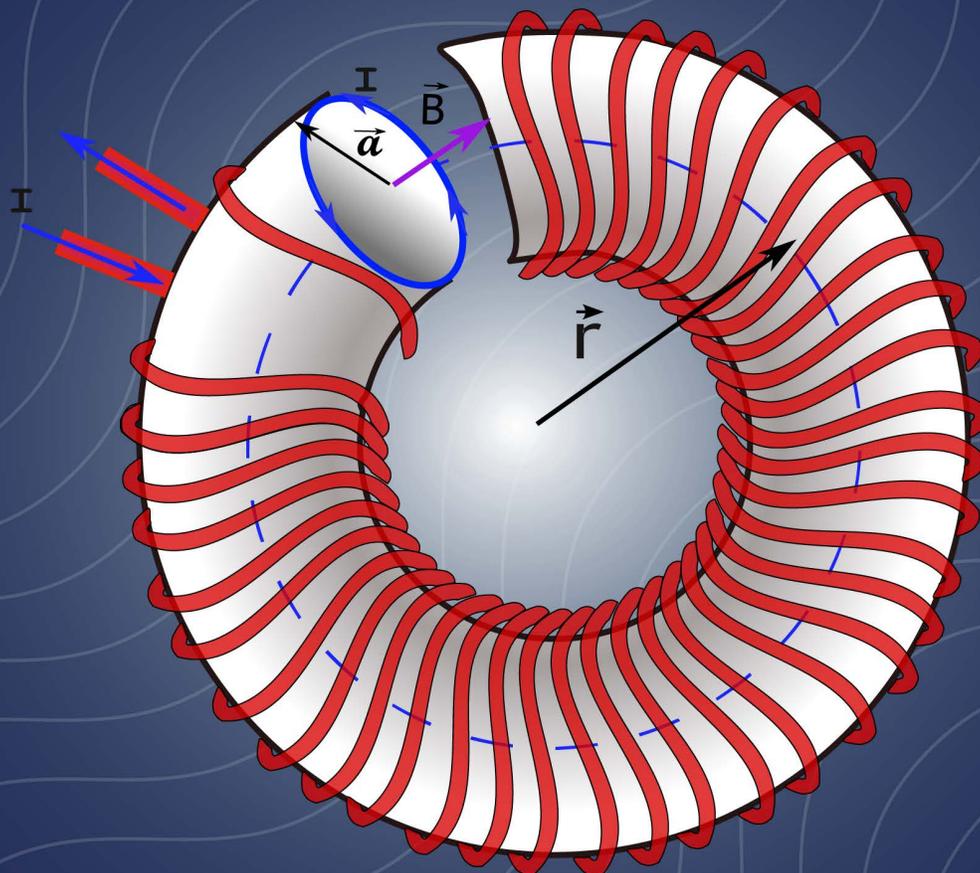


# TEORÍA Y PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

---



Juan C. Salazar M.  
Angela V. Gómez A.  
Germán Ramos Z.



Editorial  
Universidad de Nariño

# êditorial

Universidad de **Nariño**

# **TEORÍA Y PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO**

---

# TEORÍA Y PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

---

Juan Carlos Salazar Montenegro,  
Ángela Viviana Gómez Azuero, German Ramos Zambrano.

**editorial**  
Universidad de **Nariño**

Salazar Montenegro, Juan Carlos

Teoría y problemas de electromagnetismo / Juan Carlos Salazar Montenegro, Angela Viviana Gómez Azuero, German Ramos Zambrano –1ª ed.— San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2025

483 páginas: ilustraciones, gráficas, tablas

Incluye referencias bibliográficas p.480

ISBN: 978-628-7864-08-5 Impreso

ISBN: 978-628-7864-09-2 Digital

1- Electromagnetismo –Ejercicios, problemas 2. Campo magnético 3. Fuerza magnética 4. Corriente eléctrica 5. Ley de Gauss 6. Álgebra de vectores 7. Campo eléctrico 8. Ley de Coulomb I. Gómez Azuero, Angela Viviana II. Ramos Zambrano, German

537 S161t-SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

## **Electrodinámica: Teoría y problemas**

© Editorial Universidad de Nariño

© Juan Carlos Salazar Montenegro

Ángela Viviana Gómez Azuero

German Ramos Zambrano

ISBN: 978-628-7864-09-2

Primera edición

**Corrección de estilo:** German Chaves Jurado

**Diseño y diagramación:** Juan Carlos Salazar Montenegro, Alejandra Garzón,

Nathaly Johana Rivadeneira

**Fecha de publicación:** Diciembre 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Álgebra de vectores</b>	<b>10</b>
1.1. Vectores y sistemas coordenados . . . . .	10
1.1.1. Vectores en coordenadas cartesianas . . . . .	10
1.1.2. Coordenadas cilíndricas . . . . .	18
1.1.3. Coordenadas esféricas . . . . .	19
1.2. Operaciones con vectores . . . . .	20
1.2.1. Multiplicación de un vector por un escalar . . . . .	20
1.2.2. Suma de vectores . . . . .	20
1.2.3. Resta de vectores . . . . .	28
1.2.4. Producto punto . . . . .	31
1.2.5. Producto cruz . . . . .	40
<b>2. Fuerza Eléctrica</b>	<b>53</b>
2.1. Ley de Coulomb . . . . .	53
2.2. Interacción entre varias partículas cargadas . . . . .	57
2.3. Distribuciones continuas de carga . . . . .	69
2.4. Fuerza entre una carga puntual y un cuerpo con distribución continua de carga	74
<b>3. Campo Eléctrico</b>	<b>96</b>
3.1. Campo eléctrico debido a cargas puntuales . . . . .	96
3.2. Dipolo eléctrico . . . . .	104
3.3. Distribución continua de carga . . . . .	111

<b>4. Ley de Gauss</b>	<b>138</b>
4.1. Flujo Eléctrico . . . . .	138
4.2. Ley de Gauss . . . . .	148
4.2.1. Campo eléctrico dentro de un conductor . . . . .	171
<b>5. Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico</b>	<b>180</b>
5.1. Energía potencial eléctrica . . . . .	180
5.2. Energía potencial eléctrica . . . . .	182
5.2.1. Trabajo sobre una carga puntual, debido a N cargas fijas . . . . .	190
5.3. Energía potencial eléctrica para N cargas puntuales . . . . .	195
5.4. Potencial eléctrico . . . . .	202
5.4.1. Distribuciones continuas de carga . . . . .	216
5.5. Energía de una distribución continua de cargas . . . . .	235
<b>6. Capacitores</b>	<b>240</b>
6.1. Capacitor de placas paralelas . . . . .	242
6.2. Capacitores en circuitos . . . . .	253
6.2.1. Configuración en serie . . . . .	253
6.2.2. Capacitancia equivalente para un arreglo de capacitores en serie . . . . .	256
6.2.3. Configuración en paralelo . . . . .	257
6.2.4. Capacitancia equivalente para capacitores en paralelo . . . . .	259
6.2.5. Arreglos mixtos de capacitores . . . . .	260
6.3. Capacitores con dieléctricos . . . . .	270
6.4. Energía de un capacitor . . . . .	278
<b>7. Corriente Eléctrica</b>	<b>286</b>
7.1. Ley de Ohm y resistencia eléctrica . . . . .	294
7.2. Circuitos . . . . .	301
7.3. Resistencias en serie . . . . .	304
7.4. Resistencias en paralelo . . . . .	307
7.5. Circuitos mixtos . . . . .	310
7.6. Leyes de Kirchhoff . . . . .	323
7.6.1. Ley de mallas . . . . .	323

7.6.2.	Ley de nodos . . . . .	326
7.7.	Carga y Descarga de un Capacitor . . . . .	335
7.7.1.	Proceso de carga de un capacitor . . . . .	336
7.7.2.	Proceso de descarga de un capacitor . . . . .	339
<b>8.</b>	<b>Fuerza magnética</b>	<b>354</b>
8.1.	Fuerza magnética sobre conductores . . . . .	364
8.1.1.	Torque y momento dipolar magnético . . . . .	379
8.2.	Energía de un dipolo magnético . . . . .	385
<b>9.</b>	<b>Campo magnético</b>	<b>395</b>
9.1.	Campo magnético de una carga en movimiento . . . . .	395
9.1.1.	Campo magnético de un conductor lineal . . . . .	397
9.2.	Ley de Ampère . . . . .	416
9.2.1.	Corriente de desplazamiento . . . . .	427
<b>10.</b>	<b>Ley de inducción electromagnética</b>	<b>431</b>
10.1.	Ley de Faraday . . . . .	435
10.1.1.	Ley de lenz . . . . .	437
10.1.2.	Campos no electrostáticos . . . . .	460
10.2.	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	461

# Introducción

---

La interacción electromagnética es una de las interacciones fundamentales de la materia y su comprensión es de gran importancia para la formación de profesionales en carreras de ingeniería y ciencias naturales, dado que tiene innumerables aplicaciones tecnológicas, desde la generación de corriente eléctrica para nuestro uso diario, hasta el funcionamiento de aceleradores de partículas destinados a indagar cómo se comporta el universo al nivel más fundamental posible, y explicar así, la conformación, creación, el pasado y el futuro del universo, lo cual no sería posible sin el conocimiento y aplicación de la interacción electromagnética.

Este libro ha sido desarrollado como un insumo de aprendizaje para los estudiantes de nivel universitario que cursan en su plan curricular tópicos de electromagnetismo en la gran mayoría de los programas de ingeniería y ciencias básicas en cualquier universidad del país.

Todo lo que se encuentra en estas notas es la recopilación del material desarrollado en preparación de clases para el curso de electromagnetismo. Durante el proceso de escritura no se ha hecho uso de ningún texto de física y las gráficas que aquí aparecen fueron creadas exclusivamente para este libro.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingenierías y ciencias naturales, que tienen formación en cálculo diferencial, integral y álgebra de vectores, además de formación en física básica relacionada con cinemática, dinámica, trabajo y energía.

Dado la importancia de un buen manejo de álgebra de vectores, en la primera parte del texto se resumen las principales propiedades de álgebra vectorial y se desarrollan los temas específicos de electromagnetismo desde el capítulo dos hasta el capítulo nueve, abordando las temáticas de fuerza eléctrica, campo eléctrico, ley de Gauss, energía eléctrica, capacitores, corriente eléctrica, circuitos básicos, fuerza magnética, campo magnético, ley de Ampère y ley de inducción de Faraday, recopilando al final de estas notas gran parte de la temática en las ecuaciones de Maxwell.

Por cada tema tratado, se realizan varios ejemplos que buscan afianzar los conceptos teóricos; adicionalmente, se proponen ejercicios para que resuelva el lector y, finalmente, preguntas que tratan de evaluar la comprensión de los conceptos básicos explicados en cada capítulo.

# 1– Álgebra de vectores

---

Un vector es un objeto matemático que tiene asociada una magnitud y dirección, permitiendo describir diversas cantidades físicas, como: la posición (ubicación en el espacio dado un origen determinado), la velocidad, la aceleración, la fuerza aplicada sobre un objeto, entre otras. En particular, en este curso el manejo de vectores es de gran importancia para comprender el concepto de fuerza eléctrica y magnética y por ello es necesario un repaso de conceptos básicos del álgebra de vectores.

## 1.1. Vectores y sistemas coordenados

Los vectores se representan gráficamente por flechas con una longitud determinada que se interpreta como su magnitud y una dirección establecida respecto a un eje, la cual se especifica con ángulos (un ángulo en dos dimensiones y dos en ángulos en tres dimensiones). Los vectores sirven para definir cantidades físicas en  $N$  dimensiones, aunque en este curso será suficiente su entendimiento en dos y tres dimensiones.

En el caso tridimensional, un cuerpo tiene libertad de moverse en tres direcciones: adelante y atrás, arriba y abajo; derecha e izquierda, y por tanto queda determinado con la elección apropiada de tres valores. Los valores para definir un vector dependen de las coordenadas con las cuales se requiera trabajar. Las coordenadas más usadas y que se aplicarán en este curso, son: las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

### 1.1.1. Vectores en coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas, para definir un vector geoméricamente se utiliza un sistema que consiste en tres ejes perpendiculares entre sí, que se interceptan en un punto que se define como el origen del sistema cartesiano (ver figura 1.1). Los ejes llevan unidades que deben estar acordes al tipo de cantidad física que se piensa trabajar; por ejemplo, si se trabaja con el vector de posición, los ejes tendrán unidades de distancia (como metros o centímetros). Los ejes usualmente se denotan por  $x$ ,  $y$  y  $z$  y asociado a cada eje se establece un vector unitario, que como su nombre lo indica tiene magnitud 1, y están orientados en el sentido en que cada coordenada incrementa. Para el eje  $x$  el vector unitario se denota como  $\hat{i}$ , para el eje  $y$  como  $\hat{j}$  y para el  $z$  como  $\hat{k}$ .

La figura 1.1 corresponde a una representación gráfica de los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .

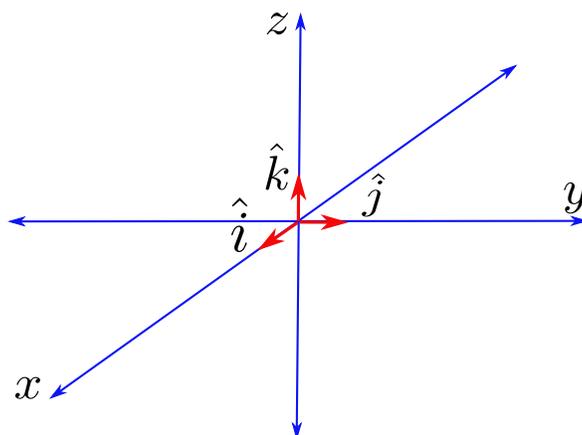


Figura 1.1: Vectores unitarios base en un plano cartesiano 3D

Un vector en un sistema cartesiano queda determinado completamente al conocer el valor de sus componentes sobre los ejes  $x, y$  y  $z$ . Gráficamente un vector se puede visualizar como el segmento que corta un paralelepípedo a través de dos de sus vértices opuestos; un vértice representará el punto de inicio del vector y el otro el punto final. El paralelepípedo deberá estar orientado de tal forma que sus lados sean paralelos a los tres ejes cartesianos, como se observa en la figura 1.2.

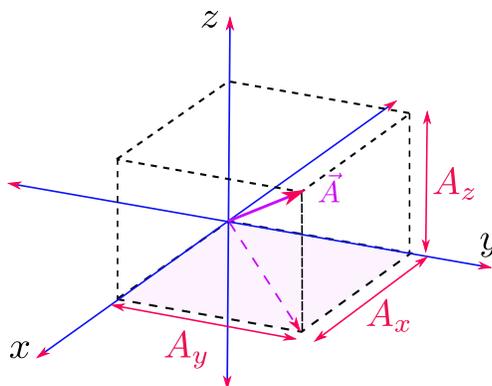


Figura 1.2: Componentes cartesianas de un vector en tres dimensiones.

La longitud de los lados del paralelepípedo se identifican como las componentes del vector en cada eje (sus proyecciones) y con dichos valores queda completamente determinado el vector en estudio, el cual matemáticamente en coordenadas cartesianas, se escribe como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}. \quad (1.1)$$

La forma general para expresar cualquier vector en tres dimensiones establecida en (1.1), requiere un trato cuidadoso en relación al signo que puedan tomar las componentes  $A_x, A_y$

y  $A_z$ ; si un vector se escribe en forma general usando la expresión (1.1), las componentes  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  pueden ser positivas o negativas, aunque dicho signo esta asociado con el carácter vectorial de la magnitud, es decir, define si un vector tiene una componente en dirección  $\pm\hat{i}$ ,  $\pm\hat{j}$  o  $\pm\hat{k}$ .

La magnitud asociada al vector  $\vec{A}$  se define por:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.2)$$

La magnitud de un vector  $|\vec{A}|$ , también se denota como  $A$ , notación que se utilizará en este texto. La dirección del vector  $\vec{A}$  en tres dimensiones en coordenadas cartesianas está implícita en la definición matemática de  $\vec{A}$ , pero es usual expresarla en términos de ángulos, lo cual hace parte de su descripción en coordenadas cilíndricas o esféricas (que se verá muy brevemente en una sección posterior) o en coordenadas polares en el caso bidimensional, las cuales se explicarán más adelante.

**Ejemplo 1.1.** *En este ejemplo se determinará el vector unitario paralelo al vector  $\vec{A} = 2.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 4.0\hat{k}$ .*

**Solución:** *Como se mencionó anteriormente, un vector unitario se caracteriza por el hecho de que su magnitud es la unidad. Como ejemplo de vectores unitarios se pueden señalar los vectores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . Sin embargo, es posible construir un vector unitario que tenga la misma dirección de un vector dado  $\vec{A}$ . Este vector se denota por  $\hat{A}$  y se define por:*

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}. \quad (1.3)$$

*Para el caso en consideración, se determina que:*

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (4.0)^2 + (4.0)^2} = 16.1. \quad (1.4)$$

*De manera que:*

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\vec{A}}{A} = \frac{1}{A} (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \\ &= \frac{1}{16.1} (2.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 4.0\hat{k}) \\ &= 0.12\hat{i} + 0.25\hat{j} + 0.25\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

### Caso bidimensional

Un vector en dos dimensiones se puede interpretar como el caso especial del vector descrito por la expresión (1.1), cuando una de sus componentes es cero. Para el caso en el cual  $A_z = 0$ , el paralelepípedo descrito en la figura 1.2 se convierte en un rectángulo, representado en la figura 1.3, cuyos lados representan las componentes del vector sobre los ejes  $x$  y  $y$ .

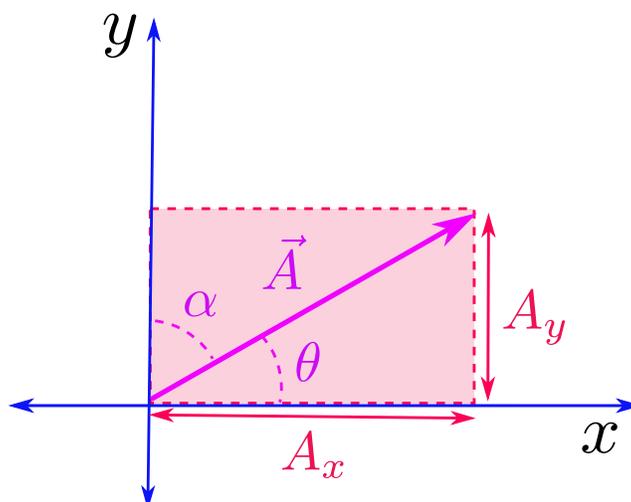


Figura 1.3: Vector en dos dimensiones.

En dos dimensiones un vector  $\vec{A}$  en función de sus componentes cartesianas, se escribe como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}. \quad (1.6)$$

Gráficamente, el vector corta en dos el rectángulo formado por las componentes  $A_x$  y  $A_y$  y por ello su magnitud también representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados  $A_x$  y  $A_y$ . Geométricamente se pueden construir dos triángulos rectángulos al cortar un rectángulo por una línea que cruce dos de sus vértices opuestos. En el caso de estudio, la figura 1.3 muestra los triángulos en mención (de lados  $A_x$  y  $A_y$ ) cuya hipotenusa representa la magnitud del vector  $\vec{A}$ .

Utilizando trigonometría básica, se sabe que en un triángulo rectángulo, el cateto opuesto ( $A_y$ ) a un ángulo ( $\theta$ ) es igual a la hipotenusa ( $|\vec{A}|$ ) multiplicada por el seno del ángulo, y el cateto adyacente ( $A_x$ ) a dicho ángulo se obtiene al multiplicar la hipotenusa por el coseno del ángulo. Además, en ese caso la tangente del ángulo ( $\theta$ ) corresponde al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Teniendo en cuenta lo anterior, a partir de la figura 1.3 asociada al vector  $\vec{A}$ , se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$A_x = A \cos(\theta), \quad (1.7)$$

$$A_y = A \sin(\theta), \quad (1.8)$$

y adicionalmente se tiene que:

$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x}. \quad (1.9)$$

De forma análoga, se pueden determinar relaciones entre los lados del triángulo y sus ángulos utilizando el ángulo ( $\alpha$ ) esquematizado en la figura 1.3, tal que:

$$A_x = A \sin(\alpha), \quad (1.10)$$

$$A_y = A \cos(\alpha), \quad (1.11)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{A_x}{A_y}. \quad (1.12)$$

En las expresiones anteriores,  $\alpha$  corresponde al ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  respecto al semieje  $y$  positivo y  $\theta$  se identifica como el ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  respecto al semieje  $x$  positivo. Cualquiera de los dos ángulos  $\alpha$  o  $\theta$  sirven para identificar la dirección del vector  $\vec{A}$  (además  $\alpha + \theta = \pi/2$ ), siempre y cuando se especifique no solo el valor del ángulo sino también el eje respecto al cual se debe medir. Lo usual, por convención, es dar el ángulo que forma el vector en estudio (en este caso el vector que se ha denominado  $\vec{A}$ ) con respecto al semieje positivo  $x$ , donde un ángulo positivo se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj y un ángulo negativo en dirección de las manecillas del reloj. Por lo tanto, si se da un ángulo para un vector en dos dimensiones sin especificar respecto a que eje se mide, se asume que el eje de referencia es el semieje  $x$  positivo.

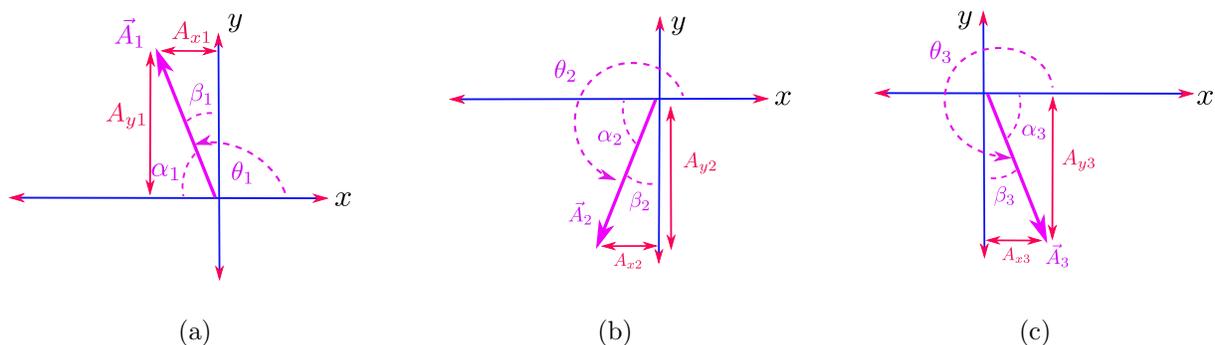


Figura 1.4: Vectores en coordenadas polares.

La figura 1.4 muestra tres vectores  $\vec{A}_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) esquematizados en un plano cartesiano en dos dimensiones, allí para cada vector se muestran tres posibles ángulos para definir su correspondiente dirección ( $\theta_i, \alpha_i, \beta_i$ ), donde el ángulo  $\theta_i$  es el ángulo definido por convención (es decir, el medido desde el semieje  $x$  positivo). En la tabla 1.1 se escribe matemáticamente los vectores esquematizados en la figura 1.4 y las relaciones entre las componentes cartesianas ( $A_{xi}, A_{yi}$ ) con los ángulos  $\theta_i$  (ángulo usado por convención). En el caso de utilizar el ángulo por convención  $\theta$ , la representación de un vector en dos dimensiones (asumiendo un plano  $xy$ ) siempre será:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = A \cos \theta \hat{i} + A \sin \theta \hat{j}. \quad (1.13)$$

Vector $\vec{A}_i$	Componentes $\theta_i$
$\vec{A}_1 = A_{x1} \hat{i} + A_{y1} \hat{j}$	$A_{x1} = A_1 \cos(\theta_1)$ $A_{y1} = A_1 \sin(\theta_1)$
$\vec{A}_2 = A_{x2} \hat{i} + A_{y2} \hat{j}$	$A_{x2} = A_2 \cos(\theta_2)$ $A_{y2} = A_2 \sin(\theta_2)$
$\vec{A}_3 = A_{x3} \hat{i} + A_{y3} \hat{j}$	$A_{x3} = A_3 \cos(\theta_3)$ $A_{y3} = A_3 \sin(\theta_3)$

Tabla 1.1: Componentes cartesianas en términos de los ángulos  $\theta_i$  de los vectores representados en la figura 1.4.

En este caso, el sentido positivo o negativo respecto a los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}$ , es determinado por el signo que tomen las funciones seno y coseno para un ángulo  $\theta$  dado. Si se usa un ángulo diferente al de convención, el signo se debe ajustar a mano.

En la tabla 1.2 se escriben matemáticamente nuevamente los vectores esquematizados en la figura 1.4 relacionan las componentes cartesianas  $(A_{xi}, A_{yi})$  con los ángulos  $\beta_i$  y  $\alpha_i$ . Como se observa en la primera columna de la tabla 1.2, al usar los ángulos  $\beta_i$  y  $\alpha_i$ , los signos que definen la orientación de los vectores, se ha puesto a mano a partir de lo que se observa en la figura 1.4.

Vector $\vec{A}_i$	Componentes $\beta_i$	Componentes $\alpha_i$
$\vec{A}_1 = -A_{x1}\hat{i} + A_{y1}\hat{j}$	$A_{x1} = A_1 \text{sen}(\beta_1)$ $A_{y1} = A_1 \text{cos}(\beta_1)$	$A_{x1} = A_1 \text{cos}(\alpha_1)$ $A_{y1} = A_1 \text{sen}(\alpha_1)$
$\vec{A}_2 = -A_{x2}\hat{i} - A_{y2}\hat{j}$	$A_{x2} = A_2 \text{sen}(\beta_2)$ $A_{y2} = A_2 \text{cos}(\beta_2)$	$A_{x2} = A_2 \text{cos}(\alpha_2)$ $A_{y2} = A_2 \text{sen}(\alpha_2)$
$\vec{A}_3 = A_{x3}\hat{i} - A_{y3}\hat{j}$	$A_{x3} = A_3 \text{sen}(\beta_3)$ $A_{y3} = A_3 \text{cos}(\beta_3)$	$A_{x3} = A_3 \text{cos}(\alpha_3)$ $A_{y3} = A_3 \text{sen}(\alpha_3)$

Tabla 1.2: Componentes cartesianas en términos de los ángulos  $\beta_i$  y  $\alpha_i$  de los vectores representados en la figura 1.4.

## Coordenadas polares

En dos dimensiones la magnitud de un vector  $\vec{A}$  y su ángulo  $\theta$  (medido respecto al semieje  $x$  positivo) representan las coordenadas polares del vector y se relacionan con las coordenadas  $(A_x, A_y)$ , denominadas componentes cartesianas, a través de las expresiones:

$$A_x = A \cos(\theta), \quad (1.14)$$

$$A_y = A \text{sen}(\theta), \quad (1.15)$$

donde  $A$  representa la magnitud del vector  $\vec{A}$ . De manera similar, las transformaciones inversas (de cartesianas a polares), vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.16)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right). \quad (1.17)$$

Como ya se había mencionado, las relaciones (1.14) y (1.16), provienen de las propiedades geométricas de un triángulo rectángulo, donde la magnitud del vector  $\vec{A}$  se asocia a la hipotenusa de dicho triángulo. La expresión para calcular el ángulo  $\theta$  (ecuación (1.17)), presenta una ambigüedad que se debe manejar con cuidado. Por ejemplo, si se tienen los siguientes vectores:

$$\vec{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}, \quad \vec{B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}, \quad (1.18)$$

al evaluar el ángulo  $\theta$  mediante la expresión (1.17), se tiene

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \pi/4, \quad \theta_B = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \pi/4, \quad (1.19)$$

con lo cual  $\theta_A = \theta_B$ . Sin embargo, los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no están orientados en la misma dirección. En este caso, el ángulo  $\theta_A$  se utiliza por convención para definir la dirección correcta del vector  $\vec{A}$ . Por otro lado, el ángulo  $\theta_B$  es el ángulo medido entre el semieje  $x$  negativo y el vector  $\vec{B}$ . Para evaluar el ángulo convencional del vector  $\vec{B}$ , se calcula como  $\theta_{Bc} = \theta_B + \pi$ , donde  $\theta_{Bc}$  es el ángulo medido respecto al semieje  $x$  positivo. No siempre es necesario encontrar el ángulo respecto al semieje positivo  $x$ ; basta con especificar a qué semieje se refiere el ángulo utilizado para definir la orientación de un vector.

**Ejemplo 1.2.** Se tiene los vectores  $\vec{A}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) representados en coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= -2\hat{i} - 3\hat{j}, & \vec{A}_2 &= 2\hat{i} + 4\hat{j}, \\ \vec{A}_3 &= 3\hat{i} - 2\hat{j}, & \vec{A}_4 &= -3\hat{i} + 2\hat{j}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Para los vectores propuestos, en este ejemplo se calculará las componentes polares de cada uno de los vectores.

**Solución:** Gráficamente los vectores  $\vec{A}_i$  se muestran en las figuras 1.5, donde se indica también el ángulo polar  $\theta_i$  para cada vector. Al aplicar las relaciones (1.14) y (1.16) al vector  $\vec{A}_1$ , se tiene:

$$A = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}, \quad (1.21)$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right). \quad (1.22)$$

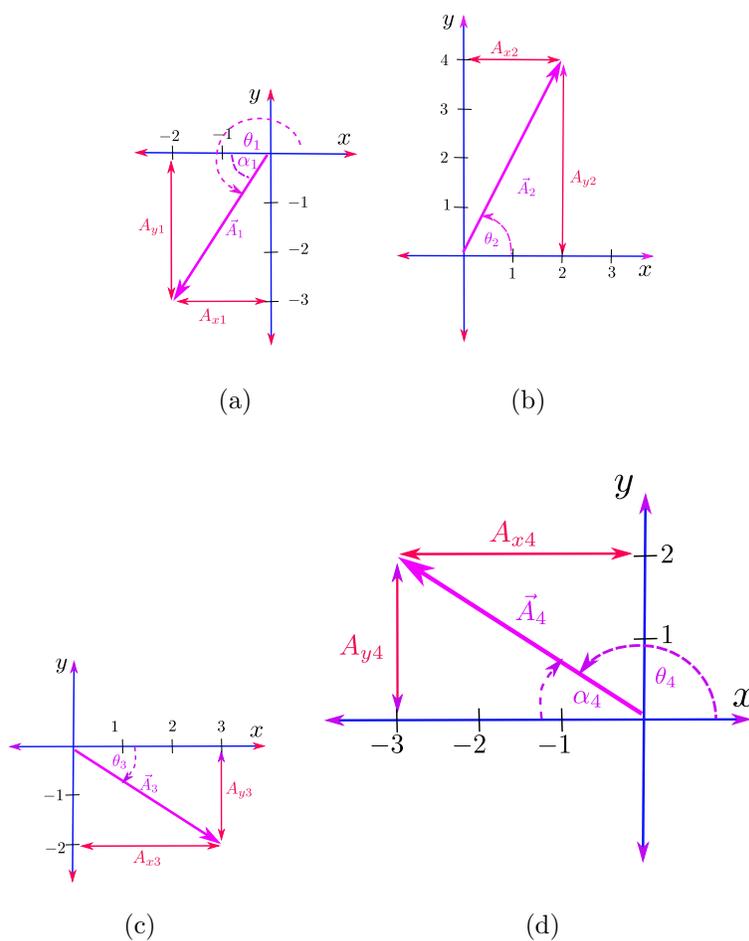


Figura 1.5: Ejemplo (1.2). Representación gráfica de cuatro vectores en un plano.

El ángulo  $\alpha_1$  gráficamente se especifica en la figura 1.5a. El ángulo entre el semieje positivo  $x$  y el vector  $A_1$ , se obtiene a partir de (ver figura 1.5a):

$$\theta_1 = \alpha_1 + \pi. \quad (1.23)$$

Realizando el mismo procedimiento para los restantes vectores, se obtienen los valores definidos en la tabla 1.3.

Vector $\vec{A}_i$	Magnitud	ángulo $\theta_i$
$\vec{A}_1 = -2\hat{i} - 3\hat{j}$	$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{25}$	$\theta_1 = \alpha_1 + \pi$ $\theta_1 = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \pi$
$\vec{A}_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$	$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$	$\theta_2 = \arctan\left(\frac{4}{2}\right)$
$\vec{A}_3 = 3\hat{i} - 2\hat{j}$	$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{25}$	$\theta_3 = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$
$\vec{A}_4 = -3\hat{i} + 2\hat{j}$	$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{25}$	$\theta_4 = \pi - \alpha_4$ $\theta_4 = \pi - \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

Tabla 1.3: Ejemplo (1.2). Magnitud y dirección de los vectores  $\vec{A}_i$ .

### 1.1.2. Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas resulta muy conveniente en situaciones y problemas que tengan simetría cilíndrica. Para determinar completamente un vector en tres dimensiones en coordenadas cilíndricas, se necesitan tres valores, que se definen por:

1. La coordenada  $A_z$ , ya introducida en coordenadas cartesianas.
2. La magnitud de la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el plano  $x, y$ , que se denominará como  $A_\rho$ . Matemáticamente dicha magnitud se determina a partir de:

$$A_\rho = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (1.24)$$

3. El ángulo  $\theta$  medido en el plano  $xy$  desde el eje  $x$  positivo, hacia la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el plano  $xy$ , que se expresa como:

$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x}. \quad (1.25)$$

Las coordenadas cilíndricas en el plano  $xy$  son equivalentes a las coordenadas polares en dos dimensiones. Así que se puede visualizar a las coordenadas cilíndricas, como las coordenadas polares de un vector más su componente  $A_z$ . Para un vector  $\vec{A}$  las coordenadas cilíndricas se muestran gráficamente en la figura 1.6.

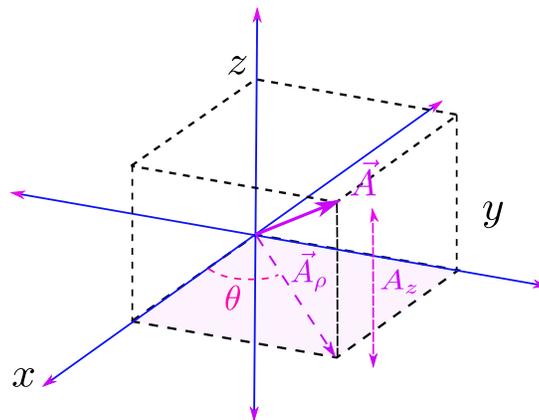


Figura 1.6: Vector en coordenadas cilíndricas.

### 1.1.3. Coordenadas esféricas

Para describir cualquier vector en coordenadas esféricas se necesita especificar la magnitud del vector y su dirección a partir de dos ángulos, los cuales en términos de las componentes cartesianas del vector, son:

1. La magnitud del vector  $\vec{A}$ , que matemáticamente viene dada por:

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.26)$$

2. El ángulo  $\phi$ , el cual corresponde al ángulo que forma la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el plano  $xy$ . Matemáticamente en términos de las coordenadas cartesianas, viene dado por:

$$\tan(\phi) = \frac{A_y}{A_x}. \quad (1.27)$$

El ángulo  $\phi$  es equivalente al ángulo  $\theta$  definido en coordenadas polares o cilíndricas, pero se utiliza otra notación ya que en general en coordenadas esféricas se utiliza el símbolo  $\theta$  para definir una segunda variable angular, como se explica en el siguiente ítem.

3. El ángulo  $\theta$ , representa el ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  respecto al eje  $z$  positivo. Matemáticamente, se relaciona con las componentes cartesianas a través de :

$$\cos(\theta) = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}. \quad (1.28)$$

Gráficamente la figura 1.7, muestra las coordenadas esféricas para un vector  $\vec{A}$ .

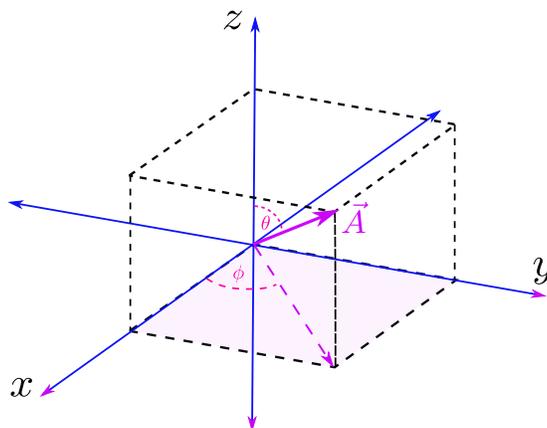


Figura 1.7: Vector en coordenadas esféricas.

## 1.2. Operaciones con vectores

En esta sección se presentan las generalidades de las operaciones que se pueden realizar entre vectores, en particular se discute cómo realizar: la multiplicación de un vector por un escalar, la suma, resta, producto punto y producto cruz.

