

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



ALEXIS ALDAHIR GONZALEZ OJEDA

**EL MODELO ESTÁNDAR Y LA TEORÍA DE
GLASHOW-SALAM-WEINBERG**

TRABAJO DE GRADO

Para optar al título profesional de:

Físico

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

EL MODELO ESTÁNDAR Y LA TEORÍA DE GLASHOW-SALAM-WEINBERG

ALEXIS ALDAHIR GONZALEZ OJEDA

TRABAJO DE GRADO

Director:

YITHSBEY LUCAS GIRALDO ÚSUGA

PhD en Física

San Juan de Pasto, Colombia

2021

©2021 - ALEXIS ALDAHIR GONZALEZ OJEDA

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño. Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Yithsbey Lucas Giraldo Úsuga

Director

Eduardo Rojas Peña

Jurado

Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

San Juan de Pasto, 11 de Febrero del 2021

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por su cariño y apoyo incondicional, especialmente a mi madre Pilar Rocio Ojeda quien siempre ha colaborado activamente para que yo pueda alcanzar mis metas.

A algunos profesores del programa de física que contribuyeron a mi formación personal y profesional, hago una mención especial a mi asesor, el profesor Yithsbey Giraldo, por haberme ayudado considerablemente en la finalización de este trabajo en el tiempo requerido.

EL MODELO ESTÁNDAR Y LA TEORÍA DE GLASHOW-SALAM-WEINBERG

Resumen

En este trabajo de grado se estudia y analiza la teoría de Glashow-Salam-Weinberg del Modelo Estándar. En 1967, los estadounidenses Sheldon Glashow y Steven Weinberg y el pakistaní Abdus Salam propusieron de manera independiente una teoría unificadora del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil. Demostraron que el campo gauge de la interacción débil era idéntico en su estructura al del campo electromagnético. Esta teoría recibió soporte experimental por el descubrimiento en 1983, de los bosones W y Z en el CERN por el equipo de Carlo Rubbia.

THE STANDARD MODEL AND THE GLASHOW-SALAM-WEINBERG THEORY

Abstract

In this graduate work, the Glashow-Salam-Weinberg theory of the Standard Model is studied and analyzed. In 1967, Americans Sheldon Glashow and Steven Weinberg and Pakistani Abdus Salam independently proposed a unified theory of electromagnetism and the weak nuclear force. They showed that the gauge field of the weak interaction was identical in structure to the electromagnetic field. This theory was experimentally supported by the discovery in 1983 of W and Z boson at CERN by Carlo Rubbia's team.

Contenido

1	Introducción	1
2	Teorías gauge	3
2.1	Invariancia gauge en electrodinámica clásica	3
2.2	Grupos de Lie	5
2.2.1	Generadores del grupo	5
2.3	Lagrangianos relativistas	7
2.3.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange para campos	8
2.3.2	Lagrangiano de Dirac	9
2.4	Simetrías	9
2.4.1	Leyes de conservación	11
2.5	Campo gauge para una simetría local abeliana	14
2.6	Campo gauge para una simetría local no abeliana	16
3	El Modelo Estándar	22
3.1	Sector electrodébil	23
3.2	Derivada covariante para $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	26
3.3	Lagrangiana invariante gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para los leptones	28
3.4	Rompimiento espontáneo de simetría y el mecanismo de Higgs	30
3.5	Bosón de Higgs	34
3.6	Masa de los bosones gauge	36
3.7	Corrientes electrodébiles	41
3.7.1	Corrientes leptónicas	41
3.7.2	Corrientes de quarks	44
3.7.3	Diagramas de Feynman	47
3.8	Masas para los fermiones	48
3.8.1	Masa de los leptones	48
3.8.2	Masa de los quarks y la matriz CKM	50
4	Decaimiento del muón	59
4.1	Decaimiento de una partícula en n partículas	60
4.2	La amplitud \mathcal{M}	63
4.3	Decaimiento del muón	65
4.3.1	Tiempo de vida	78

5 Conclusiones	81
ANEXOS	
A Los grupos del Modelo Estándar	83
A.1 Álgebras de Lie	83
A.2 Representación adjunta	87
A.3 Rotaciones de los ejes de coordenadas y el grupo $SO(3)$	90
A.4 El grupo $SU(2)$	93
A.5 El grupo $SL(2, C)$ y el grupo de Lorentz apropiado	96
A.6 Transformaciones de las matrices de Pauli	98
A.7 Espinores	100
A.8 El grupo $SU(3)$	101
B Ecuación de Dirac	103
B.1 La ecuación de Dirac	103
B.2 Identidades	105
B.3 Trazas	106
B.4 Solución de onda plana	108
B.5 Operadores de proyección de energía	110
B.6 Operador de helicidad y proyección del espín	111
B.7 Propiedades relativistas	113
B.8 Representaciones de las matrices γ	116
C Lagrangianos relativistas	121
C.1 Lagrangiano de Klein-Gordon	121
C.2 Lagrangiano de Procca	122
D Demostraciones capítulo 2	123
D.1 Ecuación (2.47)	123
D.2 Ecuación (2.72)	124
D.3 Ecuación (2.75)	125
D.4 Ecuación (2.77)	129
Bibliografía	132

Listado de Figuras

3.1	Gráfica del potencial $V(\Phi)$ cuando $m^2 = \mu^2$ [4].	32
3.2	Gráfica del potencial $V(\Phi)$ cuando $m^2 = -\mu^2$ [4].	34
3.3	Ángulo de Weinberg	39
3.4	Fuente: [13]	47
3.5	Fuente: [13]	48
4.1	Diagrama de Feynman genérico, con las líneas externas etiquetadas (las líneas internas no se muestran) [13]	63
4.2	Decaimiento del μ^- [13]	65

Lista de Tablas

3.1	Fuente: [13]	22
3.2	Fuente: [13]	23
3.3	Números cuánticos de la tercera componente del isospín débil e hipercarga para leptones, quarks y partícula de Higgs [1]	26
4.1	Comparación de interacciones conocidas [1]	59

Glosario

- Modelo Estándar:** Es actualmente la mejor descripción del mundo subatómico, pero no explica la imagen completa. La teoría incorpora solo tres de las cuatro fuerzas fundamentales, omitiendo la gravedad. Establece que toda la materia está hecha de tres tipos de partículas elementales: leptones, quarks y mediadores.
- Interacción débil:** Se caracteriza por ser la única interacción capaz de cambiar su sabor. La única interacción que viola la paridad de la simetría P y es también la única que viola la simetría CP.
- Invariancia gauge:** Es una propiedad de las teorías de campo en las cuales los resultados físicos de las interacciones mediadoras son independientes de los cambios en la escala local o del potencial involucrado. Se cree que todas las teorías de campo renormalizables y de buen comportamiento deben incorporar el principio gauge.
- Generación:** Los seis tipos de quarks y leptones están agrupados en tres familias o generaciones. Cada generación consiste de un par de quarks con carga eléctrica $+\frac{2}{3}|e|$ y $-\frac{1}{3}|e|$ y un par de leptones con carga eléctrica $-1|e|$ y $0|e|$.
- Corriente neutra:** Sucede en procesos como el de la interacción electromagnética, donde la carga de la partícula no cambia, a esto se conoce como corriente neutra.
- Corriente cargada:** Sucede en la interacción entre leptones cuando la carga de la partícula de una jerarquía leptónica particular cambia en una unidad, a esto se le llama corriente cargada.

Capítulo 1

Introducción

El Modelo Estándar es una teoría que emergió entre los años de 1960 y 1970 que describe todas las interacciones de las partículas elementales conocidas, excepto la gravedad. Este modelo responde de forma más precisa cuestiones fundamentales de la física: ¿De qué está hecho todo, y cómo interactúan entre sí las componentes básicas del universo? Todas las interacciones entre las partículas elementales que ocurren en la naturaleza se pueden reducir a cuatro fuerzas básicas. En orden decreciente de fuerza estas son: interacción fuerte (nuclear), electromagnetismo, interacción débil (nuclear) y gravedad.

En este trabajo nos vamos a concentrar en la teoría de unificación electrodébil conocida como la teoría de Glashow-Salam-Weinberg del Modelo Estándar. Específicamente en el capítulo 2 expondremos las herramientas matemáticas necesarias para construir una teoría bajo el principio de invariancia gauge. Adicionalmente, presentaremos las simetrías y leyes de conservación involucradas. En el capítulo 3, al unificar dos teorías aparentemente distintas, el electromagnetismo, de largo alcance y con bosones sin masa, y la interacción débil, de corto alcance y caracterizada por la constante de Fermi, surgen nuevas dificultades: ¿dónde está el campo electromagnético de Maxwell A_μ (el fotón) en esta teoría? ¿cuánto vale la carga del electrón e en función de los acoplos g_1 y g_2 de la interacción gauge? ¿cuál o cuáles son los campos del grupo $SU(2)$ responsables de la corriente neutra y cargada? ¿cómo asignarle masa a los fermiones? El método clave que ayudará a resolver todas estas incógnitas consiste en admitir la posibilidad de que en el vacío la simetría gauge se rompe espontáneamente de tal manera que determinados campos toman un valor esperado no nulo. La teoría de Glashow-Salam-Weinberg busca explicar algunos resultados experimentales de relevancia histórica considerando los valores de los observables como funciones de tres parámetros: la constante de Fermi G_F , la masa del bosón Z y la constante de estructura fina. Finalmente,

introduciremos el sector de quarks y algunas de sus propiedades. La dificultad para describir completamente las interacciones débiles de los quarks, es que estos están unidos formando los hadrones, y carecemos de una teoría integral de la estructura de hadrones; por lo que no se puede dar una explicación completa de la influencia de las interacciones fuertes sobre las amplitudes de transición débiles. En el capítulo 4, al estudiar el decaimiento del muón deduciremos su tiempo de vida y como es posible determinar el valor de la constante de Fermi G_F . En el capítulo 5, daremos las conclusiones.

Los apéndices tienen como propósito complementar el trabajo, presentando algunas demostraciones, las principales propiedades de la teoría de grupos y la ecuación de Dirac, de tal forma que sean deducidas las fórmulas que utilizaremos en los diferentes capítulos.

Capítulo 2

Teorías gauge

Las bases para nuestra comprensión actual del tema fueron establecidas por Maxwell en 1864 en sus ecuaciones que unifican las interacciones eléctricas y magnéticas. El potencial electromagnético que debemos introducir para generar campos que cumplan con las ecuaciones de Maxwell, por construcción, no está definido de manera única. La libertad de elegir muchos potenciales que describen los mismos campos electromagnéticos se ha denominado invariancia gauge. Posteriormente, la idea se extendió a grupos gauge de naturaleza no abeliana. La principal diferencia, además de la complejidad algebraica, es la aparición de interacciones como consecuencia de la naturaleza no abeliana de la simetría gauge [4]. En este capítulo, comprobaremos que para el caso de transformaciones gauge locales invariantes sobre la densidad lagrangiana, es necesario introducir campos gauge y redefinir la derivada como una derivada covariante. También presentaremos los conceptos clave para la teoría que vamos a exponer.

2.1 Invariancia gauge en electrodinámica clásica

Como un caso preliminar que nos va permitir entender la simetría gauge, revisemos las consecuencias de la invariancia gauge en la electrodinámica clásica. Las intensidades del campo, **E** y **B** en términos del cuadripotencial $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \mathbf{A})$, se relacionan mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0\end{aligned}\tag{2.1}$$

o

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.2)$$

Esta construcción garantiza automáticamente que el tensor de campo electromagnético $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, satisface las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell: donde los seis términos que involucran las derivadas de segundo orden se cancelan entre sí. Las dos ecuaciones de Maxwell no homogéneas conducen a una ecuación de onda de segundo orden

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.3)$$

donde J^ν es la cuadricorriente $J^\nu = (J^0, J^1, J^2, J^3) \equiv (\rho, \mathbf{J})$. O lo que es lo mismo, la ecuación (2.3) se puede escribir en términos de sus componentes espacio temporales:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) &= \mathbf{J} \\ -\nabla^2 A^0 - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \rho. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, tomando la cuadridivergencia en (2.3) inmediatamente se muestra que la corriente electromagnética se conserva, es decir, satisface la ecuación de continuidad, $\partial_\mu J^\mu = 0$. Se conoce bien que el potencial $A^\mu(x, t)$ no es una cantidad observable directamente y que no está establecida de forma única. Una transformación gauge local, que consiste en añadir el cuadripotencial de una función escalar arbitraria, $\Lambda(x, t)$, es decir,

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (2.5)$$

no modifica los valores de las intensidades del campo electromagnético (2.1) **E** y **B** y conserva las ecuaciones de Maxwell (2.2) y (2.3). La propiedad de la invariancia gauge conduce a complicaciones matemáticas en el estudio del campo electromagnético. Para calcular una cantidad de interés, a menudo se somete el potencial a una condición gauge particular, es decir, se “fija el gauge”. Los detalles del cálculo resultante pueden depender en gran medida de la condición gauge elegida, aunque, por supuesto, las cantidades observables obtenidas al final tienen que ser las mismas.

2.2 Grupos de Lie

Las simetrías gauge provienen de los grupos de Lie. Por tanto estudiamos con cierto detalle estos grupos. Un grupo G es un conjunto de elementos f, g, h, \dots , junto con una regla que combina dos elementos f, g de G para formar un tercer elemento fg , que también pertenece a G , y que satisface las siguientes condiciones:

- (i) La regla asociativa: $f(gh) = (fg)h$.
- (ii) G contiene un elemento de identidad único e tal que para cada elemento g de G ,

$$ge = eg = g.$$

- (iii) Para cada elemento, existe un elemento inverso único en G tal que

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Si también $fg = gf$ para todo f, g , se dice que el grupo es commutativo o abeliano.

Los grupos que nos interesan son los grupos de Lie, que se definen como una variedad diferenciable [6] dotada de una estructura de grupo. Dichos grupos poseen las operaciones de un grupo, donde $G \times G \rightarrow G$ y el mapeo $G \rightarrow G$ dado por $g \rightarrow g^{-1}$ son diferenciables. Si la dimensión de la variedad subyacente es r , decimos que G es un grupo de Lie de parámetro r .

2.2.1 Generadores del grupo

Suponiendo que los elementos de nuestro grupo dependen suavemente¹ de un conjunto de parámetros continuos α [5]

$$g(\alpha) \tag{2.6}$$

¹Lo que queremos decir con suave es que existe una noción de cercanía en el grupo, de modo que si dos elementos están “juntos” en el espacio de los elementos del grupo, los parámetros que los describen también están juntos y son diferenciables.

y dado que la identidad es un elemento importante en el grupo, es útil parametrizar los elementos (al menos los puntos más cercanos al elemento identidad) de tal manera que $\alpha = 0$ corresponda a la identidad. Por lo tanto, asumimos que en la vecindad de la identidad, los elementos del grupo pueden describirse mediante una función de N parámetros reales α_a (con $a = 1, 2 \dots N$), de manera que

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e. \quad (2.7)$$

Luego, si encontramos una representación del grupo², los operadores lineales de la representación se parametrizan de la misma manera, y

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = \mathbb{1}. \quad (2.8)$$

En consecuencia, en la vecindad del elemento de identidad, podemos expandir en series de Taylor a $D(\alpha)$, y si estamos lo suficientemente cerca, sólo se escriben los términos hasta primer grado en la expansión:

$$D(d\alpha) = \mathbb{1} + id\alpha_a X_a + \dots \quad (2.9)$$

donde el parámetro $d\alpha$ es infinitesimal. En la ecuación (2.9), se sobreentiende una suma sobre los índices repetidos (la “convención de suma de Einstein”) y

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)|_{\alpha=0}, \quad (2.10)$$

donde X_a (con $a = 1, 2 \dots N$) corresponden a los generadores del grupo. Si todos los parámetros son necesarios para distinguir los diferentes elementos del grupo los generadores X_a son independientes en la definición (2.10)³.

Sophus Lie demostró que los generadores pueden definir un grupo abstracto sin mencionar las representaciones en absoluto. Como resultado de su trabajo, los grupos de este tipo se denominan **grupos de Lie**.

²Una representación de un grupo G en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es un homomorfismo $T : G \rightarrow GL(\mathcal{H})$, siendo un homomorfismo entre dos grupos con diferente operación $(G, *)$ y (H, \bullet) un mapeo $f : G \rightarrow H$ que satisface: $f(a * b) = f(a) \bullet f(b)$ para todo $a, b \in G$.

³Se incluye la i para que la representación del grupo sea unitaria, así que los X_a son operadores hermíticos.

A medida que nos alejamos de la identidad, existe una enorme libertad para parametrizar los elementos del grupo de diferentes maneras, pero también podemos elegir nuestra parametrización para que la ley de multiplicación de grupos y, por lo tanto, la ley de multiplicación para los operadores de la representación en el espacio de Hilbert sea cómodo de manipular. En particular, podemos alejarnos de la identidad en alguna dirección fija simplemente elevando a una potencia grande un elemento de grupo infinitesimal.

$$D(d\alpha) = \mathbb{1} + id\alpha_a X_a. \quad (2.11)$$

Debido a la propiedad del grupo, esto siempre da otro elemento de grupo. Esto sugiere definir la representación de los elementos del grupo para α finito como

$$D(d\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{1} + i\alpha_a X_a/k)^k = e^{i\alpha_a X_a}. \quad (2.12)$$

En el límite, esto arroja la representación de un elemento de grupo porque $1 + id\alpha_a X_a/k$ corresponde a un elemento del grupo (2.9) cuando k se vuelve grande. Esto define una parametrización particular de las representaciones (a veces llamada parametrización exponencial) y, por lo tanto, de la propia ley de multiplicación de grupos. En particular, esto significa que podemos describir los elementos del grupo (al menos en la vecindad de e , o 1) en términos de los generadores. Esto es bueno, porque a diferencia de los elementos del grupo, los generadores forman un espacio vectorial. Se pueden sumar y multiplicar por números reales. De hecho, a menudo usaremos el término generador para referirnos a cualquier elemento del espacio vectorial lineal real generado por los X_a .

En el Apéndice A, se describen los principales grupos con los que se trabaja en el Modelo Estándar.

2.3 Lagrangianos relativistas

Una partícula, por su naturaleza, es una entidad localizada; en mecánica clásica, generalmente estamos interesados en calcular su posición como una función del tiempo: $x(t)$, $y(t)$,

$z(t)$. A diferencia de un campo, que ocupa alguna región del espacio. En teoría de campos, nuestro interés se centra en calcular una o más funciones de la posición y el tiempo: $\phi_i(x, y, z, t)$.

En matemáticas y física, un campo escalar asocia un valor real (o complejo) a cada punto en el espacio. El escalar puede o bien ser un número matemático sin dimensión o una cantidad física. Como ejemplo, en el contexto físico, algunos campos escalares típicos son la temperatura en una placa metálica, el potencial electrostático, la distribución de presión en un fluido, y los campos cuánticos de espín cero, como el campo Higgs. Ejemplos de campos vectoriales son el campo magnético y eléctrico [13].

2.3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange para campos

En mecánica de partículas, se introduce una lagrangiana L que es función de las coordenadas, q_i , y sus derivadas temporales, \dot{q}_i . De otro lado, en teoría cuántica de campos trabajamos con una densidad lagrangiana \mathcal{L} , que es función de los campos ϕ_i y sus derivadas respecto de x, y, z y t , (x^μ), es decir,

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}.$$

En el caso de las ecuaciones de Euler-Lagrange convencionales

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

vemos que el término de la izquierda involucra únicamente una derivada temporal. En el caso de modelos relativistas de campos debemos tratar las coordenadas espacial y la temporal al mismo nivel, y las ecuaciones de Euler-Lagrange se generalizan a la forma

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.14)$$

2.3.2 Lagrangiano de Dirac

La ecuación de Dirac⁴, que daremos a continuación en unidades naturales, $\hbar = 1$ y $c = 1$, describe, en teoría cuántica de campos, partículas de espín 1/2 y masa m ,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.15)$$

donde las matrices $\gamma^\mu = \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ son las matrices gamma que explicitamente se encuentran en el Apéndice B.8. Considerando el campo espinorial ψ y su espinor adjunto $\bar{\psi} = \psi\gamma^0$ como variables de campo independientes, de la ecuación de Euler-Lagrange con

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi$$

obtenemos la ecuación de Dirac:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0. \quad (2.16)$$

Donde hemos usado la notación de slash: $\gamma^\mu\partial_\mu \equiv \cancel{\partial}$. Otros lagrangianos importantes para la teoría se mencionan en el Apéndice C.

2.4 Simetrías

Las ecuaciones de movimiento para un sistema descrito por la acción

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \quad (2.17)$$

donde el volumen V puede ser finito (sistema localizado en el espacio) o infinito, se obtienen del principio de mínima acción de Hamilton [9]. Este enfoque establece que la dinámica del sistema evoluciona desde el estado inicial $\phi(t_0, \mathbf{x})$ al estado final $\phi(t_1, \mathbf{x})$ tal

⁴Un análisis más extenso de esta ecuación por la importancia que tienen los fermiones (como quarks y leptones) para el Modelo Estándar se da en el Apéndice B

que la acción, tomada como funcional de los campos y sus primeras derivadas, permanece estacionaria durante la evolución, es decir

$$\delta S = 0 \quad (2.18)$$

para variaciones arbitrarias

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (2.19)$$

que se anulan en la frontera $\Omega \equiv (\Delta t, V)$.

El cálculo explícito de la variación δS da:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta(\partial_\nu \phi) \right]. \quad (2.20)$$

Como en la variación las coordenadas x no cambian tenemos que:

$$\delta(\partial_\nu \phi) = \partial_\nu \delta\phi \quad (2.21)$$

y (2.20) puede reescribirse como sigue:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right] \delta\phi + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta\phi \right] \right\} \quad (2.22)$$

El segundo término en (2.22) es un término de superficie que desaparece y, por lo tanto, la condición $\delta S = 0$ nos da las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.14) generalizado a varios campos. En este sentido es importante resaltar que las densidades lagrangianas que se diferencian entre sí por una derivada total de una función de campos arbitraria

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \partial_\mu \Lambda^\mu(\phi) \quad (2.23)$$

dan las mismas ecuaciones clásicas de movimiento.

2.4.1 Leyes de conservación

La ecuación (2.22) también se puede utilizar para obtener leyes de conservación deducidas a partir de una cierta clase de simetrías del sistema físico. Consideremos un grupo de Lie de transformaciones infinitesimales globales continuas (independientes de x) que actúan en el espacio de grados de libertad internos de los campos ϕ_i .

Bajo una “rotación” del sistema físico

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = e^{-i\theta^a T^a} \phi_i(x) \quad (2.24)$$

siendo el factor $e^{-i\theta^a T^a}$ una simetría global. Para el caso de una transformación infinitesimal alrededor de la identidad tendríamos:

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta_0 \phi_i(x) \quad (2.25)$$

donde

$$\delta_0 \phi_i(x) = -i\theta^\alpha T_{ij}^a \phi_j(x) \quad (2.26)$$

y $\phi'_i(x)$ se entiende como la i -ésima componente del campo $\phi(x)$ girado respecto del marco de referencia original. Los generadores T^α son un conjunto de matrices hermíticas T_{ij}^α que satisfacen el álgebra de Lie (ver Apéndice A) del grupo G

$$[T^\alpha, T^\beta] = i c_{\alpha\beta\gamma} T^\gamma, \quad \text{Tr}(T^\alpha T^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} \quad (2.27)$$

siendo $c_{\alpha\beta\gamma}$ las constantes de estructura y los parámetros θ^a independientes de x . Específicamente estamos trabajando con un álgebra de Lie compacta⁵.

El teorema de Noether contiene la descripción formal de la relación entre las propiedades de simetría o invarianza y las cantidades que se conservan. La versión del teorema de Noether que vamos a presentar no constituye la forma más general posible pero facilita la deducción

⁵Un álgebra de Lie compacta puede verse como la forma real más pequeña de su correspondiente álgebra de Lie compleja.

sin restringir de manera importante el ámbito de aplicación del teorema ni la utilidad de las conclusiones. Supondremos que se cumplen tres condiciones [7]:

1. El cuadriespacio es euclídeo. Este requisito no es indispensable, pero vamos a suponerlo por razón de sencillez. Restringe el espacio-tiempo relativista al espacio de Minkowski, que es complejo pero euclídeo.
2. La densidad Lagrangiana presenta la misma forma funcional para las cantidades transformadas que para las cantidades originales, es decir,

$$\mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x')) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (2.28)$$

3. La magnitud de la integral de acción es invariante ante la transformación, es decir,

$$S \equiv \int_{\Omega'} \mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x')) d^4x' = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x. \quad (2.29)$$

La combinación de las ecuaciones (2.28) y (2.29) nos da el requisito

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x')) d^4x' = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x. \quad (2.30)$$

En la primera integral, la integración sobre las variables x' representa simplemente una variable de integración muda y por ello podemos escribirla sin el superíndice. La condición queda en la forma

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) d^4x = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x. \quad (2.31)$$

Haciendo una analogía con el caso unidimensional en el que se tendría:

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\delta f(x) + \frac{d}{dx}(f(x)\delta x) \right], \quad (2.32)$$

una integral estaría extendida al volumen Ω y la otra integral extendida a la diferencia de volúmenes $\Omega' - \Omega$, por lo tanto

$$\int_{\Omega} [\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_{\mu}\phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) + \partial_{\nu}(\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)))\delta x] d^4x = 0 \quad (2.33)$$

dado que las ecuaciones de movimiento son invariantes al añadir términos bajo derivación, el último término desaparece y tendríamos la siguiente relación

$$\int_{\Omega} [\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_{\mu}\phi'(x))] d^4x = \int_{\Omega} [\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))] d^4x \quad (2.34)$$

que implica

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_{\mu}\phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) \quad (2.35)$$

De hecho, la variación de la acción generada por variaciones arbitrarias de los campos $\phi'(x)$ con condiciones de frontera (2.19) viene dada nuevamente por (2.22) (con $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$ etc.) y obtenemos las mismas ecuaciones para $\phi'(x)$ que para $\phi(x)$. Además, el cambio (2.28) de la densidad lagrangiana bajo las transformaciones de simetría:

$$\mathcal{L}'(\phi', \partial_{\mu}\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = \mathcal{L}(\phi', \partial_{\mu}\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = 0 \quad (2.36)$$

viene dado formalmente por el integrando en (2.19) con $\delta\phi$ dado por (2.25). De (2.36) y de las ecuaciones de movimiento se sigue que las corrientes

$$J_{\mu}^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\phi_i)} T_{ij}^a \phi_j \quad (2.37)$$

se conservan, que es la esencia del teorema de Noether, y con cargas

$$Q^a(t) = \int d^3x J_0^a(t, \mathbf{x}) \quad (2.38)$$

que son constantes de movimiento para cada generador del grupo.

