



Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física

FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA TEORÍAS GAUGE NO ABELIANAS

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de

Físico:

Cristian Santiago Muñoz López

Universidad de Nariño

Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física

Formulación de Hamilton-Jacobi para teorías gauge no abelianas

Cristian Santiago Muñoz López

TRABAJO DE GRADO

Director:

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano
Ph.D. en física teórica

San Juan de Pasto, Colombia
17 de Octubre del 2023

©2023 - Cristian Santiago Muñoz López

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Dr. Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

Dr. Eduardo Rojas Peña

Jurado

San Juan de Pasto, 17 de Octubre del 2023

Agradecimientos

A Dios, por darme fortaleza y sabiduría para alcanzar mis metas.

A mi familia el más profundo agradecimiento por su apoyo incondicional.

A mi compañero Christian Martínez por sus valiosos aportes.

A todos aquellos que contribuyeron con las correcciones y revisiones de este trabajo de grado. Su ayuda fue fundamental para lograr su finalización exitosa.

Al PhD Germán Ramos por su valiosa colaboración y dedicación a lo largo de este proceso. Su guía y apoyo fueron fundamentales en el éxito de los objetivos

*A la memoria de mis abuelos Hector Aurelio Muñoz y Lucio Muñoz Muñoz,
cuyas enseñanzas han dejado una huella imborrable en mi camino científico.*

*«Cuando el trabajo es un placer,
la vida es bella.
Pero cuando nos es impuesto,
la vida es una esclavitud.»*

Max Planck

Resumen

La teoría de Yang-Mills es una teoría gauge no abeliana que describe las fuerzas fundamentales del modelo estándar. La naturaleza gauge de la teoría de campo no abeliana de Yang-Mills libre para grupos de simetría $SU(N)$ es analizada en este trabajo utilizando la formulación de Hamilton-Jacobi de Lagrangianas equivalentes de Carathéodory. La simetría de gauge de la teoría es reflejada por la presencia de ligaduras, que son restricciones sobre las variables dinámicas del sistema y se interpretan como ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Estas ecuaciones satisfacen condiciones de integrabilidad al imponer que sean involutivas con el fin de garantizar que el sistema sea soluble, lo que da origen a un nuevo conjunto de EDP, que junto con las iniciales, constituyen el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ). El conjunto de EDPHJ se resuelve mediante el método de ecuaciones características de Cauchy, que permite encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema. Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi permiten identificar los grados de libertad de la teoría y las ecuaciones de campo asociadas, las cuales son consistentes con otras teorías. Además, se implementan las condiciones gauge, que son restricciones adicionales sobre los campos gauge que fijan unívocamente su valor en cada punto del espacio-tiempo, para eliminar la arbitrariedad en las ecuaciones de movimiento generada por parámetros indeterminados.

Abstract

The Yang-Mills theory is a non-abelian gauge theory that describes the fundamental forces of the standard model. The gauge nature of free non-Abelian Yang-Mills gauge theories for symmetry groups $SU(N)$ is analyzed in this work using the Hamilton-Jacobi formulation of Carathéodory equivalent Lagrangians. The gauge symmetry of the theory is implied by the presence of constraints, which are restrictions on dynamic variables of the system and are interpreted as partial differential equations (PDEs). These equations must satisfy integrability conditions by being involutive in order to ensure that the system is solvable, which gives rise to a new set of PDEs, which together with the initial ones, constitute the complete set of Hamilton-Jacobi partial differential equations (HJ-PDEs). The set of HJ-PDEs is solved using the Cauchy characteristic equations method, which allows finding the system's equations of motion. The Hamilton-Jacobi equations allow identifying the degrees of freedom of the theory and the associated field equations, which are consistent with other theories. In addition, gauge conditions are implemented, which are additional constraints on gauge fields that uniquely fix their value at each point in spacetime, to eliminate arbitrariness in the equations of motion generated by indeterminate parameters.

Contenido

1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema	3
3. Objetivos	4
3.1. General	4
3.2. Específicos	4
4. Teoría de Hamilton-Jacobi	5
4.1. Lagrangianas equivalentes	5
4.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi	7
4.2.1. Sistemas regulares	9
4.2.2. Sistemas singulares	10
5. Teoría de Yang-Mills libre	15
5.1. Tensor de intensidad de campo	15
5.2. Invarianza de la densidad Lagrangiana	16
5.3. Formulación Lagrangiana	18
5.4. Formulación Hamiltoniana	19
5.5. Formulación de Dirac	22
5.5.1. Gauge de radiación	23
6. Aplicación del método de Hamilton-Jacobi	25
6.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi	25
6.2. Conjunto de EDPHJ	26
6.2.1. Condiciones de integrabilidad	27
6.3. Ecuaciones características	29
7. Condiciones gauge en la teoría de Yang-Mills libre	32
7.1. Gauge de radiación	32
7.2. Corchetes generalizados	33
8. Resultados	36
9. Conclusiones	38
Apéndices	38



A. Álgebra de Lie	39
B. Derivada covariante y transformación gauge local	41
C. Cálculos en la teoría de Yang Mills libre	43
C.1. Derivada de la densidad Lagrangiana respecto a los campos gauge	43
C.2. Demostración de la ecuación 5.2.5	44
C.3. Condición de integrabilidad de la ligadura 6.2.1	46
C.4. CP entre las variables dependientes y las EDP	46
C.5. Corchetes de Poisson entre las EDP	49
C.6. Corchetes de Poisson entre las EDP con condiciones gauge	54
C.7. Inversa de la matriz de ligaduras $C_{ac}(x, y)$	58
C.8. Corchetes de Poisson entre las ligaduras y las condiciones gauge	59
C.9. Corchetes de Dirac fundamentales	60

Índice de figuras

4.1.1. Trayectoria dinámica de una curva de comparación en el espacio de configuración	7
4.2.1. Interpretación geométrica de la relación 4.2.1	8

Índice de tablas

5.5.1.Corchetes de Poisson entre las ligaduras.	23
6.2.1.Corchetes de Poisson entre las EDP 6.2.5.	28
6.3.1.Corchetes de Poisson entre las variables dinámicas y las EDP (6.2.5).	29
C.9.1.CP entre los campos y las ligaduras.	60
C.9.2.CP entre los campos y las ligaduras.	60

Glosario

- Álgebra de Lie:** Es un espacio vectorial sobre un campo de números generalmente complejos dotado de una operación binaria denominada corchete de Lie, que mide el grado de no conmutabilidad de los elementos del álgebra y satisface las propiedades de antisimetría, linealidad e identidad de Jacobi. Las álgebras de Lie surgen naturalmente del estudio de las propiedades de simetría de sistemas físicos y matemáticos.
- Teoría de campos no abeliana:** Se conoce también como teoría de Yang-Mills. Es una teoría física que describe las interacciones entre campos que no conmutan, es decir, que el orden en que son aplicados sí importa, estos campos se asocian con partículas del modelo estándar.
- Matriz Hessiana:** Se denomina matriz Hessiana a aquella matriz cuadrada de $n \times n$ elementos de segundas derivadas parciales de una función de n variables.
- Sistema singular:** Aquel sistema que posee ligaduras que relacionen las variables fundamentales del sistema, se caracteriza por poseer una matriz Hessiana con determinante igual a cero. En caso contrario, se conoce como sistema regular.
- Ligadura:** Una ligadura se refiere a una restricción matemática que se impone en un sistema físico para representar una condición específica o una relación entre las variables involucradas, la presencia de estas restricciones reducen los grados de libertad del sistema.
- Ligadura primaria:** En la formulación de Dirac, una ligadura primaria corresponde a una relación entre las variables del sistema que surge a partir de la definición de los momentos canónicos generalizados.
- Ligadura secundaria:** En la formulación de Dirac, una ligadura secundaria es una nueva ligadura que surge a partir de un análisis de consistencia de todas las ligaduras, exigiendo que sean involutivas, es decir $\dot{\phi}_{Ha}(x) = 0$.
- Ligadura de primera clase:** En la formulación de Dirac, se denomina ligadura de primera clase a aquellas que posean corchetes de Poisson iguales a cero con todas las ligaduras del sistema.

- Ligadura de segunda clase:** En la formulación de Dirac, se denomina ligadura de segunda clase a aquellas que posean al menos un corchete de Poisson diferente de cero con alguna de las ligaduras del sistema.
- Lagrangiana:** Para un sistema físico conservativo con un número finito de grados de libertad, es una función que describe la dinámica del sistema físico. Se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.
- Hamiltoniano canónico:** El Hamiltoniano canónico determina la dinámica del sistema físico en el espacio de fase. Para sistemas conservativos es equivalente a la energía.
- Hamiltoniano extendido:** Combinación lineal del Hamiltoniano canónico, los vínculos primarios de primera y segunda clase, y los vínculos secundarios de primera clase.
- Ecuaciones de campo:** Conjunto de ecuaciones diferenciales que determinan la evolución temporal de un sistema físico representado por campos en el espacio respectivo.
- Condiciones gauge:** Son restricciones adicionales arbitrarias que se agregan al conjunto de EDPHJ con la finalidad de obtener EDP linealmente dependientes y definir de manera única la dinámica del sistema.
- Transformaciones gauge locales:** Grupo de simetría infinito que depende de un conjunto de r parámetros definidos en el espacio-tiempo. Son transformaciones de algún grado de libertad interno, que no modifican ninguna propiedad de las observables físicas.
- EDP:** Siglas de Ecuaciones Diferenciales Parciales, estas son ecuaciones matemáticas que involucran derivadas parciales de una o más variables desconocidas. Estas ecuaciones se utilizan para describir relaciones entre funciones de varias variables y son fundamentales en la modelización y resolución de una amplia variedad de fenómenos en física, ingeniería, matemáticas y otras disciplinas científicas.
- EDPHJ:** Siglas de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Hamilton-Jacobi, son ecuaciones matemáticas utilizadas en la mecánica clásica para encontrar soluciones y describir la dinámica de sistemas físicos conservativos.
- EDP linealmente independientes:** Son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que generan indeterminaciones en la dinámica de los sistemas dado a que la matriz conformada por estas EDP no posee inversa definida.
- Corchetes de Poisson:** Denotados como CP, son una notación y operación matemática utilizada en la mecánica hamiltoniana y en la teoría de sistemas dinámicos para describir cómo cambian las cantidades físicas en el tiempo en sistemas mecánicos.

Corchetes de Dirac: Denotados como CD, los corchetes de Dirac son una extensión de los corchetes de Poisson que se utilizan en sistemas con restricciones o ligaduras. Cuando tienes ligaduras en un sistema, significa que algunas de las variables dinámicas están relacionadas y no son completamente independientes entre sí debido a estas restricciones. Los corchetes de Dirac permiten manejar estas situaciones de manera consistente.

Corchetes generalizados: Denotados como CG, los corchetes generalizados refieren a una extensión de los corchetes de Poisson para sistemas singulares definidos en la formulación de Hamilton-Jacobi y poseen una representación equivalente a los corchetes de Dirac.

Capítulo 1

Introducción

Las teorías gauge han sido de gran importancia en la teoría cuántica de campos y la física de partículas, desempeñando un papel fundamental en la unificación de fuerzas y en las teorías estándar de las interacciones fundamentales. Estas teorías están basadas en transformaciones de simetría conocidas como transformaciones de gauge, las cuales dependen del grupo de simetría asociado a cada fuerza fundamental.

En teoría de campos se describen los sistemas físicos por medio de la densidad lagrangiana, cuando se aplican transformaciones a esta densidad y la acción que define al sistema no cambia se encuentra una simetría, a esta transformación de simetría se la conoce con el nombre de transformaciones de gauge. En particular, la teoría de Yang-Mills es una teoría gauge no abeliana que proporciona la base para describir las fuerzas fundamentales en el modelo estándar, este modelo describe la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica y la teoría electro-débil, dependiendo de los grupos de simetría $U(1)$, $SU(3)$ y $U(1) \otimes SU(2)$, respectivamente.

Las teorías de Yang-Mills se caracterizan por ser teorías singulares, lo que implica la presencia de ligaduras que reducen los grados de libertad del sistema. Para abordar este problema, se recurre al método de Hamilton-Jacobi, específicamente utilizando las Lagrangianas equivalentes de Carathéodory, este método permite trabajar con las ligaduras y obtener una formulación consistente de la teoría de Yang-Mills.

En el presente trabajo,¹ se abordará el formalismo de Hamilton-Jacobi aplicado a la teoría de Yang-Mills. En el Capítulo 4 se desarrollará el formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas discretos, incluyendo el estudio de sistemas regulares y singulares y la determinación de las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi.

En el Capítulo 5 se realizará el estudio canónico de la densidad lagrangiana de la teoría de Yang-Mills libre, tanto bajo la formulación Lagrangiana como Hamiltoniana, encontrando las ecuaciones de campo y determinando las primeras restricciones que posee el sistema, además, se destaca un desarrollo extra aplicando la formulación de Dirac a la teoría con la finalidad de compararla con los resultados que se obtengan en la formulación de Hamilton-Jacobi.

En el Capítulo 6 se aplicará el método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Yang-Mills libre, obteniendo el conjunto completo de EDPHJ a través del análisis de las condiciones de integrabilidad. Se construirán las ecuaciones características del sistema, que presentarán parámetros indeterminados en su evolución dinámica.

¹Quien esté interesado en revisar el documento L^AT_EX de este trabajo, lo puede hacer mediante el siguiente enlace: <https://www.overleaf.com/read/gbhcbpmsbgqq#630834>



En el Capítulo 7 se introducirán las condiciones gauge, específicamente el gauge de radiación, para reducir los grados de libertad del sistema y determinar la dinámica de los campos gauge de manera única. Se desarrollarán los corchetes generalizados para definir la dinámica del sistema, encontrando similitudes con los corchetes de Dirac.

Finalmente, en los Capítulos 8 y 9 se presentarán los resultados obtenidos y se realizarán las conclusiones correspondientes.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La teoría de Yang-Mills libre es una teoría de campos no abeliana con simetrías gauge locales que permite describir las interacciones fuertes en el modelo estándar, al ser una teoría gauge se caracteriza por poseer una densidad lagrangiana singular, implicando la existencia de relaciones entre los campos fundamentales que describen esta teoría reduciendo los grados de libertad del sistema y generando una arbitrariedad en las ecuaciones de campo del mismo.

Se pretende aplicar el método de Hamilton-Jacobi a la teoría de Yang-Mills libre con la finalidad de encontrar la arbitrariedad generada por las restricciones de la teoría e implementar las condiciones gauge de radiación dentro del método de Hamilton-Jacobi para poder eliminar esta arbitrariedad.

Este trabajo no se adentrará en la cuantización de la teoría de Yang-Mills, sino que se concentrará en el análisis clásico de la misma presentando un método alternativo a la formulación de Dirac para la solución de sistemas singulares, proponiendo la implementación de las condiciones del gauge de radiación dentro del método de Hamilton-Jacobi.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. General

Realizar un estudio de las teorías gauge no abelianas mediante la formulación de Hamilton-Jacobi.

3.2. Específicos

- Analizar la formulación de Hamilton-Jacobi según Carathéodory, generalizando los resultados a teoría de campos.
- Aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi a la teoría de Yang–Mills.
- Implementar condiciones de gauge en la formulación de Hamilton-Jacobi y aplicarla al estudio del campo de Yang–Mills.

Capítulo 4

Teoría de Hamilton-Jacobi

Existe un formalismo que surge de la formulación Hamiltoniana en conjunto con la teoría de las transformaciones canónicas de Jacobi, el cual se conoce como Formulación de Hamilton-Jacobi. Este formalismo fue el punto de partida de Schrödinger en su formulación de la mecánica cuántica. Se destaca porque, basándose en los principios variacionales, es la única teoría a nivel clásico que establece una conexión entre la mecánica y la óptica [1, 2].

El formalismo de Hamilton-Jacobi establece una conexión entre tres disciplinas matemáticas que anteriormente se consideraban independientes: *la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)*, *las ecuaciones diferenciales parciales* y *el cálculo de variaciones*. Normalmente, el método de Hamilton-Jacobi se introduce a través de la implementación de transformaciones canónicas, lo cual está estrechamente relacionado con la teoría Hamiltoniana. Sin embargo, existe un enfoque diferente que no involucra la teoría Hamiltoniana y se conoce como el cuadro completo de Carathéodory. Este enfoque se basa en las Lagrangianas equivalentes y permite construir una teoría completa, auto suficiente y con resultados más generales [1, 3].

En esta sección, se estudió el método de las Lagrangianas equivalentes de Carathéodory, demostrando cómo la formulación de Hamilton-Jacobi puede obtenerse a partir del principio de acción estacionaria sin necesidad de recurrir a la formulación Hamiltoniana. También se examinó el método de Cauchy o método de las ecuaciones características para la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

4.1. Lagrangianas equivalentes

Las ecuaciones de movimiento muestran la evolución temporal de un sistema físico dado, estas ecuaciones se obtienen a partir de una Lagrangiana que describe el sistema. Sin embargo, la Lagrangiana no es única, ya que existe un conjunto de Lagrangianas que generan las mismas ecuaciones de movimiento, por lo tanto, pueden estar asociadas al sistema físico.

A partir de lo mencionado, se puede deducir que dos Lagrangianas L y \bar{L} , son equivalentes si conducen a las mismas ecuaciones de movimiento.

En otras palabras, al considerar las ecuaciones de Euler-Lagrange¹ [3]:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} - \underbrace{\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \ddot{q}^j \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^i} \right)} = 0, \quad (4.1.1)$$

se debe encontrar una función $\Lambda(t, q^j, \dot{q}^j) = L(t, q^j, \dot{q}^j) - \bar{L}(t, q^j, \dot{q}^j)$ que cumpla con la relación (4.1.1) y que además satisfaga que cada elemento de la anterior relación sea nulo (esto debido a la independencia lineal de las coordenadas generalizadas y sus derivadas), de esta manera se asegura que las Lagrangianas $L(t, q^j, \dot{q}^j)$ y $\bar{L}(t, q^j, \dot{q}^j)$ sean equivalentes. Se puede obtener una forma funcional general de $\Lambda(t, q^j, \dot{q}^j)$ al examinar el último término de la ecuación (4.1.1), exigiendo lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = 0, \quad (4.1.2)$$

teniendo en cuenta que la relación (4.1.2) debe satisfacerse, se propone que $\Lambda(t, q^j, \dot{q}^j)$ se exprese como una combinación lineal de dos funciones $A_i(q^j, t)$ y $B(q^j, t)$, las cuales no dependen de las velocidades generalizadas [3]:

$$\Lambda(t, q^j, \dot{q}^j) = \dot{q}^i A_i(q^j, t) + B(q^j, t), \quad (4.1.3)$$

de modo que, al sustituirla en la ecuación de movimiento (4.1.1) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j + \left(\frac{\partial B}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) = 0.$$

Nuevamente, se debe exigir que cada paréntesis en la anterior ecuación sea nulo para garantizar que las lagrangianas sean equivalentes, esto permite encontrar la forma funcional de $A_i(q^j, t)$ y $B(q^j, t)$. El segundo paréntesis implica la existencia de una función $S(t, q^j)$ tal que

$$A_i(q^j, t) = \frac{\partial S}{\partial q^i},$$

$$B(q^j, t) = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Sustituyendo $A_i(q^j, t)$ y $B(q^j, t)$ en (4.1.3) resulta

$$\Lambda(t, q^j, \dot{q}^j) = \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dt},$$

y la condición para que dos Lagrangianas sean equivalentes se presenta mediante²

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt}.$$

Se observa ahora el problema desde un punto de vista variacional, en donde se busca una curva que extremize la acción definida por la Lagrangiana original y que sea la misma que extremize la acción de la

¹Estas son las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para una función que depende del tiempo, las coordenadas y las velocidades generalizadas. Cabe destacar además que se está utilizando el convenio de la suma de Einstein cuando hay índices contraídos en un mismo término.

²Cabe resaltar que la función $S \equiv S(t, q^i)$ es una función únicamente del tiempo y las coordenadas generalizadas, no de las velocidades generalizadas.

4.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

Lagrangiana modificada [3]. Para satisfacer las condiciones descritas, se utiliza el principio de Hamilton y se calcula la acción de la Lagrangiana modificada alrededor de una curva de comparación \bar{C} (Ver figura 4.1.1) [1]:

$$\mathcal{A}_{[\bar{C}]} = \int dt \left[L - \frac{dS}{dt} \right].$$

Se establece que C es la trayectoria natural del sistema, de modo que la acción calculada sobre esta curva siempre es un máximo o un mínimo con respecto a la curva de comparación \bar{C} . Matemáticamente, esto se representa por [1]

$$A_{[C]} > \bar{A}_{[\bar{C}]} \quad o \quad A_{[C]} < \bar{A}_{[\bar{C}]}.$$

Esta condición permite asegurar que la curva C sea un extremo de la acción, lo que constituye una ventaja importante dado a que se puede aplicar en sistemas no conservativos en donde la acción depende explícitamente del tiempo [1]. El principio de acción estacionaria no requiere de condiciones subsidiarias y sólo es necesario calcular la integral entre dos puntos fijos de la trayectoria [3]. Lo anterior implica que la variación $\delta q^i(t_1) = 0 = \delta q^i(t_2)$ y

$$\delta \bar{A} = \delta A - \delta S(t_2, q) + \delta S(t_1, q),$$

considerando que $\delta S = \frac{\partial S}{\partial q^i} \delta q^i$, al evaluar esta expresión en los tiempos t_1 y t_2 se vuelven cero, lo que implica que los últimos términos de la expresión anterior son nulos, indicando que la función $S(t, q^i)$ no influye en la dinámica, de este modo, la dinámica definida por ambas acciones es la misma:

$$\delta \bar{A} = \delta A.$$

Lo anterior demuestra que la curva C que extremiza la acción de la Lagrangiana original también extremiza la acción con la Lagrangiana modificada [3].

Ahora se desea construir una Lagrangiana que sea idénticamente nula para una curva dada $\varphi^i(t, q^j)$ y que sea positiva para cualquier otra curva³ $\dot{q}^i(t, q^j)$. Por lo tanto, el problema variacional consiste en encontrar un mínimo que cumpla con las condiciones

$$\bar{L}(t, q^j, \varphi^j) = 0, \tag{4.1.4a}$$

$$\bar{L}(t, q^j, \dot{q}^j) > 0. \tag{4.1.4b}$$

4.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Para que la curva C sea un extremo de la acción, se debe garantizar que la Lagrangiana modificada sea un mínimo. Lo anterior se expresa mediante la relación [1]

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0,$$

³La condición (4.1.4a) permite determinar la forma funcional de la función $\Lambda(S(t, q^j))$ mientras que la condición (4.1.4b) ubica un punto de referencia donde la energía potencial es mínima y la Lagrangiana equivalente siempre es positiva.