### 1.2.1. Multiplicación de un vector por un escalar

Una cantidad escalar es aquella que se especifica por completo mediante un valor único (carece de coordenadas que especifiquen dirección), y puede ser un valor real ( $\mathbb{R}$ ) o un número complejo ( $\mathbb{C}$ )<sup>1</sup>. Si se realiza el producto de un escalar  $\alpha$  por un vector  $\vec{A}$ , el resultado es un vector y dicha operación es lineal, tal que:

$$\alpha\vec{A} = \text{vector}, \quad (1.29)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}. \quad (1.30)$$

### 1.2.2. Suma de vectores

La suma de dos vectores resulta en otro vector y es una operación que obedece las propiedades de conmutación y asociación de la suma, es decir:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad (1.31)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}). \quad (1.32)$$

#### Método analítico

Analíticamente la suma de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , que en coordenadas cartesianas se representan como:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \quad (1.33)$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}, \quad (1.34)$$

viene dada por:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

<sup>1</sup> El conjunto de números reales está contenido dentro del conjunto de números complejos; es decir  $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$

El equivalente de (1.35) en dos dimensiones es:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}. \quad (1.36)$$

Ahora, si la suma implica  $N$  vectores identificados como  $\vec{A}_l$ , donde  $l = 1, \dots, N$ , tal que:

$$\vec{A}_l = A_{xl} \hat{i} + A_{yl} \hat{j} + A_{zl} \hat{k}, \quad (1.37)$$

entonces la generalización de la ecuación (1.35) es:

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_N &= (A_{x1} + A_{x2} + \dots + A_{xN}) \hat{i} \\ &\quad + (A_{y1} + A_{y2} + \dots + A_{yN}) \hat{j} \\ &\quad + (A_{z1} + A_{z2} + \dots + A_{zN}) \hat{k} \\ &= \left( \sum_{l=1}^N A_{xl} \right) \hat{i} + \left( \sum_{l=1}^N A_{yl} \right) \hat{j} + \left( \sum_{l=1}^N A_{zl} \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Como la suma de vectores es un vector, el vector suma que denominaremos  $\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{A}_i$ , tendrá una componente  $S_x$  en dirección  $\hat{i}$ , una componente  $S_y$  en dirección  $\hat{j}$  y una componente  $S_z$  en dirección  $\hat{k}$ , que teniendo en cuenta (1.38), vendrán dadas por:

$$S_x = \sum_{l=1}^N A_{xl}, \quad (1.39)$$

$$S_y = \sum_{l=1}^N A_{yl}, \quad (1.40)$$

$$S_z = \sum_{l=1}^N A_{zl}, \quad (1.41)$$

tal que

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{A}_i = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}. \quad (1.42)$$

**Ejemplo 1.3.** Si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  vienen dados por:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, \quad (1.43)$$

$$\vec{B} = -5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}, \quad (1.44)$$

Encontrar el vector  $\vec{S} = (3\vec{A} + 2\vec{B})$ .

**Solución:** En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{S} &= 3\vec{A} + 2\vec{B} = 3(3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + 2(-5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \\
 &= (9\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}) + (-10\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}) \\
 &= (9 - 10)\hat{i} + (-6 - 6)\hat{j} + (12 + 4)\hat{k} \\
 &= -1\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k}.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Por lo tanto, las componentes cartesianas del vector  $\vec{S}$  son:

$$S_x = -1, \tag{1.46}$$

$$S_y = -12, \tag{1.47}$$

$$S_z = 16. \tag{1.48}$$

**Ejemplo 1.4.** Dos fuerzas  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_B$ , que se encuentran en el plano  $xy$ , se aplican sobre un pequeño objeto que se encuentra localizado en el origen de un sistema coordenado. La magnitud de la fuerza  $\vec{F}_A$  es de 50.0 N y se aplica formando un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$  positivo. La fuerza  $\vec{F}_B$  tiene una magnitud de 80.0 N y forma un ángulo de  $135^\circ$  con el eje  $x$  positivo. Una tercera fuerza  $\vec{C}$  se aplica sobre el cuerpo de manera que la fuerza resultante sobre el objeto se anula. Para el sistema planteado, se determinará la magnitud y dirección de la tercera fuerza. La representación gráfica de estos vectores se muestra en la figura 1.8.

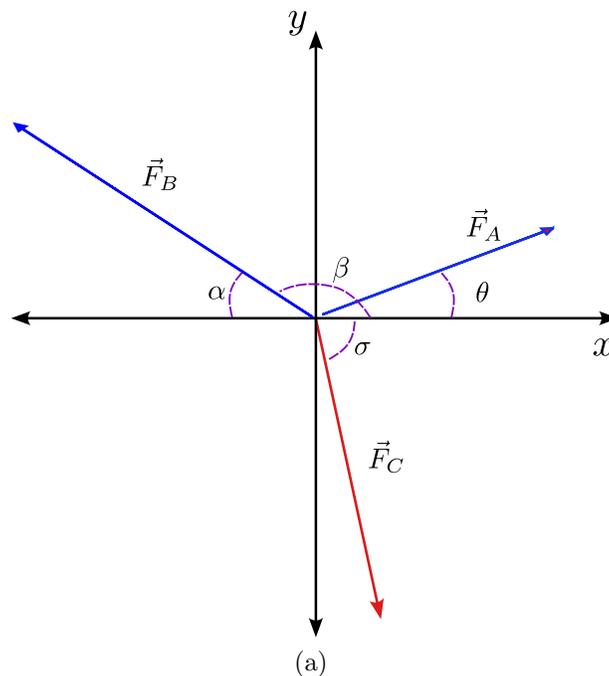


Figura 1.8: Ejemplo (1.4). Se representa tres vectores cuya suma es igual a cero

**Solución:** De acuerdo a la figura 1.8, el vector  $\vec{F}_A$  se puede representar analíticamente en la forma:

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\hat{i} + F_{Ay}\hat{j}, \quad (1.49)$$

donde:

$$F_{Ax} = F_A \cos \theta = 50.0 \cos 30 \text{ N}, \quad (1.50)$$

$$F_{Ay} = F_A \sin \theta = 50.0 \sin 30 \text{ N}, \quad (1.51)$$

con lo cual,

$$\vec{F}_A = 50.0 \text{ N} \cos 30 \hat{i} + 50.0 \text{ N} \sin 30 \hat{j} = 50.0 \left( \cos 30 \hat{i} + \sin 30 \hat{j} \right) \text{ N}. \quad (1.52)$$

Ahora, el vector  $\vec{F}_B$  se puede expresar como:

$$\vec{F}_B = -F_{Bx}\hat{i} + F_{By}\hat{j}, \quad (1.53)$$

siendo,

$$F_{Bx} = F_B \cos \alpha = 80.0 \text{ N} \cos (180 - 135) = 80.0 \cos 45 \text{ N}, \quad (1.54)$$

$$F_{By} = F_B \sin \alpha = 80.0 \text{ N} \sin (180 - 135) = 80.0 \sin 45 \text{ N}. \quad (1.55)$$

A partir de lo anterior, se tiene que,

$$\vec{F}_B = -80.0 \text{ N} \cos 45 \hat{i} + 80.0 \text{ N} \sin 45 \hat{j} = 80.0 \left( -\cos 45 \hat{i} + \sin 45 \hat{j} \right) \text{ N}. \quad (1.56)$$

La tercera fuerza  $\vec{F}_C$  de magnitud y orientación no especificados, se puede representar como:

$$\vec{F}_C = F_{Cx}\hat{i} + F_{Cy}\hat{j}. \quad (1.57)$$

Siendo que la fuerza resultante, es decir, la suma vectorial de las tres fuerzas debe anularse; se debe cumplir que:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}. \quad (1.58)$$

El vector nulo ( $\vec{0}$ ) se representa como:

$$\vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j}, \quad (1.59)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= 0\hat{i} + 0\hat{j} \\ &= \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C \\ &= 50.0 \left( \cos 30 \hat{i} + \sin 30 \hat{j} \right) \text{ N} + 80.0 \left( -\cos 45 \hat{i} + \sin 45 \hat{j} \right) \text{ N} + C_x \hat{i} + C_y \hat{j} \\ &= (50.0 \text{ N} \cos 30 - 80.0 \text{ N} \cos 45 + C_x) \hat{i} + (50.0 \text{ N} \sin 30 + 80.0 \text{ N} \sin 45 + C_y) \hat{j}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

con lo cual:

$$50.0 \text{ N} \cos 30 - 80.0 \text{ N} \cos 45 + F_{Cx} = 0, \quad (1.61)$$

$$50.0 \text{ N} \sin 30 + 80.0 \text{ N} \sin 45 + F_{Cy} = 0. \quad (1.62)$$

Finalmente se tiene,

$$F_{Cx} = (80.0 \cos 45 - 50.0 \cos 30) \text{ N} \approx 13.3 \text{ N}, \quad (1.63)$$

$$F_{Cy} = -(80.0 \sin 45 + 50.0 \sin 30) \text{ N} \approx -81.6 \text{ N}. \quad (1.64)$$

De manera que el vector  $\vec{F}_C$  corresponde al vector

$$\vec{F}_C = 13.3 \text{ N} \hat{i} - 81.6 \text{ N} \hat{j} = (13.3 \hat{i} - 81.6 \hat{j}) \text{ N}. \quad (1.65)$$

Este vector se muestra en la figura 1.8. Ahora, el ángulo  $\sigma$  que determina la dirección de esta fuerza, se determina a partir de:

$$\tan \sigma = \frac{81.6}{13.3}, \quad (1.66)$$

con lo cual,

$$\sigma = \arctan \frac{81.6}{13.3} \approx 80.7^\circ. \quad (1.67)$$

**Ejercicio 1.1.** Tres fuerzas  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$ , actúan sobre un objeto. La magnitud de la fuerza  $\vec{F}_A$  es de 35.0 N y actúa en la dirección de  $40^\circ$  al norte del este. La magnitud de la fuerza  $\vec{F}_B$  es de 62.0 N y se ejerce en la dirección norte. La fuerza  $\vec{F}_C$  de 35.0 N actúa al sureste. Para la situación planteada se calcule: a) La magnitud y dirección de la fuerza resultante  $\vec{F}_R$  y, b) las componentes  $x$  y  $y$  de  $\vec{F}_R$ .

## Método gráfico

Una manera de sumar gráficamente dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y obtener el vector suma  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ , consiste en colocar el vector  $\vec{B}$  a continuación del vector  $\vec{A}$ , manteniendo la dirección de ambos vectores. Así el extremo de uno coincidirá con el origen del otro. El vector suma  $\vec{S}$  será aquel que va desde el inicio del vector  $\vec{A}$  hasta el extremo final del vector  $\vec{B}$ , como se observa en la figura 1.9. Ya que la suma es conmutativa,  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ . El proceso gráfico descrito anteriormente para encontrar el vector suma se puede realizar a la inversa; es decir, al vector  $\vec{B}$  se le suma el vector  $\vec{A}$ , por tanto el extremo del vector  $\vec{B}$  será el origen del vector  $\vec{A}$ , de tal manera que el vector  $\vec{S}$  irá desde el inicio del vector  $\vec{B}$  al final del vector  $\vec{A}$ . El proceso descrito anteriormente se denomina como “método del triángulo”, dado que la combinación de los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y el vector  $\vec{S}$  forman un triángulo; sin embargo, se debe entender que la ubicación de los tres vectores en el triángulo, debe respetar la regla de suma gráfica descrita anteriormente (la ubicación de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no es aleatoria).

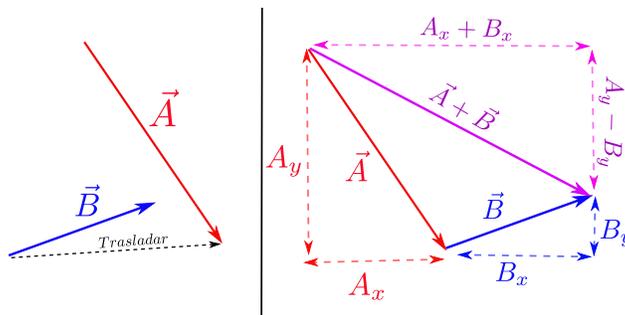


Figura 1.9: Suma de vectores.

El método descrito anteriormente para sumar gráficamente más de dos vectores se denomina “método del polígono”, el cual consiste en unir gráficamente los  $N$  vectores, respetando la idea que el extremo final de un vector corresponde al origen del próximo vector que aparezca en la suma, formando así una cadena. El vector suma corresponderá al vector trazado desde el inicio del primer vector (el primer “eslabón” de la cadena), al final del último vector (último “eslabón” de la cadena), tal como se indica en la figura 1.10, donde se indica gráficamente la suma de cinco vectores. Ya que la suma es conmutativa, el orden en el cual se unan los vectores es aleatorio (siempre que el inicio de un vector coincida con el final de otro). El vector suma para los cinco vectores descritos en la figura 1.10, es:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}. \quad (1.68)$$

En la gráfica, intencionalmente el proceso de suma se realiza sin respetar el orden en el cual cada vector aparece en la suma asociada a  $\vec{S}$ .

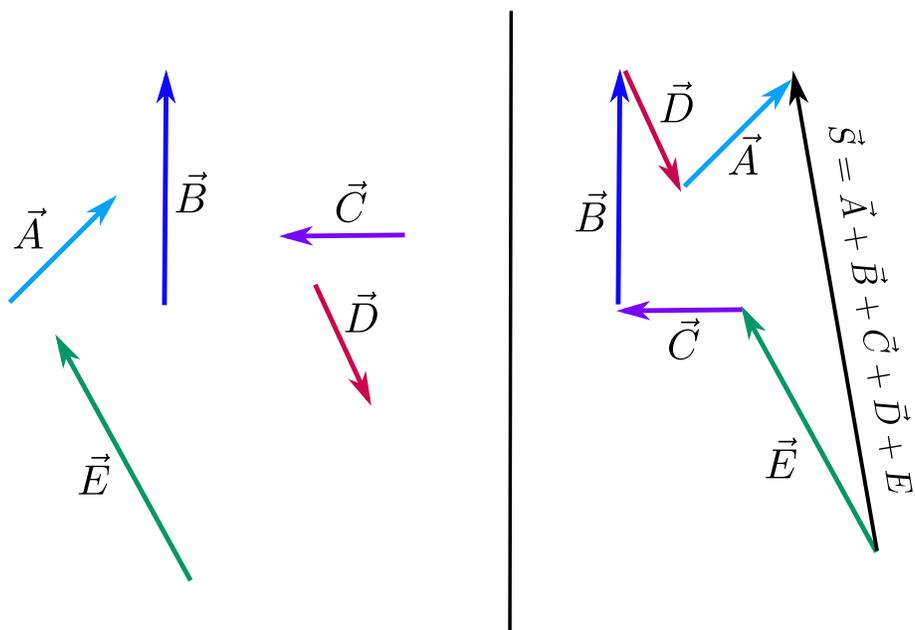


Figura 1.10: Método del polígono.

Una forma alternativa de sumar gráficamente dos vectores, y que en la literatura se conoce como el “método del paralelogramo”, consiste como su nombre lo indica, en construir un

paralelogramo a partir de los dos vectores que se desea sumar. Para construir el paralelogramo se ubica el origen de cada uno en un punto común (es decir, se unen por sus “colas”) y se forma el paralelogramo trasladando una copia de cada vector para formar los lados opuestos necesarios para completar los cuatro lados del paralelogramo en mención. El vector suma, corresponderá al vector que va desde el punto común que coincide con el origen de cada vector y que finaliza en el vértice opuesto del paralelogramo construido. La figura 1.11, muestra la suma de dos vectores por el método del paralelogramo.

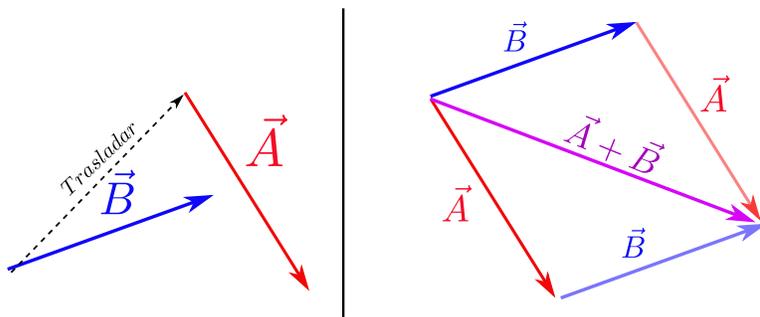


Figura 1.11: Método del paralelogramo.

**Ejemplo 1.5.** Un vector  $\vec{A}$  tiene una magnitud de 10.0 cm y está dirigido en la dirección de  $x$  positivo. Otro vector  $\vec{B}$  de magnitud 7.0 cm forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . Un tercer vector  $\vec{C}$  posee magnitud de 16.0 cm y forma un ángulo de  $70^\circ$  con el eje  $x$ . Para la configuración de vectores descrita, se mostrará gráficamente el vector suma utilizando el método del paralelogramo, y se encontrará sus componentes cartesianas analíticamente.

**Solución:** Para analizar gráficamente el proceso de suma de los vectores correspondiente, se dibujará en primer lugar cada uno de ellos en un plano cartesiano dos dimensional, que se indican en la figura 1.12a. La representación gráfica de la suma de los tres vectores en consideración, con el respectivo vector suma  $\vec{S}$ , se indica en la figura 1.12b.

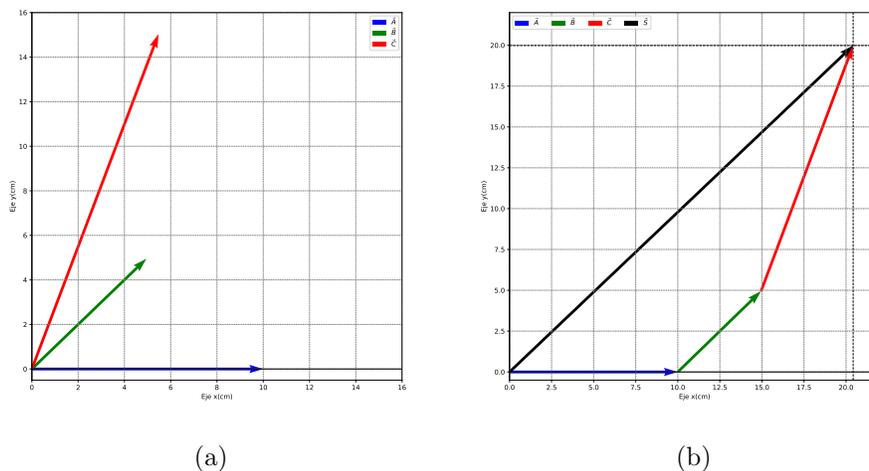


Figura 1.12: Ejemplo (1.5). Suma de vectores en representación gráfica.

Para encontrar el vector suma analíticamente, se determinará en primer lugar las componentes cartesianas de cada uno. Para el vector  $\vec{A}$  las componentes son:

$$A_x = 10.0 \text{ cm}, \quad A_y = 0 \text{ cm}, \quad (1.69)$$

de manera que,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} = 10.0 \hat{i} \text{ cm}. \quad (1.70)$$

Ahora, el vector  $\vec{B}$  se debe expresar como:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}, \quad (1.71)$$

siendo,

$$B_x = B \cos \alpha = 7.00 \text{ cm} \cos 45 = 7.00 (0.707) \text{ cm} = 4.95 \text{ cm}, \quad (1.72)$$

$$B_y = B \sin \alpha = 7.00 \text{ cm} \sin 45 = 7.00 (0.707) \text{ cm} = 4.95 \text{ cm}, \quad (1.73)$$

de manera que,

$$\vec{B} = (4.95 \hat{i} + 4.95 \hat{j}) \text{ cm}. \quad (1.74)$$

Finalmente, el vector  $\vec{C}$  se expresa como:

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}. \quad (1.75)$$

con

$$C_x = C \cos \beta = 16.0 \text{ cm} \cos 70 = 16.0 (0.342) \text{ cm} = 5.47 \text{ cm}, \quad (1.76)$$

$$C_y = C \sin \beta = 16.0 \text{ cm} \sin 70 = 16.0 (0.940) \text{ cm} = 15.0 \text{ cm}, \quad (1.77)$$

con lo cual:

$$\vec{C} = (5.47 \hat{i} + 15.0 \hat{j}) \text{ cm}. \quad (1.78)$$

Así, la resultante es:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \\ &= 10.0 \hat{i} \text{ cm} + (4.95 \hat{i} + 4.95 \hat{j}) \text{ cm} + (5.47 \hat{i} + 15.0 \hat{j}) \text{ cm} \\ &= (10.0 + 4.95 + 5.47) \hat{i} \text{ cm} + (4.95 + 15.0) \hat{j} \text{ cm} \\ &= 20.4 \hat{i} \text{ cm} + 20.0 \hat{j} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

**Ejercicio 1.2.** Determinar la magnitud y dirección del vector resultante del ejemplo (1.5).

**Ejercicio 1.3.** Un barco establece un rumbo de  $45^\circ$  durante dos horas logrando un desplazamiento de 36.0 km. Posteriormente, cambia la ruta a  $135^\circ$  por cuatro horas hasta recorrer una distancia de 48.0 km. Los ángulos se miden siempre respecto al mismo eje. Determine analíticamente y gráficamente el desplazamiento total.

**Ejercicio 1.4.** *Un barco avanza hacia el norte y recorre una distancia de 70.0 km. Posteriormente cambia su rumbo manteniendo una dirección constante hasta alcanzar su ubicación final. Al final del recorrido, la ubicación del bote se encuentra a una distancia de 55.0 km en relación a su punto de partida y el vector de posición forma  $30^\circ$  respecto al semieje positivo del eje  $x$ . Determinar el desplazamiento y el rumbo del segundo recorrido del barco.*

**Ejercicio 1.5.** *Un domiciliario debe realizar un recorrido de cuatro cuadras hacia el norte y posteriormente cinco cuadras hacia el oeste para entregar una pizza. Encontrar el desplazamiento realizado (vectorialmente), la dirección del mismo y la distancia recorrida.*

**Ejercicio 1.6.** *Un golfista aficionado realiza tres golpes para alcanzar el hoyo. Los desplazamientos de la pelota son: 7.00 m hacia el norte, 3.00 m hacia el noreste ( $45^\circ$  respecto al semieje positivo del eje  $x$ ) y 1.50 m hacia el suroeste ( $-45^\circ$  medido respecto al semieje positivo del eje  $x$ ). Partiendo del mismo punto inicial, un golfista profesional logra llegar al hoyo en un solo golpe. Determinar la magnitud del desplazamiento que realizaría la pelota y la dirección asociada a dicho desplazamiento.*

### 1.2.3. Resta de vectores

Restar dos vectores  $\vec{A} - \vec{B}$ , se puede interpretar como la suma del vector  $\vec{A}$  más el vector  $(-\vec{B})$ , es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (1.80)$$

El vector  $(-\vec{B})$  representa un vector de igual magnitud que el vector  $\vec{B}$ , pero orientado en sentido contrario a  $\vec{B}$ , de manera que si:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}, \quad (1.81)$$

entonces,

$$-\vec{B} = -B_x \hat{i} - B_y \hat{j} - B_z \hat{k}. \quad (1.82)$$

Se debe precisar que la operación resta no es conmutativa en el sentido que:

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}, \quad (1.83)$$

pero si es conmutativa si se entiende como una suma, tal que:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = -\vec{B} + \vec{A}. \quad (1.84)$$

**Ejemplo 1.6.** Se tiene los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en dos dimensiones dados por:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}, \quad (1.85)$$

$$\vec{B} = -5\hat{i} + 2\hat{j}. \quad (1.86)$$

Determinar el vector resta  $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ .

**Solución:** La resta  $\vec{A} - \vec{B}$  corresponde a:

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= \vec{A} + (-\vec{B}) \\ &= (3\hat{i} + 4\hat{j}) + (-(-5\hat{i} + 2\hat{j})) \\ &= (3\hat{i} + 4\hat{j}) + (5\hat{i} - 2\hat{j}) \\ &= (3 + 5)\hat{i} + (4 - 2)\hat{j} \\ &= 8\hat{i} + 2\hat{j}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

La figura 1.13, muestra gráficamente el vector resultante  $\vec{A} - \vec{B}$ , interpretado como  $\vec{A} + (-\vec{B})$ .

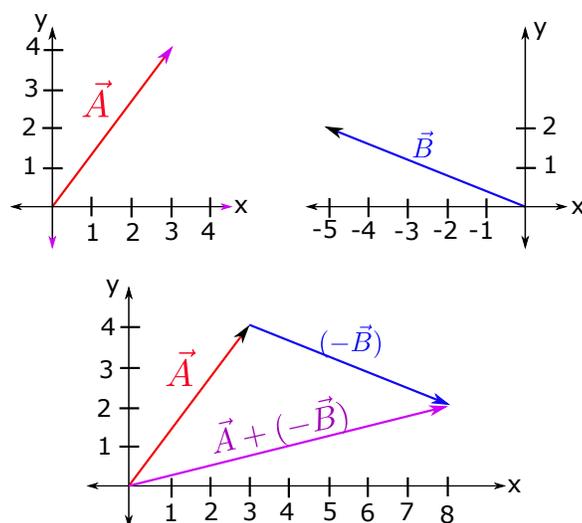


Figura 1.13: Resta de vectores  $\vec{A} + (-\vec{B})$ .

**Ejemplo 1.7.** Un automóvil recorre 45.0 km hacia el norte y luego 25.0 km en una dirección de  $30^\circ$  al norte del este. Para el móvil planteado, se determinará la magnitud y dirección del vector que representa el desplazamiento total del automóvil.

**Solución:** En la figura 1.14 se muestra gráficamente los correspondientes desplazamientos y el vector resultante derivado por el método gráfico del triángulo.

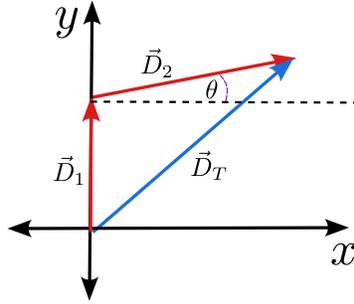


Figura 1.14: Ejemplo (1.7). Desplazamientos parciales y total para la situación descrita en el enunciado del ejemplo (1.7).

Con el fin de obtener analíticamente el desplazamiento se aplica el método gráfico del paralelogramo, el cual se muestra en la figura 1.15.

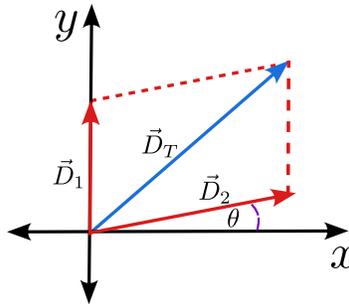


Figura 1.15: Ejemplo (1.7). Desplazamiento total aplicando el método del paralelogramo.

Según la figura 1.15 se tiene que:

$$\vec{D}_1 = D_{1,y}\hat{j} = 45.0\hat{j} \text{ km.} \quad (1.88)$$

En el caso del segundo desplazamiento el vector  $\vec{D}_2$  se expresa como:

$$\vec{D}_2 = D_{2,x}\hat{i} + D_{2,y}\hat{j}, \quad (1.89)$$

donde

$$D_{2,x} = 25.0 \text{ km} \cos 30 = 25.0 (0.866) \text{ km} = 21.6 \text{ km}, \quad (1.90)$$

$$D_{2,y} = 25.0 \text{ km} \sin 30 = 25.0 (0.500) \text{ km} = 12.5 \text{ km}, \quad (1.91)$$

por tanto,

$$\vec{D}_2 = 21.6 \text{ km}\hat{i} + 12.5 \text{ km}\hat{j} = (21.6\hat{i} + 12.5\hat{j}) \text{ km.} \quad (1.92)$$

Entonces, el desplazamiento total es:

$$\begin{aligned} \vec{D}_T &= \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \\ &= 45.0\hat{j} \text{ km} + (21.6\hat{i} + 12.5\hat{j}) \text{ km} \\ &= 21.6\hat{i} \text{ km} + (45.0 + 12.5)\hat{j} \text{ km} \\ &= (21.6\hat{i} + 57.5\hat{j}) \text{ km.} \end{aligned} \quad (1.93)$$

La magnitud del desplazamiento total es:

$$D_T = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(21.6 \text{ km})^2 + (57.5 \text{ km})^2} = 61.4 \text{ km}. \quad (1.94)$$

En tanto que la dirección resulta:

$$\tan \theta = \frac{21.6 \text{ km}}{57.5 \text{ km}} = \frac{21.6}{57.5}, \quad (1.95)$$

con lo cual,

$$\theta = \arctan\left(\frac{21.6}{57.5}\right) = 20.6^\circ. \quad (1.96)$$

**Ejercicio 1.7.** Considere cuatro vectores dados por:  $\vec{A} = 2.5\hat{i} + 3.5\hat{j}$ ,  $\vec{B} = 1.0\hat{i} + 4.5\hat{j} + 2.5\hat{k}$ ,  $\vec{C} = 1.5\hat{i} + 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$  y  $\vec{D} = 3.0\hat{j} + 1.5\hat{k}$ . a) Calcular el vector  $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ . b) calcular el vector  $\vec{F} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$ . c) Obtener la magnitud de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{F}$ .

**Ejercicio 1.8.** Suponga que  $\vec{A} = 5.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 1.0\hat{k}$  y  $\vec{B} = 2.0\hat{i} + 1.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ . a) Calcular:  $\vec{A} + \vec{B}$ ;  $\vec{A} - \vec{B}$ ;  $2\vec{A} + 3\vec{B}$ . b) Obtener la magnitud de los vectores resultantes del punto a).

**Ejercicio 1.9.** Dado los vectores  $\vec{A} = 1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$  y  $\vec{B} = 3.0\hat{i} - 4.0\hat{j}$ , determinar: a) la magnitud y dirección del vector  $-4\vec{B}$ , b) la magnitud y dirección del vector  $2\vec{A} + 3\vec{B}$ . c) Obtener la magnitud de los siguientes vectores:  $\vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{A} - \vec{B}$  y  $2\vec{A} + 3\vec{B}$ .

**Ejercicio 1.10.** Tres vectores son dados por:  $\vec{A} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ ,  $\vec{B} = 1.0\hat{i} + 5.0\hat{j}$  y  $\vec{C} = -1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ . Teniendo en cuenta que se debe satisfacer la siguiente identidad:  $\vec{C} = a_1\vec{A} + a_2\vec{B}$ , determinar los valores de  $a_1$  y  $a_2$ .

**Ejercicio 1.11.** Dado que  $\vec{A} = 6.0\hat{i} - 2.0\hat{j}$  y  $\vec{B} = -4.0\hat{i} - 3.0\hat{j} + 8.0\hat{k}$ . Encontrar un vector  $\vec{C}$  tal que:  $3\vec{A} - 2\vec{C} = 4\vec{B}$ .

**Ejercicio 1.12.** Obtener un vector  $\vec{A}$  con una magnitud de 6 unidades y que tenga la misma dirección que el vector  $\vec{B} = 3.0\hat{i} - 6.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$ .

**Ejercicio 1.13.** Considere los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  del ejercicio (1.8). Calcular los vectores unitarios correspondientes a las expresiones:  $\vec{A} + \vec{B}$ ;  $\vec{A} - \vec{B}$ ;  $2\vec{A} + 3\vec{B}$ .

## 1.2.4. Producto punto

El producto punto, producto escalar o producto interno, entre dos vectores, genera una cantidad escalar. Dados dos vectores  $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$  y  $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ , el producto punto entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1.97)$$

Una definición equivalente con interpretación geométrica para el producto punto, viene dada por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}, \quad (1.98)$$

donde  $\theta_{AB}$  identifica el ángulo formado entre el vector  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

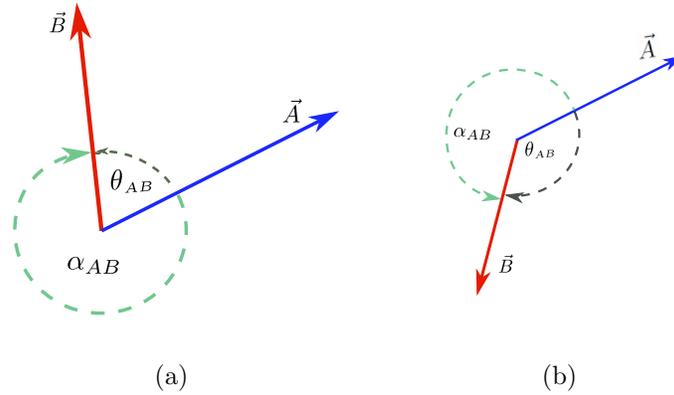


Figura 1.16: Ángulo entre dos vectores utilizados en la definición del producto punto.

En la figura 1.16 se muestran dos configuraciones distintas de un vector  $\vec{A}$  y un vector  $\vec{B}$  y el correspondiente ángulo  $\theta_{AB}$  en cada caso.

Entre las propiedades más importantes del producto punto están:

1. El producto punto es conmutativo, tal que:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ .
2. A partir de la figura 1.16, y de la propiedad:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \quad (1.99)$$

se puede establecer que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{AB} &= \cos(2\pi - \theta_{AB}) \\ &= \cos 2\pi \cos(\theta_{AB}) + \sin 2\pi \sin(\theta_{AB}) \\ &= \cos(\theta_{AB}), \end{aligned} \quad (1.100)$$

por lo tanto, los ángulos  $\theta_{AB}$  y  $\alpha_{AB}$  son equivalente en la definición del producto punto.

3. Una característica muy importante radica en que  $A \cos \theta_{AB}$  es la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el eje definido por el vector  $\vec{B}$ . De igual forma  $B \cos \theta_{AB}$  se interpreta como la proyección del vector  $\vec{B}$  sobre el eje definido por el vector  $\vec{A}$ . En la figura 1.17 se muestra las proyecciones en mención para dos direcciones distintas de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Por lo anterior, el producto punto se puede considerar como la multiplicación de la magnitud de uno de los vectores por la proyección del segundo vector sobre el primero. Si dos vectores son perpendiculares, no se puede proyectar uno sobre otro (o la proyección de un vector sobre otro es cero), por lo cual el producto punto de dos

vectores perpendiculares es cero. Lo anterior también se deduce de la definición del producto punto, ya que  $\cos \theta_{AB} = 0$ , si  $\theta_{AB} = \pi/2$ .

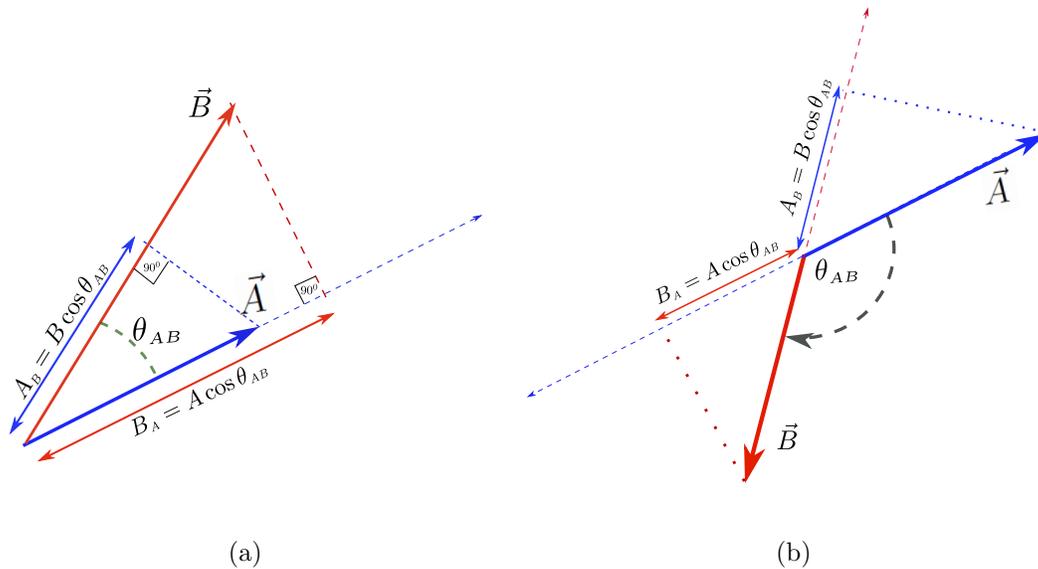


Figura 1.17: Proyecciones asociadas al producto punto.

Una aplicación del producto punto en Física, se encuentra en la definición de trabajo. Cuando se tiene una fuerza constante, el trabajo realizado por la fuerza para llevar una partícula de un punto caracterizado por el vector de posición  $\vec{r}_i$  a un punto caracterizado por el vector  $\vec{r}_f$  es igual a :

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i). \quad (1.101)$$

Se puede decir que la componente de  $\vec{F}$  que genera trabajo es la componente de la fuerza proyectada sobre el vector desplazamiento ( $\vec{r}_f - \vec{r}_i$ ). Así que la componente de  $\vec{F}$  que es perpendicular al desplazamiento no contribuye al trabajo. Por otro lado, en un movimiento circular, la fuerza centrípeta es perpendicular al desplazamiento, y por lo tanto, el trabajo realizado por dicha fuerza, siempre es cero (no existe proyección de la fuerza centrípeta sobre el vector desplazamiento).

**Ejemplo 1.8.** Para los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dados por (ver figura 1.18) :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}, \quad (1.102)$$

$$\vec{B} = -5\hat{i} + 2\hat{j}. \quad (1.103)$$

Para los vectores descritos anteriormente se encontrará el producto interno  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  y el ángulo formado entre los dos vectores.

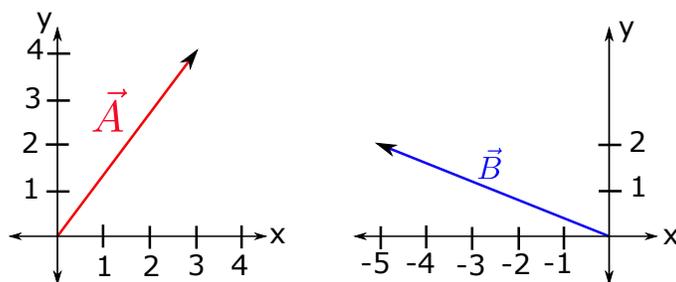


Figura 1.18: Ejemplo (1.8). Representación gráfica de los vectores descritos en el enunciado del ejemplo (1.8).