2.5 Campo gauge para una simetría local abeliana

Como un ejemplo bien conocido, consideremos la invariancia gauge en la electrodinámica como una consecuencia de la invarianza de la teoría. A menudo se introduce de la siguiente manera: se considera una teoría de campo libre de Dirac, con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2.39)$$

Vemos que este lagrangiano es invariante bajo el grupo $U(1)$ de transformaciones globales

$$\psi'(x) = e^{-iq\theta}\psi(x) \quad (2.40)$$

donde el parámetro q es un autovalor del generador de carga Q de $U(1)$.

De acuerdo al teorema de Noether, ecuación (2.38), la simetría $U(1)$ del lagrangiano (2.39) implica la existencia de una corriente conservada

$$J_\mu(x) = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (2.41)$$

que implica la conservación de la carga correspondiente. Ahora consideramos las transformaciones gauge locales $U(1)$ (transformaciones de fase local en las que se permite que el parámetro θ dependa de la coordenada espacio temporal x), es decir,

$$\psi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\psi(x). \quad (2.42)$$

Como un resultado inmediato, el lagrangiano (2.39) no es invariante bajo estos transformaciones gauge, porque la transformación de las derivadas de los campos da términos adicionales proporcionales a $\partial_\mu\theta(x)$. Para hacer invariante el lagrangiano, se debe introducir un nuevo término que pueda compensar los términos adicionales. O equivalentemente, se debería encontrar una derivada modificada $\mathcal{D}_\mu\psi(x)$ que se transforme de la forma que lo

hace $\psi(x)$, es decir,

$$[\mathcal{D}_\mu \psi(x)]' = e^{-iq\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x), \quad (2.43)$$

en la que se reemplaza ∂_μ por \mathcal{D}_μ en el lagrangiano (2.39).

La derivada \mathcal{D}_μ se llama derivada covariante. La derivada covariante se construye introduciendo un campo vectorial (gauge) $B_\mu(x)$, definido como

$$\mathcal{D}_\mu \psi_k(x) = [\partial_\mu + iq_k e B_\mu(x)] \psi_k(x) \quad (2.44)$$

donde e es una constante positiva arbitraria. La regla de transformación (2.43) está asegurada si el campo gauge $B_\mu(x)$ se transforma como:

$$B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (2.45)$$

Las derivadas covariantes juegan un papel importante en las teorías gauge, en particular, se pueden construir nuevos objetos covariantes mediante la aplicación repetitiva de derivadas covariantes. Para el producto antisimétrico de dos derivadas

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi = \mathcal{D}_\mu (\mathcal{D}_\nu \psi) - \mathcal{D}_\nu (\mathcal{D}_\mu \psi) \quad (2.46)$$

se consigue, ver Apéndice D.1,

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi = iq e [\partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x)] \psi. \quad (2.47)$$

Al comparar las propiedades de transformación gauge a ambos lados de (2.47) se llega a la conclusión de que el tensor

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \quad (2.48)$$

es invariante gauge. El tensor de intensidad de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se puede utilizar para completar el lagrangiano con el término invariante gauge de energía cinética invariante gauge para

los campo gauge

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^2. \quad (2.49)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento para B_μ y $\bar{\psi}$ son

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = eq\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = J^\nu \quad (2.50)$$

y

$$(i\cancel{D} - m)\psi = 0, \quad (2.51)$$

donde se puede identificar a e con la carga eléctrica ($e > 0$), y reconocemos en la teoría la electrodinámica de Maxwell-Dirac, ver ecuaciones (2.3) y (2.16).

Por supuesto, la invariancia gauge $U(1)$ implica la invariancia $U(1)$ global y la conservación de la corriente (2.41) y su correspondiente carga (2.38). También implica la ausencia del término de masa del campo gauge, $m^2 B_\mu B^\mu$. Pero este término no rompe la simetría $U(1)$ global.

2.6 Campo gauge para una simetría local no abeliana

Para construir un lagrangiano de campo gauge no abeliano, repetimos los mismos pasos de la sección anterior. Comenzamos con un lagrangiano de campo libre, pero esta vez considerando n campos de Dirac Ψ_k de la misma masa m . Es decir,

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^n (\bar{\psi}_k i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_k - m\bar{\psi}_k \psi_k), \quad (2.52)$$

donde n corresponde a la dimensión $n \times n$ de los generadores del grupo de simetría gauge

que vamos a considerar. Además, podemos simplificar la notación definiendo el arreglo

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \equiv \Psi. \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.52) puede reescribirse como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (2.54)$$

Vamos a considerar que el arreglo (2.53) transforma de acuerdo con una representación de algún grupo de Lie no abeliano de la forma

$$\Psi'(x) = e^{-i\theta^\alpha T^\alpha} \Psi(x) = \mathbf{U} \Psi(x), \quad (2.55)$$

donde $\mathbf{U} \equiv e^{-i\theta^\alpha T^\alpha}$ y los T^α son las representaciones matriciales hermíticas de los generadores del grupo, que actúan sobre los campos Ψ y satisfacen las relaciones (2.27).

El lagrangiano de campos libre (2.54) es invariante bajo el grupo de transformaciones globales no abelianos del tipo (2.55). Extendamos el grupo a una transformación gauge local. Tal como se hizo para el caso $U(1)$, busquemos una derivada covariante \mathcal{D}_μ , tal que transforme de la siguiente manera

$$[\mathcal{D}_\mu \Psi(x)]' = e^{-i\theta^\alpha(x)T^\alpha} \mathcal{D}_\mu \Psi(x) = \mathbf{U}(x) \mathcal{D}_\mu \Psi(x), \quad (2.56)$$

donde $\mathbf{U}(x) \equiv e^{-i\theta^\alpha(x)T^\alpha}$. Del mismo modo como en la ecuación (2.44), esperamos que la derivada covariante \mathcal{D}_μ esté dada por una combinación de la derivada parcial normal más una transformación de los campos Ψ , de la forma

$$\mathcal{D}_\mu \Psi(x) = [\partial_\mu + \mathbf{W}_\mu(x)] \Psi(x) \quad (2.57)$$

donde $\mathbf{W}_\mu(x)$ es un elemento (anti-hermitico) del álgebra de Lie, definido como

$$\mathbf{W}_\mu(x) = +ig W_\mu^\alpha(x) T^\alpha. \quad (2.58)$$

Por consiguiente, necesitamos tantos campos gauge como el número de generadores del grupo. Con la forma (2.57), la condición (2.56) se satisface si la regla de transformación gauge para $\mathbf{W}_\mu(x)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_\mu(x) &= \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu(x)\mathbf{U}^{-1}(x) - [\partial_\mu\mathbf{U}(x)]\mathbf{U}^{-1}(x) \\ &= \mathbf{U}(x)[\mathbf{W}_\mu(x) + \partial_\mu]\mathbf{U}^{-1}(x)\end{aligned}\tag{2.59}$$

o para una transformación infinitesimal (con $\theta^\alpha(x)$ pequeño)

$$\delta\mathbf{W}_\mu(x) = \mathbf{W}'_\mu(x) - \mathbf{W}_\mu(x) = \partial_\mu\Theta(x) + [\mathbf{W}_\mu(x), \Theta(x)]\tag{2.60}$$

donde

$$\Theta(x) = +i\theta^\alpha(x)T^\alpha\tag{2.61}$$

es un parámetro gauge infinitesimal en la notación matricial. La transformación correspondiente para los campos gauge W_μ^α son

$$\delta W_\mu^\alpha(x) = \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^\alpha(x) + c_{\alpha\beta\gamma}\theta^\beta(x)W_\mu^\gamma(x),\tag{2.62}$$

donde $c_{\alpha\beta\gamma}$ son las constantes de estructura del grupo definidas en (2.27). También se ve en (2.62) que bajo transformaciones globales ($\partial_\mu\theta = 0$) los campos gauge se transforman de acuerdo con la representación adjunta del grupo (ver Apéndice A.1) con $(T^\alpha)_{\beta\gamma} = -ic_{\alpha\beta\gamma}$.

De manera similar a (2.47), podemos construir nuevas cantidades covariantes mediante la aplicación reiterada de la derivada covariante (2.57). Obtenemos,

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\Psi(x) = (\partial_\mu\mathbf{W}_\nu(x) - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu(x) + [\mathbf{W}_\mu(x), \mathbf{W}_\nu(x)])\Psi(x).\tag{2.63}$$

Por tanto, el tensor antisimétrico (la intensidad de campo)

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu(x) - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu(x) + [\mathbf{W}_\mu(x), \mathbf{W}_\nu(x)]\tag{2.64}$$

es un tensor covariante que bajo las transformaciones gauge (2.59), transforma de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}'_{\mu\nu}(x) = \mathbf{U}(x)\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\mathbf{U}^{-1}(x). \quad (2.65)$$

Para una transformación infinitesimal obtenemos

$$\delta\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = [\mathcal{G}_{\mu\nu}(x), \Theta(x)]. \quad (2.66)$$

Es obvio a partir de (2.64) que el tensor $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ se puede descomponer en términos de generadores del grupo

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = ig\mathcal{G}_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha \quad (2.67)$$

donde

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu W_\nu^\alpha - \partial_\nu W_\mu^\alpha - gc^{\alpha\beta\gamma}W_\mu^\beta W_\nu^\gamma, \quad (2.68)$$

en la que la regla de transformación para $\mathcal{G}_{\mu\nu}^\alpha(x)$ proviene de (2.65) y (2.66).

Finalmente, podemos generalizar la definición de la derivada covariante para aplicarla a cualquier elemento del álgebra de Lie $\xi(x) = +i\xi^\alpha(x)T^\alpha$. Aplicando la derivada covariante $\mathcal{D}_\rho = \partial_\rho + \mathbf{W}_\rho(x)$ al objeto $\xi\Psi$ e insistiendo en la regla de Leibnitz

$$\mathcal{D}_\rho(\xi\Psi) = (\mathcal{D}_\rho\xi)\Psi + \xi(\mathcal{D}_\rho\Psi) \quad (2.69)$$

obtenemos

$$\mathcal{D}_\mu\xi = \partial_\mu\xi + [\mathbf{W}_\mu, \xi] \quad (2.70)$$

Entonces, la transformación gauge (2.60) se puede escribir simplemente como

$$\delta\mathbf{W}_\mu(x) = \mathcal{D}_\mu\Theta(x). \quad (2.71)$$

Además, tenemos que (ver Apéndice D.2)

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}_{\rho\sigma} = [\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}_{\rho\sigma}] \quad (2.72)$$

Finalmente, podemos escribir la densidad lagrangiana invariante gauge para una teoría con campos gauge no abelianos de fermiones. Tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] + \bar{\Psi}(i\cancel{\mathcal{D}} - m)\Psi. \quad (2.73)$$

$\text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}]$ es invariante gauge porque $\text{Tr}[U \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} U^{-1}] = \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}]$. El primer término corresponde al término cinético para los campos gauge no abelianos y el segundo es el término de interacción entre fermiones. Los términos de orden superior en los campos no están permitidos para la teoría cuántica de campos si ha de ser renormalizable [9]. El término \mathcal{G}_μ^μ es cero. El término de campo gauge puro debe estar presente en el lagrangiano porque necesitamos que el término de energía cinética sea cuadrático en los campos gauge. Su forma invariante gauge implica entonces la presencia de dos términos de autointeracción gauge del orden g y g^2 , respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[C_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^\alpha - \partial_\nu W_\mu^\alpha)^2 + g c^{\alpha\beta\gamma} W_\mu^\beta W_\nu^\gamma \partial^\mu W^{\nu\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 c^{\alpha\beta\gamma} c^{\alpha\sigma\delta} W_\mu^\beta W_\nu^\gamma W^{\mu\sigma} A^{\nu\delta} \end{aligned} \quad (2.74)$$

(recordamos nuestra normalización $\text{Tr}[T^\alpha T^\beta] = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$).

Terminamos esta sección obteniendo la corriente conservada del lagrangiano (2.73). La variación de la acción es, ver Apéndice D.3,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left[\int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] \right] + \delta \left[\int d^4x \bar{\Psi}(i\cancel{\mathcal{D}} - m)\Psi \right] \\ &= -\frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}) \delta \mathbf{W}_\nu] + 2 \int d^4x \text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

donde

$$J_\mu(x) = i J_\mu^\alpha(x) T^\alpha \quad (2.76)$$

con

$$J_\mu^\alpha(x) = \bar{\Psi} \gamma_\mu T^\alpha \Psi.$$

Obtenemos la ecuación de movimiento

$$\frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} - J^\nu = 0. \quad (2.77)$$

Finalmente, aplicando la derivada covariante a (2.77), el primer término se cancela y se obtiene así la ecuación de divergencia covariante para la corriente (2.76)

$$\mathcal{D}_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (2.78)$$

Por lo tanto, los campos gauge solo pueden acoplarse consistentemente a las corrientes que se conservan covariantemente. También vemos de (2.78) que la carga no abeliana asociada con la corriente fermiónica no es una constante de movimiento. Dado que los campos gauge no son neutros, su contribución debe incluirse en las cargas conservadas.

Capítulo 3

El Modelo Estándar

El Modelo Estándar de la física de partículas es una teoría cuántica relativista de campos. En la actualidad, es la teoría más acertada para explicar el comportamiento de las partículas elementales y las propiedades de tres de las fuerzas presentes en la naturaleza (electrodébil y fuerte). En esta teoría se considera que toda la materia está hecha de tres tipos de partículas elementales: leptones, quarks y mediadores. Los leptones y los quarks son partículas de espín 1/2 que satisfacen la estadística de Fermi-Dirac. Los mediadores o bosones, son partículas de espín entero que satisfacen la estadística de Bose-Einstein. Hay seis leptones, clasificados de acuerdo a su carga eléctrica (Q), número electrónico (L_e), número muónico (L_μ) y número tauónico (L_τ). Estos se presentan en tres familias o generaciones [13]:

Clasificación de los leptones

Generación	Leptón	Símbolo	Q	L_e	L_μ	L_τ
Primera	<i>Electrón</i>	e	-1	1	0	0
	<i>Neutrino electrónico</i>	ν_e	0	1	0	0
Segunda	<i>muón</i>	μ	-1	0	1	0
	<i>Neutrino muónico</i>	ν_μ	0	0	1	0
Tercera	<i>Tau</i>	τ	-1	0	0	1
	<i>Neutrino tauónico</i>	ν_τ	0	0	0	1

Tabla 3.1: Fuente: [13]

Hay también seis antileptones, todos con signos inversos. El positrón, por ejemplo, lleva una carga de +1 y el electrón de -1. De este modo, en total habría 12 leptones.

Similarmente, hay sabores de quarks, clasificados por los siguientes tipo de carga: eléctrica

(Q), extrañeza (S), encanto (C), belleza (B), verdad (T), arriba (U) y abajo (D). Los quarks también se presentan en tres generaciones:

Clasificación de los quarks

Generación	Quark	Símbolo	Q	D	U	S	C	B	T
Primera	<i>Abajo</i>	d	$-1/3$	-1	0	0	0	0	0
	<i>arriba</i>	u	$2/3$	0	1	0	0	0	0
Segunda	<i>Extrañeza</i>	s	$-1/3$	0	0	-1	0	0	0
	<i>Encanto</i>	c	$2/3$	0	0	0	1	0	0
Tercera	<i>Belleza</i>	b	$-1/3$	0	0	0	0	-1	0
	<i>Verdad</i>	t	$2/3$	0	0	0	0	0	1

Tabla 3.2: Fuente: [13]

Nuevamente, al invertir todos los signos de carga obtendríamos los antiquarks. Debido a que cada quark y antiquark se presenta en tres tipos diferentes de una propiedad llamada color¹, habría 36 quarks en total .

Finalmente, cada interacción tiene su mediador, el fotón γ para la fuerza electromagnética, los bosones W^+ , W^- y Z^0 para la fuerza débil y los gluones g , cada uno con tres tipos de carga de color, para la fuerza fuerte. Por último, en la teoría de Glashow-Salam-Weinberg se necesita al menos de una partícula de Higgs escalar (de espín cero). En consecuencia, hay como mínimo un total de 61 partículas elementales: 12 leptones, 36 quarks, 12 mediadores y una partícula de Higgs.

3.1 Sector electrodébil

El sector del Modelo Estándar que nos interesa principalmente en este trabajo es el sector electrodébil que proviene de la teoría gauge de las interacciones electrodébiles. Empecemos por revisar algunos de los resultados que dieron origen al Modelo Estándar electrodébil

¹El color es un número cuántico asociado a los quarks y gluones relacionado con sus interacciones fuertes.

(conocido como la teoría de Glashow-Salam-Weinberg) [16].

- A bajas energías, las interacciones débiles (por ejemplo, la desintegración β del neutrón, etc.) se describen bastante bien mediante una forma específica de la teoría de Fermi que involucra cuatro interacciones de fermiones en forma de una densidad Hamiltoniana de interacción corriente-corriente:

$$H_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu \quad (3.1)$$

siendo J_μ de la forma

$$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi \quad (3.2)$$

y G_F la constante de acoplamiento de Fermi que se determina a partir de experimentos a baja energía, como por ejemplo el decaimiento del muón, con un valor de

$$G_F = 1.16637 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}. \quad (3.3)$$

- Las componentes izquierdas y derechas de un campo espinorial están definidas por:

$$\left. \begin{aligned} \psi_L(x) &= \hat{P}_L \psi(x) \\ \psi_R(x) &= \hat{P}_R \psi(x) \end{aligned} \right\} \equiv \frac{1}{2} (\mathbb{1} \pm \gamma_5) \psi(x), \quad (3.4)$$

siendo \hat{P} el operador de proyección que proyecta las componentes de helicidad positivas (izquierdas) y negativas (derechas) de un espinor arbitrario

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (3.5)$$

Los campos de fermiones participan en las interacciones débiles debido a que el grupo de isospín débil puede identificarse con el grupo $SU(2)_L$ en forma de dobletes. Las

componentes de quiralidad derecha aparecen como singletes²:

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad L_\nu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad e_R, \mu_R, \tau_R \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (3.7)$$

- Entre los números cuánticos que caracterizan a los fermiones con respecto al grupo de simetría gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (ver siguiente sección), está la relación de Gell-Mann-Nishijima para la carga eléctrica

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (3.8)$$

donde Q denota la carga eléctrica de la partícula, T_3 el número cuántico asociado con la tercera componente del generador³ de isospín débil y Y su número cuántico de hipercarga débil.

- Hay 4 bosones vectoriales portadores de la fuerza electrodébil

$$\gamma, W^+, W^-, Z \quad (3.9)$$

donde el fotón γ no tiene masa y los bosones W^\pm, Z son masivos.

Esta estructura empírica puede integrarse en una teoría de campo unificado con invariancia gauge para las interacciones electromagnéticas y débiles, interpretando $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ como el grupo de transformaciones gauge bajo las cuales el lagrangiano es invariante. Esta simetría se rompe, por el mecanismo de Higgs, hasta la simetría gauge

²Al neutrino únicamente se le asigna helicidad izquierda debido al experimento de Goldhaber, Grodzins y Sunyar, el cual se presenta en [8]. Este experimento no demuestra que no existe la helicidad derecha del neutrino, demuestra que esta no interviene en procesos de interacción débil. Por lo que, es tomada como cero en la teoría.

³Más adelante vamos a ver que este generador corresponde a la matriz de Pauli σ_3 para el grupo gauge no abeliano $SU(2)_L$

Fermiones	T_3	Y	Q
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	1/2	-1	0
e_L, μ_L, τ_L	-1/2	-1	-1
e_R, μ_R, τ_R	0	-2	-1
u_L, c_L, t_L	1/2	1/3	2/3
d_L, s_L, b_L	-1/2	1/3	-1/3
u_R, c_R, t_R	0	4/3	2/3
d_R, s_R, b_R	0	-2/3	-1/3
Higgs	T_3	Y	Q
ϕ^+	1/2	1	1
ϕ^0	-1/2	1	0

Tabla 3.3: Números cuánticos de la tercera componente del isospín débil e hipercarga para leptones, quarks y partícula de Higgs [1]

electromagnética de lo contrario, los bosones W^\pm, Z tampoco tendrían masa. En la formulación mínima del Modelo Estándar, se requiere un solo campo escalar (campo de Higgs); el cual es un doblete bajo $SU(2)_L$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

cuyos números cuánticos están dados en la tabla 3.3.

3.2 Derivada covariante para $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

En el capítulo 2, sección 2.5 y 2.6, analizamos la invarianza gauge usando campos espinoriales Ψ . Extendamos nuestro análisis considerando ahora campos escalares. Para el Modelo Estándar de la unificación electrodébil, construiremos una densidad lagrangiana invariante bajo una transformación gauge no abeliana $SU(2)_L$ para dobletes izquierdos y una trans-

formación abeliana $U(1)_Y$ para los singletes derechos, condensada como la transformación $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Consideremos la densidad lagrangiana de un doblete escalar Φ , con un potencial que más adelante daremos su valor, que satisface la simetría global $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (3.11)$$

el doblete Φ es dado explícitamente en (3.10). Las transformaciones son del tipo [15]:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{cases} e^{-iY\theta} \Phi \\ \mathbf{U} \Phi \end{cases} = e^{-iY\theta} \mathbf{U} \Phi, \quad (3.12)$$

donde $e^{-iY\theta}$ es cualquier elemento del grupo $U(1)_Y$ y \mathbf{U} es cualquier elemento del grupo $SU(2)_L$, los cuales son unitarios $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$. El generador del grupo $U(1)_Y$ es la hipercarga débil Y y los generadores del grupo $SU(2)_L$ son las matrices de Pauli σ^k ($k = 1, 2, 3$). En el Modelo Estándar, las simetrías globales se extienden a simetrías locales

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{cases} e^{-iY\theta(x)} \Phi \\ \mathbf{U}(x) \Phi \end{cases} = e^{-iY\theta(x)} \mathbf{U}(x) \Phi. \quad (3.13)$$

De forma similar a como se calculó la transformación del campo gauge (2.45) para la densidad lagrangiana (2.39), se puede demostrar tomando $e = g_1/2$, que:

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{2}{g_1} \partial_\mu \theta, \quad (3.14)$$

y análogamente, para el campo gauge no abeliano W_μ^k , de forma similar a como se calculó la transformación del campo gauge (2.59) para la densidad lagrangiana (2.52), pero esta vez sin considerar la unidad imaginaria y la constante de acoplamiento como se utilizó en la definición (2.58) por simplicidad, se puede demostrar tomando $g = g_2/2$ que:

$$\mathbf{W}_\mu(x) \rightarrow \mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x) \mathbf{W}_\mu(x) \mathbf{U}^\dagger(x) + i \frac{2}{g_2} (\partial_\mu \mathbf{U}(x)) \mathbf{U}^\dagger(x). \quad (3.15)$$

La forma matricial de

$$\mathbf{W}_\mu(x) = W_\mu^k(x) \sigma^k \quad (3.16)$$

es

$$\mathbf{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

siendo hermítica y de traza cero. Finalmente, de forma similar a (2.44) y (2.57) definimos una derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \left[\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}YB_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu \right] \quad (3.18)$$

que satisface

$$\mathcal{D}'_\mu \Phi' = \left[\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}YB'_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu \right] \Phi' = e^{-iY\theta(x)} \mathbf{U} \mathcal{D}_\mu \Phi. \quad (3.19)$$

Por lo tanto, la densidad lagrangiana invariante gauge local $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para un doblete escalar es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (3.20)$$

donde se puede observar adicionalmente, que \mathcal{L} es invariante bajo las transformaciones de Lorentz dado que B_μ y \mathbf{W}_μ transforman como cuadrivectores covariantes.

3.3 Lagrangiana invariante gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para los leptones

La densidad lagrangiana de interacción débil completa descrita para una familia de leptones (electrones) se puede escribir como la suma algebraica de un término cinético de los campos gauge, un término cinético e interacción de los leptones con los campos gauge, otro cinético y con potencial escalar y finalmente uno de interacción entre leptones y campos escalares, respectivamente sería:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{leptones} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (3.21)$$

Expliquemos en más detalle cada uno de estos términos a continuación.

Los tensores de intensidad de campo para los campos gauge abelianos y no abelianos se definieron en (2.48) y (2.68), con la especificación que para el grupo $SU(2)_L$ la constante de estructura fina son los tensores de Levi-Civita

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\end{aligned}\quad (3.22)$$

La contribución dinámica que aportan a la densidad lagrangiana (3.21) es:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \quad (3.23)$$

Dado que los fermiones izquierdos pertenecen a un doblete de isospín mientras que los fermiones derechos son singletes isospín, y teniendo en cuenta los valores de la hipercarga débil de la tabla 3.3, $Y = -1$ para el doblete L_e y $Y = -2$ para el singlete e_R , la densidad lagrangiana para los leptones toma la forma

$$\mathcal{L}_{leptones} = i \bar{L}_e \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) L_e + i \bar{e}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g_1 B_\mu \right) e_R \quad (3.24)$$

Además de los campos gauge y los leptones, también necesitamos una densidad lagrangiana para los campos de Higgs escalares que se espera conduzcan a una ruptura espontánea de las simetrías locales. La densidad lagrangiana consistente con la asignación de los números cuánticos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ toma la forma

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \left[\left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) \Phi \right]^\dagger \left[\partial^\mu - i \frac{g_1}{2} B^\mu + i \frac{g_2}{2} W^{\mu k} \sigma_k \right] \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (3.25)$$

De hecho, dado que nos gustaría que el campo de Higgs condujera al colapso espontáneo de las simetrías locales, elegimos un potencial que tenga la forma

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (3.26)$$

Además, por supuesto, los fermiones pueden presentar interacciones con el campo escalar, de tipo Yukawa. Esta interacción se describe con la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -h(\bar{e}_R \Phi^\dagger L_e + \bar{L}_e \Phi e_R), \quad (3.27)$$

donde h denota el acoplamiento de Yukawa.

Por lo tanto, escribiendo (3.21) de forma explícita, al reunir los términos (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) y (3.27) obtenemos la densidad lagrangiana para la primera familia leptónica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c) (\partial^\mu W^{\nu a} - \partial^\nu W^{\mu a} - g_2 \epsilon^{abc} W^{\mu b} W^{\nu c}) \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + i \bar{L}_e \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) L_e \\ & + i \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - i g_1 B_\mu) e_R + \left(\left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) \Phi \right)^\dagger \left(\partial^\mu - i \frac{g_1}{2} B^\mu + i \frac{g_2}{2} W^{\mu k} \sigma_k \right) \Phi \\ & - h(\bar{e}_R \Phi^\dagger L_e + \bar{L}_e \Phi e_R) + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como podemos observar, en el Modelo Estándar el neutrino no tiene masa, pues no se considera su quiralidad derecha (ν_{eR}). De igual manera, un lagrangiano similar describe las demás familias leptónicas.