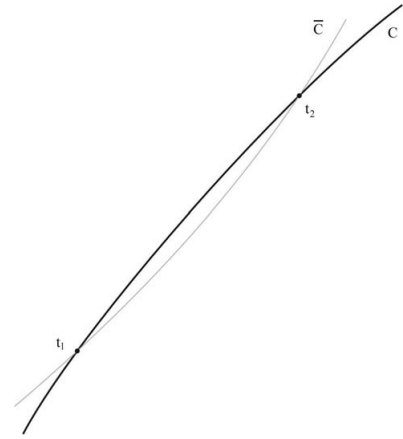


Figura 4.1.1: Trayectoria dinámica de una curva de comparación en el espacio de configuración

al desarrollar esta expresión y teniendo presente que $S(t, q^j)$ no depende de las velocidades generalizadas, es posible llegar a una relación muy importante para esta función [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \equiv p_i. \quad (4.2.1)$$

La ecuación (4.2.1) puede ser interpretada de manera geométrica al considerar que el lado izquierdo se puede representar como el gradiente de S , obteniendo $\nabla S = p_i$. Esta condición indica que el momento debe ser ortogonal a la familia de superficies definidas por $S(t, q^j) = \sigma_i$ en el espacio de configuración, como se observa en la fig. 4.2.1, donde σ_i es un valor constante que permite definir a S como una superficie⁴ [1].

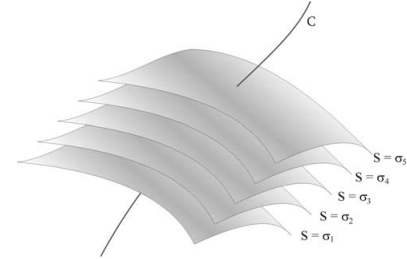


Figura 4.2.1: Interpretación geométrica de la relación 4.2.1

Si la condición (4.1.4a) se cumple, entonces la Lagrangiana original del sistema se expresa como la derivada temporal de $S(t, q^j)$:

$$L = \frac{dS}{dt} = \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (4.2.2)$$

al aplicar el resultado (4.2.1) y reordenar la expresión (4.2.2), se obtiene

$$\dot{q}^i p_i - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.2.3)$$

A partir de aquí se debe considerar si la Lagrangiana que describe el sistema es singular o regular, lo cual afectará si las velocidades generalizadas pueden ser completamente despejadas o no. Para ello se introduce la matriz Hessiana, que se define de la siguiente manera [4]

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \quad (4.2.4)$$

Al analizar los autovalores de esta matriz, es posible determinar si el sistema es singular o regular. Si alguno de los autovalores es igual a cero, se reflejará en el determinante de la matriz y se considerará que el sistema es singular. En cambio, si todos los autovalores son diferentes de cero, se dice que el sistema es regular, lo anterior se conoce como la condición Hessiana. A continuación, se explora la importancia de la condición Hessiana en la solución de los sistemas, para ello se considera las ecuaciones de Euler-Lagrange en el espacio de configuración.

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0,$$

si se asume que la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, la ecuación puede ser reescrita de manera similar a las ecuaciones de Newton⁵ [3,4]:

$$W_{ij} \ddot{q}^j = F_i(q^k, \dot{q}^k),$$

donde W_{ij} es la matriz Hessiana y $F_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \dot{q}^j$ es un equivalente a la fuerza en la formulación Newtoniana. Esta es una ecuación matricial y para poder despejar todas las aceleraciones es necesario que la matriz Hessiana sea invertible. Generalmente esta matriz es simétrica, y por tanto es diagonalizable [5], con esta diagonalización es posible observar el rango de la matriz y los autovalores nulos que posea, que servirá para clasificar los sistemas en regulares o singulares.

⁴Cabe destacar que esta interpretación es similar al vector de Poynting S en la teoría ondulatoria de la luz, el cual siempre es ortogonal al frente de onda [1].

⁵Cabe resaltar que esto sólo es posible para sistemas conservativos donde la Lagrangiana del sistema no dependa explícitamente del tiempo.

4.2.1. Sistemas regulares

Cuando el determinante de la matriz Hessiana es diferente de cero ($\det W \neq 0$), la matriz Hessiana es invertible, en este caso se puede afirmar que el sistema es regular y las velocidades pueden ser definidas como funciones de los momentos, las posiciones e incluso del tiempo $\dot{q}^i = \eta^i(t, q^j, p_j)$. La ecuación (4.2.3) puede ser reescrita como

$$\eta^i p_i - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Los dos primeros términos de esta ecuación corresponden a una transformación de Legendre, que define el Hamiltoniano canónico del sistema $H_0(t, q^j, p_i)$. Además, teniendo en cuenta que p_i es una función de $S(t, q^j)$, la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser reescrita como [1, 4]

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, q^j) + H_0\left(t, q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}\right) = 0. \quad (4.2.5)$$

Esta es la ecuación diferencial parcial de Hamilton Jacobi y es una condición adicional sobre la función $S(t, q^j)$ que determina que la acción calculada sobre la curva C sea estacionaria. De esta manera, al resolver el problema de encontrar las ecuaciones de movimiento mediante variaciones, se debe considerar la familia de superficies determinada por la ecuación diferencial de Hamilton Jacobi.

Ecuaciones características

Se desea calcular las ecuaciones que definen la trayectoria seguida por un sistema físico a partir de la función $S(t, q^j)$. Para ello, se utiliza el hecho de que todo sistema de ecuaciones diferenciales parciales está asociado a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias [3]. Este conjunto de EDO se puede obtener mediante el método de las ecuaciones características de Cauchy⁶. Aplicando este método a la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.2.5), se generan $2n + 1$ EDO de primer orden, donde n representa la dimensión del sistema [1, 3, 4]. Las ecuaciones características relacionadas con el sistema de EDPHJ son las siguientes:

$$dq^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} dt, \quad (4.2.6a)$$

$$dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} dt, \quad (4.2.6b)$$

$$dS = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H \right) dt. \quad (4.2.6c)$$

Se observa que las dos primeras ecuaciones de (4.2.6) coinciden con las ecuaciones canónicas de Hamilton en el espacio de fase. En estas ecuaciones, se puede apreciar la dinámica que rige a las variables que conforman el sistema [4].

Las anteriores ecuaciones permiten expresar la evolución temporal de una variable dinámica $f(t, q^j, p_j)$ utilizando los corchetes de Poisson (CP) de la siguiente manera⁷

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

⁶La demostración de este método se omitirá, ya que el objetivo no es replicar los cálculos. No obstante, un lector interesado puede consultar las referencias citadas en este párrafo [1, 3, 4].

⁷No confunda CP con la simetría Carga-Paridad del modelo estándar, en el contexto de teoría de campos CP denota únicamente a los corchetes de Poisson.

recuperando el formalismo hamiltoniano a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi, deducida a partir del cuadro completo de Carathéodory [1].

4.2.2. Sistemas singulares

Un sistema físico se considera singular si no cumple con la condición Hessiana, es decir, cuando $\det(W) = 0$. Esta situación plantea un problema, ya que para llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi, es necesario que esta matriz sea invertible. Por lo tanto, se requiere encontrar una formulación más general que permita abordar este tipo de sistemas.

Sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi

Al considerar un espacio de configuración de dimensión n y una matriz Hessiana de rango m , se tienen m autovalores no nulos y k autovalores nulos, donde $k = n - m$. En este caso, es posible descomponer la matriz Hessiana en dos partes: una parte invertible de dimensión $m \times m$ y una parte no invertible de dimensión $k \times k$.

La parte invertible de la matriz Hessiana conduce a momentos canónicos conjugados que dependen de las velocidades generalizadas:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \rightarrow \dot{q}^a = \eta^a(q^j, p_b),$$

donde $\{a, b\} = \{1, \dots, m\}$. Para la parte no invertible de la matriz, los momentos canónicos conjugados no pueden ser expresados en términos de las velocidades. Por lo tanto, se representarán mediante⁸ (4.2.7) [5]

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}; \quad x, y, z = \{1, \dots, k\}. \quad (4.2.7)$$

Las ecuaciones mencionadas son consideradas como las EDP del sistema, las cuales establecen relaciones entre las variables del espacio. Si se define $H_z \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}$ se podrán expresar estas EDP como

$$\phi_z \equiv p_z + H_z(q^j, \eta^a) = 0.$$

Con esta división de las coordenadas, la expresión (4.2.3) puede ser reescrita como sigue

$$\phi_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(q^j, \eta^a) = 0,$$

donde se ha definido al Hamiltoniano canónico del sistema mediante

$$H_0 \equiv p_a \eta^a(q^j, p_b) + p_z \dot{q}^z - L.$$

Se observa que hay velocidades \dot{q}^z no invertibles en el Hamiltoniano. Sin embargo, esto no representa un problema, ya que al derivar el Hamiltoniano con respecto a estas velocidades, se obtiene un valor idénticamente cero en un espacio en donde las EDP sean respetadas⁹ [5]:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^y} = \phi_y \equiv 0.$$

⁸Cabe destacar que a lo largo de este trabajo se utilizarán los subíndices $x, y, z = \{1, \dots, k\}$ para indicar la parte no invertible de la teoría que se esté trabajando.

⁹Para los cálculos se debe tener en cuenta que las velocidades son independientes entre si, es decir $\frac{\partial \eta^a}{\partial \dot{q}^y} = 0$ y $\frac{\partial \dot{q}^z}{\partial \dot{q}^y} = \delta_y^z$.

4.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

Se puede considerar a ϕ_0 como una nueva EDP del sistema y unificar con las EDP ϕ_z generalizando los resultados, así [4, 5]

$$\phi_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha(q^j, p_a) = 0; \quad \{\alpha, \beta\} = \{0, 1, \dots, k\}, \quad (4.2.8)$$

donde se ha definido $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial q^0} \equiv P_0$. La relación (4.2.8) representa un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi, que se denota de manera simplificada como EDPHJ.

Ecuaciones características

Al conjunto de EDPHJ se le puede aplicar nuevamente el método de las ecuaciones características de Cauchy, encontrando $2m + 1$ EDO relacionadas con este sistema¹⁰ [3–5]:

$$\begin{aligned} dq^a &= \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha, \\ dp_a &= -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha, \\ dS &= \left(p_a \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a} - H_\alpha \right) dq^\alpha. \end{aligned}$$

Las ecuaciones mencionadas redefinen el espacio de fase como un espacio de $2m$ coordenadas (q^a, p_a) . Este espacio se conoce como el espacio de fase reducido. Las variables q^z son consideradas como parámetros independientes y se encuentran en las mismas condiciones que el tiempo. Estas variables q^z parametrizan a las variables q^a , lo que implica que estas últimas son parámetros dependientes y se expresan como $q^a = q^a(q^z, t)$ [5].

Al integrar la tercera ecuación característica:

$$S = \int [p_a dq^a - H_\alpha dq^\alpha],$$

expresión que se interpreta como una acción canónica que se refiere a un sistema con varias variables independientes [5].

Se observa que si el sistema no posee ninguna EDP, es decir, $\alpha = 0$, se obtiene $dq^\alpha = dt$ y $\phi_\alpha = H_c$. En este caso, se vuelve a las ecuaciones canónicas para un sistema regular y la acción toma la misma forma que en la mecánica clásica. Esto indica que los sistemas regulares son un caso particular del planteamiento con sistemas singulares.

Finalmente, se puede construir la evolución de una observable utilizando las ecuaciones características. Al hacerlo, se obtiene

$$dF = \{F, \phi_\alpha\} d\tau^\alpha; \quad \alpha = \{0, 1, \dots, k\}, \quad (4.2.9)$$

en esta etapa, las variables independientes del sistema se redefinen como τ^α , que incluyen el tiempo cuando $\alpha = 0$ y las variables independientes relacionadas con los k elementos del sistema de EDPHJ. Se utiliza la notación de corchetes para representar la evolución de la variable dinámica. Estos corchetes obedecen las mismas reglas que los corchetes de Poisson, tales como la antisimetría, la bilinealidad y la identidad de Jacobi [5].

¹⁰En esta sección no se realizarán los cálculos paso a paso para obtener las ecuaciones características, pero se citarán los resultados más relevantes de la referencia «Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory. Parte 2: sistemas singulares» [5].

Condiciones de integrabilidad

Hasta el momento, se ha desarrollado el tratamiento de Hamilton-Jacobi asumiendo que las ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi (4.2.8) forman un sistema completo. Sin embargo, surge la interrogante sobre cómo confirmar si las EDP obtenidas abarcan todas las restricciones del sistema y permiten obtener soluciones completas.

Para abordar esta cuestión, se recurre a los resultados provenientes de un enfoque de geometría diferencial que permite verificar si un espacio es completo y determinar las condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra. Este procedimiento se conoce como «condiciones de integrabilidad».

En este análisis, se requiere la introducción de vectores de campo \hat{X}_α que forman una base en el espacio tangente a la familia de superficies $S(t, q^j)$ [5, 6]. Estos vectores pueden ser expresados como¹¹:

$$\hat{X}_\alpha \equiv \chi_\alpha^i \partial_i ; \quad \alpha = \{0, 1, \dots, k\},$$

dónde k indica el número máximo de vectores linealmente independientes del espacio. La integrabilidad de un sistema requiere que estos vectores formen un conjunto completo de vectores de campo linealmente independientes (LI). La condición necesaria y suficiente para que esto se cumpla es conocida como la condición de integrabilidad de Frobenius, esta condición establece que los vectores deben cerrarse en un álgebra de Lie¹², es decir, deben satisfacer [4, 5]

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta](F) = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{X}_\gamma, \quad (4.2.10)$$

donde $C_{\alpha\beta}^\gamma$ es la constante de estructura del álgebra y los corchetes de Lie se definen mediante [5]

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta](F) = \hat{X}_\alpha\{\hat{X}_\beta(F)\} - \hat{X}_\beta\{\hat{X}_\alpha(F)\}.$$

En la teoría de Hamilton-Jacobi, es posible escribir el conjunto de EDPHJ con la ayuda de estos operadores. Al aplicar el operador \hat{X}_α sobre las superficies definidas por $S(t, q^j)$ se obtienen las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi [5]:

$$\phi_\alpha \equiv \hat{X}_\alpha(S) = 0, \quad (4.2.11)$$

teniendo presente la ecuación (4.2.1), se puede observar fácilmente que $\hat{X}_\alpha(S) = \chi_\alpha^i \partial_i S = \chi_\alpha^i p_i$. Si estos operadores funcionan como una base para los planos tangentes de la familia de superficies $S(t, q^i)$ en la teoría, entonces deben ser siempre ortogonales al momento canónico generalizado. Por lo tanto, su producto punto siempre será cero, lo cual verifica la relación (4.2.11) [5, 6].

Considerando ahora a $F(q^a, p^a)$ como una variable dinámica en el espacio de fase reducido, al aplicar el operador \hat{X}_α a esta variable se obtiene la siguiente expresión [4, 5]:

$$\hat{X}_\alpha F(q^a, p^a) = \{F, \phi_\alpha\},$$

además, teniendo en cuenta que los corchetes de Poisson satisfacen la identidad de Jacobi, que para tres variables dinámicas A , B y C es

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0,$$

¹¹La notación ∂_i es equivalente a $\frac{\partial}{\partial q^i}$.

¹²Para obtener más información sobre el álgebra de Lie, consulte el apéndice §A.

4.2. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

se puede reescribir la condición de integrabilidad de Frobenius (4.2.10) como sigue [3–5]

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma.$$

Esta relación indica cómo las EDP del conjunto de EDPHJ deben interactuar cuando se operan mediante los corchetes de Poisson. No obstante, resulta más conveniente expresar esta relación a través del diferencial fundamental (4.2.9). Se puede observar que, para la evolución de las EDP, el diferencial toma la forma

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} d\tau^\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma d\tau^\beta = 0, \quad (4.2.12)$$

aquí se ha asumido la validez de las EDP $\phi_\gamma = 0$. Es posible entender que la condición de integrabilidad de las EDP $d\phi_\alpha = 0$ exige que estos se mantengan inalterados a lo largo de la trayectoria dinámica. Esto garantiza la integrabilidad de las ecuaciones características y la completitud de las soluciones de las EDPHJ [4,5].

Sin embargo, si las variables que inicialmente se asumieron como independientes no lo son en realidad, la condición de Frobenius (4.2.12) para el sistema de ecuaciones en derivadas parciales no siempre se cumplirá [5]. En este caso, es posible suponer que existe un subespacio en el cual estas relaciones se satisfacen y donde se tiene un sistema completo. Para encontrar este subespacio, se puede exigir la integrabilidad de las EDP y así imponer nuevas restricciones al sistema, basándose en el hecho de que las EDP aparecen en la condición de integrabilidad de Frobenius (4.2.12) [4,5].

De esta manera, cualquier EDP que no cumpla con la condición de Frobenius dará origen a una nueva EDP que debe ser agregada a las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi. Este proceso debe repetirse hasta obtener un sistema de ecuaciones diferenciales parciales completo que garantice la integrabilidad [4]. No obstante, este proceso implica la adición de nuevas variables independientes al diferencial fundamental (4.2.9), lo cual implica extender el índice α en la ecuación correspondiente.

Corchetes generalizados

La condición de integrabilidad de Frobenius (4.2.12) implica que para obtener un sistema de EDPHJ completamente integrable, las EDP que lo conforman deben ser involutivas, es decir, que se debe satisfacer la relación $d\phi_\alpha = 0$. Al imponer esta restricción, es posible manipular la condición de integrabilidad de las EDP para obtener una relación entre los parámetros independientes τ^P y el tiempo [3,4,6].¹³ Para lograr despejar los parámetros indeterminados se parte de la condición (4.2.12):

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} d\tau^\beta = 0.$$

Al analizar el caso en el que el índice α no incluye el tiempo, es decir $\alpha = H$ y al expandir el índice β como $\beta = \{0, P\}$, se puede observar que la expresión anterior se convierte en

$$d\phi_H = \{\phi_H, \phi_0\} dt + \{\phi_H, \phi_P\} d\tau^P = 0.$$

Se define ahora una matriz denominada «matriz de EDP», compuesta por los corchetes de Poisson entre las EDP del sistema. Esta matriz se representa como: $\Phi_{HP} \equiv \{\phi_H, \phi_P\}$. De esta manera, la expresión anterior puede ser reescrita como se muestra a continuación [6]

$$\Phi_{HP} d\tau^P = -\{\phi_H, \phi_0\} dt.$$

¹³Los índices P y H cuenta el número de EDPHJ sin incluir el tiempo.

Si la matriz de EDP es invertible, entonces es posible despejar todos los parámetros τ^P en términos del tiempo utilizando la inversa de la matriz de EDP, la cual se denotará como $(\Phi^{-1})^{PH}$. Considerando este caso, se puede aplicar la matriz inversa a ambos lados de la ecuación para obtener

$$d\tau^P = -(\Phi^{-1})^{PH} \{\phi_H, \phi_0\} dt. \quad (4.2.13)$$

La expresión (4.2.13) permite expresar el diferencial fundamental (4.2.9) en términos del tiempo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dF &= \{F, \phi_\alpha\} d\tau^\alpha, \\ &= \{F, \phi_0\} dt + \{F, \phi_P\} d\tau^P, \\ &= \left[\{F, \phi_0\} - \{F, \phi_P\} (\Phi^{-1})^{PH} \{\phi_H, \phi_0\} \right] dt, \end{aligned}$$

el término entre corchetes recibe el nombre de «corchetes generalizados evaluados a tiempos iguales (CG)» [3, 4, 6], éstos nuevos corchetes obedecen todas las reglas de los CP, como la bilinealidad, la antisimetría y la identidad de Jacobi [3, 6].

En términos generales, para dos variables dinámicas $F(q^a, p^a)$ y $G(q^a, p^a)$, los CG son

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_P\} (\Phi^{-1})^{PH} \{\phi_H, G\}.$$

A partir de ellos se redefine la dinámica del sistema eliminando todas las variables independientes excepto el tiempo. La evolución temporal de una variable dinámica $F(q^a, p^a)$ se puede expresar como el corchete generalizado entre la variable dinámica y la EDP de Hamilton-Jacobi ϕ_0 [6]

$$dF(q^a, p^a) = \{F, \phi_0\}^* dt.$$

Finalmente, con la definición de los CG, la condición de integrabilidad de Frobenius se reinterpreta como $\dot{\phi}_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_0\}^* = 0$ [4], dónde se define $\dot{\phi}_\alpha \equiv \frac{d\phi_\alpha}{dt}$. Cabe destacar que con la definición de los corchetes generalizados, la condición de integrabilidad para ϕ_0 se satisface directamente debido a las propiedades de antisimetría de los corchetes generalizados [4].

Capítulo 5

Teoría de Yang-Mills libre

La teoría de Yang-Mills desarrollada por Chen Ning Yang y Robert Mills en la década de 1950, se ha convertido en uno de los pilares fundamentales de la física teórica moderna. Esta teoría ha sido de vital importancia para describir y unificar las interacciones fundamentales, estableciendo las bases del Modelo Estándar y mejorando la comprensión de las partículas elementales y las fuerzas presentes en el universo. En este capítulo se presentará una introducción a esta teoría, a través de un enfoque canónico, abordando desde la construcción de su densidad lagrangiana hasta llegar a la formulación Hamiltoniana.

5.1. Tensor de intensidad de campo

El tensor de intensidad de campo¹ $F_{\mu\nu}(x)$ describe cómo varían los campos gauge en el espacio-tiempo y cómo interactúan estos campos entre sí [7, 8]. La forma específica del tensor de intensidad de campo depende del grupo gauge de la teoría y se define en general como el conmutador de Lie entre las derivadas covariantes de los campos gauge, de manera que al ser aplicado a una función de onda cualquiera $\psi_i(x)$ toma la siguiente forma² [8]:

$$F_{\mu\nu}(x)\psi_i(x) = \frac{i}{g}[D_\mu(x), D_\nu(x)]\psi_i(x), \quad (5.1.1)$$

donde g se conoce como la constante de acoplamiento asociada con la intensidad de campo. Esta forma garantiza la invarianza de la densidad lagrangiana bajo una transformación gauge local. La derivada covariante $D_\mu(x)$ incluye la derivada parcial y un término de conexión que depende de los campos gauge como se observa a continuación³

$$D_\mu(x) \equiv \partial_\mu(x) - igA_\mu(x),$$

la derivada covariante tiene una segunda representación, la cual es equivalente a la anterior y se conoce como la representación adjunta, definida en términos de los índices de grupo a y b de la siguiente manera [9]:

$$D_{a\mu}^b(x) = \delta_a^b \partial_\mu^x - gf_{ca}^b A_\mu^c(x),$$

donde f_{bc}^a se conoce como la constante de estructura del álgebra de Lie y su forma depende del grupo de simetría específico en el que se esté trabajando. En la teoría de Yang Mills se trabaja con los campos gauge

¹Cabe destacar que se usa la notación $F_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv F_{\mu\nu}(x)$ y $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

²Para más información sobre el conmutador de Lie se recomienda leer el apéndice §A.

