

Formulación de Hamilton-Jacobi para teorías gauge no abelianas

Alumno: Cristian Santiago Muñoz López

Director: Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, 17 de octubre de 2023



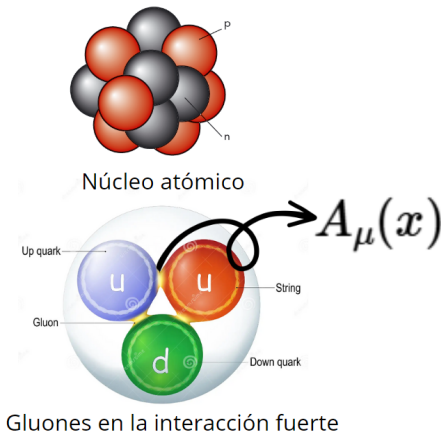
Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904

Contenido

- 1 Introducción
 - Planteamiento del problema
 - Objetivos
- 2 Teoría de Yang-Mills
- 3 Resultados
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Historia



Chen Ning Yang



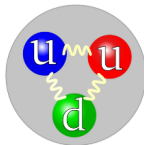
Robert Mills

1957 Teoría de Yang-Mills

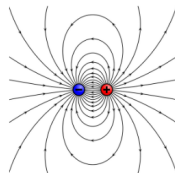


Relevancia física de la teoría de Yang-Mills

**Modelo
estándar
1960**



QCD



QED



Steven Weinberg



Abdus Salam



Teoría electro-débil



Teorías gauge

Transformación de los campos gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.1)$$

Invarianza de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad (2.2)$$

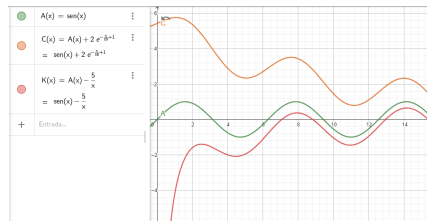


Figura: Diferentes formas de los campos gauge.

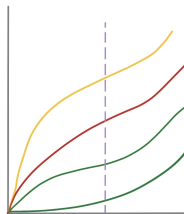


Planteamiento del problema

La teoría de Yang-Mills se caracteriza por poseer restricciones

$$\phi_{Pa}(x) = 0 \quad (2.3)$$

La dinámica del sistema no será bien definida si existen restricciones LI



Se pretende resolver:

- 1 ¿Cuántas restricciones posee el sistema?
- 2 ¿De qué manera las restricciones afectan a la dinámica del sistema?
- 3 ¿Cómo las condiciones gauge resuelven este problema?



Objetivos

General

Realizar un estudio de las teorías gauge no abelianas mediante la formulación de Hamilton-Jacobi.

Específicos

- Analizar la formulación de Hamilton-Jacobi según Carathéodory, generalizando los resultados a teoría de campos.
- Aplicar la formulación de Hamilton-Jacobi a la teoría de Yang-Mills.
- Implementar condiciones de gauge en la formulación de Hamilton-Jacobi y aplicarla al estudio del campo de Yang-Mills.



Lagrangiana de la teoría de Yang-Mills libre

La densidad Lagrangiana que describe la teoría de Yang-Mills libre es:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x), \quad (3.1)$$

donde se define el tensor de intensidad de campo de esta teoría mediante:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf_{bc}^a A_\mu^b(x)A_\nu^c(x), \quad (3.2)$$

descrita para un grupo de simetría general $SU(N)$.

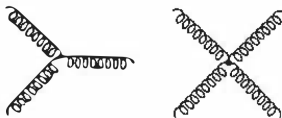


Figura: Interacciones entre gluones, grupo $SU(3)$ (Introduction to Elementary Particles, David Griffiths).

