Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

BEC ESPINORIALES Y SEPARACIÓN DE FASES

Carlos Alberto Ordoñez Silva
Director: MSc. Christian Jesús Madroñero Carvajal.

San Juan de Pasto, diciembre de 2023

Contenido

1. Planteamiento del problema

La separación de fases es un tema muy relevante en la actualidad ya que permite hacer predicciones detalladas sobre la naturaleza del estado fundamental de condensado de Bose-Einstein Chen et al. (1998), es decir que permite hacer una clasificación conociendo las longitudes de dispersión de ondas s. En consecuencia, es interesante ver como se organizan los espines en el estado fundamental y explorar la naturaleza de la dinámica de mezcla de espines en un condensado de Bose-Einstein atrapado ópticamente.

En particular, en este trabajo de investigación se quiere describir diferentes aspectos que juegan un papel importante en la separación de fases de un sistema cuántico. En este estudio se va a realizar en un condensado Bose-Einstein espinorial, ya que desde el punto de vista experimental dicho sistema es altamente controlable, por lo cual los condensados son conocidos como simuladores cuánticos Gross y Bloch (2017). Dado el alto control que se tiene sobre el condensado se puede modificar el comportamiento del mismo, es decir, puede pasar de estados miscibles e inmiscibles como se da en el articulo Papp et al. (2008), que utiliza la resonancia de Feshbach de campo magnético (Tojo et al., 2010; Peil et al., 2003). En concreto este trabajo de investigación lleva a cabo un estudio detallado sobre la naturaleza de condensados espinoriales de diferentes átomos, los cuales pueden clasificarse en tres tipos: “Ferromagnético (F)”, “Polar (P)”, o “Cíclico (C)”(Ho, 1998).

Esta investigación está a la vanguardia en la comprensión de la separación de fases controlable en condensados de Bose-Einstein espinoriales, ya sea entre especies de átomos diferentes o de la misma especie, lo que radica en las muchas preguntas que aún deben responderse. En particular, el objetivo de la investigación es responder a la siguiente pregunta clave:

¿Cuáles son los enfoques teóricos que permiten obtener una comprensión más profunda de la separación de fases en condensados de Bose-Einstein espinoriales?

2. Justificación

En este proyecto de trabajo de grado, nos sumergimos en la línea de investigación de la física de la materia ultrafría (bajas energías), centrándonos específicamente en el ámbito teórico punto de vista de la mecánica cuántica y la teoría de muchos cuerpos.

Los condensados de Bose-Einstein espinoriales y su fenómeno de separación de fases han emergido como temas de estudio relevantes en la actualidad. Esto se debe a que las longitudes de dispersión están intrínsecamente vinculadas a la parte real del cambio de fase, permitiendo también procesos de dispersión inelástica. En el marco de este trabajo, se busca realizar un estudio exhaustivo sobre la naturaleza de diferentes átomos, centrándose en la caracterización de la separación de fases mediante la elaboración de diagramas representativos.

La realización de este estudio no solo ampliará nuestro conocimiento fundamental sobre los condensados espinoriales, sino que también abrirá nuevas perspectivas para aplicaciones futuras. La capacidad de controlar y manipular estos estados cuánticos tiene implicaciones directas en la localización, fenómenos superfluídicos, efectos de tunelización entre dominios y la creación precisa de moléculas heteronucleares ultrafrías. En consecuencia, la separación de fases asume un papel crucial en estas investigaciones, destacando su relevancia en el avance de la comprensión de la materia ultrafría y su potencial impacto en aplicaciones tecnológicas emergentes.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Estudiar el fenómeno de separación de fases en un condensado de Bose-Einstein espinorial.