**Solución:** El producto punto  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (3\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (-5\hat{i} + 2\hat{j}) \\ &= (3 * (-5)) + (4 * 2) \\ &= -7. \end{aligned} \tag{1.104}$$

El ángulo entre el vector  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se puede determinar teniendo en cuenta que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta_{AB}), \tag{1.105}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{AB}) &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = -\frac{7}{\sqrt{9+16}\sqrt{25+4}} \\ &= -\frac{7}{5\sqrt{29}} \simeq -0.26, \end{aligned} \tag{1.106}$$

tal que:

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \cos^{-1}\left(-\frac{7}{5\sqrt{29}}\right) \\ &\simeq 105.07^\circ. \end{aligned} \tag{1.107}$$

**Ejemplo 1.9.** Se tiene dos vectores definidos por:

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \tag{1.108}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}, \tag{1.109}$$

donde  $\vec{A}$  en (1.108) corresponde a un vector que conecta los vértices opuestos de un cubo de lado 1, y  $\vec{B}$  une los vértices opuestos de un cuadrado de lado uno en el plano  $xy$  (figura 1.19). Para los vectores en estudio, se encontrará el ángulo entre los dos vectores.

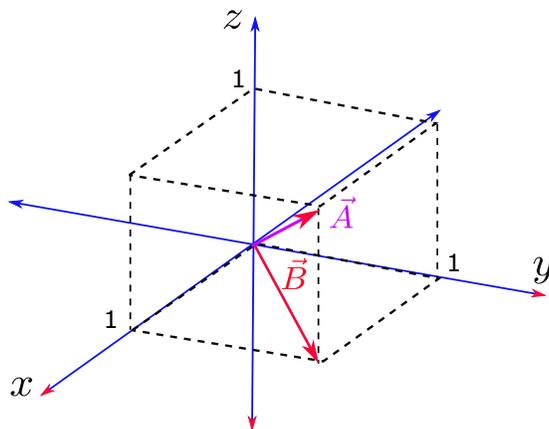


Figura 1.19: Ejemplo (1.9). Representación gráfica del vector  $\vec{A}$  y el vector  $\vec{B}$ , asociados al ejemplo (1.9) en tres dimensiones.

**Solución:** Se puede observar, que si se considera un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la magnitud del vector  $\vec{A}$ , el vector  $\vec{B}$  corresponderá a un lado de dicho triángulo, como se observa en la figura 1.20. De acuerdo con lo anterior el ángulo  $\theta_{AB}$  entre el vector  $\vec{A}$  y el vector  $\vec{B}$  geoméricamente es :

$$\theta_{AB} = \cos^{-1} \left( \frac{B}{A} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \simeq 35.264^\circ. \quad (1.110)$$

El resultado anterior se puede comprobar teniendo en cuenta la definición del producto punto, tal que:

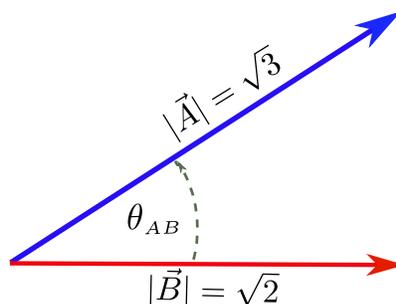


Figura 1.20: Ejemplo (1.9). Ángulo entre los vectores asociados al ejemplo (1.9) en dos dimensiones.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j}) \\ &= 1 + 1 = 2.\end{aligned}\tag{1.111}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{AB}) &= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) \simeq 35.264^\circ.\end{aligned}\tag{1.112}$$

Con el anterior resultado se comprueba el valor del ángulo  $\theta_{AB}$  determinado geoméricamente.

**Ejemplo 1.10.** En este ejemplo se encontrará el producto punto entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  definidos por:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k},\tag{1.113}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}.\tag{1.114}$$

**Solución:** El producto punto entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  corresponde a :

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (2\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) \\ &= 2 * (-2) + 3 * 3 + 1 * (-5) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.115}$$

El anterior resultado establece que el vector  $\vec{A}$  es perpendicular al vector  $\vec{B}$ .

**Ejemplo 1.11.** En este ejemplo se encontrará un vector que este en el plano  $xy$  y que sea perpendicular al vector  $\vec{A} = 3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ .

**Solución:** Se denotará como  $\vec{B}$  el vector que se desea encontrar. Ahora, si éste se encuentra en el plano  $xy$ , la representación más general está dada por:

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}.\tag{1.116}$$

Siendo que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  deben ser perpendiculares, se debe cumplir que,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0,\tag{1.117}$$

con lo cual, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{A} \cdot \vec{B} = (3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) \\ &= 3.0B_x + 2.0B_y. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Al no ser considerado algún otro requisito asociado al vector  $\vec{B}$ , de la condición anterior se puede determinar la siguiente identidad:

$$B_y = -\frac{3.0}{2.0}B_x, \quad (1.119)$$

de manera que el vector  $\vec{B}$  se escribe como:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_x\hat{i} + B_y\hat{j} = B_x\hat{i} - \frac{3.0}{2.0}B_x\hat{j} \\ &= B_x \left( \hat{i} - \frac{3.0}{2.0}\hat{j} \right). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Al ser  $B_x$  una constante indeterminada, el hecho de que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  sean perpendiculares, establece que existe un número infinito de vectores  $\vec{B}$  de la forma

$$\vec{B} = B_x \left( \hat{i} - \frac{3.0}{2.0}\hat{j} \right), \quad (1.121)$$

que cumplen el requisito exigido.

**Ejemplo 1.12.** En este ejemplo, se evaluará el ángulo entre los vectores:

$$\vec{A} = 1.0\hat{i} + 3.0\hat{j} - 6.0\hat{k} \quad (1.122)$$

$$\vec{B} = 2.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 5.0\hat{k} \quad (1.123)$$

**Solución:** De la definición del producto escalar se tiene que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta, \quad (1.124)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Ahora, se sabe que,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (4.0\hat{i} + 3.0\hat{j} - 2.0\hat{k}) \cdot (2.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 5.0\hat{k}) \\ &= (4.0)(2.0) + (3.0)(2.0) + (-2.0)(5.0) \\ &= 4.0. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Por otra parte,

$$A = \sqrt{(4.0)^2 + (3.0)^2 + (-2.0)^2} = 5.4, \quad (1.126)$$

$$B = \sqrt{(2.0)^2 + (2.0)^2 + (5.0)^2} = 5.7. \quad (1.127)$$

De manera que el ángulo entre los vectores es:

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos \left[ \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \right] = \arccos \left[ \frac{4.0}{(5.4)(5.7)} \right] = \arccos(0.13) \\ &= 82.5^\circ.\end{aligned}\tag{1.128}$$

**Ejemplo 1.13.** En este ejemplo se mostrará que para el vector  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , se cumple que:

- a) Si  $C^2 = A^2 + B^2$ , el ángulo entre los vectores es  $90^\circ$ .
- b) Si  $C^2 < A^2 + B^2$ , el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es mayor de  $90^\circ$ .
- c) Si  $C^2 > A^2 + B^2$ , el ángulo está entre  $0$  y  $90^\circ$ .

**Solución:** Si el vector  $\vec{A}$  se representa en la forma:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k},\tag{1.129}$$

la magnitud de define por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},\tag{1.130}$$

de manera que,

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.\tag{1.131}$$

Ahora, el producto escalar de  $\vec{A}$  consigo mismo resulta en:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,\end{aligned}\tag{1.132}$$

lo que permite concluir:

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}.\tag{1.133}$$

Ahora, si  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , se determina que:

$$\begin{aligned}C^2 &= \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta,\end{aligned}\tag{1.134}$$

donde  $\theta$  es en ángulo formado entre los dos vectores. Cuando  $C^2 = A^2 + B^2$ , resulta:

$$C^2 = A^2 + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta,\tag{1.135}$$

a partir de la cual se determina,

$$2AB \cos \theta = 0. \quad (1.136)$$

Si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no son nulos, la identidad se garantiza si:

$$\cos \theta = 0, \quad (1.137)$$

lo que implica que  $\theta = 90^\circ$ . Ahora, si se cumple que  $C^2 < A^2 + B^2$ , la relación (1.134) indica que:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta < A^2 + B^2, \quad (1.138)$$

que es equivalente a

$$AB \cos \theta < 0. \quad (1.139)$$

Siendo que  $A$  y  $B$  identifican las magnitudes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , estas deben ser positivas, de manera que la desigualdad (1.139) se cumple solo si:

$$\cos \theta < 0. \quad (1.140)$$

Este resultado se da si el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es mayor de  $90^\circ$ . Finalmente, si se considera el caso cuando  $C^2 > A^2 + B^2$ , la ecuación (1.134) se interpreta en la forma:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta > A^2 + B^2, \quad (1.141)$$

que se reduce a:

$$2AB \cos \theta > 0. \quad (1.142)$$

Esta identidad solo se cumple cuando

$$\cos \theta > 0, \quad (1.143)$$

condición que se garantiza cuando el ángulo  $\theta$  está comprendido entre  $0$  y  $90^\circ$ .

**Ejemplo 1.14.** Se tiene un vector  $\vec{A}(t)$  que depende del tiempo en la forma:

$$\vec{A}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}, \quad (1.144)$$

donde  $\omega$  es una constante. Para el vector propuesto, se calculará  $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$  y se mostrará que éste vector es perpendicular a  $\vec{A}(t)$ .

**Solución:** Los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son constantes en magnitud y dirección, es decir, ellos no cambian con el tiempo, de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \cos(\omega t) \hat{i} \right] + \frac{d}{dt} \left[ \sin(\omega t) \hat{j} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \cos(\omega t) \right] \hat{i} + \frac{d}{dt} \left[ \sin(\omega t) \right] \hat{j} \\ &= -\omega \sin(\omega t) \hat{i} + \omega \cos(\omega t) \hat{j} \\ &= \omega \left[ -\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j} \right]. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Ahora, si los vectores  $\vec{A}(t)$  y  $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$  son perpendiculares, su producto interno debe ser nulo, lo cual se puede demostrar a partir de la definición del producto punto, tal que:

$$\begin{aligned}\vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{A}(t)}{dt} &= \left[ \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j} \right] \cdot \omega \left[ -\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j} \right] \\ &= \omega \left[ -\cos(\omega t) \sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.146}$$

**Ejercicio 1.14.** Encontrar un vector que se encuentre en el plano  $xz$  de magnitud igual a 5.0 unidades y que sea perpendicular al vector  $\vec{A} = 3.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 1.0\hat{k}$  (existe más de una solución).

**Ejercicio 1.15.** Deducir un vector que simultáneamente sea perpendicular a los vectores  $\vec{A} = 4.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$  y  $\vec{B} = -1.0\hat{i} - 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$  (existe más de una solución).

**Ejercicio 1.16.** Determinar el ángulo entre el vector  $\vec{A} = 3.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 4.0\hat{k}$  y el semieje positivo del eje  $x$ .

**Ejercicio 1.17.** Obtener el ángulo entre los vectores:

$$\vec{A} = 2.0\hat{i} + 1.0\hat{j} + 2.0\hat{k}\tag{1.147}$$

$$\vec{B} = 3.0\hat{i} - 6.0\hat{j} + 2.0\hat{k}\tag{1.148}$$

## 1.2.5. Producto cruz

La multiplicación de dos vectores mediante la operación denominada producto cruz, genera una cantidad vectorial. El símbolo para esta operación es “ $\times$ ”. De tal manera que si se considera el siguiente par de vectores  $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$  y  $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ , entonces el producto cruz  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  se define como:

$$\begin{aligned}\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}.\end{aligned}\tag{1.149}$$

### Propiedades del producto cruz

Entre las propiedades más importantes del producto cruz, están:

1. Tomando en cuenta la ecuación (1.149), el vector resultante  $\vec{C}$  será perpendicular tanto al  $\vec{A}$  como al vector  $\vec{B}$ , lo cual se puede demostrar así: Se toma el producto punto entre el vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  y el vector  $\vec{A}$ , tal que:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} &= \left( (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \right) \\
&\quad \cdot \left( A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \right) \\
&= (A_y B_z - A_z B_y) A_x - (A_x B_z - A_z B_x) A_y + (A_x B_y - A_y B_x) A_z \\
&= A_y B_z A_x - A_z B_y A_x - A_x B_z A_y \\
&\quad + A_z B_x A_y + A_x B_y A_z - A_y B_x A_z \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.150}$$

por lo tanto,  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$  y se sabe que el producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero, por lo tanto, el vector  $(\vec{A} \times \vec{B})$  es perpendicular al vector  $\vec{A}$ .

De igual forma se puede probar que  $(\vec{A} \times \vec{B})$  es perpendicular a  $\vec{B}$ .

La anterior demostración se puede evidenciar desde una perspectiva geométrica, considerando el hecho de que dos vectores (en dos o tres dimensiones) siempre generan un unico plano. Dicho plano puede ser por ejemplo el plano de una hoja o el de un tablero. Por lo tanto, si se calcula el producto cruz entre dos vectores el resultante siempre será perpendicular al plano definido por los mismos. En el caso de escoger el plano de una hoja para representar los dos vectores, el producto cruz entre los dos se encontrará sobre el eje que atraviesa perpendicularmente el plano de la hoja .

2. El producto cruz es anticonmutativo, tal que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \tag{1.151}$$

Lo anterior se evidencia a partir de la definición (1.149); teniendo en cuenta que al intercambiar dos filas en una matriz, su determinante cambia de signo.

3. A partir de la definición se puede establecer que la magnitud del producto  $\vec{A} \times \vec{B}$  se puede escribir como:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sen(\theta_{AB}), \tag{1.152}$$

donde  $\theta_{AB}$  representa el ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con  $\vec{B}$ . En la figura 1.21 se indica gráficamente los ángulos  $\theta_{AB}$  y  $\gamma_{AB}$  que pueden ser utilizados en la definición de la magnitud del producto cruz, teniendo en cuenta que  $\sen \theta_{AB} = \sen \gamma_{AB}$ . De igual forma, se indica el ángulo  $\alpha_{AB}$  y se determina que  $\sen \theta_{AB} = -\sen \alpha_{AB} = |\sen \alpha_{AB}|$  (dado que  $\sen \alpha_{AB} < 0$ ), por lo tanto, se puede utilizar el ángulo  $\alpha_{AB}$  en la definición de la magnitud del producto cruz, siempre y cuando se tome el valor absoluto de la función seno (ya que la magnitud de un vector siempre debe ser un valor positivo). Si el ángulo entre los dos vectores que intervienen en el producto cruz es  $\pi$  o 0 (vectores

antiparalelos o paralelos respectivamente), entonces el producto cruz es cero ya que  $\sin \pi = \sin 0 = 0$ . Si por el contrario los dos vectores son perpendiculares, entonces  $\sin(\theta_{AB}) = 1$  ( $\theta_{AB} = \pi/2$ ) y  $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ .

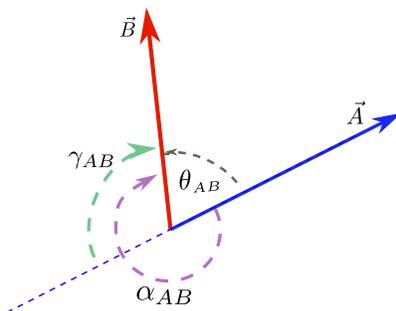


Figura 1.21: Ángulos asociados a la definición de la magnitud del producto cruz entre dos vectores.

- Ya que  $A \sin(\theta_{AB})$  representa la componente del vector  $\vec{A}$  sobre el eje perpendicular que define la dirección de  $\vec{B}$  (ver figura 1.22), la magnitud  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  se puede entender como la multiplicación de la proyección de  $\vec{A}$  sobre un eje perpendicular a  $\vec{B}$  por la magnitud de  $\vec{B}$  (o la multiplicación de la proyección de  $\vec{B}$  sobre un eje perpendicular a  $\vec{A}$  por la magnitud de  $\vec{A}$ ). A partir de la explicación anterior se evidencia que dos vectores paralelos o antiparalelos tienen producto cruz cero, ya que la proyección mencionada, es cero.
- La magnitud del producto cruz entre dos vectores, es igual al área del paralelogramo definido por el vector  $\vec{A}$  y el vector  $\vec{B}$  (ver área sombreada de la figura 1.22). Lo anterior, dado que el área de un paralelogramo corresponde a la multiplicación de la base por la altura. Si observamos el paralelogramo construido con los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , según se esquematiza en la figura 1.22, la base del paralelogramo corresponde a la magnitud del vector  $\vec{B}$  y la altura a la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre un eje perpendicular a  $\vec{B}$ ; es decir  $A \sin \theta_{AB}$ , por lo tanto:

$$\text{Area} = BA \sin \theta_{AB} = |\vec{A} \times \vec{B}|. \quad (1.153)$$

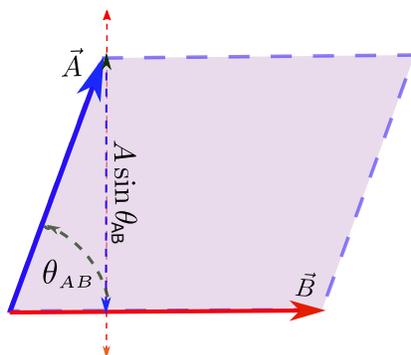


Figura 1.22: Proyección del vector  $\vec{A}$  sobre un eje perpendicular al vector  $\vec{B}$ .

Es muy útil poder determinar la dirección del producto cruz de dos vectores sin realizar cálculos. Para ello existen recursos mnemotécnicos, como los que se presentan a continuación.

### Dirección del producto cruz

En esta sección se presentan tres recursos mnemotécnicos para determinar la dirección del vector resultante en un producto cruz entre dos vectores, sin realizar cálculos.

1. **Regla de la mano derecha:** considere el producto cruz entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tal que:

$$\vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (1.154)$$

Para determinar la dirección del vector  $\vec{C}$  por este método, se sitúa la mano derecha con los dedos extendidos en dirección del primer vector presente en el producto cruz (vector  $\vec{A}$ ), tal que la palma de la mano debe “mirar” al segundo vector (vector  $\vec{B}$ ) según se indica en la figura 1.23 (ya que el producto cruz no es conmutativo, se debe tener claro que el primer vector hace referencia al vector que aparece a la derecha en la definición del producto cruz). El pulgar se ubica perpendicularmente al dedo índice. Con esa disposición, el dedo pulgar indica la dirección del vector  $\vec{C}$ , de tal manera que al girar los cuatro dedos extendidos (con el dedo pulgar como eje de giro), se pueda “alcanzar” al segundo vector (vector  $\vec{B}$ ). El giro que realicen los dedos para alcanzar la dirección del segundo vector debe ser menor que  $\pi$ , si no es así, se ha posicionado incorrectamente la palma de la mano y se debe verificar que la palma de la mano derecha “mire” correctamente hacia el segundo vector, garantizando que al girar los dedos (cerrando la mano), se pueda alcanzar al segundo vector con un giro menor a  $\pi$ . El pulgar nuevamente indicará la dirección del producto cruz.

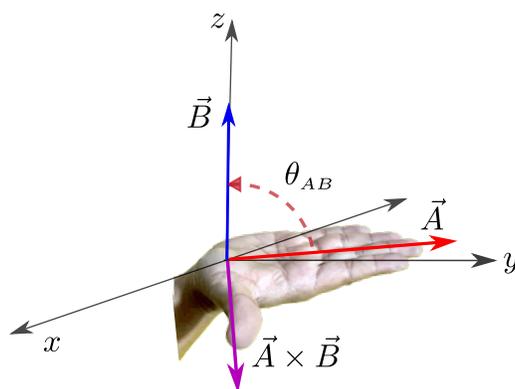


Figura 1.23: Regla de la mano derecha.

2. Otra recurso mnemotécnico para determinar el giro, es simplemente ubicando en un plano los dos vectores (puede ser el plano de una hoja de papel, el plano del tablero o el de una pantalla, donde se esté viendo el problema, recordando que dos vectores

siempre están en un mismo plano independiente de si tienen dos o tres componentes), si el giro (menor de  $\pi$ ) que debe realizar el primer vector para alcanzar el segundo es en contra de las manecillas del reloj, entonces el vector resultante del producto punto saldrá del plano establecido por los dos vectores que intervienen en el producto cruz (ver figura 1.24a). Si por el contrario el giro necesario para que el primer vector alcance al segundo es a favor de las manecillas del reloj, la dirección del vector resultante en el producto cruz “entrará” al plano (ver figura 1.24b). El giro que se debe realizar desde el primer vector para alcanzar al segundo, no puede ser mayor de  $\pi$ , si es mayor de  $\pi$  se debe cambiar el sentido del giro que se está realizando.

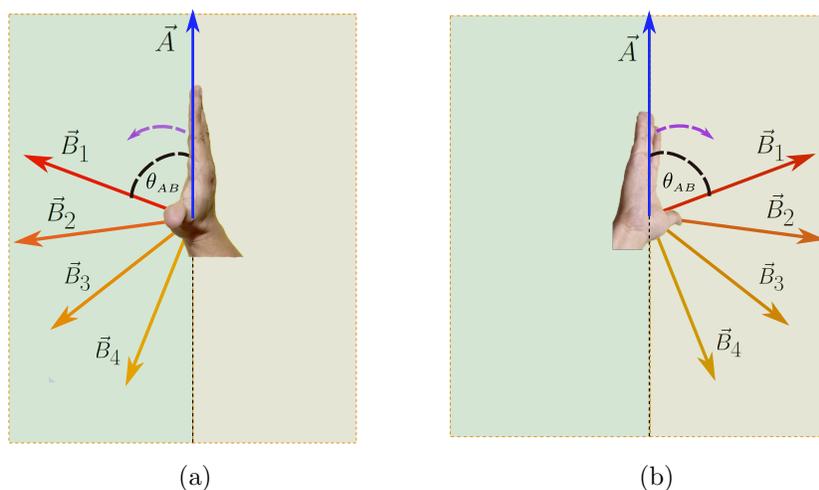


Figura 1.24: Ejemplo del uso de la regla de la mano derecha.

- Ahora, si no se tiene en cuenta la restricción sobre el ángulo del giro planteada en el último ítem (que sea menor que  $\pi$ ), y se toma siempre el sentido contrario a las manecillas del reloj para ir desde el primer vector hasta el segundo, entonces si el ángulo necesario para alcanzar al segundo vector es menor a  $\pi$ , entonces el vector resultante del producto saldrá del plano establecido por los dos vectores (“sale” de la página), y si el ángulo necesario es mayor a  $\pi$  (manteniendo siempre el sentido contrario a las manecillas del reloj), entonces el vector resultante del producto “entra” al plano definido por los dos vectores que intervienen en el producto cruz. La figura 1.25 muestra un vector  $\vec{A}$  y varios vectores denominados  $\vec{B}_i$  y  $\vec{D}_i$ . Al realizar el producto cruz entre el vector  $\vec{A}$  y los vectores  $\vec{B}_i$ , el giro (en contra de las manecillas del reloj) para ir de  $\vec{A}$  hasta  $\vec{B}_i$  es menor a  $\pi$  y por tanto el vector  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}_i$  apunta hacia fuera de la página. Por el contrario para ir de  $\vec{A}$  hasta  $\vec{D}_i$  el giro necesario es mayor a  $\pi$  y por tanto el vector  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{D}_i$  apunta hacia dentro de la página.

**Ejemplo 1.15.** Se tiene los vectores dados por:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \\ \vec{B} &= \hat{i} + \hat{j}.\end{aligned}\tag{1.155}$$

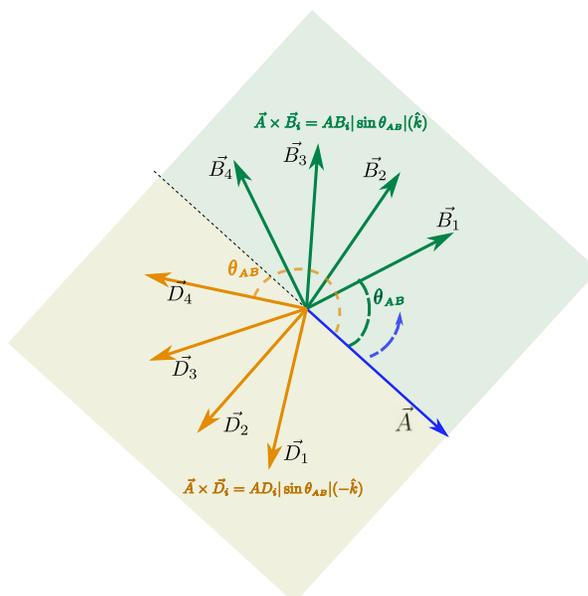


Figura 1.25: Otra perspectiva en la determinación de la dirección del producto cruz.

Para los vectores planteados, en este ejemplo se calculará el valor del ángulo entre los dos vectores. Se verificará de igual forma que el resultado coincide con el obtenido por métodos geométricos en el ejemplo (1.9).

**Solución:** El producto cruz de los vectores  $\vec{A}$  y el vector  $\vec{B}$  viene dado por:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1\hat{i} - (-1)\hat{j} + 0\hat{k} \\ &= -1\hat{i} + 1\hat{j}.\end{aligned}\tag{1.156}$$

Además,

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen}(\theta_{AB}),\tag{1.157}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\theta_{AB} &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB}\right) \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) \simeq 35.264^\circ.\end{aligned}\tag{1.158}$$

Como se observa, se obtiene el mismo resultado encontrado en la ecuación (1.112).

**Ejemplo 1.16.** En el ejemplo (1.10) se determinó que el vector  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}$  es perpendicular al vector  $\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ , por lo cual se deduce que entre ellos debe existir un ángulo de 90 grados, lo cual en este ejemplo se comprobará con ayuda de la definición del producto cruz.

**Solución:** En primer lugar se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-15 - 3)\hat{i} - (-10 + 2)\hat{j} + (6 + 6)\hat{k} \\ &= -18\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}.\end{aligned}\tag{1.159}$$

Ahora, el ángulo entre el vector  $\vec{A}$  y el vector  $\vec{B}$  vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\theta_{AB} &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} \right) \\ &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{\sqrt{18^2 + 8^2 + 12^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}} \right) \\ &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{\sqrt{532}}{\sqrt{14}\sqrt{38}} \right) = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\sqrt{532}}{\sqrt{14 * 38}} \right) \\ &= \text{sen}^{-1}(1) = 90^\circ.\end{aligned}\tag{1.160}$$

Con el anterior resultado se comprueba que los vectores en estudio son perpendiculares.

**Ejemplo 1.17.** En este ejemplo se demostrará que los vectores:

$$\vec{A} = 1.0\hat{i} - 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}\tag{1.161}$$

$$\vec{B} = -4.0\hat{i} + 12\hat{j} - 8.0\hat{k},\tag{1.162}$$

son paralelos.

**Solución:** Dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , la magnitud del producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  es definida por:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \text{sen } \theta,\tag{1.163}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , de manera que si los vectores son paralelos se debe cumplir que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0.\tag{1.164}$$

Para el caso en consideración se determina que:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1.0 & -3.0 & 2.0 \\ -4.0 & 12 & -8.0 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \begin{vmatrix} -3.0 & 2.0 \\ 12 & -8.0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1.0 & 2.0 \\ -4.0 & -8.0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1.0 & -3.0 \\ -4.0 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} [(-3.0)(-8.0) - (2.0)(12.0)] - \hat{j} [(1.0)(-8.0) - (2.0)(-4.0)] \\
 &\quad + \hat{k} [(1.0)(12) - (-3.0)(-4.0)] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.165}$$

Una manera alterna de demostrar lo anterior, es observar que:

$$\vec{B} = -4.0\hat{i} + 12\hat{j} - 8.0\hat{k} = -4.0(1.0\hat{i} - 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}) = -4.0\vec{A}, \tag{1.166}$$

lo que indica que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son paralelos.

**Ejemplo 1.18.** Se tiene dos vectores,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Para los vectores en consideración, el producto escalar y la magnitud del producto cruz son iguales. A partir de los datos anteriores, se encontrará el ángulo formado entre los dos vectores.

**Solución:** El producto escalar entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta. \tag{1.167}$$

Ahora, la magnitud de su producto vectorial es dada por:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta. \tag{1.168}$$

ya que el problema planteado establece que,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|, \tag{1.169}$$

se determina que:

$$AB \cos \theta = AB \sin \theta, \tag{1.170}$$

es decir,

$$\cos \theta = \sin \theta, \tag{1.171}$$

lo que implica:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = 1, \tag{1.172}$$

por tanto,

$$\theta = \arctan 1 = 45^\circ. \tag{1.173}$$

**Ejemplo 1.19.** Se considera los vectores:  $\vec{A} = 1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ ,  $\vec{B} = 2.0\hat{i} - 1.0\hat{j}$  y  $\vec{C} = 1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ . A partir de los vectores descritos, en este ejemplo, se mostrará que:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (1.174)$$

**Solución:** La cantidad escalar:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}), \quad (1.175)$$

se conoce como triple producto escalar y matemáticamente se muestra que satisface la siguiente identidad:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (1.176)$$

Para este caso se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \vec{C} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 2.0 & 0.0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2.0 & -1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}[(2.0)(2.0) - (-1.0)(1.0)] \\ &= 5.0\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Ahora,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}) \cdot (5.0\hat{k}) = 0.0. \quad (1.178)$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1.0 & 3.0 & 0.0 \\ 2.0 & -1.0 & 0.0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} 3.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 2.0 & -1.0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}[(1.0)(-1.0) - (3.0)(2.0)] \\ &= -7.0\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.179)$$

De donde,

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 1.0\hat{i} + 2.0\hat{j} \cdot (-7.0\hat{k}) = 0.0, \quad (1.180)$$

resultado que garantiza la identidad.

**Ejemplo 1.20.** El conjunto de vectores:  $\vec{A} = 5.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ ,  $\vec{B} = B_x\hat{i} + 3.0\hat{j} + B_z\hat{k}$ , tienen un producto cruz  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = 2.0\hat{j} + C_z\hat{k}$ . A partir de los vectores descritos se encontrará los valores  $B_x$ ,  $B_z$  y  $C_z$ .

**Solución:** Dado que  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , se determina que:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5.0 & -2.0 & 3.0 \\ B_x & 3.0 & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} -2.0 & 3.0 \\ 3.0 & B_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 5.0 & 3.0 \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 5.0 & -2.0 \\ B_x & 3.0 \end{vmatrix} \\ &= (-2.0B_z - 9.0)\hat{i} + (-5.0B_z + 3.0B_x)\hat{j} + (15 + 2.0B_x)\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Ahora, siendo que  $\vec{C} = 2.0\hat{j} + C_z\hat{k}$ , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}2.0\hat{j} + C_z\hat{k} &= 0.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + C_z\hat{k} \\ &= (-2.0B_z - 9.0)\hat{i} + (-5.0B_z + 3.0B_x)\hat{j} + (15 + 2.0B_x)\hat{k}. \end{aligned} \quad (1.182)$$

La igualdad anterior se garantiza, si en cada lado, las componentes del vector son iguales; es decir

$$-2.0B_z - 9.0 = 0.0, \quad (1.183)$$

$$-5.0B_z + 3.0B_x = 2.0, \quad (1.184)$$

$$15 + 2.0B_x = C_z. \quad (1.185)$$

La primer ecuación establece que:

$$B_z = -\frac{9.0}{2.0} = -4.5. \quad (1.186)$$

De la relación (1.184) se determina que,

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{1}{3.0} (2.0 + 5.0B_z) = \frac{1}{3.0} [2.0 + 5.0(-4.5)] \\ &= -6.8. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Finalmente, a partir de (1.185), se tiene que:

$$C_z = 15 + 2.0B_x = 15 + 2.0(-6.8) = 1.4. \quad (1.188)$$

**Ejercicio 1.18.** Tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  poseen las siguientes componentes:  $A_x = -3.0$ ,  $A_y = 2.0$ ,  $A_z = -2.0$ ;  $B_x = 1.0$ ,  $B_y = 0.0$ ,  $B_z = -1.0$ ;  $C_x = 2.0$ ,  $C_y = 1.0$ ,  $C_z = 0.0$ . Calcular: a)  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$ , b)  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$ , c)  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ , d)  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ .

**Ejercicio 1.19.** Sean los vectores  $\vec{A} = 5.0\hat{j} - 6.5\hat{j}$  y  $\vec{B} = -3.5\hat{j} + 7.0\hat{j}$ . Un tercer vector  $\vec{C}$  se localiza en el plano  $xy$  y resulta perpendicular al vector  $\vec{A}$ . Sin embargo,  $\vec{C} \cdot \vec{B} = 15.0$  unidades. Calcular las componentes del vector  $\vec{C}$ .

**Pregunta 1.1.** *Un excursionista realiza una serie de recorridos durante dos semanas, cada uno de cuatro días, cada n día saliendo de su nueva ubicación, cada semana iniciando los recorridos desde el mismo origen. En la tabla ?? se muestra la información de los diferentes recorridos. Respecto a los vectores de desplazamiento en cada semana de recorrido es correcto afirmar que:*

- a) *Es el mismo para los dos recorridos.*
- b) *Tienen la misma magnitud pero diferente dirección.*
- c) *Tienen la misma dirección pero diferente magnitud*
- d) *Son diferentes tanto en magnitud como dirección.*

Semana	Día	Distancia recorrida	Dirección
Semana 1	1	30.0 km	este
	2	20.0 km	sur
	3	6.0 km	oeste
	4	22.0 km	norte
Semana 2	1	4.0 km	este
	2	10.0 km	norte
	3	28.0 km	este
	4	8.0 km	sur

Tabla 1.4: Distancias recorridas por semana

**Pregunta 1.2.** *Tomando en cuenta los datos suministrados en la pregunta (1.1), la orientación de los vectores desplazamiento en la semana 1 y semana 2, son respectivamente:*

- a) *Noreste y sureste*
- b) *Noreste y noreste.*
- c) *Sureste y sureste.*
- d) *Sureste y noreste.*

**Pregunta 1.3.** *Considere los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de la figura (1.26). En este caso, es correcto afirmar que el vector  $\vec{C}$  es igual a:*

- a)  $\vec{A}/\cos\theta$
- b)  $\vec{B} + \vec{A}$
- c)  $\vec{A} - \vec{B}$

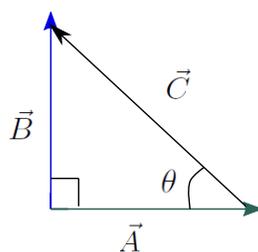


Figura 1.26: Ejercicio (1.3). Tres vectores formando un triángulo rectángulo

d)  $\vec{A}\cos\theta$

e)  $\vec{B} - \vec{A}$

**Pregunta 1.4.** Dos estudiantes participan en un concurso en el cual gana quien logre realizar un desplazamiento de magnitud  $5\text{m}$  y siga las siguientes indicaciones:

1. En el instante de tiempo  $t_1$  debe estar en la posición  $(2.0\text{m}, y_1)$ .
2. En el instante de tiempo  $t_2$  debe estar en la posición  $(5.0\text{m}, 2.0\text{m})$ .
3.  $t_2 > t_1$  y los estudiantes no pueden realizar movimientos adicionales.

¿Cuál debería ser la posición  $y_1$  del estudiante para ganar la competencia?

a)  $y_1 = -2.0\text{m}$  ó  $y_1 = 6.0\text{m}$

b)  $y_1 = 2.0\text{m}$  ó  $y_1 = 6.0\text{m}$

c)  $y_1 = 1.0\text{m}$  ó  $y_1 = 4.0\text{m}$

d)  $y_1 = -1.0\text{m}$  ó  $y_1 = 4.0\text{m}$

e) Ninguna de las anteriores

**Pregunta 1.5.** Un vector tiene una magnitud de  $10$  unidades y se ubica en el segundo cuadrante de un sistema cartesiano, formando un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $y$ . Para el vector en mención, la componente  $x$  es:

a)  $10\sqrt{2}$

b)  $10/\sqrt{2}$

c)  $-5$

d)  $5$

e) 10

**Pregunta 1.6.** *Un vector se encuentra ubicado en el plano  $xy$  y tiene una componente  $x$  de 2.0m y una componente  $y$  de 10.0m. Si este vector se rota en el plano  $xy$ , de tal forma que su componente  $x$  dobla su valor, la nueva componente en dirección  $y$ , es:*

a) 7.2m

b) 3.5m

c) no cambia

d) 9.3m

e) 10.0m

**Pregunta 1.7.** *Dos vectores  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$  tienen magnitud igual a  $d$ . Si su producto punto es  $\sqrt{3}d^2/2$ , el ángulo entre los vectores es:*

a) cero

b)  $50^\circ$

c)  $60^\circ$

d)  $45^\circ$

e)  $30^\circ$

## 2– Fuerza Eléctrica

---

En general las partículas o cuerpos en la naturaleza interactúan unos con otros a través de diferentes mecanismos y existen expresiones matemáticas que se fundamentan en la asignación de propiedades a las partículas que se cuantifican según el tipo de interacción. Por ejemplo, la masa gravitacional asociada a un cuerpo dado, determina la intensidad de un tipo concreto de interacción que se denomina fuerza gravitacional. En el caso de la fuerza gravitacional la interacción siempre es de tipo atractiva (cuerpos masivos siempre se atraen) y de ahí que a todos los cuerpos se les asigne una masa gravitacional positiva. Otro tipo de interacción es la eléctrica, la cual se manifiesta en la naturaleza en forma atractiva o repulsiva. Lo anterior hace necesario que la propiedad asociada a la interacción eléctrica no sea única y que sean asignados valores negativos o positivos para su descripción, la cual se ha denominado carga eléctrica. En el sistema internacional la unidad fundamental de la carga eléctrica se denomina culombio y se denota por la letra  $C$ . El electrón es una partícula cargada negativamente y su valor usualmente sirve de referencia en diferentes cálculos. La carga eléctrica del electrón se simboliza por  $e$  y en culombios está dada por:

$$e = -1,602176634 \times 10^{19} C. \quad (2.1)$$

Cuerpos con carga de signo contrario se atraen mientras que cuerpos con carga del mismo signo se repelen. Partículas que no tengan carga eléctrica no interactúan eléctricamente (o cuerpos con carga eléctrica total igual a cero), aunque sí pueden tener otro tipo de interacción (por ejemplo pueden interactuar por interacción gravitacional). La interacción eléctrica es mucho más fuerte que la interacción gravitacional y por ello en cuerpos que tienen masa pequeña y carga eléctrica, prevalece la interacción eléctrica siendo la interacción gravitacional despreciable. La expresión fundamental que describe la interacción entre partículas cargadas eléctricamente se conoce como Ley de Coulomb, la cual se presenta a continuación.