Formulación Lagrangiana

Las ecuaciones de campo se determinan de las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha^a} - \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha^a)} \right] = 0. \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones se pueden representar como:

$$\ddot{A}_\nu^a(x) = [W_{\mu\nu}(x, y)]^{-1} G_\mu [A_\alpha^b(x), \dot{A}_\alpha^b(x)], \quad (3.4)$$

$$W_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_a^\mu) \partial (\partial_0 A_a^\nu)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.5)$$

Sin embargo, la densidad Lagrangiana de la teoría es singular:

$$W(x, y) = \eta^{\nu 0} \eta^{0\mu} - \eta^{\nu\mu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$



Formulación Hamiltoniana

Mediante una transformación de Legendre a la densidad Lagrangiana se obtiene la densidad Hamiltoniana canónica:

$$\mathcal{H}_0(x) = \pi_a^\mu(x) \dot{A}_\mu^a(x) - \mathcal{L}(x), \quad (3.7)$$

con esto se introduce el espacio de fase $(A_\mu^a, \dot{A}_\mu^a) \rightarrow (A_\mu^a, \pi_a^\mu)$. Para la teoría de Yang-Mills libre:

$$H_0 = \int d^3x \left[A_c^0(x) D_a^{ci}(x) \pi_i^a(x) - \frac{1}{2} \pi_a^i(x) \pi_i^a(x) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(x) F_{ij}^a(x) \right]. \quad (3.8)$$

Esta formulación presenta una restricción sobre sus campos:

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) = 0,$$



Ecuaciones diferenciales

En el método de HJ se considera:

$$\pi_a^\mu(x) \equiv \frac{\partial S(t, A_\nu^b(x))}{\partial A_\mu^a(x)}. \quad (3.10)$$

Se introduce además una nueva restricción

$$\phi_{00}(x) \equiv \underbrace{\frac{\partial S(t, A_\nu^b(x))}{\partial t}}_{p^0(x)} + \mathcal{H}_0 \left(A_\mu^a(x), \frac{\partial S(t, A_\nu^b(x))}{\partial A_\mu^a(x)} \right) \quad (3.11)$$

De manera que se tiene el conjunto de restricciones $\phi_{00}(x)$ y $\phi_{1a}(x)$.



Corchetes de Poisson

La presencia de restricciones altera la dinámica del sistema, dado a que los CP no se satisfacen completamente:

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\} = 0, \quad (3.12)$$

$$\{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\} = 0, \quad (3.13)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu, \quad (3.14)$$

El último CP fundamental no satisface la restricción $\pi_a^0(x) = 0 \rightarrow \{A_\mu^a(x), \pi_b^0(y)\} \neq 0$ lo cual genera un gran inconveniente

$$dF_a(x) = \int d^3y \{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt \quad (3.15)$$



Formulación de Hamilton-Jacobi

Se realiza un análisis de integrabilidad sobre la restricción que posee el sistema, que se la considera ahora como una EDP, aplicando la condición de Frobenius:

$$d\phi_\alpha = C^\gamma_{\alpha\beta} \phi_\gamma d\tau^\beta = 0, \quad (4.1)$$

se encuentra el conjunto completo de EDPHJ:

$$\phi_{00}(x) \equiv p^0 + \mathcal{H}_0 \rightarrow t, \quad (4.2a)$$

$$\phi_{1a}(x) \equiv \pi_a^0(x) \rightarrow \tau_1^a(x), \quad (4.2b)$$

$$\phi_{2a}(x) \equiv D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) \rightarrow \tau_2^a(x). \quad (4.2c)$$



Ecuaciones características

A partir de esto se puede construir la evolución de cualquier observable física en el espacio de fase reducido:

$$dF(x) = \int d^3y [\{F(x), \phi_{00}(y)\}dt + \{F(x), \phi_{1c}(y)\}d\tau_1^c(y) + \{F(x), \phi_{2c}(y)\}d\tau_2^c(y)], \quad (4.3)$$

al evaluar la evolución de los campos se obtienen las ecuaciones características de la teoría de Yang-Mills:

$$dA_a^0(x) = d\tau_a^1(x), \quad (4.4a)$$

$$dA_a^i(x) = [D_a^{di}(x)A_d^0(x) - \pi_a^i(x)]dt - D_{ca}^i(x)d\tau_2^c(x), \quad (4.4b)$$

$$d\pi_a^0(x) = D_b^{aj}(x)\pi_j^b(x)dt, \quad (4.4c)$$

$$d\pi_i^a(x) = [gf_b^{ca}\pi_i^b(x)A_c^0(x) - D_b^{aj}(x)F_{ij}^b(x)]dt + gf_{cb}^a\pi_i^b(x)d\tau_2^c(x). \quad (4.4d)$$