³Para más información sobre la derivada covariante se recomienda el apéndice §B.

$A_\mu(x)$, que son elementos antihermíticos del álgebra de Lie y cuya representación con índices de grupo, se define mediante [10]

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a,$$

siendo T_a los generadores del grupo de simetría. Bajo la definición de derivada covariante (B.1.4), el tensor de intensidad de campo se puede representar en términos de los campos gauge [8, 10–12]:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] \equiv F_{\mu\nu}^a(x)T_a,$$

al expandir cada término de la ecuación precedente en el espacio de los generadores, se obtiene la representación del tensor de campo en este espacio $F_{\mu\nu}^a(x)$. De este modo la expansión de cada término es [8, 9]

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu &= (\partial_\mu A_\nu^a)T_a, \\ \partial_\nu A_\mu &= (\partial_\nu A_\mu^a)T_a, \\ ig[A_\mu, A_\nu] &= (-gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c)T_a,\end{aligned}$$

al sustituir esta expansión, se puede despejar la representación con índices de grupo del tensor de intensidad de campo [10, 11]:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf_{bc}^a A_\mu^b(x)A_\nu^c(x), \quad (5.1.2)$$

esta es la forma del tensor de intensidad de campo con la que se trabajará en adelante.

5.2. Invarianza de la densidad Lagrangiana

Una construcción importante en la teoría de campos y que sirve como punto de partida para la discusión de la teoría de Yang-Mills es la acción [7], quien determina la dinámica de cualquier sistema y debe ser única para cada sistema. La acción se define como la integral de la densidad Lagrangiana [10, 11, 13]:

$$\mathcal{A}(A^\nu(x)) = \int \mathcal{L}(A^\nu(x), \partial_\mu A^\nu(x)) d^4x. \quad (5.2.1)$$

La acción es una funcional de los campos, lo que significa que toma a los campos como parámetros de entrada y los evalúa en cada punto del espacio-tiempo devolviendo un escalar. Para garantizar la unicidad de la acción, la densidad Lagrangiana debe ser invariante bajo transformaciones gauge⁴ y se debe construir con este objetivo [7]. Para ello es conveniente utilizar la derivada covariante y sus propiedades de transformación bajo simetrías gauge locales de la forma $\Omega(x)$.

A partir de la ecuación (B.1.2), se puede observar que

$$\begin{aligned}[D_\mu(x)\psi_i(x)]' &= D'_\mu(x)\psi'_i(x) \\ &= \Omega(x)D_\mu(x)\psi_i(x) \\ &= \Omega(x)D_\mu(x)\Omega^\dagger(x)\Omega(x)\psi_i(x),\end{aligned}$$

determinando la regla de transformación de la derivada covariante:

$$D'_\mu(x) = \Omega(x)D_\mu(x)\Omega^\dagger(x). \quad (5.2.2)$$

⁴Para más información sobre transformaciones gauge, consulte la sección correspondiente en el Apéndice §B.

La transformación definida anteriormente será una transformación de simetría o transformación gauge siempre y cuando $\Omega(x)$ sea un elemento de $SU(N)$, y por tanto se puede parametrizar como se muestra en la ec. (B.1.1) [14]:

$$\Omega(x) = [e^{-i\theta^a(x)T_a}],$$

donde $\theta^a(x)$ es un factor de fase que depende del punto y T_a son los generadores del grupo $SU(N)$, los cuales no dependen del punto [15]. La ley de transformación del tensor de intensidad de campo se obtiene al considerar su definición en la ecuación (5.1.1), con base a esta definición se puede inferir que el tensor de intensidad de campo debe transformar de manera covariante, es decir, de la misma forma que la derivada covariante. Al utilizar la ecuación (5.2.2), se puede demostrar que se satisface la siguiente relación:

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)F_{\mu\nu}(x)\Omega^\dagger(x).$$

Se puede construir una acción invariante utilizando este tensor. Uno de los invariantes más simples se obtiene tomando la traza del producto de los tensores de campo [10, 11, 14].

$$\text{Tr}[F'_{\mu\nu}(x)F'^{\mu\nu}(x)] = \text{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)].$$

Se observa que dentro de la traza se encuentra el producto de dos tensores de intensidad de campo con los índices vectoriales contraídos, esto es porque la densidad Lagrangiana que se construye debe ser un escalar de Lorentz y un escalar de gauge, la contracción de los índices garantiza la primera restricción y la traza garantiza la segunda restricción [8].

En la ecuación (5.2.3) se presenta la acción propuesta en la teoría de Yang-Mills, cuando se enfoca exclusivamente en la dinámica de los campos gauge [8, 14]:

$$\mathcal{A}(A^\nu(x)) = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)] \right]. \quad (5.2.3)$$

De la anterior ecuación se determina que la densidad Lagrangiana para la teoría de Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)],$$

al expresar esta ecuación en términos de las componentes de grupo, teniendo en cuenta las propiedades de la traza, específicamente la propiedad dada en la ecuación (A.1.2) se demuestra que [9]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x). \quad (5.2.4)$$

El hecho de tener una densidad Lagrangiana invariante implica que el sistema sea singular, esto se debe a que la invarianza proviene de una simetría gauge local. Para verificar esta proposición, se calcula la matriz Hessiana de la densidad Lagrangiana, definida en la ecuación (4.2.4), la cual se puede generalizar a teorías con campos continuos [11, 13]:

$$W_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta[\partial_0 A_\mu^a(x)] \delta[\partial_0 A_\nu^a(y)]} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu^a) \partial(\partial_0 A_\nu^a)} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Se requiere tener presente los resultados obtenidos en el apéndice §C.2, en el cual se calcula la derivada de la densidad Lagrangiana respecto a las derivadas de los campos de gauge. Lo anterior se debe a que la matriz Hessiana será un caso específico de estos resultados generales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\nu^a)} = F_a^{\nu\gamma}, \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma A_\mu^a) \partial(\partial_\gamma A_\nu^a)} = \eta^{\nu\gamma} \eta^{\gamma\mu} - \eta^{\nu\mu} \eta^{\gamma\gamma}, \quad (5.2.6)$$

donde $\eta^{\gamma\beta}$ es la métrica de Minkowski, que se define matricialmente como

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.7)$$

Haciendo $\gamma = 0$ en la ecuación (5.2.6) se obtiene que la matriz Hessiana es

$$W_{\mu\nu}(x, y) = \eta^{\nu 0} \eta^{0\mu} - \eta^{\nu\mu}.$$

Esta se puede expresar en forma matricial al tener en cuenta la métrica de Minkowski (5.2.7), dando como resultado:

$$W(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

esta matriz tiene una dimensión de cuatro y un rango de tres. El hecho de que el rango de la matriz sea menor que su dimensión, indica la presencia de un autovalor nulo, lo que conlleva a que su determinante sea cero.

$$\det[W(x, y)] = 0. \quad (5.2.8)$$

Este resultado demuestra que el campo de Yang-Mills está descrito por una densidad Lagrangiana singular, como era de esperar, debido a la presencia de simetrías gauge locales.

5.3. Formulación Lagrangiana

El objetivo de aplicar la formulación Lagrangiana es determinar las ecuaciones de movimiento de la teoría en cuestión. En el caso de la teoría de campos de Yang-Mills libre, las ecuaciones de movimiento describen como cambian en el tiempo los campos gauge que representan a las partículas fundamentales.

Para obtener las ecuaciones de campo, se parte de la definición de la acción dada por la ecuación (5.2.1):

$$\mathcal{A}(A_\mu^a(x), \partial_\nu A_\mu^a(x)) = \int \mathcal{L}(A^\nu(x), \partial_\mu A^\nu(x)) d^4x,$$

teniendo presente la densidad Lagrangiana de Yang-Mills (5.2.4), la acción podrá expresarse de la siguiente manera

$$\mathcal{A}(A_\mu^a(x), \partial_\nu A_\mu^a(x)) = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x).$$

Sin embargo, existen múltiples trayectorias posibles definidas por esta acción. Para asegurar la unicidad de la trayectoria en el cálculo, se elige aquella que minimiza la acción, lo cual se conoce como el principio de mínima acción, que matemáticamente se expresa así

$$\delta \mathcal{A} = \int d^4x \delta \mathcal{L}(A^\nu(x), \partial_\mu A^\nu(x)) = 0,$$

5.4. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

como consecuencia de este principio, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange, de las cuales se pueden derivar las ecuaciones de campo [11, 13]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\nu A_\mu^a(x)]} \right] = 0, \quad (5.3.1)$$

el segundo término de la anterior expresión se calculó en la ecuación (5.2.5). Por otro lado, utilizando la ecuación (5.1.2) y la definición de la densidad Lagrangiana (5.2.4) se puede demostrar que⁵

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} = -g F_b^{\mu\nu}(x) f_{ca}^b A_\nu^c(x).$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.3.1), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= -g F_b^{\mu\nu}(x) f_{ca}^b A_\nu^c(x) - \partial_\nu F_a^{\mu\nu}(x) \\ 0 &= [\delta_a^b \partial_\nu - g f_{ac}^b A_\nu^c(x)] F_b^{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

lo anterior se puede expresar en términos de la derivada covariante de esta manera⁶:

$$D_{a\nu}^b(x) F_b^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (5.3.2)$$

Esta es la ecuación de campo para la teoría de Yang-Mills libre en el espacio de configuración, es decir, en la formulación Lagrangiana. Aquí se introduce la derivada covariante en términos de la constante de estructura, como se muestra en la siguiente expresión:

$$D_{a\nu}^b(x) \equiv \delta_a^b \partial_\nu^x - g f_{ac}^b A_\nu^c(x),$$

ecuación que define la derivada covariante en la representación adjunta, la cual es totalmente equivalente a la definición de derivada covariante (B.1.4) dada en el apéndice §B, esto se debe a que en la representación adjunta existe una relación entre las constantes de estructura y los generadores del grupo [11]:

$$-i f_{bc}^a \equiv (T^a)_{bc}^{\text{adj}}.$$

Es importante destacar que la invarianza gauge de la teoría de Yang-Mills se refleja en la aparición del tensor de intensidad de campo en las ecuaciones de campo (5.3.2), ya que este tensor es invariante bajo transformaciones gauge locales.

5.4. Formulación Hamiltoniana

Teniendo presente la ecuación (5.2.8), se deduce que la teoría de Yang-Mills es singular, existiendo varios métodos que permiten estudiar este tipo de sistemas. El método que se trabajará recibe el nombre de método

⁵El cálculo respectivo se muestra en el apéndice §C.1.

⁶Es fácil corroborar este resultado dado a que aparece en muchos libros que trabajan la teoría de Yang-Mills, para más información puede consultar las siguientes referencias: [8, 10–12, 14].

de Hamilton-Jacobi, sin embargo, es necesario primero determinar el Hamiltoniano canónico, el cual constituye el objetivo de esta sección. A continuación, se procede a definir los momentos canónicos conjugados a los campos de gauge [11, 13]:

$$\pi_a^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu^a(x)}, \quad (5.4.1)$$

al reemplazar la relación (5.2.5) en la ecuación (5.4.1) se obtiene lo siguiente

$$\pi_a^\mu(x) = F_a^{\mu 0}(x) = \partial^\mu A_a^0(x) - \dot{A}_a^\mu(x) - g f_a^{bc} A_b^\mu(x) A_c^0(x). \quad (5.4.2)$$

Cabe destacar que el tensor de intensidad de campo es antisimétrico en sus índices vectoriales, lo cual implica que se cumple la relación $F_a^{\mu\nu}(x) = -F_a^{\nu\mu}(x)$ [11], de manera que si $\mu = \nu$, se satisface $F_a^{\nu\nu}(x) = 0$. Teniendo en cuenta esta propiedad, se observa que la componente temporal del momento canónico es nula:

$$\pi_a^0(x) = F_a^{00}(x) = 0,$$

la anterior ecuación no relaciona el momento canónico con la velocidad correspondiente, identificándose como una ecuación diferencial parcial,⁷ la cual será denotada por $\phi_{1a}(x)$:

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) = 0. \quad (5.4.3)$$

Ahora, al trabajar con las componentes espaciales del momento canónico conjugado (5.4.2), es decir para $\mu = i$ resulta

$$\pi_a^i(x) = F_a^{i0}(x) = \partial^i A_a^0(x) - \dot{A}_a^i(x) - g f_a^{bc} A_b^i(x) A_c^0(x).$$

En esta ecuación se establece una relación directa entre las velocidades generalizadas $\dot{A}_a^i(x)$ y los momentos canónicos $\pi_a^i(x)$, lo que se conoce como una ecuación de movimiento en el espacio de fase para la formulación Hamiltoniana. Dicha ecuación de movimiento permite despejar las velocidades generalizadas como funciones de los momentos canónicos:

$$\dot{A}_a^i(x) = [\delta_a^c \partial_x^i - g f_a^{bc} A_b^i(x)] A_c^0(x) - \pi_a^i = D_a^{ci}(x) A_c^0(x) - \pi_a^i(x).$$

Con las expresiones obtenidas para los momentos canónicos, se puede calcular la densidad Hamiltoniana canónica mediante una transformación de Legendre [11, 13]:

$$\mathcal{H}_0(x) = \pi_a^\mu(x) \dot{A}_\mu^a(x) - \mathcal{L}(x).$$

Para la teoría de Yang Mills, el Hamiltoniano canónico se deriva de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \pi_a^\mu(x) \dot{A}_\mu^a(x) + \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}^a(x) \\ &= \pi_a^i(x) [D_a^{ci}(x) A_c^0(x) - \pi_a^i(x)] + \frac{1}{2} F_a^{i0}(x) F_{i0}^a(x) + \frac{1}{4} F_a^{ij}(x) F_{ij}^a(x) \\ &= \pi_a^i(x) D_a^{ci}(x) A_c^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_a^{ij}(x) F_{ij}^a(x), \end{aligned}$$

de este modo la densidad Hamiltoniana canónica para la teoría de Yang-Mills es

$$\mathcal{H}_0 = \pi_a^i(x) D_a^{ci}(x) A_c^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_{ij}^a(x),$$

⁷En el método de Hamilton-Jacobi se interpretan las restricciones entre los campos como EDP.

5.4. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

a partir de la densidad Hamiltoniana se puede construir el Hamiltoniano canónico de la teoría, el cual se define como [13]

$$H_0 \equiv \int d^3x \mathcal{H}_0,$$

para la teoría de Yang Mills corresponde a

$$H_0 = \int d^3x \left[\pi_i^a(x) D_a^{ci}(x) A_c^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x) \right].$$

Es posible reescribir la derivada covariante de manera que actúe sobre el momento canónico generalizado en lugar de hacerlo sobre el campo de gauge. Al realizar dicho cambio, surgirá un término que desaparece bajo condiciones de frontera, debido a que los campos físicos decrecen con la distancia y su valor tiende a cero en el infinito, de esta manera el Hamiltoniano canónico resulta

$$H_0 = \int d^3x \left[A_c^0(x) D_a^{ci}(x) \pi_i^a(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x) \right]. \quad (5.4.4)$$

Es conveniente trabajar con esta última expresión, ya que facilita las operaciones que involucran el Hamiltoniano canónico. Además, se observa que el último término de la ecuación (5.4.4) depende de los tensores de intensidad de campo, los cuales, a su vez, dependen de las derivadas espacio-temporales de los campos gauge. Sin embargo, debido a la presencia de EDP, no es posible expresar todas las derivadas temporales en términos de los momentos canónicos conjugados.

Existen diversos métodos que abordan este problema, entre ellos se destacan el formalismo de Dirac y el formalismo de Hamilton-Jacobi, aunque el trabajo se enfoca en este último formalismo, es conveniente tener presente los resultados que se obtienen bajo la formulación de Dirac, sección que se estudia a continuación.

5.5. Formulación de Dirac

Con la finalidad de comparar los resultados obtenidos con la implementación de las condiciones gauge en la formulación de Hamilton-Jacobi, es necesario introducir el tratamiento canónico de estas condiciones mediante la formulación de Dirac, esta es una formulación que permite implementar la información de las ligaduras que posee el sistema a la dinámica del mismo mediante la redefinición de los corchetes de Poisson. Cabe destacar que dentro del desarrollo de esta sección no se explicará a detalle la formulación de Dirac, pues el objetivo de la sección es encontrar únicamente los corchetes de Dirac fundamentales, por lo tanto se citaron resultados obtenidos previamente agilizando así el desarrollo de esta sección [9].

En este tratamiento, se considera como ligadura primaria a la condición $\pi_a^0(x) \approx 0$, luego mediante un análisis de consistencia de la primera ligadura, se obtiene como ligadura secundaria a $D_{ba}^i(x)\pi_i^b(x) \approx 0$. Estas ligaduras se denotan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\phi_{1a}(x) &= \pi_a^0(x) \approx 0, \\ \phi_{2a}(x) &= D_{ba}^i(x)\pi_i^b(x) \approx 0,\end{aligned}$$

donde el símbolo « \approx » indica una igualdad débil. Teniendo presente que los CP permiten definir la evolución dinámica de un sistema, se observa que la presencia de estas ligaduras altera esta dinámica dado a que los CP fundamentales no son consistentes con estas ligaduras:

$$\begin{aligned}\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\} &= 0, \\ \{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} &= 0, \\ \{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu,\end{aligned}$$

dado a que $\pi_a^0(x) \approx 0$ se espera que al sustituirlo en el último CP este valga cero, sin embargo esta condición no se satisface, como un método para solucionar este problema se propuso redefinir el Hamiltoniano canónico incorporando la información de las ligaduras mediante los multiplicadores de Lagrange $\lambda_p^a(x)$, como se observa a continuación⁸

$$H_E = H_0 + \int d^3x [\lambda_1^a(x)\phi_{1a}(x) + \lambda_2^a(x)\phi_{2a}(x)],$$

expresión que se conoce como el Hamiltoniano extendido, el cual está compuesto por las ligaduras primarias y secundarias,⁹ este define ahora la evolución temporal de una variable dinámica $F_a(x) \equiv F_a(A_\mu^b(x), \pi_b^\nu(x))$ en el espacio de fase a través de

$$\dot{F}_a(x) \approx \{F_a(x), H_E\},$$

la igualdad débil en esta expresión indica que los corchetes de Poisson en los que se basa la dinámica del sistema no son completamente congruentes con las ligaduras del sistema, de modo que la redefinición del Hamiltoniano aún no soluciona completamente el problema. Para solucionar esto se debe redefinir los corchetes que rigen la dinámica, introduciendo una matriz invertible compuesta por las ligaduras de segunda clase del sistema. Para la teoría de Yang-Mills, las dos ligaduras que surgen son de primera clase [4], para poder construir la matriz se debe introducir un conjunto de ligaduras que conviertan a $\phi_{1a}(x)$ y $\phi_{2a}(x)$ en ligaduras de segunda clase, estas nuevas ligaduras se conocen como «condiciones gauge» y se introducen según conveniencia.

⁸Los índices H y P se usan como contadores del número de ligaduras del sistema.

⁹Las ligaduras primarias son las que surgen de la definición del momento canónico generalizado, mientras que las secundarias surgen al exigir la consistencia de las ligaduras primarias, es decir exigir $\phi_{Ha}(x) \approx 0$.

5.5.1. Gauge de radiación

Se consideran ahora como condiciones gauge a las restricciones $A_a^0(x) \approx 0$ y $\partial_i^x A_a^i(x) \approx 0$. De esta manera, el conjunto completo de ligaduras del sistema es el siguiente

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) \approx 0, \quad (5.5.1a)$$

$$\phi_{2a}(x) = D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) \approx 0, \quad (5.5.1b)$$

$$\phi_{3a}(x) = A_a^0(x) \approx 0, \quad (5.5.1c)$$

$$\phi_{4a}(x) = \partial_i^x A_a^i(x) \approx 0. \quad (5.5.1d)$$

El objetivo ahora es encontrar los corchetes de Dirac (CD) fundamentales de la teoría de Yang-Mills libre utilizando la definición de los corchetes de Dirac dada en la ecuación (5.5.4) con la finalidad de compararlos más tarde con los corchetes fundamentales generalizados, para ello se deben evaluar los corchetes de Poisson entre las ligaduras y con ello construir la matriz de ligaduras mostrada en (5.5.2), estos CP se muestran a continuación¹⁰

Tabla 5.5.1: Corchetes de Poisson entre las ligaduras.

$\{ \quad , \quad \}$	$\phi_{1c}(y)$	$\phi_{2c}(y)$	$\phi_{3c}(y)$	$\phi_{4c}(y)$
$\phi_{1a}(x)$	0	0	$-\delta_{ac} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$\phi_{2a}(x)$	0	0	0	$-D_{ac}^i(x) \partial_{yi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$\phi_{3a}(x)$	$\delta_{ac} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0	0
$\phi_{4a}(x)$	0	$D_{ac}^i(y) \partial_{xi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0

Se observa que cada ligadura tiene al menos un corchete de Poisson diferente de cero, por lo que todas las ligaduras se pueden clasificar como de segunda clase.¹¹ A partir de estos CP se construye una matriz de ligaduras de segunda clase de la forma $C_{HP}^{ab}(x, y) \equiv \{\phi_H^a(x), \phi_P^b(y)\}$, la cual permite definir la evolución dinámica del sistema como se observará más adelante. Para la teoría en cuestión, esta matriz toma la siguiente forma:

$$C_{ac}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} \\ \delta_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{xi} D_{ca}^i(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.5.2)$$

Es necesario ahora determinar la inversa de la matriz de ligaduras para poderla sustituir en la definición de los CD, para ello, se debe considerar la función de Green de los operadores correspondientes, estas son dos funciones $G_{bc}(x, y, A_\mu)$ y $\sigma_{bc}(x, y, A_\mu)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$D_{ab}^i(x) \partial_j^x G^{bc}(x, y, A_\mu) = \delta_j^i \delta_a^c \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.5.3a)$$

$$\partial_j^x D_{ab}^i(x) \sigma^{bc}(x, y, A_\mu) = \delta_j^i \delta_a^c \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.5.3b)$$

Con esto determinado, la inversa de la matriz de ligaduras será una matriz $C_{cb}^{-1}(x, y)$ que satisface

$$\int d^3z C_{ac}(x, z) C_{cb}^{-1}(z, y) = \int d^3z C_{cb}^{-1}(x, z) C_{ac}(z, y) = \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

¹⁰Los cálculos de los CP entre las ligaduras se realiza en el apéndice §C.6.