### 2.1. Ley de Coulomb

A partir de observaciones experimentales es posible cuantificar la interacción eléctrica, cuyas principales características son:

- La interacción eléctrica se manifiesta de forma atractiva o repulsiva, por lo tanto, se

establecen dos tipos de carga eléctrica; dos cuerpos con la misma carga, interactúan repulsivamente, mientras que dos cuerpos con carga contraria interactúan atractivamente. Cuerpos que no están cargados no interactúan eléctricamente.

- El vector de fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas, se encuentra sobre el eje que une las dos cargas y su orientación sobre el eje depende de si la fuerza es atractiva o repulsiva. Si las partículas en interacción tienen el mismo signo de carga eléctrica, la orientación del vector de fuerza eléctrica será tal que indique la separación de las cargas y si tienen signos contrarios la orientación de la fuerza eléctrica será tal que señale la atracción de las partículas en interacción.
- La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las partículas en interacción, lo que es igual a la magnitud del vector que establece las posiciones relativas de las cargas.
- La fuerza eléctrica es proporcional al producto de las cargas.

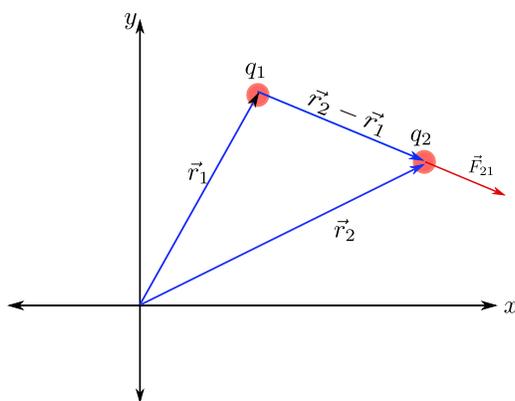


Figura 2.1: Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , separadas una distancia  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , ejercen una fuerza entre sí, que está dada por la Ley de Coulomb  $\vec{F}_{21}$ .

Estas observaciones se compilan en lo que se conoce como ley de Coulomb. La ley de Coulomb reúne las características anteriormente mencionadas en una expresión matemática. La figura 2.1 muestra dos partículas cargadas  $q_1$  y  $q_2$ , donde la posición relativa entre ellas es determinada por el vector  $\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . La fuerza eléctrica (dada por la ley de Coulomb) que ejerce la partícula  $q_1$  sobre  $q_2$  viene dada por:

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_2 q_1}{\Delta r^2} \hat{\Delta r} \equiv k_e \frac{q_2 q_1}{\Delta r^3} \vec{\Delta r}, \quad (2.2)$$

donde en la última igualdad de (2.2) se ha utilizado la relación  $\hat{\Delta r} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta r}$ , que identifica el vector unitario orientado en la dirección de  $\vec{\Delta r}$ . Adicionalmente según la figura 2.1 se puede determinar gráficamente que  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$ , por lo tanto:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.3)$$

Con lo anterior, (2.4) se puede escribir como:

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_2 q_1}{\Delta r^3} \vec{\Delta r} \equiv k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.4)$$

En la expresión (2.4),  $k_e$  es una constante de proporcionalidad, cuyo valor es (En el sistema internacional SI):

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9874 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}, \quad (2.5)$$

donde a su vez,  $\epsilon_0$  representa una constante, denominada como la permitividad en el vacío, y su valor en el SI es:

$$\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}. \quad (2.6)$$

En los cálculos numéricos que se desarrollan en este libro, se utiliza una aproximación para  $k_e$ , tal que:  $k_e \approx 9 \times 10^9 Nm/C^2$ . Por otro lado, el vector  $\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  en (2.4) corresponde a un vector dirigido desde la carga  $q_1$  (quien ejerce la fuerza) hacia la carga  $q_2$  (quien siente la fuerza eléctrica), como se indica en la figura 2.1. A partir (2.4) es posible también determinar la fuerza que ejerce  $q_2$  sobre  $q_1$ , la cual está dada por:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21}. \quad (2.7)$$

En la última igualdad de (2.7) se ha enfatizado que la diferencia entre la fuerza que siente  $q_1$  por  $q_2$  y la que siente  $q_2$  por  $q_1$ , radica exclusivamente en la dirección del vector  $\vec{\Delta r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , ya que si  $\vec{\Delta r}$  va de  $q_1$  a  $q_2$ , entonces  $-\vec{\Delta r}$ , va de  $q_2$  a  $q_1$ .

En este texto, el orden de los subíndices  $j, i$  (o los que hagan sus veces) que aparecen en la expresión de la fuerza eléctrica  $\vec{F}_{ji}$ , determina la partícula que siente la fuerza y la partícula que ejerce dicha fuerza, correspondiendo el primer índice ( $j$  en  $\vec{F}_{ji}$ ) a la partícula que siente la fuerza y el segundo índice ( $i$ ) a la partícula que ejerce dicha fuerza. Por lo tanto, la fuerza que ejerce una partícula  $i$  sobre una partícula  $j$ , se escribe como:

$$\vec{F}_{ji} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji}. \quad (2.8)$$

En (2.8), en la última igualdad se ha definido

$$\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i. \quad (2.9)$$

El vector  $\vec{r}_{ji}$  es independiente del sistema de coordenadas que se utilice. En la figura 2.2 se muestra el vector  $\vec{r}_{ji}$  y dos sistemas coordenados diferentes en los cuales se observa claramente que  $\vec{r}_{ji}$  no se ve afectado. Ya que  $\vec{r}_{ji}$  es el vector que finalmente se necesita para calcular la fuerza eléctrica, el resultado debe ser independiente del origen y orientación del sistema

coordenado utilizado para establecer la posición de las partículas. Lo que si depende del sistema cartesiano son los vectores de posición  $\vec{r}_j$  o  $\vec{r}_i$  (pero no su resta  $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ ).

Las expresiones escritas anteriormente para la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas, se aplican independientemente del signo de las cargas. Si las dos cargas que intervienen tienen el mismo signo, entonces la dirección de la fuerza  $\vec{F}_{ji}$  corresponde a la dirección de  $\vec{r}_{ji}$  (de tipo repulsiva). Si por el contrario, las cargas tienen signos opuestos, saldrá un signo negativo en el producto  $q_1q_2$  que aparece en la expresión de la fuerza eléctrica (en tal caso  $q_1q_2 = -|q_1q_2|$ ) y por tanto la dirección de la fuerza  $\vec{F}_{ji}$  será  $-\vec{r}_{ji}$  (es decir, de tipo atractiva).

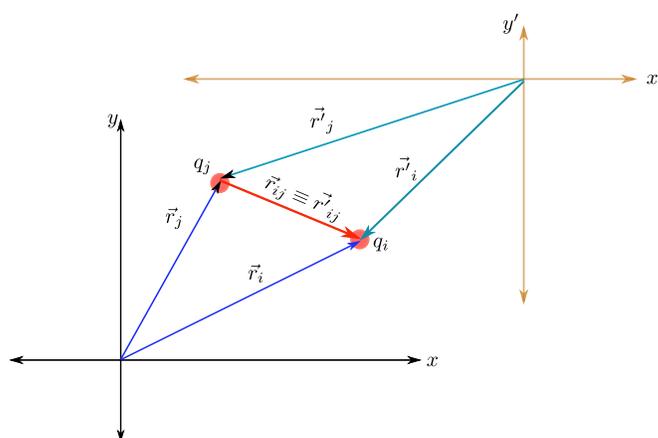


Figura 2.2: Invarianza del vector  $\vec{r}_{ij}$ .

**Ejemplo 2.1.** Se tiene dos partículas con cargas  $q_1 = 1.0\mu\text{C}$  y  $q_2 = 3.0\mu\text{C}$  y masas  $m_1 = 1.0\text{g}$  y  $m_2 = 2.0\text{g}$ , las cuales se ubican en las posiciones  $\vec{r}_1 = -3.0\hat{m}_i + 5.0\hat{m}_j$  y  $\vec{r}_2 = 5.0\hat{m}_i + 2.0\hat{m}_j$ , respectivamente, como se observa en la figura 2.3. Para el sistema planteado se evaluará: a) la fuerza eléctrica que ejerce la partícula con carga  $q_1$  sobre la partícula con carga  $q_2$ , b) la aceleración de la partícula  $q_2$  cuando se encuentra en la posición  $r_2$ .

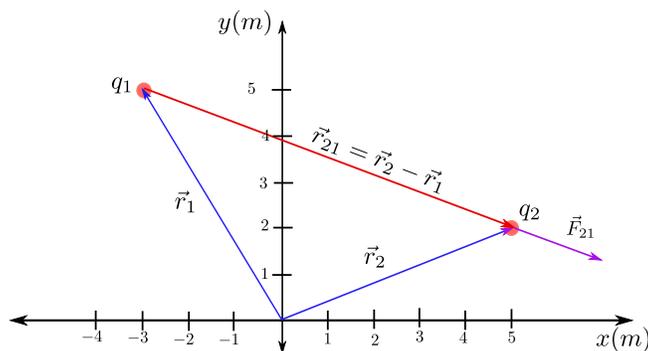


Figura 2.3: Ejemplo (2.1). Ley de Coulomb aplicada a la interacción de dos partículas.

**Solución:** En primer lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (5.0m\hat{i} + 2.0m\hat{j}) - (-3.0m\hat{i} + 5.0m\hat{j}) \\ &= 8.0m\hat{i} - 3.0m\hat{j}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Reemplazando (2.10) en (2.8), se deduce que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = k_e \frac{q_2 q_1}{(8.0^2 + 3.0^2)^{3/2} m^3} (8.0m\hat{i} - 3.0m\hat{j}) \\ &= 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{3 \times 10^{-12} C^2}{673.712 m^3} (8.0m\hat{i} - 3.0m\hat{j}) \\ &= (3.84 \times 10^{-4} \hat{i} - 1.44 \times 10^{-4} \hat{j}) N.\end{aligned}\quad (2.11)$$

En las dos últimas líneas de (2.11) se han realizado reemplazos numéricos, teniendo en cuenta que  $q_1 q_2 = 3\mu C^2 = 3 \times 10^{-12} C^2$ . Dado que para una partícula con masa constante, la fuerza es igual a  $\vec{F} = m\vec{a}$ , la aceleración de la partícula con carga  $q_2$  justo cuando se encuentra en la posición  $\vec{r}_2$  es:

$$\vec{a}_2 = \frac{3.84 \times 10^{-4} N}{10^{-3} kg} \hat{i} - \frac{1.44 \times 10^{-4} N}{10^{-3} kg} \hat{j} = 3.84 \times 10^{-7} \frac{m}{s^2} \hat{i} - 1.44 \times 10^{-7} \frac{m}{s^2} \hat{j}, \quad (2.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $m_1 = 1.0g = 1.0000 \times 10^{-3} kg$ . Se debe aclarar que la fuerza que siente la carga  $q_2$  debida a  $q_1$  cambiará a medida que la posición relativa entre las dos cargas en consideración cambie, y por lo tanto también cambiará la aceleración (ya que depende de la distancia relativa entre las cargas); es decir, el valor de  $\vec{a}_2$  dado por (2.12) es correcto exclusivamente para la separación de las cargas inicialmente considerado (no es constante).

## 2.2. Interacción entre varias partículas cargadas

Para encontrar la fuerza que un sistema de  $N$  partículas cargadas identificadas por el índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ejercen sobre una partícula cargada  $j$ , se aplica el principio de superposición, de tal manera que la fuerza total sobre la carga  $j$  corresponde a la suma vectorial de la fuerza que ejerce cada partícula  $i$  sobre la partícula  $j$ , es decir:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ji} = \sum_{i \neq j}^N k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (2.13)$$

La expresión (2.13) se conoce como el principio de superposición. Para explicar el uso de (2.13) se realiza el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.2.** Se tiene un sistema de 4 partículas, con las siguientes cargas, masas y posiciones:

$$\begin{array}{lll}
 q_1 = 1.0\mu C, & \vec{r}_1 = 2.0m\hat{i} + 2.0m\hat{j}, & m_1 = 1.0g, \\
 q_2 = -2.0\mu C & \vec{r}_2 = -2.0m\hat{i} + 1.0m\hat{j} & m_2 = 1.0g, \\
 q_3 = -3.0\mu C & \vec{r}_3 = -1.0m\hat{i} - 1.0m\hat{j} & m_3 = 2.0g, \\
 q_4 = 6.0\mu C & \vec{r}_4 = 1.0m\hat{i} - 2.0m\hat{j} & m_4 = 1.0g.
 \end{array} \tag{2.14}$$

Teniendo en cuenta la configuración de cargas anteriormente descrita, se encontrará la fuerza que ejercen las partículas 1, 2 y 4 sobre la partícula 3.

**Solución:** La fuerza total sobre la carga  $q_3$ , viene dada por:

$$\vec{F}_3 = \sum_{j \neq 3}^4 \vec{F}_{3j} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{34}. \tag{2.15}$$

Ahora:

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = -3.0m\hat{i} - 3.0m\hat{j}, \tag{2.16}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = 1.0m\hat{i} - 2.0m\hat{j}, \tag{2.17}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_4 = -2.0m\hat{i} + 1.0m\hat{j}. \tag{2.18}$$

Así que al reemplazar en la ley de Coulomb, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{31} &= k_e \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{-3\mu C^2}{(3.0^2 + 3.0^2)^{3/2} m^3} (-3.0m\hat{i} - 3.0m\hat{j}), \\
 &= (1.18 \times 10^{-3}\hat{i} + 1.18 \times 10^{-3}\hat{j}) N
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{32} &= k_e \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{6\mu C^2}{(1.0^2 + 2.0^2)^{3/2} m^3} (1.0m\hat{i} - 2.0m\hat{j}), \\
 &= (5.36 \times 10^{-3}\hat{i} - 1.07 \times 10^{-2}\hat{j}) N,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{34} &= k_e \frac{q_3 q_4}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_4) = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{-18\mu C^2}{(2.0^2 + 1.0^2)^{3/2} m^3} (-2.0m\hat{i} + 1.0m\hat{j}), \\
 &= (3.22 \times 10^{-2}\hat{i} - 1.61 \times 10^{-2}\hat{j}) N.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Finalmente:

$$\vec{F}_3 = 3.87 \times 10^{-2} N\hat{i} - 2.56 \times 10^{-2} N\hat{j}. \tag{2.22}$$

**Ejemplo 2.3.** Cinco cargas iguales de magnitud  $Q$ , se encuentran localizadas en un semicírculo de radio  $R$  como se muestra en la figura 2.4. Calcular la fuerza que se ejerce sobre una carga  $q$  que se encuentra en el centro del círculo.

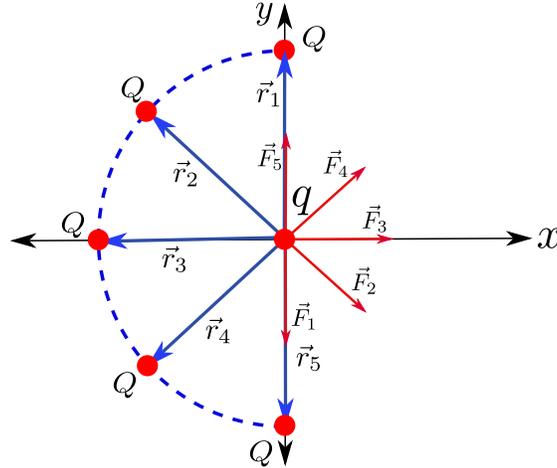


Figura 2.4: Ejemplo (2.3). Seis cargas ubicadas simétricamente sobre un círculo.

**Solución:** Para solucionar el problema planteado, se parte de la expresión para la ley de Coulomb dada por:

$$\vec{F}_{ji} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (2.23)$$

Se tomará el origen de coordenadas, como la posición ocupada por la carga ubicada en el centro del círculo (carga  $q$ ). Al identificar la carga  $q$  como la carga  $q_j$  en la expresión (2.23), es posible establecer que  $\vec{r}_j = 0$ , con lo cual:

$$\vec{F}_{ji} = k_e \frac{q_j q_i}{|-\vec{r}_i|^3} (-\vec{r}_i) = k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_i|^3} (-\vec{r}_i). \quad (2.24)$$

Ahora, la magnitud de los vectores de posición para cada una de las cargas  $q_i = Q$ ; con  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , es la misma, tal que:  $|\vec{r}_i| = R$ . Entonces:

$$\vec{F}_{ji} = k_e \frac{q_i q_j}{R^3} (-\vec{r}_i). \quad (2.25)$$

A partir de la la figura 2.4 es posible establecer las siguientes relaciones:

$$\vec{r}_1 = R\hat{j}, \quad (2.26)$$

$$\vec{r}_2 = -R \cos 45^\circ \hat{i} + R \sen 45^\circ \hat{j}, \quad (2.27)$$

$$\vec{r}_3 = -R\hat{i}, \quad (2.28)$$

$$\vec{r}_4 = -R \cos 45^\circ \hat{i} - R \sen 45^\circ \hat{j}, \quad (2.29)$$

$$\vec{r}_5 = -R\hat{j}. \quad (2.30)$$

Con lo cual:

$$\vec{F}_{q1} = k_e \frac{q_1 q}{R^3} (-\vec{r}_1) = -k_e \frac{Qq}{R^3} R \hat{j} = -k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{j}, \quad (2.31)$$

$$\vec{F}_{q2} = k_e \frac{q_2 q}{R^3} (-\vec{r}_2) = k_e \frac{Qq}{R^3} (R \cos 45^\circ \hat{i} - R \sin 45^\circ \hat{j}) = k_e \frac{Qq}{R^2} (\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}) \quad (2.32)$$

$$\vec{F}_{q3} = k_e \frac{q_3 q}{R^3} (-\vec{r}_3) = k_e \frac{Qq}{R^3} (R \hat{i}) = k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{i}, \quad (2.33)$$

$$\vec{F}_{q4} = k_e \frac{q_4 q}{R^3} (-\vec{r}_4) = k_e \frac{Qq}{R^3} (R \cos 45^\circ \hat{i} + R \sin 45^\circ \hat{j}) = k_e \frac{Qq}{R^2} (\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) \quad (2.34)$$

$$\vec{F}_{q5} = k_e \frac{q_5 q}{R^3} (-\vec{r}_5) = k_e \frac{Qq}{R^3} (R \hat{j}) = k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{j}. \quad (2.35)$$

De manera que la fuerza neta que se ejerce sobre la carga  $q$  es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{q1} + \vec{F}_{q2} + \vec{F}_{q3} + \vec{F}_{q4} + \vec{F}_{q5} \\ &= -k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{j} + k_e \frac{Qq}{R^2} (\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}) + k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{i} + k_e \frac{Qq}{R^2} (\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) \\ &\quad + k_e \frac{Qq}{R^2} \hat{j} \\ &= k_e \frac{Qq}{R^2} \left( 1 + \underbrace{2 \cos 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \hat{i} = k_e \frac{Qq}{R^2} (1 + \sqrt{2}) \hat{i}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

**Ejemplo 2.4.** Una partícula de masa  $m$  y de carga  $q$ , está restringida a moverse verticalmente en un tubo cilíndrico sin fricción, como se muestra en la figura 2.5. En el fondo del tubo se localiza una carga  $Q$ ; de igual signo que  $q$ , que se mantiene fija. A partir de la configuración planteada se realizará lo descrito en los siguientes items: a) Determinar la separación que deben tener las cargas, de tal manera que la carga  $q$  se encuentra en equilibrio. b) Mostrar que si esta masa se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, dicha carga realizará un movimiento armónico simple.

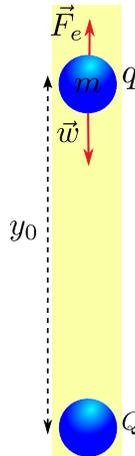


Figura 2.5: Ejemplo (2.4). Partícula de carga  $q$  bajo la influencia de interacción eléctrica y su peso.

**Solución:** Si la carga  $q$  se encuentra en equilibrio a una altura  $y_0$  de la carga  $Q$ , se debe cumplir que:

$$\sum F_y = F_e - w = 0, \quad (2.37)$$

donde:

$$F_e = k_e \frac{qQ}{y_0^2}, \quad w = mg, \quad (2.38)$$

con lo cual

$$k_e \frac{qQ}{y_0^2} = mg, \quad (2.39)$$

es decir:

$$y_0 = \left( \frac{k_e qQ}{mg} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

Ahora, si se desplaza la carga  $q$  hacia abajo una distancia  $y$  de la posición de equilibrio establecida en  $y_0$ , se ejercerá una fuerza neta hacia arriba, de manera que:

$$\sum F_y = F_e - w = k_e \frac{qQ}{(y_0 + y)^2} - mg = ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (2.41)$$

por lo tanto

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{k_e qQ}{m(y_0 + y)^2} + g = 0, \quad (2.42)$$

resultado que se puede expresar como:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{k_e qQ}{m y_0^2 \left(1 + \frac{y}{y_0}\right)^2} + g = 0. \quad (2.43)$$

Ahora, si  $y \ll y_0$ , se cumple que  $\frac{y}{y_0} \ll 1$  y es posible establecer que

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{y}{y_0}\right)^2} = \left(1 + \frac{y}{y_0}\right)^{-2} \simeq 1 - 2\frac{y}{y_0}, \quad (2.44)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{k_e q Q}{m y_0^2 \left(1 + \frac{y}{y_0}\right)^2} + g \\
 &\simeq \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{k_e q Q}{m \underbrace{y_0^2}_{\frac{k_e q Q}{mg}}} \left(1 - 2 \frac{y}{y_0}\right) + g \\
 &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{k_e q Q}{m} \frac{1}{\frac{k_e q Q}{mg}} \left(1 - 2 \frac{y}{y_0}\right) + g \\
 &= \frac{d^2y}{dt^2} - g \left(1 - 2 \frac{y}{y_0}\right) + g \\
 &= \frac{d^2y}{dt^2} - g + 2g \frac{y}{y_0} + g \\
 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2g}{y_0} y.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Una partícula con movimiento armónico simple a lo largo del eje  $y$ , se describe por la siguiente ecuación dinámica:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \tag{2.46}$$

donde  $\omega$  se interpreta como la frecuencia angular. Al comparar las relaciones (2.45) y (2.46), se determina que la partícula cargada  $q$  describe un movimiento armónico simple con una frecuencia angular:

$$\omega^2 = \frac{2g}{y_0}. \tag{2.47}$$

Ahora, el periodo de oscilación se expresa como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{y_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{2g}}. \tag{2.48}$$

**Ejemplo 2.5.** Dos cargas idénticas y pequeñas de masa  $m$  y carga  $q$  se encuentran suspendidas de un punto común por cuerdas de longitud  $L$ . En su configuración de equilibrio, cada carga forma un ángulo  $\theta$  con la vertical como se muestra en la figura 2.6. Para la configuración propuesta, se demostrará que:

$$q = 2L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k_e}}. \tag{2.49}$$

**Solución:** Considerando que en la configuración de equilibrio la distancia entre las cargas es  $d$ , la intensidad de la fuerza eléctrica entre ellas es:

$$F = k_e \frac{q^2}{d^2}. \tag{2.50}$$

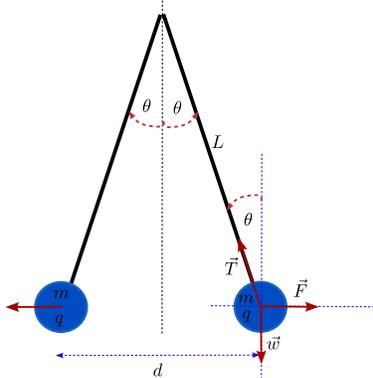


Figura 2.6: Ejemplo (2.5). Dos cargas con igual carga se encuentran en equilibrio, suspendidas por cuerdas de longitud  $L$ .

De la figura 2.6 se puede determinar que:

$$\frac{d}{2} = l \operatorname{sen} \theta, \quad (2.51)$$

de manera que

$$F = k_e \frac{q^2}{4l^2 \operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (2.52)$$

La condición de equilibrio del sistema establece que:

$$\sum F_x = F - T_x = F - T \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.53)$$

$$\sum F_y = T_y - w = T \operatorname{cos} \theta - mg = 0. \quad (2.54)$$

A partir de las relaciones anteriores, se determina que:

$$T \operatorname{sen} \theta = F, \quad T \operatorname{cos} \theta = mg. \quad (2.55)$$

Al dividir las anteriores igualdades, se obtiene:

$$\frac{T \operatorname{sen} \theta}{T \operatorname{cos} \theta} = \tan \theta = \frac{F}{mg} = \frac{1}{mg} \left( k_e \frac{q^2}{4l^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right), \quad (2.56)$$

es decir,

$$\tan \theta = \frac{k_e}{mg} \frac{q^2}{4L^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \quad (2.57)$$

resultado que permite establecer que la carga eléctrica se expresa como:

$$q^2 = mg4L^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\tan \theta}{k_e}, \quad (2.58)$$

y finalmente se concluye que:

$$q = 2L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k_e}}. \quad (2.59)$$

**Ejemplo 2.6.** Una pequeña partícula de masa  $m$  y carga  $-q$ , está restringida a moverse a lo largo de un alambre horizontal sin fricción (eje  $x$ ), como se indica en la figura 2.7. A una distancia  $L$  de este alambre sobre el eje  $y$  y está localizada en una posición fija, una partícula con carga  $q$ . A partir de la configuración anterior, en este ejemplo se mostrará que si la partícula de masa  $m$ , se desplaza una distancia  $x$  (siendo  $x \ll L$ ) a partir de su posición de equilibrio y se libera, dicha partícula experimenta un movimiento armónico simple, adicionalmente se obtendrá una expresión para el periodo.

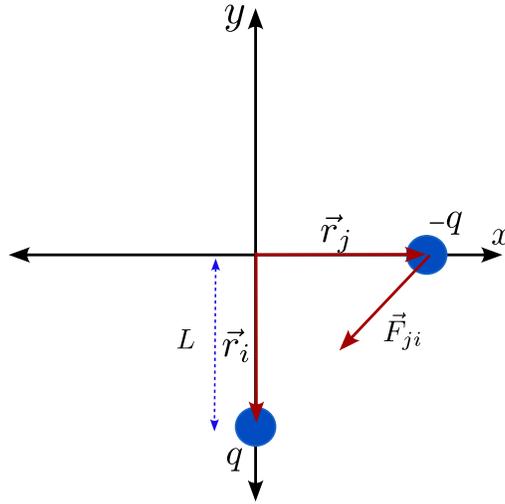


Figura 2.7: Ejemplo (2.6). Movimiento oscilatorio para una carga puntual debido a interacción eléctrica.

**Solución:** De la ley de Coulomb, la fuerza sobre una partícula con carga  $q_j$  debida a una carga  $q_i$  está dada por:

$$\vec{F}_{ji} = k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad (2.60)$$

donde  $q_j$  representa la carga sobre la cual se ejerce la fuerza, que en este caso será la partícula con carga  $-q$  ( $q_j = -q$ ), cuya posición se determina por el vector:  $\vec{r}_j = x\hat{i}$ . La carga  $q_i$  corresponde a la carga fija sobre el eje  $y$ , es decir  $q_i = q$ , cuya posición está definida por el vector  $\vec{r}_i = -L\hat{j}$ . A partir de lo anterior, se tiene que:

$$\vec{r}_j - \vec{r}_i = x\hat{i} - (-L\hat{j}) = x\hat{i} + L\hat{j}, \quad (2.61)$$

adicionalmente

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{x^2 + L^2}. \quad (2.62)$$

Así, la fuerza entre las dos cargas es dada por:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ji} &= k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \\ &= k_e \frac{(-q)(q)}{(\sqrt{x^2 + L^2})^3} (x\hat{i} + L\hat{j}) \\ &= -k_e \frac{q^2}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + L\hat{j}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

La carga  $q$  esta restringida a moverse sobre el eje  $x$ , por lo tanto se infiere que debe existir una fuerza interna entre el alambre y la carga  $q$ , que anule la componente  $y$  asociada a la fuerza  $\vec{F}_{ji}$  definida por (2.63), la cual no se analiza debido a que no es importante para el objetivo propuesto. Por otra parte, al estar restringida la carga  $-q$  a moverse a lo largo del eje  $x$ , se debe cumplir que:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \frac{d^2 x \hat{i}}{dt^2} = -k_e \frac{q^2}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} (x \hat{i}), \quad (2.64)$$

de manera que:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_e \frac{q^2}{(x^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} x = -k_e \frac{q^2}{[L^2 (\frac{x^2}{L^2} + 1)]^{\frac{3}{2}}} x = -k_e \frac{q^2}{L^3 [(\frac{x^2}{L^2} + 1)]^{\frac{3}{2}}} x. \quad (2.65)$$

Si  $\frac{x}{L} < 1$ , entonces  $\frac{x^2}{L^2} \ll 1$ , lo cual permite realizar la siguiente aproximación:

$$\frac{1}{(1 + \frac{x^2}{L^2})^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} \simeq 1, \quad (2.66)$$

entonces,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_e \frac{q^2 x}{L^3} \frac{1}{[(\frac{x^2}{L^2} + 1)]^{\frac{3}{2}}} \simeq -\frac{k_e q^2}{L^3} x, \quad (2.67)$$

lo que establece que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_e q^2}{m L^3} x = 0. \quad (2.68)$$

La ecuación anterior indica que si  $x \ll L$ , la partícula describe un movimiento armónico simple alrededor del origen  $O$  y a lo largo del eje  $x$ , donde es posible identificar la siguiente frecuencia angular:

$$\omega^2 = \frac{k_e q^2}{m L^3}, \quad (2.69)$$

por lo tanto, el periodo de oscilación es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_e q^2}{m L^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m L^3}{k_e q^2}}. \quad (2.70)$$

**Ejemplo 2.7.** Una vara rígida de 1.5 m de largo es equilibrada por un pivote (ver figura 2.8). Una partícula con carga  $q_1 = 7.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ , está localizada en uno de los extremos de la vara. A una distancia  $d_1 = 20.0 \text{ cm}$  por debajo de la carga  $q_1$  se ubica una carga fija  $q_2 = -q_1$ . Para balancear la atracción entre las dos cargas, se suspende un bloque de masa  $m$  a una distancia  $d_2 = 30.0 \text{ cm}$  del punto de equilibrio, como se indica en la figura 2.8. Para la configuración planteada, se determinará el valor de  $m$  para que el sistema esté en equilibrio.

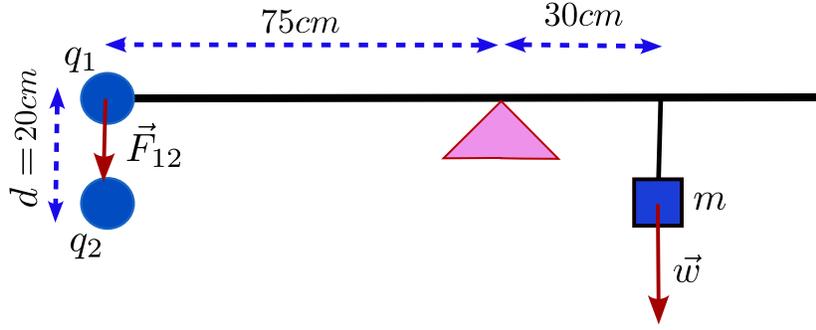


Figura 2.8: Ejemplo (2.7). Vara rígida en equilibrio por la interacción de dos cargas eléctricas, un pivote y una masa  $m$ .

**Solución:** Si la distancia entre las cargas  $q_1$  y  $q_2$  es  $d$ , la fuerza eléctrica aplicada sobre  $q_1$  es:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{j} = -k_e \frac{q_1^2}{d^2} \hat{j}. \quad (2.71)$$

El torque  $\vec{\tau}_1$  aplicado por la fuerza  $\vec{F}_{12}$ , tomando como punto de referencia el punto de equilibrio definido por el pivote, será:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} = (-d_1 \hat{i}) \times (-F_{12} \hat{j}) = d_1 F_{12} \hat{k} = k_e \frac{q_1^2}{d^2} d_1 \hat{k}, \quad (2.72)$$

donde se ha establecido que  $\vec{r}_1 = -d_1 \hat{i}$  ( $d_1 = 75.0 \text{ cm}$ ). Ahora, si  $\vec{\tau}_2$  es el torque ejercido por el peso de la masa  $m$  que se encuentra a la derecha del punto de equilibrio, este se expresa como:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (-mg \hat{j}) = (d_2 \hat{i}) \times (mg \hat{j}) = -d_2 mg \hat{k}, \quad (2.73)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{r}_2 = d_2 \hat{i}$ . Para que exista equilibrio bajo rotación, se debe cumplir que:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (k_e \frac{q_1^2}{d^2} d_1 - mg d_2) \hat{k} = 0. \quad (2.74)$$

De manera que:

$$m = k_e \frac{q_1^2 d_1}{d^2 g d_2} = \left( 8.988 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}^2} \right) \frac{(7 \times 10^{-7} \text{ C})^2 (0.750 \text{ m})}{(0.200 \text{ m})^2 (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (0.300 \text{ m})} = 2.81 \times 10^{-2} \text{ kg}. \quad (2.75)$$

**Ejercicio 2.1.** Tres cargas, cada una de magnitud  $5.0 \text{ nC}$ , están localizadas en los vértices de un cuadrado de lado  $8.0 \text{ cm}$ . Dos cargas localizadas en vértices opuestos son positivas, y la otra carga es negativa. Encontrar la fuerza que ejercen estas cargas, sobre una cuarta carga  $q = 4.0 \text{ nC}$ , localizada en el cuarto vértice.

**Ejercicio 2.2.** Dos partículas con carga  $Q$  están localizadas en las coordenadas  $(6.0 \text{ m}, 4.0 \text{ m})$  y  $(6.0 \text{ m}, -4.0 \text{ m})$ , respectivamente, como se indica en la figura 2.9. La fuerza eléctrica que ejercen las dos cargas sobre una carga  $q_1 = 8.0 \mu\text{C}$  localizada en el punto  $(0,0)$  es  $3.2 \times 10^{-4} \text{ N} \hat{i}$ . Determinar el valor de  $Q$ .

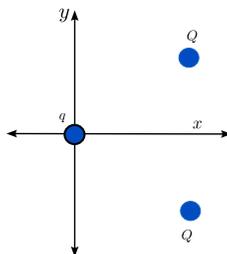


Figura 2.9: Ejercicio (2.2). Tres partículas en interacción eléctrica.

**Ejercicio 2.3.** Cuatro partículas idénticas de valor  $-q$  se fijan en las esquinas de un cuadrado de lado  $a$ . Una quinta carga  $Q$  está ubicada a lo largo de una línea perpendicular que pasa por el centro del cuadrado como se indica en la figura 2.10. Si  $z$  es la distancia entre el centro del plano y la carga  $Q$ , y  $z \ll a$ , mostrar que  $Q$  realiza un movimiento armónico simple y determinar su frecuencia.

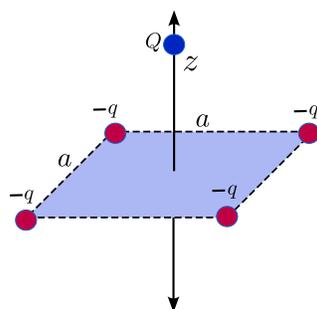


Figura 2.10: Ejercicio (2.3). Cargas puntuales  $-q$  ubicadas en un cuadrado de lado  $a$ , interactuando con una carga  $Q$  a lo largo del eje  $z$ .

**Ejercicio 2.4.** Una carga puntual con carga  $4.5 \mu\text{C}$  está localizada en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano. Una segunda carga puntual con carga de  $8.0 \mu\text{C}$  está localizada en el punto definido por las coordenadas:  $x = -2.0 \text{ m}$  y  $y = -1.5 \text{ m}$ . Encontrar la ubicación en el plano  $xy$ , de tal manera que al colocar un electrón en dicho punto, este permanezca en equilibrio.

**Ejercicio 2.5.** Ocho partículas idénticas de valor  $q > 0$  se fijan en las esquinas de un cubo de lado  $a$ , como se muestra en la Figura (2.11). Una quinta carga  $Q > 0$  se localiza en el punto  $P$ , en el centro de uno de los lados del cubo. Determinar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre esta carga.

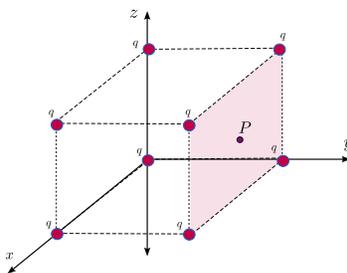


Figura 2.11: Ejercicio (2.5). Configuración de cargas puntuales ubicadas en los vértices de un cubo, interactuando con una carga en un punto  $P$  ubicado en uno de los lados del cubo.

**Ejercicio 2.6.** Considere seis partículas ubicadas en los vértices de un hexágono regular de lado  $a$ , como se indica en la figura 2.12. Evaluar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre una carga puntual positiva  $Q$ , localizada en el centro del hexágono.