3.4 Rompimiento espontáneo de simetría y el mecanismo de Higgs

El rompimiento espontáneo de simetría es un proceso en el cual un sistema físico en un estado simétrico termina en un sistema asimétrico. En particular, esto puede suceder en sistemas donde las ecuaciones de movimiento contienen simetrías, pero las soluciones en el estado vacío, de más baja energía, no exhiben tal simetría. Cuando el sistema es evaluado en uno de estas soluciones de vacío, la simetría es rota por las perturbaciones alrededor del vacío [18].

Para el caso de simetrías continuas aparecen términos adicionales correspondientes a partículas sin masa cuando la simetría continua se rompe espontáneamente, siendo un resultado general conocido como el teorema de Goldstone, éste establece que para cada ruptura espontánea de una simetría continua la teoría debe contener al menos una partícula sin masa. Los campos sin masa que surgen a través de la ruptura espontánea de una simetría son llamados los bosones de Goldstone [3]. El teorema de Goldstone para teorías con ruptura de simetría global requiere invariancia de Lorentz y espacios de Hilbert con productos escalares definidos positivamente. Las teorías gauge no obedecen a ambos requerimientos simultáneamente. En consecuencia, el teorema de Goldstone no se satisface y actúa el mecanismo de Higgs⁴ [9]. Este mecanismo necesita de un campo escalar (el campo de Higgs) acoplado a un campo gauge para producir términos masivos.

Por ejemplo, consideremos una lagrangiana para el sector escalar con la simetría gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (3.29)$$

con un potencial dado por:

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger \Phi) &= -m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= -m^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si sustituimos, a m^2 por un parámetro positivo μ^2 , y consideramos a $\lambda > 0$, tenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4. \quad (3.31)$$

⁴En honor a uno de sus mayores contribuidores de la teoría, la cual fue estudiada y generalizada a un caso no Abierto por Higgs, Kibble, Guralnik, Hagen, Brout y Englert.

Los extremos del potencial (3.30) se obtienen de la relación

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Phi^\dagger\Phi)}{d|\Phi|} &= -2\mu^2|\Phi| + 4\lambda|\Phi|^3 \\ &= |\Phi|(-2\mu^2 + 4\lambda|\Phi|^2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde la solución trivial, $\Phi = 0$, es un máximo local como se ve en la Figura 3.1

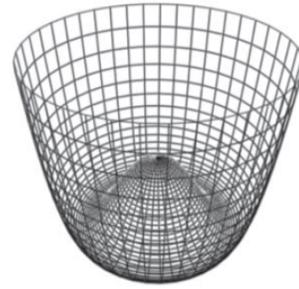


Figura 3.1: Gráfica del potencial $V(|\Phi|)$ cuando $m^2 = \mu^2$ [4].

y la configuración clásica de energía mínima o estado del vacío Φ_0 , mínimo global, esta dada en los puntos de la circunferencia de radio $\mu/\sqrt{2\lambda}$, es decir:

$$\begin{aligned} -2\mu^2 + 4\lambda|\Phi|^2 &= 0, \\ |\Phi_0|^2 &= \frac{\mu^2}{2\lambda}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Esta condición determina únicamente la longitud del vector $|\Phi_0|^2$, siendo su dirección arbitraria. Por convención, su dirección se elige tal que Φ_0 este en la dirección de la componente neutra [3]:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{con } v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \tag{3.34}$$

donde v es el valor esperado del vacío (VEV por sus siglas en inglés). Ahora, para interpretar esta teoría, se tiene en cuenta que un (posible) bosón de Goldstone está asociado con

cada generador del grupo gauge que no deja invariante el vacío. El vacío se deja invariante por un generador G si

$$e^{i\alpha G} \Phi_0 = \Phi_0. \quad (3.35)$$

Para una transformación infinitesimal, (3.35) se convierte en

$$(1 + i\alpha G) \Phi_0 = \Phi_0. \quad (3.36)$$

de modo que la condición para que G deje invariante el vacío es simplemente

$$G\Phi_0 = 0. \quad (3.37)$$

En este caso, los generadores de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ son $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, Y)$. Calculamos fácilmente que [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \\ \sigma_2 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \\ \sigma_3 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0 \\ Y \Phi_0 &= Y_\Phi \Phi_0 = +1 \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sin embargo, si examinamos el efecto del operador de carga eléctrica Q en el estado de vacío (eléctricamente neutro), encontramos que satisface (3.37):

$$\begin{aligned} Q \Phi_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)\Phi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_\Phi + 1 & 0 \\ 0 & Y_\Phi - 1 \end{pmatrix} \Phi_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Los cuatro generadores originales están rotos, pero la combinación lineal correspondiente a la carga eléctrica no. El fotón, por lo tanto, permanecerá sin masa, mientras que los otros tres bosones gauge adquirirán masa. En otras palabras tenemos que la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se rompe hacia la simetría $U(1)_{EM}$.

Si hubiéramos tomado el otro caso, sustituyendo m^2 por un parámetro negativo $-\mu^2$, siendo $\mu^2 > 0$, en (3.31) y considerando nuevamente $\lambda > 0$ tendríamos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (3.40)$$

La configuración clásica de energía mínima o estado del vacío

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} &= 2\mu^2|\Phi| + 4\lambda|\Phi|^3 \\ &= |\Phi|(2\mu^2 + 4\lambda|\Phi|^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

se encuentra en la solución trivial $\Phi = 0$,

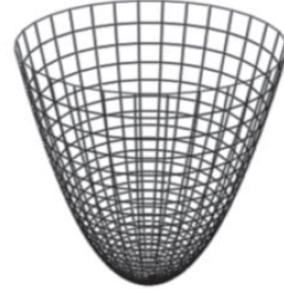


Figura 3.2: Gráfica del potencial $V(|\Phi|)$ cuando $m^2 = -\mu^2$ [4].

por lo que en este caso no se presenta un rompimiento espontáneo de simetría.

3.5 Bosón de Higgs

En las siguientes secciones veremos que al darle masa a los fermiones quedan en función del valor de vacío del campo escalar de Higgs que produce la ruptura de simetría espontánea,

lo cual hace que este valor sea un ingrediente importante en la estructura de la teoría de Glashow-Salam-Weinberg.

Para indagar más sobre este campo, consideramos el gauge unitario $U(x)$, que nos permite parametrizar el campo escalar (3.10) de la siguiente manera

$$\Phi(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} = e^{i\alpha(x)\cdot\vec{\sigma}/v} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Las dos componentes del doblete escalar tienen valores arbitrarios en la parte neutra, en donde $h(x)$ es una fluctuación de un campo real alrededor del valor esperado de vacío con $\langle h(x) \rangle = 0$. Para eliminar $U(x)$ hacemos una transformación gauge. Esto reduce a Φ a un campo con un grado de libertad físico $h(x)$.

Una densidad lagrangiana explícita que permite este valor de vacío es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \\ &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde el potencial proviene de (3.26), tomando $m \equiv \mu$, la energía potencial mínima ocurre en

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \equiv \left(\frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

En el gauge unitario, el término de energía potencial despreciando los términos constantes toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= -\mu^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 \\ &= -\frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por lo que el campo escalar $h(x)$ tiene masa

$$m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v. \quad (3.46)$$

Esta partícula es conocida como el bosón de Higgs, su magnitud depende de v , pero cuyo valor preciso depende del parámetro λ , no especificado, y que como se espera debe ser una constante de acoplamiento renormalizable.

3.6 Masa de los bosones gauge

Regresemos de nuevo con el campo escalar sección 3.2, y como sabemos, la derivada covariante leptónica para Φ es

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) \Phi, \quad (3.47)$$

donde W_μ^k y B_μ son respectivamente, los bosones gauge de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$. Debemos tener en cuenta que las representaciones exponenciales de los grupos gauge $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ comutan una con otra, por ello tienen diferentes constantes de acoplamiento que denominamos g_1 y g_2 .

Los términos de masa de los bosones gauge provienen de la derivada covariante (3.47) aplicada sobre la ecuación (3.25) en el valor del vacío Φ_0 del potencial (3.26); es decir, después del rompimiento espontáneo de simetría.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \Phi_0)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_0) &= |\mathcal{D}_\mu \Phi_0|^2 \\ &= \left| \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - i \frac{g_1}{2} B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + i \frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} v^2 g_2^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8} v^2 (g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3)^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde

$$W_\mu^+ = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad W_\mu^- = \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (3.49)$$

Reescribiendo el segundo término de (3.48) en forma matricial

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi_0)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_0) = \frac{1}{8} v^2 g_2^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} B^\mu & W^{3\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

puede ser diagonalizada de la forma:

$$A' = PAP^{-1} \quad (3.52)$$

donde P es la matriz de diagonalización unitaria que surge de sus autovectores. Los autovalores son $g_1^2 + g_2^2$ y 0. De aquí

$$A' = \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

y la matriz P es:

$$P = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ g_2 & g_1 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Esta matriz satisface la condición $P^T P = \mathbb{1}$, es decir $P^T = P^{-1}$, entonces la diagonalización de A se lleva a cabo realizando el producto $PAP^T = A'$. Con esta idea, en (3.50)

usamos la propiedad $P^T P = 1$ adecuadamente

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_\mu \Phi_0)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_0) &= \frac{1}{8} v^2 g_2^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} B^\mu & W^{3\mu} \end{pmatrix} P^T \left[P \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} P^T \right] P \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{8} v^2 g_2^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Donde se ha definido los nuevos campos físicos

$$Z_\mu = \frac{g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad A_\mu = \frac{g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{3.56}$$

Finalmente la expresión queda de la siguiente manera

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi_0)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_0) = \frac{1}{8} v^2 g_2^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g_1^2 + g_2^2}{8} v^2 Z^\mu Z_\mu \tag{3.57}$$

La estructura de (3.57), nos permite ver los términos de masa de los bosones gauge vectoriales:

- Masa de los bosones W_μ^\pm : $M_W = g_2 \frac{v}{2}$.
- Masa del bosón Z_μ : $M_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{v}{2}$.
- Masa del bosón A_μ : $M_A = 0$, debido a que este no aparece en la expresión (3.57).

Identificaremos el campo A_μ con el potencial vectorial electromagnético.

Después de la ruptura de simetría espontánea el número de grados de libertad de las partículas se conserva. Al principio teníamos 12 grados de libertad:

- 4 (Cuatro) grados de libertad para el doblete (3.10), dos para cada componente,
- 6 (Seis) grados de libertad para los bosones vectoriales iniciales sin masa W_μ^α ,
- 2 (Dos) grados de libertad para el bosón no masivo B_μ ,

y al final, después de la ruptura de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$ se mantienen los 12 grados de libertad:

- 3 (Tres) grados de libertad para el bosón vectorial cargado masivo W_μ^+ ,
- 3 (Tres) grados de libertad para el bosón vectorial cargado masivo W_μ^- ,
- 3 (Tres) grados de libertad para el bosón vectorial neutro masivo Z_μ ,
- 2 (Dos) grados de libertad para el bosón vectorial neutro no masivo A_μ ,
- 1 (Un) grado de libertad para el escalar masivo de Higgs.

Además, podemos simplificar la expresión (3.57) definiendo un ángulo de mezcla, θ_W ,

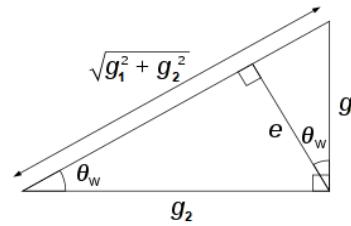


Figura 3.3: Ángulo de Weinberg

el ángulo que aparece en el cambio de base de (W_μ^3, B_μ) a (Z_μ, A_μ) :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

esto es,

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.59)$$

siendo la inversa de (3.58)

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Para simplificar la expresión (3.57) en una forma más eficiente, reescribimos la derivada covariante (3.18) en términos de los estados propios de masa de los campos, utilizando (3.49) y

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^1 + i\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^- = \frac{\sigma^1 - i\sigma^2}{2} \quad (3.61)$$

para identificar una relación para la carga del electrón e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu = & \partial_\mu + i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) + i \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_\mu \left(g_1^2 \frac{Y}{2} - g_2^2 \sigma_3 \right) \\ & + i \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} A_\mu \left(\sigma_3 + \frac{Y}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

De aquí

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.63)$$

y las relaciones (3.59) se pueden simplificar como:

$$g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad \text{y} \quad g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}. \quad (3.64)$$

Se observa que el acoplamiento de todos los bosones débiles están descritos por dos parámetros: la carga del electrón e que ya se conoce su valor, y un nuevo parámetro θ_W . Los acoplamientos inducidos por los intercambios W y Z también envuelven las masas de estas partículas. Sin embargo, estas masas no son independientes, ya que

$$M_W = M_Z \cos \theta_W. \quad (3.65)$$

Todos los procesos de intercambio de W y Z , pueden ser descritos por tres parámetros básicos e , θ_W y M_W .

3.7 Corrientes electrodébiles

En esta sección se construirá la teoría de los quarks de manera análoga al caso leptónico. En el Modelo Estándar, el color de los quarks es la fuente de su interacción fuerte, por lo que consideraremos sólo las interacciones electromagnéticas y débiles de los quarks, sin incluir el color. La teoría de los quarks no está tan bien fundamentada en experimentos como la teoría de los leptones. Esto se debe a que los quarks no pueden aislarse de los hadrones. Los experimentos solo se pueden realizar en sistemas compuestos de quarks, y la densidad lagrangiana básica queda atenuada a bajas energías por las interacciones fuertes. A energías más altas, y especialmente a través de las desintegraciones hadrónicas de los bosones Z , la física electrodébil de los quarks aislados puede discernirse hasta cierto punto.

3.7.1 Corrientes leptónicas

Para ser consistente con las reglas de transformación (3.13), todas las derivadas gauge del grupo $SU(2)_L$ deben tener el mismo factor de acoplamiento $g_2/2$, donde $g_2 \sin \theta_W = e$ al despejar (3.64). Esta es una consecuencia de la naturaleza no Abeliana del grupo $SU(2)_L$. Sin embargo, esta restricción no se presenta para la constante de acoplamiento del grupo $U(1)_Y$. Si hacemos la siguiente sustitución [2]

$$Y g_1 = g' \quad (3.66)$$

al hacer en (3.13) el respectivo cambio, se satisface las siguientes reglas de transformación

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{cases} e^{-i(g'/g_1)\theta(x)}\Phi \\ U(x)\Phi \end{cases} = e^{-i(g'/g_1)\theta(x)}U(x)\Phi, \quad (3.67)$$

con lo cual obtenemos una derivada covariante modificada respecto a (3.18) [2]:

$$\mathcal{D}_\mu = \left[\partial_\mu + i\frac{g'}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu \right] \quad (3.68)$$

donde g' es arbitraria. Para encontrar las consecuencias físicas del acoplamiento de los bosones vectoriales a los leptones usaremos este resultado al introducir las constantes de acoplamiento g_3 y g_4 en la ecuación (3.24) cuyos valores daremos más adelante. Explicitamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{leptones} &= i \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{e_L} & \bar{e}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g_3}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^k \sigma_k \right) \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} + i \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_4 B_\mu) e_R \\ &= i \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{e_L} & \bar{e}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} \partial_\mu + i \frac{g_3}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^3 & i \frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^+ \\ i \frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^- & \partial_\mu + i \frac{g_3}{2} B_\mu - i \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \\ &\quad + i \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_4 B_\mu) e_R\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{leptones} &= i \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + i \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e_L + i \bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu e_L + W_\mu^- \bar{e} \gamma^\mu \nu_e) \\ &\quad - \frac{g_2}{2} W_\mu^3 (\bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \nu_{e_L} - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{g_3}{2} B_\mu (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \nu_{e_L}) - \bar{e}_R \gamma^\mu (g_4 B_\mu) e_R\end{aligned}\tag{3.69}$$

Utilizando (3.60)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{leptones} &= i \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{e_L} + i \bar{e}_L \gamma^\mu \partial_\mu e_L + i \bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu e_L + W_\mu^- \bar{e} \gamma^\mu \nu_{e_L}) \\ &\quad - \frac{g_2}{2} (Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W) (\bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \nu_{e_L} - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \\ &\quad - \frac{g_3}{2} (-Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W) (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \nu_{e_L}) \\ &\quad - g_4 (-Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W) \bar{e}_R \gamma^\mu e_R\end{aligned}\tag{3.70}$$

Reagrupando términos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{leptones} = & i\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e + i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu e_L + W_\mu^-\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_e) \\
& - Z_\mu \left[\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu \left(\frac{g_2 \cos \theta_W}{2} - \frac{g_3 \sin \theta_W}{2} \right) \nu_{e_L} + \bar{e}_L\gamma^\mu \left(-\frac{g_2 \cos \theta_W}{2} - \frac{g_3 \sin \theta_W}{2} \right) e_L \right] \\
& - A_\mu \left[\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu \left(\frac{g_2 \sin \theta_W}{2} + \frac{g_3 \cos \theta_W}{2} \right) \nu_{e_L} + \bar{e}_L\gamma^\mu \left(-\frac{g_2 \sin \theta_W}{2} + \frac{g_3 \cos \theta_W}{2} \right) e_L \right] \\
& + Z_\mu \bar{e}_R\gamma^\mu(g_4 \sin \theta_W)e_R - A_\mu \bar{e}_R\gamma^\mu(g_4 \cos \theta_W)e_R
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Al considerar los factores del campo A_μ elegiremos g_3 y g_4 de tal modo que la carga del neutrino sea $0e$ y la del electrón sea $-e$:

$$g_3 \cos \theta_W = -g_2 \sin \theta_W = -e, \tag{3.72}$$

y

$$g_4 \cos \theta_W = -g_2 \sin \theta_W = -e. \tag{3.73}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{leptones} = & i\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{e_L} + i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu e_L + W_\mu^-\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{e_L}) \\
& - g_2 Z_\mu \left[\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu \left(\frac{\cos \theta_W}{2} + \frac{\tan \theta_W \sin \theta_W}{2} \right) \nu_{e_L} + \bar{e}_L\gamma^\mu \left(-\frac{\cos \theta_W}{2} + \frac{\tan \theta_W \sin \theta_W}{2} \right) e_L \right. \\
& \left. + \bar{e}_R\gamma^\mu \left(2\frac{\tan \theta_W \sin \theta_W}{2} \right) e_R \right] + e A_\mu [\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R]
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{leptones} = & i\bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{e_L} + i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R - g_2(W_\mu^+ J_{W^+}^\mu + W_\mu^- J_{W^-}^\mu) \\
& - g_2 Z_\mu J_Z^\mu - e A_\mu J_{EM}^\mu
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Observamos de (3.75) que el Modelo Estándar tiene, además de la corriente electromagnética, corrientes débiles cargadas y neutras, dadas por

$$\begin{aligned}
 J_{W^+}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu e_L \\
 J_{W^-}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{e_L} \\
 J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_W} \left(\bar{\nu}_{e_L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_{e_L} + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \theta_W}{2} \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\sin^2 \theta_W) e_R \right) \\
 J_{EM}^\mu &= \bar{e}_L \gamma^\mu (-1) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (-1) e_R
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

3.7.2 Corrientes de quarks

Comencemos con la primera familia de quarks. Las componentes izquierdas u_L y d_L de los campos de quark se agrupan en un doblete $SU(2)_L$,

$$L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \tag{3.77}$$

mientras que u_R y d_R , como en el caso de e_R , no sufren cambios por las transformaciones $SU(2)_L$.

Solo hay una manera de hacer que la parte dinámica de la densidad lagrangiana relacionada con los campos gauge y los quarks sea invariante $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y es permitiendo que sea análoga a (3.25)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_q = & i \bar{L} \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} Y^L B_\mu + i \frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right] L + i \bar{u}_R \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} Y_u^R B_\mu \right] u_R \\
 & + i \bar{d}_R \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} Y_d^R B_\mu \right] d_R.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Nuevamente el acoplamiento con el campo \mathbf{W}_μ se determina únicamente por la simetría $SU(2)_L$ y los acoplamientos al campo B_μ por la simetría $U(1)_Y$. Para cumplir con las leyes de transformación $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para los campos de quarks se reemplaza los valores de la hipercarga dados en la tabla 3.3.

Usando las ecuaciones (3.17) y (3.60) en (3.74) se puede reescribir la densidad lagrangiana (3.78) en términos de los campos W_μ^\pm , Z_μ y A_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & i\bar{L}\gamma^\mu \left[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + i\frac{e}{2\sin\theta_W} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + i\frac{e}{6} \begin{pmatrix} A_\mu - Z_\mu\tan\theta_W & 0 \\ 0 & A_\mu - Z_\mu\tan\theta_W \end{pmatrix} \right] L \\ & + i\bar{u}_R\gamma^\mu \left[\partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu - i\frac{2e}{3}Z_\mu\tan\theta_W \right] u_R + i\bar{d}_R\gamma^\mu \left[\partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu + i\frac{e}{3}Z_\mu\tan\theta_W \right] d_R \end{aligned} \quad (3.79)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & i\bar{u}_L\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu + i\frac{e}{6}Z_\mu(3\cot\theta_W - \tan\theta_W) \right) u_L + i\bar{u}_L\gamma^\mu \left(i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^+ \right) d_L \\ & + i\bar{d}_L\gamma^\mu \left(i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^- \right) u_L + i\bar{d}_L\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu - i\frac{e}{6}Z_\mu(\tan\theta_W + 3\cot\theta_W) \right) d_L \\ & + i\bar{u}_R\gamma^\mu \left[\partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu - i\frac{2e}{3}Z_\mu\tan\theta_W \right] u_R + i\bar{d}_R\gamma^\mu \left[\partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu + i\frac{e}{3}Z_\mu\tan\theta_W \right] d_R \end{aligned} \quad (3.80)$$

Al reorganizar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & i\bar{u}_L\gamma^\mu \partial_\mu u_L + i\bar{d}_L\gamma^\mu \partial_\mu d_L + i\bar{d}_R\gamma^\mu \partial_\mu d_R + i\bar{u}_R\gamma^\mu \partial_\mu u_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{u}_L\gamma^\mu d_L + W_\mu^- \bar{d}_L\gamma^\mu u_L \right) \\ & - g_2 Z_\mu \left[\bar{u}_L\gamma^\mu \left(\frac{\cot\theta_W \sin\theta_W}{2} - \frac{\tan\theta_W \sin\theta_W}{6} \right) u_L \right. \\ & + \bar{d}_L\gamma^\mu \left(-\frac{\tan\theta_W \sin\theta_W}{6} - \frac{\cot\theta_W \sin\theta_W}{2} \right) d_L \\ & \left. + \bar{u}_R\gamma^\mu \left(-\frac{2}{3}\tan\theta_W \sin\theta_W \right) u_R + \bar{d}_R\gamma^\mu \left(\frac{1}{3}\tan\theta_W \sin\theta_W \right) d_R \right] \\ & - eA_\mu \left[\bar{u}_L\gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u_L + \bar{d}_L\gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d_L + \bar{d}_R\gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d_R + \bar{u}_R\gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u_R \right] \end{aligned} \quad (3.81)$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q = & i\bar{u}_L \gamma^\mu \partial_\mu u_L + i\bar{d}_L \gamma^\mu \partial_\mu d_L + i\bar{d}_R \gamma^\mu \partial_\mu d_R + i\bar{u}_R \gamma^\mu \partial_\mu u_R \\ & - g_2 (W_\mu^+ J_{W^+}^\mu + W_\mu^- J_{W^-}^\mu) - g_2 Z_\mu J_Z^\mu - e A_\mu J_{EM}^\mu\end{aligned}\quad (3.82)$$

donde

$$\begin{aligned}J_{W^+}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \\ J_{W^-}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\ J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_W} \left[\bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) d_L \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) d_R \right] \\ J_{EM}^\mu &= \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d_R + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u_R\end{aligned}\quad (3.83)$$

Sin embargo, el Modelo Estándar postula tres familias, o generaciones, de quarks.

Por lo tanto, consideremos tres dobletes izquierdos $SU(2)_L$:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u_2 \\ d_2 \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \end{pmatrix}_L, \quad (3.84a)$$

y seis singletes derechos:

$$\begin{aligned}u_R &\equiv u_{R_1}, \quad d_R \equiv d_{R_1}; \\ c_R &\equiv u_{R_2}, \quad s_R \equiv d_{R_2}; \\ t_R &\equiv u_{R_3}, \quad b_R \equiv d_{R_3}.\end{aligned}\quad (3.84b)$$

Para tener una notación más compacta. Los denotaremos por

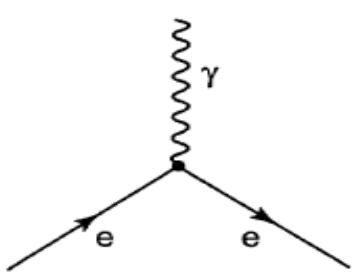
$$\begin{pmatrix} u_k \\ d_k \end{pmatrix}_L, \quad u_{R_k}, d_{R_k} \quad \text{con } k = 1, 2, 3. \quad (3.85)$$

Como en el caso de los leptones la lagrangiana de las tres generaciones de quarks, se toma como una suma del tipo (3.82) para las tres generaciones

$$\mathcal{L}_{quark} = \sum_{k=1}^3 \mathcal{L}_q(u_k, d_k). \quad (3.86)$$

3.7.3 Diagramas de Feynman

Los diagramas de Feynman son esquemas intuitivos que representan partículas que colisionan o se descomponen a lo largo de su trayectoria, proporcionando técnicas y métodos para calcular teóricamente cantidades medidas experimentalmente, como lo veremos en el capítulo 4. El acoplamiento mínimo de la interacción de partículas elementales esta representado por los vértices primitivos de estos diagramas.



(a) Vértice fundamental del fotón

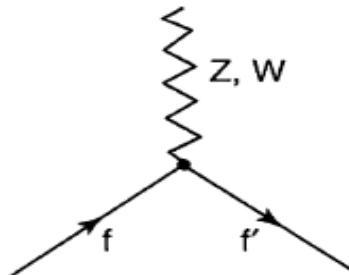
(b) Vértice fundamental de los bosones Z y W

Figura 3.4: Fuente: [13]

En nuestro caso analizamos acoplamientos de los fermiones con los bosones γ , W^- , W^+ y Z^0 . Procesos más complicados se representan con la combinación de dos o más replicas de estos vértices.