¹¹Las ligaduras de primera clase son aquellas que tiene corchetes de Poisson igual a cero con todas las ligaduras, en caso de que halla algún CP diferente de cero se denominan ligaduras de segunda clase.

mediante la cual, se puede demostrar que la inversa de la matriz de ligaduras es¹²

$$C_{cb}^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_{cb}(x, y, A) \\ -\delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cb}(x, y, A) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

esta matriz permite definir los corchetes de Dirac, estos son una generalización de los CP que incluyen la información de todas las ligaduras de segunda clase del sistema mediante la inversa de la matriz de ligaduras $[C_{pq}^{cd}(u, v)]^{-1}$, esto genera que los CD sean consistentes con todas las ligaduras y permiten definir la dinámica del sistema, además, los corchetes de Dirac tienen propiedades similares a los corchetes de Poisson y se definen como

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_D = \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3v \{F_a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}(u, v)]^{-1} \{\phi_{qd}(v), G_b(y)\}, \quad (5.5.4)$$

con esta redefinición, la dinámica del sistema se calcula con el Hamiltoniano canónico como se muestra a continuación¹³

$$\dot{F}_a(x) \equiv \{F_a(x), H_0\}_D.$$

Bajo la definición de los CD, el conjunto de ligaduras (5.5.1) se convierte en igualdades fuertes, lo que elimina las arbitrariedades en la dinámica del sistema. Finalmente, a partir de la definición de corchetes de Dirac (5.5.4) se calcula la evolución de cualquier variable dinámica, para ello es conveniente determinar los corchetes de Dirac fundamentales de la teoría, calculados en la sección §C.9:

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}_D = 0, \quad (5.5.5a)$$

$$\{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}_D = g\delta_\mu^k\delta_\nu^l f_{ch}^a \pi_k^h(x) \partial_l^y \sigma^{cb}(x, y, A) - g\delta_\mu^l\delta_\nu^k f_{dh}^b \pi_l^h(y) \partial_k^x G^{ad}(x, y, A), \quad (5.5.5b)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\}_D = [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0\delta_0^\nu] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A). \quad (5.5.5c)$$

¹²El cálculo de la inversa de la matriz de ligaduras se realiza en la sección §C.7.

¹³Cabe destacar que en todas las teorías que poseen ligaduras de segunda clase se debe redefinir los CP con la finalidad de implementar la información de las ligaduras en la dinámica del sistema.

Capítulo 6

Aplicación del método de Hamilton-Jacobi

Anteriormente se mencionó que la Lagrangiana de la teoría de Yang-Mills presenta singularidades, lo que implica la presencia de restricciones en el sistema que reducen los grados de libertad. Mediante el método de Hamilton-Jacobi, es posible identificar el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que caracterizan el sistema, que se desarrollarán en este capítulo. Además, se construirán las ecuaciones características que rigen la dinámica del sistema.

6.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi asociada con el hamiltoniano canónico H_0 definido en la ecuación (5.4.4), se expresa de la siguiente manera¹

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0(A^\mu(x), \pi_i(x)) = 0. \quad (6.1.1)$$

Por conveniencia notacional, se denota el primer término como $\frac{\partial S}{\partial t} \equiv P^0$ [5], además, la anterior ecuación puede ser expresada en términos de densidades, para lo cual se introduce la densidad de momento:

$$P^0 \equiv \int d^3x p^0,$$

donde se interpreta a p^0 como la densidad del momento canónico conjugado a la variable temporal t . Con esta notación, la ecuación (6.1.1) puede ser reescrita mediante

$$P^0 + H_0 = \int d^3x (p^0 + \mathcal{H}_0) = 0.$$

El término entre paréntesis corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de densidades. En el método de Hamilton-Jacobi, esta ecuación diferencial se considera como una primera EDP, que formará

¹Para una comprensión más detallada de este tema, se recomienda consultar el capítulo §4

parte de las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi. Esta EDP se define por:

$$\begin{aligned}\phi_{00}(x) &\equiv p^0 + \mathcal{H}_0 \\ &= p^0 + A_c^0(x) D_a^{ci}(x) \pi_i^a(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

6.2. Conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi

La segunda EDP que se incluye en las ecuaciones diferenciales, se determinó en la ecuación (5.4.3) y se muestra a continuación

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) = 0.\tag{6.2.1}$$

La notación utilizada para los índices de las EDP es la siguiente: el primer índice en $\phi_{Pa}(x)$ cuenta el número de EDPHJ, mientras que el segundo es un índice de grupo. A cada una de estas EDPHJ se le puede asignar un parámetro arbitrario que dependa de las coordenadas y del tiempo. En particular, a la EDP (6.2.1) se le asocia como parámetro $\tau_1^a(x)$, que posteriormente se relacionará con la componente temporal del campo gauge $A_0^a(x)$. Por otro lado, a la EDP (6.1.2) se le puede asignar el parámetro temporal t , basado en que esta EDP está relacionada con la densidad Hamiltoniana canónica, la cual define la evolución temporal del sistema.

Así, los parámetros $[t, \tau_1^a(x)]$ conforman inicialmente el conjunto de variables independientes. Este número puede aumentar a medida que se encuentren nuevas EDPHJ mediante el análisis de las condiciones de integrabilidad, como se verá en la sección §6.2.1.

Cuando se trabaja con campos continuos, la forma de los campos depende del punto espacio-temporal. Por lo tanto, los corchetes de Poisson evaluados a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $F_a(x)$ y $G_b(y)$ se definen mediante integrales alrededor de un punto z :

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_{x_0=y_0} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta G_b(y)}{\delta \pi_c^\mu(z)} - \frac{\delta G_b(y)}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta F_a(x)}{\delta \pi_c^\mu(z)} \right],\tag{6.2.2}$$

donde el símbolo δ indica una derivada funcional. La evolución temporal de una variable dinámica $F(A(x), \pi(x)) \equiv F(x)$ se define utilizando los corchetes de Poisson [3, 5]:

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F(x), \phi_{1a}(y)\} d\tau_1^a(y)].\tag{6.2.3}$$

Es momento de obtener los corchetes de Poisson fundamentales, que son relaciones que facilitarán los cálculos de los corchetes de Poisson entre variables dinámicas en el espacio de fase, evitando la necesidad de utilizar la definición directamente. A partir de la relación (6.2.2), se pueden demostrar los siguientes corchetes de Poisson fundamentales:

$$\begin{aligned}\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \{A_\mu^a(x), A_b^\nu(x)\} &= 0, \\ \{\pi_\mu^a(y), \pi_b^\nu(y)\} &= 0.\end{aligned}$$

Los corchetes de Poisson son antisimétricos y obedecen la identidad de Jacobi, por lo tanto forman un álgebra de Lie². Esta es una herramienta fundamental en la teoría de campos, ya que los corchetes de Poisson contribuyen a determinar la evolución espacio-temporal de un sistema físico, como se ilustra en la ecuación (6.2.3).

6.2.1. Condiciones de integrabilidad

Las condiciones de integrabilidad son un conjunto de condiciones que se imponen a los sistemas dinámicos para verificar su integrabilidad completa y facilitar la resolución de las ecuaciones características correspondientes. Para que un sistema sea considerado integrable, las EDP del sistema deben mantenerse en involución en todo el espacio-tiempo, esto implica que las EDP deban satisfacer la condición de integrabilidad de Frobenius, que se introduce en la sección §4.2.2:

$$d\phi_{1a}(x) = 0.$$

La evolución de una variable dinámica se calcula usando el diferencial fundamental (6.2.3). Aplicando esto a la EDP (6.2.1), resulta

$$\begin{aligned} d\phi_{1a}(x) &= \int d^3y [\{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\}dt + \{\phi_{1a}(x), \phi_{1a}(y)\}d\tau_1^a(y)] \\ &= \int d^3y [\{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\}dt \\ &= \int d^3y [\{\pi_a^0(x), p^0(y) + A_d^0(y)D_b^{di}(x)\pi_i^b(y) - \frac{1}{2}\pi_b^i(y)\pi_i^b(y) + \frac{1}{4}F_{ij}^b(y)F_b^{ij}(y)\}dt, \end{aligned}$$

al resolver esta integral se obtiene ³

$$d\phi_{1a} = D_{ba}^i(x)\pi_i^b(x)dt.$$

La condición de integrabilidad para la EDP $\phi_{1a}(x)$ conduce a la aparición de una nueva EDP, tal como indica la condición de integrabilidad de Frobenius (4.2.10), esta EDP surge de la restricción $D_{ba}^i(x)\pi_i^b(x) = 0$ y debe ser agregada al conjunto de EDPHJ:

$$\phi_{2a}(x) \equiv D_{ba}^i(x)\pi_i^b(x) = 0. \quad (6.2.4)$$

La nueva EDP también debe cumplir con la condición de integrabilidad de Frobenius. Para verificar su integrabilidad, es necesario imponer la restricción:

$$d\phi_{2a}(x) = 0,$$

aplicando el diferencial fundamental (6.2.3):

$$d\phi_{2a}(x) = \int d^3y [\{\phi_{2a}(x), \phi_{00}(y)\}dt + \{\phi_{2a}(x), \phi_{1c}(y)\}d\tau_1^c(y)],$$

para solucionar la anterior integral se deben calcular los corchetes de Poisson presentes, los cuales son

$$\begin{aligned} \{\phi_{2a}(x), \phi_{00}(y)\} &= gf_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \{\phi_{2a}(x), \phi_{1c}(y)\} &= 0, \end{aligned}$$

²Para más información se recomienda consultar el apéndice §A.

³El desarrollo de la integral se realiza en el apéndice §C.3.

sustituyendo esto en el diferencial $d\phi_{2a}(x)$:

$$\begin{aligned} d\phi_{2a}(x) &= g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) \int d^3y [A^{0c}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dt], \\ &= g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(x) dt. \end{aligned}$$

Al ser proporcional a la misma EDP y considerando que en el sistema de EDPHJ $\phi_{2b}(x) = 0$, se puede concluir que $d\phi_{2a}(x) = 0$, demostrando que la condición de integrabilidad para la nueva EDP es idénticamente cero. Las condiciones de integrabilidad indicaron la necesidad de imponer una nueva restricción al sistema, $\phi_{2a}(x)$ para obtener un sistema de EDPHJ completo. Esto implica que el conjunto inicial de variables independientes es incompleto y es necesario expandir el espacio de parámetros con nuevas variables independientes que se relacionen con cada EDP [4, 5]. Por lo tanto, es obligatorio introducir un nuevo parámetro en la teoría que dependa del espacio-tiempo, el cual será denominado $\tau_2^a(x)$, de esta manera, el conjunto de EDP con sus respectivas variables independientes es

$$\phi_{00}(x) \equiv p^0 + A_c^0(x) D_a^{ci}(x) \pi_i^a(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x) \rightarrow t, \quad (6.2.5a)$$

$$\phi_{1a}(x) \equiv \pi_a^0(x) \rightarrow \tau_1^a(x), \quad (6.2.5b)$$

$$\phi_{2a}(x) \equiv D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) \rightarrow \tau_2^a(x). \quad (6.2.5c)$$

Resulta útil considerar los corchetes de Poisson entre las EDP, las cuales se presentan a continuación⁴

Tabla 6.2.1: Corchetes de Poisson entre las EDP 6.2.5.

$\{, \}$	$\phi_{00}(y)$	$\phi_{1c}(y)$	$\phi_{2c}(y)$
$\phi_{00}(x)$	0	$\pi_i^a(y) D_{ac}^i(x) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$	$-g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
$\phi_{1a}(x)$	$-\pi_i^b(y) D_{ba}^i(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$	0	0
$\phi_{2a}(x)$	$g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$	0	$g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$

Ahora bien, la imposición de nuevas EDP en el sistema requiere modificar la evolución de una variable dinámica (6.2.3), lo que conlleva a agregar un nuevo término independiente de la siguiente manera

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{1c}(y)\} d\tau_1^c(y) + \{F_a(x), \phi_{2c}(y)\} d\tau_2^c(y)], \quad (6.2.6)$$

esta modificación puede expresarse de forma compacta:

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{Pc}(y)\} d\tau_P^c(y); \quad P \equiv \{1, 2\}].$$

Con la nueva definición de la evolución de una variable dinámica, conocida como el diferencial fundamental, es necesario verificar nuevamente las condiciones de integrabilidad de las EDP. Para ello, se deben considerar las relaciones entre las variables dinámicas y las EDP, como se indica en la tabla 6.3.1. A continuación, se procede al cálculo de cada una de las condiciones de integrabilidad.

Se comienza con el análisis de la condición de integrabilidad de $\phi_{1a}(x)$.

$$d\phi_{1a}(x) = \int d^3y [\{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{\phi_{1a}(x), \phi_{1c}(y)\} d\tau_1^c(y) + \{\phi_{1a}(x), \phi_{2c}(y)\} d\tau_2^c(y)].$$

⁴Para obtener las demostraciones correspondientes, se recomienda consultar el apéndice §C.5.

6.3. ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

Al reemplazar los respectivos corchetes de Poisson en el diferencial anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} d\phi_{1a}(x) &= - \int d^3y \pi_i^b(y) D_{ba}^i(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt \\ &= D_{ab}^i(x) \pi_i^b(x) dt \\ &= \phi_{2a}(x) dt, \end{aligned}$$

esto es consistente con los resultados obtenidos inicialmente al calcular la integrabilidad de esta EDP utilizando la definición (6.2.3).

Ahora se procederá al análisis de la EDP $\phi_{2a}(x)$:

$$\begin{aligned} d\phi_{2a}(x) &= \int d^3y [g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt + g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\tau_2^c(y)] \\ &= g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) \int d^3y [A^{0c}(y) dt + d\tau_2^c(y)] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) [A^{0c}(x) dt + d\tau_2^c(x)]. \end{aligned}$$

Se observa nuevamente que la condición de integrabilidad de esta EDP es proporcional a la propia EDP por lo que la condición de Frobenius (4.2.12) es satisfecha, verificando que no surgen nuevas EDP a partir de las condiciones de integrabilidad.

Estas relaciones establecen que el conjunto de EDPHJ (6.2.5) está en involución, lo que indica que las ecuaciones características son integrables [3, 4].

6.3. Ecuaciones características

Las ecuaciones características asociadas al conjunto de EDPHJ se determinan a partir de la definición de la evolución de una variable dinámica, dada en la ecuación (6.2.6). Para los campos gauge $A_a^\mu(x)$ y los momentos canónicos generalizados $\pi_\nu^a(x)$, las ecuaciones características se obtienen al resolver las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} dA_a^\mu(x) &= \int d^3y [\{A_a^\mu(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{A_a^\mu(x), \phi_{1b}(y)\} d\tau_1^b(y) + \{A_a^\mu(x), \phi_{2b}(y)\} d\tau_2^b(y)], \\ d\pi_\nu^a(x) &= \int d^3y [\{\pi_\nu^a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{\pi_\nu^a(x), \phi_{1b}(y)\} d\tau_1^b(y) + \{\pi_\nu^a(x), \phi_{2b}(y)\} d\tau_2^b(y)]. \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos es útil tener en cuenta los corchetes de Poisson entre las variables dinámicas y las EDP, los resultados de estos corchetes se resumen en la tabla⁵ 6.3.1:

Tabla 6.3.1: Corchetes de Poisson entre las variables dinámicas y las EDP (6.2.5).

$\{, \}$	$\phi_{00}(y)$	$\phi_{1b}(y)$	$\phi_{2b}(y)$
$A_a^i(x)$	$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [D_a^{di}(y) A_d^0(y) - \pi_a^i(y)]$	0	$D_{ab}^i(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$A_a^0(x)$	0	$\delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0
$\pi_i^a(x)$	$[g f_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) + F_{ij}^b(y) D_b^{aj}(y)] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	$g f_{bc}^a \pi_i^c(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$\pi_0^a(x)$	$-\pi_j^b(y) D_b^{aj}(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	0	0

⁵Para obtener la demostración de estos resultados, consulte el apéndice §C.4.

Con el fin de resaltar resultados importantes, se aborda de forma independiente la evolución de las componentes espaciales y temporales de los campos. Utilizando la tabla 6.3.1 y el diferencial correspondiente, se obtiene la evolución de la componente temporal del campo de gauge:

$$\boxed{dA_a^0(x) = d\tau_{1a}(x),} \quad (6.3.1)$$

esta relación muestra que la evolución de la variable $A_a^0(x)$ es indeterminada debido a la presencia del parámetro $\tau_{1a}(x)$, este problema se lo aborda en el capítulo de condiciones gauge. De manera similar, se procede al cálculo de la ecuación característica de la componente espacial del campo gauge $A_a^i(x)$:

$$\begin{aligned} dA_a^i(x) &= \int d^3y [\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) [D_a^{di}(y) A_d^0(y) - \pi_a^i(y)] dt + D_{ac}^i(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\tau_2^c(y)] \\ &= \int d^3y [\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) [D_a^{di}(y) A_d^0(y) - \pi_a^i(y)] dt + \int d^3y [D_{ac}^i(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\tau_2^c(y)] \\ &= [D_a^{di}(x) A_d^0(x) - \pi_a^i(x)] dt - D_{ca}^i(x) d\tau_2^c(x), \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\boxed{dA_a^i(x) = [D_a^{di}(x) A_d^0(x) - \pi_a^i(x)] dt - D_{ca}^i(x) d\tau_2^c(x).} \quad (6.3.2)$$

Se observa nuevamente que la dinámica de los campos gauge se mantiene arbitraria por la presencia de los parámetros indeterminados $\tau_2^c(x)$. Al igual que con los campos gauge, se procede a calcular la evolución de la componente temporal del momento canónico conjugado:

$$\begin{aligned} d\pi_0^a(x) &= \int d^3y \{ \pi_0^a(x), \phi_{00}(y) \} dt \\ d\pi_0^a(x) &= - \int d^3y \pi_j^b(y) D_b^{aj}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dt \\ d\pi_0^a(x) &= \underbrace{D_b^{aj}(x) \pi_j^b(x)}_{\phi_2^a(x)} dt \\ d\pi_0^a(x) &= 0, \end{aligned}$$

de esta manera:

$$\boxed{d\pi_0^a(x) = 0.} \quad (6.3.3)$$

Finalmente, se procede a trabajar con la variable dinámica $\pi_i^a(x)$, teniendo presente el respectivo diferencial para el momento canónico conjugado:

$$\begin{aligned} d\pi_i^a(x) &= \int d^3y \left[[gf_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) + F_{ij}^b(y) D_b^{aj}(y)] \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dt + gf_{cb}^a \pi_i^b(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\tau_2^c(y) \right] \\ &= [gf_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x)] dt + gf_{cb}^a \pi_i^b(x) d\tau_2^c(x). \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica del momento canónico conjugado resulta:

$$\boxed{d\pi_i^a(x) = [gf_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x)] dt + gf_{cb}^a \pi_i^b(x) d\tau_2^c(x).} \quad (6.3.4)$$

Las ecuaciones características permiten determinar las ecuaciones de campo en el espacio de fase para los campos gauge y los momentos canónicos conjugados, para ello se debe tener presente que las ecuaciones de

6.3. ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

campo en el espacio de fase corresponden a las primeras derivadas temporales de los campos, así, al derivar (6.3.2) respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{dA_a^i(x)}{dt} \equiv \dot{A}_a^i(x) = D_a^{di}(x)A_d^0(x) - \pi_a^i(x) - D_{ca}^i(x)\dot{\tau}_2^c(x),$$

donde se define $\dot{\tau}_2^c(x) \equiv \frac{d\tau_2^c(x)}{dt}$. La anterior ecuación junto con $\dot{A}_a^0(x)$ corresponde a una de las ecuaciones de campo en el espacio de fase:

$$\dot{A}_a^\mu(x) = \delta_0^\mu \dot{\tau}_{1a}(x) + \delta_i^\mu \left[D_a^{di}(x)A_d^0(x) - \pi_a^i(x) - D_{ca}^i(x)\dot{\tau}_2^c(x) \right]. \quad (6.3.5)$$

De igual manera, diferenciando la ecuación característica del momento canónico conjugado con respecto al tiempo, se obtiene la evolución temporal de esta variable dinámica, que corresponde a la segunda ecuación de campo en el espacio de fase para la teoría de Yang-Mills libre:

$$\dot{\pi}_\mu^a(x) = \delta_\mu^i \left[g f_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) + g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x) \right]. \quad (6.3.6)$$

Es posible determinar la ecuación de campo de la teoría de Yang-Mills libre en el espacio de configuración a partir de la derivada temporal del momento canónico conjugado, esto se logra mediante el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i^a(x) &= g f_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) + g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x), \\ \partial_0 \delta_b^a \pi_i^b(x) - g f_b^{ca} A_c^0(x) \pi_i^b(x) &= -D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) + g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x), \\ D_b^{a0}(x) F_{i0}^b(x) + D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) &= g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x), \\ D_b^{a\nu}(x) F_{i\nu}^b(x) &= g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x), \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

obteniendo

$$D_b^{a\nu}(x) F_{i\nu}^b(x) = g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x). \quad (6.3.8)$$

Por otro lado, recordando que $\pi_0^a(x) = 0$, se puede expresar la relación (6.3.3) de la siguiente manera⁶

$$\dot{\pi}_{0a}(x) = 0 = D_{ba}^j(x) \pi_j^b(x).$$

Teniendo en cuenta la relación⁷ (5.4.2) y al sumarle un término nulo $D_{ba}^0(x) F_{00}^b(x) = 0$, la ecuación anterior se transforma en la componente temporal (con $\mu = 0$) de la ecuación de campo (5.3.2) obtenida en la formulación Lagrangiana:

$$D_{ba}^j(x) F_{0j}^b(x) + D_{ba}^0(x) F_{00}^b(x) = D_{ba}^\nu(x) F_{\nu 0}^b(x) = 0. \quad (6.3.9)$$

Al juntar las ecuaciones (6.3.9) y (6.3.8), se obtiene la ecuación de campo completa en el espacio de configuración:

$$D_{ba}^\nu(x) F_{0\nu}^b(x) + D_b^{a\nu}(x) F_{i\nu}^b(x) = g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x),$$

6

$$D_b^{a\nu}(x) F_{\mu\nu}^b(x) = g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x).$$

Se observa que esta ecuación es indeterminada debido a la presencia del parámetro $\dot{\tau}_2^c(x)$, de esta manera el método de Hamilton-Jacobi aplicado a la teoría de campos de Yang-Mills libre permitió identificar las indeterminaciones que surgen en la dinámica de los campos.