3.2. Objetivos específicos

Para lograr este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar desde el punto de vista de la cuántica como se tratan los sistemas de muchos cuerpos.
2. Deducir la ecuación que describe un condensado de Bose-Einstein espinorial.
3. Acondicionar un código que resuelva las ecuaciones acopladas de Gross-Pitaevskii que describen el sistema.
4. Usar la magnetización como observable para caracterizar la separación de fase.
5. Estudiar la separación de fase del estado estacionario del sistema.
6. Caracterizar la naturaleza de un condensado de átomos de rubidio.

4. Marco referencial

4.1. Marco de antecedentes

En la actualidad, la naturaleza de los condensados espinores de Bose-Einstein han tomado renombre con el paso de los años, esto debido a sus experimentos que proporcionan información valiosa para entender estos estados. Uno de los principales avances de condensados de Bose-Einstein en gases atómicos es el estudio de gases de Bose diluidos con grados de libertad internos. En un campo magnético cero, el condensado de espinor puede clasificarse en tres tipos: “Ferromagnético (F)”, “Polar (P)”, o “Cíclico (C)”, que tienen propiedades muy diferentes (Ho, 1998) .

A continuación, se va a mostrar una serie de estudios que nos ayudaran como soporte para dar validez a esta investigación.

Primero, se hace referencia a la investigación realizada por los autores Klausen, Bohn, y Greene (2001), cuyo título es “Nature of spinor Bose-Einstein condensates in rubidium”. En este artículo, los investigadores abordan estudios experimentales destinados a identificar la naturaleza de los condensados de Bose-Einstein con espín en rubidio. Se explora un análisis de las longitudes de dispersión basándose en los resultados obtenidos en Roberts et al. (1998, 2001). Estos resultados permiten obtener una conclusión inequívoca sobre la naturaleza de los condensados espinor en el estado fundamental, según lo presentado en (Klausen et al., 2001).

Además, nos remitimos a la investigación indicada en Papp et al. (2008), titulada “Tunable Miscibility in a Dual-Species Bose-Einstein Condensate”. En este estudio, se expone un informe sobre la separación de fases controlable en un condensado de Bose-Einstein de dos especies. Este condensado utiliza una resonancia de Feshbach de campo magnético para modificar su miscibilidad, logrando sintonizar la longitud de dispersión, según se detalla en (Papp et al., 2008).

Por otra parte, nos encontramos con la investigación mencionada en Wang, Li, Xiong, y Wang (2015), que lleva por título “A double species ^{23}Na and ^{87}Rb Bose–Einstein condensate with tunable miscibility”. En este estudio, se describe la creación exitosa de un condensado de Bose-Einstein de doble especie utilizando átomos de ^{23}Na y ^{87}Rb, donde los investigadores observaron fenómenos de inmiscibilidad. El artículo detalla la exitosa generación de condensados de Bose-Einstein dobles con interacciones interespecíficas, y se investiga la transición de fase entre miscibilidad e inmiscibilidad, como se expone en (Wang et al., 2015).

En particular se estudiará la influencia de las longitudes de dispersión de onda s en la separación de fase. Para esto se harán simulaciones numéricas mediante la solución de la ecuación de Gross-Pitaevskii para encontrar el estado estacionario del sistema.

4.2. Marco teórico

4.2.1. Hamiltoniano de muchos cuerpos en segunda cuantizacion

Partimos del Hamiltoniano en términos de los operadores de aniquilación y creación el cual se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \sum_{i,j} \hat{b}_i^\dagger \langle i| \, \hat{H}_0 \, |j\rangle \hat{b}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \langle i,j| \, V \, |k,l\rangle \hat{b}_k \hat{b}_l, \tag{1}$$

Los componentes de este Hamiltoniano se pueden conceptualizar de la siguiente manera: el primer término representa la energía asociada a partículas en un estado libre, mientras que el segundo término corresponde a la energía resultante de la interacción entre partículas. Esta interacción puede entenderse como el proceso mediante el cual dos partículas, inicialmente en estados k y l, experimentan una dispersión que las lleva a ocupar los estados i y j, respectivamente, bajo la influencia del potencial V.

