] < \lambda_{2q}, \lambda_{2q} < \lambda_{3q}, \lambda_{2q} < \alpha_q < \lambda_{3q}\}]]$$

(*En este caso aplicamos las mismas condiciones en el producto de $U_q^\dagger M_q U_q$ *)

(*El programa entregará para los productos $U_q^\dagger.U_q$ y $U_q^\dagger.M_q.U_q$ los siguientes resultados respectivamente:*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

CASO2

De la misma manera que el caso anterior, definimos las condiciones para los productos con la diferencia que el autovalor negativo ahora será λ_{2q} .

$$\lambda_{1q} = 3;$$

$$\lambda_{2q} = -4;$$

$$\lambda_{3q} = 9;$$

$$\alpha_q = 7;$$

```
FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[Ud].U],
```

```
Assumptions->{Element[λ1q, Reals], Element[λ2q, Reals], Element[λ3q, Reals], λ1q > 0, λ2q < 0,
λ3q > 0, λ1q < Abs[λ2q], Abs[λ2q] < λ3q, λ1q < αq < λ3q}];
```

```
FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[U].Mq.U],
```

```
Assumptions->{Element[λ1q, Reals], Element[λ2q, Reals], Element[λ3q, Reals], λ1q > 0, λ2q < 0,
λ3q > 0, λ1q < Abs[λ2q], Abs[λ2q] < λ3q, λ1q < αq < λ3q}]]
```

(* El programa nos entrega los siguientes resultados *)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

CASO3

Si guinados la misma estructura del código damos valores arbitrarios a los autovalores teniendo en cuenta la tercera condición, en donde el autovalor negativo es λ_{3q} .

$$\lambda_{1q} = 6;$$

$$\lambda_{2q} = 10;$$

$$\lambda_{3q} = -12;$$

$$\alpha_q = 7;$$

```
FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[Ud].U],
```

```
Assumptions->{Element[λ1q, Reals], Element[λ2q, Reals], Element[λ3q, Reals], λ1q > 0, λ2q > 0, λ3q < 0,
```

$\lambda_1 q < \lambda_2 q, \lambda_2 q < \text{Abs}[\lambda_3 q], \lambda_1 q < \alpha q < \lambda_2 q\}]]$

`FullSimplify[PowerExpand[MatrixForm[ConjugateTranspose[U].Mq.U],`

`Assumptions->{Element[\lambda_1 q, Reals], Element[\lambda_2 q, Reals], Element[\lambda_3 q, Reals], \lambda_1 q > 0, \lambda_2 q > 0, \lambda_3 q < 0,`

`\lambda_1 q < \lambda_2 q, \lambda_2 q < \text{Abs}[\lambda_3 q], \lambda_1 q < \alpha q < \lambda_2 q\}]]`

(* El programa nos entrega los siguientes resultados *)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

(*De esta manera hemos demostrado la veracidad de los análisis para las matrices con la que hemos trabajado*)

Bibliografía

- [1] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa and R. Gonzalez Felipe, -Texture zeros and weak basis transformations, Phys. Lett. B **477** (2000), 147-155 doi:10.1016/S0370-2693(00)00193-3 [arXiv:hep-ph/9911418 [hep-ph]].
- [2] Branco, G. C., Emmanuel-Costa, D., Felipe, R. G., - Serôdio, H. (2009). Weak basis transformations and texture zeros in the leptonic sector. Physics Letters B, 670(4-5), 340-349.
- [3] Bonilla, C., Lamprea, J. M., Peinado, E., y Valle, J. W. (2018). Flavour-symmetric type-II Dirac neutrino seesaw mechanism. Physics Letters B, 779, 257-261.
- [4] MONTAÑO PERAZA, J. A. V. I. E. R. (2015). Análisis de los sectores de Higgs y quarks en la extensión del modelo estándar con la simetría del sabor S3 (Master's thesis, MONTAÑO PERAZA, JAVIER).
- [5] de Física, C. (2015). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (Doctoral dissertation, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).
- [6] Y. Giraldo and E.- Rojas, 'CKM mixings from mass matrices with five texture zeros, Phys. Rev. D **104** (2021) no.7, 075009 doi:10.1103/PhysRevD.104.075009 [arXiv:1511.08858 [hep-ph]].
- [7] Fritzsch, H., Xing, Z. Z. Four-zero texture of Hermitian quark mass matrices and current experimental tests. Physics Letters B, 555(1-2), 63-70.(2003).
- [8] Hassani, S. (2013). Mathematical physics: a modern introduction to its foundations. Springer Science y Business Media.
- [9] Tanabashi, M., Hagiwara, K., Hikasa, K., Nakamura, K., Sumino, Y., Takahashi, F., ... Quad, A. (2018). Review of Particle Physics: particle data groups. Physical Review D, 98(3), 1-1898.
- [10] Wysozka, S. R. J., Kielanowski, P., Mercado, L. V. Triángulos unitarios de la matriz CKM en la parametrización Estándar.
- [11] R. H. Benavides, Y. Giraldo, L. Muñoz, W. A. Ponce and E. Rojas, "Five Texture Zeros for Dirac Neutrino Mass Matrices," J. Phys. G (2020) no.11, 115002 doi:10.1088/1361-6471/abb029 [arXiv:2002.01864 [hep-ph]].
- [12] Dutta, B., Nandi, S. (1996). A new ansatz: Fritzsch mass matrices with least modification. Physics Letters B, 366(1-4), 281-286.
- [13] Fritzsch, H. (1978). Weak-interaction mixing in the six-quark theory. Physics Letters B, 73(3), 317-322.

-
- [14] Fritzsch, H. (1987). Hierarchical chiral symmetries and the quark mass matrix. *Physics Letters B*, 184(4), 391-396.
- [15] Gupta, M., Ahuja, G. (2012). Flavor mixings and textures of the fermion mass matrices. *International Journal of Modern Physics A*, 27(31), 1230033.
- [16] Fritzsch, H., Xing, Z. Z. (2003). Four-zero texture of Hermitian quark mass matrices and current experimental tests. *Physics Letters B*, 555(1-2), 63-70.
- [17] Ponce, W. A., - Benavides, R. H. (2011). Texture zeros for the Standard Model quark mass matrices. *The European Physical Journal C*, 71, 1-8.
- [18] Verma, R. (2017). Exploring the predictability of symmetric texture zeros in quark mass matrices. *Physical Review D*, 96(9), 093010.
- [19] Ponce, W. A., Gómez, J. D., Benavides, R. H. (2013). Five texture zeros and C P violation for the standard model quark mass matrices. *Physical Review D*, 87(5), 053016.
- [20] Ludl, P. O., Grimus, W. (2014). A complete survey of texture zeros in the lepton mass matrices. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7), 1-30.
- [21] Giraldo, Y. (2012). Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model. *Physical Review D*, 86(9), 093021.
- [22] Wang, F., Wang, W., Yang, J. M. (2006). Split two-Higgs-doublet model and neutrino condensation. *Europhysics Letters*, 76(3), 388.
- [23] Giraldo, Y., Burbano Pantoja, L. S. (2017). Estabilidad del Potencial Escalar en el Modelo Económico 3-3-1. Pág 75-77.
- [24] Giraldo, Y. (2022). El potencial escalar 3-3-1 como extensión del modelo estándar (Doctoral dissertation, Universidad de Antioquia) Pág 5-8 .
- [25] Y. Giraldo and E.- Rojas, 'CKM mixings from mass matrices with five texture zeros, *Phys. Rev. D* **104** (2021) no.7, 075009 doi:10.1103/PhysRevD.104.075009 [arXiv:1511.08858 [hep-ph]].