El vértice leptónico fundamental del bosón W cambia la carga de los fermiones, como se representa en los siguientes diagramas:

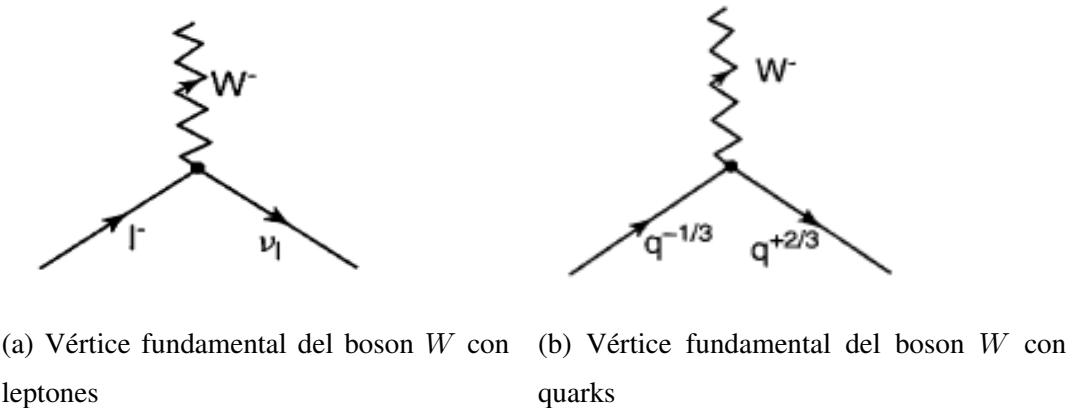


Figura 3.5: Fuente: [13]

Aquí un electrón, muón o tau se convierte en su neutrino asociado, con la absorción de un W^- (o la absorción de un W^+). Y un quark se convierte en la respectiva componente de su doblete asociado, ver Tabla 3.2.

3.8 Masas para los fermiones

3.8.1 Masa de los leptones

Como es bien sabido, desde un principio sabíamos de la dificultad de no poder agregar a la densidad lagrangiana términos de masa para los leptones a fin de conservar la invariancia gauge. Recurriendo una vez más al mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría, podemos resolver este inconveniente a fin de tener partículas masivas en el sector fermiónico. Asumiendo una vez más que el campo escalar Φ adquiere un valor esperado en el vacío dado por la ecuación (3.34). Como vimos, este campo escalar necesita ser un espinor bajo $SU(2)_L$ y tener una hipercarga $Y = 1$ para producir el patrón correcto de masas de los bosones gauge. Con estos números cuánticos, podemos también escribir un acoplamiento invariante gauge relacionando L_e , e_R , y Φ , como se ve a continuación

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\lambda_e \bar{L}_e \Phi e_R - \lambda_e \bar{e}_R \Phi^\dagger L_e. \quad (3.87)$$

Aquí los índices de los dobletes L y Φ de $SU(2)_L$ están contraídos; y se observa también siempre que las hipercargas Y de los diferentes campos sumen cero. El parámetro λ_e es una nueva constante de acoplamiento adimensional. Si reemplazamos Φ por su valor esperado de vacío (3.34), obtenemos:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v \bar{e}_L e_R - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v \bar{e}_R e_L, \quad (3.88)$$

que es un término de masa para el electrón. El tamaño de la masa esta ajustado por el valor esperado de vacío de Φ que acompaña a la nueva constante de acoplamiento adimensional:

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v. \quad (3.89)$$

Ya que la masa del electrón es proporcional a v , se debería esperar que las masas del electrón y el bosón W sean del mismo orden de magnitud. De hecho, tomando los valores observados vemos que $m_e/m_W \sim 6 \times 10^{-6}$. Ya que λ_e es un acoplamiento renormalizable, debe ser introducido en la teoría. Entonces en la teoría de Glashow-Salam-Weinberg se permite que el electrón sea muy liviano, pero no puede explicar por qué el electrón es así de liviano en comparación del bosón W . Las masas de μ y τ se encuentran de forma análoga.

Es interesante observar que no hay términos dentro de la estructura que hemos descrito para dar masa al neutrino. Si queremos generalizar la ecuación (3.87) para permitir términos de masa para el neutrino, tendríamos que introducir un campo fermiónico nuevo ν_R que sea invariante bajo $U(1)_Y$. Entonces podríamos escribir el acoplamiento del Higgs mediante una matriz 2×2 perteneciente a $SU(2)_L$ con este propósito

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

que podría dar masa a ν_e , presumiblemente comparable a la del electrón

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\lambda_\nu (\bar{L}_e \varepsilon \Phi) \nu_R - \lambda_\nu \bar{\nu}_R (\Phi^\dagger \varepsilon^T L_e). \quad (3.91)$$

Pero de los resultados experimentales conocemos que la masa del electrón es extremadamente pequeña; la masa del ν_e se sabe que es menor que 10eV. Esta supresión extrema de

la masa del neutrino se explica naturalmente si los estados ν_R no existen. Esta suposición también implica que no hay transición entre las diferentes generaciones de leptones. A continuación veremos que este fenómeno se presenta en los quarks.

3.8.2 Masa de los quarks y la matriz CKM

Para mantener la capacidad de renormalización, debemos retener la simetría gauge y dar masa a los quarks mediante el acoplamiento al campo de Higgs pero no lo podemos hacer de forma análoga a la sección anterior puesto que la evidencia experimental nos dice que entre las tres generaciones de quarks se presentan acoplamientos. Para los quarks d_k esto es sencillo. La forma más general que podríamos considerar que conserva las simetrías gauge es

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(d) = - \sum_{i,j=1}^3 [\lambda_{ij}^d (\bar{L}_i \Phi) d_{R_j} + \lambda_{ij}^{d*} \bar{d}_{R_j} (\Phi^\dagger L_i)], \quad (3.92)$$

después de la ruptura de la simetría en

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

del campo de Higgs Φ ,

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(d) = - \sum_{i,j=1}^3 \left[\lambda_{ij}^d \begin{pmatrix} \bar{u}_{L_i} & \bar{d}_{L_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} d_{R_j} + \lambda_{ij}^{d*} \bar{d}_{R_j} \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{L_i} \\ d_{L_i} \end{pmatrix} \right], \quad (3.93)$$

esto da el término de masa para los quarks tipo d :

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(d) = - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^3 [\lambda_{ij}^d \bar{d}_{L_i} d_{R_j} + \lambda_{ij}^{d*} \bar{d}_{R_j} d_{L_i}]. \quad (3.94)$$

A priori, λ_{ij}^d son las componentes de una matriz compleja arbitraria λ^d de dimensión 3×3 . Esta matriz siempre se puede poner en forma diagonal real con la ayuda de dos

matrices unitarias compuestas por los vectores propios de la matriz, a fin de que podamos escribir

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\lambda}^d = \mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{m}^d \mathbf{D}_R, \quad (3.95)$$

donde \mathbf{m}^d es una matriz diagonal real, y \mathbf{D}_L , \mathbf{D}_R son matrices unitarias. Si los elementos diagonales son distintos, como parece ser experimentalmente el caso, \mathbf{D}_L , \mathbf{D}_R son únicos, excepto que ambos pueden multiplicarse a la izquierda por la misma matriz de factor de fase no físicas que pueden ser absorbidas por los campos derechos, ya que son singletes

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Como habíamos mencionado, en el Modelo Estándar los neutrinos tienen masa cero, sin embargo, para los quarks tipo u , que aquí forman un doblete izquierdo, necesitamos un término masivo. Para este propósito, usemos la matriz 2×2 en el espacio $SU(2)_L$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{AA} & \varepsilon_{AB} \\ \varepsilon_{BA} & \varepsilon_{BB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Una expresión invariante $SU(2)_L$ adecuada que podemos construir a partir de los dobletes Φ y L_i es $(\Phi^T \varepsilon L_i)$, donde $\Phi^T = (\Phi_A, \Phi_B)$ es la transpuesta de Φ .

Entonces vemos que

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(u) = - \sum_{i,j=1}^3 [\lambda_{ij}^u (\bar{L}_i \varepsilon \Phi^*) u_{R_j} + \lambda_{ij}^{u*} \bar{u}_{R_j} (\Phi^T \varepsilon L_i)], \quad (3.98)$$

donde λ_{ij}^u son las componentes de otra matriz compleja también arbitraria $\boldsymbol{\lambda}^u$ de dimensión 3×3 . En el proceso de ruptura de simetría, los quarks tipo u adquieren masa

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(u) = - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^3 [\lambda_{ij}^u \bar{u}_{L_i} u_{R_j} + \lambda_{ij}^{u*} \bar{u}_{R_j} u_{L_i}], \quad (3.99)$$

que es, como esperamos, similar a $\mathcal{L}_{masa}(d)$, que también conserva las simetrías gauge. De igual forma, \mathbf{m}^u se puede llevar a una forma diagonal real de manera similar:

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\lambda}^u = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{m}^u \mathbf{U}_R, \quad (3.100)$$

donde \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R son matrices unitarias, y \mathbf{m}^u es diagonal.

\mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R pueden multiplicarse a la izquierda por una matriz de factor de fase no físicas que pueden ser absorbidas por los campos derechos, ya que son singletes, digamos

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_3} \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

La teoría se describe más directamente en términos de los campos de quark en la base de masas, para los cuales las matrices de masa son diagonales, de modo que definimos los seis campos de quarks de la forma:

$$\begin{aligned} d'_{L_i} &= D_{L_{ij}} d_{L_j}, & d'_{R_i} &= D_{R_{ij}} d_{R_j} \\ u'_{L_i} &= U_{L_{ij}} u_{L_j}, & u'_{R_i} &= U_{R_{ij}} u_{R_j} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Por lo tanto, con las contribuciones de masa de los quarks, \mathcal{L} toma la forma:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}(\text{quarks}) = - \sum_{i=1}^3 [m_i^d (\bar{d}'_{L_i} d'_{R_i} + \bar{d}'_{R_i} d'_{L_i}) + m_i^u (\bar{u}'_{L_i} u'_{R_i} + \bar{u}'_{R_i} u'_{L_i})], \quad (3.103)$$

donde identificamos los espinores de Dirac.

$$\begin{pmatrix} u'_{L_1} \\ u'_{R_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'_{L_2} \\ u'_{R_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'_{L_3} \\ u'_{R_3} \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

con los quarks u , c y t , respectivamente, y los espinores de Dirac

$$\begin{pmatrix} d'_{L_1} \\ d'_{R_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d'_{L_2} \\ d'_{R_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d'_{L_3} \\ d'_{R_3} \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

con los quarks d , s y b , para que podamos reescribir $\mathcal{L}_{masa}(\text{quarks})$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Yukawa}(\text{quarks}) = & -[m^d(\bar{d}'_L d'_R + \bar{d}'_R d'_L) + m^u(\bar{u}'_L u'_R + \bar{u}'_R u'_L)] \\ & - [m^s(\bar{s}'_L s'_R + \bar{s}'_R s'_L) + m^c(\bar{c}'_L c'_R + \bar{c}'_R c'_L)] \\ & - [m^b(\bar{b}'_L b'_R + \bar{b}'_R b'_L) + m^t(\bar{t}'_L t'_R + \bar{t}'_R t'_L)].\end{aligned}\quad (3.106)$$

La anterior expresión corresponden a los seis fermiones masivos de Dirac.

A continuación, por simplicidad se quitan las primas, y en lo que sigue del texto u_k y d_k , con $k = 1, 2, 3$, denotan los campos de quarks físicos.

En las lagrangianas (3.78) y (3.86), los términos “diagonal” no mezclan los quarks tipo u y tipo d y son invariantes bajo las transformaciones unitarias. Sin embargo, los términos que surgen de los elementos fuera de la diagonal de la matriz $W_\mu^k \sigma_k$, mezclan quarks u y d a través de su acoplamiento a los campos de bosones W^\pm , y estos términos cambian profundamente. El resto de términos de las ecuaciones (3.75) y (3.82) se pueden sumar sin inconvenientes.

En (3.81), el término de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + W_\mu^- \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) \quad (3.107)$$

cuando se escribe en términos de los campos de quark físicos, se convierten en

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{qW} = & -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu d_L \\ \gamma^\mu s_L \\ \gamma^\mu b_L \end{pmatrix} \\ & -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \gamma^\mu u_L \\ \gamma^\mu c_L \\ \gamma^\mu t_L \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.108)$$

donde $\mathbf{V} = \mathbf{U}_L \mathbf{D}_L^\dagger$

Como el producto de dos matrices unitarias es unitario, \mathbf{V} es una matriz unitaria de dimensión 3×3 . Los elementos de \mathbf{V} no están determinados dentro de la teoría. Es en esta

matriz donde residen tres ángulos de mezcla y una fase de la violación CP, parámetros del Modelo Estándar.

Una matriz unitaria $n \times n$ está especificada por los parámetros n^2 , por lo que aparentemente tenemos nueve parámetros para medir experimentalmente. Sin embargo, cinco de estos pueden ser absorbidos en las fases no físicas de los campos de quark, a través de las matrices de factor de fase asociadas con \mathbf{D}_L y \mathbf{U}_L . (Hay cinco, en lugar de seis, fases no físicas ya que solo aparecen diferencias de fase en \mathbf{V} . Por ejemplo $V_{ud} = e^{i(\beta_u - \alpha_d)} V_{ud}^0$).

Cuando se extraen los factores de la fase de los quarks, la matriz resultante \mathbf{V}^0 depende solo de cuatro parámetros físicos. Se llama matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (matriz CKM).

Parametrización de la matriz CKM

Una matriz de rotación 3×3 también es una matriz unitaria. Se puede construir una matriz unitaria más general como producto de matrices de rotación y matrices unitarias formadas por factores de fase. No hay una parametrización única de la matriz CKM por este método. Lo que utiliza el *Particle Data Group* [14] es:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.109) \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Los cuatro parámetros son los tres ángulos de rotación $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ y la fase δ .

Evidentemente, si $\sin \theta_{13} = 0$ o $\sin \delta = 0$, entonces \mathbf{V} es real. Menos evidente, si $\sin \theta_{12} = 0$, entonces \mathbf{V} se hace real redefiniendo los campos de quark

$$e^{i\delta} u_1 = u_1, \quad e^{i\delta} d_1 = d_1 \quad (3.110)$$

y si $\sin \theta_{23} = 0$, entonces \mathbf{V} se hace real redefiniendo

$$e^{-i\delta} u_1 = u_1, \quad e^{-i\delta} d_1 = d_1 \quad (3.111)$$

Una redefinición general de las fases de quark,

$$d_i \rightarrow e^{i\alpha_i} d_i, \quad u_i \rightarrow e^{i\beta_i} u_i \quad (3.112)$$

cambiará los elementos de la matriz de \mathbf{V} por

$$V_{ij} \rightarrow e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij} \quad (3.113)$$

Usando esta libertad, los tres ángulos de rotación se pueden elegir para que se encuentren en el primer cuadrante.

Jarlskog (1985) brinda una condición importante, necesaria y suficiente para determinar si, dada una matriz unitaria \mathbf{V} , es posible hacerla real mediante tales cambios. Considera la parte imaginaria de cualquiera de los nueve productos, $V_{ij} V_{kl} V_{kj}^* V_{il}^*$ con $i \neq k$ y $j \neq l$, por ejemplo

$$\text{Im}(V_{11} V_{22} V_{21}^* V_{12}^*) = J \quad (3.114)$$

J es invariante bajo un cambio de fase general, de modo que si J no es cero, entonces no puede hacerse así, y por lo tanto \mathbf{V} no puede hacerse real. Las nueve cantidades son iguales a $\pm J$. En la parametrización de la matriz CKM,

$$J = \cos_{12} \cos_{13}^2 \cos_{23} \sin_{12} \sin_{13} \sin_{23} \sin \delta. \quad (3.115)$$

Las condiciones ya obtenidas para hacer a la matriz CKM real están contenidas en la condición $J = 0$.

Una vez arreglada la matriz CKM, solo queda una simetría $U(1)_Y$ global que la deja sin cambios. Los seis campos de quark, izquierdo y derecho, se pueden multiplicar por el mismo factor de fase. Como consecuencia, solo se conserva el número de quark total actual y, por lo tanto, se conserva el número de quark total. A nivel macroscópico, esto se observa como conservación del número bariónico.

Valores de la matriz CKM

No existe una teoría que relacione los parámetros de (3.109), así como tampoco existe una teoría que relacione las masas de quark. Los parámetros de la matriz CKM deben determinarse a partir del experimento. La matriz total de acuerdo a *Particle Data Group* [14] es:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359 \pm 0.00010 & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896 \pm 0.00023 & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

y el valor de (3.115) es

$$J = (3.18 \pm 0.15) \times 10^{-5} \quad (3.117)$$

Simetría CP y la matriz CKM

Ahora mostraremos que, si la matriz CKM no puede hacerse real mediante una redefinición de las fases de los quarks el Modelo Estándar no posee la simetría CP.

La teoría electrodébil de Glashow-Salam-Weinberg es invariante bajo la operación CP. Del mismo modo, CP es una simetría de cada término en el Modelo Estándar de las interacciones débiles y electromagnéticas de los quarks, excepto aquellos términos que dan la interacción entre los quarks y los bosones W . Estos son los términos que involucran la matriz CKM.

Teniendo en cuenta que la densidad lagrangiana de Glashow-Salam-Weinberg no tiene simetría de inversión espacial, ya que sólo las componentes izquierdas de las funciones de

onda leptónica están acopladas al campo gauge \mathbf{W}_μ del grupo $SU(2)_L$, las transformaciones CP de los campos involucrados se transforman de acuerdo a:

$$\begin{pmatrix} W_0^3 & W_0^1 - iW_0^2 \\ W_0^1 + iW_0^2 & -W_0^3 \end{pmatrix}^{CP} = - \begin{pmatrix} W_0^3 & W_0^1 + iW_0^2 \\ W_0^1 - iW_0^2 & -W_0^3 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

$$\begin{pmatrix} W_i^3 & W_i^1 - iW_i^2 \\ W_i^1 + iW_i^2 & -W_i^3 \end{pmatrix}^{CP} = \begin{pmatrix} W_i^3 & W_i^1 + iW_i^2 \\ W_i^1 - iW_i^2 & -W_i^3 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

Resulta que

$$\begin{aligned} W_0^{+CP} &= -W_0^-, & W_i^{+CP} &= W_i^- \\ Z_0^{CP} &= -Z_0, & Z_i^{CP} &= Z_i \\ A_0^{CP} &= -A_0, & A_i^{CP} &= A_i. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Las derivadas espaciales de los campos son reemplazados por sus negativas.

Los campos de quark se transforman como todos los campos de fermiones:

$$(q_L^\dagger)^{CP} = -iq_L^T \gamma^2, \quad (q_L)^{CP} = -i\gamma^2 q_L^* \quad (3.121)$$

Para demostrar cómo se viola la simetría CP se analizará los términos \mathcal{L}_{qW} , que escribimos como

$$\begin{aligned} -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} [\bar{u}_{L_i} \gamma^\mu V_{ij} d_{L_j} W_\mu^+ + \bar{d}_{L_j} \gamma^\mu V_{ji}^* u_{L_i} W_\mu^-] \\ (i = u, c, t; j = d, s, b) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Al reemplazar los campos por sus transformaciones CP da

$$-\frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} [-u_{L_i}^T \gamma^\mu \gamma^0 V_{ij} d_{L_j}^* W_\mu^- - d_{L_j}^T \gamma^\mu \gamma^0 V_{ji}^* u_{L_i}^* W_\mu^+] \quad (3.123)$$

donde, se ha utilizado los resultados

$$(\gamma^2)^2 = -1, \quad (\gamma^2)^* = -\gamma^2, \quad \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = \gamma^0. \quad (3.124)$$

Al transponer esta expresión con respecto a los índices de espinor, introducimos un signo menos de los campos de fermión anticomutantes y obtenemos la expresión transformada de CP

$$-\frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} [\bar{d}_{L_j} \gamma^\mu V_{ji} u_{L_i} W_\mu^- + \bar{u}_{L_i} \gamma^\mu V_{ij}^* d_{L_j} W_\mu^+]. \quad (3.125)$$

Esto es lo mismo que el término original (3.122) si y solo si V es real. La evidencia experimental de la ruptura de la simetría CP se hizo evidente por primera vez en 1964, en la descomposición del mesón $K^0(d\bar{s})$. Es un hecho interesante que los efectos de la violación CP en el Modelo Estándar son proporcionales a J .

Capítulo 4

Decaimiento del muón

El decaimiento del muón es de suma importancia en el Modelo Estándar debido a que solo involucra campos leptónicos, de tal modo que la física que interviene no se ve oscurecida por fenómenos de interacción fuerte, siendo uno de los procesos más sencillos de analizar. Por este motivo se lo eligió, además de que involucra algunos de los temas que se han venido desarrollando. En el decaimiento lo que se desea conocer es el tiempo de vida de la partícula en cuestión. Por ejemplo, el tiempo de vida del muón. Si consideramos que se está moviendo, por el efecto de la dilatación del tiempo vive más, pero no todos los muones viven lo mismo por lo que se debe calcular el tiempo de vida media de una muestra grande.

Interacción	Fuerza relativa	Alcance
Gravitación	10^{-41}	∞
Nuclear débil	10^{-15}	$\ll 1\text{fm}$
Electromagnetismo	10^{-2}	∞
Nuclear fuerte	1	$\approx 1\text{fm}$

Tabla 4.1: Comparación de interacciones conocidas [1]

El decaimiento es una de las tres pruebas experimentales de la interacción de las partículas elementales, las otras son los estados ligados y la dispersión. En cuanto a la mecánica cuántica no relativista (en la formulación de Schrödinger) se adapta bien para problemas de estados ligados. Mientras que la teoría relativista (en la formulación de Feynman) se usa para describir decaimientos y dispersiones [13].

4.1 Decaimiento de una partícula en n partículas

Las partículas elementales no tienen memoria, por lo que la probabilidad de que un muón decaiga al siguiente microsegundo es independiente de hace cuanto fue creado. El parámetro de interés, es la tasa de decaimiento, Γ , la probabilidad por unidad de tiempo que cualquier partícula se desintegre. Si tenemos un gran número de muones, digamos, $N(t)$, en un tiempo t , entonces $N(t)\Gamma dt$ de ellos debería decaer en el siguiente instante dt . En consecuencia, se disminuiría el número de muones restantes

$$dN = -N(t)\Gamma dt, \quad (4.1)$$

luego

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}. \quad (4.2)$$

Evidentemente, el número de partículas que quedan disminuyen exponencialmente con el tiempo. Respecto al tiempo de vida es simplemente el reciproco de la tasa de decaimiento:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \quad (4.3)$$

Actualmente sabemos que muchas partículas pueden decaer de muchas formas diferentes. La partícula π^+ , por ejemplo, usualmente decae a $\mu^+ + \nu_\mu$, pero algunas veces lo hace en $e^+ + \nu_e$; ocasionalmente π^+ decae a $\mu^+ + \nu_\mu + \gamma$, y todas ellas sabemos que terminan en $e^+ + \nu_e + \pi^0$. En tales circunstancias, la tasa de decaimiento total es la suma de las tasas de decaimiento individual:

$$\Gamma_{tot} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i, \quad (4.4)$$

y el tiempo de vida de la partícula es el reciproco de Γ_{tot} :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}}. \quad (4.5)$$

En adición a τ , también podemos calcular las tasas de las diferentes ramificaciones, esto es, la fracción de que todas las partículas de un tipo dado decaigan de tal modo. Las tasas de ramificación están determinadas por las tasas de decaimiento:

$$\text{Tasa de decaimiento para el } i\text{-esimo modo} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}. \quad (4.6)$$

La esencia de cualquier calculo posterior como vemos radica en determinar la tasa de decaimiento en un modo específico Γ_i . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que una partícula m_1 desde su marco de referencia está en reposo. Si decae en n partículas

$$m_1 \longrightarrow m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_n, \quad (4.7)$$

tendríamos que su tasa de decaimiento esta dada por la fórmula, recordando que trabajaremos en unidades naturales $\hbar = 1$ y $c = 1$ [13]:

$$\Gamma = \frac{S}{2m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n) \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2) \Theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \quad (4.8)$$

donde m_j es la masa de la j -esima partícula, p_j es su respectivo cuadrimomento y Θ es la función paso. S es un factor estadístico que corrige el conteo doble cuando hay partículas idénticas en el estado final: para cada uno de esos grupos s de partículas, S aporta un factor de $1/s!$. Por ejemplo, si $a \rightarrow b + b + c + c + c$, entonces $S = (1/2!)(1/3!) = 1/12$. En caso de que no haya partículas idénticas en el estado final, entonces $S = 1$.

La dinámica de las partículas esta contenida en la amplitud, $\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ que es una función de los momentos y se evalúa con los diagramas de Feynman apropiados. El resto esta en el espacio fase, se debe integrar sobre todos los cuadrimomentos salientes, sujetos a tres ligaduras cinemáticas:

1. Cada partícula saliente se encuentra en su capa de masa $p_j^2 = m_j^2$, o de forma equivalente $E_j^2 - \mathbf{p}_j^2 = m_j^2$, lo cual es el argumento de la función delta $\delta(p_j^2 - m_j^2)$
2. Cada energía saliente es positiva: $p_j^0 = E_j > 0$. Esto se debe al argumento de la función paso Θ .

3. La energía y el momentum se conservan: $p_1 = p_2 + p_3 + \dots + p_n$. Esto se garantiza por el factor $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n)$.

Así que las tres restricciones cinemáticas naturales son en un principio igualmente probables. Con seguridad, la dinámica contenida en \mathcal{M} favorece algunas combinaciones de momentos sobre otras, pero con esa modulación se pueden sumar todas las posibilidades. Respecto a las dos funciones de onda \bar{u} , se aplica la siguiente regla

$$\text{cada } \delta \text{ tiene un factor } 2\pi, \text{ y cada diferencial } d \text{ tiene un factor } \frac{1}{2\pi}. \quad (4.9)$$

El elemento de volumen cuadri-dimensional puede ser separado en la parte temporal y la espacial

$$d^4p = dp^0 d^3\mathbf{p}. \quad (4.10)$$

A continuación, omitiremos el subíndice j por simplicidad, este argumento aplica a cada uno de los momentos salientes. La integral¹ sobre p^0 puede ser realizada inmediatamente, aplicando la función delta

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta[(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2]. \quad (4.11)$$

Ahora, aplicando la siguiente propiedad de la función delta

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a > 0) \quad (4.12)$$

tenemos que

$$\Theta(p^0)\delta[(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2] = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\delta\left(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\right). \quad (4.13)$$

¹En total habría $4(n - 1)$ integrales correspondientes a los momentos salientes.