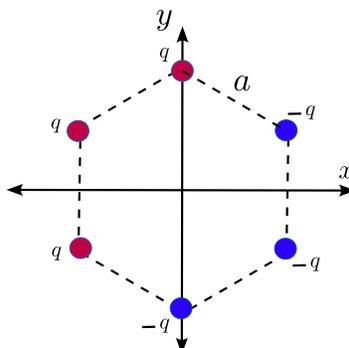


Figura 2.12: Ejercicio (2.6). Configuración de cargas puntuales en un hexágono, interactuando con una carga  $Q$  en el centro del hexágono.

**Ejercicio 2.7.** Tres cargas puntuales están localizadas en las esquinas de un triángulo equilátero como se muestra en la figura 2.13. Calcular la fuerza eléctrica que ejercen estas tres cargas sobre una cuarta carga  $q = 5.0 \mu\text{C}$ , localizada en el centro del triángulo.

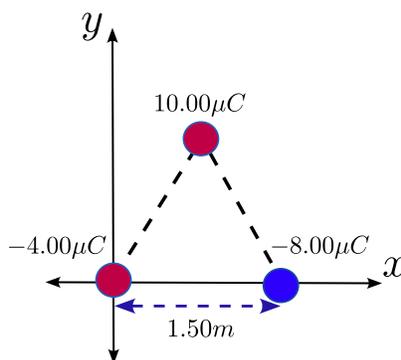


Figura 2.13: Ejercicio (2.7). Configuración de cargas en triángulo equilátero.

**Ejercicio 2.8.** Dos partículas con carga  $-5q$  y  $-2q$  están localizadas en los extremos opuestos de una barra horizontal aislante de longitud  $L$ , como se indica en la figura 2.14. Una tercera carga tiene libertad de deslizarse entre la línea que une las dos cargas. Determine la posición que la carga libre debe tener para que el sistema se encuentre en equilibrio y verifique si es estable.

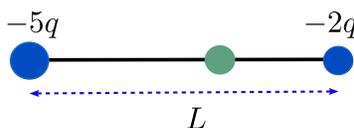


Figura 2.14: Ejercicio (2.8). Cargas puntuales en extremos de barra horizontal.

## 2.3. Distribuciones continuas de carga

En esta sección se utiliza la ley de Coulomb para calcular la fuerza ejercida sobre una partícula de carga  $q$ , debida a una distribución continua de carga. Antes de comenzar con el proceso matemático, se introduce el concepto de densidad de carga.

Cuando se hace referencia a una distribución continua de carga, se considera cargas que se distribuyen sobre parte o toda la región del espacio. En tales circunstancias es útil trabajar con densidades de carga. En el caso de cargas que se distribuyen en un volumen se introduce el concepto de densidad volumétrica de carga, la cual se define como:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad (2.76)$$

donde  $dV$  representa el volumen infinitesimal donde se encuentra distribuida una configuración de carga  $dq$ . La carga total contenida por un cuerpo de volumen  $V$  se calcula a partir de:

$$Q = \int dq = \int \rho dV. \quad (2.77)$$

Ahora, si la carga se distribuye uniformemente sobre todo el volumen ocupado por el cuerpo, la densidad de carga  $\rho$  es constante, y por lo tanto de la relación (2.77) se determina que:

$$Q = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho V, \quad (2.78)$$

de manera que

$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad (2.79)$$

donde  $V$  y  $Q$  representan el volumen y la carga total del cuerpo. Cuando se habla de distribución uniforme de carga, se hace referencia al caso particular en el cual la relación  $\Delta q/\Delta V$ , siempre toma el mismo valor sin importar el tamaño o la ubicación dentro del objeto del cual se haya tomado la muestra  $\Delta V$  (con su respectiva carga  $\Delta q$ ). Otra forma de decirlo, es que si se divide el objeto en  $n$  partes, cualquier parte con volumen  $V_i$  tiene la misma densidad  $q_i/V_i$  de todos los demás.

A pesar de que un objeto físico tiene volumen, es útil realizar algunas aproximaciones en aquellos casos donde una o dos dimensiones del cuerpo son despreciables en relación a la(s) restante(s) dimensión(es) que define(n) el volumen ocupado por el cuerpo. A continuación, se analizan separadamente las dos aproximaciones más importantes:

1. Si dos dimensiones que definen el volumen de un objeto son despreciables en relación a la tercera, entonces se puede decir que el cuerpo es lineal (como por el ejemplo un

cable, un hilo o un cabello), y al considerar que solo se tiene en cuenta una dimensión, es práctico trabajar con la densidad lineal de carga, que se define como:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}, \quad (2.80)$$

donde  $dl$  identifica la longitud de un elemento del cuerpo con carga  $dq$ . Si el objeto tiene la carga uniformemente distribuida sobre su longitud, un análisis similar al descrito para deducir la relación (2.79), permite establecer que:

$$\lambda = \frac{Q}{L}, \quad (2.81)$$

donde  $L$  representa la longitud total del cuerpo y  $Q$  su carga.

2. Si el cuerpo tiene una dimensión despreciable, entonces es práctico utilizar una densidad de carga superficial, simbólicamente representada por  $\sigma$ , la cual se define como:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}, \quad (2.82)$$

donde  $dA$  define un área infinitesimal que contiene una carga  $dq$ . Si el objeto presenta una carga distribuida uniformemente sobre toda su área, entonces la densidad superficial es equivalente a:

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (2.83)$$

donde  $A$  define el área total del objeto y  $Q$  su carga.

**Ejemplo 2.8.** Una distribución lineal de carga se encuentra localizada a lo largo del eje  $x$ , desde  $x_0$  hasta el infinito positivo. La densidad lineal de carga no es uniforme y está dada por:  $\lambda(x) = \frac{\lambda_0 x_0}{x^2}$ . Para la configuración descrita se calculará la carga total.

**Solución:** La carga total debido a una distribución lineal de carga es dada por:

$$Q = \int \lambda dl, \quad (2.84)$$

de manera que para la distribución considerada, la carga total es:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{x_0}^{\infty} dx \lambda(x) = \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\lambda_0 x_0}{x^2} = \lambda_0 x_0 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lambda_0 x_0 \left( -\frac{1}{x} \right)_{x_0}^{\infty} = \lambda_0 x_0 \left( \frac{1}{x_0} \right) \\ &= \lambda_0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

**Ejemplo 2.9.** Una distribución de carga positiva está localizada sobre un semicírculo de radio  $R$ , como se muestra en la figura 2.15. La densidad lineal de carga asociada es definida por la relación  $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos \theta$ , donde  $\theta$  representa el ángulo medido respecto al eje  $z$ . Para la configuración planteada se calculará la carga total del sistema.

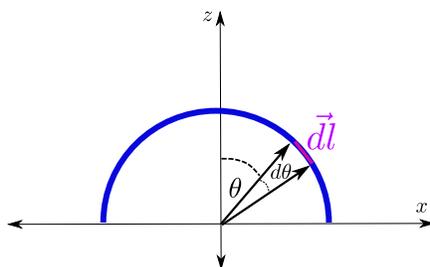


Figura 2.15: Ejemplo (2.9). Distribución de carga lineal sobre un semicírculo de radio  $R$ .

**Solución:** El diferencial de longitud  $dl$  de la distribución de carga, se puede identificar como un segmento de arco de longitud  $dl$  sobre el semicírculo, y se puede expresar en términos del radio  $R$  y el ángulo  $d\theta$ , tal que:  $dl = R d\theta$ . Así, la carga total asociada al sistema se expresa como:

$$\begin{aligned} Q &= \int dl \lambda = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R d\theta \lambda(\theta) = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \lambda_0 \cos \theta \\ &= R \lambda_0 \left. \sin \theta \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R \lambda_0 \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= R \lambda_0 [1 - (-1)] = 2R \lambda_0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

**Ejemplo 2.10.** Un plano infinito posee un agujero de radio  $b$  como se indica en la Figura (2.16). El plano tiene una carga que se encuentra distribuida de manera no uniforme mediante la relación:  $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{b}{r^3}$ , donde  $r$  es la distancia medida desde el centro del agujero. Para el sistema descrito, se determinará la carga total del plano.

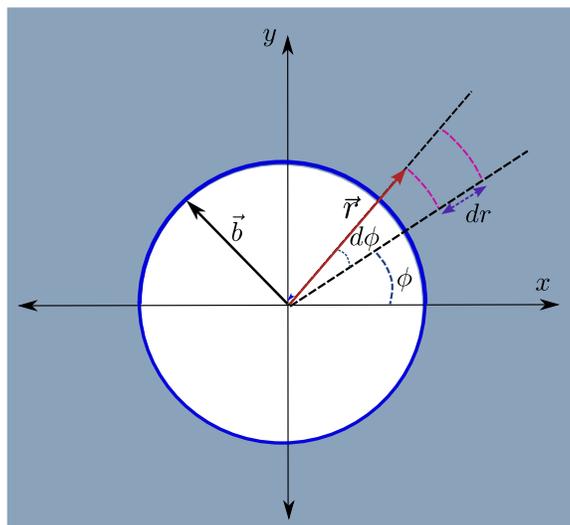


Figura 2.16: Ejemplo (2.10). Carga total de un plano con carga eléctrica no uniforme.

**Solución:** Para un sistema que posee una carga distribuida sobre su superficie, la carga total es determinada a partir de:

$$Q = \int da\sigma. \quad (2.87)$$

De acuerdo a la figura 2.16, el elemento de área (en coordenadas polares) es dado por:

$$da = (dr)(rd\phi) = rdrd\phi, \quad (2.88)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} Q &= \int da\sigma(r) = \int_b^\infty \int_0^{2\pi} rdrd\phi\sigma_0 \frac{b}{r^3} = \sigma_0 b \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \sigma_0 b \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_b^\infty (\phi) \Big|_0^{2\pi} = \sigma_0 b \left( \frac{1}{b} \right) (2\pi) = 2\pi\sigma_0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

**Ejemplo 2.11.** Un cascarón esférico de radio  $R$ , centrado en el origen de coordenadas, posee una carga distribuida sobre su superficie de acuerdo a la relación  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin\theta$  (ver figura 2.17). A partir de los datos anteriores, se calculará en este ejemplo la carga total del cascarón esférico.

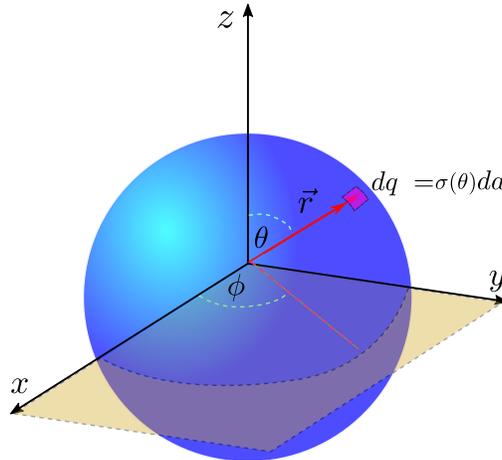


Figura 2.17: Ejemplo (2.11). Carga total en un cascarón esférico con densidad de carga no uniforme.

**Solución:** Un elemento de área sobre la superficie del cascarón en coordenadas esféricas se expresa como:  $da = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ , de manera que la carga total es:

$$\begin{aligned} Q &= \int da\sigma(\theta) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \sigma_0 \sin\theta = \sigma_0 R^2 \int_0^\pi \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \sigma_0 R^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta (2\pi) = \sigma_0 \pi R^2 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \sigma_0 \pi R^2 (\pi) = \sigma_0 \pi^2 R^2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

**Ejemplo 2.12.** Una esfera masiva de radio  $R$  posee una carga distribuida sobre su volumen de manera no uniforme de acuerdo a la relación:

$$\rho(r) = \begin{cases} ar & \text{para } 0 \leq r \leq R, \\ 0 & \text{para } r > R, \end{cases} \quad (2.91)$$

donde  $a$  es constante y  $r$  es la distancia radial medida desde el centro de la esfera. Para esta situación, se encontrará la carga total de la esfera.

**Solución:** La carga total asociada a un sistema caracterizado por una densidad volumétrica de carga  $\rho$  es determinada a partir de:

$$Q = \int \rho dV, \quad (2.92)$$

donde  $dV$  corresponde al diferencial de volumen y  $\rho$  a la densidad volumétrica de carga. El elemento de volumen en coordenadas esféricas está dada por:  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ , de manera que:

$$\begin{aligned} Q &= \int dV \rho(r) = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi (ar) \\ &= a \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &= a \left( \frac{1}{4}R^4 \right) (\pi) (2\pi) = \frac{1}{2}a\pi^2 R^4. \end{aligned} \quad (2.93)$$

**Ejercicio 2.9.** Una objeto lineal cargado, está localizada en el eje  $x$ , desde  $x = -x_0$  hasta  $x = x_0$ . La densidad lineal de carga del objeto se expresa por:  $\lambda = \lambda_0 \frac{x^2}{x_0^2}$ . Calcular la carga total del material.

**Ejercicio 2.10.** Un disco cargado uniformemente de radio 45.0 cm, posee una carga caracterizada por una densidad superficial de  $8.1 \times 10^{-3} \frac{C}{m^2}$ . Calcular la carga total del disco.

**Ejercicio 2.11.** Una arandela cargada de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , posee una carga distribuida sobre su superficie, dada por la relación:  $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{r}{(b-a)}$ , donde  $r$  es la distancia medida desde el centro de la arandela. Mostrar que la carga total de la arandela es:  $Q = \frac{2\pi}{3} \sigma_0 (b^2 + ab + a^2)$ .

**Ejercicio 2.12.** Considere una distribución esférica de carga, con una densidad de carga dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{A}{r} & \text{para } 0 \leq r \leq R, \\ 0 & \text{para } r > R, \end{cases} \quad (2.94)$$

donde  $A$  es una constante y  $r$  es la distancia radial medida desde el centro de la esfera. Calcular la carga total del sistema.

**Ejercicio 2.13.** Un cilindro hueco de radio interior  $a$ , radio exterior  $b$  y largo  $L$ , posee una densidad de carga volumétrica dada por:  $\rho(r) = ar^2$ , donde  $a$  es una constante y  $r$  es la distancia radial medida desde el eje de simetría del cilindro. Determinar la carga total del cilindro.

**Ejercicio 2.14.** Un cilindro de radio  $R$  y altura  $h$ , con su eje  $z$  orientado a lo largo del eje de simetría del cilindro, posee una densidad volumétrica de carga:  $\rho(z) = \rho_0 + bz$ , con  $\rho_0$  y  $b$  siendo constantes. Determinar la carga total del cilindro.

**Ejercicio 2.15.** Un lago aproximadamente circular de radio  $a$ , está contaminado con productos químicos. Dicha contaminación ha establecido una distribución de carga sobre la superficie del lago, que se expresa a través de:

$$\sigma(r) = -\frac{\sigma_0 c^3}{\sqrt{(r^2 + c^2)^3}}, \quad (2.95)$$

donde  $c$  es contante y  $r$  es la distancia radial medida desde el centro del lago. Calcular la carga total que se localiza en la superficie del lago.

Con los conceptos de densidad de carga ya introducidos, es posible describir el proceso matemático para encontrar la fuerza total que ejerce un cuerpo de carga total  $Q$  sobre una partícula puntual  $q$  a partir de ley de Coulomb y el principio de superposición.

## 2.4. Fuerza entre una carga puntual y un cuerpo con distribución continua de carga

En esta sección se explica el método para encontrar la fuerza sobre una carga puntual  $q$ , ejercida por un cuerpo con una carga total  $Q$ , distribuida sobre un volumen, un área o una longitud.

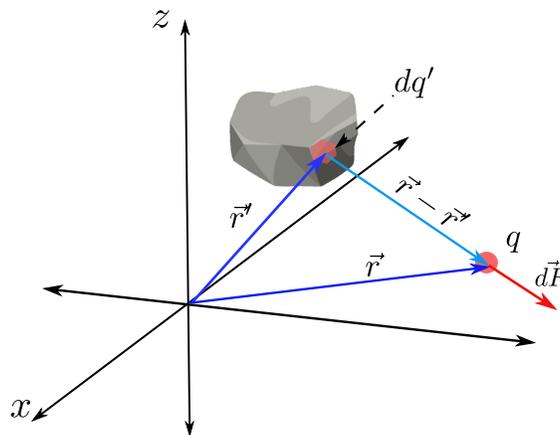


Figura 2.18: Ley de coulomb en una distribución continua de carga.

El método consiste en tomar un diferencial de carga infinitesimal  $dq'$ , sobre el objeto cargado, cuya posición respecto a un origen coordenado estará definido por un vector de posición  $\vec{r}'$ . El elemento  $dq'$  se considera puntual ya que cualquier dimensión que defina su volumen  $dV$  es mucho menor a cualquier otra dimensión relevante en el problema. A partir de lo anterior

se procede a evaluar la fuerza  $d\vec{F}$  que el elemento de carga  $dq'$  ejerce sobre la carga puntual  $q$  ubicada en la posición  $\vec{r}$  con la ayuda de la ley de Coulomb, tal que:

$$d\vec{F}(\vec{r}) = k_e \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.96)$$

donde  $(\vec{r} - \vec{r}')$  es el vector dirigido desde el elemento de carga  $dq'$  hasta la partícula cargada  $q$ , como se muestra en la figura 2.18. Para encontrar la fuerza total  $\vec{F}$  que ejerce el objeto cargado sobre la partícula  $q$ , se aplica el principio de superposición y se calcula la fuerza neta que ejercen el sistema de cargas  $dq'$ , lo que matemáticamente consiste en integrar la ecuación (2.96), sobre la carga total  $Q$  que caracteriza el objeto, es decir:

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_e \int_Q \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.97)$$

A continuación se presentan ejemplos en diferentes situaciones donde se aplica la ecuación (2.97).

**Ejemplo 2.13.** *En este ejemplo se considera un cable infinitamente largo, ubicado a lo largo del eje  $y$ . A una distancia horizontal  $a$  del eje  $y$ , se ubica una partícula con carga  $q$ . Para tal configuración se calculará la fuerza total que ejerce el alambre sobre la carga  $q$  (ver figura 2.19).*

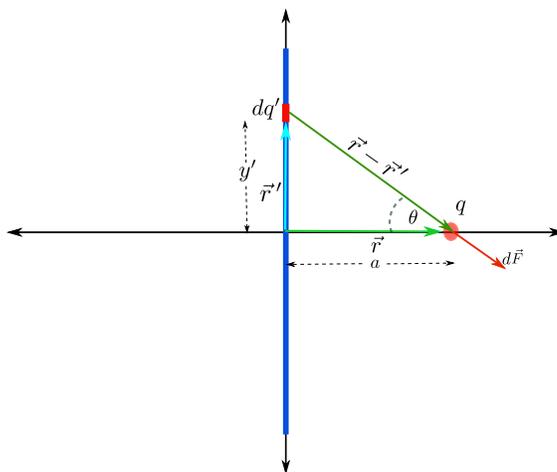


Figura 2.19: Ejemplo (2.13). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea infinita de carga.

**Solución:** *Para resolver el problema planteado, en primer lugar se escoge un elemento diferencial de carga  $dq'$  sobre el alambre, y su ubicación se asociará al vector  $\vec{r}'$ . Posteriormente se establece la expresión que define la fuerza  $d\vec{F}$  (ecuación (2.96)), que ejerce el elemento diferencial de carga  $dq'$ , sobre la carga  $q$  ubicada en la posición  $\vec{r}$ , como se indica en la figura 2.19. Gráficamente el vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y el elemento de carga  $dq'$  necesarios para formular la*

ecuación (2.97) se indican en la figura 2.19, donde también se observa la fuerza  $d\vec{F}(\vec{r})$ . El vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  se debe establecer de acuerdo al origen del sistema cartesiano elegido, para ello es necesario definir la posición del elemento de carga  $dq'$  y la posición de la carga  $q$ ; en este caso y según la figura 2.19 los vectores de posición para  $dq'$  y  $q$  son:

$$\vec{r}' = y'\hat{j}, \quad (2.98)$$

$$\vec{r} = a\hat{i}, \quad (2.99)$$

ahora, teniendo en cuenta (2.98) y (2.99), se tiene que:

$$(\vec{r} - \vec{r}') = a\hat{i} - y'\hat{j}, \quad (2.100)$$

reemplazando (2.100) en (2.96), se encuentra:

$$d\vec{F} = k_e \frac{qdq'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} (a\hat{i} - y'\hat{j}), \quad (2.101)$$

y por lo tanto, la fuerza total sobre  $q$  es:

$$\vec{F} = k_e \int_Q \frac{qdq'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} (a\hat{i} - y'\hat{j}). \quad (2.102)$$

Dado que cada elemento  $dq'$  que se tome sobre el cable infinito, tiene una ubicación diferente respecto al origen de coordenadas ( $y'$  cambia), es necesario establecer  $dq'$  en términos de la variable  $y'$ , para lo cual se utiliza el concepto de densidad lineal de carga  $\lambda$  (ya que por ser un cable delgado, solo una dimensión es relevante). Entonces, a partir de (2.80), se tiene que:

$$dq' = \lambda dl' \equiv \lambda dy', \quad (2.103)$$

donde se ha identificado  $dl' = dy'$ , ya que la longitud del cable se extiende en el eje  $y'$ . Al reemplazar (2.103) en (2.102), se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\lambda dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} (a\hat{i} - y'\hat{j}), \\ &= k_e q a \lambda \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{i} - k_e q \lambda \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y' dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

En la última expresión los límites de integración se han definido teniendo en cuenta que el cable es infinito y comienza en  $y' \rightarrow -\infty$  y termina en  $y' \rightarrow \infty$ . Adicionalmente, en la segunda línea de (2.104) se ha tenido en cuenta que  $q$ ,  $a$  y  $\lambda$  son constantes (en este caso  $\lambda$  no tiene dependencia respecto a la variable de integración). Las integrales expresadas en

(2.104), son comunes en cálculos donde aparezcan líneas cargadas y su solución se indica en el apéndice (??). Teniendo en cuenta el resultado expresado en (??), se tiene que

$$\int \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + a^2}}. \quad (2.105)$$

A partir del resultado anterior y al considerar los límites de integración asociados al problema, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + a^2}} \Big|_{-b}^b \right\} \\ &= \frac{1}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} - \frac{-b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right\} \\ &= \frac{2}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

La segunda integral en (2.104) se puede simplificar bajo el reemplazo:  $u = a^2 + y'^2$ , con lo cual  $du = 2y'dy'$  y se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{u^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

es decir

$$\int \frac{y'dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{(a^2 + y'^2)^{1/2}}, \quad (2.108)$$

y bajo los límites de integración asociados al problema, finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y'dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{(a^2 + y'^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\equiv -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(a^2 + y'^2)^{1/2}} \Big|_{-b}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Reemplazando (2.109) y (2.106) en (2.104), se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 2k_e \frac{q\lambda}{a} \hat{i} \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \hat{i}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Como se muestra con el resultado obtenido, la fuerza solo tiene componente en dirección  $\hat{i}$ . La componente en dirección  $\hat{j}$  se cancela por la simetría del problema (hay simetría respecto al origen en el eje  $y$ ).

**Ejemplo 2.14.** En este ejemplo se considera una configuración similar al ejemplo anterior (ejemplo (2.13)), con la diferencia que en este caso el conductor será finito, con una longitud  $L$ , ubicado simétricamente respecto al eje  $x$ ; es decir,  $L/2$  por encima del eje  $x$  y  $L/2$  por debajo del eje  $x$ , como se observa en la figura 2.20. Para la situación planteada se encontrará la fuerza que el alambre cargado ejerce sobre una partícula de carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  sobre el eje  $x$ .

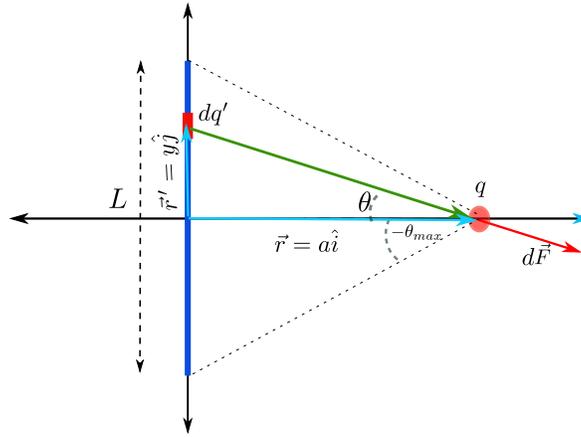


Figura 2.20: Ejemplo (2.14). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea finita de carga.

**Solución:** Todos los procedimientos desarrollados en el ejemplo (2.13) se aplican en este ejercicio, lo único que cambia son los límites en las respectivas integrales. Así, la fuerza del conductor lineal finito sobre la carga  $q$  en este caso es:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= k_e \int_{-L/2}^{L/2} \frac{q\lambda dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} (a\hat{i} - y'\hat{j}), \\ &= k_e q a \lambda \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{i} - k_e q \lambda \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y' dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{j}.\end{aligned}\quad (2.111)$$

Ahora, las integrales presenten en (2.111) son iguales a las expresadas en (2.105) y (2.108). Con los límites específicos de este problema, las expresiones (2.105) y (2.108) quedan como:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{y'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{L}{a^2(a^2 + L^2/4)^{1/2}}, \quad (2.112)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{y' dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(a^2 + y'^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} = 0, \quad (2.113)$$

El resultado expresado en (2.113) es una consecuencia de la simetría del problema, lo cual anula la componente en  $y'$  de la fuerza  $\vec{F}$  por lo cual dicha fuerza solo tiene componente en dirección  $\hat{i}$ , tal que:

$$\vec{F} = k_e q \lambda \frac{L}{a(a^2 + L^2/4)^{1/2}} \hat{i}. \quad (2.114)$$

Al reemplazar  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$  y  $\lambda = Q/L$ , se tiene que:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a(a^2 + L^2/4)^{1/2}} \hat{i}. \quad (2.115)$$

**Ejemplo 2.15.** Una carga  $Q$  positiva se encuentra distribuida uniformemente sobre un alambre delgado de longitud  $L$ , que se extiende a lo largo del eje  $y$ , como se muestra en la figura 2.21. Una carga  $q$  positiva se localiza en el eje  $x$  a una distancia  $a$  del origen. En este ejemplo se evaluará la fuerza eléctrica que ejerce la distribución de carga  $Q$  sobre la carga puntual  $q$  y se analizará el caso cuando  $a \gg L$ .

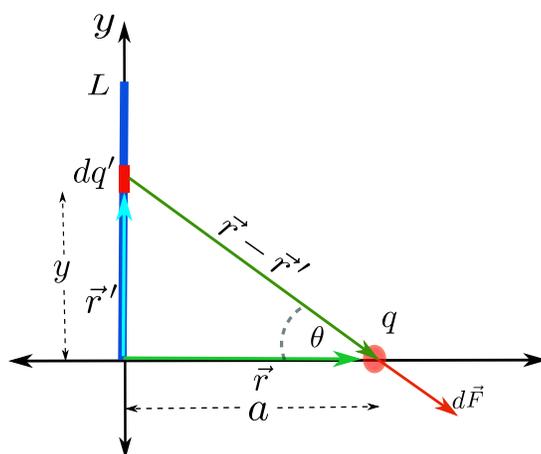


Figura 2.21: Ejemplo (2.15). Fuerza sobre una carga puntual  $q$ , debida a una línea de carga finita .

**Solución:** El procedimiento para resolver el problema bajo la configuración planteada, es similar al desarrollado en el ejemplo (2.13), salvo por los límites de integración, que en este caso van desde 0 hasta  $L$ . por lo tanto, se puede seguir el método aplicado en el ejemplo (2.13) hasta llegar a la ecuación (2.104), donde se deben modificar los límites de integración con los valores apropiados para este caso, con lo cual, se tiene que la fuerza ejercida sobre la carga puntual  $q$  será:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e \int_0^L \frac{q \lambda dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} (a\hat{i} - y'\hat{j}), \\ &= k_e q a \lambda \left( \int_0^L \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{i} - k_e q \lambda \left( \int_0^L \frac{y' dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Las integrales presenten en (2.116), se especifican en (2.105) y (2.108). Con los límites específicos de este problema, las expresiones (2.105) y (2.108) quedan como:

$$\int_0^L \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{y'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} \Big|_0^L = \frac{L}{a^2(a^2 + L^2)^{1/2}}, \quad (2.117)$$

$$\int_0^L \frac{y' dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(a^2 + y'^2)^{1/2}} \Big|_0^L = -\frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} + \frac{1}{a}, \quad (2.118)$$

por lo tanto

$$\vec{F} = \frac{k_e q Q}{a} \frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} \hat{i} + \frac{k_e q Q}{L} \left[ \frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} - \frac{1}{a} \right] \hat{j}. \quad (2.119)$$

Ahora, para analizar el límite cuando  $a \gg L$ , que es equivalente a:  $1 \gg \frac{L}{a}$  se expresa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} &= \frac{1}{a \left[ 1 + \left( \frac{L}{a} \right)^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{a} \left[ 1 + \left( \frac{L}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &\simeq \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} \right)^2 \right] = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{a^3}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{k_e q Q}{a} \frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} \simeq \frac{k_e q Q}{a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{a^3} \right) \\ &= \frac{k_e q Q}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{k_e q Q a^2}{a^4} \simeq \frac{k_e q Q}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

donde se considera, que el segundo término, es mucho más pequeño que el primero. De igual manera, la componente  $y$  de la fuerza se expresa como:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{k_e q Q}{L} \left[ \frac{1}{(a^2 + L^2)^{1/2}} - \frac{1}{a} \right] \simeq \frac{k_e q Q}{L} \left[ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{a^3} \right) - \frac{1}{a} \right] \\ &= \frac{k_e q Q}{L} \left( -\frac{1}{2} \frac{L^2}{a^3} \right) = -\frac{1}{2} \frac{k_e q Q L}{a^3}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Por tanto, en el límite cuando  $a \gg L$  la fuerza que se ejerce sobre la carga puntual  $Q$  es:

$$\vec{F} \simeq \frac{k_e q Q}{a^2} \hat{i} - \frac{k_e q Q L}{2a^3} \hat{j}. \quad (2.123)$$

**Ejemplo 2.16.** *Dos líneas de carga de longitud  $2a$  poseen densidades lineales de carga uniforme  $-\lambda$ ,  $\lambda$  y forman un ángulo recto como se muestra en la figura 2.22. Una carga puntual negativa  $-Q$  se localiza en el punto  $P$  (ver figura 2.22). Para la configuración descrita se encontrará la fuerza resultante que ejerce el sistema de líneas de carga sobre la carga puntual.*

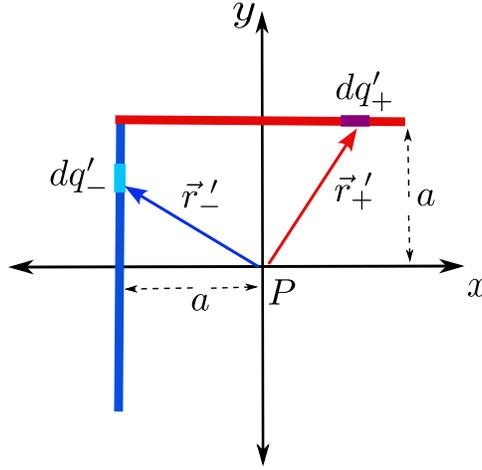


Figura 2.22: Ejemplo (2.16). Fuerza eléctrica entre dos barras cargadas.

**Solución:** *Para solucionar el problema, en primer lugar se tomará un elemento infinitesimal de cada una de las líneas de cargas y se procede a calcular la fuerza que los elementos en mención ejercen sobre la carga  $Q$ . Un elemento de carga  $dq_+$  distribuido sobre un segmento de longitud  $dx$  se identifica por el vector de posición*

$$\vec{r}'_+ = x\hat{i} + a\hat{j}, \quad (2.124)$$

*en tanto, que un elemento de carga  $dq_-$  distribuido en un segmento  $dy$  se caracteriza por el vector:*

$$\vec{r}'_- = -a\hat{i} + y\hat{j}. \quad (2.125)$$

*El vector de posición  $P$  donde se localiza la carga puntual  $-Q$  se expresa como:*

$$\vec{r} = 0. \quad (2.126)$$

*por lo tanto, la fuerza  $d\vec{F}$  que se ejerce sobre la carga puntual por los elementos de carga  $dq_+$  y  $dq_-$  es:*

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= k_e \frac{(-Q) dq_+}{|\vec{r} - \vec{r}'_+|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_+) + k_e \frac{(-Q) dq_-}{|\vec{r} - \vec{r}'_-|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_-) \\ &= k_e \frac{Q dq_+}{|-\vec{r}'_+|^3} \vec{r}'_+ + k_e \frac{Q dq_-}{|-\vec{r}'_-|^3} \vec{r}'_- \\ &= k_e \frac{Q dq_+}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + a\hat{j}) + k_e \frac{Q dq_-}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-a\hat{i} + y\hat{j}). \end{aligned} \quad (2.127)$$

*Ahora, en términos de las densidades lineales de carga uniformes  $-\lambda$  y  $\lambda$ , se deduce que:*

$$dq_+ = \lambda dx \quad , \quad dq_- = -\lambda dy, \quad (2.128)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= k_e \frac{Q\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + a\hat{j}) - k_e \frac{Q\lambda dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-a\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= k_e Q\lambda \left[ \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + a\hat{j}) - \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-a\hat{i} + y\hat{j}) \right]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Por tanto, la fuerza eléctrica total que ejercen las líneas de carga sobre  $-Q$  es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e Q\lambda \left[ \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + a\hat{j}) - \int_{-a}^a \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-a\hat{i} + y\hat{j}) \right] \\ &= k_e Q\lambda \left[ \hat{i} \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx + a\hat{j} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + a\hat{i} \int_{-a}^a \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \hat{j} \int_{-a}^a \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Para simplificar cálculos, se renombrará la variable de integración en la tercera y cuarta integral en (2.130), haciendo  $y \rightarrow x$ , con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e Q\lambda \left[ \hat{i} \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx + a\hat{j} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + a\hat{i} \underbrace{\int_{-a}^a \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}}_{y \rightarrow x} \right. \\ &\quad \left. - \hat{j} \underbrace{\int_{-a}^a \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}}_{y \rightarrow x} \right] \\ &= k_e Q\lambda \left[ \hat{i} \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx + a\hat{j} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + a\hat{i} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \hat{j} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= k_e Q\lambda \left[ (\hat{i} - \hat{j}) \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx + (a\hat{i} + a\hat{j}) \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Para evaluar las integrales presentes en la última relación, se utiliza los resultados expresados en (2.105) y (2.108), tal que:

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.132)$$

con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left. \frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-a}^a = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{a}{(a^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{(a^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ 2 \frac{a}{(2a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.133)$$

y,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \left. - \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-a}^a = - \left[ \frac{1}{(a^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.134)$$

De manera que la fuerza que ejercen las líneas de cargas sobre la carga puntual  $-Q$  es:

$$\vec{F} = k_e Q \lambda (a\hat{i} + a\hat{j}) \frac{\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}k_e Q \lambda}{a} (\hat{i} + \hat{j}). \quad (2.135)$$

**Ejemplo 2.17.** En este ejemplo se calcula la fuerza ejercida sobre una carga  $q$ , debida a un carga  $Q$  distribuida sobre un alambre de longitud  $L$ . La posición relativa entre el alambre lineal, la carga  $q$  y el sistema coordenado, se muestra en la figura 2.23.

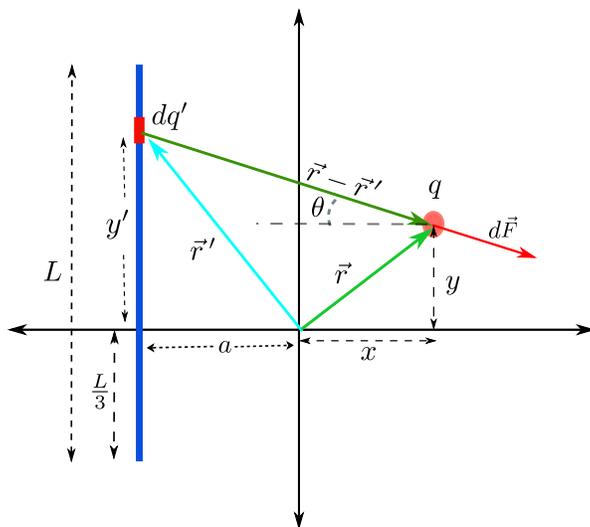


Figura 2.23: Ejemplo (2.17). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea asimétrica finita con densidad de carga uniforme.