⁶Se observa que esta relación coincide exactamente con la expresión de la EDP (6.2.4).

⁷Se observa que al hacer $\mu = j$ en esta ecuación, el momento canónico conjugado será $\pi_j^a = -F_{j0}^a = F_{0j}^a$.

Capítulo 7

Condiciones gauge en la teoría de Yang-Mills libre

En el capítulo anterior se destacó que las ecuaciones características presentan indeterminación debido a la presencia de los parámetros $\tau_P^a(x)$. Lo anterior infiere en un inconveniente dado que no es posible determinar la evolución de las variables dinámicas en el espacio de fase reducido, por tanto es necesario establecer un método para determinar la forma de los parámetros $\tau_P^a(x)$.

Para resolver este problema, se introducen las condiciones gauge, las cuales son nuevas restricciones que se agregan al sistema y reducen los grados de libertad del mismo, el número de condiciones gauge que se deben imponer corresponde al número de restricciones linealmente independientes entre los campos que posea la teoría¹ [11, 13]. Estas condiciones permiten fijar de manera única la evolución de las variables dinámicas y eliminar la arbitrariedad de los parámetros $\tau_P^a(x)$.

7.1. Gauge de radiación

Con el fin de comparar los resultados obtenidos en la sección §5.5 de condiciones gauge utilizando el método de Dirac, se pretende llevar a cabo un análisis con las mismas condiciones en el gauge de radiación:

$$\begin{aligned} A_a^0(x) &= 0, \\ \partial_i^x A_a^i(x) &= 0. \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones corresponde a una EDPHJ y está asociada a un parámetro que depende del espacio-tiempo, por lo que el conjunto completo de condiciones, junto con sus respectivos parámetros, está

¹En la tabla 6.2.1 se observa que los CP entre las EDP $\phi_{1a}(x)$ y $\phi_{2a}(x)$ es cero, indicando que estas son linealmente independientes entre sí.

dado por

$$\phi_{00}(x) \equiv p^0(x) + \mathcal{H}_0(x) \rightarrow t, \quad (7.1.1a)$$

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) \rightarrow \tau_1^a(x), \quad (7.1.1b)$$

$$\phi_{2a}(x) = D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) \rightarrow \tau_2^a(x), \quad (7.1.1c)$$

$$\phi_{3a}(x) = A_a^0(x) \rightarrow \tau_3^a(x), \quad (7.1.1d)$$

$$\phi_{4a}(x) = \partial_i^x A_a^i(x) \rightarrow \tau_4^a(x). \quad (7.1.1e)$$

Al modificarse el espacio de parámetros, es necesario ajustar también el diferencial fundamental, en este caso, el índice que cuenta el número de EDPHJ corre de 1 a 4, lo que implica que la evolución espacio-temporal de una variable dinámica $F_a(x)$ se expresa según la ecuación:

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{Pc}(y)\} d\tau_P^c(y) \rightarrow P \equiv \{1, 2, 3, 4\}. \quad (7.1.2)$$

7.2. Corchetes generalizados

A partir de la condición de integrabilidad de Frobenius, es posible redefinir la dinámica del sistema, de modo que el diferencial fundamental se exprese en términos de los corchetes generalizados y del tiempo, eliminando así la arbitrariedad generada por los parámetros $\tau_P^a(x)$, esto se logra introduciendo la matriz de EDP del sistema definida por

$$\Phi_{HP}^{ab}(x, y) \equiv \{\phi_H^a(x), \phi_P^b(y)\}.$$

Para escribir la representación matricial de la matriz de EDP, es necesario calcular los CP entre todas las EDP del sistema, para ello se tiene presente la tabla 5.5.1, en la cual se calculan los corchetes de Poisson entre las EDP de la formulación de Dirac, que coinciden con las EDP de la formulación de Hamilton-Jacobi, dicha matriz se expresa como

$$\Phi_{ac}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} \\ \delta_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{xi} D_{ca}^i(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

es importante destacar que la matriz de EDP obtenida en la formulación de Hamilton-Jacobi es idéntica a la matriz calculada en la formulación de Dirac, por lo tanto, la inversa de la matriz de EDP es la misma en ambos casos:

$$\Phi_{cb}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{cb} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_{cb}(x, y, A) \\ -\delta_{cb} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cb}(x, y, A) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $G_{cb}(x, y, A)$ y $\sigma_{cb}(x, y, A)$ representan las funciones de Green correspondiente a los operadores $D_{ab}^i(x) \partial_j^x$ y $\partial_j^x D_{ab}^i(x)$ respectivamente. Mediante la inversa de la matriz de EDP, es posible determinar los corchetes generalizados de la teoría. Para ello se debe tener presente la definición del diferencial fundamental e imponer la condición de integrabilidad de Frobenius a las EDP $\phi_{Pa}(\nu)$:

$$d\phi_P^c(\nu) = \int d^3u \left[\{\phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u)\} dt + \{\phi_P^c(\nu), \phi_J^d(u)\} d\tau_d^J(u) \right] = 0,$$

de la anterior expresión es posible separar la integral y relacionar el diferencial $d\tau_d^J(u)$ con el tiempo, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \int d^3u \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_J^d(u) \right\} d\tau_d^J(u) &= - \int d^3u \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \\ \int d^3u \Phi_{PJ}^{cd}(v, u) d\tau_d^J(u) &= - \int d^3u \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \end{aligned}$$

aplicando la inversa de la matriz de EDP $[\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP}$ a ambos lados de la ecuación e integrando respecto a ν se obtiene

$$\begin{aligned} \int d^3\nu [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \int d^3u \Phi_{PJ}^{cd}(v, u) d\tau_d^J(u) &= - \int d^3\nu [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \int d^3u \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \\ \int d^3u d\tau_d^J(u) \int d^3\nu [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \Phi_{PJ}^{cd}(v, u) &= - \int d^3\nu d^3u [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \\ \int d^3u d\tau_d^J(u) \delta_b^d \delta_J^H \delta^3(y - u) &= - \int d^3\nu d^3u [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \\ d\tau_b^H(y) &= - \int d^3\nu d^3u [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \end{aligned}$$

de este modo, se determinan los parámetros $\tau_b^H(y)$ como funciones del tiempo, dejando como única variable independiente al tiempo:

$$d\tau_b^H(y) = - \int d^3\nu d^3u [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt.$$

El anterior resultado permite modificar el diferencial fundamental en términos del tiempo, esto se logra reemplazando el $d\tau_b^H(y)$ en la ecuación (7.1.2):

$$\begin{aligned} dF_a(x) &= \int d^3y \left[\left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\} dt + \left\{ F_a(x), \phi_H^b(y) \right\} d\tau_b^H(y) \right] \\ &= \int d^3y \left[\left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\} dt - \left\{ F_a(x), \phi_H^b(y) \right\} \int d^3\nu d^3u [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt \right] \\ &= \int d^3y \left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\} dt - \int d^3y d^3\nu d^3u \left\{ F_a(x), \phi_H^b(y) \right\} [\Phi_{bc}^{-1}(y, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \right\} dt, \end{aligned}$$

al intercambiar las variables $y \leftrightarrow u$, resulta

$$\begin{aligned} dF_a(x) &= \int d^3y \left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\} dt - \int d^3u d^3\nu d^3y \left\{ F_a(x), \phi_H^b(u) \right\} [\Phi_{bc}^{-1}(u, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(y) \right\} dt \\ dF_a(x) &= \int d^3y \left[\left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\} - \int d^3u d^3\nu \left\{ F_a(x), \phi_H^b(u) \right\} [\Phi_{bc}^{-1}(u, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(y) \right\} \right] dt, \end{aligned}$$

el término entre corchetes se conoce con el nombre de «corchetes generalizados evaluados a tiempos iguales». Los corchetes generalizados para dos variables dinámicas $F_a(x)$ y $G_b(y)$ toman la siguiente forma [3]:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}^* \equiv \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3\nu \left\{ F_a(x), \phi_H^b(u) \right\} [\Phi_{bc}^{-1}(u, v)]^{HP} \left\{ \phi_P^c(\nu), G_b(y) \right\}.$$

Bajo la definición de los corchetes generalizados, la dinámica del sistema es regida por

$$dF_a(x) = \int d^3y \left\{ F_a(x), \phi_0^0(y) \right\}^* dt.$$

7.2. CORCHETES GENERALIZADOS

Se observa que los corchetes generalizados tienen la misma forma funcional que los corchetes de Dirac, los cuales se definieron en la ecuación (5.5.4). Por tanto, los corchetes generalizados fundamentales serán los mismos que los corchetes fundamentales de Dirac (5.5.5):

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}^* = 0, \quad (7.2.1a)$$

$$\{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}^* = g\delta_\mu^k\delta_\nu^l f_{ch}^a \pi_k^h(x) \partial_l^y \sigma^{cb}(x, y, A) - g\delta_\mu^l\delta_\nu^k f_{dh}^b \pi_l^h(y) \partial_k^x G^{ad}(x, y, A), \quad (7.2.1b)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\}^* = [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0\delta_b^\nu] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A). \quad (7.2.1c)$$

Debido a la presencia de las deltas de Kronecker δ_μ^i se observa que estos corchetes son consistentes con las EDP del sistema, pues al reemplazar $A_0^a(x)$ o $\pi_b^0(x)$ en cualquiera de los corchetes generalizados el resultado es cero.

Capítulo 8

Resultados

A partir del presente estudio, se logró generalizar la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (4.2.5) para campos continuos, escrita en términos de densidades de la siguiente manera

$$\phi_{00}(x) \equiv p_0(x) + \mathcal{H}_0(x) = 0.$$

Mediante un análisis de las condiciones de integrabilidad de la EDP $\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x)$ se logró determinar el conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi con tres parámetros independientes $[t, \tau_1^a(x), \tau_2^a(x)]$ conformado por las siguientes EDP:

$$\begin{aligned} \phi_{00}(x) &\equiv p^0 + \mathcal{H}_0(x) && \rightarrow t, \\ \phi_{1a}(x) &\equiv \pi_a^0(x) && \rightarrow \tau_1^a(x), \\ \phi_{2a}(x) &\equiv D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) && \rightarrow \tau_2^a(x), \end{aligned}$$

el anterior conjunto de ecuaciones obligó a redefinir el diferencial fundamental del sistema:

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{Pc}(y)\} d\tau_P^c(y); \quad P \equiv \{1, 2\},$$

bajo la anterior definición del diferencial fundamental y con la ayuda de la tabla 6.3.1, se logró determinar las ecuaciones características del sistema, dadas por

$$\begin{aligned} dA_a^0(x) &= d\tau_{1a}(x), \\ dA_a^i(x) &= [D_a^{di}(x) A_d^0(x) - \pi_a^i(x)] dt - D_{ca}^i(x) d\tau_2^c(x), \\ d\pi_0^a(x) &= D_b^{aj}(x) \pi_j^b(x) dt, \\ d\pi_i^a(x) &= [gf_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x)] dt + gf_{cb}^a \pi_i^b(x) d\tau_2^c(x), \end{aligned}$$

mediante estas relaciones, se logró determinar la dinámica de la teoría, que corresponde a las ecuaciones de campo para los campos gauge y los momentos canónicos generalizados, en el espacio de fase corresponden a

$$\begin{aligned} \dot{A}_a^\mu(x) &= \delta_0^\mu \dot{\tau}_{1a}(x) + \delta_i^\mu [D_a^{di}(x) A_d^0(x) - \pi_a^i(x) - D_{ca}^i(x) \dot{\tau}_2^c(x)], \\ \dot{\pi}_\mu^a(x) &= \delta_\mu^i [gf_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) + gf_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x)]. \end{aligned}$$

Se logró obtener además la ecuación de campo de la teoría de Yang-Mills libre en el espacio de configuración:

$$D_{ba}^\nu(x) F_{\nu\mu}^b(x) = \delta_\mu^i g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x),$$

las anteriores ecuaciones mostraron directamente la indeterminación que se genera en la dinámica de los campos debido a las restricciones que posee la teoría y se reflejan en los parámetros indeterminados $\tau_P^a(x)$. Para poder obtener una dinámica única de los campos es necesario encontrar una dependencia temporal de los parámetros $\tau_P^a(x)$, para ello se implementaron las condiciones del gauge de radiación al conjunto de EDPHJ, de manera que todas las EDP sean linealmente dependientes y ampliando este conjunto de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi_{00}(x) &\equiv p^0 + \mathcal{H}_0(x) && \rightarrow t, \\ \phi_{1a}(x) &= \pi_a^0(x) && \rightarrow \tau_1^a(x), \\ \phi_{2a}(x) &= D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) && \rightarrow \tau_2^a(x), \\ \phi_{3a}(x) &= A_a^0(x) && \rightarrow \tau_3^a(x), \\ \phi_{4a}(x) &= \partial_i^x A_a^i(x) && \rightarrow \tau_4^a(x), \end{aligned}$$

dónde $\phi_{3a}(x)$ y $\phi_{4a}(x)$ son las condiciones gauge impuestas a las cuales se les asociaron nuevos parámetros indeterminados, al expandir el espacio de parámetros se modificó también el diferencial fundamental, expandiendo el contador de las EDPHJ de la siguiente manera:

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{Pc}(y)\} d\tau_P^c(y) \rightarrow P \equiv \{1, 2, 3, 4\},$$

al imponer la condición de integrabilidad de Frobenius se logró determinar una relación entre todos los parámetros $\tau_P^a(x)$ y el tiempo:

$$d\tau_b^H(y) = - \int d^3\nu d^3u (\Phi^{-1})_{bc}^{HP}(y, \nu) \{ \phi_P^c(\nu), \phi_0^0(u) \} dt,$$

ecuación que permitió redefinir la dinámica del sistema en términos de los corchetes generalizados a tiempos iguales:

$$dF_a(x) = \int d^3y \{F_a(x), \phi_0^0(y)\}^* dt,$$

donde se define los corchetes generalizados a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $F_a(x)$ y $G_b(y)$ como

$$\{F_a(x), G_b(y)\}^* \equiv \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3\nu \{F_a(x), \phi_H^b(u)\} (\Phi^{-1})_{bc}^{HP}(u, \nu) \{ \phi_P^c(\nu), G_b(y) \},$$

resultado importante, ya que se observó la equivalencia funcional entre los corchetes generalizados y los corchetes de Dirac (5.5.4) calculados en el gauge de radiación:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_D = \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3\nu \{F_a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}]^{-1}(u, \nu) \{ \phi_{qd}(\nu), G_b(y) \}.$$

Lo anterior permitió deducir que los corchetes generalizados fundamentales entre los campos gauge son los mismos corchetes de Dirac fundamentales en el gauge de radiación, de manera que la evolución de cualquier variable dinámica se puede calcular al tener presente los siguientes CG:

$$\begin{aligned} \{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}^* &= 0, \\ \{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}^* &= g \delta_\mu^k \delta_\nu^l f_{ch}^a \pi_k^h(x) \partial_l^y \sigma^{cb}(x, y, A) - g \delta_\mu^l \delta_\nu^k f_{dh}^b \pi_l^h(y) \partial_k^x G^{ad}(x, y, A), \\ \{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\}^* &= [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A). \end{aligned}$$

Capítulo 9

Conclusiones

Debido a la invarianza gauge local de la teoría de Yang-Mills libre la densidad Lagrangiana que la describe es singular, lo que da origen a relaciones entre los campos fundamentales de la teoría que se interpretan como EDP en la formulación de Hamilton-Jacobi, dicha formulación exige que estas ecuaciones estén en involución, lo que lleva a imponer restricciones adicionales al sistema hasta obtener un conjunto completo de EDPHJ, éstas restricciones se asociaron con parámetros independientes que permitieron incorporar la información de cada ecuación diferencial parcial en la dinámica del sistema a través del diferencial fundamental.

La dinámica del sistema no presenta una definición única debido a la dependencia con respecto a los parámetros indeterminados $\tau_{aP}(x)$ de las ecuaciones de campo (6.3.7) y la dinámica de los campos gauge (6.3.5), los anteriores parámetros están asociados con las ecuaciones diferenciales parciales linealmente independientes de la teoría, esto subraya el origen de la indeterminación en la dinámica de los campos.

Para abordar las arbitrariedades inherentes a la teoría de Yang-Mills libre, se propuso la implementación de las condiciones del gauge de radiación, estas condiciones eliminaron la independencia lineal de las ecuaciones diferenciales parciales, permitiendo así expresar los parámetros indeterminados en función del tiempo. Como resultado, se construyeron los corchetes generalizados evaluados en tiempos iguales que encapsulan la información de todas las restricciones del sistema, reduciendo los grados de libertad de la teoría de ocho a cuatro, donde la elección de estos grados es arbitraria.

En resumen, la implementación de condiciones gauge en la teoría de Yang-Mills libre permitió definir de manera única la dinámica de los campos, obteniendo unos corchetes generalizados fundamentales que describen la evolución de cualquier variable dinámica definida en el espacio de fase, determinando su equivalencia con los corchetes de Dirac fundamentales en el gauge de radiación y asegurando la consistencia entre la formulación de Hamilton-Jacobi y la formulación de Dirac.

Como sugerencias para futuras investigaciones, se plantea la obtención de la forma explícita de los CG fundamentales (7.2.1) a través del cálculo de las funciones de Green, que se describen en la ecuación (5.5.3). Además, se propone llevar a cabo un estudio complementario al presentado en este trabajo, que incluya la implementación de diferentes condiciones de gauge y ampliar la investigación de la teoría de Yang-Mills involucrando interacciones con otros campos, como el campo fermiónico.

Apéndice A

Álgebra de Lie

La teoría de Yang Mills es una teoría de campos que describe la interacción entre partículas mediante la introducción de campos gauge, los cuales están asociados a un grupo de simetría llamado grupo de gauge.

Estos grupos son típicamente grupos de Lie; esto significa que tienen una estructura diferenciable y una estructura de grupo. Esto permite utilizar propiedades de los grupos de Lie para estudiar los grupos de gauge y las propiedades de la teoría de Yang Mills.

Un grupo de Lie se define como un conjunto de matrices $G = \{M(a), a \in \mathbb{R}\}$ [16] que al tener una estructura de grupo, deben satisfacer tres propiedades fundamentales [9]:

$$\textbf{Asociativa: } \forall M(a), M(b), M(c) \in G, \\ [M(a)M(b)]M(c) = M(a)[M(b)M(c)].$$

$$\textbf{Elemento neutro: } \text{sea } M(e) \in G / \forall M(a) \in G, \\ M(a)M(e) = M(e)M(a) = M(a).$$

$$\textbf{Elemento inverso: } \text{sea } M(a)^{-1} \in G / \forall M(a) \in G, \\ M(a)^{-1}M(a) = M(a)M(a)^{-1} = M(e).$$

$$\textbf{Producto: } M(a)M(b) \in G.$$

Si se cumplen todas estas propiedades, este conjunto junto con el producto de matrices forma un grupo continuo o grupo de Lie [16]. El álgebra de Lie se define en un espacio vectorial construido a partir de una base,¹ $T_a \equiv T^a, a = \{1, 2, \dots, N\}$, siendo N la dimensión del espacio; esta base es un conjunto de matrices que reciben el nombre de «generadores del álgebra» y permiten construir cualquier elemento. El álgebra de Lie además posee una operación fundamental (Corchetes de Lie $[,]$), los cuales satisfacen las siguientes propiedades [9, 17, 18]:

- **Bilinealidad**²:

$$[\lambda_a T^a, \beta_b T^b] = \lambda_a \beta_b [T^a, T^b].$$

- **Identidad de Jacobi:**

$$[[T_a, T_b], T_c] + [[T_c, T_a], T_b] + [[T_b, T_c], T_a] = 0.$$

¹Cabe resaltar que el espacio formado por los generadores no posee una métrica como en el espacio de Minkowski, lo que permite subir y bajar los índices de acuerdo a las necesidades que se requiera.

² λ_a y β_b son constantes que multiplican a los generadores, aquí se emplea el convenio de Einstein de la suma.

■ **Antisimetría³:**

$$[T_a, T_b] = -[T_b, T_a].$$

Una propiedad que satisface las tres condiciones es el conmutador, definido como [19, 20]

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a.$$

Ahora bien, cualquier elemento dentro del espacio G puede ser expresado como una combinación lineal de los generadores, es decir, sea $V \in G \rightarrow V = v_a T^a$. Siendo que el conmutador es un elemento dentro del grupo de Lie correspondiente, este podrá ser expandido en términos de los generadores mediante [9, 18]

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c, \quad a, b, c = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (\text{A.1.1})$$

f_{ab}^c recibe el nombre de «constante de estructura del grupo», esta determina cómo interactúan los generadores entre sí y cómo se relacionan los elementos del álgebra. La identidad de Jacobi puede ser reescrita en términos de las constantes de estructura, si se sustituye la definición de los corchetes de Lie (A.1.1), se obtiene

$$f_{ab}^d f_{dc}^e + f_{ca}^d f_{db}^e + f_{bc}^d f_{da}^e = 0.$$

La identidad de Jacobi garantiza que el álgebra tenga una estructura coherente y bien definida y permite la construcción de los diferentes grupos. Es importante tener en cuenta algunos resultados importantes de los generadores, dado a que se emplean en algunos cálculos. Los generadores son matrices antisimétricas, por lo tanto su traza siempre será cero, de este modo, para cada generador se satisface [18]

$$\text{Tr}[T_a] = 0.$$

Finalmente, es conveniente expresar la traza del producto de generadores como⁴ [11]

$$\text{Tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (\text{A.1.2})$$

³Como consecuencia de la antisimetría y de la bilinealidad se satisface $[T_a, T_a] = 0$ [18].

⁴Esto se hace por simetría con otros generadores: las matrices de Pauli SU(2) y las matrices de Gell-Mann SU(3).