Así que la función paso Θ elimina los picos en $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, mientras que es 1 en $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ por lo que la ecuación (4.8) se reduce a:

$$\Gamma = \frac{S}{2m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n) \prod_{j=2}^n \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}} \frac{d^4 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \quad (4.14)$$

con

$$p_j^0 \longrightarrow \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2} \quad (4.15)$$

donde aparezca, ya sea en \mathcal{M} o en el resto de la función delta.

4.2 La amplitud \mathcal{M}

Para poder calcular la tasa de decaimiento es necesario conocer dos cosas [13]: (i) La amplitud \mathcal{M} del proceso y (ii) la densidad de estados finales disponible. La amplitud contiene toda la información dinámica, y para poder calcularla se necesita usar los diagramas de Feynman.

Dado un diagrama de Feynman, como por ejemplo el de la Figura 4.1 se debe proceder de la siguiente forma:

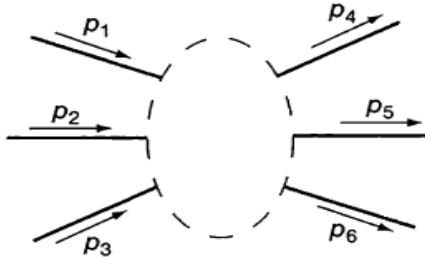


Figura 4.1: Diagrama de Feynman genérico, con las líneas externas etiquetadas (las líneas internas no se muestran) [13]

1. *Notación:* Etiquete los cuadrimomentos entrantes y salientes como p_1, p_2, \dots, p_n . Etiquete los momentos internos como q_1, q_2, \dots, q_m . Ponga una flecha al lado de cada

línea, mantenga la trayectoria de la dirección “positiva” (adelante en el tiempo para las líneas externas, de forma arbitraria para las líneas internas)

2. *Factores de vértice:* Para cada vértice añada el factor

$$-ig$$

la g es llamada constante de acoplamiento; especifica la fuerza de interacción,

3. *Propagadores:* Para cada línea interna, escriba un factor

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2}$$

donde q_j es el cuadrimomento de la línea y m_j es la masa de la partícula de la línea que describe. (observe que $q_j^2 \neq m_j^2$ porque una partícula virtual no yace sobre su capa de masa).

4. *Conservación de la energía y el momento:* Para cada vértice escriba una función delta de la forma

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3)$$

donde los p' s son los cuadrimomentos que entran al vértice (si la flecha sale, entonces p lleva un signo menos). Este factor impone conservación de energía y momento en cada vértice, ya que la función delta es cero a no ser que la suma del momento entrante sea igual a la suma del momento que sale.

5. *Integración sobre momento interno:* A cada línea interna, se agrega el factor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j$$

y se integra sobre todos los momentos internos.

6. *Cancelación de la función delta:* El resultado incluirá una función delta

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

que refleja en general la conservación de la energía y el momento. Quite este factor y multiplique por i . De esta manera se obtiene la amplitud \mathcal{M} .

4.3 Decaimiento del muón

Aplicando las secciones 4.1 y 4.2 al decaimiento del muón

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu , \quad (4.16)$$

empezaremos por encontrar la amplitud \mathcal{M} . En la figura 4.2 presentamos como etiquetaremos el momento y espín de cada partícula

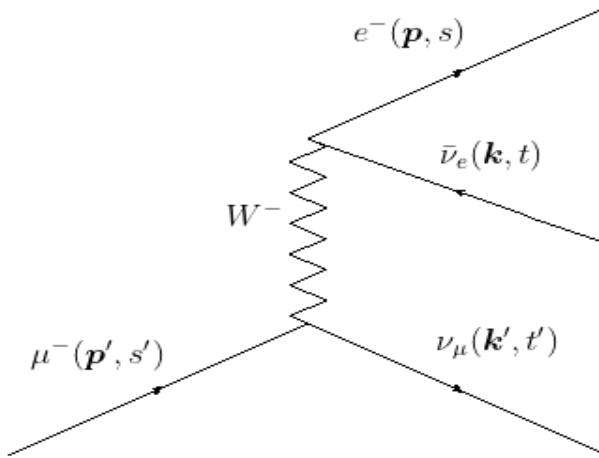


Figura 4.2: Decaimiento del μ^- [13]

Para el factor del vértice, Figura 3.5 (a), tenemos que

$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5). \quad (4.17)$$

El factor 2 en el denominador es puramente convencional, y g_W es la constante de acoplamiento débil. El factor $(1 - \gamma_5)$, tiene una profunda importancia, multiplicado por γ^μ daría un factor de acoplamiento, mientras que $\gamma^\mu \gamma_5$ sería un vector axial. Una teoría que suma un vector a un vector axial viola la conservación de la paridad, y esto es precisamente lo que sucede en las interacciones débiles.

El propagador para partículas con espín 1, en este caso el bosón W^- es:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \quad (4.18)$$

donde M_W es la masa del bosón W^- y q su respectivo momento. En la práctica, q^2 es mucho más pequeño que M_W^2 por lo que el propagador se reduce a:

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (4.19)$$

Si definimos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g_W^2}{8M_W^2}, \quad (4.20)$$

entonces, hasta el momento tendríamos:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u}_{\nu_\mu} \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu \right] \left[\frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \right] \left[\bar{u}_e \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e} \right] \\ & = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Podemos elegir funciones de onda libre para describir las cuatro partículas con cuatro momentos p, p', k, k' y espines s, s', t, t' , como se presenta a continuación en (4.22). De acuerdo a las reglas de Feynman el (saliente) antineutrino es representado por una (entrante)

función de onda con energía negativa. Empleando la forma de la onda plana

$$\begin{aligned} u_\mu(x) &= (2E_\mu V)^{-1/2} u_\mu(\mathbf{p}', s') \exp(-ip'_\mu x^\mu), \\ u_e(x) &= (2E_e V)^{-1/2} u_e(\mathbf{p}, s) \exp(-ip_\mu x^\mu), \\ u_{\bar{\nu}_e}(x) &= (2E_{\nu_e} V)^{-1/2} v_{\nu_e}(\mathbf{k}, t) \exp(+ik_\mu x^\mu), \\ u_{\nu_\mu}(x) &= (2E_{\nu_\mu} V)^{-1/2} u_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \exp(-ik'_\mu x^\mu), \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde

$$E_\mu = p'^0, \quad E_e = p^0, \quad E_{\nu_e} = k^0, \quad E_{\nu_\mu} = k'^0 \quad (4.23)$$

y $u(\mathbf{p}, s)$, $v(\mathbf{p}, s)$ denotan la parte espinor (E positiva)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, s) &= (E + m)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix}, \\ v(\mathbf{p}, s) &= (E + m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

con las dos componentes del espinor unitario χ_s . Sustituyendo (4.22), (4.23) y (4.24) en (4.21) obtenemos la amplitud:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) &= -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^4x [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}] \\ &= -i(2\pi)^4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\delta^4(p + k + k' - p')}{\sqrt{16V^4 k'^0 k^0 p'^0 p^0}} \\ &\quad \times [\bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s')] \\ &\quad \times [\bar{u}_e(\mathbf{p}, s) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(\mathbf{k}, t)]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para obtener la probabilidad de transición se debe multiplicar (4.25) por su conjugada

hermítica

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)|^2 &= (2\pi)^8 \frac{G_F^2}{2} \frac{[\delta^4(p + k + k' - p')]^2}{16V^4 k'^0 k^0 p'^0 p^0} \\ &\times |[\bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s')] \\ &\times [\bar{u}_e(\mathbf{p}, s) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(\mathbf{k}, t)]|^2. \end{aligned}$$

Esto da un factor

$$[\delta^4(p + k + k' - p')]^2 = \delta^4(p + k + k' - p') \delta^4(0), \quad (4.26)$$

que es reemplazado por

$$\frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^4(p + k + k' - p') \quad (4.27)$$

de acuerdo a la prescripción usual, que puede ser derivado heurísticamente como sigue

$$\delta^4(0) = \lim_{q \rightarrow 0} \delta^4(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{iy_\mu q^\mu} = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} = \frac{VT}{(2\pi)^4}. \quad (4.28)$$

V y T se entienden como cantidades macroscópicas tal que el proceso físico toma lugar enteramente dentro del volumen del espacio-tiempo finito VT . En la práctica, los dos neutrones no pueden ser observados, esto es, necesitamos sumar o integrar sobre todos los estados finales posibles. Además, para obtener la probabilidad de transición dentro de un intervalo de momento pequeño, se multiplica por la densidad de los estados finales del electrón dentro de un intervalo $Vd^3p/(2\pi)^3$. Finalmente dividimos por T para conseguir la tasa de decaimiento, esto es, la probabilidad de transición por unidad de tiempo de intervalo. Siguiendo estos pasos encontramos que

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{T} \frac{Vd^3p}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sum_{t,t'} |\mathcal{M}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)|^2 \\ &= \frac{G^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3p}{2p'^0 2p^0} \int \frac{d^3k}{2k^0} \int \frac{d^3k'}{2k'^0} \delta^4(p + k + k' - p') \sum_{t,t'} |M|^2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde

$$M = [\bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s')] [\bar{u}_e(\mathbf{p}, s) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(\mathbf{k}, t)]. \quad (4.30)$$

Ahora, lo que sigue será desarrollar (4.29). La expresión $\sum_{t,t'} |M|^2$ consiste de dos factores similares para las corrientes de transición muónica y electrónica. Si se escribe

$$M = M^\mu E_\mu$$

siendo

$$M^\mu = \bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s') \quad y \quad E_\mu = \bar{u}_e(\mathbf{p}, s) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(\mathbf{k}, t),$$

obtendríamos

$$\begin{aligned} \sum_{t,t'} |M|^2 &= \sum_{t,t'} (M^\mu E_\mu)(M^\nu E_\nu)^\dagger = \sum_{t,t'} (M^\mu M^{\nu\dagger})(E_\mu E_\nu^\dagger) \\ &= \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) \sum_t (E_\mu E_\nu^\dagger). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Centrándonos en el factor muónico, y utilizando la relación:

$$J_{(e)}^\mu{}^\dagger = [\bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}]^\dagger = \bar{u}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_e,$$

comenzaremos examinando el siguiente factor:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= \sum_{t'} [\bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s')] [\bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s')]^\dagger \\ &= \sum_{t'} \bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s') \bar{u}_\mu(\mathbf{p}', s') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t'). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para evaluar esta expresión se utiliza algunas fórmulas para los espinores de Dirac y las matrices γ ,

$$\sum_{t'} u_{\nu_\mu}(k', t')_\alpha \bar{u}_{\nu_\mu}(k', t')_\beta = (\not{k}' + m_\nu)_{\alpha\beta} = \not{k}'_{\alpha\beta}, \quad (4.33)$$

donde α, β denotan los indices del espinor y $m_\nu = 0$. Ya que la sumatoria no es sobre los estados iniciales del muón, se tiene

$$u_\mu(p', s')_\alpha \bar{u}_\mu(p', s')_\beta = \left[(\not{p}' + m_\mu) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\alpha\beta}, \quad (4.34)$$

con el cuadrivector espín

$$\not{s}'_\mu = \left(\frac{\not{p}' \cdot \not{s}'}{m}, \not{s}' + \frac{(\not{p}' \cdot \not{s}') \not{p}'}{m(E' + m)} \right), \quad (4.35)$$

donde s' es el vector del espín con respecto al marco en reposo. Aquí s' es un vector unitario así que $s'^\mu s'_\mu = -1$. Reemplazando las relaciones (4.33) y (4.34) en (4.32) obtenemos la siguiente expresión para la contribución muónica de las corrientes de transición

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= \sum_{t'} \bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\mu(\mathbf{p}', s') \bar{u}_\mu(\mathbf{p}', s') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t') \\ &= \sum_{t'} \bar{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t')_\pi \gamma_{\pi\varrho}^\mu (1 - \gamma_5)_{\varrho\alpha} \left[(\not{p}' + m_\mu) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\alpha\beta} \gamma_{\beta\sigma}^\nu (1 - \gamma_5)_{\sigma\tau} u_{\nu_\mu}(\mathbf{k}', t')_\tau \\ &= \gamma_{\pi\varrho}^\mu (1 - \gamma_5)_{\varrho\alpha} \left[(\not{p}' + m_\mu) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\alpha\beta} \gamma_{\beta\sigma}^\nu (1 - \gamma_5)_{\sigma\tau} \not{k}'_{\tau\pi}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sumando sobre el primer y el último indice π significa que tenemos que evaluar la traza de la matriz (4×4)

$$\sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) = \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}' + m_\mu) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{k}' \right\}. \quad (4.37)$$

Ya que $\gamma^\alpha \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\alpha$ y $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$ resulta

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + m_\mu) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\not{p}' + m_\mu) (1 + \gamma_5 \not{s}') \gamma^\nu \not{k}' (1 + \gamma_5) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Haciendo uso de la propiedad de que la traza del producto de un número impar de matrices γ desaparece, teniendo en cuenta que $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ consiste de un número par de matrices γ . Además $(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)$. Reemplazando en (4.38)

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\not{p}' + m_\mu) (1 + \gamma_5 \not{s}') \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \} \\ &= \text{Tr} \{ \not{p}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) + \not{p}' \gamma_5 \not{s}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \\ &\quad + m_\mu \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) + m_\mu \gamma_5 \not{s}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

El segundo y tercer término son impares; por lo tanto no contribuyen. El primer y último término son pares. Tomando en cuenta que $\gamma_5(1 - \gamma_5) = -(1 - \gamma_5)$, encontramos que

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= \text{Tr} \{ \not{p}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) - m_\mu \not{s}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \} \\ &= \text{Tr} \{ (\not{p}' - m_\mu \not{s}') \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De la sucesiva aplicación de $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ resultan las siguientes relaciones generales, ver Apéndice B.2

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\tau \} &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} + g^{\alpha\tau} g^{\beta\sigma}) \\ \text{Tr} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma_5 \} &= -4i\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Utilizando lo anterior en (4.40) el resultado final para la parte muónica de las corrientes de transición:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} (M^\mu M^{\nu\dagger}) &= 4[(p' - m_\mu s')^\nu k'^\mu - (p' - m_\mu s')^\alpha k'_\alpha g^{\mu\nu} + (p' - m_\mu s')^\mu k'^\nu \\ &\quad - i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (p' - m_\mu s')_\alpha k'_\beta]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

La contribución electrónica (4.30)-(4.32) es evaluada en forma similar, lo que da

$$\begin{aligned}
 \sum_t (E_\mu E_\nu^\dagger) &= \sum_t [\bar{u}_e(p, s) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(k, t)] [\bar{u}_e(p, s) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(k, t)]^\dagger \\
 &= \text{Tr} \{ (\not{p} - m_e \not{s}) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \} \\
 &= 4[(p - m_e s)_\mu k_\nu - (p - m_e s)^\alpha k_\alpha g_{\mu\nu} + (p - m_e s)_\nu k_\mu \\
 &\quad - i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} (p - m_e s)^\alpha k^\beta].
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

El resultado final de los elementos de la matriz invariante cuadrada (4.31) es el producto de las dos expresiones (4.42) y (4.43). Por simplicidad de los cálculos se utilizaran las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}
 (p' - m_\mu s')_\nu &\equiv q'_\nu, \\
 (p - m_\mu s)_\nu &\equiv q_\nu, \\
 q_\alpha k^\alpha &\equiv (q \cdot k),
 \end{aligned}$$

obtendríamos

$$\begin{aligned}
 \sum_{t,t'} |M|^2 &= \sum_{t,t'} (M^\mu M^{\nu\dagger})(E_\mu E_\nu^\dagger) \\
 &= 16[q'^\nu k'^\mu - q'^\alpha k'_\alpha g^{\mu\nu} + q'^\mu k'^\nu - i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} q'_\alpha k'_\beta] \\
 &\quad \times [q_\mu k_\nu - q^\alpha k_\alpha g_{\mu\nu} + q_\nu k_\mu - i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} q^\alpha k^\beta] \\
 &= 16[2(q' \cdot k)(q \cdot k') + 2(q' \cdot q)(k' \cdot k) - \underbrace{i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} (q'^\mu k'^\nu + q'^\nu k'^\mu) q^\alpha k^\beta}_{=0} \\
 &\quad - \underbrace{i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} q'_\alpha k'_\beta (q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu)}_{=0} - \varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} q'_\alpha k'_\beta q^{\bar{\alpha}} k^{\bar{\beta}}] \\
 &= 16[2(q' \cdot k)(q \cdot k') + 2(q' \cdot q)(k' \cdot k) + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} q'_\alpha k'_\beta q^{\bar{\alpha}} k^{\bar{\beta}}] \\
 &= 32[(q' \cdot k)(q \cdot k') + (q' \cdot q)(k' \cdot k) + (\delta_\beta^\alpha \delta_{\bar{\alpha}}^\beta - \delta_{\bar{\alpha}}^\alpha \delta_\beta^\beta) q'_\alpha k'_\beta q^{\bar{\alpha}} k^{\bar{\beta}}] \\
 &= 64[(q' \cdot k)(q \cdot k')] \\
 &= 64[(p' - m_\mu s')^\alpha k_\alpha (p - m_e s)^\beta k'_\beta].
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Por lo tanto, reemplazando en (4.29)

$$d\Gamma = \frac{G^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2p'^0 2p^0} \underbrace{\int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} k_\alpha k'_\beta \delta^4(p + k + k' - p')}_{I_{\alpha\beta}} 64[(p' - m_\mu s')^\alpha (p - m_e s)^\beta]. \quad (4.45)$$

Finalmente, se evaluará la integral $I_{\alpha\beta}$ que es manifiestamente covariante de Lorentz. Esto es obvio porque $\delta^4(p + k + k' - p')$ y $d^3 p / 2p_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p \delta(p^2 - m_0^2) \Theta(p_0)$ son invariantes de Lorentz. Ya que las variables están integradas únicamente sobre los dos tensores de segundo rango k y k' puede ocurrir en el resultado factores del tipo $g_{\alpha\beta}$ y $(p' - p)_\alpha (p' - p)_\beta = q_\alpha q_\beta$. El vector $q = (p' - p)$ es una definición diferente de la que se hizo hace poco.

$$I_{\alpha\beta} = Aq^2 g_{\alpha\beta} + Bq_\alpha q_\beta, \quad (4.46)$$

donde $q^2 = q^\alpha q_\alpha$ fue separado con propósito de obtener las adimensionales A y B . De (4.46) se construye las siguientes invariantes

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= (4A + B)q^2, \\ q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} &= (A + B)q^4. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ahora se distinguen dos casos:

- (i) El vector $q = p' - p$ es como el tiempo, esto es $q^2 > 0$. Con esta condición podemos siempre presentar una transformada propia de Lorentz, tal que

$$\tilde{q}^\nu := a_\mu^\nu q^\mu = (\tilde{q}^0, 0) \quad (4.48)$$

define el sistema de referencia. Con respecto a este marco de referencia tenemos

$$\begin{aligned}
 g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} k_\alpha k'^\alpha \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(k^0 + k'^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= \int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} [(k^0)^2 - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})] \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(k^0 + k'^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= \int \frac{d^3 k}{4(k^0)^2} \int d^3 k [(k^0)^2 + |\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \cos(0^\circ)] \delta^3(0) \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= \int \frac{d^3 k}{4(k^0)^2} 2(k^0)^2 \delta(2k^0 - \tilde{q}^0),
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ya que $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ y consecuentemente $k'^0 = k^0 = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$. La integral puede ser simplificada sustituyendo $x = 2k^0$,

$$\begin{aligned}
 g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3 k}{4(k^0)^2} 2(k^0)^2 \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_0^{2\pi} dk_0 d\theta d\varphi (k^0)^2 \sin(\theta) \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= 2\pi \int_0^\infty dk_0 (k^0)^2 \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty dx x^2 \delta(x - \tilde{q}^0)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Para positivos \tilde{q}^0 el argumento de la función δ tiene valor cero dentro del intervalo de integración. Por medio de la función Θ

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}, \tag{4.51}$$

el resultado de encima se expresa como

$$g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} (\tilde{q}^0)^2 \Theta(\tilde{q}^0). \tag{4.52}$$

Para reescribir esto en forma de invariante de Lorentz recordamos que para cuadrvectores q^μ que se comportan como el tiempo, el signo de la componente cero q^0 permanece sin cambiar bajo transformaciones propias de Lorentz, esto es, $\Theta(\tilde{q}^0) = \Theta(q^0)$. Además, con respecto a nuestro marco de referencia elegido tenemos $\tilde{q}^2 = (\tilde{q}^0)^2 = q^2$. El resultado (4.52) puede ser establecido en forma invariante de Lorentz

$$g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q^0) \quad \text{para} \quad q^2 > 0. \quad (4.53)$$

Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} (q \cdot k)(q \cdot k') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(k^0 + k'^0 - \tilde{q}^0) \\ &= (\tilde{q}^0)^2 I_{00} \\ &= (\tilde{q}^0)^2 \int \frac{d^3 k}{2} \int \frac{d^3 k'}{2} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(k^0 + k'^0 - \tilde{q}^0) \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{q}^0)^2 \int d^3 k \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\ &= \pi (\tilde{q}^0)^2 \int_0^\infty (k^0)^2 dk^0 \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\ &= \pi (\tilde{q}^0)^2 \int_0^\infty (k^0)^2 dk^0 \delta(2k^0 - \tilde{q}^0) \\ &= \frac{\pi}{8} (\tilde{q}^0)^4 \Theta(\tilde{q}^0) \\ &= \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q^0) \quad \text{para} \quad q^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

- (ii) El vector q_μ es como el espacio, esto es $q^2 < 0$. En este caso el argumento de la función delta, $(k + k' - q)$, es siempre diferente de cero. Esta propiedad se entiende, recordando que debido a que la masa de los neutrinos desaparece, se mantiene que

$$\begin{aligned} k^2 &= k'^2 = 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' &= k^0 k'^0 \cos(\theta), \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{k}' . En consecuencia se tiene

$$(k + k')^2 = 2(k^0 k'^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') = 2k^0 k'^0(1 - \cos(\theta)) \geq 0, \quad (4.56)$$

lo que implica que $q^\mu = k^\mu + k'^\mu$ no puede ser satisfecho. Por lo tanto

$$I_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{para} \quad q^2 < 0. \quad (4.57)$$

Los resultados de (4.53), (4.54) y (4.57) pueden resumirse como sigue:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q^0) \\ q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} &= \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q^0) \Theta(q^2). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Evaluando estas expresiones con (4.47) obtenemos

$$\begin{aligned} 4A + B &= \frac{\pi}{4} \Theta(q^0) \Theta(q^2), \\ A + B &= \frac{\pi}{8} \Theta(q^0) \Theta(q^2), \end{aligned} \quad (4.59)$$

resulta la solución

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{24} \Theta(q^0) \Theta(q^2), \\ B &= \frac{\pi}{12} \Theta(q^0) \Theta(q^2), \end{aligned} \quad (4.60)$$

Sustituyendo en (4.46) obtenemos finalmente

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} (q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) \Theta(q^0) \Theta(q^2). \quad (4.61)$$

La tasa de decaimiento del muón con polarización s' dentro de un electrón con polarización s esta dada por

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= \frac{G_F^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p}{2p'^0 2p^0} \frac{\pi}{24} (q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) \Theta(q^0) \Theta(q^2) 64 [(p' - m_\mu s')^\alpha (p - m_e s)^\beta] \\
 &= \frac{G_F^2}{3} \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p'^0 p^0} (q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) [(p' - m_\mu s')^\alpha (p - m_e s)^\beta] \Theta(q^0) \Theta(q^2) \\
 &= \frac{G_F^2}{3} \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p'^0 p^0} [(p' - p)^2 (p' - m_\mu s')^\alpha (p - m_e s)_\alpha \\
 &\quad + 2(p' - p)_\alpha (p' - m_\mu s')^\alpha (p' - p)_\beta (p - m_e s)^\beta] \\
 &\quad \times \Theta(p'^0 - p^0) \Theta((p' - p)^2).
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Se observa el efecto de la dilatación del tiempo, que acompaña la observación del tiempo de vida del muón en (4.62). Para un muón moviéndose tenemos $p'^0 = \gamma m_\mu$ con el factor de Lorentz $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Como puede verse de la expresión para $d\Gamma$ en (4.62), $d\Gamma \propto 1/\gamma$, implica que la tasa de decaimiento disminuye considerablemente para muones moviéndose rápidamente, esto es, el tiempo de vida $\tau_\mu \propto \gamma$ se prolonga. Para continuar cambiamos el marco de referencia del muón, que es caracterizado por $p'^\alpha - p^\alpha = (m_\mu - p^0, -\mathbf{p})$.

Ya que

$$\begin{aligned}
 (p' - p)^2 &= (m_\mu - p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = (m_\mu - p^0)^2 - (p^{02} - m_e^2) \\
 &= -2p^0 m_\mu + m_\mu^2 + m_e^2,
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

la condición $(p' - p)^2 > 0$ para un $d\Gamma$ diferente de cero resulta la restricción

$$p^0 < p_{max}^0 = (m_\mu^2 + m_e^2)/2m_\mu, \tag{4.64}$$

que consecuentemente requiere $p'^0 - p^0 > 0$, ya que

$$p'^0 - p^0 = m_\mu - p^0 > m_\mu - p_{max}^0 = (m_\mu^2 - m_e^2)/2m_\mu > 0. \tag{4.65}$$

La condición $p^0 < p_{max}^0$ en (4.64) y (4.65) asegura que la primera función $\Theta(p'^0 - p^0)$ se cumple automáticamente. Por lo tanto podemos reemplazar el producto de las dos funciones Θ en (4.62) por $\Theta(p_{max}^0 - p_0)$. Además, con respecto al marco en reposo del muón, se mantiene que $s^{\mu\prime} = (0, s')$, así el resultado final es

$$\begin{aligned} d\Gamma(s') = & \frac{G_F^2}{3} \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p^0} \{ [(m_\mu - p^0)^2 - \mathbf{p}^2][(p_0 - m_e s^0) + \mathbf{s}' \cdot (\mathbf{p} - m_e \tilde{\mathbf{s}})] \\ & + 2[m_\mu - p^0 - \mathbf{s}' \cdot \mathbf{p}] [(m_\mu - p^0)(p_0 - m_e s^0) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - m_e \tilde{\mathbf{s}})] \} \\ & \times \Theta(p_{max}^0 - p_0). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Aquí $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{p}}{m_e(p^0 + m_e)}$ es la componente espacial del vector espín del electrón.