Además de encontrarse en el estado i, consideraremos que la partícula tiene una proyección de espín α. Asimismo, junto con la ocupación del estado j, la partícula presenta una proyección de espín β. De esta manera, el Hamiltoniano se expresará de la siguiente forma:

$$\sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j} \hat{b}_{i,\alpha}^+ \langle i\alpha| \, \hat{H}_0 \, |j\beta\rangle \hat{b}_{j,\beta}, \tag{2}$$

donde $\hat{b}_{i,\alpha}^\dagger$ y $\hat{b}_{j,\beta}$ representan, respectivamente, el operador de creación con proyección de espín α y el operador de destrucción con proyección de espín β. Aquí, $|j\beta\rangle$ denota el estado de una partícula j con proyección β, mientras que $|i\alpha\rangle$ representa el estado de una partícula i con proyección de espín α.

El cual, en términos de los operadores de campo será,

$$\sum_{\alpha} \int d^3r \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{r},t) \hat{H}_0 \hat{\Psi}_\alpha(\vec{r},t), \tag{3}$$

donde $\hat{\Psi}_\alpha^+(\vec{r},t)$ y $\hat{\Psi}_\alpha(\vec{r},t)$ son los operadores de campo de creación y aniquilación de una partícula con espín α respectivamente los cuales se definen como:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{r},t) &= \sum_k \phi_{k,\alpha}^*(\vec{r},t) \hat{b}_{k,\alpha}^\dagger, \\ \hat{\Psi}_\alpha(\vec{r},t) &= \sum_k \phi_{k,\alpha}(\vec{r},t) \hat{b}_{k,\alpha}, \end{aligned} \tag{4}$$

siendo $\phi_{k,\alpha}$ los autoestados de $\hat{H}_0$. Estos operadores tienen las siguientes relaciones de conmutación,

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\Psi}_{\alpha}(\vec{r},t),\hat{\Psi}_{\beta}(\vec{r}\,',t)\right] &= 0,\\
\left[\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t),\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r}\,',t)\right] &= 0,\\
\left[\hat{\Psi}_{\alpha}(\vec{r},t),\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r}\,',t)\right] &= \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta_{\alpha,\beta}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Ahora abordaremos el término de interacción atómica, es decir, el segundo término del Hamiltoniano expresado en la ecuación (1). Dado que se están considerando partículas con espín distinto de cero, se hace necesario ajustar el término de interacción. Para ello, tomamos dos partículas con espines $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$. Utilizando la teoría del momento angular, sabemos que $\hat{\mathbb{F}} = \hat{F_1} \oplus \hat{F_2}$. Por lo tanto, podemos analizar el sistema en cualquiera de las siguientes bases: $|\mathbb{F}, m_{\mathbb{F}}\rangle$ o $|F_1, F_2; m_1, m_2\rangle = |F_1, m_1\rangle \otimes |F_2, m_2\rangle$. Considerando que $\mathbb{F} = 0, \pm 1, \pm 2$, se obtienen los estados $|\mathbb{F}, m_{\mathbb{F}}\rangle = \{|2,2\rangle, |2,1\rangle, |2,0\rangle, |2,-1\rangle, |2,-2\rangle, |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,0\rangle\}$, los cuales se expresan en términos de la base con los coeficientes de Clebsch-Gordan,

$$
\begin{aligned}
|2,2\rangle &= |1;1\rangle,\\
|2,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1;0\rangle + |0;1\rangle\right),\\
|2,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1;-1\rangle + 2|0;0\rangle + |-1;1\rangle\right),\\
|2,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1;0\rangle + |0;-1\rangle\right),\\
|2,-2\rangle &= |-1;-1\rangle,\\
|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1;0\rangle - |0;1\rangle\right),\\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1;-1\rangle - |-1;1\rangle\right),\\
|1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1;0\rangle + |0;-1\rangle\right),\\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1;-1\rangle + |0;0\rangle + |-1;1\rangle\right),
\end{aligned} \tag{6}
$$