**Solución:** Aunque la elección del sistema cartesiano es arbitraria y lo usual es escoger un sistema que facilite el cálculo, en este ejemplo se trabaja con un sistema cartesiano poco usual, con el fin de que el lector logre una mejor comprensión de los elementos involucrados en la ley de Coulomb para desarrollar problemas que involucren distribuciones discretas de carga; las simplificaciones si no se entienden con total claridad, generan vacíos en los conceptos

físicos y matemáticos dejando una sensación errónea de la comprensión de un tema. A partir de la ley de Coulomb y de la figura 2.23, se puede establecer que la fuerza  $d\vec{F}$  que ejerce el elemento diferencial de carga  $dq'$  sobre  $q$  viene dado por:

$$d\vec{F} = k_e \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.136)$$

en este caso y según se observa en la figura 2.23, las posiciones  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  son:

$$\vec{r}' = -a\hat{i} + y'\hat{j}, \quad (2.137)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad (2.138)$$

y por lo tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x + a)\hat{i} + (y - y')\hat{j}. \quad (2.139)$$

Al reemplazar (2.139) en (2.136) e integrar sobre  $Q$ , se tiene:

$$\vec{F} = k_e \int_Q \frac{q dq'}{((a + x)^2 + (y - y')^2)^{3/2}} ((a + x)\hat{i} + (y - y')\hat{j}), \quad (2.140)$$

para realizar la integral en (2.140), se consideran los siguientes reemplazos:

$$a + x = b, \quad (2.141)$$

$$y' - y = u, \quad (2.142)$$

$$dy' = du. \quad (2.143)$$

Por lo tanto,  $dq = \lambda dy' = \lambda du$ . Teniendo en cuenta (2.141), (2.142) y (2.143), la expresión (2.140) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e \int_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \frac{q \lambda du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} (b\hat{i} - u\hat{j}), \\ &= k_e q b \lambda \left( \int_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \frac{du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} \right) \hat{i} - k_e q \lambda \left( \int_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \frac{u du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Los límites de integración en (2.144) se han establecido teniendo en cuenta que según el origen del sistema cartesiano que se está trabajando, el extremo superior de la barra queda a una distancia  $L - L/3$  (y por tanto  $u_{max} = L - L/3 - y$ ), y el extremo inferior a una distancia respecto al origen igual a  $-L/3$  (y por tanto  $u_{min} = -L/3 - y$ ). La expresión (2.144), salvo por los límites de integración, tiene las mismas integrales de la expresión (2.104), cuyos resultados se indican en las expresiones (2.105) y (2.108). A partir del resultado indicado en (2.105) y bajo los límites propios de este ejemplo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \frac{du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} &= \frac{1}{b^2} \frac{u}{(b^2 + u^2)^{1/2}} \Big|_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \\
&= \frac{L - y - L/3}{b^2(b^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{y + L/3}{b^2(b^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.145}$$

A partir del resultado anterior, la componente  $F_x$  de (2.144), está dada por:

$$F_x = \frac{k_e q \lambda}{b} \left( \frac{L - y - L/3}{(b^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} + \frac{y + L/3}{(b^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}} \right). \tag{2.146}$$

La segunda integral en (2.144) asociada a  $F_y$  es directa (ver integral (2.108)), tal que:

$$\begin{aligned}
F_y &= k_e q \lambda \left( \int_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \frac{u du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} \right) = -k_e q \lambda \left( \frac{1}{(b^2 + u^2)^{1/2}} \right) \Big|_{-(y+L/3)}^{L-(y+L/3)} \\
&= -k_e q \lambda \left( \frac{1}{(b^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}} \right) \\
&= -k_e q \lambda \left( \frac{1}{((x + a)^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x + a)^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.147}$$

Las expresiones (2.146) y (2.147) representan las componentes cartesianas de la fuerza total  $\vec{F}$  que ejerce el cable sobre la partícula  $q$ , la cual se encuentra ubicada en el punto  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ .

**Ejemplo 2.18.** En este ejemplo se considera un anillo circular de radio  $R$  y carga  $Q$  uniformemente distribuida sobre su perímetro. Se encontrará la fuerza que dicho anillo ejerce sobre una partícula de carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  del centro del anillo, sobre un eje perpendicular al plano del mismo (que se toma como el eje  $y$ ), como se observa en la figura 2.24.

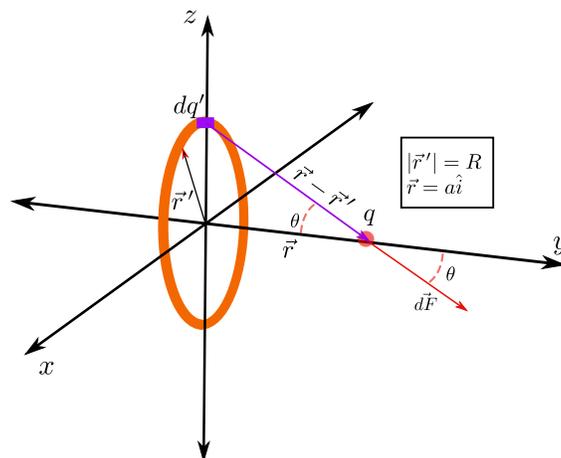


Figura 2.24: Ejemplo (2.18). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y un anillo cargado eléctricamente.

**Solución:** Para resolver el problema planteado, en primer lugar se toma un elemento de carga  $dq'$  del anillo ubicado en el extremo superior, como se observa en la figura 2.24, de tal manera que la fuerza  $d\vec{F}$  que ejerce el elemento  $dq'$  sobre la carga  $q$  es:

$$d\vec{F} = k_e \frac{qdq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.148)$$

donde  $(\vec{r} - \vec{r}')$  representa el vector dirigido desde el elemento  $dq'$  a la carga  $q$ . La magnitud del vector  $d\vec{F}$ , está dado por:

$$dF = k_e \frac{qdq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |\vec{r} - \vec{r}'| = k_e \frac{qdq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}. \quad (2.149)$$

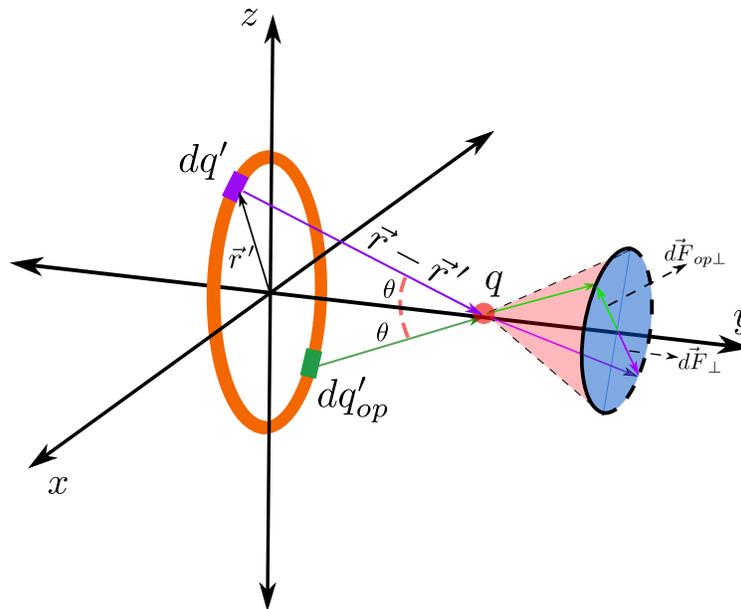


Figura 2.25: Ejemplo (2.18). Descomposición vectorial de la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a un aro cargado.

La figura 2.24 muestra la fuerza  $d\vec{F}$  aplicada sobre  $q$  debido a la interacción con el elemento de carga  $dq'$ . Si se toman diferentes elementos de carga  $dq'$  a lo largo del anillo, los vectores de fuerza aplicados sobre  $q$  generaran un cono (o estarán sobre la superficie de un cono) cuyo eje coincide con el eje  $y$  (ver figura 2.25). Cada fuerza  $d\vec{F}$  generada por un elemento  $dq'$  del anillo, se puede descomponer en dos componentes: una de ellas está a lo largo del eje  $y$  ( $d\vec{F}_y$ ) y la otra componente ( $d\vec{F}_\perp$ ) está sobre un plano paralelo al plano del anillo y perpendicular al eje  $y$  (representado en la figura 2.25 por el círculo azul). Por cada elemento  $dq'$  en el anillo, existe un elemento opuesto  $dq'_{op}$ , de tal manera que por cada componente perpendicular al eje  $y$  de la fuerza  $d\vec{F}$  ( $d\vec{F}_\perp$ ) existe una componente de igual magnitud y con sentido contrario proveniente del elemento opuesto  $dq'_{op}$  (ver figura 2.25), y por ello, dichas componentes se cancelan en la integración necesaria para calcular la fuerza total  $\vec{F}$ .

Por lo anterior, la fuerza total  $\vec{F}$  resultado de la integración, solo tendrá componente en dirección  $\hat{j}$  (la simetría del problema como ya se explicó, anula cualquier otra componente). Con base en la deducción anterior, la única componente de  $d\vec{F}$  que contribuye en la fuerza total es  $dF_y$ , la cual se puede escribir como:

$$dF_y = dF \cos \theta, \quad (2.150)$$

donde  $\theta$  representa el ángulo entre el eje  $y$  y el vector de fuerza  $d\vec{F}$  asociado a cualquier elemento  $dq'$  en el anillo (ver figura 2.25), con lo anterior se tiene que:

$$dF_y = k_e \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta, \quad (2.151)$$

y por lo tanto:

$$\vec{F} = \int_Q dF_y \hat{j} = k_e \left( \int_Q \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta \right) \hat{j}. \quad (2.152)$$

En (2.152),  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  representa la distancia entre la carga  $q$  y cualquier elemento de carga  $dq'$  en el anillo; El vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$ , cambia entre diferentes elementos  $dq'$ , pero no su magnitud, por lo tanto,  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  es una constante en la integración presente en (2.152). De igual forma, el ángulo  $\theta$  tampoco varía (está asociado al ángulo del vértice del cono generado por las fuerzas  $d\vec{F}$ , según se indica en la figura 2.25). Con lo anterior, la expresión (2.152) se puede escribir como:

$$\vec{F} = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta \left( \int_Q dq' \right) \hat{j} = k_e \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta \hat{j}. \quad (2.153)$$

Por otro lado, según los datos del problema expresados en la figura 2.25 (o 2.24), se tiene que  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + a^2}$  y  $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$ , por lo cual:

$$\vec{F} = k_e \frac{qQa}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (2.154)$$

El resultado expresado en (2.154) se tendrá en cuenta en el próximo problema, donde se va a encontrar la fuerza ejercida por un disco de carga  $Q$ .

**Ejemplo 2.19.** En este ejemplo se considera la fuerza que un disco de radio interior  $\vec{r}_1$  y radio exterior  $\vec{r}_2$  con carga  $Q$ , ejerce sobre una carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  del centro del disco, sobre un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro del mismo, como se observa en la figura 2.26.

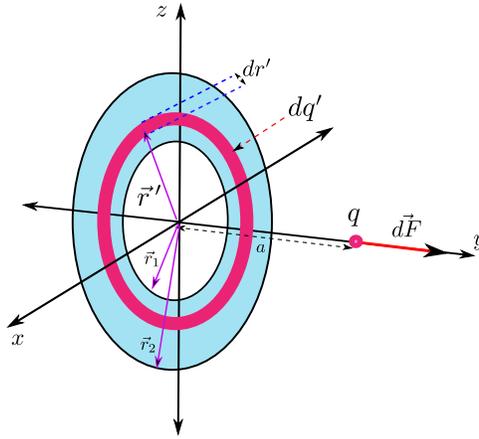


Figura 2.26: Ejemplo (2.19). Fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a un disco cargado.

**Solución:** Para resolver el problema planteado, se considera un anillo circular de radio  $r'$  y ancho infinitesimal  $dr'$ , ilustrado en rojo en la figura 2.26. Se asume que la carga de dicho anillo infinitesimal es  $dq'$ , y por lo tanto, la fuerza que dicho anillo (de ancho infinitesimal) ejerce sobre la partícula  $q$ , vendrá dada por la expresión (2.154); cambiando en (2.154)  $Q$  por  $dq$  y  $R$  por  $r'$ , se tiene que:

$$d\vec{F} = k_e \frac{aqdq'}{(r'^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (2.155)$$

A partir de (2.155), la fuerza total vendrá dada por:

$$\vec{F} = k_e \int_Q \frac{aqdq'}{(r'^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (2.156)$$

En este caso, ya que un disco es un objeto plano, se utiliza la densidad superficial de carga  $\sigma$ , tal que:

$$dq = \sigma dA, \quad (2.157)$$

donde  $dA$  representa el área del anillo infinitesimal, la cual viene dada por:

$$dA = 2\pi r' dr', \quad (2.158)$$

tal que:

$$dq = \sigma 2\pi r' dr'. \quad (2.159)$$

Reemplazando (2.159) en (2.156), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= k_e \int_{r_1}^{r_2} \frac{aq2\pi\sigma r' dr'}{(r'^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j} = k_e q 2\pi a \sigma \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' dr'}{(r'^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j} \\
 &= -k_e q 2\pi a \sigma \frac{1}{(r'^2 + a^2)^{1/2}} \Big|_{r_1}^{r_2} \hat{j} \\
 &= -k_e q 2\pi a \sigma \left( \frac{1}{(r_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_1^2 + a^2)^{1/2}} \right) \hat{j} \\
 &= -k_e \frac{2aqQ}{(r_2^2 - r_1^2)} \left( \frac{1}{(r_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_1^2 + a^2)^{1/2}} \right) \hat{j}, \tag{2.160}
 \end{aligned}$$

donde en la última línea de (2.160) se ha reemplazado  $\sigma \rightarrow \frac{Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$ .

En el problema resuelto, se ha considerado un disco con un hueco en el centro (por tener un radio interno  $r_1 \neq 0$ ). Para un disco plano sin hueco en el interior, basta con tomar  $r_1 \rightarrow 0$  en la expresión (2.160), por tanto:

$$\vec{F} = -k_e \frac{2aqQ}{r_2^2} \left( \frac{1}{(r_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{a} \right) \hat{j}. \tag{2.161}$$

**Ejemplo 2.20.** En este ejemplo, se va a encontrar la fuerza que ejerce un plano infinito con densidad de carga  $\sigma$ , sobre una carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  del plano (ver figura 2.27).

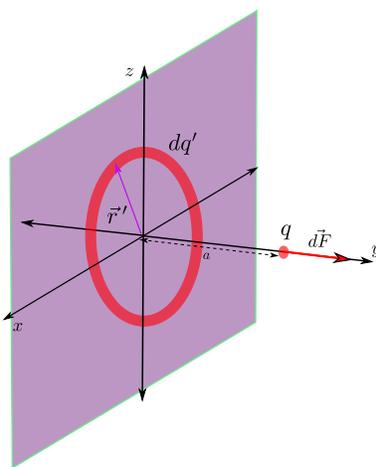


Figura 2.27: Ejemplo (2.20). Fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a plano infinito cargado.

**Solución:** Lo primero que se debe tener en cuenta es que al ser un plano infinito, no se puede dar una carga total  $Q$  para el plano como en los anteriores problemas, ya que la carga total  $Q$  de un plano con densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ , sería infinita. Pero si es posible encontrar una expresión en términos de la densidad de carga superficial, ya que para ello solo se necesita cualquier elemento de área del plano y su respectiva carga (que sí es finita). Por otro lado, al ser un plano infinito, no existe un origen absoluto sobre las coordenadas que

definen el plano de estudio; es decir, el plano se extiende hacia el infinito en cualquiera de las dos direcciones que definen el plano, independiente desde donde se observe. Por lo anterior, la fuerza total sobre una carga  $q$  ejercida por el plano cargado, depende exclusivamente de la distancia perpendicular al plano a la cual se coloque la carga  $q$ . Debido a la simetría, la fuerza total planteada, solo podrá tener la componente correspondiente al eje perpendicular del plano infinito. En otras palabras, si se representa el objeto en estudio como el plano  $xz$ , entonces la fuerza tendrá dirección  $\hat{j}$  y solo dependerá de la distancia  $a$ , medida sobre el eje  $y$  y que determina la posición de  $q$  (ver figura 2.27).

Matemáticamente el problema se puede resolver si se considera el plano como un disco con radio infinito, con lo cual se puede hacer uso del resultado dado por (2.160), antes de tomar los límites de integración (partiendo de la segunda línea de (2.160) y tomando los límites particulares a este ejemplo). Tomando los límites de integración  $r_2 \rightarrow \infty$  y  $r_1 = 0$  en la segunda línea de (2.160), se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -k_e q 2\pi a \sigma \frac{1}{(r'^2 + a^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} \hat{j} \\ &= k_e q 2\pi \sigma \hat{j} \\ &= q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j},\end{aligned}\tag{2.162}$$

donde en la última línea de (2.162) se ha reemplazado  $k_e \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

**Ejemplo 2.21.** Un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$  está uniformemente cargado con carga total  $Q > 0$ . En este ejemplo se determinará la fuerza eléctrica sobre una carga puntual  $q$  que se encuentre localizada sobre el eje del cilindro y a una distancia  $a$  de este como se indica en la figura 2.28.

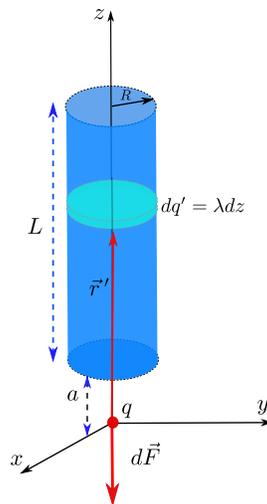


Figura 2.28: Ejemplo (2.21). Fuerza eléctrica sobre una carga  $q$  debido a un cilindro cargado.

**Solución:** Un cilindro de longitud  $L$  y radio  $R$  se puede dividir en discos de radio  $R$  y espesor  $dz$ . Por lo tanto, es viable calcular, en primera instancia, la fuerza que uno de los discos en mención ejerce sobre la carga  $Q$ , para posteriormente encontrar la fuerza total, aplicando

una integración adecuada. Por lo tanto, se tomará como punto de partida la ecuación (2.161) que expresa el resultado para la fuerza que ejerce un disco de carga  $Q$  sobre una partícula  $q$  ubicada a una distancia  $a$  del centro del disco, dada por:

$$\vec{F} = -k_e \frac{2aqQ}{r_2^2} \left( \frac{1}{(r_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{a} \right) \hat{j}. \quad (2.163)$$

Para poder utilizar la anterior relación al problema actual, se debe reemplazar  $Q \rightarrow dq'$  (ya que ahora se considera un disco de ancho infinitesimal),  $r_2 \rightarrow R$  y  $a \rightarrow z$  (ya que en este caso, la distancia entre el disco y la carga lo establece la coordenada  $z$ ). Adicionalmente la dirección de la fuerza está a lo largo del eje  $z$ . Por lo tanto, un disco de espesor  $dz$  ejercerá una fuerza sobre la carga puntual  $q$  dada por la expresión:

$$d\vec{F} = -k_e \frac{2aqdq'}{R^2} \left( \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{z} \right) \hat{k}. \quad (2.164)$$

Ahora, el disco con carga  $dq'$ , que se distribuye en un espesor  $dz$ , se relaciona con la carga  $Q$  contenida en el cilindro de longitud  $L$  mediante la relación,

$$dq' = \frac{Q}{L} dz, \quad (2.165)$$

con lo cual, la relación (2.164) se escribe:

$$d\vec{F} = \frac{2k_e Q}{R^2 L} dz \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] (-\hat{k}), \quad (2.166)$$

así, la fuerza eléctrica total es:

$$\vec{F} = \frac{2k_e Q}{R^2 L} \int_a^{a+L} dz \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] (-\hat{k}), \quad (2.167)$$

ahora, siendo

$$\int dz \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = (z^2 + R^2)^{1/2}, \quad (2.168)$$

resulta que:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{2k_e Q}{R^2 L} \left[ z - (z^2 + R^2)^{1/2} \right]_a^{a+L} (-\hat{k}) \\ &= \frac{2k_e Q}{R^2 L} \left\{ (a+L) - [(a+L)^2 + R^2]^{1/2} - a + (a^2 + R^2)^{1/2} \right\} (-\hat{k}) \\ &= \frac{2k_e Q}{R^2 L} \left\{ L + (a^2 + R^2)^{1/2} - [(a+L)^2 + R^2]^{1/2} \right\} (-\hat{k}). \end{aligned} \quad (2.169)$$

**Ejercicio 2.16.** Una distribución lineal de carga se encuentra localizada a lo largo del eje  $x$ , desde un punto  $x = x_0 > 0$ , hasta  $x \rightarrow \infty$ . La densidad lineal de carga no es uniforme y está dada por:  $\lambda(x) = \alpha x$ , donde  $\alpha$  es una constante con unidades carga eléctrica. Una carga puntual positiva  $Q$  se localiza en  $x = -a$ . Calcular la fuerza electrostática que se ejerce sobre la carga puntual.

**Ejercicio 2.17.** Dos planos infinitos paralelos que se extienden en el plano  $yz$ , poseen densidades superficiales de carga uniforme positivas ( $\sigma = \text{cte} > 0$ ). Los planos cortan el eje  $x$  en  $x = \pm a$ . Determinar la fuerza electrostática sobre una carga puntual  $q$  negativa ubicada sobre el eje  $x$ , en los siguientes casos: a) En la region  $x > a$ . b) En la region  $x < -a$ . c) En la region  $-a < x < a$ .

**Ejercicio 2.18.** Una carga puntual positiva  $q$  se localiza en la posición  $x = a + r$ , como se muestra en la figura 2.29. Próxima a esta, se encuentra una carga  $Q$  distribuida de manera uniforme sobre un segmento de longitud  $a$ . Calcular la intensidad de la fuerza eléctrica que la carga  $Q$  ejerce sobre la carga puntual. Mostrar que si  $r \gg a$ , la magnitud de la fuerza eléctrica se expresa como:  $F = k_e \frac{Qq}{r^2}$ .

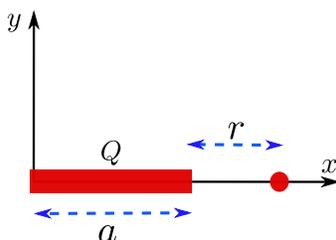


Figura 2.29: Ejercicio (2.18). Interacción entre una carga puntual y una distribución lineal de carga

**Ejercicio 2.19.** Considere un alambre infinito que posee una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda > 0$ . En un punto del alambre infinito se conecta una masa  $m$  de carga  $q > 0$  por medio de una cuerda de longitud  $l$  (se asume que la cuerda tiene masa despreciable y carga cero), formando un péndulo simple como se muestra en la Figura (2.30). Encontrar el ángulo  $\theta$  que garantiza la configuración en equilibrio del sistema.

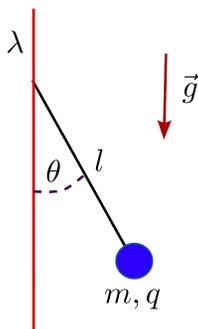


Figura 2.30: Ejercicio (2.19). Partícula de carga  $q$  interactuando con un alambre infinito cargado

**Ejercicio 2.20.** Tres líneas de carga infinitamente largas se extienden paralelas al eje  $z$ , como se muestra en la figura 2.31. Las líneas de carga tienen las siguientes distribuciones lineales uniformes de carga:

$$\begin{aligned} -\lambda, & \text{ para la línea ubicada en } x = -a, \\ \lambda, & \text{ para la línea ubicada en } x = 0, \\ -\lambda, & \text{ para la línea ubicada en } x = a. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Calcular la fuerza electrostática que ejerce el sistema sobre una carga puntual  $Q$  positiva localizada en el punto  $\vec{r} = b\hat{j}$ .

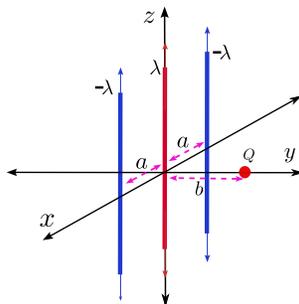


Figura 2.31: Ejercicio (2.20). Fuerza sobre una carga puntual  $Q$  ejercida por tres densidades lineales infinitas de carga

**Ejercicio 2.21.** Considere el sistema planteado en el ejercicio (2.17), solo que esta vez, el plano localizado en  $x = a$  posee una densidad superficial positiva, mientras que el plano en  $x = -a$ , presenta una densidad superficial negativa.

**Pregunta 2.1.** Dos electrones ( $e_1$  y  $e_2$ ) y un protón ( $p$ ), se encuentran a lo largo de una línea recta como se muestra en la figura 2.32. La dirección de la fuerza neta sobre cada una de las partículas es:

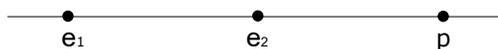


Figura 2.32: Pregunta (2.1). Dirección de la fuerza eléctrica sobre dos electrones y un protón.

1.  $\rightarrow \rightarrow \leftarrow$
2.  $\rightarrow \leftarrow \leftarrow$
3.  $\leftarrow \leftarrow \rightarrow$
4.  $\leftarrow \rightarrow \leftarrow$

**Pregunta 2.2.** Dos partículas de carga  $+q$  y una de carga  $-Q$ , se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura 2.33. Respecto a la fuerza total sobre la partícula con carga  $-Q$ , es correcto afirmar que:

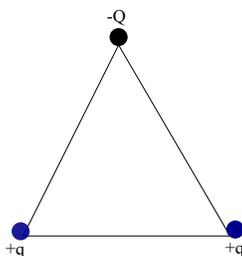


Figura 2.33: Pregunta (2.2). Fuerza eléctrica sobre una partícula de carga  $-Q$

1. Es perpendicular al lado derecho del triángulo.
2. Es perpendicular al lado izquierdo del triángulo.
3. Es paralela al lado izquierdo del triángulo.
4. Es paralela a la base del triángulo.
5. Es perpendicular a la base del triángulo.

**Pregunta 2.3.** Dos partículas con cargas  $4Q$  y  $2Q$  se encuentran sobre el eje  $x$ , separadas por una distancia  $d$ . Si se requiere que la fuerza neta sobre una tercera partícula de carga  $2Q$  sea cero, su ubicación correcta será:

1. Debe colocarse en la línea que une a las dos primeras partículas, no entre las cargas y al lado de  $4Q$ .
2. Debe colocarse en la línea que une a las dos primeras partículas, no entre las cargas y al lado de  $2Q$ .
3. Debe colocarse en la línea que une a las dos primeras partículas, entre las cargas y más cerca de  $4Q$ .
4. Debe colocarse en la línea que une a las dos primeras partículas, entre las cargas y más cerca de  $2Q$ .

**Pregunta 2.4.** Considere cuatro cargas  $Q$  ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $L$ . Si la longitud del cuadrado cambia de  $L$  a  $L/2$ , el factor en el que cambia la magnitud de la fuerza eléctrica sobre una de las cargas será:

1. el doble.
2. no cambia.
3. el cuádruple.
4. igual.
5. cero.
6. ninguna de las anteriores.

**Pregunta 2.5.** Una partícula con carga  $q$  se encuentra inicialmente a lo largo del eje de un disco con radio interior  $r_1$ , radio exterior  $r_2$  y carga  $Q$ , y se ubica a una distancia  $d$  respecto al centro del disco. Si la partícula se mueve a lo largo del eje hasta llevarla al centro del disco, es correcto afirmar que:

1. La magnitud de la fuerza eléctrica sobre  $q$  aumenta.

2. La magnitud de la fuerza eléctrica sobre  $q$  disminuye.
3. La magnitud de la fuerza eléctrica sobre  $q$  no cambia.
4. La magnitud de la fuerza eléctrica sobre  $q$  es cero sobre cualquier punto del recorrido.

**Pregunta 2.6.** Si en el problema anterior, se cambia el disco por un plano infinito de densidad de carga  $\sigma$ , respecto a la fuerza sobre  $q$  es correcto afirmar que:

1. La fuerza eléctrica sobre  $q$  aumenta.
2. La fuerza eléctrica sobre  $q$  disminuye.
3. La fuerza eléctrica sobre  $q$  no cambia.
4. La fuerza eléctrica sobre  $q$  es cero sobre cualquier punto del recorrido.

**Pregunta 2.7.** Tres cargas puntuales están situadas en las esquinas de un triángulo equilátero, donde:  $q_1 = 3 \mu C$  y se ubica en el vértice  $A$ ,  $q_2 = -6 \mu C$  y se ubica en el vértice  $B$ ,  $q_3 = 2 \mu C$  y se ubica en el vértice  $C$ . La distancia entre cada par de cargas es  $d = 0.2 \text{ m}$ . Si se desea calcular la dirección neta de la fuerza que actúa sobre la carga  $q_1$  debido a las otras dos cargas, ¿cuál de las siguientes opciones, describe correctamente la dirección de la fuerza neta sobre  $q_1$ ?

1. La fuerza neta está dirigida hacia  $q_2$ .
2. La fuerza neta está dirigida hacia  $q_3$ .
3. La fuerza neta está dirigida hacia un punto en la línea que une  $q_2$  y  $q_3$ .
4. La fuerza neta está dirigida en un ángulo hacia el vértice  $B$ .
5. La fuerza neta está dirigida hacia el exterior del triángulo.

## 3– Campo Eléctrico

---

Para comprender conceptualmente el campo eléctrico, se considera el siguiente ejercicio mental: un observador tiene acceso a una región limitada del espacio de volumen  $V$ , donde puede realizar experimentos, pero no puede ver que hay fuera de dicha región. En la región  $V$ , que inicialmente se encuentra vacía, se coloca una carga de prueba  $q$  en algún punto. Si dicha carga experimenta una aceleración, es claro que debe existir algo por fuera de la región de estudio que interactúa con la carga  $q$ . Si además, el signo de la carga  $q$  determina el sentido de la aceleración, se puede descartar la interacción gravitacional, y por tanto, se infiere que debe existir una o varias partículas cargadas fuera de la región de estudio.

Si la carga, tiene una masa  $m$  y se ubica en diferentes lugares de la región  $V$  y se mide la fuerza que siente en cada punto (ya que  $\vec{F} = m\vec{a}$ ), es posible graficar punto a punto el vector de fuerza. Dicha gráfica representa un campo vectorial que se puede construir sin conocimiento de lo que hay fuera de la región. El campo de fuerzas mencionado, dependerá del valor de la carga  $q$ , pero la magnitud  $\vec{F}/q$  será independiente de esta y por tanto representa una propiedad vectorial en la región  $V$  que se puede extender a todo el espacio; dicha propiedad se conoce como campo eléctrico  $\vec{E}$  (propiedad adquirida por la presencia de partículas o cuerpos cargados dentro del espacio). Formalmente el campo eléctrico se define como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (3.1)$$

El límite en (3.1) es necesario dado que se debe eliminar la influencia de la carga de prueba  $q$  (que no contribuye al campo eléctrico que se desea medir), lo cual matemáticamente se logra aplicando el límite  $\lim_{q \rightarrow 0}$ .

### 3.1. Campo eléctrico debido a cargas puntuales

La fuerza sobre una carga  $q_2$  ubicada en la posición  $\vec{r}$  debida a una carga  $q_1$  caracterizada por el vector  $\vec{r}_1$ , está dada por la ley de Coulomb, tal que:

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1). \quad (3.2)$$

A partir de (3.1) se puede deducir que el campo eléctrico generado por la carga  $q_1$  en el punto  $\vec{r}$ , vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{21}}{q_2} \\ &= k_e \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Si en (3.3) se toma  $q_1 \rightarrow q$  y se ubica dicha carga en el origen (tal que  $\vec{r}_1 \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= k_e \frac{q}{|\vec{r}|^3} (\vec{r}) \\ &= k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

El resultado expresado en (3.4) define que el campo eléctrico generado por una carga aislada  $q$  ubicada en el origen de coordenadas, es directamente proporcional a  $1/r^2$  y con dirección radial; saliendo de la carga  $q$ , para  $q > 0$ , y entrando a la carga  $q$ , para  $q < 0$  (ver figura 3.1).

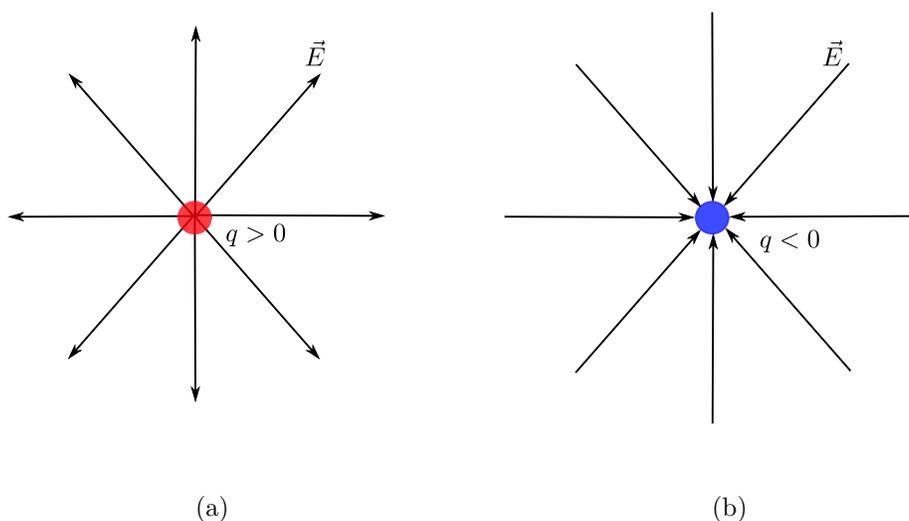


Figura 3.1: Campo eléctrico para cargas puntuales.

El campo eléctrico obedece el principio de superposición; es decir, el campo eléctrico debido a  $N$  cargas puntuales es igual a la suma vectorial del campo eléctrico generado por cada partícula cargada. Por lo tanto, el campo eléctrico en un punto  $P$  del espacio identificado por el vector  $\vec{r}$ , generado por  $N$  partículas cargadas ubicadas en las posiciones  $\vec{r}_i$ , está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) aplicada al caso particular de dos partículas cargadas está dada por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^2 k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como ya se mencionó, el campo eléctrico se pone en evidencia en una región del espacio, cuando al colocar una carga de prueba en un punto de la región en estudio, esta experimenta una fuerza. Existe una manera de representar el campo eléctrico y es mediante *líneas de campo*, las cuales son líneas imaginarias que determinan la trayectoria que una carga de prueba  $q_p$  ( $q_p \rightarrow 0$ ) seguiría en presencia de un campo eléctrico. El concepto de línea de campo eléctrico fue introducido por Faraday y su relación con el campo eléctrico en una región del espacio está determinada por:

- El vector de campo eléctrico es tangente en todo punto a la línea de campo eléctrico. Las líneas de campo tienen una orientación determinada por la dirección del campo eléctrico en cada punto. Lo anterior conlleva a que las líneas de campo emerjan de cargas positivas y converjan en cargas negativas.
- Teniendo en cuenta que el campo eléctrico tiene un valor bien definido en cada punto del espacio, las líneas de campo no pueden cruzarse. Si en un punto dos líneas se cruzaran, cada línea tendría una tangente diferente en dicho punto y, por lo tanto, habría un campo eléctrico por cada línea, lo cual no es posible. Una carga de prueba ubicada en un punto donde dos líneas de campo se cruzaran tendría dos posibles trayectorias, lo que contradice la teoría determinista.
- A partir de las líneas de campo en una región, es posible deducir propiedades del campo eléctrico. Por ejemplo, si se compara la separación entre líneas de campo en dos regiones diferentes del espacio, es posible establecer donde la magnitud del campo eléctrico es mayor; cuanto más cercanas se encuentren las líneas de campo (mayor densidad), mayor será el campo eléctrico.

Como ya se mencionó, las trayectorias seguidas por una carga de prueba  $q_p$  ( $q_p \rightarrow 0$ ) en una región del espacio donde exista un campo eléctrico, corresponden a las líneas de campo eléctrico. Como se puede observar en las figuras 3.1a y 3.1b, las líneas de campo eléctrico asociadas a partículas puntuales aisladas son rectas radiales a las cargas que producen el campo eléctrico. En la figura 3.2 se muestra que las líneas de campo de dos partículas cargadas son curvas que salen de la carga positiva e ingresan en la carga negativa, teniendo

siempre como tangente la dirección del campo eléctrico. La figura 3.3 ilustra cómo las líneas de campo eléctrico de dos cargas positivas se “repelen” (lo mismo sucede si las dos cargas son negativas), siendo asintóticas a la línea vertical imaginaria que separa las dos cargas en el punto medio (para cargas de igual magnitud).

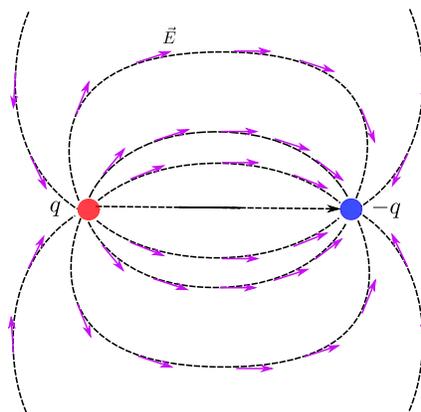


Figura 3.2: Campo eléctrico generado por dos cargas de signo opuesto.

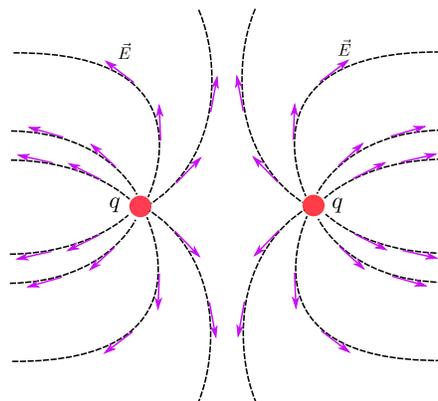


Figura 3.3: Campo eléctrico generado por dos cargas positivas.

Con el conocimiento del campo eléctrico, se puede determinar fácilmente la fuerza que ejerce dicho campo (independiente de su origen) sobre una partícula con carga  $q$ , mediante la relación:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}. \quad (3.7)$$

A partir de la relación (3.7) se deduce que las cargas positivas ( $q > 0$ ) en presencia de un campo eléctrico se moverán en la dirección del campo, mientras que las cargas negativas ( $q < 0$ ) se moverán en dirección contraria al campo eléctrico.

**Ejemplo 3.1.** Cuatro cargas puntuales idénticas de valor  $q$ , están ubicadas en las esquinas de un rectángulo de lados  $l$  y  $w$ , como se muestra en la figura 3.4. Determinar el campo eléctrico resultante en el centro del rectángulo.