Apéndice B

Derivada covariante y transformación gauge local

Sea un campo fermiónico $\psi(x) = \psi^a(x)e_a(x)$ que transforme como vector mediante [14]

$$\psi'(x) = \Omega(x)\psi(x),$$

donde $\Omega(x)$ define una transformación local, es decir, que depende del punto. La transformación definida anteriormente será una transformación de simetría o transformación gauge siempre y cuando $\Omega(x)$ sea un elemento de $SU(N)$ y, por tanto, se puede parametrizar, es decir [14]

$$\Omega(x) = [e^{-i\theta^a(x)T_a}], \quad (\text{B.1.1})$$

donde $\theta^a(x)$ son factores de fase que dependen del punto y T_a son los generadores del grupo $SU(N)$, los cuales no dependen del punto [15]. Una transformación gauge tiene la propiedad de dejar invariante al campo $\psi(x)$ de modo que no cambie ante un cambio de base, esta es una propiedad muy importante para la física ya que indica que la cantidad $\psi(x)$ es un vector en el espacio formado por la base $e_a(x)$ y es el mismo para cualquier observador [7]. Sin embargo, la derivada no cumple con esta propiedad bajo transformaciones gauge locales; si se quiere asegurar que la derivada de un vector sea también un vector, esta se debe poder expandir en términos de la base de la siguiente manera

$$\partial_\mu e_a(x) = \Pi_{\mu a}^b(x)e_b(x),$$

la cantidad $\Pi_{\mu a}^b(x)$ se la conoce como la conexión, y es el análogo a los símbolos de Christoffel en relatividad general. Bajo esta definición, la derivada de los campos toma la siguiente forma [15]:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi(x) &= [\partial_\mu \psi^a(x)]e_a(x) + \psi^a(x)[\partial_\mu e_a(x)] \\ &= [\partial_\mu \psi^a(x)]e_a(x) + \psi^a(x)\Pi_{\mu a}^b(x)e_b(x) \\ &= [\partial_\mu \psi^a(x) + \psi^c(x)\Pi_{\mu c}^a(x)]e_a(x), \end{aligned}$$

la cantidad entre corchetes se conoce como la derivada covariante y se puede expresar como

$$D_{c\mu}^a(x)\psi^c(x) \equiv [\delta_c^a \partial_\mu(x) + \Pi_{\mu c}^a(x)]\psi^c(x),$$

de este modo, la derivada de un vector se expresa en términos de la derivada covariante de las componentes de ese vector [7]:

$$\partial_\mu \psi(x) = [D_{c\mu}^a(x)\psi^c(x)]e_a(x).$$

Sin embargo, esto no garantiza que la derivada de un vector siga siendo un vector, para ello se debe satisfacer que la derivada covariante transforme de manera covariante, es decir

$$D'_\mu(x)\psi'^a(x) = \Omega(x)D_\mu(x)\psi^a(x), \quad (\text{B.1.2})$$

esta condición impone una restricción sobre la conexión [15]:

$$\Pi'_\mu(x) = \Omega(x)\Pi_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - [\partial_\mu\Omega(x)]\Omega^{-1}(x). \quad (\text{B.1.3})$$

Teniendo presente la forma de las transformaciones gauge locales según la relación (B.1.1), se observa que la derivada espacial de estas transformaciones $[\partial_\mu\Omega(x)]$ es proporcional a los generadores del grupo $SU(N)$. Para que la ecuación (B.1.3) tenga una forma consistente, la conexión debe ser proporcional a los generadores [7].¹ Para la teoría de Yang Mills la conexión toma la forma [7]:

$$\Pi_\mu(x) \equiv -igA_\mu^a(x)T_a,$$

donde g es la constante de acoplamiento que se asocia con la intensidad del campo y $A_\mu^a(x)$ son los campos gauge.

A partir de esta definición, la derivada covariante para la teoría de Yang Mills es

$$D_\mu(x)\psi^c(x) = [\partial_\mu(x) - igA_\mu^a(x)T_a]\psi^c(x). \quad (\text{B.1.4})$$

La derivada covariante tiene una segunda representación, la cual es equivalente a la anterior y se conoce como la representación adjunta, definida de la siguiente manera [9]

$$D_{a\mu}^b(x) = \delta_a^b\partial_\mu^x - gf_{ca}^bA_\mu^c(x),$$

donde f_{ca}^b es la constante de estructura, definida en el apéndice §A. Finalmente, es importante para el desarrollo de los cálculos destacar la siguiente propiedad de la derivada covariante:

$$D_\mu^{ab}(y)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -D_\mu^{ba}(x)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

¹Al poderse expandir la conexión como una combinación lineal de los generadores del grupo, este pertenece al álgebra del grupo.

Apéndice C

Cálculos en la teoría de Yang Mills libre

C.1. Derivada de la densidad Lagrangiana respecto a los campos gauge

Con la finalidad de llegar a la ecuación de campo de la teoría de Yang - Mills libre en el espacio de configuración, se realiza el siguiente cálculo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial A_\mu^a(x)} \left[F_{\nu\beta}^b(x) F_b^{\nu\beta}(x) \right],$$

al realizar la derivada se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} &= -\frac{1}{2} F_b^{\nu\beta}(x) \frac{\partial F_{\nu\beta}^b(x)}{\partial A_\mu^a(x)} \\ &= -\frac{1}{2} F_b^{\nu\beta}(x) \frac{\partial}{\partial A_\mu^a(x)} \left[\partial_\nu A_\beta^b(x) - \partial_\beta A_\nu^b(x) - g f_{cd}^b A_\nu^c(x) A_\beta^d(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2} F_b^{\nu\beta}(x) \left[\frac{\partial [\partial_\nu A_\beta^b(x)]}{\partial A_\mu^a(x)} - \frac{\partial [\partial_\beta A_\nu^b(x)]}{\partial A_\mu^a(x)} - g f_{cd}^b \frac{\partial [A_\nu^c(x) A_\beta^d(x)]}{\partial A_\mu^a(x)} \right] \\ &= \frac{g}{2} f_{cd}^b F_b^{\nu\beta}(x) \frac{\partial [A_\nu^c(x) A_\beta^d(x)]}{\partial A_\mu^a(x)} \\ &= \frac{g}{2} f_{cd}^b F_b^{\nu\beta}(x) \left[\frac{\partial A_\nu^c(x)}{\partial A_\mu^a(x)} A_\beta^d(x) + A_\nu^c(x) \frac{\partial A_\beta^d(x)}{\partial A_\mu^a(x)} \right], \end{aligned}$$

teniendo presente que las derivadas parciales de los campos gauge con respecto a ellos mismos se reducen al producto de deltas de Kronecker mediante $\frac{\partial A_\beta^d(x)}{\partial A_\mu^a(x)} = \delta_\beta^\mu \delta_a^d$ se sigue

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} &= \frac{g}{2} f_{cd}^b F_b^{\nu\beta}(x) \left[\delta_\nu^\mu \delta_a^c A_\beta^d(x) + A_\nu^c(x) \delta_\beta^\mu \delta_a^d \right] \\
 &= \frac{g}{2} f_{cd}^b F_b^{\nu\beta}(x) \delta_\nu^\mu \delta_a^c A_\beta^d(x) + \frac{g}{2} f_{cd}^b F_b^{\nu\beta}(x) A_\nu^c(x) \delta_\beta^\mu \delta_a^d \\
 &= \frac{g}{2} f_{ad}^b F_b^{\mu\beta}(x) A_\beta^d(x) + \frac{g}{2} f_{ca}^b F_b^{\nu\mu}(x) A_\nu^c(x) \\
 &= \frac{g}{2} f_{ac}^b F_b^{\mu\nu}(x) A_\nu^c(x) + \frac{g}{2} f_{ac}^b F_b^{\mu\nu}(x) A_\nu^c(x) \\
 &= g f_{ac}^b F_b^{\mu\nu}(x) A_\nu^c(x) \\
 &= -g f_{ca}^b A_\nu^c(x) F_b^{\mu\nu}(x),
 \end{aligned}$$

de modo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a(x)} = -g f_{ca}^b A_\nu^c(x) F_b^{\mu\nu}(x).$$

C.2. Demostración de la ecuación 5.2.5

Será útil tener presente la primera y segunda derivada de la densidad Lagrangiana respecto a la derivada de los campos. Los resultados que se obtengan podrán ser de ayuda para posteriores cálculos. La primera derivada ayudará a determinar el momento canónico generalizado en la sección de la formulación de Hamilton Jacobi y la segunda derivada servirá para la determinación de la matriz Hessiana, pues esta es un caso específico con $\gamma = 0$. Se empezará a trabajar la primera derivada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} \left[F_{\alpha\beta}^b(x) F_b^{\alpha\beta}(x) \right].$$

Para desarrollar esta derivada se debe tener en cuenta que los campos gauge y sus derivadas son independientes, con esto en mente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} &= -\frac{1}{2} F_b^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial F_{\alpha\beta}^b(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} \\
 &= -\frac{1}{2} F_b^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} \left[\partial_\alpha A_\beta^b(x) - \partial_\beta A_\alpha^b(x) - g f_{cd}^b A_\alpha^c(x) A_\beta^d(x) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} F_b^{\alpha\beta}(x) \left[\frac{\partial [\partial_\alpha A_\beta^b(x)]}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} - \frac{\partial [\partial_\beta A_\alpha^b(x)]}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} - g f_{cd}^b \frac{\partial [A_\alpha^c(x) A_\beta^d(x)]}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} \right],
 \end{aligned}$$

C.2. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN 5.2.5

por la independencia entre los campos y sus derivadas, el último término es cero, de modo que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} &= -\frac{1}{2} F_b^{\alpha\beta}(x) \left[\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\nu \delta_a^b - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\nu \delta_a^b \right] \\
 &= -\frac{1}{2} F_a^{\alpha\beta}(x) \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\nu + \frac{1}{2} F_a^{\alpha\beta}(x) \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\nu \\
 &= -\frac{1}{2} F_a^{\gamma\nu}(x) - \frac{1}{2} F_a^{\gamma\nu}(x) \\
 &= -F_a^{\gamma\nu}(x) \\
 &= F_a^{\nu\gamma}(x).
 \end{aligned}$$

Para la segunda derivada se usará el resultado obtenido en la primera, de este modo se simplifican los cálculos, con esto:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)] \partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} &= \frac{\partial}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} \right] \\
 &= \frac{\partial F_a^{\nu\gamma}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} \\
 &= \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^a(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} \\
 &= \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} \left[\partial_\alpha A_\beta^a(x) - \partial_\beta A_\alpha^a(x) - g f_{bc}^a A_\alpha^b(x) A_\beta^c(x) \right] \\
 &= \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \left[\frac{\partial [\partial_\alpha A_\beta^a(x)]}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} - \frac{\partial [\partial_\beta A_\alpha^a(x)]}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)]} \right] \\
 &= \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \left[\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\mu \right] \\
 &= \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\mu - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\gamma\beta} \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\mu \\
 &= \eta^{\nu\gamma} \eta^{\gamma\mu} - \eta^{\nu\mu} \eta^{\gamma\gamma}.
 \end{aligned}$$

En conclusión, se obtuvieron los siguientes resultados para las derivadas parciales de la densidad Lagrangiana respecto a las derivadas de los campos gauge:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} = F_a^{\nu\gamma}(x),}$$

y

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial [\partial_\gamma A_\mu^a(x)] \partial [\partial_\gamma A_\nu^a(x)]} = \eta^{\nu\gamma} \eta^{\gamma\mu} - \eta^{\nu\mu} \eta^{\gamma\gamma}.}$$

C.3. Condición de integrabilidad de la ligadura 6.2.1

Para que el conjunto de EDPHJ sea integrable se debe asegurar que $d\phi_{1a}(x) = 0$, es por ello que se debe calcular este diferencial haciendo uso de la ecuación (6.2.3), así

$$d\phi_{1a} = \int d^3y \{ \phi_{1a}(x), \phi_{00}(y) \} dt,$$

al tener en cuenta la tabla (6.2.1) se puede obtener el CP que aparece en la integral anterior:

$$\{ \phi_{1a}(x), \phi_{00}(y) \} = -\pi_i^b(y) D_y^i{}_{ba} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

colocando este resultado en la integral resulta

$$\begin{aligned} d\phi_{1a} &= \int d^3y [-\pi_i^b(y) D_y^i{}_{ba} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dt \\ &= \int d^3y [-\pi_i^b(y) \delta_{ba} \partial_y^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dt + g f_{ba}{}^c \int d^3y [\pi_i^b(y) A_c^i(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dt \\ &= \delta_{ba} \partial_x^i \int d^3y [\pi_i^b(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dt - g f_{ab}{}^c \int d^3y [A_c^i(y) \pi_i^b(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dt \\ &= [\delta_{ab} \partial_x^i \pi_i^b(x) - g f_{ab}{}^c A_c^i(x) \pi_i^b(x)] dt \\ &= D_{x ab}^i \pi_i^b(x) dt, \end{aligned}$$

esto proporciona una condición para la primera EDP, la cuál se interpretará en el documento.

C.4. Corchetes de Poisson entre las variables dependientes y las EDP

Se calcularán las ecuaciones características de las variables $A_a^\mu(x)$ y $\pi_\mu^a(x)$; para ello se debe calcular los CP entre estas variables y las EDP que aparecen en el diferencial fundamental dF .

Se iniciará con la variable $A_a^i(x)$

Con la EDP $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned} &\{ A_a^i(x), \phi_{00}(y) \} \\ &= \{ A_a^i(x), \pi_k^c(y) \} D_{yc}{}^{dk} A_d^0(y) - \pi_c^k(y) \{ A_a^i(x), \pi_k^c(y) \} \\ &= \delta_a^c \delta_k^i \delta^3(x-y) D_{yc}{}^{dk} A_d^0(y) - \pi_c^k(y) \delta_a^c \delta_k^i \delta^3(x-y) \\ &= \delta^3(x-y) [D_{ya}{}^{di} A_d^0(y) - \pi_a^i(y)]. \end{aligned}$$

Con la EDP $\phi_{1b}(y)$:

$$\{ A_a^i(x), \phi_{1b}(y) \} = \{ A_a^i(x), \pi_b^0(y) \} = 0.$$

Con la EDP $\phi_{2b}(y)$:

$$\begin{aligned} &\{ A_a^i(x), \phi_{2b}(y) \} \\ &= \{ A_a^i(x), D_{y cb}^j \pi_j^c(y) \} \\ &= D_{y cb}^j \delta_a^c \delta_j^i \delta^3(x-y) \\ &= D_{y ab}^i \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

C.4. CP ENTRE LAS VARIABLES DEPENDIENTES Y LAS EDP

En resumen:

$$\{A_a^i(x), \phi_{00}(y)\} = \delta^3(x-y)[D_{ya}^{di} A_d^0(y) - \pi_a^i(y)],$$

$$\{A_a^i(x), \phi_{1b}(y)\} = 0,$$

$$\{A_a^i(x), \phi_{2b}(y)\} = D_{yab}^i \delta^3(x-y).$$

Para la componente temporal del campo gauge $A_a^0(x)$ se tiene lo siguiente: Con la EDP $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned} & \{A_a^0(x), \phi_{00}(y)\} \\ &= \{A_a^0(x), \pi_k^c(y)\} D_{yc}^{dk} A_d^0(y) - \pi_c^k(y) \{A_a^0(x), \pi_k^c(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con la EDP $\phi_{1b}(y)$:

$$\begin{aligned} & \{A_a^0(x), \phi_{1b}(y)\} \\ &= \{A_a^0(x), \pi_b^0(y)\} \\ &= \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Con la EDP $\phi_{2b}(y)$:

$$\begin{aligned} & \{A_a^0(x), \phi_{2b}(y)\} \\ &= \{A_a^0(x), D_{ycb}^j \pi_j^c(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Resumiendo lo anterior:

$$\{A_a^0(x), \phi_{00}(y)\} = 0,$$

$$\{A_a^0(x), \phi_{1b}(y)\} = \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\{A_a^0(x), \phi_{2b}(y)\} = 0.$$

Ahora para la variable $\pi_i^a(x)$.

Con la EDP $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\pi_i^a(x), \phi_{00}(y)\} \\
 = & \{\pi_i^a(x), p^0(y) + \pi_j^b(y) D_{yb}^{cj} A_c^0(y) - \frac{1}{2} \pi_j^j(y) \pi_j^b(y) + \frac{1}{4} F_{jk}^b(y) F_b^{jk}(y)\} \\
 = & \pi_j^b(y) \{\pi_i^a(x), D_{yb}^{cj} A_c^0(y)\} + \frac{1}{2} F_{jk}^b(y) \{\pi_i^a(x), F_b^{jk}(y)\} \\
 = & g f_b^{ca} \pi_j^b(y) \delta_i^j A_c^0(y) \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} F_{jk}^b(y) [-\delta_b^a \delta_i^k \partial_y^j \delta^3(x-y) + \delta_b^a \delta_i^j \partial_y^k \delta^3(x-y) \\
 & + [g f_{bde} \delta^{ae} \delta_i^k A^{jd}(y) + g f_{bde} \delta^{ad} \delta_i^j A^{ke}(y)] \delta^3(x-y)] \\
 = & g f_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) \delta^3(x-y) - \frac{1}{2} F_{ji}^a(y) \partial_y^j \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} F_{ij}^a(y) \partial_y^j \delta^3(x-y) \\
 & +_{(x \rightarrow y)} [\frac{1}{2} g f_{bd}^a F_{ji}^b(y) A^{jd}(y) - \frac{1}{2} g f_{bd}^a F_{ij}^b(y) A^{jd}(y)] \delta^3(x-y) \\
 = & g f_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) \delta^3(x-y) + F_{ij}^b(y) [\delta_b^a \partial_y^j - g f_{bd}^a A^{jd}(x)] \delta^3(x-y) \\
 = & [g f_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) + F_{ij}^b(y) D_{yb}^{aj}] \delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

Con la EDP $\phi_{1b}(y)$:

$$\{\pi_i^a(x), \phi_{1b}(y)\} = \{\pi_i^a(x), \pi_b^0(y)\} = 0.$$

Con la EDP $\phi_{2b}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\pi_i^a(x), \phi_{2b}(y)\} \\
 = & \{\pi_i^a(x), D_y^j{}_{cb} \pi_j^c(y)\} \\
 = & -g f_{cb}^g \{\pi_i^a(x), A_g^j(y)\} \pi_j^c(y) \\
 = & -g f_{cb}^g \pi_j^c(y) \delta_g^a \delta_i^j \delta^3(x-y) \\
 = & g f_{bc}^a \pi_i^c(y) \delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

En resumen:

$$\boxed{\{\pi_i^a(x), \phi_{00}(y)\} = [g f_b^{ca} \pi_i^b(y) A_c^0(y) + F_{ij}^b(y) D_{yb}^{aj}] \delta^3(x-y),}$$

$$\boxed{\{\pi_i^a(x), \phi_{1b}(y)\} = 0,}$$

$$\boxed{\{\pi_i^a(x), \phi_{2b}(y)\} = g f_{bc}^a \pi_i^c(y) \delta^3(x-y).}$$

Finalmente, para la componente temporal del campo $\pi_0^a(x)$ se encuentra lo siguiente:

Con la EDP $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\pi_0^a(x), \phi_{00}(y)\} \\
 = & \{\pi_0^a(x), p^0(y) + \pi_j^b(y) D_{yb}^{cj} A_c^0(y) - \frac{1}{2} \pi_j^j(y) \pi_j^b(y) + \frac{1}{4} F_{jk}^b(y) F_b^{jk}(y)\} \\
 = & \pi_j^b(y) D_{yb}^{cj} \{\pi_0^a(x), A_c^0(y)\} \\
 = & \pi_j^b(y) D_{yb}^{cj} \delta_c^a \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
 = & \pi_j^b(y) D_{yb}^{aj} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Con la EDP $\phi_{1b}(y)$:

$$\{\pi_0^a(x), \phi_{1b}(y)\} = \{\pi_0^a(x), \pi_b^0(y)\} = 0.$$

Con la EDP $\phi_{2b}(y)$:

$$\begin{aligned} & \{\pi_0^a(x), \phi_{2b}(y)\} \\ &= \{\pi_0^a(x), D_{y \text{ } cb}^j \pi_j^c(y)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Resumiendo esto último:

$$\{\pi_0^a(x), \phi_{00}(y)\} = \pi_j^b(y) D_{yb}^{aj} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\{\pi_0^a(x), \phi_{1b}(y)\} = 0,$$

$$\{\pi_0^a(x), \phi_{2b}(y)\} = 0.$$

Estos CP deben tenerse presente a la hora de calcular las ecuaciones características, los cuales serán reemplazados en la tabla (6.3.1).

C.5. Corchetes de Poisson entre las EDP

A continuación se calcularán los corchetes de Poisson entre las EDP para poder calcular las condiciones de integrabilidad, teniendo en cuenta la definición completa del diferencial fundamental (6.2.6); para ello se trabajará con cada una de las EDP por aparte y se calcularán sus corchetes de Poisson respectivos.