4.3.1 Tiempo de vida

Para determinar el tiempo de vida del muón τ_μ se suma sobre la orientación s del espín del electrón, promediamos sobre la orientación s' del espín del muón, e integramos sobre el momentum \mathbf{p} del electrón:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\mu} = \Gamma_\mu = & \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int d\Gamma \\ = & 2 \frac{G_F^2}{3} \int \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p^0} \{ [(m_\mu - p^0)^2 - \mathbf{p}^2] p^0 + 2(m_\mu - p^0)[(m_\mu - p^0)p^0 + \mathbf{p}^2] \} \Theta(p_{max}^0 - p^0) \\ = & 2 \frac{G_F^2}{3} \int \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p^0} \{ [(m_\mu - p^0)^2 - ((p^0)^2 - m_e^2)] p^0 + 2(m_\mu - p^0) \\ & \times [(m_\mu - p^0)p^0 + ((p^0)^2 - m_e^2)] \} \Theta(p_{max}^0 - p^0) \\ = & 2 \frac{G_F^2}{3} \int \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p^0} \{ 3m_\mu^2 p^0 - 6m_\mu(p^0)^2 + 3(p^0)^3 - 3(p^0)^3 + 3m_e^2 p^0 \\ & + 2m_\mu(p^0)^2 - 2m_\mu m_e^2 \} \Theta(p_{max}^0 - p^0) \\ = & 2 \frac{G_F^2}{3} \int \frac{\pi d^3 p}{(2\pi)^5 p^0} [-4m_\mu(p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \Theta(p_{max}^0 - p^0). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Al demostrar (4.67) se tiene en cuenta que el valor medio de \mathbf{s} es $\langle \mathbf{s} \rangle = 0$ así que también $\langle s^0 \rangle = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} \rangle = 0$. Si se emplea la siguiente identidad:

$$\int d^3\mathbf{p}[\dots] \Theta(p_{max}^0 - p^0) = 4\pi \int_0^{|p_{max}|} |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|[\dots], \quad (4.68)$$

y tomando en cuenta que $\mathbf{p}^2 = (p_0^2 - m_e^2)$ y por lo tanto

$$d|\mathbf{p}|/dp^0 = p^0/|\mathbf{p}|,$$

reescribiendo Γ_μ en la siguiente forma al integrar sobre la parte azimutal y polar

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= 2 \frac{G_F^2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(4\pi)\pi dp^0}{(2\pi)^5} \frac{p^0}{p^0} [-4m_\mu(p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \Theta(p_{max}^0 - p^0) \\ &= 2 \frac{G_F^2}{3(2\pi)^3} \int_{m_e}^{p_{max}^0} dp^0 \frac{p^0}{p^0} [-4m_\mu(p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \\ &= 2 \frac{G_F^2}{3(2\pi)^3} \int_{m_e}^{p_{max}^0} dp^0 \sqrt{(p^0)^2 - m_e^2} [-4m_\mu(p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \\ &= \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left[1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + 8 \frac{m_e^6}{m_\mu^6} - \frac{m_e^8}{m_\mu^8} - 24 \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \ln \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Para los siguientes valores de m_e y m_μ en unidades naturales

$$m_e = 0.510998928 \text{ MeV}$$

$$m_\mu = 105.658387 \text{ MeV}$$

tenemos

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} (1 - 1.87 \times 10^{-4}) \approx \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (4.70)$$

De (4.69) es obvio que la tasa de decaimiento debería desaparecer si $m_e/m_\mu = 1$. Esta ecuación refleja el hecho de que el muón debería ser estable ya que $|p_{max}| = 0$, así que no podría haber espacio fase disponible para el estado final del electrón.

Finalmente, al invertir (4.70) obtenemos el tiempo de vida media del muón de acuerdo a lo establecido en la ecuación (4.3):

$$\tau_\mu \approx \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}. \quad (4.71)$$

Valor numérico de la constante de Fermi

El tiempo de vida del muón y su masa son valores que han sido calculados experimentalmente, por lo cual se podría despejar de (4.71) la constante de Fermi para determinar su valor. El valor del tiempo de vida del muón es

$$\tau_\mu = 2.19703 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (4.72)$$

es decir

$$\Gamma_\mu = \tau_\mu^{-1} = 2.996 \times 10^{-16} \text{ MeV}, \quad (4.73)$$

y con el valor de la masa del muón obtenemos el valor de la constante de Fermi:

$$G_F = 1.16637 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}. \quad (4.74)$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo presentamos las ideas teóricas claves del Modelo Estándar electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. En el capítulo 2, estudiamos la relación existente entre las simetrías, que provienen de los grupos de Lie, y las leyes de conservación. Por cada generador de simetría existe una corriente conservada, por lo que al unir la interacción débil, que tiene 3 generadores, y el electromagnetismo, que cuenta con un generador, esperábamos encontrar 4 corrientes conservadas, las cuales precisamente fueron obtenidas en el capítulo 3.

Adicionalmente, en el capítulo 3, después de implementar la ruptura espontánea de simetría sobre el grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ hasta llegar a la simetría remanente gauge electromagnética $U(1)_{EM}$ logramos solucionar el problema de la masa de los fermiones y los bosones gauge W y Z ; además, obtuvimos la ecuación (3.65) que relaciona la masa de los bosones. Luego, al examinar el acoplamiento de los bosones cargados W^\pm con los quarks, vimos que por la naturaleza intrínseca de éstos, presentan un acople distinto respecto a los leptones, lo cual condujo a la violación de la simetría CP, siendo responsable de esto la matriz CKM. También, en este capítulo fue posible comprobar que la teoría no predice (quedando como parámetros arbitrarios) la masa del electrón, la masa del muón, la masa del tauón, la masa de los quarks (up, down, charm, strange, top y bottom), las constantes de acople g_1 y g_2 de las simetrías $U(1)_Y$ y $SU(2)_L$ respectivamente, la masa del bosón Higgs, el valor esperado del vacío del campo Higgs y 4 parámetros de mezcla de la matriz CKM.

En el capítulo 4 examinamos un proceso leptónico puro. Observamos que para la tasa de decaimiento del muón, la contribución principal proviene de la masa del muón, debido a que la masa del electrón y el neutrino son despreciables en comparación con éste. También encontramos una expresión para el tiempo de vida del muón, τ_μ , y como es posible a partir de esta ecuación determinar el valor numérico de la constante de acoplamiento de Fermi, G_F , la cual es de suma importancia en el modelo electrodébil.

Sin embargo, a pesar de que el Modelo Estándar reproduce muy bien los resultados experimentales siendo la teoría más precisa hasta el momento en la física de partículas, no es la teoría definitiva. Existen algunas dificultades, como lo son los parámetros arbitrarios. Por ejemplo, la teoría de Glashow-Salam-Weinberg no predice una masa para la partícula de Higgs, debido a que su masa depende del acoplamiento cuántico λ , ver (3.46). También tiene problemas con el neutrino, en esta teoría se asume sin masa, pero actualmente se conoce que el neutrino puede tener una masa pequeña, de acuerdo a los experimentos de oscilación de neutrinos. En consecuencia, esta teoría no es completa, lo cual abre las puertas a teorías más allá del Modelo Estándar.

Apéndice A

Los grupos del Modelo Estándar

El Modelo Estándar se construye insistiendo en que las ecuaciones del modelo conservan la misma forma después de ciertas transformaciones. Por ejemplo, requerimos que las ecuaciones tomen la misma forma en cada marco de referencia inercial, de modo que sean covariantes bajo una transformación de Lorentz. Esto puede ser una rotación de ejes o un boost, o una combinación de rotación y boost. La densidad lagrangiana que describe el Modelo Estándar toma la misma forma en el nuevo sistema de coordenadas, y se dice que la transformación de Lorentz es una transformación de simetría. En el Modelo Estándar, así como hay simetrías bajo transformaciones de coordenadas, también hay simetrías “internas” de los campos de partículas. Las transformaciones de simetría correspondientes están convenientemente representadas por matrices. Es característico de las transformaciones de simetría que satisfagan los axiomas matemáticos de un grupo, que presentamos en el capítulo 2. En este apéndice consideraremos algunas propiedades de los grupos que juegan un papel especial en el Modelo Estándar [2].

A.1 Álgebras de Lie

En cualquier dirección particular, la ley de multiplicación de grupos no es complicada. Hay una familia de un parámetro de elementos de grupo de la forma [5]:

$$U(\lambda) = e^{i\lambda_a \alpha_a X_a} \quad (\text{A.1})$$

y la ley de multiplicación de grupos es simplemente

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (\text{A.2})$$

Sin embargo, si multiplicamos los elementos del grupo generados por dos combinaciones lineales diferentes de generadores, las cosas no son tan fáciles. En general,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{(\alpha_a + \beta_b) X_a} \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, debido a que las exponenciales forman una representación del grupo (al menos si estamos cerca de la identidad), debe ser cierto que el producto es una exponencial de un generador,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \quad (\text{A.4})$$

para algunos δ . Y como todo es fluido, podemos encontrar δ_a expandiendo los lados de la ecuación e igualando las potencias apropiadas de α y β . Cuando hacemos esto, sucede algo interesante: encontramos que solo funciona si los generadores forman un álgebra bajo commutación (o un álgebra de conmutador). Para ver esto, lo haremos para un orden no trivial. Podemos escribir

$$i\delta_a X_a = \ln(1 + e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1) \quad (\text{A.5})$$

Ahora al expandir esto, manteniendo los términos hasta el segundo orden en los parámetros α y β , usando la expansión en series de Taylor de $\ln(1 + K)$ donde

$$\begin{aligned} K &= e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \\ &= \left(1 + i\alpha_a X_a - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 + \dots\right) \left(1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots\right) - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Esto da

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_a X_a + \beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Los términos de orden superior en (A.7) están intentando cancelarse. Si las X fueran números, se cancelarían, porque el producto de las exponenciales es la exponencial de la suma de los exponentes. No pueden cancelarse solo porque las X son operadores lineales y no conmutan entre sí. Por lo tanto, los términos extra más allá de $i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a$ en (A.7) son proporcionales al conmutador. Efectivamente, el cálculo explícito en (A.7) da

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a - \frac{1}{2}[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] \end{aligned} \tag{A.8}$$

Obtuvimos (A.8) usando solo la propiedad de grupo y la suavidad, lo que nos permitió usar la expansión en series de Taylor. A partir de (A.8) podemos calcular δ_a , nuevamente en una expansión en α y β . Concluimos que

$$[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] = -2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)X_c + \dots \equiv i\gamma_c X_c \tag{A.9}$$

donde la i se pone para hacer que γ sea real y \dots representan términos que tienen más de dos factores de α o β . Dado que (A.9) debe ser verdadera para todo α y β , debemos tener

$$\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc} \tag{A.10}$$

para algunas constantes f_{abc} esto

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \tag{A.11}$$

donde

$$f_{abc} = -f_{bac} \tag{A.12}$$

porque $[A, B] = -[B, A]$. Tenga en cuenta que ahora podemos escribir

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2}\gamma_a + \dots \tag{A.13}$$

de modo que si γ y los términos superiores desaparecen, restauraríamos la igualdad en (A.3).

(A.11) establece que los generadores forman un álgebra bajo conmutación. Acabamos de demostrar que esto sigue a las propiedades de grupo para los grupos de Lie, porque los elementos del grupo de Lie dependen sin problemas de los parámetros. El conmutador en el álgebra juega un papel similar a la ley de multiplicación para el grupo.

Si seguimos expandiendo (A.5) más allá del segundo orden, no necesitaríamos condiciones adicionales para asegurarnos de que se mantiene la ley de multiplicación de grupos. La relación del conmutador (A.11) es suficiente. De hecho, si conoce las constantes, f_{abc} , puede reconstruir δ con la precisión que deseé para cualquier α y β en algún vecindario finito del origen. Por lo tanto, los f_{abc} son sumamente importantes: resumen prácticamente toda la ley de multiplicación de grupos. Las f_{abc} se denominan constantes de estructura del grupo. Se pueden calcular en cualquier representación no trivial, es decir, a menos que X_a desaparezca.

La relación del conmutador (A.11) se denomina álgebra de Lie del grupo. El álgebra de Lie está completamente determinada por las constantes de estructura. Cada representación de grupo da una representación del álgebra de una manera obvia, y las constantes de estructura son las mismas para todas las representaciones porque están fijadas solo por la ley de multiplicación de grupos y la suavidad. La equivalencia, la reducibilidad y la irreducibilidad se pueden transferir del grupo al álgebra sin cambios.

Tenga en cuenta que si hay alguna representación unitaria del álgebra, entonces los f_{abc} son reales, porque si tomamos el adjunto de la relación del conmutador para las X hermíticas, obtenemos

$$\begin{aligned}[X_a, X_b]^\dagger &= -i f_{abc}^* X_c \\ [X_b, X_a] &= i f_{bac} X_c = -i f_{abc} X_c\end{aligned}\tag{A.14}$$

Dado que estamos interesados en grupos que tienen representaciones unitarias, simplemente asumiremos que las f_{abc} son reales.

A.2 Representación adjunta

Los generadores de matrices también satisfacen la siguiente identidad:

$$[X_a, [X_b, X_c]] + \text{permutaciones ciclicas} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Las constantes de estructura en sí mismas generan una representación del álgebra llamada representación adjunta. Si usamos el álgebra (A.11), podemos calcular la llamada identidad de Jacobi (A.15), que se puede comprobar simplemente expandiendo los conmutadores.

La identidad de Jacobi se puede escribir de una manera diferente que a veces es más fácil de usar y también es instructiva:

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [[X_a, X_b], X_c] + [X_b, [X_a, X_c]]. \quad (\text{A.16})$$

Esta es una generalización de la regla del producto para la conmutación:

$$[X_a, X_b X_c] = [X_a, X_b] X_c + X_b [X_a, X_c]. \quad (\text{A.17})$$

La identidad de Jacobi es bastante trivial para el álgebra de Lie con sólo representaciones dimensionales finitas que estudiaremos. Pero no vale la pena que en el tratamiento más general de Lie, tenga sentido en situaciones en las que el producto de los generadores ni siquiera está bien definido.

Las constantes de estructura en sí mismas generan una representación del álgebra llamada representación adjunta. Si usamos el álgebra (A.11), podemos calcular

$$\begin{aligned} [X_a, [X_b, X_c]] &= i f_{bcd} [X_a, X_d] \\ &= -f_{bcd} f_{ade} X_e \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

entonces (debido a que los X_a son independientes), (A.15) implica

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Definiendo un conjunto de matrices T_a

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \quad (\text{A.20})$$

entonces, se puede reescribir (A.19) como

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c. \quad (\text{A.21})$$

Así, las propias constantes de estructura proporcionan una representación del álgebra. Esto se llama representación adjunta. La dimensión de una representación es la dimensión del espacio lineal sobre el que actúa (al igual que para un grupo finito). La dimensión de la representación adjunta es solo el número de generadores independientes, que es el número de parámetros reales necesarios para describir un elemento de grupo. Tenga en cuenta que, dado que las constantes de estructura f_{abc} son reales, los generadores de representación adjunta son puramente imaginarios.

Nos gustaría tener un producto escalar conveniente sobre el espacio lineal de los generadores en la representación adjunta (A.20), para convertirlo en un espacio vectorial. Uno bueno es la traza en la representación adjunta.

$$\text{Tr}(T_a T_b) \quad (\text{A.22})$$

Esta es una matriz simétrica real. A continuación, mostraremos que podemos ponerlo en una forma canónica muy simple. Podemos cambiar su forma haciendo una transformación lineal en el X_a , que a su vez, induce una transformación lineal en las constantes de estructura, suponiendo

$$X_a \longrightarrow X'_a = L_{ab}X_b \quad (\text{A.23})$$

Entonces

$$\begin{aligned}[X'_a, X'_b] &= iL_{ad}L_{be}f_{dec}X_c \\ &= iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{hc}^{-1}X_c \\ &= iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gc}^{-1}X'_c\end{aligned}\tag{A.24}$$

así

$$f_{abc} \longrightarrow f'_{abc} = L_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gc}^{-1}. \tag{A.25}$$

Si luego definimos un nuevo T_a con el transformado f

$$[T_a]_{bc} \longrightarrow [T'_a]_{bc} = L_{ad}L_{be}[T_d]_{eg}L_{gc}^{-1} \tag{A.26}$$

o

$$[T_a] \longrightarrow [T'_a] = L_{ad}L[T_d]_{eg}L^{-1}. \tag{A.27}$$

En otras palabras, una transformación lineal en X_a induce una transformación lineal en T_a que implica tanto una transformación de similitud como la misma transformación lineal en el índice a que etiqueta el generador. Pero en la traza la transformación de similitud no importa, entonces

$$\text{Tr}(T_a T_b) \longrightarrow \text{Tr}(T'_a T'_b) = L_{ac}L_{bd}\text{Tr}(T_c T_d). \tag{A.28}$$

Por lo tanto, podemos diagonalizar la traza eligiendo una L apropiada (aquí solo necesitamos una matriz ortogonal). Supongamos que hemos hecho esto (y hemos eliminado las cantidades primadas), de modo que

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab} \quad \text{sin suma.} \tag{A.29}$$

Todavía tenemos la libertad de cambiar la escala de los generadores (haciendo una transformación L diagonal), por ejemplo, podríamos elegir todos los k^a distintos de cero, porque L aparece al cuadrado en la transformación (A.28).

Por ahora, asumiremos que los k_a son positivos. Esto define el clase de álgebras que estudiamos. Se llaman álgebras de Lie compactas. Volveremos brevemente a continuación a las álgebras en las que algunas son cero. Y tomaremos

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (\text{A.30})$$

para una conveniente λ positiva. En esta base, la constante de estructura es completamente antisimétrica, porque podemos escribir

$$f_{abc} = -i\lambda^{-1} \text{Tr}([T_a, T_b]T_c) \quad (\text{A.31})$$

que es completamente antisimétrico debido a la propiedad cíclica de la traza.

$$\begin{aligned} \text{Tr}([T_a, T_b]T_c) &= \text{Tr}(T_a T_b T_c - T_b T_a T_c) \\ &= \text{Tr}(T_b T_c T_a - T_c T_b T_a) \\ &= \text{Tr}([T_b, T_c]T_a). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Lo que implica

$$f_{abc} = f_{bca}. \quad (\text{A.33})$$

Tomados en conjunto, (A.12) y (A.33) implican la antisimetría completa de f_{abc}

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba}. \quad (\text{A.34})$$

En esta base, la representación adjunta es unitaria, porque los T_a son imaginarios y antisimétricos, y por tanto hermíticos.

A.3 Rotaciones de los ejes de coordenadas y el grupo $SO(3)$

Considere una rotación de los ejes de coordenadas sobre el origen. Si las coordenadas en un marco de referencia K de un punto P son (x^1, x^2, x^3) , y en un marco K' son (x'^1, x'^2, x'^3) ,

girado con relación a K , los x'^i están relacionados con los x^i por una transformación lineal real de la forma

$$x'^i = R_j^i x^j . \quad (\text{A.35})$$

$\mathbf{R} = (R_j^i)$ es la matriz de rotación. Por ejemplo, una rotación de los ejes a través de un ángulo θ alrededor del eje-3 en un sentido derecho viene dada por

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta , \\ x'^2 &= -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta , \\ x'^3 &= x^3 , \end{aligned}$$

y corresponde a la matriz

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.36})$$

Podemos considerar los x'^i y x^i como matrices (columna) \mathbf{x}' y \mathbf{x} de dimensión 3×1 , y escribir la transformación (A.35) como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} .$$

La transpuesta \mathbf{x}^T de \mathbf{x} es una matriz (fila) 1×3 , y el producto escalar de dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} es

$$x'y' = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} .$$

En particular, la longitud OP viene dada por $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$. Dado que una rotación de ejes conserva los productos escalares,

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} .$$

Esto es válido para todas las parejas \mathbf{x}, \mathbf{y} . Por lo tanto

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{1} \quad (\text{A.37})$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad: por lo tanto, la inversa de \mathbf{R} es la transpuesta \mathbf{R}^T de \mathbf{R} y se dice que \mathbf{R} es una matriz ortogonal.

$$\begin{aligned} \text{Ya que } \det \mathbf{R}^T \det \mathbf{R} &= \det(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \det \mathbb{1} = 1 \text{ y } \det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R}, \\ &(\det \mathbf{R})^2 = 1, \quad \det \mathbf{R} = \pm 1. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Las matrices correspondientes a rotaciones puras o “apropiadas” tienen $\det \mathbf{R} = +1$. Podemos ver esto al notar que la rotación identidad es una rotación apropiada, y $\det \mathbb{1} = 1$. Cualquier rotación apropiada puede construirse como una secuencia de rotaciones infinitesimales comenzando desde $\mathbb{1}$ y por lo tanto por, la continuidad también tiene determinante $+1$.

El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal, ya que

$$(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^{-1}$$

y si $\det \mathbf{R}_1 = 1$ y $\det \mathbf{R}_2 = 1$,

$$\det(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = \det \mathbf{R}_1 \det \mathbf{R}_2 = 1.$$

Por lo tanto, las matrices ortogonales 3×3 reales con $\det \mathbf{R} = 1$ forman un grupo bajo la multiplicación de matrices. Este grupo se llama grupo ortogonal especial y se denota por $SO(3)$.

Las matrices ortogonales con $\det \mathbf{R} = -1$ también conservan productos escalares. Es fácil ver que la inversión de los ejes de coordenadas en el origen, $x'^i = -x^i$, corresponde a una matriz ortogonal con determinante -1 ; una rotación general “inapropiada” corresponde a la inversión en el origen junto con una rotación apropiada. Las matrices de rotación inapropiadas no forman un grupo, ya que el producto de dos rotaciones inapropiadas es una rotación apropiada.

Se puede construir una rotación apropiada general como una secuencia de rotaciones sobre tres ejes diferentes. Por ejemplo, considere

$$\mathbf{R}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_{3''}(\psi)\mathbf{R}_{2'}(\theta)\mathbf{R}_3(\phi) \quad (\text{A.39})$$

en una notación obvia. La dirección de $3''$ está definida por θ y ϕ , y luego ψ define la orientación final de $1''2''$ en el plano perpendicular a $3''$. Por lo tanto, cada elemento de $SO(3)$ se especifica con solo tres parámetros. (ψ, θ, ϕ se conocen como los ángulos de Euler).

También podemos interpretar la transformación (A.35) en un sentido activo. Considere un sistema descrito por una función de onda $\Phi(x)$ en el marco de referencia K . El sistema se describe por $\Phi'(x') = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')$ en el marco de referencia K' . Esta es la interpretación pasiva. Alternativamente, podríamos estar sobre las coordenadas primadas y darle a esta ecuación una interpretación activa, suponiendo que los ejes se hayan mantenido fijos y el sistema haya recibido la rotación inversa \mathbf{R}^{-1} . La función de onda del sistema girado es $\Phi'(x) = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$.

A.4 El grupo $SU(2)$

Una matriz \mathbf{U} de dimensión $n \times n$ es unitaria si $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbb{1}$. El producto de dos matrices unitarias es unitario. Por lo tanto, las matrices unitarias $n \times n$ forman un grupo bajo multiplicación matricial, denotado por $U(n)$.

Ya que

$$\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{U}^*) = \det\mathbb{1} = 1 ,$$

podemos escribir $\det \mathbf{U} = e^{ina}$, donde α es real.

El grupo unitario especial $SU(2)$ es el grupo de todas las matrices unitarias 2×2 con determinante igual a 1. Estas forman un grupo, ya que si $\det \mathbf{U}_1$ y $\det \mathbf{U}_2$ entonces $\det(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2) = \det \mathbf{U}_1 \det \mathbf{U}_2 = 1$. $SU(2)$ es un subgrupo de $U(2)$. Cada elemento de $U(2)$ es el producto de un factor de fase $e^{i\alpha}$, que es un elemento de $U(1)$ y un elemento de $SU(2)$.

El grupo $SU(2)$ está relacionado de manera notable con el grupo de rotación $SO(3)$ descrito en la Sección A.3. Es fundamental para el sector electrodébil del Modelo Estándar.

Cualquier elemento de $U(2)$ se puede poner en la forma

$$\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}}$$

donde \mathbf{H} es una matriz hermítica. Una matriz hermítica general 2×2 se puede tomar como

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^0 + \alpha^3 & \alpha^1 - i\alpha^2 \\ \alpha^1 + i\alpha^2 & \alpha^0 - \alpha^3 \end{pmatrix}$$

donde α^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son cuatro parámetros reales. Esta elección nos permite escribir

$$\mathbf{H} = \alpha^0 \mathbb{1} + \alpha^k \sigma^k, \quad (\text{A.40})$$

donde el índice k va de 1 a 3, y

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las σ^k son las mismas que las matrices de espín de Pauli, y por lo tanto satisfacen

$$\begin{aligned} (\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 &= \mathbb{1}; \quad \sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = 0, \quad j \neq k; \\ [\sigma^i, \sigma^j] &= 2\varepsilon_{ijk} \sigma^k. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Como la unidad de matriz $\mathbb{1}$ conmuta con todas las matrices, un elemento general de $U(2)$ puede escribirse como

$$\mathbf{U} = e^{i(\alpha^0 \mathbb{1} + \alpha^k \sigma^k)} = e^{i\alpha^0} e^{i\alpha^k \sigma^k}.$$

El factor de fase $e^{i\alpha^0}$ pertenece al grupo $U(1)$. Por lo tanto, los elementos de $SU(2)$ tienen la forma

$$\mathbf{U}_s = e^{i\alpha^k \sigma^k}. \quad (\text{A.42})$$

Un elemento puede ser especificado por los tres parámetros α^k ; Las matrices σ^k son los generadores correspondientes del grupo. Cada uno tiene traza cero.

El álgebra de las matrices σ^k nos permite escribir estos elementos en forma cerrada. Consideremos formalmente las α^k para formar un vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}$, donde $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ es el vector unitario correspondiente, y el ‘‘producto escalar’’ es $\alpha^k \sigma^k$ como $\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sigma$. Es fácil ver eso

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \sigma) = \hat{\alpha}^j \sigma^j \hat{\alpha}^k \sigma^k = \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^j \mathbb{1} = \mathbb{1},$$

ya que $\sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = 0$ y $(\sigma^1)^2 = \mathbb{1}$, etc. Entonces la expansión de la serie de potencia de (A.42) da

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= \mathbb{1} + i\alpha(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sigma) + \frac{(i\alpha)^2}{2!} \mathbb{1} + \dots \\ &= \cos \alpha \mathbb{1} + i \sin \alpha (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Para establecer la conexión entre los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$, asociamos con cada punto \mathbf{x} la matriz hermítica

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Esta matriz tiene $\text{Tr } \mathbf{X} = 0$ y $\det \mathbf{X} = -x^k x^k$.