donde se evidencia que los estados $|1, m_{\mathbb{F}}\rangle$ son antisimétricos. Dado que estamos tratando con partículas bosónicas, optaremos por no considerar estos estados. Ahora, en relación a la interacción, tomamos el Hamiltoniano de segunda cuantización ecuación (1),

$$
\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} \hat{b}^{\dagger}_i \hat{b}^{\dagger}_j \langle i,j|\ V\ |k,l\rangle \hat{b}_k \hat{b}_l, \tag{7}
$$

donde i, j, k y l representan cada uno un conjunto de números cuánticos asociados a un estado individual de partícula. Al introducir el espín, el conjunto de números cuánticos i incorporará este nuevo parámetro. Para una mayor claridad, se expresará explícitamente el valor del espín. Así, el término de interacción es dado por:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}\sum_{i,j,k,l}\hat{b}^{\dagger}_{i,\alpha}\hat{b}^{\dagger}_{j,\beta}\langle i\alpha, j\beta|\ V\ |k\gamma, l\sigma\rangle\hat{b}_{k,\gamma}\hat{b}_{l,\sigma}, \tag{8}$$

en términos de operadores de campo es:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}\int dr\int dr'\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r}\,',t)V\left(|\vec{r}-\vec{r}|\right)\hat{\Psi}_{\gamma}(\vec{r}\,',t)\hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{r}\,',t), \tag{9}$$

usando la aproximación del potencial a bajas energías se tiene:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}g_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}\int d^3r\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r},t)\hat{\Psi}_{\gamma}(\vec{r},t)\hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{r},t), \tag{10}$$

siendo $g_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}=\frac{4\pi\hbar^2 a_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}}{m}$. Lo cual es equivalente a:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathbb{F}=0,2}^{2F}g_{\mathbb{F}}\sum_{m_{\mathbb{F}}=-\mathbb{F}}^{\mathbb{F}}\int d^3r\sum_{\alpha,\beta=-F}^{F}\langle\alpha;\beta|\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}\rangle\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r},t)\sum_{\gamma,\sigma=-F}^{F}\langle\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}|\gamma;\sigma\rangle\hat{\Psi}_{\gamma}(\vec{r},t)\hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{r},t), \tag{11}$$

en otras palabras, se transita de considerar las dos partículas de manera individual a tratarlas como un sistema de dos partículas con un espín total $\mathbb{F}=0;\pm 2$. Los operadores de creación y aniquilación para pares de partículas con un espín total $\mathbb{F}$ y proyección $m_{\mathbb{F}}$ son:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^{\dagger}_{\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}}(\vec{r},t) &= \sum_{\alpha,\beta=-F}^{F}\langle\alpha;\beta|\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}\rangle\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r},t),\\ \hat{\Psi}_{\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}}(\vec{r},t) &= \sum_{\alpha,\beta=-F}^{F}\langle\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}|\alpha;\beta\rangle\hat{\Psi}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}_{\beta}(\vec{r},t),\end{aligned} \tag{12}$$

la expresión anterior se puede reescribir de una forma más simplificada como:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathbb{F}=0,2}^{2F}g_{\mathbb{F}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}\int d^3r\hat{\Psi}^{\dagger}_{\alpha}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}_{\beta}(\vec{r},t)\hat{P}^{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}_{\mathbb{F}}\hat{\Psi}_{\gamma}(\vec{r},t)\hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{r},t), \tag{13}$$

donde $\hat{P}^{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}_{\mathbb{F}}=\langle\alpha;\beta|\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}\rangle\langle\mathbb{F},m_{\mathbb{F}}|\alpha;\beta\rangle$ es el elemento de matriz del proyector $\hat{P}_{\mathbb{F}}$ en la base $|F_1,F_2;m_1,m_2\rangle$ Entonces si se considera el espín total de los átomos el Hamiltoniano,