Dinámica de los campos

De las ecuaciones características se deriva la dinámica de los campos gauge y la ecuación de campo de la teoría, en el espacio de fase:

$$\dot{A}_a^\mu(x) = \delta_0^\mu \dot{\tau}_{1a}(x) + \delta_i^\mu \left[D_a^{di}(x) A_d^0(x) - \pi_a^i(x) - D_{ca}^i(x) \dot{\tau}_2^c(x) \right], \quad (4.5a)$$

$$\dot{\pi}_\mu^a(x) = \delta_\mu^i \left[g f_b^{ca} \pi_i^b(x) A_c^0(x) - D_b^{aj}(x) F_{ij}^b(x) + g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x) \right]. \quad (4.5b)$$

Y en el espacio de configuración:

$$D_{ba}^\nu(x) F_{\nu\mu}^b(x) = \delta_\mu^i g f_{cb}^a \pi_i^b(x) \dot{\tau}_2^c(x), \quad (4.6)$$

que presentan indeterminaciones debido a la presencia de los parámetros indeterminados $\tau_{1a}(x)$ y $\tau_{2a}(x)$.



Arbitrariedad en la dinámica

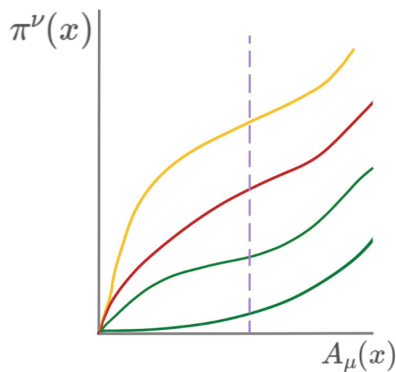


Figura: La evolución del sistema no está bien definida.



Independencia lineal

Las indeterminaciones surgen por la independencia lineal de las EDP

$\{, \}$	$\phi_{00}(y)$	$\phi_{1c}(y)$	$\phi_{2c}(y)$
$\phi_{00}(x)$	○	$\pi_i^a(y) D_{ac}^i(x) \delta^3(x-y)$	○
$\phi_{1a}(x)$	$-\pi_i^b(y) D_{ba}^i(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$	○	○
$\phi_{2a}(x)$	○	○	○

Tabla: Corchetes de Poisson entre las EDP.

lo que genera que la matriz de EDP $\Phi_{HP}^{ab}(x, y) \equiv \{\phi_H^a(x), \phi_P^b(y)\}$ no tenga inversa.



Gauge de radiación

Para solucionar este problema se implementan las condiciones del gauge de radiación, expandiendo el conjunto de EDPHJ

$$\phi_{00}(x) \equiv p^0 + \mathcal{H}_0(x) \rightarrow t, \quad (4.7a)$$

$$\phi_{1a}(x) = \pi_a^0(x) \rightarrow \tau_1^a(x), \quad (4.7b)$$

$$\phi_{2a}(x) = D_{ba}^i(x) \pi_i^b(x) \rightarrow \tau_2^a(x), \quad (4.7c)$$

$$\phi_{3a}(x) = A_a^0(x) \rightarrow \tau_3^a(x), \quad (4.7d)$$

$$\phi_{4a}(x) = \partial_i^x A_a^i(x) \rightarrow \tau_4^a(x). \quad (4.7e)$$



Conjunto de EDP linealmente dependientes

Al incluir las condiciones gauge en el conjunto de EDPHJ se obtienen EDP linealmente dependientes

$\{ \quad , \quad \}$	$\phi_{1c}(y)$	$\phi_{2c}(y)$	$\phi_{3c}(y)$	$\phi_{4c}(y)$
$\phi_{1a}(x)$	○	○	$-\delta_{ac}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	○
$\phi_{2a}(x)$	○	○	○	$-D_{ac}^j(x)\partial_{yi}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
$\phi_{3a}(x)$	$\delta_{ac}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	○	○	○
$\phi_{4a}(x)$	○	$D_{ac}^j(y)\partial_{xi}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	○	○

Tabla: Corchetes de Poisson entre las ligaduras.