**Solución:** Para facilitar los cálculos, se considerará el centro del rectángulo como el origen del sistema coordenadas. De esta manera, la posición de las cuatro cargas, se caracteriza por los siguientes vectores:

$$q_1 \rightarrow \vec{r}_1 = \frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}, \quad (3.8)$$

$$q_2 \rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}, \quad (3.9)$$

$$q_3 \rightarrow \vec{r}_3 = \frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}, \quad (3.10)$$

$$q_4 \rightarrow \vec{r}_4 = -\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}. \quad (3.11)$$

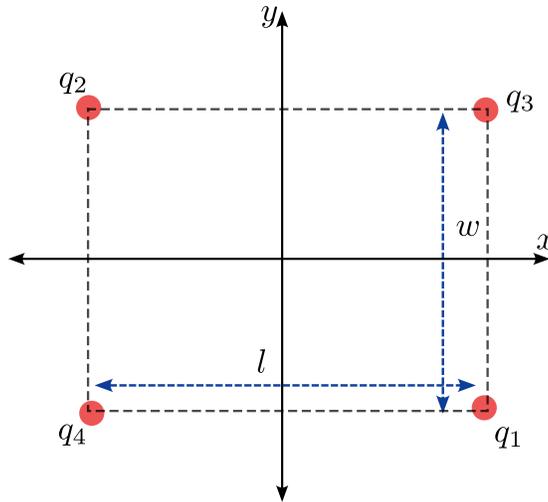


Figura 3.4: Ejemplo 3.1. Campo eléctrico debido a cuatro cargas puntuales

Los campos eléctricos asociados a cada carga se identifican mediante:

$$q_i \rightarrow \vec{E}_i = k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.12)$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $q_i = q$ . Ya que se desea evaluar el campo eléctrico en el origen de coordenadas, se establece que:

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad (3.13)$$

por lo tanto,

$$q_i \rightarrow \vec{E}_i = -k_e \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^3} (\vec{r}_i). \quad (3.14)$$

Adicionalmente, a partir de (3.11), se puede determinar que para todo valor de  $i$ , se tiene que:

$$|\vec{r}_i| = \frac{1}{2} (w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Por consiguiente, los campos eléctricos asociados a las cargas se escriben como:

$$q_1 \rightarrow \vec{E}_1 = k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(-\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right), \quad (3.16)$$

$$q_2 \rightarrow \vec{E}_2 = k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right), \quad (3.17)$$

$$q_3 \rightarrow \vec{E}_3 = k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(-\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right), \quad (3.18)$$

$$q_4 \rightarrow \vec{E}_4 = k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right). \quad (3.19)$$

Así que, el campo eléctrico total es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \\ &= k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(-\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right) + k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right) \\ &\quad + k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(-\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right) + k_e \frac{q}{\left[\frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} \left(\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right) \\ &= \frac{8k_e q}{(w^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left(-\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right) + \left(\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{w}{2}\hat{i} - \frac{l}{2}\hat{j}\right) + \left(\frac{w}{2}\hat{i} + \frac{l}{2}\hat{j}\right) \right\} \\ &= \frac{8k_e q}{(w^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} [0\hat{i} + 0\hat{j}] \\ &= 0\hat{i} + 0\hat{j}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

es decir, el campo eléctrico en el centro del rectángulo es nulo.

**Ejemplo 3.2.** Ocho partículas con cargas idénticas de valor  $q$  se encuentran ubicadas en las esquinas de un cubo de lado  $a$ , como se muestra en la figura 3.5. Para la configuración dada, se demostrará que el campo eléctrico en el centro del cubo es nulo.

**Solución:** Si se considera el origen de coordenadas en el centro del cubo, se determina que:

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad (3.21)$$

de manera que los campos eléctricos asociados a cada carga están dados por:

$$q_i \rightarrow \vec{E}_i = k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) = -k_e \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i, \quad (3.22)$$

donde  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$  y  $q_i = q$ . Según la ubicación de las cargas en el cubo con centro en el origen, los vectores de posición para cada una de estas serán:

$$\vec{r}_1 = \frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \quad (3.23)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \quad (3.24)$$

$$\vec{r}_3 = -\frac{a}{2}\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), \quad (3.25)$$

$$\vec{r}_4 = \frac{a}{2}\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), \quad (3.26)$$

$$\vec{r}_5 = \frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} - \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}), \quad (3.27)$$

$$\vec{r}_6 = -\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} - \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}), \quad (3.28)$$

$$\vec{r}_7 = \frac{a}{2}\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j} - \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}), \quad (3.29)$$

$$\vec{r}_8 = -\frac{a}{2}\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j} - \frac{a}{2}\hat{k} = \frac{a}{2}(-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}). \quad (3.30)$$

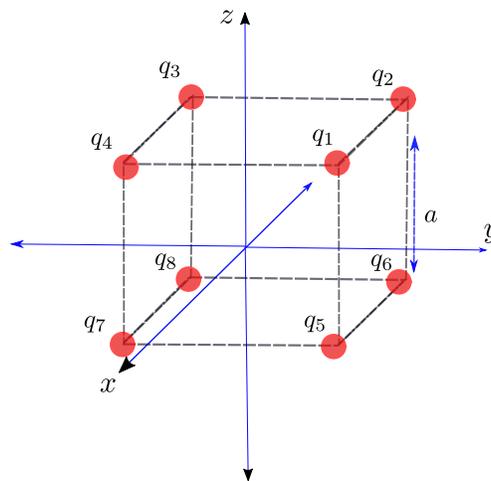


Figura 3.5: Ejemplo 3.2. Campo eléctrico debido a ocho cargas puntuales ubicadas sobre los vértices de un cubo de lado  $a$ .

Cada vector  $\vec{r}_i$  tiene igual magnitud, dada por:

$$\begin{aligned}
|\vec{r}_i| &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4}}a, \quad \forall i.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por tanto, los campos eléctricos se expresan en la forma:

$$q_1 \rightarrow \vec{E}_1 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \tag{3.32}$$

$$q_2 \rightarrow \vec{E}_2 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}), \tag{3.33}$$

$$q_3 \rightarrow \vec{E}_3 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), \tag{3.34}$$

$$q_4 \rightarrow \vec{E}_4 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), \tag{3.35}$$

$$q_5 \rightarrow \vec{E}_5 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}), \tag{3.36}$$

$$q_6 \rightarrow \vec{E}_6 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}), \tag{3.37}$$

$$q_7 \rightarrow \vec{E}_7 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}), \tag{3.38}$$

$$q_8 \rightarrow \vec{E}_8 = -k_e \frac{q}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^3} \frac{a}{2} (-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}). \tag{3.39}$$

Entonces, el campo eléctrico total vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 + \vec{E}_7 + \vec{E}_8 \\
&= -k_e \frac{4q}{3\sqrt{3}a^2} \left\{ (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \right. \\
&\quad \left. + (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + (-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \right\} \\
&= -k_e \frac{4q}{3\sqrt{3}a^2} (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Esto confirma que el campo eléctrico en el centro del cubo debido a las ocho cargas es nulo.

## 3.2. Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico consiste en un sistema de dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  separadas por una distancia determinada. El dipolo adquiere un tratamiento especial cuando se calcula el campo eléctrico generado por las cargas que componen al dipolo a una distancia lo suficientemente grande del centro geométrico de las cargas en mención. En este caso, es posible realizar aproximaciones expresando el resultado en términos de una cantidad vectorial denominada dipolo eléctrico ( $\vec{p}$ ), definido como el producto de la carga  $q$  por un vector orientado desde la carga negativa hacia la carga positiva. Para analizar el campo eléctrico en las condiciones antes mencionadas, se calculará el campo eléctrico asociado a dos cargas ( $+q$  y  $-q$ ) ubicadas sobre el eje  $y$  y separadas por una distancia  $2a$ , como se muestra en la figura 3.6.

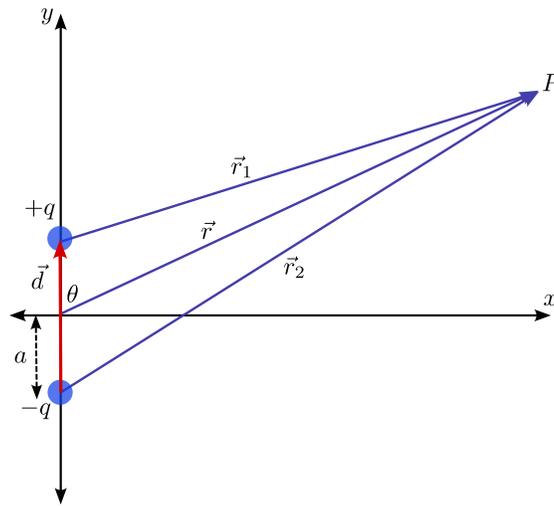


Figura 3.6: Ejemplo 3.2. Campo eléctrico asociado a un dipolo eléctrico.

Se sabe que el campo eléctrico  $\vec{E}_i$  asociado a una carga puntual  $q_i$ , caracterizada por el vector de posición  $\vec{r}_i$ , en un punto identificado por el vector  $\vec{r}$ , está dado por:

$$\vec{E}_i = k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.41)$$

y por lo tanto, los campos eléctricos debido a cada una de las cargas del dipolo son:

$$q \rightarrow \vec{E}_1 = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1), \quad (3.42)$$

$$-q \rightarrow \vec{E}_2 = -k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2). \quad (3.43)$$

De acuerdo a la figura 3.6, la carga  $q$  está ubicada en las coordenadas  $(0, a)$ , mientras que la carga  $-q$  está en  $(0, -a)$ . Así, los vectores de posición se pueden escribir como:

$$q \rightarrow \vec{r}_1 = a\hat{j}, \quad (3.44)$$

$$-q \rightarrow \vec{r}_2 = -a\hat{j}. \quad (3.45)$$

Si  $\vec{r}$  caracteriza un punto arbitrario del espacio con coordenadas  $(x, y)$  donde se evalúa el campo, este se puede expresar de manera general como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}. \quad (3.46)$$

Por tanto, se determina que:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = x\hat{i} + (y - a)\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = [x^2 + (y - a)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.47)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = x\hat{i} + (y + a)\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{x^2 + (y + a)^2} = [x^2 + (y + a)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

Entonces, el campo eléctrico de cada carga es:

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{q}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} [x\hat{i} + (y - a)\hat{j}], \quad (3.49)$$

$$\vec{E}_2 = -k_e \frac{q}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} [x\hat{i} + (y + a)\hat{j}]. \quad (3.50)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico del dipolo es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= k_e \frac{q}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} [x\hat{i} + (y - a)\hat{j}] - k_e \frac{q}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} [x\hat{i} + (y + a)\hat{j}] \\ &= k_e q \left\{ x \left( \frac{1}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{(y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(y + a)}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{j} \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De esta manera, las componentes del campo eléctrico asociado al dipolo son:

$$E_x = k_e q x \left\{ \frac{1}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \quad (3.52)$$

$$E_y = k_e q \left\{ \frac{(y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(y + a)}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (3.53)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} x^2 + (y \pm a)^2 &= x^2 + y^2 \pm 2ay + a^2 = (x^2 + y^2) \pm 2ay + a^2 \\ &= (x^2 + y^2) \left[ 1 + \frac{\pm 2ay + a^2}{(x^2 + y^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (3.55)$$

por lo tanto:

$$x^2 + (y \pm a)^2 = r^2 \left[ 1 + \frac{\pm 2ay + a^2}{r^2} \right]. \quad (3.56)$$

De manera que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[x^2 + (y \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} &= [x^2 + (y \pm a)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left\{ r^2 \left[ 1 + \frac{\pm 2ay + a^2}{r^2} \right] \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ &= r^{-3} \left[ 1 + \frac{\pm 2ay + a^2}{r^2} \right]^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ahora, a partir de la figura 3.6 es posible establecer que  $y = a \cos \theta$ , por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[x^2 + (y \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3} \left[ 1 \pm \frac{2r \cos \theta}{r} \frac{a}{r} + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{r^3} \left[ 1 \pm 2 \cos \theta \frac{a}{r} + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Si se considera que  $a$  es muy pequeña en comparación con  $r$  (distancia medida desde el centro del dipolo hasta el punto donde se desea medir el campo eléctrico), entonces  $a/r \ll 1$ . En una aproximación de primer orden en  $a/r$ , se tiene que:

$$\frac{1}{[x^2 + (y \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{r^3} \left[ 1 \pm 2 \cos \theta \frac{a}{r} \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.59)$$

Ahora, se conoce de la expansión en serie de Taylor dada por:

$$(1 \pm x)^n = \sum_k^n \frac{n!(\pm 1)^k}{(n-k)!k!} x^k. \quad (3.60)$$

De tal forma que si  $x \ll 1$ , en una aproximación de primer orden en  $x$ , se tiene que:

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx. \quad (3.61)$$

A partir de la relación anterior, es posible aproximar (3.59), tomando:  $x \rightarrow 2a \cos \theta / r$  y  $n = -3/2$  en (3.61), obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{[x^2 + (y \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} &\approx \frac{1}{r^3} \left[ 1 \mp 3 \cos \theta \frac{a}{r} \right] \\ &= \frac{1}{r^3} \left[ 1 \mp 3 \frac{ay}{r^2} \right].\end{aligned}\quad (3.62)$$

Así, se establece que las componentes cartesianas del campo eléctrico se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}E_x &= k_e q x \left\{ \frac{1}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &\simeq k_e q x \left[ \frac{1}{r^3} \left( 1 + 3 \frac{ay}{r^2} \right) - \frac{1}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{ay}{r^2} \right) \right] \\ &= k_e \frac{qx}{r^3} \left( 6 \frac{ay}{r^2} \right) = k_e \frac{3xy(2aq)}{r^5},\end{aligned}\quad (3.63)$$

y

$$\begin{aligned}E_y &= k_e q \left\{ \frac{(y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(y + a)}{[x^2 + (y + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &\simeq k_e q \left\{ (y - a) \frac{1}{r^3} \left( 1 + 3 \frac{ay}{r^2} \right) - (y + a) \frac{1}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{ay}{r^2} \right) \right\} \\ &= k_e q \frac{1}{r^3} \left\{ y \left( 1 + 3 \frac{ay}{r^2} \right) - a \left( 1 + 3 \frac{ay}{r^2} \right) - y \left( 1 - 3 \frac{ay}{r^2} \right) - a \left( 1 - 3 \frac{ay}{r^2} \right) \right\} \\ &= k_e q \frac{1}{r^3} \left( -2a + 6 \frac{ay^2}{r^2} \right) = -k_e \frac{(2aq)}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{y^2}{r^2} \right).\end{aligned}\quad (3.64)$$

Como se mencionó al inicio del problema, un dipolo eléctrico se puede caracterizar por un vector que apunta de la carga negativa a la positiva, denotado como  $\vec{p}$ , conocido como momento dipolar eléctrico. La magnitud de este vector se define como la carga  $q$  multiplicada por la distancia entre las cargas. En la configuración en consideración, se tiene que  $p = 2aq$ . Si  $\theta$  es el ángulo medido entre el vector  $\vec{r}$  y el eje  $y$  (ver figura 3.6), se puede determinar que:

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta, \quad (3.65)$$

de manera que:

$$xy = r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad y^2 = r^2 \cos^2 \theta. \quad (3.66)$$

Esto permite expresar las componentes del campo eléctrico asociado al dipolo de la siguiente forma:

$$E_x = k_e \frac{3xy(2aq)}{r^5} = k_e \frac{3(r^2 \sin \theta \cos \theta)p}{r^5} = k_e \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{r^3}, \quad (3.67)$$

de manera similar,

$$\begin{aligned}E_y &= -k_e \frac{(2aq)}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{y^2}{r^2} \right) = -k_e \frac{p}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right) \\ &= -k_e \frac{p}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta).\end{aligned}\quad (3.68)$$

**Ejercicio 3.1.** Se tienen tres partículas cargadas ubicadas en tres puntos sobre un cuadrado de lado  $L$ , como se indica en la figura 3.7. Las cargas toman los valores:  $q_1 = q$ ,  $q_2 = -2q$  y  $q_3 = q$  ( $q > 0$ ). Para la configuración planteada encontrar: a) El campo eléctrico sobre el punto  $P$  indicado en la figura 3.7. b) Si en el punto  $P$ , se ubica una cuarta partícula cargada con valor  $q_4 = 3q$ , encontrar la fuerza eléctrica total sobre dicha carga. La respuesta debe quedar expresada en términos de la constante eléctrica, la carga  $q$  y la longitud  $L$ .

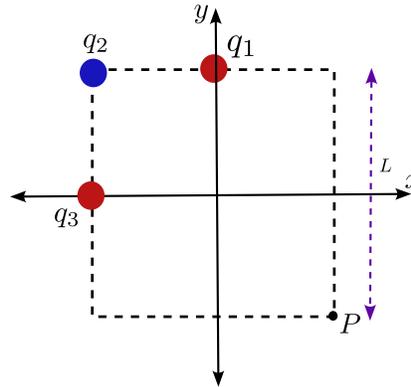


Figura 3.7: Ejercicio (3.1). Campo eléctrico debido a una configuración de tres cargas puntuales ubicadas en puntos sobre un cuadrado.

**Ejercicio 3.2.** Un sistema de seis cargas puntuales idénticas de valor  $q$ , se encuentran localizadas en los vértices de un hexágono de lado  $a$  como se muestra en la figura 3.8. Calcular el campo eléctrico en el centro del hexágono, cuando: a) El origen de coordenadas se considera en el centro del hexágono. b) El origen de coordenadas se toma en la carga  $q_1$ .

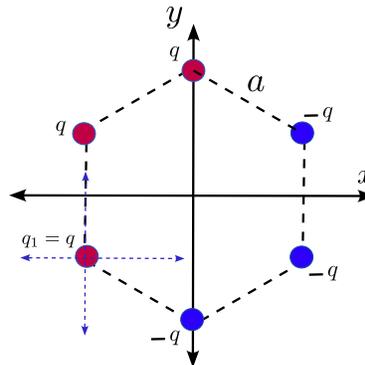


Figura 3.8: Ejercicio 3.2. Campo eléctrico debido a seis cargas puntuales en un hexágono.

**Ejercicio 3.3.** Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje  $x$  con:  $q_1 = q_2 = Q$  y  $q_3 = -2Q$ . Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  se ubican en  $x = \pm a$  respectivamente, mientras que la carga  $q_3$  se encuentra en  $x = 0$ . Calcular el campo eléctrico en cualquier punto sobre el eje  $y$ .

**Ejercicio 3.4.** Siete cargas, todas de igual valor  $q$ , se ubican en siete de los vértices de un cubo de lado  $a$ . Para tal sistema, encontrar el campo eléctrico en el octavo vértice del cubo (el vértice que no está ocupado por una carga).

**Ejercicio 3.5.** Tres cargas positivas idénticas están localizadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado  $a$  como se muestra en la figura 3.9. Calcular el campo eléctrico en el centro del triángulo, asumiendo que el origen de coordenadas está localizado en el punto  $P$ .

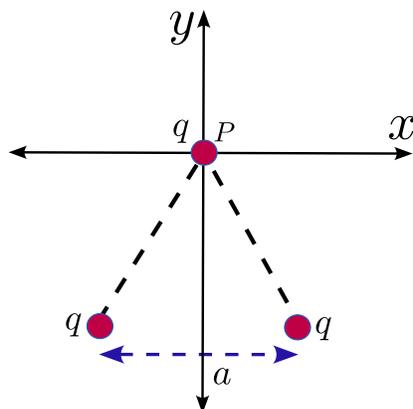


Figura 3.9: Ejercicio 3.5. Campo eléctrico debido a tres cargas puntuales

**Ejercicio 3.6.** Considere un sistema de cuatro cargas puntuales que se encuentran en las vértices de un cuadrado de lado  $L$  como se muestra en la figura 3.10. Calcular el campo eléctrico resultante en un punto  $P$  localizado en el punto medio del lado izquierdo del cuadrado.

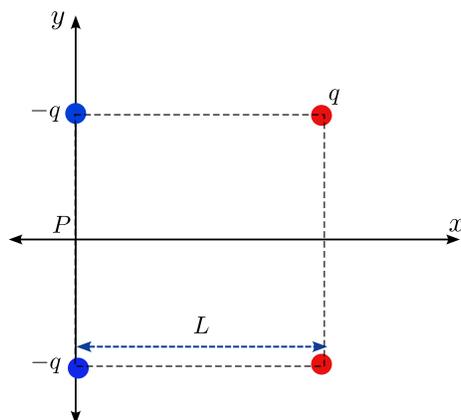


Figura 3.10: Ejercicio 3.6. Campo eléctrico debido a cuatro cargas eléctricas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $L$ .

**Ejercicio 3.7.** Un sistema de cinco cargas puntuales está conformado por solo dos tipos de cargas:  $q_1$  y  $q_2$ , ubicadas como se muestra en la figura (3.11). Calcular el campo eléctrico en los puntos  $A$  y  $B$  indicados en la figura.

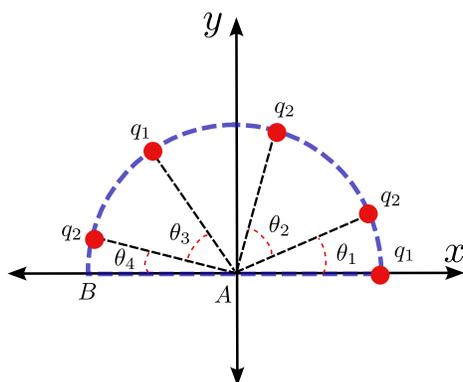


Figura 3.11: Ejercicio 3.7. Campo eléctrico asociado a cinco cargas puntuales distribuidas a lo largo de un semicírculo de radio  $r$ .

**Ejercicio 3.8.** Cuatro cargas puntuales positivas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  forman el sistema mostrado en la figura 3.12. Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  (origen de coordenadas).

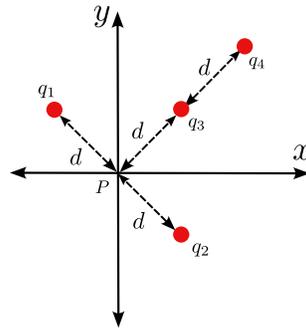


Figura 3.12: Ejercicio 3.8. Campo eléctrico asociado a cuatro cargas puntuales

**Ejercicio 3.9.** Un cuadrupolo eléctrico se define como un sistema compuesto por dos dipolos eléctricos con momentos dipolares iguales pero orientados en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 3.13. Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ . Mostrar que la intensidad del campo eléctrico cuando  $z \gg d$  está dada por:

$$E = k_e \frac{3(2qd^2)}{z^4}. \quad (3.69)$$

El valor  $(2qd^2)$  se denomina momento cuadrupolar de la distribución de carga y usualmente se denota con la letra  $Q$ .

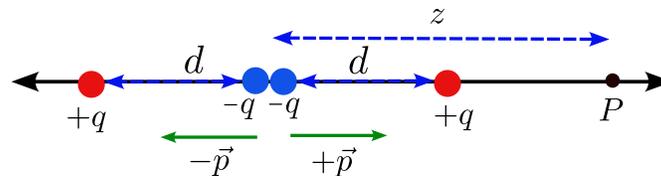


Figura 3.13: Ejercicio 3.9. Campo eléctrico generado por dos dipolos eléctricos.

**Ejercicio 3.10.** Considere la configuración de cargas positivas descrita en la figura 3.14. Calcular el campo eléctrico resultante en el punto  $P$  debido al sistema de cargas. Determinar la intensidad del campo eléctrico bajo la aproximación  $z \gg R$ .

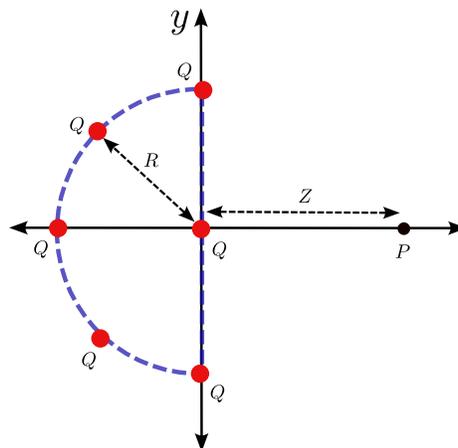


Figura 3.14: Ejercicio 3.10. Campo eléctrico debido a seis cargas puntuales.

**Ejercicio 3.11.** Cuatro cargas puntuales idénticas de valor  $q$ , se encuentran en las esquinas de un cuadrado de lado  $a$ . Una quinta carga de valor  $-Q$  se ubica a lo largo del eje  $z$  como se indica en la figura 3.15. Para esta configuración, encontrar el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto donde se ubica la carga  $-Q$ , y evaluar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre dicha carga.

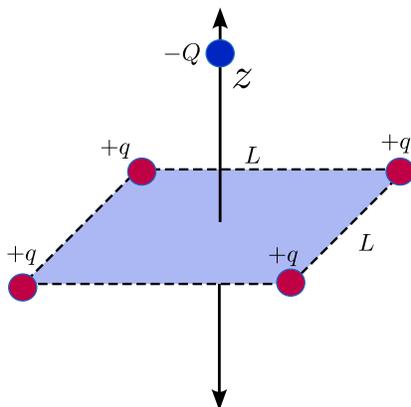


Figura 3.15: Ejercicio 3.11. Fuerza eléctrica sobre una carga puntual  $-Q$ , debido a cuatro cargas puntuales.

**Ejercicio 3.12.** Una carga  $q_1 > 0$  se encuentra en el origen de un plano cartesiano. Una segunda carga  $q_2 < 0$  se encuentra en un punto con coordenadas  $(0, y)$ . ¿En qué punto a lo largo del eje  $y$ , el campo eléctrico es igual a cero?

**Ejercicio 3.13.** Una carga puntual  $q_1 = 2.4\text{nC}$ , se coloca en uno de los vértices de un cuadrado de lado  $a = 1.5\text{m}$ . Una segunda carga  $q_2 = -3.5\text{nC}$  se localiza en el vértice diagonal opuesto a  $q_1$ . Calcular el campo eléctrico en cualquiera de los otros dos vértices.

### 3.3. Distribución continua de carga

Hasta ahora, se han considerado distribuciones de carga asociadas a partículas que no ocupan un volumen en el espacio; Por lo tanto, su posición está completamente determinada por un único punto definido por un vector de posición. Al considerar cuerpos macroscópicos cargados, sus efectos eléctricos no se pueden asociar a un único punto en el espacio como en el caso de partículas. Para su estudio, es necesario considerar la carga del objeto extendida sobre el volumen (área o longitud) que ocupa en el espacio a través de una distribución continua de carga.

Para evaluar el campo eléctrico generado por una distribución de carga continua, se recurre al principio de superposición. Se considera una región infinitesimal de la distribución con carga  $dq'$  y se calcula el campo eléctrico ( $d\vec{E}$ ) generado por esta, a través de la ecuación (3.1). Dado que  $dq'$  es infinitesimal, puede considerarse como una carga puntual caracterizada por un vector de posición  $\vec{r}'$ . Por lo tanto, el campo eléctrico en una posición determinada por el vector  $\vec{r}$ , debido a un elemento infinitesimal  $dq'$  definido por el vector de posición  $\vec{r}'$ , está dado por:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.70)$$

“Sumando” las contribuciones al campo eléctrico resultante de las diferentes elementos infinitesimales  $dq'$  que conforman la carga total del objeto en estudio y entendiendo que la suma se realiza sobre una región continua a través de una integral, se tiene que el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = k_e \int_Q \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.71)$$

Una forma adicional de calcular el campo eléctrico, es a través de la fuerza que dicho campo ejerce sobre una carga de prueba, para lo cual se aplica la relación (3.7), que es válida independiente de la fuente que origina el campo eléctrico (si el campo  $\vec{E}$  es generado por partículas cargadas o por distribuciones continuas de carga). Por lo tanto, la expresión (3.7) es útil si ya se conoce la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga puntual  $q'$ . Por tanto, los resultados obtenidos en los ejemplos de la sección (2.3), donde se consideraba la fuerza sobre una carga  $q$  debido a objetos con distribuciones continuas de carga, sirven para determinar los campos eléctricos asociados a dichas distribuciones. A continuación, se presentan algunos ejemplos relacionados con estos casos.

**Ejemplo 3.3.** *En este ejemplo se presentan algunos casos donde se calcula el campo eléctrico a partir de la ecuación (3.7).*

1. **Cable infinitamente largo.** *En el ejemplo (2.13) se encontró la expresión para la fuerza que un cable infinitamente largo con densidad de carga  $\lambda$  ejercía sobre una carga  $q$ , ubicada a una distancia  $a$  del cable ( $\vec{r} = a\hat{i}$ ). El resultado se expresa en la ecuación (2.110). Utilizando dicho resultado y la definición del campo eléctrico se determina que:*

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2k_e q \lambda \hat{i}}{q a} \\ &= 2k_e \frac{\lambda \hat{i}}{a} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \hat{i}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

La expresión (3.72) representa el campo eléctrico que ejerce el cable infinito en la posición  $\vec{r} = a\hat{i}$  (la posición que en el ejemplo (2.13) ocupaba la carga  $q$ ).

2. **Cable de longitud finita.** *En el ejemplo (2.14), en la ecuación (2.114) se calculó la fuerza que un cable de longitud finita  $L$  y carga  $Q$  ejercía sobre una carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  sobre el eje horizontal. El conductor se ubicó simétricamente respecto al eje  $x$  (ver ejemplo ((2.14))). A partir del resultado (2.114), se puede encontrar el*

campo eléctrico que el conductor finito descrito anteriormente genera en el punto  $\vec{r} = a\hat{i}$  (donde se encontraba la carga  $q$ ). Por lo tanto, se identifica que:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{k_e q}{q} \lambda \frac{L}{a(a^2 + L^2/4)^{1/2}} \hat{i} \\ &= k_e \lambda \frac{L}{a(a^2 + L^2/4)^{1/2}} \hat{i}.\end{aligned}\quad (3.73)$$

3. **Alambre finito con ubicación no simétrica.** En el ejemplo (2.17) se considera un alambre finito de longitud  $L$ , con una ubicación no simétrica respecto al eje  $x$ . La fuerza eléctrica sobre la carga  $q$  en dicho ejemplo está dada por las ecuaciones (2.146) y (2.147). Por lo tanto, las componentes del campo eléctrico vendrán dadas por:

$$\begin{aligned}E_x &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{k_e q \lambda}{qb} \left( \frac{L - y - L/3}{(b^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} + \frac{y + L/3}{(b^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}} \right) \\ &= \frac{k_e \lambda}{b} \left( \frac{L - y - L/3}{(b^2 + (L - y - L/3)^2)^{1/2}} + \frac{y + L/3}{(b^2 + (y + L/3)^2)^{1/2}} \right).\end{aligned}\quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}E_y &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{-k_e q}{q} \lambda \left( \frac{1}{(b^2 + (L - y_q - L/3)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + (y_q + L/3)^2)^{1/2}} \right) \\ &= -k_e \lambda \left( \frac{1}{(b^2 + (L - y_q - L/3)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + (y_q + L/3)^2)^{1/2}} \right).\end{aligned}\quad (3.75)$$

4. **Anillo circular.** En la expresión (2.154) del ejemplo (2.18), se encontró la fuerza que un anillo circular de radio  $R$  y carga  $Q$  ejercía sobre una partícula de carga  $q$  ubicada a una distancia  $a$  sobre el eje  $y$ . Por lo tanto, el campo eléctrico que dicho anillo genera en el lugar de ubicación de  $q$ , es:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{k_e}{q} \frac{qQa}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j} = k_e \frac{Qa}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}.\quad (3.76)$$

5. **Plano infinito.** En el ejemplo (2.20) se evaluó la fuerza que un plano infinito con densidad superficial de carga  $\sigma$  ejercía sobre una partícula  $q$  ubicada a una distancia  $a$  del plano, según se observa en la ecuación (2.162). Por lo tanto, el campo eléctrico generado por un plano infinito de densidad de carga  $\sigma$  en un punto ubicado a una distancia  $a$  del plano, está dado por:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q}{q} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{j}.\quad (3.77)$$

Es importante destacar que el cálculo directo del campo eléctrico en un punto  $\vec{r}$  mediante integración, es equivalente al procedimiento utilizado para encontrar la fuerza sobre una carga  $q$  ubicada en la posición  $\vec{r}$ . La única diferencia entre los resultados del campo eléctrico y la fuerza eléctrica es la presencia de la carga  $q$ , la cual no afecta el proceso de integración.

**Ejemplo 3.4.** Como un ejemplo de cálculo directo para encontrar el campo eléctrico, se considera la siguiente configuración: un conductor lineal de longitud  $L$  y carga total  $Q$ , se extiende a lo largo del eje  $x$ , como se ilustra en la figura 3.16. En este caso, se quiere determinar el campo eléctrico generado por el conductor en un punto  $P$  ubicado a una distancia  $a$  de uno de los extremos del conductor, sobre el eje  $x$ , como se indica en la figura 3.16.

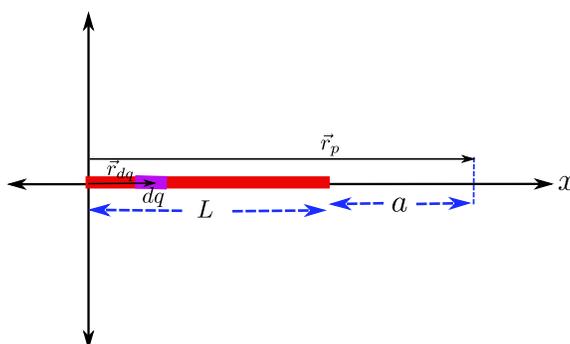


Figura 3.16: Ejemplo (3.4). Campo eléctrico generado por una barra cargada de longitud  $L$ .

**Solución:** Para resolver este problema, se debe considerar una distribución continua de la carga. Primero, se toma un elemento de carga  $dq'$  en el conductor y se determina el campo eléctrico diferencial  $d\vec{E}$  que este elemento de carga genera en el punto  $P$ . El campo eléctrico diferencial está dado por:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.78)$$

Teniendo en cuenta el origen de coordenadas que se está utilizando (ver figura 3.16) se deduce que:

$$\vec{r} = (L + a)\hat{i}, \quad (3.79)$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}, \quad (3.80)$$

por lo tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}' = ((L + a) - x')\hat{i}. \quad (3.81)$$

Al reemplazar (3.81) en (3.78) e integrar, se tiene que:

$$\vec{E} = k_e \int_Q \frac{dq'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} ((L+a) - x') \hat{i}. \quad (3.82)$$

Dado que se trata de un conductor lineal,  $dq' = \lambda dx'$ , siendo  $\lambda$  la densidad lineal de carga. La integral se realiza en la variable  $x'$ , que define la posición de cada elemento de carga  $dq'$  en el conductor. Respecto a la ubicación del conductor, los límites de integración van desde  $x' = 0$  hasta  $x' = L$ . De esta forma, la ecuación (3.82) se puede escribir como:

$$\vec{E} = k_e \lambda (L+a) \int_0^L \frac{dx'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} \hat{i} - k_e \lambda \int_0^L \frac{x' dx'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} \hat{i}. \quad (3.83)$$

La primera integral presente en (3.83), se puede resolver realizando el siguiente cambio de variable:

$$\tan \theta = \frac{x'}{(L+a)}, \quad (3.84)$$

tal que:

$$dx' = (L+a) \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.85)$$

Reemplazando (3.84) y (3.85) en la primera integral a la derecha de (3.83), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} &= \frac{1}{(L+a)^3} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(L+a)^3} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{(L+a)^3} \left. \text{sen } \theta \right|_{\theta_i}^{\theta_f}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ahora, la relación (3.84), sugiere que  $x'$  y  $(L+a)$  corresponden al cateto opuesto y cateto adyacente del ángulo  $\theta$  asociado a un triángulo rectángulo, por lo tanto:

$$\text{sen } \theta = \frac{x'}{\sqrt{(L+a)^2 + x'^2}}, \quad (3.87)$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} &= \frac{1}{(L+a)^3} \left( \frac{x'}{\sqrt{(L+a)^2 + x'^2}} \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{(L+a)^3} \left( \frac{L}{\sqrt{(L+a)^2 + L^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Por otra parte, la segunda integral que aparece en (3.83) es directa, tal que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{x' dx'}{((L+a)^2 + x'^2)^{3/2}} &= - \left( \frac{1}{((L+a)^2 + x'^2)^{1/2}} \Big|_0^L \right) \\ &= - \left( \frac{1}{((L+a)^2 + L^2)^{1/2}} - \frac{1}{(L+a)} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Reemplazando (3.88) y (3.89) en (3.83), se tiene finalmente que:

$$\vec{E} = k_e \lambda \left( \frac{L}{(L+a)((L+a)^2 + L^2)^{1/2}} + \frac{1}{((L+a)^2 + L^2)^{1/2}} - \frac{1}{L+a} \right) \hat{i}. \quad (3.90)$$

En el caso particular que  $a \gg L$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx k_e \lambda \left( \frac{L}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) \hat{i} \\ &= k_e \lambda \left( \frac{L}{a^2} \right) \hat{i} = k_e \frac{Q}{L} \left( \frac{L}{a^2} \right) \hat{i} \\ &= k_e \left( \frac{Q}{a^2} \right) \hat{i}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por lo tanto, para  $a \gg L$  el resultado es el mismo que se tendría para una partícula con carga  $Q$  ubicada a una distancia  $a$  respecto al punto donde se evalúa el campo eléctrico.

**Ejemplo 3.5.** Dos placas infinitas cargadas con densidades de carga  $\sigma$  y  $-\sigma$  se ubican en el espacio con una separación entre ellas igual a  $d$ . Las placas se ubican perpendicularmente al eje  $x$ , de tal forma que la placa con densidad  $\sigma$  corta el eje  $x$  en la posición  $x = 0$ , y la placa con densidad  $-\sigma$  corta el eje  $x$  en la posición  $x = d$  (ver figura 3.17). Para el sistema descrito, se evaluará el campo eléctrico en cualquier región del espacio.