$$\hat{H}=\int d^3r\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r},t)+\frac{g}{2}\int d^3r\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)\hat{\Psi}(\vec{r},t)\hat{\Psi}(\vec{r},t), \tag{14}$$

se convierte en,

$$
\begin{aligned}
\hat{H} =& \sum_{\alpha} \int d^3 r \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r},t) \hat{H}_0 \hat{\Psi}_{\alpha}(\vec{r},t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbb{F}=0,2}^{2F} g_{\mathbb{F}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma} \int d^3 r \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r},t) \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger}(\vec{r},t) \hat{P}_{\mathbb{F}}^{\alpha,\beta,\gamma,\sigma} \hat{\Psi}_{\gamma}(\vec{r},t) \hat{\Psi}_{\sigma}(\vec{r},t).
\end{aligned} \tag{15}
$$

4.2.2. Ecuación de Gross-Pitaevskii espinorial

En el límite de temperaturas cercanas a cero y en el contexto del formalismo del campo medio, las funciones de onda $\Psi_{\uparrow,\downarrow}$ relacionadas con las dos especies, $\uparrow$ y $\downarrow$, obtenidas a partir del Hamiltoniano de segunda cuantización en la ecuación (15), este átomo está compuesto por átomos que pueden encontrarse en diferentes estados hiperfinos y satisfacen las siguientes ecuaciones efectivas de Gross-Pitaevskii:

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi_{\uparrow}(\vec{r},t)}{\partial t} &= \left[H_0(\vec{r}) + \mathfrak{g}_{\uparrow\uparrow} \left|\Psi_{\uparrow}\right|^2 + \mathfrak{g}_{\uparrow\downarrow} \left|\Psi_{\downarrow}\right|^2 \right] \Psi_{\uparrow}(\vec{r},t), \\
i\hbar \frac{\partial \Psi_{\downarrow}(\vec{r},t)}{\partial t} &= \left[H_0(\vec{r}) + \mathfrak{g}_{\downarrow\downarrow} \left|\Psi_{\downarrow}\right|^2 + \mathfrak{g}_{\downarrow\uparrow} \left|\Psi_{\uparrow}\right|^2 \right] \Psi_{\downarrow}(\vec{r},t).
\end{aligned} \tag{16}
$$

4.2.3. Separacion de fases

La separación de fases, en el contexto de este proyecto abordaremos la inmiscibilidad de sistemas de condensados multicomponentes, es decir; Entender cómo varía el solapamiento espacial de un condensado de Bose-Einstein (BEC) de doble especie como es el caso del articulo Wang et al. (2015); y a medida que se ajustan las interacciones será crucial para experimentos futuros, por esta razón, las investigaciones teóricas sobre condensados de una o dos componentes han destacado el papel fundamental que desempeñan las interacciones interatómicas en la configuración de patrones de densidad y la separación de fases.

La separación de fases entre dos componentes ha sido observada desde hace tiempo en ^3He y ^4He . Se ha explorado el comportamiento de estas fases a bajas temperaturas, enfocándose especialmente en las propiedades críticas y tricríticas de mezclas líquidas que involucran ^3He, ^4He, y ciertos tipos de metaimanes, que constituyen una clase de antiferromagnetos altamente anisotrópicos, como por ejemplo $FeCl_2$ (Kincaid y Cohen, 1975).

Un condensado de Bose-Einstein de una sola especie se puede describir mediante la ecuación no lineal de Gross-Pitaevskii, que puede resolverse numéricamente. Sin embargo, para obtener resultados analíticos, se recurre a ciertas aproximaciones. Una de las aproximaciones comunes es la aproximación de Thomas-Fermi (TFA), donde es tratada en el articulo Pu y Bigelow (1998), que desestima los términos de energía cinética y ha demostrado que los resultados de la TFA concuerdan bien con los cálculos numéricos para grandes cantidades de partículas, excepto en una pequeña región cercana al límite del condensado que incluso para un número reducido de partículas, la función de onda del estado fundamental calculada dentro de la TFA suele proporcionar formas generales cualitativamente correctas y se observa que esto también se aplica frecuentemente a un condensado de dos especies.