Por lo que la matriz de EDP $\Phi_{HP}^{ab}(x, y)$ ahora es invertible.



Dinámica del sistema

De este conjunto de EDPHJ se redefine el diferencial fundamental de la teoría:

$$dF_a(x) = \int d^3y [\{F_a(x), \phi_{00}(y)\} dt + \{F_a(x), \phi_{pc}(y)\} d\tau_p^c(y)] \rightarrow P \equiv \{1, 2, 3, 4\}, \quad (4.8)$$

Lo que permitió encontrar una relación entre todos los parámetros $\tau_p^a(x)$ y el tiempo:

$$d\tau_b^H(y) = - \int d^3\nu d^3u (\Phi^{-1})_{bc}^{HP}(y, \nu) \{ \phi_p^c(\nu), \phi_{00}(u) \} dt, \quad (4.9)$$

donde la inversa de la matriz de EDP es:

$$\Phi_{cb}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_{cb}(x, y, A) \\ -\delta_{cb}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cb}(x, y, A) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$



Corchetes generalizados

Las funciones $G_{bc}(x, y, A_\mu)$ y $\sigma_{bc}(x, y, A_\mu)$ satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$D_{ab}^i(x) \partial_j^x G^{bc}(x, y, A_\mu) = \delta_j^i \delta_a^c \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (4.11a)$$

$$\partial_j^x D_{ab}^i(x) \sigma^{bc}(x, y, A_\mu) = \delta_j^i \delta_a^c \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (4.11b)$$

Los CG para dos variables dinámicas $F_a(x)$ y $G_b(y)$ toman la siguiente forma:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}^* \equiv \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3v \left\{ F_a(x), \phi_H^b(u) \right\} [\Phi_{bc}^{-1}(u, v)]^{HP} \{ \phi_P^c(v), G_b(y) \}. \quad (4.12)$$

Bajo la definición de los corchetes generalizados, la dinámica del sistema es regida por:

$$dF_a(x) = \int d^3y \{F_a(x), \phi_{00}(y)\}^* dt.$$



Corchetes generalizados fundamentales

La forma funcional de los CG es equivalente a la de los CD:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_D = \{F_a(x), G_b(y)\} - \int d^3u d^3v \{F_a(x), \phi_{pc}(u)\} [C_{pq}^{cd}(u, v)]^{-1} \{\phi_{qd}(v), G_b(y)\}. \quad (4.14)$$

De modo que los corchetes generalizados fundamentales son iguales a los corchetes de Dirac fundamentales y toman la forma:

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}^* = 0, \quad (4.15a)$$

$$\{\pi_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)\}^* = g \delta_\mu^k \delta_\nu^l f_{ch}^a \pi_k^h(x) \partial_l^y \sigma^{cb}(x, y, A) - g \delta_\mu^l \delta_\nu^k f_{dh}^b \pi_l^h(y) \partial_k^x G^{ad}(x, y, A), \quad (4.15b)$$

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\}^* = [\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0] \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta_{k\mu} \delta^{l\nu} D_{ca}^k(x) \partial_l^y \sigma_{cb}(x, y, A). \quad (4.15c)$$



Conclusiones

- La singularidad en la densidad Lagrangiana de la teoría es una característica común en todas las teorías con simetría gauge local y genera la presencia de restricciones en el sistema.
- Los corchetes de Poisson no son completamente coherentes con las restricciones que posee un sistema singular, por lo que es necesario redefinirlos y con ello la dinámica del sistema.
- El método de Hamilton-Jacobi aplicado a la teoría de Yang-Mills libre reveló la existencia de dos parámetros que introducen indeterminación en la dinámica de los campos gauge, estos surgieron como resultado de la presencia de restricciones en el sistema.