Considere ahora un elemento \mathbf{U} de $SU(2)$ y la matriz

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^\dagger. \quad (\text{A.45})$$

Ahora estamos quitando el subíndice s en \mathbf{U} de (A.43). \mathbf{X}' también es Hermitico, y $\text{Tr } \mathbf{X}' = \text{Tr } (\mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^\dagger) = \text{Tr } (\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{X}) = \text{Tr } \mathbf{X} = 0$. Por lo tanto, \mathbf{X}' tiene la forma

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}$$

donde los x'^k están relacionados con el x^k por una transformación lineal real.

También $\det \mathbf{X}' = \det \mathbf{U} \det \mathbf{X} \det \mathbf{U}^\dagger = \det(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) \det \mathbf{X} = \det \mathbf{X}$, de modo que $x'^k x'^k = x^k x^k$. Como la longitud de \mathbf{x} se conserva y la transformación puede generarse continuamente a partir de la matriz identidad, la transformación debe corresponder a una rotación adecuada de los ejes de coordenadas y, por lo tanto, a una matriz de rotación $\mathbf{R}(\mathbf{U})$.

Como ejemplo, la matriz $SU(2)$

$$\mathbf{U} = e^{i(\theta/2)\sigma^3} = \cos(\theta/2)\mathbb{1} + i \sin(\theta/2)\sigma^3 = \begin{pmatrix} e^{i(\theta/2)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta/2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

donde hemos usado (A.43), corresponde a la matriz de rotación $\mathbf{R}_3(\theta)$ de la ecuación (A.36). Esto se puede verificar por multiplicación directa de la matriz.

Las matrices \mathbf{U} y $-\mathbf{U}$ dan la misma transformación (A.45), y por lo tanto corresponden a la misma matriz de rotación: a cada elemento de $SO(3)$ corresponden dos elementos de $SU(2)$, que difieren en un factor de -1 . En el ejemplo (A.46) anterior, las rotaciones de θ y $\theta + 2\pi$ alrededor del eje-3 corresponden a la misma matriz de rotación, pero dan las matrices \mathbf{U} y $-\mathbf{U}$, respectivamente en $SU(2)$.

A.5 El grupo $SL(2, C)$ y el grupo de Lorentz apropiado

El conjunto de todas las matrices 2×2 con elementos complejos y con un determinante igual a 1 evidentemente forma un grupo bajo la multiplicación matricial. Este grupo se denota por $SL(2, C)$. Está relacionado con el grupo de transformaciones de Lorentz adecuadas de la misma manera que el grupo $SU(2)$ está relacionado con el grupo de rotaciones $SO(3)$.

Ahora asociamos con cada punto $x = (x^0, \mathbf{x})$ en el espacio-tiempo la matriz hermítica general

$$\mathbf{X}(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

que tiene

$$\det \mathbf{X} = (x^0)^2 - x^k x^k.$$

Considere un elemento \mathbf{M} de $SL(2, C)$ y la matriz \mathbf{X}' dada por

$$\mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{X} \quad \text{o} \quad \mathbf{X}' = (\mathbf{M}^{-1})^\dagger \mathbf{X} \mathbf{M}^{-1}. \quad (\text{A.48})$$

Entonces \mathbf{X}' también es hermítica y por eso podemos escribir

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix},$$

donde las x'^μ están relacionadas con las x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) por una transformación lineal real. también

$$\det \mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \det \mathbf{M}^\dagger \det \mathbf{X}' \det \mathbf{M} = \det \mathbf{X}' = \det \mathbf{X}$$

así que

$$(x'^0)^2 - x'^k x'^k = (x^0)^2 - x^k x^k.$$

Por lo tanto, la matriz \mathbf{M} corresponde a una matriz de transformación de Lorentz $\mathbf{L}(\mathbf{M})$. Las matrices $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ forman un grupo que incluye la transformación de identidad $\mathbf{L}(1) = 1$ y, por lo tanto, por continuidad corresponden a las transformaciones de Lorentz adecuadas.

Una transformación general adecuada de Lorentz entre los marcos de referencia K y K' se especifica mediante seis parámetros: tres parámetros para dar la velocidad \mathbf{v} de K' en relación con K y tres parámetros para dar la orientación de K' en relación con K . Se define una matriz compleja general 2×2 por ocho parámetros reales. La condición $\det \mathbf{M} = 1$ reduce este número a seis. Por lo tanto, se puede encontrar una matriz \mathbf{M} correspondiente a cada transformación de Lorentz adecuada. Las matrices \mathbf{M} y $-\mathbf{M}$ dan la misma transformación (A.48): dos elementos de $SL(2, C)$ corresponden a cada elemento del grupo de Lorentz apropiado.

La matriz

$$\mathbf{P} = e^{(\theta/2)\sigma^3} = \cosh(\theta/2)1 + \sinh(\theta/2)\sigma^3 = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

corresponde al boost de Lorentz, como se puede verificar por multiplicación directa de la matriz.

De manera más general, un boost de Lorentz de un marco de referencia K a un otro marco de referencia K' que se mueve con velocidad $v = \tanh\theta$ en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ viene dado por

$$\mathbf{P} = e^{(\theta/2)\hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cosh(\theta/2)\mathbb{1} + \sinh(\theta/2)\hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

Puesto que las matrices σ^k son hermíticas, también lo es cualquier matriz \mathbf{P} correspondiente a un boost de Lorentz.

A.6 Transformaciones de las matrices de Pauli

Al discutir las transformaciones de Lorentz, es conveniente escribir $\mathbb{1} = \sigma^0$ e introducir la notación

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \quad (\text{A.50})$$

Entonces de (A.47)

$$\mathbf{X}(x) = x^0\sigma^0 + x^k\sigma^k = x_\mu\tilde{\sigma}^\mu, \quad \mathbf{X}'(x') = x'_\mu\tilde{\sigma}^\mu.$$

La relación

$$\mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{X}$$

resulta

$$x'_\mu \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = x_\nu \tilde{\sigma}^\nu = L_\nu^\mu \tilde{\sigma}^\nu x'_\mu.$$

Como las x'_μ son arbitrarias, podemos deducir

$$\mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = L_\nu^\mu \tilde{\sigma}^\nu. \quad (\text{A.51})$$

Además

$$L_\nu^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M).$$

Del mismo modo, al considerar la matriz

$$\mathbf{X}_1(x) = x^0 \sigma^0 + x^k \sigma^k = x_\nu \sigma^\nu,$$

que también tiene $\det \mathbf{X}_1 = (x^0)^2 - x^k x^k$, podemos mostrar que existe una matriz \mathbf{N} que pertenece a $SL(2, C)$ de modo que

$$\mathbf{N}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{N} = L_\nu^\mu \tilde{\sigma}^\nu. \quad (\text{A.52})$$

Las matrices \mathbf{M} y \mathbf{N} están evidentemente relacionadas. Se puede verificar directamente que cuando $\mathbf{M} = \mathbf{P}$, donde \mathbf{P} viene dado por (A.49) y corresponde a un boost de Lorentz, podemos tomar $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}$, y esto será cierto para un boost de Lorentz en cualquier dirección. Para una rotación pura de ejes, tomamos $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{U}$, donde \mathbf{U} es una matriz unitaria. Se puede construir una \mathbf{M} general como producto de una rotación seguida de un boost: $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{U}$. El \mathbf{N} correspondiente está dado por $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$.

Ahora \mathbf{U} satisface $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger$, y notamos que \mathbf{P} es Hermitico, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$. Por lo tanto

$$\mathbf{N}\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U})(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{P}) = \mathbb{1}, \quad (\text{A.53})$$

para que \mathbf{N} sea el inverso de \mathbf{M}^\dagger .

Los resultados (A.51) y (A.52), junto con (A.53), son útiles para construir escalares, vectores y tensores de orden superior de Lorentz.

A.7 Espinores

Nosotros definimos un espinor izquierdo

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

como una entidad compleja de dos componentes que se transforma bajo una transformación de Lorentz con la matriz $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ por la regla

$$\mathbf{l}' = \mathbf{M}\mathbf{l} \quad (\text{A.54})$$

es decir, $l'_a = M_{ab}l_b$, donde a y b toman los valores 1, 2.

Definimos de manera similar un espinor derecho

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

como una entidad de dos componentes que se transforma por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{N}\mathbf{r}.$$

Los electrones, y todos los otros fermiones en el Modelo Estándar, se describen por campos de espín. La nomenclatura de “izquierdo” y “derecho” se explica en la Sección 3.1.

Los espinores tienen la notable propiedad de que se pueden combinar en pares para formar escalares de Lorentz, cuadrvectores de Lorentz y tensores de Lorentz de orden superior. Por ejemplo, $\mathbf{l}^\dagger \mathbf{r} = l_a^* r_a$ es un escalar de Lorentz (complejo), ya que

$$\mathbf{l}'^\dagger \mathbf{r}' = (\mathbf{M}\mathbf{l})^\dagger \mathbf{N}\mathbf{r}, \quad (\text{A.56})$$

donde hemos usado (A.53).

Las cantidades

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^\dagger \tilde{\sigma} \mathbf{l} &= \mathbf{l}^\dagger (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \mathbf{l}, \\ \mathbf{r}^\dagger \sigma \mathbf{r} &= \mathbf{r}^\dagger (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \mathbf{r}, \end{aligned}$$

se transforman como cuadrvectores contravariantes (reales), ya que

$$\mathbf{l}'^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{l}' = \mathbf{l}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} \mathbf{l} = L_\nu^\mu (\mathbf{l}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu \mathbf{l}), \quad (\text{A.57})$$

utilizando (A.51), y

$$\mathbf{r}'^\dagger \sigma^\mu \mathbf{r}' = \mathbf{r}^\dagger \mathbf{N}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{N} \mathbf{r} = L_\nu^\mu (\mathbf{r}^\dagger \sigma^\nu \mathbf{r}), \quad (\text{A.58})$$

utilizando (A.52).

A.8 El grupo $SU(3)$

El grupo unitario especial $SU(3)$ es el grupo de todas las matrices 3×3 unitarias con determinante igual a 1. Nuestra discusión será paralela a nuestra discusión del grupo $SU(2)$ en la Sección A.3. Un elemento de $SU(3)$ se puede expresar como

$$\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}}$$

donde \mathbf{H} es una matriz 3×3 hermética. Una matriz 3×3 general hermética se especifica mediante $3 \times 2 = 9$ parámetros reales. La condición $\det \mathbf{U} = 1$, o equivalentemente $\text{Tr } \mathbf{H} = 0$, reduce este número a 8. En lugar de las matrices σ^k utilizadas en la sección A.3, tenemos las ocho matrices herméticas sin trazas introducidas por Gell-Mann :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.59}$$

Una matriz hermítica general sin traza es de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_8 \lambda_8 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_8/\sqrt{3} & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3 + \alpha_8/\sqrt{3} & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_1 + i\alpha_5 & \alpha_6 + i\alpha_7 & -2\alpha_8/\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A.60}$$

Las matrices λ_a satisfacen las relaciones de commutación

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda_c\tag{A.61}$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura (ver ecuaciones (A.41)). Los f_{abc} son impares en el intercambio de cualquier par de índices, y los f_{abc} que no desaparecen están dados por las permutaciones de $f_{123} = 1$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$, $f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$.

Las matrices también tienen la propiedad

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab},\tag{A.62}$$

donde δ_{ab} es el Kronecker δ .

Estos resultados pueden ser verificados por cálculo directo.

Apéndice B

Ecuación de Dirac

En este apéndice se alistarán los principales resultados relacionados con la ecuación de Dirac.

B.1 La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac se puede escribir

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\boldsymbol{\nabla}) + \beta m]\psi(x) \quad (\text{B.1})$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y β es una matriz hermítica 4×4 que satisface

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.2})$$

con

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad (\text{B.3})$$

la ecuación de Dirac se convierte

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

con las matrices γ^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$), de dimensión 4×4 , satisfaciendo las relaciones de anticommutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

y las condiciones de hermiticidad

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{B.6})$$

Excepto por la Sección B.8 al final del apéndice, las siguientes propiedades son consecuencias de las ecuaciones (B.4) a (B.6) solamente y no dependen de elegir una representación particular para las matrices γ .

Una quinta matriz anticommutadora se define por

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{B.7})$$

y γ^5 tiene las propiedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \quad (\text{B.8})$$

Tenga en cuenta que los índices griegos siempre representarán los valores 0, 1, 2, 3 únicamente, y no para 5.

Las matrices de espín 4×4

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{B.9})$$

satisfacen

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 \quad (\text{B.10})$$

y, con $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ y $i, j, k = 1, 2, 3$ en orden cíclico, podemos escribir

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k. \quad (\text{B.11})$$

Hasta ahora, las matrices γ , y las matrices derivadas de ellas, se han definido con índices superiores: γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$, etc. Ahora definimos las matrices correspondientes con índices inferiores por la relación

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad (\text{B.12})$$

Sin embargo, estas matrices no se transforman como tensores. A continuación veremos que son las formas bilineales de los espinores que contienen estas matrices las que tienen las propiedades de transformación de los tensores.

También definimos la matriz γ_5 a través de

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^5, \quad (\text{B.13})$$

donde el símbolo $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ es completamente antisimétrico siendo igual a $+1$ para $(\alpha, \beta, \mu, \nu)$ una permutación par de $(0, 1, 2, 3)$, igual a -1 para una permutación impar, y desaparece si dos o más índices son iguales.

B.2 Identidades

La manipulación de expresiones que involucran matrices γ a menudo se ve facilitada en gran medida por el uso de las siguientes identidades algebraicas, que se derivan fácilmente de las relaciones de anticommutación (B.5):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4, & \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}, & \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\mu &= -2\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\delta \gamma^\mu &= 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.14a})$$

Si A, B, \dots denotan cuadrivectores y ‘A slash’ se define por $\mathcal{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, etc., obtenemos la siguiente contracción identificada a partir de las ecuaciones (B.14a):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\mu \mathcal{A} \gamma^\mu &= -2\mathcal{A} \\ \gamma_\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \gamma^\mu &= 4AB, & \gamma_\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \gamma^\mu &= -2\mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{A} \\ \gamma_\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D} \gamma^\mu &= 2(\mathcal{D} \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} + \mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{D}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.14b})$$

El símbolo $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ antisimétrico, introducido en la ecuación (B.13), satisface las siguientes identidades de contracción:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} &= -2(g_\sigma^\mu g_\tau^\nu - g_\tau^\mu g_\sigma^\nu) \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\tau} &= -6g_\tau^\nu \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= -24 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.14c})$$

B.3 Trazas

A continuación, enumeramos algunas reglas y relaciones que son extremadamente útiles para evaluar la traza de un producto de matrices γ . Algunos comentarios sobre la derivación de estos resultados se dan al final de la lista.

(i) Para dos matrices \mathbf{U} y \mathbf{V} de dimensión $n \times n$ tenemos que

$$\text{Tr}(\mathbf{UV}) = \text{Tr}(\mathbf{VU}). \quad (\text{B.15})$$

(ii) Si $(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu)$ contienen un número impar de matrices γ , entonces

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0. \quad (\text{B.16})$$

(iii) Para un producto de un número par de matrices γ :

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 4g^{\alpha\beta}, & \text{Tr}\sigma^{\alpha\beta} &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\delta) &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\lambda\delta} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\lambda}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.17})$$

y de las ecuaciones (B.17):

$$\text{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = 4(AB) \quad (\text{B.18a})$$

$$\text{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) = 4\{(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)\}, \quad (\text{B.18b})$$

y generalmente, si A_1, A_2, \dots, A_{2n} son cuadrvectores, entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_{2n}) &= \{(A_1 A_2) \text{Tr}(\mathcal{A}_3 \dots \mathcal{A}_{2n}) - (A_1 A_3) \text{Tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4 \dots \mathcal{A}_{2n}) \\ &\quad + \dots + (A_1 A_{2n}) \text{Tr}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 \dots \mathcal{A}_{2n-1})\}. \end{aligned} \quad (\text{B.18c})$$

En muchos casos específicos, uno puede evaluar las trazas de manera más simple que mediante el uso directo repetido de la ecuación (B.18c). Las relaciones de contracción, ecuaciones (B.14), son particularmente útiles a este respecto, como es

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = AB - i\sigma^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = 2AB - \mathcal{B}\mathcal{A}, \quad (\text{B.19a})$$

y los casos particulares de esta ecuación:

$$\mathcal{A}\mathcal{A} = A^2; \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\mathcal{B}\mathcal{A}, \quad \text{si } AB = 0. \quad (\text{B.19b})$$

(iv) Para cualquier producto de matrices γ

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \dots \gamma^\beta \gamma^\alpha) \quad (\text{B.20a})$$

de dónde

$$\text{Tr}(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_{2n}) = \text{Tr}(\mathcal{A}_{2n} \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1). \quad (\text{B.20b})$$

(v) Los resultados anteriores se pueden extender a productos que involucran la matriz γ^5 , siendo las relaciones más importantes

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}\gamma^5 &= \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu) = 0 \\ \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) &= -4i\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.21})$$

Otros resultados que implican γ^5 se obtienen fácilmente de las ecuaciones (B.15) a (B.21), usando las ecuaciones (B.7) y (B.8) que definen γ^5 y establecen sus propiedades principales.

Los siguientes comentarios son suficientes para deducir las ecuaciones (B.16) a (B.21).

Obtenemos la ecuación (B.16) usando $(\gamma^5)^2 = 1$ y la ecuación (B.15), de donde

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu) = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu \gamma^5].$$

En la última traza, usamos $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para conmutar la matriz γ^5 de la izquierda al lado derecho, con el resultado $-\text{Tr}(\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu)$ para un número impar de factores en $(\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu)$. De ahí sigue la ecuación (B.16).

Las ecuaciones (B.17) se deducen del uso repetido de las relaciones de anticommutación (B.5) de las matrices y de la propiedad cíclica (B.15) de las trazas.

Para derivar la ecuación (B.20a), presentamos las matrices transpuestas $\gamma^{\alpha T}$. Se sigue de las ecuaciones (B.5) y (B.6) que las matrices $(-\gamma^{\alpha T})$ también satisfacen las relaciones de anticommutación (B.5) y las condiciones de hermiticidad (B.6). Por lo tanto, según el teorema fundamental de Pauli (B.61) existe una matriz unitaria \mathbf{C} tal que

$$\mathbf{C}\gamma^\alpha \mathbf{C}^{-1} = -\gamma^{\alpha T}. \quad (\text{B.22})$$

La ecuación (B.20a) luego se sigue de

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\nu) &= \text{Tr}[(-\mathbf{C}\gamma^{\alpha T}\mathbf{C}^{-1})(-\mathbf{C}\gamma^{\beta T}\mathbf{C}^{-1}) \dots (-\mathbf{C}\gamma^{\nu T}\mathbf{C}^{-1})] \\ &= \text{Tr}(\gamma^{\alpha T}\gamma^{\beta T} \dots \gamma^{\nu T}) = \text{Tr}[(\gamma^\nu \dots \gamma^\beta \gamma^\alpha)^T]. \end{aligned}$$

Por último, las ecuaciones (B.21) se sigue de $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, la propiedad cíclica (B.15) de las trazas y las ecuaciones (B.16) y (B.17), es decir

$$\text{Tr}\gamma^5 = \text{Tr}[(\gamma^5\gamma^0)\gamma^0] = \text{Tr}\gamma^5 = \text{Tr}[(-\gamma^0\gamma^5)\gamma^0] = -\text{Tr}\gamma^5 = 0.$$

B.4 Solución de onda plana

La ecuación de Dirac (B.4) posee soluciones de onda plana

$$\psi(x) = \text{const.} \begin{pmatrix} u_r(\mathbf{p}) \\ v_r(\mathbf{p}) \end{pmatrix} e^{\pm ipx} \quad (\text{B.23})$$

donde $p = (E_{\mathbf{p}}/\mathbf{p})$ y $E_{\mathbf{p}} = +(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$. En la teoría de una sola partícula, $u_r(\mathbf{p})$ corresponde a una partícula de momento \mathbf{p} y energía positiva $E_{\mathbf{p}}$, $v_r(\mathbf{p})$ a momento $-\mathbf{p}$ y energía negativa $-E_{\mathbf{p}}$. El índice $r = 1, 2$ etiqueta dos soluciones independientes para cada cuadrimomento \mathbf{p} , que elegiremos para ser ortogonales.

Los cuatro espinores constantes $u_r(\mathbf{p})$ y $v_r(\mathbf{p})$, y sus adjuntas

$$\bar{u}_r(\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p})^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p}) = v_r(\mathbf{p})^\dagger \gamma^0, \quad (\text{B.24})$$

satisfacen las ecuaciones

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} - m)v_r(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0. \quad (\text{B.26})$$

Con la normalización de estos espinores definidos por

$$u_r(\mathbf{p})^\dagger u_r(\mathbf{p}) = v_r(\mathbf{p})^\dagger v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}, \quad (\text{B.27})$$

uno deduce las siguientes relaciones de ortonormalidad de las ecuaciones (B.25) y (B.26):

$$\left. \begin{aligned} u_r(\mathbf{p})^\dagger u_s(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \\ u_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(-\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.28})$$

y

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r(\mathbf{p})^\dagger u_s(\mathbf{p}) &= -\bar{v}_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})^\dagger v_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p})^\dagger u_s(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.29})$$

Los espinores $u_r(\mathbf{p})$ y $v_r(\mathbf{p})$, $r = 1, 2$, satisfacen la relación de complejidad

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.30})$$

Esta relación puede establecerse mostrando que se cumple para los cuatro estados básicos $u_s(\mathbf{p})$ y $v_s(\mathbf{p})$, $s = 1, 2$.

B.5 Operadores de proyección de energía

Los operadores de proyección de energía están definidos por

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p}) = \frac{\pm p + m}{2m}. \quad (\text{B.31})$$

Tienen las propiedades, que se derivan de las ecuaciones (B.25) y (B.26), de proyectar las soluciones de energía positiva / negativa a partir de una combinación lineal de los cuatro estados de onda plana $u_r(\mathbf{p})$ y $v_r(\mathbf{p})$ es decir

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), & \Lambda^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}) \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p}), & \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.32})$$

y

$$\Lambda^+v_r(\mathbf{p}) = \Lambda^-u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^+ = \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^- = 0. \quad (\text{B.33})$$

De las ecuaciones (B.31) se verifica directamente la característica de propiedad de los operadores de proyección

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Lambda^\pm(\mathbf{p}) \quad (\text{B.34a})$$

(ya que $p\bar{p} = p^2 = m^2$), así como

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p})\Lambda^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Lambda^+(\mathbf{p}) + \Lambda^-(\mathbf{p}) = 1. \quad (\text{B.34b})$$

Usando la relación de completitud (B.30), se muestra fácilmente que los operadores de proyección $\Lambda^\pm(\mathbf{p})$ se pueden escribir

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}). \quad (\text{B.35})$$

B.6 Operador de helicidad y proyección del espín

Las soluciones de onda plana $u_r(\mathbf{p})$ y $v_r(\mathbf{p})$ de la ecuación de Dirac como estados propios de la matriz de espín de 4×4

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (\text{B.36})$$

satisfacen las ecuaciones

$$\sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2.$$

En consecuencia, ahora definimos los operadores

$$\Pi^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}) \quad (\text{B.37})$$

que se ve fácilmente que tienen las propiedades

$$[\Pi^{\pm}(\mathbf{p})]^2 = \Pi^{\pm}(\mathbf{p}), \quad \Pi^{\pm}(\mathbf{p}) \Pi^{\mp}(\mathbf{p}) = 0, \quad \Pi^{+}(\mathbf{p}) + \Pi^{-}(\mathbf{p}) = 1, \quad (\text{B.38})$$

y

$$[\Lambda^{+}(\mathbf{p}), \Pi^{\pm}(\mathbf{p})] = [\Lambda^{-}(\mathbf{p}), \Pi^{\pm}(\mathbf{p})] = 0. \quad (\text{B.39})$$

Los espinores $u_r(\mathbf{p})$ y $v_r(\mathbf{p})$ satisfacen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \Pi^{+}(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r} u_r(\mathbf{p}), & \Pi^{+}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r} v_r(\mathbf{p}) \\ \Pi^{-}(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r} u_r(\mathbf{p}), & \Pi^{-}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r} v_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad r = 1, 2. \quad (\text{B.40})$$

Vemos de las ecuaciones (B.38) que los operadores $\Pi^{\pm}(\mathbf{p})$ son operadores de proyección de estados mutuamente ortogonales. Se deduce que $u_1(\mathbf{p})[u_2(\mathbf{p})]$ representa un electrón de energía positiva con espín paralelo [antiparalelo] a su dirección de movimiento \mathbf{p} , es decir, es un estado de helicidad positivo (negativo). Por lo tanto, los operadores $\Pi^{\pm}(\mathbf{p})$ se denominan operadores de proyección de helicidad.

La interpretación correspondiente para los espinores $v_r(\mathbf{p})$ también es posible en la teoría de una sola partícula, ya sea en términos de estados de energía negativa de electrones o en términos de teoría de agujeros. Considere, por ejemplo, el espinor $v_1(\mathbf{p})$. En el lenguaje de los estados de energía negativa, $v_1(\mathbf{p})$ representa un electrón de energía negativa con momento $-\mathbf{p}$ y, espín paralelo a $-\mathbf{p}$, de modo que $v_1(\mathbf{p})$ es un estado de helicidad positiva del electrón de energía negativa. Traducido al lenguaje de la teoría de agujeros, la ausencia de este electrón de energía negativa representa un positrón con momento $+\mathbf{p}$ y espín paralelo a $+\mathbf{p}$, es decir, continúa siendo un estado positivo de helicidad del positrón.

Para una partícula de Dirac de masa cero, podemos expresar los operadores de proyección de helicidad en términos de la matriz γ^5 . Para $m = 0$, tenemos $p_0 = |\mathbf{p}|$ y las ecuaciones (B.25) convierten

$$\gamma^0 \mathbf{|p|} w_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p}), \quad (\text{B.41})$$

donde $w_r(\mathbf{p})$ representa $u_r(\mathbf{p})$ o $v_r(\mathbf{p})$. Premultiplicando la última ecuación por $\gamma^5 \gamma^0$ y usando la ecuación (B.11), obtenemos

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p}) \quad (\text{B.42})$$

es decir, los operadores de proyección de helicidad (B.37) se convierten, para $m = 0$,

$$\Pi^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5). \quad (\text{B.43})$$

Para partículas de masa m no nula, este resultado se mantiene en $\mathcal{O}(m/p_0)$ en el límite de alta energía.