La solución de la TFA predice correctamente la ocurrencia de una ”Separación de Fases“ en presencia de una fuerte interacción repulsiva entre las dos especies y, de hecho, puede estimar de manera confiable y eficiente cuándo ocurrirá esta separación. Sin embargo, se ha identificado que, en muchas situaciones, no se puede depender plenamente de la TFA para predecir características cuantitativas específicas de un condensado de doble especie y se recurren a otro tipo de métodos.

El condensado en presencia de interacciones repulsivas significativas, las partículas tienden a evitarse unas a otras, lo que puede dar lugar a la formación de regiones de mayor densidad de partículas que minimiza la energía total del sistema. Este fenómeno es particularmente relevante cuando se consideran condensados de dos especies, donde las partículas de una especie pueden repeler a las partículas de la otra especie. La separación de fases puede ocurrir debido a las interacciones entre partículas, que en contexto se refiere a la tendencia de las partículas de especies diferentes a agruparse en regiones separadas en lugar de mezclarse homogéneamente en todo el condensado (Myatt et al., 1997) .

A continuación, se muestra las tres fases que pueden emerger:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}: a_0 - a_4 < 0,\ \frac{2}{7}(a_2 - a_4) < \frac{1}{5}\left|a_0 - a_4\right|, \\ &\mathrm{F}: a_2 - a_4 > 0,\ \frac{1}{5}(a_0 - a_4) + \frac{2}{7}(a_2 - a_4) > 0, \\ &\mathrm{C}: a_2 - a_4 < 0,\ \frac{1}{5}\left|a_0 - a_4\right| - \frac{2}{7}(a_2 - a_4) > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

4.3. Marco contextual

Este proyecto de investigación, en primer lugar, exige una base sólida en termodinámica, mecánica estadística, mecánica cuántica y teoría de muchos cuerpos. Estos temas son integralmente abordados en el programa de estudios de la carrera de física en la Universidad de Nariño. Además, el proyecto involucra aspectos relacionados con la programación. Se requieren habilidades previas en el lenguaje de programación más ampliamente utilizado, Python, así como la capacidad para trabajar con CUDA. Es importante destacar que tanto Python como el acceso a CUDA están disponibles de forma gratuita en línea, lo que facilita el acceso y la implementación de estas herramientas en el contexto de la investigación.

Este proyecto de investigación se llevará a cabo en la República de Colombia, específicamente en el Departamento de Nariño, con sede en la ciudad de Pasto, en las instalaciones de la Universidad de Nariño.

5. Metodología

La metodología de este proyecto está diseñada para lograr de manera efectiva los objetivos planteados y abordar el problema identificado. A continuación, se detallan los pasos a seguir:

1. **Revisión Teórica**
   - **Compilación de Información:**
     - Realizar una revisión exhaustiva de la literatura existente sobre la teoría de condensados de Bose-Einstein (BEC), segunda cuantización y separación de fases.
     - Identificar y sintetizar los fundamentos teóricos clave relacionados con el tema de investigación.
   - **Estudio de Lenguajes de Programación:**
     - Investigar y familiarizarse con el lenguaje de programación PYTHON y el manejo de CUDA .
     - Evaluar la idoneidad de estos lenguajes para la implementación de métodos numéricos y la solución de la ecuación de Gross-Pitaevskii.
2. **Análisis de Datos**
   - **Creación del Código:**
     - Acondicionar un código eficiente para la solución numérica de la ecuación de Gross-Pitaevskii, utilizando los lenguajes de programación identificados en la etapa anterior.
     - Asegurarse de que el código sea capaz de gestionar la simulación de la separación de fases en un BEC.
   - **Análisis y Cálculos Experimentales:**
     - Implementar el código en simulaciones prácticas para obtener datos experimentales
     - Realizar análisis detallados y cálculos a partir de los datos obtenidos, utilizando los códigos de programación aprendidos durante el estudio de lenguajes.
3. **Validación y Ajuste:**
   - **Validación del Código**
     - Verificar la precisión y la validez del código desarrollado comparando los resultados con soluciones conocidas y datos teóricos.
     - Realizar ajustes y mejoras en el código según sea necesario para garantizar su confiabilidad.