Corchetes de Poisson para la EDP $\phi_{00}(x)$:

$$\begin{aligned} & \{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\} \\ &= \{p^0(x) + \pi_i^a(x) D_{xa}^{bi} A_b^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x), p^0(y) + \pi_k^c(y) D_{yc}^{dk} A_d^0(y) - \frac{1}{2} \pi_c^k(y) \pi_k^c(y) \\ & \quad + \frac{1}{4} F_{kl}^c(y) F_c^{kl}(y)\} \\ &= \{A_b^0(x) D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x), A_d^0(y) D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y) - \frac{1}{2} \pi_c^k(y) \pi_k^c(y) + \frac{1}{4} F_{kl}^c(y) F_c^{kl}(y)\} \\ &= \{A_b^0(x) D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x), A_d^0(y) D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y) - \frac{1}{2} \pi_c^k(y) \pi_k^c(y) + \frac{1}{4} F_{kl}^c(y) F_c^{kl}(y)\} - \pi_a^i(x) \{\pi_i^a(x), A_d^0(y) D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y) \\ & \quad + \frac{1}{4} F_{kl}^c(y) F_c^{kl}(y)\} + \frac{1}{2} F_{ij}^a(x) \{F_a^{ij}(x), A_d^0(y) D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y) - \frac{1}{2} \pi_c^k(y) \pi_k^c(y)\}, \end{aligned}$$

se calcula el primer CP de $\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\}$:

$$\begin{aligned} & \{A_b^0(x) D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x), A_d^0(y) D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y) - \frac{1}{2} \pi_c^k(y) \pi_k^c(y) + \frac{1}{4} F_{kl}^c(y) F_c^{kl}(y)\} \\ &= A_b^0(x) A_d^0(y) \{D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x), D_{yc}^{dk} \pi_k^c(y)\} - \pi_c^k(y) A_b^0(x) \{D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x), \pi_k^c(y)\} \\ & \quad + \frac{1}{2} F_{kl}^c(y) A_b^0(x) \{D_{xa}^{bi} \pi_i^a(x), F_c^{kl}(y)\}, \\ &= A^{0b}(x) A^{0d}(y) \{\phi_{2b}(x), \phi_{2d}(y)\} - \pi_c^k(y) A^{0b}(x) \{\phi_{2b}(x), \pi_k^c(y)\} + \frac{1}{2} A^{0b}(x) \{\phi_{2b}(x), F_{kl}^c(y)\} F_c^{kl}(y). \end{aligned}$$

Usando los resultados para $\phi_{2b}(x)$:

$$= A^{0b}(x)A^{0d}(y)gf^a_{db}\phi_{2a}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \pi^k_c(y)A^{0b}(x)gf^c_{ba}\pi^a_k(x)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ + A^{0b}(x)D_{ixdb}D^{cd}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(x-y),$$

por simetrías en los índices de grupo y haciendo $y \rightarrow x$ se puede eliminar los dos primeros términos, obteniendo

$$= A^{0b}(x)D_{ixdb}D^{cd}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Se calcula ahora el segundo CP de $\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\}$:

$$\{\pi^a_i(x), A^0_d(y)D^{dk}_{yc}\pi^c_k(y) + \frac{1}{4}F^{cl}_k(y)F^{kl}_c(y)\} \\ = A^{0d}(y)\{\pi^a_i(x), \phi_{2d}(y)\} + \frac{1}{2}F^{cl}_k(y)\{\pi^a_i(x), F^{kl}_c(y)\},$$

Usando los resultados calculados anteriormente para los CP:

$$= A^{0d}(y)gf^a_{dc}\pi^c_i(y)\delta^3(x-y) + F^{bk}_{ik}(y)D^{ak}_{yb}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ = A^{0d}(x)gf^a_{dc}\pi^c_i(x)\delta^3(x-y) - F^{bk}_{ik}(x)D^{kab}_x\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ = [gf^a_{dc}A^{0d}(x)\pi^c_i(x) - F^{bk}_{ik}(x)D^{kab}_x]\delta^3(x-y).$$

Finalmente con el tercer CP de $\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\}$:

$$\frac{1}{2}F^{aj}_{ij}(x)\{F^{ij}_a(x), A^0_d(y)D^{dk}_{yc}\pi^c_k(y) - \frac{1}{2}\pi^k_c(y)\pi^c_k(y)\} \\ = \frac{1}{2}A^{0d}(y)\{F^{ij}_a(x), \phi_{2d}(y)\}F^{aj}_{ij}(x) - \frac{1}{2}F^{aj}_{ij}(x)\{F^{ij}_a(x), \pi^k_c(y)\}\pi^c_k(y) \\ = -A^{0d}(y)D_{ixbd}D^{cb}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(x-y) + F^{bkj}(y)D_{yjb}c\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi^c_k(y) \\ = -A^{0d}(x)D_{ixbd}D^{cb}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(x-y) + F^{bkj}(x)D_{yjb}c\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi^c_k(y).$$

Juntando todo resulta

$$\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\} \\ = A^{0b}(x)D_{ixdb}D^{cd}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - gf^a_{dc}A^{0d}(x)\pi^c_i(x)\pi^i_a(x)\delta^3(x-y) + F^{bik}(x)\pi^i_a(x)D^{kab}_x\delta^3(x-y) \\ - \underbrace{A^{0d}(x)D_{ixbd}D^{cb}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(x-y)}_{b \leftrightarrow d} + \underbrace{F^{bkj}(y)D_{yjb}c\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi^c_k(y)}_{k \leftrightarrow i, j \leftrightarrow k, a \leftrightarrow c} \\ = \cancel{A^{0b}(x)D_{ixdb}D^{cd}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \cancel{A^{0b}(x)D_{ixdb}D^{cd}_{xj}F^{ji}_c(y)\delta^3(x-y)} - \cancel{gf^a_{dc}\pi^c_i(x)\pi^i_a(x)A^{0d}(x)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ + F^{bik}(x)\pi^i_a(x)D^{kab}_x\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + F^{bik}(x)D_{ykb}a\delta^3(x-y)\pi^i_a(y) \\ = F^{bik}(x)\pi^i_a(x)D^{kab}_x\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - F^{bik}(x)\pi^i_a(x)D_{xkab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ = 0.$$

se demuestra finalmente que $\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\} = 0$.

Ahora, se trabaja con la EDP $\phi_{1c}(x)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{00}(x), \phi_{1c}(y)\} \\
 &= \{p^0(x) + \pi_i^a(x) D_{xa}^{bi} A_b^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_a^{ij}(x), \pi_c^0(y)\} \\
 &= \pi_i^a(x) \{D_{xa}^{bi} A_b^0(x), \pi_c^0(y)\} + \frac{1}{2} \{F_{ij}^a(x), \pi_c^0(y)\} F_a^{ij}(x) \\
 &= -\pi_i^a(x) D_{xa}^{bi} \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
 &= -\pi_i^a(x) D_{xca}^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
 &= \pi_i^a(x) D_{xac}^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
 \end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{1c}(y)\} = \pi_i^a(x) D_{xac}^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.$

Se trabajará con la EDP $\phi_{2c}(x)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{00}(x), \phi_{2c}(y)\} \\
 &= -\{\phi_{2c}(y), \phi_{00}(x)\} \\
 &= -gf^d_{ac} A^{0a}(x) \phi_{2d}(x) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{2c}(y)\} = -gf^d_{ac} A^{0a}(x) \phi_{2d}(x) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.$

Corchetes de Poisson para la EDP $\phi_{1a}(x)$

Con $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\} \\
 &= -\{\phi_{00}(y), \phi_{1a}(x)\} \\
 &= -\{p^0(y) + \pi_i^b(y) D_{xb}^{ci} A_c^0(y) - \frac{1}{2} \pi_b^i(y) \pi_i^b(y) + \frac{1}{4} F_{ij}^b(y) F_b^{ij}(y), \pi_a^0(x)\} \\
 &= -\pi_i^b(y) D_{xb}^{ci} \{A_c^0(y), \pi_a^0(x)\} \\
 &= -\pi_i^b(y) D_{xba}^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
 \end{aligned}$$

así: $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\} = -\pi_i^b(y) D_{xba}^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.$

Ahora con $\phi_{1c}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{1a}(x), \phi_{1c}(y)\} \\
 &= \{\pi_a^0(x), \pi_c^0(y)\} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

así: $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{1c}(y)\} = 0}.$

Finalmente con $\phi_{2c}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{1a}(x), \phi_{2c}(y)\} \\
 &= \{\pi_a^0(x), D_{ybc}^i \pi_i^b(y)\} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

así: $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{2c}(y)\} = 0}.$

Corchetes de Poisson para la ligadura $\phi_{2a}(x)$

Se va a calcular los corchetes de Poisson de la EDP $\phi_{2a}(x)$ con cada una de las otras EDP, se tiene en cuenta la última definición del hamiltoniano (5.4.4).

Se empezará por calcular los CP entre $\phi_{2a}(x)$ y $\phi_{00}(y)$:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{2a}(x), \phi_{00}(y)\} \\
 = & A_d^0(y) \{D_{x\ ba}^i \pi_i^b(x), D_{yc}^{dj} \pi_j^c(y)\} + \{D_{x\ ba}^i \pi_i^b(x), \pi_c^j(y)\} \pi_c^j(y) + \\
 & \frac{1}{2} \{D_{x\ ba}^i \pi_i^b(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y) \\
 = & A^{0c}(y) \{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} - \{\phi_{2a}(x), \pi_j^c(y)\} \pi_c^j(y) + \frac{1}{2} \{\phi_{2a}(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y),
 \end{aligned}$$

es necesario realizar los cálculos por aparte, para el primer CP:

$$A^{0c}(y) \{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} = g f_{ac}^{\ b} \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(x - y).$$

Para el segundo CP

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{2a}(x), \pi_j^c(y)\} \pi_c^j(y) \\
 = & \{D_{x\ ba}^i \pi_i^b(x), \pi_j^c(y)\} \pi_c^j(y) \\
 = & \{\delta_{ba} \partial_x^i \pi_i^b(x) - g f_{ba}^{\ g} A_g^i(x) \pi_i^b(x), \pi_j^c(y)\} \pi_c^j(y) \\
 = & -g f_{ba}^{\ g} \{A_g^i(x), \pi_j^c(y)\} \pi_i^b(x) \pi_c^j(y) \\
 = & -g f_{ba}^{\ g} \delta_j^i \delta_g^c \delta^3(x - y) \pi_i^b(x) \pi_c^j(y) \\
 = & -g f_{ba}^{\ c} \pi_j^b(x) \pi_c^j(y) \delta^3(x - y),
 \end{aligned}$$

dado a que $f_{ba}^{\ c}$ es antisimétrico en los índices b,c y $\pi_j^b(x) \pi_c^j(x)$ es simétrico en esos índices resulta:

$$\{\phi_{2a}(x), \pi_j^c(y)\} \pi_c^j(y) = 0.$$

Finalmente para el tercer CP:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{2a}(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y) \\
 = & \{D_{x\ ba}^i \pi_i^b(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y) \\
 = & D_{x\ ba}^i \{\pi_i^b(x), \partial_{yj} A_k^c(y) - \partial_{yk} A_j^c(y) - g f_{de}^{\ c} A_j^d(y) A_k^e(y)\} F_c^{jk}(y) \\
 = & D_{x\ ba}^i [\partial_{yj} \{\pi_i^b(x), A_k^c(y)\} - \partial_{yk} \{\pi_i^b(x), A_j^c(y)\} - g f_{de}^{\ c} \{\pi_i^b(x), A_j^d(y) A_k^e(y)\}] F_c^{jk}(y) \\
 = & D_{x\ ba}^i [-\partial_{yj} \delta_{ik} \delta^{bc} \delta^3(x - y) + \partial_{yk} \delta_{ij} \delta^{bc} \delta^3(x - y) - g f_{de}^{\ c} [A_j^d(y) \{\pi_i^b(x), A_k^e(y)\} \\
 & + \{\pi_i^b(x), A_j^d(y)\} A_k^e(y)]] F_c^{jk}(y),
 \end{aligned}$$

factorizando la delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
& \{\phi_{2a}(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y) \\
&= D_{xba}^i [-\partial_{yj} \delta_{ik} \delta^{bc} + \partial_{yk} \delta_{ij} \delta^{bc} + g f_{de}^c [A_j^d(y) \delta_{ik} \delta^{be} + \delta_{ij} \delta^{bd} A_k^e(y)]] \delta^3(x-y) F_c^{jk}(y), \\
&= D_{xba}^i [-\delta_{ik} [\partial_{yj} \delta^{bc} - g f_d^c A_j^d(y)] + \delta_{ij} [\partial_{yk} \delta^{bc} + g f_e^{cb} A_k^e(y)]] \delta^3(x-y) F_c^{jk}(y) \\
&= D_{xba}^i [-\delta_{ik} [\partial_{yj} \delta^{bc} - g f_d^{bc} A_j^d(y)] + \delta_{ij} [\partial_{yk} \delta^{bc} - g f_e^{bc} A_k^e(y)]] \delta^3(x-y) F_c^{jk}(y) \\
&= D_{xba}^i [-\delta_{ik} D_{yj}^{bc} + \delta_{ij} D_{yk}^{bc}] F_c^{jk}(y) \delta^3(x-y) \\
&= D_{xba}^i [\delta_{ik} D_{xj}^{cb} F_c^{jk}(y) - \delta_{ij} D_{xk}^{cb} F_c^{jk}(y)] \delta^3(x-y) \\
&= D_{ixba} [D_{xj}^{cb} F_c^{ji}(y) - D_{xj}^{cb} F_c^{ij}(y)] \delta^3(x-y) \\
&= 2 D_{ixba} D_{xj}^{cb} F_c^{ji}(y) \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

en este punto, se debe aplicar la identidad de Bianchi generalizada [3] para demostrar que

$$\{\phi_{2a}(x), F_{jk}^c(y)\} F_c^{jk}(y) = 0,$$

Finalmente se llega a

$$\boxed{\{\phi_{2a}(x), \phi_{00}(y)\} = g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(x-y).}$$

Se calcula ahora el CP entre $\phi_{2a}(x)$ y $\phi_{1c}(x)$:

$$\begin{aligned}
& \{\phi_{2a}(x), \phi_{1c}(y)\} \\
&= \{D_{xba}^i \pi_i^b(x), \pi_c^0(y)\} \\
&= \{\delta_{ba} \partial_x^i \pi_i^b(x) - g f_{ba}^g A_g^i(x) \pi_i^b(x), \pi_c^0(y)\} \\
&= -g f_{ba}^g \{A_g^i(x), \pi_c^0(y)\} \pi_i^b(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

De este modo $\boxed{\{\phi_{2a}(x), \phi_{1c}(y)\} = 0.}$

Finalmente se calcula el CP entre $\phi_{2a}(x)$ y $\phi_{2c}(x)$:

$$\begin{aligned}
& \{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} \\
&= \{D_{xba}^i \pi_i^b(x), D_{ydc}^j \pi_j^d(y)\} \\
&= D_{ydc}^j \{D_{xba}^i \pi_i^b(x), \pi_j^d(y)\} \pi_j^d(y) + D_{xba}^i \{\pi_i^b(x), D_{ydc}^j \pi_j^d(y)\} \pi_j^d(y) \\
&= -g f_{ba}^g D_{ydc}^j \{A_g^i(x), \pi_j^d(y)\} \pi_i^b(x) - g f_{dc}^h D_{xba}^i \{\pi_i^b(x), A_h^j(y)\} \pi_j^d(y) \\
&= -g f_{ba}^g D_{ydc}^j \delta_j^i \delta_g^d \delta^3(x-y) \pi_i^b(x) + g f_{dc}^h D_{xba}^i \delta_i^j \delta_h^b \delta^3(x-y) \pi_j^d(y) \\
&= g f_{ab}^d \pi_i^b(x) D_{ydc}^i \delta^3(x-y) + (b \leftrightarrow d) g f_{dc}^b D_{xba}^i \pi_i^d(x) \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

donde ($b \leftrightarrow d$) indica que se intercambiaron los índices b y d en el último término, con esto:

$$\begin{aligned}
 & \{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} \\
 &= -gf_{ab} {}^d\pi_i^b(x) D_{x\ cd}^i \delta^3(x-y) + gf_{bc} {}^dD_{x\ da}^i \pi_i^b(y) \delta^3(x-y) \\
 &= g[f_{bc} {}^dD_{x\ da}^i \pi_i^b(x) - f_{ab} {}^d\pi_i^b(x) D_{x\ cd}^i] \delta^3(x-y) \\
 &= g[f_{bc} {}^d[\partial_x^i \delta_{da} - gf {}^g_{da} A_g^i(x)] \pi_i^b(x) - f_{ab} {}^d\pi_i^b(x) [\partial_x^i \delta_{cd} - gf {}^g_{cd} A_g^i(x)]] \delta^3(x-y) \\
 &= g[f_{bc} {}^d\partial_x^i \delta_{da} \pi_i^b(x) - f_{ab} {}^d\pi_i^b(x) \partial_x^i \delta_{cd} - g[f_{bc} {}^d f {}^g_{da} + f_{ab} {}^d f {}^g_{dc}] \pi_i^b(x) A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= g[f_{bc} {}^d\partial_x^i \delta_{da} \pi_i^b(x) - f_{ab} {}^d\pi_i^b(x) \partial_x^i \delta_{cd} + gf_{ca} {}^d f {}^g_{db} \pi_i^b(x) A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= g[f_{bca} \partial_x^i \pi_i^b(x) - f_{abc} \pi_i^b(x) \partial_x^i + gf_{ca} {}^d f {}^g_{db} \pi_i^b(x) A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= \partial_x^i [gf_{bca} \pi_i^b(x) \delta^3(x-y)] + g[-f_{abc} \pi_i^b(x) \partial_x^i + gf_{ca} {}^d f {}^g_{db} \pi_i^b(x) A_g^i(x)] \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

el primer término se elimina por la ley de Gauss al evaluar condiciones de frontera, así

$$\begin{aligned}
 &= g[-f_{ca} {}^d\pi_i^b(x) \delta_{db} \partial_x^i + gf_{ca} {}^d f {}^g_{db} \pi_i^b(x) A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= -gf_{ca} {}^d\pi_i^b(x) [\delta_{db} \partial_x^i - f {}^g_{db} A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= -gf_{ca} {}^d\pi_{ib}(x) [\delta_{db} \partial_x^i - f {}^g_{db} A_g^i(x)] \delta^3(x-y) \\
 &= -gf_{ca} {}^d\pi_i^b(x) D_{x\ db}^i \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

nuevamente, se puede introducir $\pi_i^b(x)$ en la derivada y surge un término de frontera que se puede despreciar debido que al evaluar esta frontera en el infinito, los campos físicos tienden a cero, eliminando este término, con esto:

$$\begin{aligned}
 &= -gf_{ca} {}^dD_{x\ db}^i \pi_i^b(x) \delta^3(x-y) \\
 &= -gf_{ca} {}^d\phi_{2a}(x) \delta^3(x-y) \\
 &= gf_{ac} {}^b\phi_{2b}(x) \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

$$\text{así: } \boxed{\{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} = gf_{ac} {}^b\phi_{2b}(x) \delta^3(x-y).}$$

Todos estos resultados serán resumidos en la tabla (6.2.1) y servirán para el cálculo de las condiciones de integrabilidad de las EDP pertenecientes al conjunto de ecuaciones diferenciales de Hamilton Jacobi.

C.6. Corchetes de Poisson entre las EDP con condiciones gauge

A continuación se calculan los corchetes de Poisson de todas las EDP con las dos condiciones gauge que se introdujeron, se citarán los resultados de los CP entre las EDP calculadas en otra sección para tenerlos presentes en los cálculos

Para $\phi_{00}(x)$: Realizando el cálculo respectivo del corchete de Poisson para cada una de las ligaduras con $\phi_{00}(x)$.

$$\text{Se obtiene } \boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{00}(y)\} = 0.}$$

$$\text{Se obtiene } \boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{1c}(y)\} = \pi_i^a(y) D_{ac}^i(x) \delta^3(x-y).}$$

$$\text{Se obtiene } \boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{2c}(y)\} = -gf_{ca} {}^b\phi_{2b}(x) A^{0a}(y) \delta^3(x-y).}$$

$$\begin{aligned}\{\phi_{00}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{p_0(x) + \pi_i^a(x) D_a^{bi}(x) A_b^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_a^{ij}(x) F_{ij}^a(x), A_c^0(y)\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{3c}(y)\} = 0.}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{00}(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{p_0(x) + \pi_i^a(x) D_a^{bi}(x) A_b^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_a^{ij}(x) F_{ij}^a(x), \partial_k^y A_c^k(y)\} \\ &= \partial_k^y \{ \pi_i^a(x) D_a^{bi}(x) A_b^0(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x), A_c^k(y) \} \\ &= \partial_k^y \left[\{ \pi_i^a(x), A_c^k(y) \} D_a^{bi}(x) A_b^0(x) - \pi_a^i(x) \{ \pi_i^a(x), A_c^k(y) \} \right] \\ &= -\partial_k^y \left[\delta_c^a \delta_i^k \delta^3(x-y) D_a^{bi}(x) A_b^0(x) - \pi_a^i(x) \delta_c^a \delta_i^k \delta^3(x-y) \right] \\ &= -\partial_i^y \left[\delta^3(x-y) \left(D_c^{bi}(x) A_b^0(x) - \pi_c^i(x) \right) \right] \\ &= -\left[\partial_i^y \delta^3(x-y) \right] \left[D_c^{bi}(x) A_b^0(x) - \pi_c^i(x) \right],\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{00}(x), \phi_{4c}(y)\} = -\left[\partial_i^y \delta^3(x-y) \right] \left[D_c^{bi}(x) A_b^0(x) - \pi_c^i(x) \right].}$

Para $\phi_{1a}(x)$: Realizando el cálculo respectivo del corchete de Poisson para cada una de las ligaduras con $\phi_{1a}(x)$.

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{00}(y)\} = -\pi_i^b(y) D_{ba}^i(y) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).}$

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{1c}(y)\} = 0.}$

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{2c}(y)\} = 0.}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{1a}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{\pi_a^0(x), A_c^0(y)\} \\ &= -\delta_{ac} \delta^3(x-y),\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{3c}(y)\} = -\delta_{ac} \delta^3(x-y).}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{1a}(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{\pi_a^0(x), \partial_i^y A_c^i(y)\} \\ &= \partial_i^y \{\pi_a^0(x), A_c^i(y)\}, \\ &= 0,\end{aligned}$$

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{1a}(x), \phi_{4c}(y)\} = 0.}$

Para $\phi_{2a}(x)$: Realizando el cálculo respectivo del corchete de Poisson para cada una de las ligaduras con $\phi_{2a}(x)$.