Conclusiones

- Las EDP linealmente independientes son las que introducen los parámetros indeterminados al sistema, generando la indeterminación de la dinámica.
- Las condiciones del gauge de radiación permitieron eliminar las EDP linealmente independientes, de modo que fue posible encontrar una solución a la dinámica del sistema encontrando una dependencia temporal de los parámetros $\tau_H(x)$.
- Las EDP linealmente dependientes se pueden eliminar redefiniendo la dinámica mediante los corchetes generalizados a tiempos iguales.
- La forma funcional de los corchetes generalizados es análoga a la de los corchetes de Dirac, demostrando una equivalencia entre estas dos teorías.



Propuesta para futuras investigaciones

Como sugerencias para futuras investigaciones, se plantea la obtención de la forma explícita de los CG fundamentales a través del cálculo de las funciones de Green. Además, se propone llevar a cabo un estudio complementario al presentado en este trabajo, que incluya la implementación de diferentes condiciones de gauge y ampliar la investigación de la teoría de Yang-Mills involucrando interacciones con otros campos, como el campo fermiónico.



Referencias

- [1] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2007.
- [2] Ecuación de Hamilton-Jacobi. (n. d.). Academia-Lab. de <https://academia-lab.com/enciclopedia/ecuacion-de-hamilton-jacobi/>.
- [3] João Ricardo Pessoa de Araújo. Formalismo de hamilton-jacobi aplicado a teorías de campos topológicas. Universidade Federal da Bahia – UFBA. Instituto de Física, 2016.
- [4] B.H. Luis Alfredo. Formulación de hamilton-jacobi en teoría clásica de campos. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física, 2013.
- [5] B.M. Pimentel y P.J: Pompeia M.C. Bertín. Formalismo de hamilton-jacobi à la carathéodory. parte 2: sistemas singulares. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008.
- [6] C.E. Valcárcel M.C. Bertín, B.M. Pimentel. Non-involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism, 2008.
- [7] Javier García. 59 - teoría cuántica de campos [teoría gauge yang-mills - su(n) - parte 1]. <https://www.youtube.com/>, 02 2021.



Referencias

- [8] Javier García. 60 - teoría cuántica de campos [teoría gauge yang-mills - $su(n)$ - parte 2]. <https://www.youtube.com/>, 02 2021.
- [9] P.U. Andres David. Estructura canónica del campo de yang-mills libre y con interacción. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física, 2019.
- [10] Stefan Pokorski and Stefan Pokorski. *Gauge field theories*, volume 2. Cambridge University Press Cambridge, 2000.
- [11] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [12] Elliot Leader and Enrico Predazzi. *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, volume 1. Cambridge university press, 1996.
- [13] W Greiner and J Reinhardt. Field quantization. Springer, New York, 1996.
- [14] John R Klauder. Quantum field theory: A modern introduction. by michio kaku, oxford university press, new york, 1993, 785 pages, 1993.



Referencias

- [15] Javier García. 48 - teoría cuántica de campos [yang - mills: Transporte paralelo]. <https://www.youtube.com/>, 12 2020.
- [16] Javier García. 54 - teoría cuántica de campos [grupos de lie 1]. <https://www.youtube.com/>, 01 2021.
- [17] Badajoz. Apuntes de grupos de lie. <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/LibroGLie.pdf>, 12 2017.
- [18] Javier García. 56 - teoría cuántica de campos [álgebra de lie]. <https://www.youtube.com/>, 01 2021.
- [19] Pavel Etingof. Lie groups and lie algebras. <https://arxiv.org/abs/2201.09397v1>, 2022.
- [20] Eduardo Fernández. A geometric approach to lie systems: formalism of poisson–hopf algebra deformations. <https://arxiv.org/abs/2101.11064>, 2021.



Ha sido un placer compartir con ustedes mis resultados.
Espero sus comentarios y preguntas.
Muchas gracias.