Hasta ahora solo hemos considerado operadores de proyección de helicidad. Para una partícula de Dirac, el componente de rotación en una dirección arbitraria es un buen número cuántico en el marco en reposo de la partícula solamente. Veremos que en el marco en reposo se pueden definir operadores de proyección de espín para un eje arbitrario de cuantización de manera covariante, y al llevar a cabo una transformación de Lorentz en un marco de coordenadas arbitrario, se pueden definir operadores de proyección de espín en este marco.

Con el eje de cuantización en el marco de referencia en reposo de la partícula especificada por el vector unitario \mathbf{n} , definimos el vector unitario n^μ para ser dado en este marco de referencia en reposo por

$$n^\mu = (0, \mathbf{n}). \quad (\text{B.44})$$

De la invariancia de los productos escalares, se deduce que en cualquier otro marco también

$$n^2 = -1, \quad np = 0, \quad (\text{B.45})$$

donde p es el cuadri momento de la partícula en este marco. Los operadores de proyección de espín necesarios están dados por

$$\Pi^\pm(n) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5 \boldsymbol{\alpha}). \quad (\text{B.46})$$

Uno verifica fácilmente que estos operadores satisfacen ecuaciones como las ecuaciones (B.38), característico de los operadores de proyección, y que conmutan con los operadores de proyección de energía $\Lambda^\pm(\mathbf{p})$ para todos los vectores \mathbf{p} que satisfacen la ecuación (B.45). En el marco en reposo de la partícula, los operadores (B.46) tienen las propiedades deseadas. A continuación se muestra una representación matricial adecuada para este propósito, ecuaciones (B.63) a (B.66).

B.7 Propiedades relativistas

Las ecuaciones de Dirac para $\psi(x)$ y su adjunta $\bar{\psi}(x)$,

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad i\gamma^\mu \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu} + m\bar{\psi}(x) = 0, \quad (\text{B.47})$$

son covariantes de Lorentz, siempre que los espinores $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ se transformen adecuadamente. Consideraremos transformaciones homogéneas de Lorentz ortocronas.

$$x^\mu = x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (\text{B.48})$$

es decir $\Lambda_0^0 > 0$ y $\det \Lambda_\nu^\mu = \pm 1$, para que el sentido del tiempo no se invierta, pero la transformación puede o no implicar inversión espacial. Se puede demostrar que, correspondiente a cada transformación, se puede construir una matriz 4×4 no singular $S = S(\Lambda)$ con las propiedades

$$\gamma^\nu = \Lambda_\nu^\mu S \gamma^\mu S^{-1} \quad (\text{B.49})$$

y

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0. \quad (\text{B.50})$$

Si las propiedades de transformación del espín de Dirac o $\psi(x)$ están definidas por

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x), \quad (\text{B.51})$$

entonces la covarianza de las ecuaciones de Dirac (B.47) se establece fácilmente.

De las ecuaciones (B.50) y (B.51) se deduce la propiedad de transformación correspondiente del spinor adjunto $\bar{\psi}(x)$ como

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}. \quad (\text{B.52})$$

De las ecuaciones (B.49), (B.51) y (B.52), se obtienen las cinco covariantes bilineales básicas de la teoría de Dirac. Bajo una transformación de Lorentz

$$\left. \begin{array}{c} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi \end{array} \right\} \text{se transforma como} \left. \begin{array}{c} \text{escalar} \\ \text{vector} \\ \text{tensor antisimétrico de segundo rango} \\ \text{pseudo-vector} \\ \text{pseudo-escalar} \end{array} \right\} \quad (\text{B.53})$$

Finalmente, obtenemos la forma explícita de la transformación (B.51) para una rotación de Lorentz infinitesimal, es decir.

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu = (g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) x^\nu \quad (\text{B.54})$$

donde $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x)$$

o en forma matricial

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x) = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) \psi(x) \quad (\text{B.55})$$

donde $S^{\mu\nu}$ es antisimétrica.

Usando la relación de ortogonalidad para $\Lambda_{\mu\nu}$ podemos reescribir la ecuación (B.49) como

$$S\gamma^\lambda S^{-1} = \gamma^\nu \Lambda_\nu^\lambda. \quad (\text{B.56})$$

Usando la ecuación (B.55) podemos escribir el lado izquierdo de la ecuación (B.56), a primer orden en $\varepsilon_{\mu\nu}$ como

$$\gamma^\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda]. \quad (\text{B.57})$$

De (B.54) el lado derecho de la ecuación (B.56) se puede escribir

$$\begin{aligned} \gamma^\nu (g_\nu^\lambda + \varepsilon_\nu^\lambda) &= \gamma^\lambda + \gamma^\nu g^{\lambda\mu} \varepsilon_{\nu\mu} \\ &= \gamma^\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu}). \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Al igualar las dos últimas expresiones, obtenemos

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu},$$

y uno verifica directamente que esta ecuación tiene la solución

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu. \quad (\text{B.59})$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (B.55) y (B.59), y la definición (B.9) de $\sigma^{\mu\nu}$, uno encuentra que bajo rotaciones de Lorentz un espinor de Dirac se transforma como

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) - \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi(x). \quad (\text{B.60})$$

B.8 Representaciones de las matrices γ

Hasta ahora hemos desarrollado la teoría de Dirac de manera libre de representación, confiando solo en las relaciones de anticommutación (B.5) y las condiciones de hermiticidad (B.6) de las matrices γ . Hay muchas formas de escribir γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, como matrices de 4×4 , de modo que las ecuaciones (B.5) y (B.6) se mantienen. Si γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, y $\tilde{\gamma}^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, son dos de esos conjuntos de matrices, es decir, cada conjunto satisface las ecuaciones (B.5) y (B.6), entonces el teorema fundamental de Pauli establece que

$$\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger, \quad (\text{B.61})$$

donde U es una matriz unitaria.

Enunciaremos dos representaciones particulares que son útiles en la práctica.

- (i) *Representación de Dirac-Pauli.* Esta representación tiene un límite simple no relativista. En términos de las matrices espín de Pauli 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.62})$$

las matrices de Dirac se pueden escribir en esta representación como

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 = \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, & k &= 1, 2, 3 \\ \gamma^k = \beta \alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, & k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.63})$$

de donde

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ en orden cíclico,} \quad (\text{B.64})$$

$$\sigma^{ij} = i\alpha_k = i \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{B.65})$$

y

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.66})$$

Un conjunto completo de estados de onda plana ahora se construye fácilmente. Con los espinores no relativistas de dos componentes definidos por

$$\chi_1 \equiv \chi'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 \equiv \chi'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.67})$$

se pueden escribir las soluciones de energía positiva y negativa de la ecuación de Dirac para una partícula en reposo

$$u_r(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi'_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2. \quad (\text{B.68})$$

Ya que

$$(m \pm p)(m \mp p) = m^2 - p^2 = 0,$$

resulta que

$$u_r(\mathbf{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{(2mE_{\mathbf{p}} + 2m^2)}} u_r(0), \quad r = 1, 2, \quad (\text{B.69})$$

y

$$v_r(\mathbf{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{(2mE_{\mathbf{p}} + 2m^2)}} v_r(0), \quad r = 1, 2, \quad (\text{B.70})$$

son soluciones de la ecuación de Dirac con vectores de energía-momento $\pm p = (\pm E_{\mathbf{p}} \pm p)$ respectivamente. Los denominadores en las ecuaciones (B.69) y (B.70) aseguran la normalización (B.27). De la representación (B.63) podemos escribir la ecuación (B.69) como

$$u_r(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} \chi_r \\ B \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2, \quad (\text{B.71})$$

donde

$$A \equiv \left(\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m} \right)^{1/2}, \quad B \equiv \frac{1}{E_{\mathbf{p}} + m}. \quad (\text{B.72})$$

Usando las ecuaciones (B.62) y (B.67) finalmente obtenemos de (B.71)

$$u_1(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ Bp^3 \\ B(p^1 + ip^2) \end{pmatrix}, \quad u_2(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B(p^1 - ip^2) \\ -Bp^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.73})$$

Del mismo modo, los espinores de energía negativa (B.70) se pueden escribir como

$$v_r(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} B \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi'_r \\ \chi'_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2, \quad (\text{B.74})$$

y

$$v_1(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} B(p^1 - ip^2) \\ -Bp^3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} Bp^3 \\ B(p^1 + ip^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.75})$$

Vemos que los espinores (B.73) y (B.75) no son, en general, estados propios de helicidad, sino estados propios de la componente z del espín en el marco en reposo de la partícula.

El comportamiento de estas soluciones para velocidades v no relativistas (es decir, $v \approx |\mathbf{p}|/m \ll 1$) se ve fácilmente. Para las soluciones de energía positiva, las dos componentes superiores son muy grandes en comparación con las dos componentes inferiores, mientras que para las soluciones de energía negativa son las dos componentes inferiores las que dominan.

- (ii) *Representación de Majorana.* La simetría del campo de Dirac cuantificado entre partículas y antipartículas se vuelve particularmente obvia si se trabaja en una representación Majorana, que se distingue por la propiedad de que las cuatro matrices γ son puramente imaginarias, es decir, usar un subíndice M para denotar una representación de Majorana requerimos

$$\gamma_M^{\mu*} = -\gamma_M^\mu, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (\text{B.76})$$

Una representación particular de Majorana γ_M^μ se obtiene de la representación de Dirac-Pauli, ecuaciones (B.63) a (B.66), por la transformación unitaria, véase la ecuación (B.61),

$$\gamma_M^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger, \quad (\text{B.77})$$

con

$$U = U^\dagger = U^{-1} = \frac{1}{2}\gamma^0(1 + \gamma^2). \quad (\text{B.78})$$

Explícitamente, las matrices en esta representación de Majorana están dadas por

$$\left. \begin{aligned} \gamma_M^0 &= \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_M^1 &= \gamma^2\gamma^1 = i\sigma^{12} = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \gamma_M^2 &= -\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_M^3 &= \gamma^2\gamma^3 = -i\sigma^{23} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \\ \gamma_M^5 &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = \gamma^0\sigma^{31} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.79})$$

Vemos que en esta representación las cinco matrices γ son puramente imaginarias, ya que las matrices de Pauli σ_1 y σ_3 son reales y σ_2 es puramente imaginaria.

Apéndice C

Lagrangianos relativistas

C.1 Lagrangiano de Klein-Gordon

Para el caso que estemos considerando un solo campo, la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\text{C.1})$$

Para este caso,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi \quad (\text{C.2})$$

y

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \quad (\text{C.3})$$

al unir estas dos expresiones en la fórmula de Euler-Lagrange (2.14) obtenemos

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = -m^2\phi, \quad (\text{C.4})$$

que reescribiendo

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (\text{C.5})$$

llegamos a la ecuación de Klein-Gordon, la cual describe un campo escalar. En teoría cuántica de campos corresponde a una partícula de espín 0 y masa m .

C.2 Lagrangiano de Procca

Finalmente, supongamos que tenemos un campo vectorial, A^μ , con la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} + m^2 A^\nu A_\nu \quad (\text{C.6})$$

Para este caso,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (\text{C.7})$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu \quad (\text{C.8})$$

así que las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.14) resultan en

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (\text{C.9})$$

Esta es la ecuación de Procca y describe partículas de espín 1 con masa m . Esta notación nos recuerda a la electrodinámica que se presentó en la sección 2.1, y no es casualidad, para el campo electromagnético sin masa, si ajustamos $m = 0$, obtenemos las ecuaciones de Maxwell para el vacío.

Apéndice D

Demostraciones capítulo 2

D.1 Ecuación (2.47)

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi &= (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)\psi \\
&= \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu\psi) - \mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu\psi) \\
&= [\partial_\mu + iqeB_\mu]([\partial_\nu + iqeB_\nu]\psi) \\
&\quad - [\partial_\nu + iqeB_\nu]([\partial_\mu + iqeB_\mu]\psi) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu\psi) + iqe\partial_\mu(B_\nu\psi) + iqeB_\mu(\partial_\nu\psi) \\
&\quad + (iqe)^2 B_\mu B_\nu \psi - \partial_\nu(\partial_\mu\psi) - iqe\partial_\nu(B_\mu\psi) \\
&\quad - iqeB_\nu(\partial_\mu\psi) - (iqe)^2 B_\nu B_\mu \psi.
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Utilizando la commutación de las derivadas parciales, y el hecho de que estamos trabajando en un caso abeliano

$$\begin{cases} \partial_\mu(\partial_\nu\psi) = \partial_\nu(\partial_\mu\psi) \\ B_\mu B_\nu \psi = B_\nu B_\mu \psi \end{cases}$$

podemos simplificar la última igualdad de la ecuación (D.1):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi &= iqe\partial_\mu(B_\nu\psi) + iqeB_\mu(\partial_\nu\psi) \\
&\quad - iqe\partial_\nu(B_\mu\psi) - iqeB_\nu(\partial_\mu\psi) \\
&= iqe(\partial_\mu B_\nu)\psi + iqeB_\nu(\partial_\mu\psi) + iqeB_\mu(\partial_\nu\psi) \\
&\quad - iqe(\partial_\nu B_\mu)\psi - iqeB_\mu(\partial_\nu\psi) - iqeB_\nu(\partial_\mu\psi) \\
&= iqe\mathcal{F}_{\mu\nu}\psi.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

D.2 Ecuación (2.72)

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}_{\rho\sigma} &= (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu) \mathcal{G}_{\rho\sigma} \\
&= \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) - \mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) \\
&= \mathcal{D}_\mu(\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\nu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]) - \mathcal{D}_\nu(\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\mu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\nu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]) + [W_\mu, \partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\nu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]] \\
&\quad - \partial_\nu(\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\mu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]) - [W_\nu, \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + [W_\mu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]] \\
&= \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + \partial_\mu [W_\nu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}] + [W_\mu, \partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}] + [W_\mu, [W_\nu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]] \\
&\quad - \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \partial_\nu [W_\mu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}] - [W_\nu, \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}] - [W_\nu, [W_\mu, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]] \\
&= \partial_\mu(W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu) + W_\mu(\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) - (\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\mu \tag{D.3} \\
&\quad + [W_\mu, W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu] - \partial_\nu(W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu) - W_\nu(\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) \\
&\quad + (\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\nu - [W_\nu, W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu] \\
&= (\partial_\mu W_\nu) \mathcal{G}_{\rho\sigma} + W_\nu(\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) - (\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\nu - \mathcal{G}_{\rho\sigma}(\partial_\mu W_\nu) \\
&\quad + W_\mu(\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) - (\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\mu + W_\mu W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu \\
&\quad - W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu + \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu W_\mu - (\partial_\nu W_\mu) \mathcal{G}_{\rho\sigma} - W_\mu(\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) \\
&\quad + (\partial_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\mu + \mathcal{G}_{\rho\sigma}(\partial_\nu W_\mu) - W_\nu(\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) + (\partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma}) W_\nu \\
&\quad - W_\nu W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu + W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu W_\nu
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la identidad (2.68) y se ha tenido en cuenta que estamos trabajando en un caso no abeliano. Por ultimo, cancelando términos semejantes y simplificando

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}_{\rho\sigma} &= (\partial_\mu W_\nu) \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma}(\partial_\mu W_\nu) + W_\mu W_\nu \mathcal{G}_{\rho\sigma} + \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\nu W_\mu \\
&\quad - (\partial_\nu W_\mu) \mathcal{G}_{\rho\sigma} + \mathcal{G}_{\rho\sigma}(\partial_\nu W_\mu) - W_\nu W_\mu \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} W_\mu W_\nu \\
&= (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu]) \mathcal{G}_{\rho\sigma} \tag{D.4} \\
&\quad - \mathcal{G}_{\rho\sigma}(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu]) \\
&= \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\rho\sigma} - \mathcal{G}_{\rho\sigma} \mathcal{G}_{\mu\nu} \\
&= [\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}_{\rho\sigma}]
\end{aligned}$$

D.3 Ecuación (2.75)

$$\delta S = \delta \left[\int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] \right] + \delta \left[\int d^4x \bar{\Psi} (i\mathcal{D} - m) \Psi \right] \quad (\text{D.5})$$

Para que la acción sea estacionaria con respecto a pequeñas variaciones de los campos gauge

$$\mathbf{W}_\mu \longrightarrow \mathbf{W}_\mu + \delta \mathbf{W}_\mu \quad (\text{D.6})$$

y su derivada

$$\delta(\partial_\nu \mathbf{W}_\mu) = \partial_\nu(\delta \mathbf{W}_\mu) \quad (\text{D.7})$$

donde tratamos formalmente $\delta \mathbf{W}_\mu$ como una cantidad covariante que se transforma en una representación contigua del grupo

$$\delta \mathbf{W}'_\mu(x) = U(x) \delta \mathbf{W}_\mu(x) U^{-1}(x). \quad (\text{D.8})$$

El cambio de la intensidad de campo (2.68) bajo la variación (D.7) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu(\delta \mathbf{W}_\nu) - \mathcal{D}_\nu(\delta \mathbf{W}_\mu). \quad (\text{D.9})$$

Empezando por el primer término de la ecuación (D.5):

$$\delta \left[\int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] \right] = \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu'}] - \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu'}], \quad (\text{D.10})$$

debido a la ecuación (D.9) la traza del primer término de la derecha de la ecuación (D.10)

es:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[(\mathcal{G}_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu) - \mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu))(\mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) - \mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu))] \\
 &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) - \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu) \\
 &\quad + \mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)\mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) - \mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu) \\
 &\quad - \mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)\mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) + \mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu)].
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

Considerando únicamente términos de primer orden

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) - \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu) \\
 &\quad + \mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)\mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)\mathcal{G}^{\mu\nu}].
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

De la propiedad de la traza $\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu)] \\
 &\quad + \text{Tr}[\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)\mathcal{G}^{\mu\nu}] - \text{Tr}[\mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)\mathcal{G}^{\mu\nu}].
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

Por otra parte $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu)] \\
 &\quad + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)].
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Reescribiendo los siguientes términos que se encuentran dentro de la traza

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\mu(\delta\mathbf{W}^\nu) = \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu) \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{D}^\nu(\delta\mathbf{W}^\mu) = \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)] \\
 &\quad + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\nu(\delta\mathbf{W}_\mu)].
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Finalmente cambiando en el tercer y quinto término de la última igualdad $\mu \longleftrightarrow \nu$ y utilizando la propiedad de antisimetría de \mathcal{G} también en estos términos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}^{\nu\mu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] \\
&\quad + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[\mathcal{G}^{\nu\mu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] \\
&= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] \quad (\text{D.16}) \\
&\quad + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] \\
&= \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + 4\text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)].
\end{aligned}$$

Reduciéndose (D.10) a

$$\begin{aligned}
\delta \left[\int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] \right] &= \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] + 4 \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)] \\
&\quad - \int d^4x \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}] \\
&= \int d^4x \frac{2}{g^2} \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu(\delta\mathbf{W}_\nu)]. \quad (\text{D.17})
\end{aligned}$$

Usando la relación

$$\mathcal{D}_\mu \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{W}_\nu)] = \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu\mathcal{G}^{\mu\nu})\delta\mathbf{W}_\nu] + \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\delta\mathbf{W}_\nu)] \quad (\text{D.18})$$

para despejar el término que nos interesa

$$\text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\delta\mathbf{W}_\nu)] = \mathcal{D}_\mu \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu\mathcal{G}^{\mu\nu})\delta\mathbf{W}_\nu]. \quad (\text{D.19})$$

Aplicando la ecuación (2.68) en el primer término de la derecha de (D.19)

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\delta\mathbf{W}_\nu)] &= \partial_\mu \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{W}_\nu)] + \underbrace{[\mathbf{W}_\mu, \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{W}_\nu)]]}_{0} - \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu\mathcal{G}^{\mu\nu})\delta\mathbf{W}_\nu] \quad (\text{D.20}) \\
&= \partial_\mu \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{W}_\nu)] - \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu\mathcal{G}^{\mu\nu})\delta\mathbf{W}_\nu].
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en el lado derecho de la ecuación (D.17)

$$\frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Tr}[\mathcal{G}^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu \delta \mathbf{W}_\nu)] = \underbrace{\frac{2}{g^2} \int d^4x \partial_\mu \text{Tr}[(\mathcal{G}^{\mu\nu} \delta \mathbf{W}_\nu)]}_{0} - \frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}) \delta \mathbf{W}_\nu]. \quad (\text{D.21})$$

Desarrollando ahora el segundo término de la ecuación (D.5):

En el término restante considerando variaciones en los campos gauge

$$\begin{aligned} \delta \left[\int d^4x \bar{\Psi}(i\cancel{D} - m)\Psi \right] &= \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)'\Psi - \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi \\ &= \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathbf{W}'_\mu) - m)\Psi - \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathbf{W}_\mu) - m)\Psi \\ &= \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\mathbf{W}'_\mu - \mathbf{W}_\mu))\Psi \\ &= \int d^4x i\bar{\Psi}\gamma^\mu \delta \mathbf{W}_\mu \Psi \\ &= \int d^4x i\bar{\Psi}\gamma^\mu ig\delta W_{\alpha\mu} T^\alpha \Psi \\ &= - \int d^4x \bar{\Psi}\gamma^\mu g\delta W_{\alpha\mu} T^\alpha \Psi \\ &= - \int d^4x \bar{\Psi}\gamma^\mu T^\alpha \Psi g\delta W_{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Considerando las siguientes relaciones:

$$J_\mu(x) = iJ_\mu^\alpha(x)T^\alpha \quad (\text{D.23})$$

con

$$J_\mu^\alpha(x) = \bar{\Psi}\gamma_\mu T^\alpha \Psi, \quad (\text{D.24})$$

y examinando el término $\text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu]$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu] &= \text{Tr}[i J_\mu^\alpha(x) T^\alpha \delta \mathbf{W}^\mu] \\
&= i J_\mu^\alpha(x) \text{Tr}[T^\alpha \delta \mathbf{W}^\mu] \\
&= i J_\mu^\alpha(x) \text{Tr}[T^\alpha i g \delta W^{\beta\mu} T^\beta] \\
&= -J_\mu^\alpha(x) g \delta W^{\beta\mu} \text{Tr}[T^\alpha T^\beta] \\
&= -J_\mu^\alpha(x) g \delta W^{\beta\mu} \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{D.25}$$

al integrar y usar (D.23) obtendremos el resultado (D.22) que buscábamos

$$\begin{aligned}
2 \int d^4x \text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu] &= - \int d^4x J_\mu^\alpha(x) g \delta W^{\alpha\mu} \\
&= - \int d^4x \bar{\Psi} \gamma_\mu T^\alpha \Psi g \delta W^{\alpha\mu}.
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Finalmente, con (D.21) y (D.26) obtenemos la ecuación de movimiento de (D.5)

$$-\frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}) \delta \mathbf{W}_\nu] + 2 \int d^4x \text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu] = 0. \tag{D.27}$$

D.4 Ecuación (2.77)

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{g^2} \int d^4x \text{Tr}[(\mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}) \delta \mathbf{W}_\nu] + 2 \int d^4x \text{Tr}[J_\mu \delta \mathbf{W}^\mu] &= 0 \\
\int d^4x \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} - J^\nu \right) \delta \mathbf{W}_\nu \right] &= 0
\end{aligned} \tag{D.28}$$

Por lo cual

$$\frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} - J^\nu = 0. \tag{D.29}$$

Aplicando la derivada covariante a (D.29) se encuentra la ecuación de divergencia covariante para la corriente

$$\frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{D}_\nu J^\nu = 0. \quad (\text{D.30})$$

Examinando el primer término de la ecuación (D.30), determinaremos si las derivadas covariantes conmutan como lo hacen las derivadas parciales unitarias

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} &= \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{G}^{\nu\mu} \\ \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} \\ \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Ahora analizando la ecuación (D.31)

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}_{\rho\sigma} &= [\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}_{\rho\sigma}] \\ [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}^{\rho\sigma} &= [\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}^{\rho\sigma}] \\ [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}^{\mu\nu} &= [\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Pero

$$[\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{G}^{\mu\nu}] = \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{D.33})$$

Por consiguiente el comutador (D.32) que es igual a la anterior expresión también será cero

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \mathcal{G}^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{D.34})$$

con lo cuál comprobamos la conmutación de las derivadas covariantes

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}, \quad (\text{D.35})$$

lo cual implica al reemplazar en (D.31) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} &= 0 \\ \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{D.36}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{D.37}$$

Bibliografía

- [1] Greiner, Gauge Theories of Weak Interactions, 4ed, Springer, New York, 2009.
- [2] Cottingham, An introduction to the Standard Model of particle phisycs, 2ed, Cambridge, 2007.
- [3] Peskin, Schroesder - An introduction To Quantum Field Theory, 1995.
- [4] C. Quigg, Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic interactions, 2ed, Princeton University Press, Princeton, 2013.
- [5] Georgi, Lie algebras in particle physics.. from isospin to unified theories, 2ed, Perseus, 1999.
- [6] Giraldo Yithsbey, Introduction to Classical Field Theory, 2019.
- [7] Goldstein, Mécanica Clásica, 2ed, Reverté.
- [8] Perskin, Introduction to High Energy Physics, 4ed, 2000.
- [9] Pokorski, Gauge Field Theories, 2ed, Cambridge, 2000.
- [10] Robert-Klauber, Student Friendly Quantum Field Theory, Sandtrove Press, 2015.
- [11] Hollik, Electroweak Theory, D-76128 Karlsruhe, Germany.
- [12] Bernardo Adeba, La Teoría de Unificación Electrodébil, Universidad de Santiago de Compostela, 2020.
- [13] Griffiths, Introduction to Elementary Particles, 2ed, Wiley, New York, NY, 2008.
- [14] <https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-ckm-matrix.pdf>
- [15] Mandl, Shaw, Quantum Field Theory, 2ed, Wiley, 2010.
- [16] Ashok Das, Lectures of Quantum Field Theory, 2008.

- [17] Tuning, Lectures Notes on CP violation.
- [18] Castillo Andres, Estabilidad de Potenciales Escalares en los Modelos 3-3-1.
- [19] Noureddine Zettili, Quantum Mechanics: Concepts and Applications, Wiley, 2009.
- [20] Garcia Edgar, Mecanismo de violación de simetría CP en el decaimiento de partículas elementales.