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{2a}(x), \phi_{00}(y)\} = g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) A^{0c}(y) \delta^3(x-y).}$

Se obtiene $\boxed{\{\phi_{2a}(x), \phi_{1c}(y)\} = 0.}$

Se obtiene $\{\phi_{2a}(x), \phi_{2c}(y)\} = g f_{ac}^b \phi_{2b}(x) \delta^3(x - y).$

$$\begin{aligned} \{\phi_{2a}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x), A_c^0(y)\} \\ &= D_{ba}^i(x) \{\pi_i^b(x), A_c^0(y)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{2a}(x), \phi_{3c}(y)\} = 0.$

$$\begin{aligned} \{\phi_{2a}(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x), \partial_j^y A_c^j(y)\} \\ &= D_{ba}^i(x) \partial_j^y \{\pi_i^b(x), A_c^j(y)\} \\ &= -D_{ba}^i(x) \partial_j^y \{A_c^j(y), \pi_i^b(x)\} \\ &= -D_{ba}^i(x) \partial_j^y \delta_c^b \delta_i^j \delta^3(x - y) \\ &= -D_{ca}^i(x) \partial_i^y \delta^3(x - y), \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{2a}(x), \phi_{4c}(y)\} = -D_{ca}^i(x) \partial_i^y \delta^3(x - y).$

Para $\phi_{3a}(x)$: Realizando el cálculo respectivo del corchete de Poisson para cada una de las ligaduras con $\phi_{3a}(x)$

$$\begin{aligned} \{\phi_{3a}(x), \phi_{00}(y)\} &= \{A_a^0(x), p_0(y) + \pi_j^b(y) D_b^{cj}(y) A_c^0(y) - \frac{1}{2} \pi_b^j(y) \pi_j^b(y) + \frac{1}{4} F_b^{jk}(y) F_{jk}^b(y)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{3a}(x), \phi_{00}(y)\} = 0.$

$$\begin{aligned} \{\phi_{3a}(x), \phi_{1c}(y)\} &= \{A_a^0(x), \pi_c^0(y)\}, \\ &= \delta_{ac} \delta^3(x - y), \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{3a}(x), \phi_{1c}(y)\} = \delta_{ac} \delta^3(x - y).$

$$\begin{aligned} \{\phi_{3a}(x), \phi_{2c}(y)\} &= \{A_a^0(x), D_{bc}^j(y) \pi_j^b(y)\} \\ &= D_{bc}^j(y) \{A_a^0(x), \pi_j^b(y)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{3a}(x), \phi_{2c}(y)\} = 0.$

$$\begin{aligned} \{\phi_{3a}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{A_a^0(x), A_c^0(y)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene $\{\phi_{3a}(x), \phi_{3c}(y)\} = 0.$

$$\begin{aligned}\{\phi_{3a}(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{A_a^0(x), D_{bc}^i(x)A_i^b(x)\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{3a}(x), \phi_{4c}(y)\} = 0.}$

Para $\phi_{4a}(x)$: Realizando el cálculo respectivo del corchete de Poisson para cada una de las ligaduras con $\phi_{4a}(x)$.

$$\begin{aligned}\{\phi_{4a}(x), \phi_{00}(y)\} &= \{\partial_i^x A_a^i(x), p_0(y) + \pi_j^b(y)D_b^{cj}(y)A_c^0(y) - \frac{1}{2}\pi_b^j(y)\pi_j^b(y) + \frac{1}{4}F_b^{jk}(y)F_{jk}^b(y)\} \\ &= \partial_i^x [\{A_a^i(x), p_0(y) + \pi_j^b(y)D_b^{cj}(y)A_c^0(y) - \frac{1}{2}\pi_b^j(y)\pi_j^b(y) + \frac{1}{4}F_b^{jk}(y)F_{jk}^b(y)\}] \\ &= \partial_i^x [\{A_a^i(x), \pi_j^b(y)\}[D_b^{cj}(y)A_c^0(y) - \pi_b^j(y)]] \\ &= \partial_i^x [\delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y)][D_b^{cj}(y)A_c^0(y) - \pi_b^j(y)] \\ &= [\partial_i^x \delta^3(x-y)][D_a^{ci}(y)A_c^0(y) - \pi_a^i(y)],\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{4a}(x), \phi_{00}(y)\} = [\partial_i^x [D_a^{ci}(y)A_c^0(y) - \pi_a^i(y)]\delta^3(x-y)].}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{4a}(x), \phi_{1c}(y)\} &= \{\partial_i^x A_a^i(x), \pi_c^0(y)\} \\ &= \partial_i^x \{A_a^i(x), \pi_c^0(y)\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{4a}(x), \phi_{1c}(y)\} = 0.}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{4a}(x), \phi_{2c}(y)\} &= \{\partial_i^x A_a^i(x), D_{bc}^j(y)\pi_j^b(y)\} \\ &= \partial_i^x D_{bc}^j(y)\{A_a^i(x), \pi_j^b(y)\} \\ &= \partial_i^x D_{bc}^j(y)\delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y) \\ &= \partial_i^x D_{ac}^i(y)\delta^3(x-y),\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{4a}(x), \phi_{2c}(y)\} = \partial_i^x D_{ac}^i(y)\delta^3(x-y).}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{4a}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{\partial_i^x A_a^i(x), A_c^0(x)\} \\ &= \partial_i^x \{A_a^i(x), A_c^0(x)\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{4a}(x), \phi_{3c}(y)\} = 0.}$

$$\begin{aligned}\{\phi_{4a}(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{\partial_i^x A_a^i(x), \partial_j^y A_c^j(y)\} \\ &= \partial_i^x \partial_j^y \{A_a^i(x), A_c^j(y)\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

se obtiene $\boxed{\{\phi_{4a}(x), \phi_{4c}(y)\} = 0.}$

C.7. Inversa de la matriz de ligaduras $C_{ac}(x, y)$

Se debe ahora hallar la inversa de la matriz $C_{ac}(x, y)$, esta será una matriz $C_{cb}^{-1}(x, y)$ tal que

$$\int d^3z C_{ac}(x, z) C_{cb}^{-1}(z, y) = \int d^3z C_{cb}^{-1}(x, z) C_{ac}(z, y) = \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

esto es

$$\begin{aligned} & \int d^3z C_{ac}(x, z) C_{cb}^{-1}(z, y) \\ &= \int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} \\ \delta_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{xi} D_{ca}^i(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & C_{12}^{-1} & C_{13}^{-1} & C_{14}^{-1} \\ C_{21}^{-1} & C_{22}^{-1} & C_{23}^{-1} & C_{24}^{-1} \\ C_{31}^{-1} & C_{32}^{-1} & C_{33}^{-1} & C_{34}^{-1} \\ C_{41}^{-1} & C_{42}^{-1} & C_{43}^{-1} & C_{44}^{-1} \end{pmatrix} \delta^3(x - z), \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} \\ \delta_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{xi} D_{ca}^i(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \int d^3z \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & C_{12}^{-1} & C_{13}^{-1} & C_{14}^{-1} \\ C_{21}^{-1} & C_{22}^{-1} & C_{23}^{-1} & C_{24}^{-1} \\ C_{31}^{-1} & C_{32}^{-1} & C_{33}^{-1} & C_{34}^{-1} \\ C_{41}^{-1} & C_{42}^{-1} & C_{43}^{-1} & C_{44}^{-1} \end{pmatrix} \delta^3(x - z), \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} \\ \delta_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{xi} D_{ca}^i(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^{-1}(x, y) & C_{12}^{-1}(x, y) & C_{13}^{-1}(x, y) & C_{14}^{-1}(x, y) \\ C_{21}^{-1}(x, y) & C_{22}^{-1}(x, y) & C_{23}^{-1}(x, y) & C_{24}^{-1}(x, y) \\ C_{31}^{-1}(x, y) & C_{32}^{-1}(x, y) & C_{33}^{-1}(x, y) & C_{34}^{-1}(x, y) \\ C_{41}^{-1}(x, y) & C_{42}^{-1}(x, y) & C_{43}^{-1}(x, y) & C_{44}^{-1}(x, y) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -\delta_{ac} C_{31}^{-1} & -\delta_{ac} C_{32}^{-1} & -\delta_{ac} C_{33}^{-1} & -\delta_{ac} C_{34}^{-1} \\ D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{41}^{-1} & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{42}^{-1} & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{43}^{-1} & D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{44}^{-1} \\ \delta_{ac} C_{11}^{-1} & \delta_{ac} C_{12}^{-1} & \delta_{ac} C_{13}^{-1} & \delta_{ac} C_{14}^{-1} \\ -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{21}^{-1} & -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{22}^{-1} & -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{23}^{-1} & -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{24}^{-1} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al comparar estas dos últimas matrices se determinan relaciones para las componentes de la matriz inversa, de este modo se obtiene

$$\boxed{C_{32}^{-1} = C_{33}^{-1} = C_{34}^{-1} = C_{11}^{-1} = C_{12}^{-1} = C_{14}^{-1} = 0.}$$

Por otro lado, se obtienen relaciones para las componentes de la matriz inversa a partir de las condiciones:
 $D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{41}^{-1} = D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{43}^{-1} = D_{ac}^i(x) \partial_{xi} C_{44}^{-1} = -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{21}^{-1} = -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{22}^{-1} = -\partial_{xi} D_{ac}^i(x) C_{23}^{-1} = 0$

$$\boxed{C_{41}^{-1} = C_{43}^{-1} = C_{44}^{-1} = C_{21}^{-1} = C_{22}^{-1} = C_{23}^{-1} = 0.}$$

De las condiciones: $-\delta_{ac} C_{31}^{-1} = \delta_{ac} C_{13}^{-1} = \delta_{ab} \delta^3(x - y)$ se obtiene

$$\boxed{-C_{31}^{-1} = C_{13}^{-1} = \delta_{cb} \delta^3(x - y).}$$

De la condición: $D_{ac}^i(x)\partial_{xi}C_{42}^{-1} = \delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ se obtiene la función de Green correspondiente:

$$C_{42}^{-1} = G_{cb}(x, y, A).$$

Finalmente de la condición $-\partial_{xi}D_{ac}^i(x)C_{24}^{-1} = \delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ se obtiene una nueva función de Green a la cual se denominara como $\sigma_{cb}(x, y, A)$, de modo que

$$C_{24}^{-1} = -\sigma_{cb}(x, y, A).$$

La matriz inversa será

$$C_{cb}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_{cb}(x, y, A) \\ -\delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cb}(x, y, A) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C.8. Corchetes de Poisson entre las ligaduras y las condiciones gauge

Con la finalidad de ampliar la tabla (6.3.1) en relación a los CP entre las ligaduras y los campos, se agrega la información de las nuevas ligaduras, se tiene que calcular los CP entre las nuevas ligaduras y los campos, de este modo se procede a calcular:

Para $\phi_{3a}(x)$: Se procederá a realizar el cálculo del corchete de Poisson entre los campos fundamentales de la teoría de Yang-Mills libre y la ligadura $\phi_{3a}(x)$.

Con el campo $A_a^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \{A_a^\mu(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{A_a^\mu(x), A_c^0(y)\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con el campo $\pi_\mu^a(x)$:

$$\begin{aligned} \{\pi_\mu^a(x), \phi_{3c}(y)\} &= \{\pi_\mu^a(x), A_c^0(y)\}, \\ &= -\delta_\mu^0\delta_c^a\delta^3(x - y). \end{aligned}$$

De modo que $\{A_a^\mu(x), \phi_{3c}(y)\} = 0$ y $\{\pi_\mu^a(x), \phi_{3c}(y)\} = -\delta_\mu^0\delta_c^a\delta^3(x - y)$.

Para $\phi_{4a}(x)$: Se procederá a realizar el cálculo del corchete de Poisson entre los campos fundamentales de la teoría de Yang-Mills libre y la ligadura $\phi_{4a}(x)$.

Con el campo $A_a^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \{A_a^\mu(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{A_a^\mu(x), \partial_j^y A_c^j(y)\}, \\ &= \partial_j^y \{A_a^\mu(x), A_c^j(y)\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con el campo $\pi_\mu^a(x)$:

$$\begin{aligned}\{\pi_\mu^a(x), \phi_{4c}(y)\} &= \{\pi_\mu^a(x), \partial_j^y A_c^j(y)\}, \\ &= \partial_j^y \{\pi_\mu^a(x), A_c^j(y)\}, \\ &= -\delta_\mu^j \delta_c^a \partial_j^y \delta^3(x - y).\end{aligned}$$

De modo que $\boxed{\{A_a^\mu(x), \phi_{4c}(y)\} = 0}$ y $\boxed{\{\pi_\mu^a(x), \phi_{4c}(y)\} = -\delta_\mu^j \delta_c^a \partial_j^y \delta^3(x - y)}.$

C.9. Corchetes de Dirac fundamentales

Para simplificar los cálculos de la evolución de una variable dinámica es conveniente calcular los corchetes de Dirac fundamentales, para ello se debe tener presente los CP entre las ligaduras y los campos y recordar que los únicos CP entre los campos diferentes de cero son

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Ahora se considera la tabla de los corchetes de Poisson entre los campos fundamentales y las ligaduras, extendida con las condiciones gauge:

$\{ , \}$	$\phi_{1c}(u)$	$\phi_{2c}(u)$	$\phi_{3c}(u)$	$\phi_{4c}(u)$
$A_\mu^a(x)$	$\delta_c^a \delta_{0\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u})$	$\delta_{i\mu} D_c^{ai}(u) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u})$	0	0
$\pi_a^\mu(x)$	0	$\delta^{i\mu} g f_{acb} \pi_i^b(u) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u})$	$-\delta^{\mu 0} \delta_{ca} \delta^3(x - u)$	$-\delta^{\mu j} \delta_{ca} \partial_j^u \delta^3(x - u)$

Tabla C.9.1: CP entre los campos y las ligaduras.

Es conveniente para los cálculos tener explícitamente la tabla con las ligaduras como primera columna y los campos como primera fila para así poder realizar fácilmente los corchetes de Poisson entre las diferentes variables dinámicas:

$\{ , \}$	$A_\nu^b(y)$	$\pi_b^\nu(y)$
$\phi_{1d}(v)$	$-\delta_d^b \delta_{0\nu} \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{y})$	0
$\phi_{2d}(v)$	$-\delta_{j\nu} D_d^{bj}(v) \delta^3(x - y)$	$-\delta^{j\nu} g f_{bdh} \pi_j^h(v) \delta^3(v - y)$
$\phi_{3d}(v)$	0	$\delta^{\nu 0} \delta_{bd} \delta^3(v - y)$
$\phi_{4d}(v)$	0	$\delta^{\nu j} \delta_{bd} \partial_j^v \delta^3(v - y)$

Tabla C.9.2: CP entre los campos y las ligaduras.

Con esto definido es posible determinar los corchetes fundamentales de Dirac. Se empezará calculando el CD entre los campos gauge:

$$\begin{aligned}
 \{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}_D &= \{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\} - \int d^3u d^3v \{A_\mu^a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{qd}(v), A_\nu^b(y)\}, \\
 &= - \int d^3u d^3v [\{A_\mu^a(x), \phi_{1c}(u)\} [C_{13}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{3d}(v), A_\nu^b(y)\} + \\
 &\quad \{A_\mu^a(x), \phi_{2c}(u)\} [C_{24}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{4d}(v), A_\nu^b(y)\}], \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ahora los CP entre los momentos canónicos conjugados:

$$\begin{aligned}
 \{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}_D &= \{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} - \int d^3u d^3v \{\pi_\mu^a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{qd}(v), \pi_\nu^b(y)\}, \\
 &= - \int d^3u d^3v [\{\pi_\mu^a(x), \phi_{2c}(u)\} [C_{24}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{4d}(v), \pi_\nu^b(y)\} + \\
 &\quad \{\pi_\mu^a(x), \phi_{3c}(u)\} [C_{31}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{1d}(v), \pi_\nu^b(y)\} + \\
 &\quad \{\pi_\mu^a(x), \phi_{4c}(u)\} [C_{42}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{2d}(v), \pi_\nu^b(y)\}], \\
 &= - \int d^3u d^3v [\delta_\mu^i g f_{ch}^a \pi_i^h(u) \delta^3(x-u) \sigma_{cd}(u, v, A) \delta_\nu^j \delta_d^b \partial_j^v \delta^3(v-y)] + \\
 &\quad \int d^3u d^3v [\delta_\mu^j \delta_c^a \partial_j^u \delta^3(x-u) G_{cd}(u, v, A) \delta_\nu^i g f_{dh}^b \pi_i^h(v) \delta^3(v-y)], \\
 &= \delta_\mu^i g f_{ch}^a \delta_\nu^j \delta_d^b \partial_j^y \int d^3u d^3v [\pi_i^h(u) \sigma_{cd}(u, v, A) \delta^3(v-y) \delta^3(x-u)] - \\
 &\quad \delta_\mu^j \delta_c^a \partial_j^x \delta_\nu^i g f_{dh}^b \int d^3u d^3v [G_{cd}(u, v, A) \pi_i^h(v) \delta^3(y-v) \delta^3(x-u)], \\
 &= g \delta_\mu^i \delta_\nu^j \delta_d^b f_{ch}^a \partial_j^y [\pi_i^h(x) \sigma_{cd}(x, y, A)] - g \delta_\mu^j \delta_\nu^i \delta_c^a f_{dh}^b \partial_j^x [G_{cd}(x, y, A) \pi_i^h(y)], \\
 &= g \delta_\mu^i \delta_\nu^j f_{ch}^a \partial_j^y [\pi_i^h(x) \sigma^{cb}(x, y, A)] - g \delta_\mu^j \delta_\nu^i f_{dh}^b \partial_j^x [G^{ad}(x, y, A) \pi_j^h(y)], \\
 &= g \delta_\mu^i \delta_\nu^j f_{ch}^a \partial_j^y [\pi_i^h(x) \sigma^{cb}(x, y, A)] - g \delta_\mu^j \delta_\nu^i f_{dh}^b \partial_j^x [G^{ad}(x, y, A) \pi_j^h(y)], \\
 &= g \delta_\mu^i \delta_\nu^j f_{ch}^a \pi_i^h(x) \partial_j^y [\sigma^{cb}(x, y, A)] - g \delta_\mu^j \delta_\nu^i f_{ch}^b \pi_j^h(y) \partial_i^x [G^{ac}(x, y, A)], \\
 &= g \delta_\mu^i \delta_\nu^j f_{ch}^a \partial_j^y [\pi_i^h(x) \sigma^{cb}(x, y, A)] - g \delta_\mu^j \delta_\nu^i f_{dh}^b \partial_j^x [G^{ad}(x, y, A) \pi_j^h(y)].
 \end{aligned}$$

Finalmente los CD entre los campos gauge y los momentos canónicos conjugados son

$$\begin{aligned}
 \{A_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}_D &= \{A_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} - \int d^3u d^3v \{A_\mu^a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{qd}(v), \pi_\nu^b(y)\}, \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3u d^3v [\{A_\mu^a(x), \phi_{1c}(u)\} [C_{13}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{3d}(v), \pi_\nu^b(y)\} + \\
 &\quad \{A_\mu^a(x), \phi_{2c}(u)\} [C_{24}^{cd}]^{-1}(u, v) \{\phi_{4d}(v), \pi_\nu^b(y)\}], \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3u d^3v [\delta_{ac} \delta_{0\mu} \delta^3(x - u) \delta_{cd} \delta^3(u - v) \delta_0^\nu \delta_b^d \delta^3(v - y)] - \\
 &\quad \int d^3u d^3v [\delta_{i\mu} (D_{ac}^i(u) \delta^3(x - u)) \sigma_{cd}(u, v, A) \delta^{j\nu} \delta_b^d (\partial_j^v \delta^3(y - v))], \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{ac} \delta_{0\mu} \delta_{cd} \delta_0^\nu \delta_b^d \int d^3u d^3v [\delta^3(x - u) \delta^3(u - v) \delta^3(v - y)] - \\
 &\quad \delta_{i\mu} \delta^{j\nu} \delta_b^d \int d^3u d^3v [(-D_{ca}^i(x) \delta^3(x - u)) \sigma_{cd}(u, v, A) (-\partial_j^v \delta^3(y - v))], \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu \delta_b^a \int d^3u [\delta^3(x - u) \delta^3(u - y)] - \\
 &\quad \delta_{i\mu} \delta^{j\nu} \delta_b^d D_{ca}^i(x) \partial_j^y \int d^3u d^3v \sigma_{cd}(u, v, A) \delta^3(y - v) \delta^3(x - u), \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{i\mu} \delta^{j\nu} \delta_b^d D_{ca}^i(x) \partial_j^y \sigma_{cd}(x, y, A), \\
 &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{i\mu} \delta^{j\nu} D_{ca}^i(x) \partial_j^y \sigma_{cb}(x, y, A), \\
 &= [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A).
 \end{aligned}$$

En resumen, los corchetes generalizados fundamentales entre los campos de la teoría son

$$\boxed{\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}_D = 0,}$$

$$\boxed{\{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}_D = g \delta_\mu^k \delta_\nu^l f_{ch}^a \pi_k^h(x) \partial_l^y \sigma^{cb}(x, y, A) - g \delta_\mu^l \delta_\nu^k f_{dh}^b \pi_l^h(y) \partial_k^x G^{ad}(x, y, A),}$$

$$\boxed{\{A_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}_D = [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A).}$$

Bibliografía

- [1] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2007.
- [2] Ecuación de Hamilton-Jacobi. (n. d.). Academia-Lab. de <https://academia-lab.com/enciclopedia/ecuacion-de-hamilton-jacobi/>.
- [3] João Ricardo Pessoa de Araújo. Formalismo de hamilton-jacobi aplicado a teorías de campos topológicas. Universidade Federal da Bahia – UFBA. Instituto de Física, 2016.
- [4] B.H. Luis Alfredo. Formulaci3n de hamilton-jacobi en teoría clásica de campos. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física, 2013.
- [5] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. parte 2: sistemas singulares. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008.
- [6] C.E. Valcárcel M.C. Bertín, B.M. Pimentel. Non-involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism, 2008.
- [7] Javier García. 59 - teoría cuántica de campos [teoría gauge yang-mills - su(n) - parte 1]. <https://www.youtube.com/>, 02 2021.
- [8] Javier García. 60 - teoría cuántica de campos [teoría gauge yang-mills - su(n) - parte 2]. <https://www.youtube.com/>, 02 2021.
- [9] P.U. Andres David. Estructura canónica del campo de yang-mills libre y con interacci3n. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física, 2019.
- [10] Stefan Pokorski and Stefan Pokorski. *Gauge field theories*, volume 2. Cambridge University Press Cambridge, 2000.
- [11] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [12] Elliot Leader and Enrico Predazzi. *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, volume 1. Cambridge university press, 1996.
- [13] W Greiner and J Reinhardt. *Field quantization*. Springer, New York, 1996.
- [14] John R Klauder. *Quantum field theory: A modern introduction*. by michio kaku, oxford university press, new york, 1993, 785 pages, 1993.
- [15] Javier García. 48 - teoría cuántica de campos [yang - mills: Transporte paralelo]. <https://www.youtube.com/>, 12 2020.



- [16] Javier García. 54 - teoría cuántica de campos [grupos de lie 1]. <https://www.youtube.com/>, 01 2021.
- [17] Badajoz. Apuntes de grupos de lie. <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/LibroGLie.pdf>, 12 2017.
- [18] Javier García. 56 - teoría cuántica de campos [álgebra de lie]. <https://www.youtube.com/>, 01 2021.
- [19] Pavel Etingof. Lie groups and lie algebras. <https://arxiv.org/abs/2201.09397v1>, 2022.
- [20] Eduardo Fernández. A geometric approach to lie systems: formalism of poisson–hopf algebra deformations. <https://arxiv.org/abs/2101.11064>, 2021.