Finalmente, se llevará a cabo la elaboración de la documentación exhaustiva que describirá en detalle el proceso de implementación, los resultados obtenidos y las conclusiones derivadas del análisis. Este proceso se realizará de manera continua y paralela conforme avance el proyecto, permitiendo una documentación precisa y actualizada en cada etapa.

6. Cronograma

A continuación se presenta el esquema con las actividades y el tiempo estimado para la realización de ellas. Teniendo en cuenta que este trabajo se pretende realizar en el semestre A del 2024.

ACTIVIDADES	Mes1	Mes2	Mes3	Mes4
Revisión de bibliografía, obtención de información e investigación correspondiente a los tópicos de la física como segunda cuantización, condensados espinoriales y separacion de fases.	**X**			
Estudio del lenguaje de programación PHYTHON Y CUDA en conjunto con el manejo de las mismas.	**X**			
Deducir la ecuación de Gross-Potaevskii espinorial.	**X**			
Creación del código para solucionar la ecuación de Gross-Potaevskii	**X**	**X**		
Estudiar la naturaleza de los condensados de Bose-Einstein espinoriales y su fenómeno de separación de fases.		**X**	**X**	
Simulaciones numéricas para la caracterización de la separación de fases.		**X**	**X**	
Análisis y obtención de resultados obtenidos de la simulación de separación de fases en un BEC.		**X**	**X**	
Correcciones y arreglos del proyecto.	**X**	**X**	**X**	**X**
Redacción final del proyecto y socialización.	**X**	**X**	**X**	**X**

7. Presupuesto

Los recursos utilizados para el desarrollo del actual proyecto y su respectiva financiación se pueden ver a continuación.

Se plantea el siguiente presupuesto para recursos materiales.

Item	**Descripción**	**Valor unitario**	**Valor total**	**Fuentes de financiación**
Herramientas tecnológicas	Computador con GPUs NVIDIA	$27.000.000	$27.000.000	Asesor
	Plan de internet	$65.000	$260.000	Estudiante
	Programa Cuda	$0	$0	Libre
	Programa Python	$0	$0	Libre
		Valor total recursos	**$27.260.000**	

Se plantea el siguiente presupuesto para recursos del personal.

Personal	**Valor por hora**	**Horas semanales**	**Valor total de 16 semanas**	**Fuentes de financiación**
Asesor del proyecto	$60.000	2	$1.920.000	UNAM, CONACYT
Coasesor del proyecto	$60.000	2	$1.920.000	UDENAR
Estudiante	$20.000	20	$6.400.000	Estudiante
Jurados	–	–	–	UDENAR
		Valor Total del personal	$ **10.240.000**	

El monto total que se empleara para la elaboración del proyecto es **$37.500.000**

8. Resultados esperados

Para cuando se termine esta investigación, se espera haber aumentado los conocimientos en temas de mecánica cuántica, teoría de muchos cuerpos, métodos numéricos y lenguajes de programación que van a ser útiles para la vida profesional que esta por empezar.

Se anticipa obtener los siguientes resultados en relación con el fenómeno de separación de fases: En primer lugar, se espera confirmar que la magnetización es una buena observable para caracterizar si el estado base del condensado es polar o ferromagnético. En segundo lugar, se presentarán gráficos de la magnetización en función de las longitudes de dispersión de onda (s). Este enfoque tiene como objetivo proporcionar una caracterización detallada de la naturaleza de un condensado de átomos de rubidio. En última instancia, se espera concluir y clasificar el tipo de condensado al que pertenecen, determinando si son polares o ferromagnéticos.

Referencias

Chen, L., Yan, Z., Li, M., y Chen, C. (1998, oct). Bose-einstein condensation of an ideal bose gas trapped in any dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *31*(41), 8289. Descargado de https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/31/41/003 doi: 10.1088/0305-4470/31/41/003

Gross, C., y Bloch, I. (2017, 09). Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices. *Science*, *357*, 995-1001. doi: 10.1126/science.aal3837

Ho, T.-L. (1998, Jul). Spinor bose condensates in optical traps. *Phys. Rev. Lett.*, *81*, 742–745. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.742 doi: 10.1103/PhysRevLett.81.742

Kincaid, J., y Cohen, E. (1975). Phase diagrams of liquid helium mixtures and metamagnets: Experiment and mean field theory. *Physics Reports*, *22*(2), 57-143. Descargado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157375900058 doi: https://doi.org/10.1016/0370-1573(75)90005-8

Klausen, N. N., Bohn, J. L., y Greene, C. H. (2001, Oct). Nature of spinor bose-einstein condensates in rubidium. *Phys. Rev. A*, *64*, 053602. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.053602 doi: 10.1103/PhysRevA.64.053602

Myatt, C. J., Burt, E. A., Ghrist, R. W., Cornell, E. A., y Wieman, C. E. (1997, Jan). Production of two overlapping bose-einstein condensates by sympathetic cooling. *Phys. Rev. Lett.*, *78*, 586–589. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.586 doi: 10.1103/PhysRevLett.78.586

Papp, S. B., Pino, J. M., y Wieman, C. E. (2008, Jul). Tunable miscibility in a dual-species bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, *101*, 040402. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.040402 doi: 10.1103/PhysRevLett.101.040402

Peil, S., Porto, J. V., Tolra, B. L., Obrecht, J. M., King, B. E., Subbotin, M., ... Phillips, W. D. (2003, May). Patterned loading of a bose-einstein condensate into an optical lattice. *Phys. Rev. A*, *67*, 051603. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.051603 doi: 10.1103/PhysRevA.67.051603

Pu, H., y Bigelow, N. P. (1998, Feb). Properties of two-species bose condensates. *Phys. Rev. Lett.*, *80*, 1130–1133. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1130 doi: 10.1103/PhysRevLett.80.1130

Roberts, J. L., Burke, J. P., Claussen, N. R., Cornish, S. L., Donley, E. A., y Wieman, C. E. (2001, Jul). Improved characterization of elastic scattering near a feshbach resonance in $^{85}\mathrm{Rb}$. *Phys. Rev. A*, *64*, 024702. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.024702 doi: 10.1103/PhysRevA.64.024702

Roberts, J. L., Claussen, N. R., Burke, J. P., Greene, C. H., Cornell, E. A., y Wieman, C. E. (1998, Dec). Resonant magnetic field control of elastic scattering in cold ^{85}rb. *Phys. Rev. Lett.*, *81*, 5109–5112. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5109 doi: 10.1103/PhysRevLett.81.5109

Tojo, S., Taguchi, Y., Masuyama, Y., Hayashi, T., Saito, H., y Hirano, T. (2010, Sep). Controlling phase separation of binary bose-einstein condensates via mixed-spin-channel feshbach resonance. *Phys. Rev. A*, *82*, 033609. Descargado de https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.033609 doi: 10.1103/PhysRevA.82.033609

Wang, F., Li, X., Xiong, D., y Wang, D. (2015, nov). A double species 23na and 87rb bose–einstein condensate with tunable miscibility via an interspecies feshbach resonance. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, *49*(1), 015302. Descargado de https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/1/015302 doi: 10.1088/0953-4075/49/1/015302