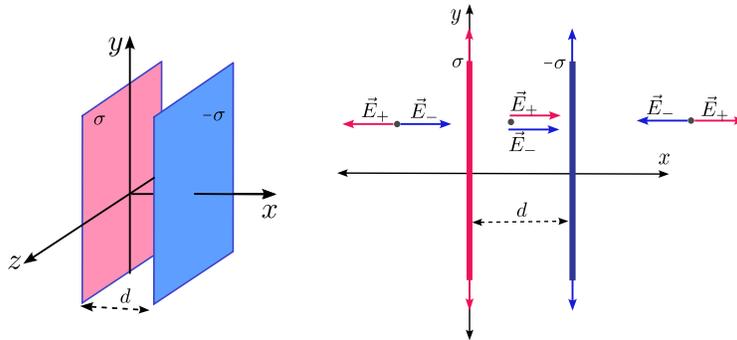


Figura 3.17: Ejemplo (3.5). Campo eléctrico generado por dos planos infinitos cargados.

**Solución:** Para resolver el problema, se parte de la solución previamente calculada para un plano infinito cargado, dada por la expresión (3.77), en la cual se define que la dirección del

campo eléctrico se encuentra sobre el eje que corta perpendicularmente al plano en estudio (que en este caso corresponde al eje  $x$ ) y cuya magnitud se puede escribir como:

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}. \quad (3.92)$$

Dado que el campo eléctrico sigue el principio de superposición, se puede concluir que en el caso planteado, el campo eléctrico en cualquier región del espacio, será igual a la suma del campo eléctrico  $\vec{E}_+$ ; generado por la placa infinita con densidad  $\sigma$  y del campo eléctrico  $\vec{E}_-$ ; generado por la placa con densidad negativa  $-\sigma$ , es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (3.93)$$

En cada región del espacio, el campo eléctrico generado por cada placa cambia su dirección, por lo tanto, el estudio del campo eléctrico total se puede evaluar en cada región del espacio en forma independiente, lo cual se describe a continuación:

- Región  $x < 0$ : En esta región, el campo eléctrico debido a cada placa será:

$$\vec{E}_+ = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, \quad (3.94)$$

$$\vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}. \quad (3.95)$$

por lo tanto, el campo eléctrico total es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} \\ &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

- Región  $x > d$ : En esta región el campo eléctrico debido a cada placa será:

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}, \quad (3.97)$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}. \quad (3.98)$$

Así el campo eléctrico resultante es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} \\ &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

- Región  $0 < x < d$ : En este caso el campo eléctrico de cada placa es:

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, \quad (3.100)$$

$$\vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}. \quad (3.101)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico total será:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Los resultados anteriores indican que el campo eléctrico solo es diferente de cero en la región entre las placas y es igual a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}. \quad (3.103)$$

**Ejemplo 3.6.** En este ejemplo, se considera dos cables infinitos paralelos, separados por una distancia  $d$ . El primer cable se encuentra a lo largo del eje  $z$  cortando el plano  $xy$  en el punto  $(0,0,0)$ . El segundo cable corta el plano  $xy$  perpendicularmente en el punto  $(d,0,0)$ . Ambos cables tienen la misma densidad lineal de carga  $\lambda$  (ver figura 3.18). Para la configuración descrita, se encontrará el campo eléctrico en un punto definido por el vector  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ .

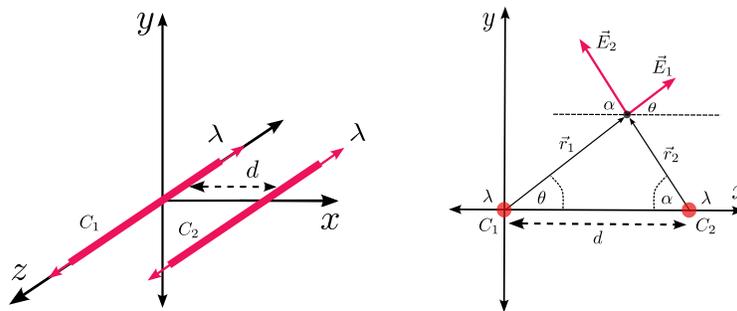


Figura 3.18: Ejemplo (3.6). Campo eléctrico debido a dos líneas de carga infinitas.

**Solución:** Para resolver el problema, se parte del resultado conocido para un cable infinito de densidad  $\lambda$  (ver ecuación (3.72)). La magnitud del campo eléctrico generado por un cable de estas características es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.104)$$

donde  $r$  representa la distancia radial medida perpendicularmente desde el eje definido por el cable, hasta el punto donde se desea evaluar el campo. La dirección del campo eléctrico es perpendicular al eje sobre el cual se extiende el cable, saliendo del cable si  $\lambda > 0$ . En la figura 3.18 se ilustra la configuración del sistema, con el eje  $z$  orientado hacia fuera de la página. El punto donde se medirá el campo eléctrico, denominado  $P$ , tiene coordenadas  $(x, y)$ . Además, en la figura 3.18, se ha esquematizado el campo eléctrico debido al cable 1 (ubicado en  $(0, 0, 0)$ ) y el campo eléctrico debido al cable 2 (ubicado en  $(d, 0, 0)$ ). De la figura 3.18, se puede establecer que el campo eléctrico para el cable  $C_1$ , será:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} (\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} (\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}).\end{aligned}\quad (3.105)$$

En términos de las coordenadas  $(x, y)$ , y a partir de la figura 3.18, se puede deducir que:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.106)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.107)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.108)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} (x \hat{i} + y \hat{j}).\end{aligned}\quad (3.109)$$

De igual forma, a partir de la figura 3.18 se puede establecer que el campo eléctrico del cable 2 es:

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} (\cos\alpha \hat{i} + \text{sen}\alpha \hat{j}) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(d-x)^2 + y^2}} (-\cos\alpha \hat{i} + \text{sen}\alpha \hat{j}).\end{aligned}\quad (3.110)$$

En términos de las coordenadas  $(x, y)$  se tiene que:

$$r_2 = \sqrt{(d-x)^2 + y^2}, \quad (3.111)$$

$$\cos \alpha = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}, \quad (3.112)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}, \quad (3.113)$$

por consiguiente, se deduce:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \left( -\frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}\hat{j} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0((d-x)^2 + y^2)} \left( -(d-x)\hat{i} + y\hat{j} \right). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Finalmente, el campo eléctrico total es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)} (x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0((d-x)^2 + y^2)} \left( -(d-x)\hat{i} + y\hat{j} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)} - \frac{(d-x)}{((d-x)^2 + y^2)} \right) \hat{i} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2)} + \frac{y}{((d-x)^2 + y^2)} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Como un caso particular, si  $x = d/2$ , se tendría que:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{d/2}{((d/2)^2 + y^2)} - \frac{(d-d/2)}{((d-(d/2))^2 + y^2)} \right) \hat{i} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{((d/2)^2 + y^2)} + \frac{y}{((d-(d/2))^2 + y^2)} \right) \hat{j} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{d/2}{((d/2)^2 + y^2)} - \frac{d/2}{((d/2)^2 + y^2)} \right) \hat{i} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{((d/2)^2 + y^2)} + \frac{y}{((d/2)^2 + y^2)} \right) \hat{j} \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{((d/2)^2 + y^2)} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

El resultado anterior indica que el campo eléctrico medido en el plano que separa a los dos cables por el punto medio, tiene únicamente una componente en la dirección  $\hat{j}$ .

**Ejemplo 3.7.** Un electrón ingresa a una región donde existe un campo eléctrico uniforme orientado en dirección  $\hat{j}$ . El electrón tiene una velocidad inicial  $V_0$  con un ángulo  $\theta$  medido respecto a la horizontal (ver figura 3.19). Para el problema planteado, se analizará el movimiento del electrón.

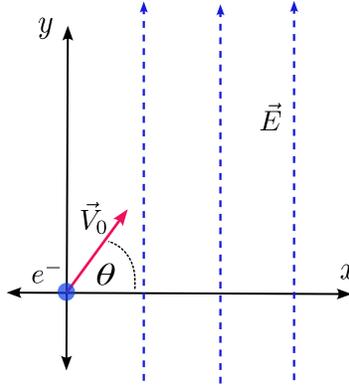


Figura 3.19: Ejemplo (3.7). Electrón en presencia de un campo eléctrico uniforme.

**Solución:** El campo eléctrico genera una fuerza sobre el electrón dado por:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -|e|E\hat{j} = -|e|E\hat{j}, \quad (3.117)$$

y de la segunda ley de Newton se sabe que:  $\vec{F} = m\vec{a}$ , por lo tanto:

$$\vec{a} = -\frac{|e|E}{m}\hat{j}. \quad (3.118)$$

Lo anterior establece que el electrón posee una aceleración constante en dirección  $-\hat{j}$ ; es decir, el electrón adquiere un movimiento con aceleración uniforme en dicha dirección. En dirección  $\hat{i}$  no existe aceleración y por lo tanto, el movimiento es uniforme. Las condiciones anteriores son similares al movimiento que experimenta un cuerpo masivo cerca de la superficie de la tierra, en cuyo caso la aceleración es la gravedad y donde la trayectoria descrita por el cuerpo es parabólico, lo cual también ocurre con el movimiento del electrón que se está analizando. El movimiento del electrón está descrita por las funciones  $y(t)$ ,  $V_y(t)$  y  $x(t)$  establecidas para un movimiento parabólico, que en el caso particular en estudio son (asumiendo la posición inicial  $(0, 0)$ ):

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_0 \sin \theta t = -\frac{|e|E}{2m}t^2 + V_0 \sin \theta t, \quad (3.119a)$$

$$x(t) = V_0 \cos \theta t, \quad (3.119b)$$

$$V_y = at + V_0 \sin \theta = -\frac{|e|E}{m}t + V_0 \sin \theta. \quad (3.119c)$$

Si despejamos la variable tiempo  $t$  de la ecuación  $x(t)$ , se tiene que

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta}, \quad (3.120)$$

y reemplazamos el resultado en  $y(t)$ , se obtiene la ecuación de trayectoria, dada por:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{|e|E}{2m} \left( \frac{x}{V_0 \cos \theta} \right)^2 + V_0 \sin \theta \left( \frac{x}{V_0 \cos \theta} \right) \\ &= -\frac{|e|E}{2m} \frac{x^2}{V_0^2 (\cos \theta)^2} + x \tan \theta. \end{aligned} \quad (3.121)$$

La expresión (3.121) claramente establece la trayectoria parabólica del electrón. A partir de las relaciones (3.119) y (3.121), podemos encontrar cantidades de interés. Por ejemplo, podemos determinar la posición máxima que alcanza el electrón sobre el eje  $y$  (altura máxima), lo cual se logra considerando que en el punto de altura máxima la velocidad  $V_y$  es igual a cero, por lo tanto:

$$V_y(t) = 0 = -\frac{|e|E}{m}t + V_0 \sin \theta, \quad (3.122)$$

entonces

$$t = \frac{mV_0 \sin \theta}{|e|E}. \quad (3.123)$$

El tiempo descrito en (3.123) corresponde al tiempo que tarda el electrón en llegar a su altura máxima. Al reemplazar (3.123) en  $y(t)$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= -\frac{|e|E}{2m}t^2 + V_0 \sin \theta t \\ &= -\frac{|e|E}{2m} \left( \frac{mV_0 \sin \theta}{|e|E} \right)^2 + V_0 \sin \theta \left( \frac{mV_0 \sin \theta}{|e|E} \right) \\ &= -\frac{mV_0^2 (\sin \theta)^2}{2|e|E} + \frac{mV_0^2 (\sin \theta)^2}{|e|E} \\ &= \frac{mV_0^2 (\sin \theta)^2}{2|e|E}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

En conclusión, el electrón en presencia de un campo eléctrico uniforme como el descrito en el planteamiento del problema, realiza una trayectoria parabólica, con una aceleración en el eje  $y$  dada por la ecuación (3.118).

**Ejemplo 3.8.** Una distribución lineal de carga se encuentra localizada a lo largo del eje  $x$  desde  $x_0$  hasta  $x \rightarrow +\infty$ . La densidad lineal de carga está dada por:  $\lambda(x) = \frac{\lambda_0 x_0}{x^2}$ . Para el sistema descrito anteriormente, se calculará el campo eléctrico en el origen del sistema coordenado definido en la figura 3.20.

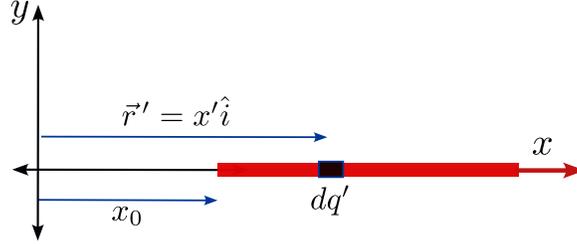


Figura 3.20: Ejemplo 3.8. Campo eléctrico debido a una barra infinita cargada con densidad de carga no uniforme extendida sobre el eje  $x$ .

**Solución:** El campo eléctrico debido a un elemento de carga  $dq'$  es dado por:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.125)$$

donde  $\vec{r}$  identifica la posición del punto donde se evalúa el campo y  $\vec{r}'$  caracteriza la posición del elemento de carga  $dq'$ . Ya que se desea evaluar el campo eléctrico en el origen de coordenadas, se determina que:

$$\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}, \quad (3.126)$$

y

$$\vec{r}' = x\hat{i}, \quad (3.127)$$

de manera que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = x^3 \quad (3.128)$$

con lo cual, el campo eléctrico toma la forma:

$$\vec{E} = k_e \int \frac{dq'}{x^3} (-x\hat{i}) = -k_e \int \frac{dq'}{x^2} \hat{i}. \quad (3.129)$$

Ya que el problema está caracterizado por la densidad lineal

$$\lambda(x) = \frac{\lambda_0 x_0}{x^2}, \quad (3.130)$$

el elemento de carga  $dq'$  se escribe como:

$$dq' = \lambda(x) dx = \frac{\lambda_0 x_0}{x^2} dx, \quad (3.131)$$

siendo  $dx$  la longitud ocupada por la carga  $dq'$ . Con lo anterior se tiene que:

$$\vec{E} = -k_e \int \frac{dq'}{x^2} \hat{i} = -k_e \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \left( \frac{\lambda_0 x_0}{x^2} dx \right) \hat{i} = -k_e \int_0^\infty \lambda_0 x_0 \frac{dx}{x^4} \hat{i}. \quad (3.132)$$

Entonces, el campo eléctrico total es:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -k_e \lambda_0 x_0 \hat{i} \int_{x_0}^{\infty} dx x^{-4} = -k_e \lambda_0 x_0 \hat{i} \left( -\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_{x_0}^{\infty} \\ &= k_e \frac{\lambda_0 x_0 \hat{i}}{3} \left( -\frac{1}{x_0^3} \right) = -\frac{k_e \lambda_0 \hat{i}}{3x_0^2}.\end{aligned}\quad (3.133)$$

**Ejemplo 3.9.** Un semicírculo de radio  $R$  posee una densidad lineal de carga dada por:  $\lambda(\theta) = -\lambda_0 \cos \theta$ , donde  $\theta$  se mide respecto al semieje  $z$  positivo y donde  $\lambda_0$  es una constante positiva con unidades de carga por unidad de longitud (ver figura 3.21). Para la configuración en mención se calculará el campo eléctrico en el origen de coordenadas.

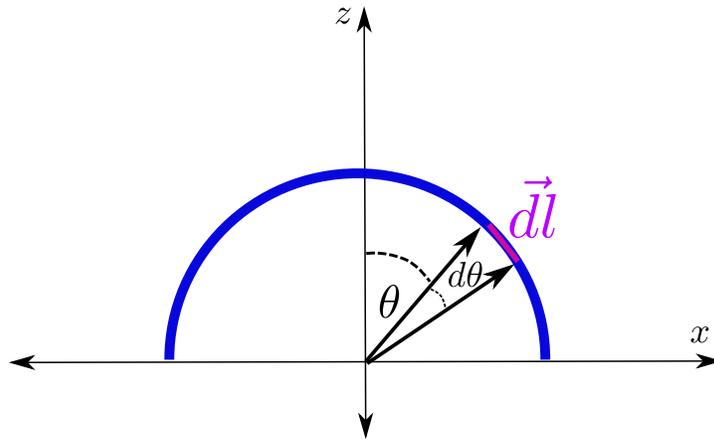


Figura 3.21: Ejemplo 3.9. Campo eléctrico generado por carga distribuida uniformemente sobre un semicírculo.

**Solución:** El origen de coordenadas se puede identificar por el vector:

$$\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}.\quad (3.134)$$

Caracterizando el elemento de carga  $dq'$  por las coordenadas  $(x, y)$ , de la figura 3.21 se puede establecer que:

$$\vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} = R \sin \theta' \hat{i} + R \cos \theta' \hat{j},\quad (3.135)$$

de manera que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\left( R \sin \theta' \hat{i} + R \cos \theta' \hat{j} \right) = -R \left( \sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j} \right); \quad (3.136)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta' + R^2 \cos^2 \theta'} = \sqrt{R^2 (\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta')} = R. \quad (3.137)$$

Así, el campo eléctrico debido a  $dq'$  se expresa como:

$$\begin{aligned}d\vec{E} &= k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= k_e \frac{dq'}{R^3} \left[ -R \left( \sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j} \right) \right] \\ &= -k_e \frac{dq'}{R^2} \left( \sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j} \right).\end{aligned}\quad (3.138)$$

Ahora, la relación entre el elemento de carga  $dq'$  y la longitud  $dl$  es:

$$dq' = \lambda(\theta') dl = (-\lambda_0 \cos \theta') (R d\theta') = -\lambda_0 R \cos \theta' d\theta'. \quad (3.139)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico resulta ser:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= -k_e \frac{(-\lambda_0 R \cos \theta' d\theta')}{R^2} (\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j}) \\ &= k_e \frac{\lambda_0}{R} (\sin \theta' \cos \theta' d\theta' \hat{i} + \cos^2 \theta' d\theta' \hat{j}), \end{aligned} \quad (3.140)$$

De manera que el campo eléctrico total es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k_e \frac{\lambda_0}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin \theta' \cos \theta' d\theta' \hat{i} + \cos^2 \theta' d\theta' \hat{j}) \\ &= k_e \frac{\lambda_0}{R} \left( \hat{i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta' \sin \theta' \cos \theta' + \hat{j} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta' \cos^2 \theta' \right) \\ &= k_e \frac{\lambda_0}{R} \left[ \hat{i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d(\sin \theta') \sin \theta' + \hat{j} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta' \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta') \right] \\ &= k_e \frac{\lambda_0}{R} \left[ \underbrace{\hat{i} \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_0 + \frac{1}{2} \hat{j} \underbrace{\left( \theta' - \frac{1}{2} \sin 2\theta' \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\pi} \right] \\ &= k_e \frac{\pi \lambda_0}{2R} \hat{j}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

**Ejemplo 3.10.** Dos anillos concéntricos de radios  $R_1 = R$  y  $R_2 = 4R$  se encuentran en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 3.22. Un punto  $P$  localizado en el eje  $z$  está a una distancia  $z = 6R$ . El anillo grande tiene una carga  $Q$  positiva distribuida uniformemente. En este ejemplo se determinará el valor de la carga distribuida uniformemente sobre el anillo pequeño, tal que el campo eléctrico en el punto  $P$  sea nulo.

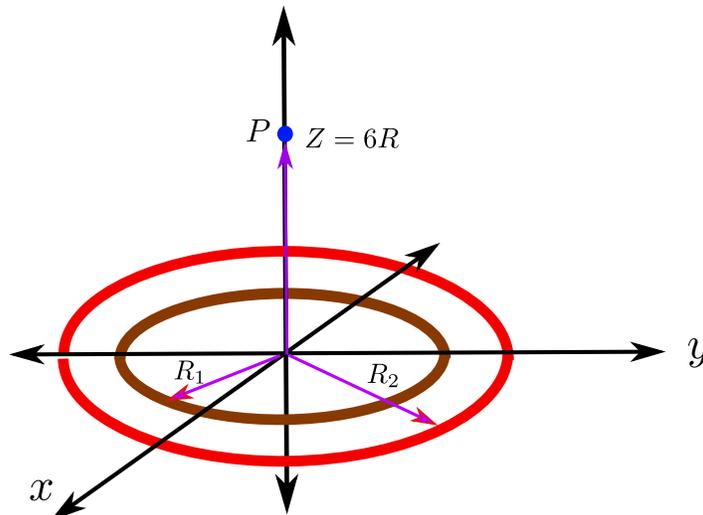


Figura 3.22: Ejemplo 3.10. Campo eléctrico debido a dos anillos cargados.

**Solución:** En el ejemplo (2.18) se mostró que la fuerza electrostática ejercida por un anillo de radio  $R$  y carga  $Q > 0$  (uniformemente distribuida), sobre una carga negativa  $q$  localizada en el eje de simetría a una distancia  $z$  del centro del anillo, toma la forma:

$$\vec{F} = (-q) \left[ k_e \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \right]. \quad (3.142)$$

Esta relación permite establecer que el campo eléctrico debido al anillo cargado positivamente en un punto sobre el eje de simetría es:

$$\vec{E} = k_e \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}. \quad (3.143)$$

Si se identifica con  $Q_2$  la carga del anillo pequeño, los campos eléctricos sobre el eje de simetría de los anillos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 &= k_e \frac{Q_1 z}{(R_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = k_e \frac{Q(6R)}{[R^2 + (6R)^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \\ &= k_e \frac{6QR}{(R^2 + 36R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = k_e \frac{6QR}{R^3(1 + 36)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \\ &= k_e \frac{6Q}{R^2(37)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.144)$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} Q_2 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_2 &= k_e \frac{Q_2 z}{(R_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = k_e \frac{Q_2(6R)}{[(4R)^2 + (6R)^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \\ &= k_e \frac{6Q_2 R}{(16R^2 + 36R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = k_e \frac{6Q_2 R}{R^3(16 + 36)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \\ &= k_e \frac{6Q_2}{R^2(52)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \quad (3.146)$$

↓

$$\vec{0} = k_e \frac{6Q}{R^2(37)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} + k_e \frac{6Q_2}{R^2(52)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} = 6 \frac{k_e}{R^2} \left[ \frac{Q}{(37)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2}{(52)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{k}. \quad (3.147)$$

La anterior igualdad implica que deben ser iguales sus componentes, es decir:

$$\frac{6k_e}{R^2} \left[ \frac{Q}{(37)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2}{(52)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0. \quad (3.148)$$

Al ser  $\frac{6k_e}{R^2}$  constante, la relación anterior se garantiza si:

$$\frac{Q}{(37)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2}{(52)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (3.149)$$

lo que implica que el valor de la carga distribuida sobre el anillo pequeño debe ser:

$$Q_2 = -\frac{(52)^{\frac{3}{2}}}{(37)^{\frac{3}{2}}}Q = -\left(\frac{52}{37}\right)^{\frac{3}{2}}Q. \quad (3.150)$$

**Ejercicio 3.14.** Considere una línea de carga negativa localizada a lo largo del eje  $x$ , desde  $x = -x_0$  hasta  $x = x_0$  (ver figura 3.23). Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  indicado en la figura 3.23, considerando que la carga sobre la línea esta distribuida de acuerdo a la relación  $\lambda = \lambda_0 \frac{x_0^2}{x^2}$ . Analice el caso  $y \gg 2x_0$ .

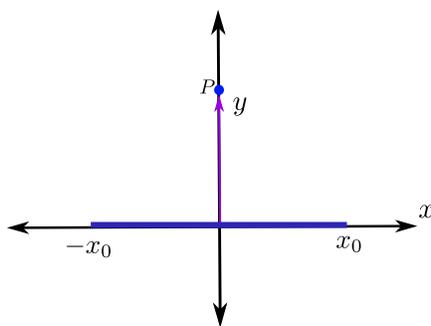


Figura 3.23: Ejercicio 3.14. Campo eléctrico debido a una línea finita cargada uniformemente.

**Ejercicio 3.15.** Se tienen dos barras cargadas de longitud  $L$  extendidas a lo largo del eje  $x$  como se indica en la figura 3.24. La barra ubicada a la izquierda del origen tiene carga  $Q_1 = Q > 0$ , uniformemente distribuida sobre su longitud, y la barra ubicada a la derecha del origen tiene una carga  $Q_2 = -Q$ . Para la configuración descrita, encuentre: a) El campo eléctrico sobre un punto ubicado a lo largo del eje  $y$  ( $y \neq 0$ ). b) Calcular la aceleración que experimenta una partícula con carga  $q$  y masa  $m$  ubicada sobre un punto a lo largo del eje  $y$ .

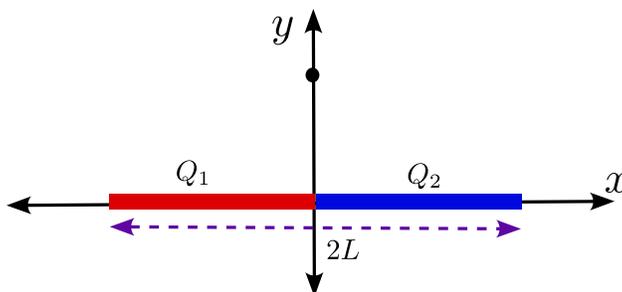


Figura 3.24: Ejercicio (3.15). Campo eléctrico sobre un eje perpendicular a dos cargas barras cargadas.

**Ejercicio 3.16.** La figura 3.25 muestra un anillo de radio  $a$  el cual posee una densidad lineal de carga  $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo medido respecto al semieje  $x$  positivo y  $\lambda_0$  una constante positiva. Calcular el campo eléctrico en el centro de anillo.

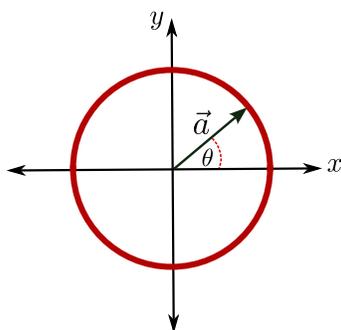


Figura 3.25: Ejercicio 3.16. Campo eléctrico generado por un anillo cargado no uniformemente

**Ejercicio 3.17.** Una carga  $Q$  está uniformemente distribuida sobre una barra de longitud  $l$  como se muestra en la figura 3.26. Calcular el campo eléctrico en los puntos  $P$  y  $P'$ .

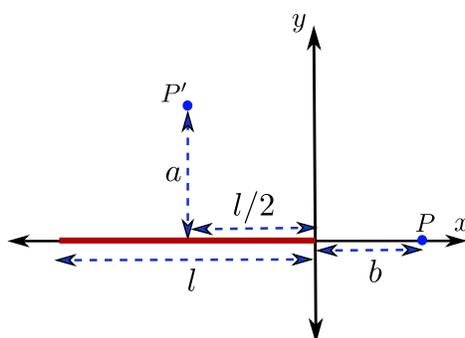


Figura 3.26: Ejercicio 3.17. Campo eléctrico debido a una carga distribuida uniformemente sobre una longitud finita extendida sobre el eje  $x$ .

**Ejercicio 3.18.** La configuración de carga mostrada en la figura 3.27 consiste de dos semicírculos de radio  $R$ . El semicírculo superior tiene una carga  $q > 0$ , en tanto que el semicírculo inferior posee una carga  $-q$ . Los dos semicírculos disponen de carga uniformemente distribuida sobre su longitud. Calcular el campo eléctrico en el centro del círculo.

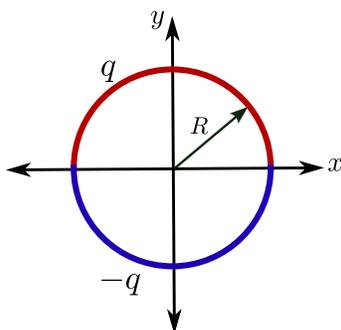


Figura 3.27: Ejemplo 3.18. Campo eléctrico generado por dos semicírculos cargados

**Ejercicio 3.19.** Dos barras infinitas son colocadas paralelas una a la otra y perpendiculares al plano de la página como se muestra en la figura 3.28. Cada una tiene su carga uniformemente distribuida, siendo  $\lambda$  la densidad de la barra ubicada a la izquierda y  $-\lambda$  la densidad de la barra ubicada a la derecha. Calcular el campo eléctrico en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  para el sistema descrito.

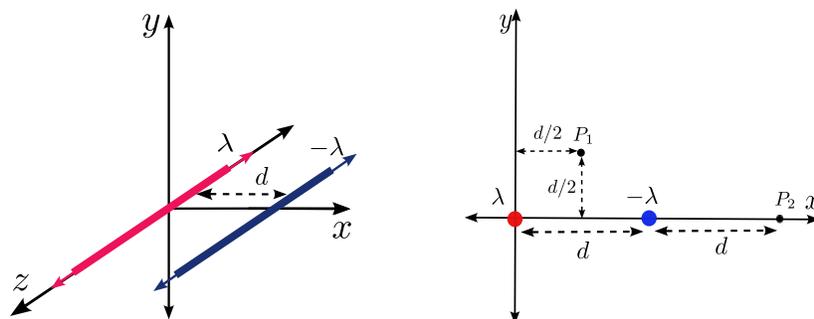


Figura 3.28: Ejercicio 3.19. Campo eléctrico generado por dos líneas de longitud infinita con densidad de carga uniforme.

**Ejercicio 3.20.** Una varilla forma un arco de radio  $R$  y abertura angular  $2\theta$  como se muestra en la figura 3.29. La varilla posee una carga total  $Q$  que se distribuye uniformemente. Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ .

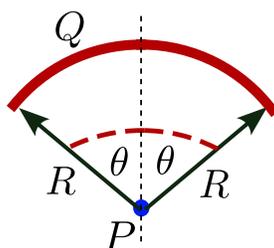


Figura 3.29: Ejercicio 3.20. Campo eléctrico generado por una varilla en forma de arco, con densidad de carga uniforme.

**Ejemplo 3.11.** Una carga se encuentra distribuida de manera no uniforme sobre un plano infinito que presenta un hueco circular de radio  $b$  como se muestra en la figura 3.30. La distribución de carga sobre el plano es dada por:  $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{b}{\rho^3}$ , donde  $\rho$  es la distancia radial medida desde el centro del agujero. Calcular el campo eléctrico sobre un punto que se encuentra a una distancia  $z$  sobre el eje de simetría del círculo.

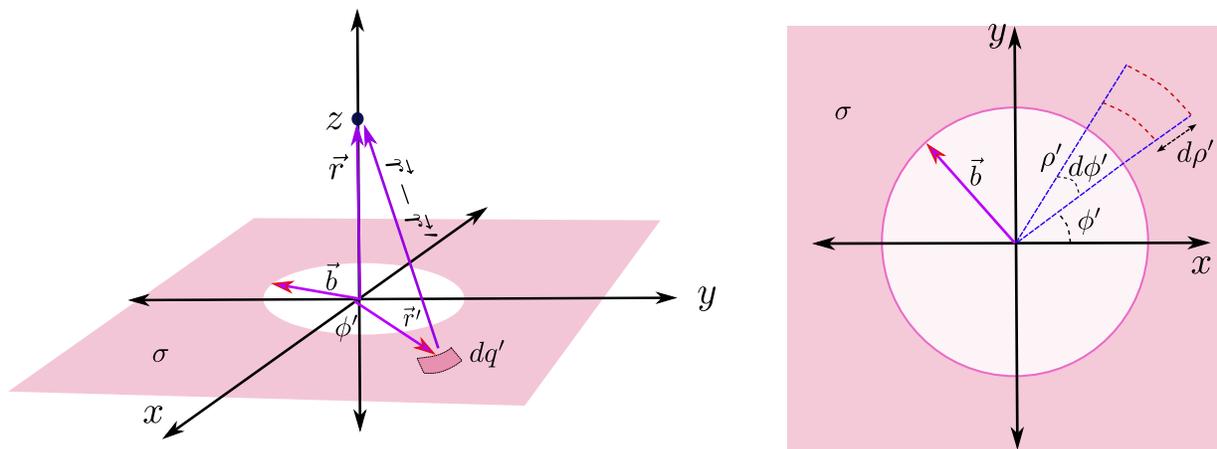


Figura 3.30: Ejemplo 3.11. Campo eléctrico generado por un plano infinito cargado, con un hueco circular en su centro.

**Solución:** Se considera el origen de coordenadas en el centro del círculo. Para un punto  $P$  localizado sobre el eje de simetría del círculo a una distancia  $z$ , el vector de posición que lo identifica se puede expresar como:

$$\vec{r} = z\hat{k}. \quad (3.151)$$

El elemento de carga  $dq'$  sobre el plano se puede caracterizar por las coordenadas  $(x, y)$ . De acuerdo a la figura 3.30, el vector de posición asociado a  $dq'$  se expresa como:

$$\vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} = \rho' \cos \phi' \hat{i} + \rho' \sin \phi' \hat{j}, \quad (3.152)$$

donde en la última igualdad se ha expresado las coordenadas  $x, y$  en las coordenadas polares que en esta ocasión se han denominado  $\rho'$  y  $\phi'$  (denominación usual en coordenadas cilíndricas), a partir de lo cual se tiene que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - (\rho' \cos \phi' \hat{i} + \rho' \sin \phi' \hat{j}) = z\hat{k} - \rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j}, \quad (3.153)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + \rho'^2 \cos^2 \phi' + \rho'^2 \sin^2 \phi')^{\frac{1}{2}} = (z^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.154)$$

El elemento de carga  $dq'$  se puede expresar en términos de la densidad superficial de carga, en la forma

$$dq' = \sigma(\rho') \underbrace{da}_{\rho' d\rho' d\phi'} = \left( \sigma_0 \frac{b}{\rho'^3} \right) (\rho' d\rho' d\phi') = \sigma_0 b \frac{1}{\rho'^2} d\rho' d\phi'. \quad (3.155)$$

Así, el campo eléctrico generado por  $dq'$  es,

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= k_e \frac{\sigma_0 b}{(z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\rho'^2} d\rho' d\phi' (z\hat{k} - \rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j}). \end{aligned} \quad (3.156)$$

De manera que el campo eléctrico total está dado por,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k_e \int_b^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 b}{\rho'^2 (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho' d\phi' (z\hat{k} - \rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j}) \\ &= k_e \sigma_0 b z \hat{k} \int_b^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^2 (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \\ &\quad - k_e \sigma_0 b \hat{i} \int_b^\infty \frac{d\rho'}{\rho' (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi'}_0 \\ &\quad - k_e \sigma_0 b \hat{j} \int_b^\infty \frac{d\rho'}{\rho' (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi'}_0 \\ &= 2\pi k_e \sigma_0 b z \hat{k} \int_b^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^2 (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Al evaluar la integral, se cumple que:

$$\int \frac{d\rho'}{\rho'^2 (z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z^2 + 2\rho'^2}{z^4 \rho' \sqrt{z^2 + \rho'^2}}, \quad (3.158)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 2\pi k_e \sigma_0 b z \hat{k} \left[ -\frac{z^2 + 2\rho'^2}{z^4 \rho' \sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right]_b^\infty \\ &= 2\pi k_e \sigma_0 b z \hat{k} \left[ \frac{z^2 + 2b^2}{z^4 b \sqrt{z^2 + b^2}} - \lim_{\rho' \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 2\rho'^2}{z^4 \rho' \sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi k_e \sigma_0 b}{z^3} \hat{k} \left[ \frac{z^2 + 2b^2}{b \sqrt{z^2 + b^2}} - \lim_{\rho' \rightarrow \infty} \frac{\rho' \left( \frac{z^2}{\rho'^2} + 2 \right)}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi k_e \sigma_0 b}{z^3} \hat{k} \left[ \frac{z^2 + 2b^2}{b \sqrt{z^2 + b^2}} - \lim_{\rho' \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{z^2}{\rho'^2} + 2 \right)}{\sqrt{\frac{z^2}{\rho'^2} + 1}} \right] \\ &= \frac{2\pi k_e \sigma_0 b}{z^3} \left( \frac{z^2 + 2b^2}{b \sqrt{z^2 + b^2}} - 2 \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

**Ejemplo 3.12.** Una arandela cargada de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  posee una carga no uniforme distribuida sobre su superficie, a través de la relación:  $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho}{(b-a)}$ , donde  $\rho$  es la distancia medida desde el centro de la arandela a un punto sobre el plano  $xy$ . Para la configuración planteada se calculará el campo eléctrico en un punto localizado en el eje de simetría de la arandela (eje  $z$ ).

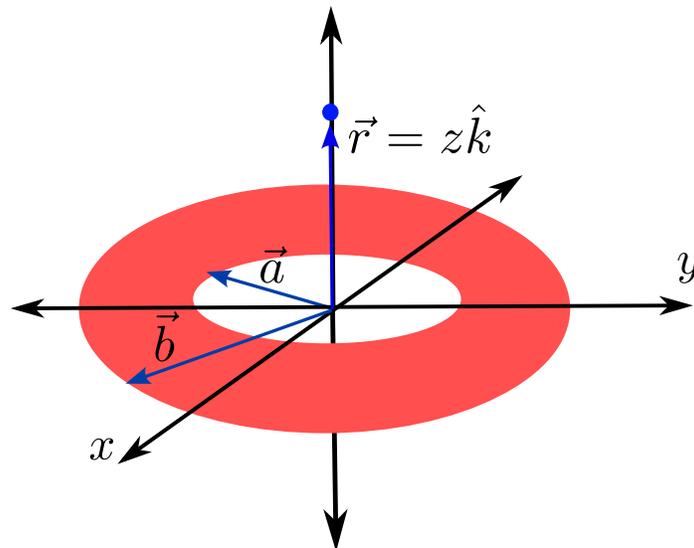


Figura 3.31: Ejemplo 3.12. Campo eléctrico debido a una arandela cargada.

**Solución:** Considerando el origen de coordenadas en el centro de la arandela, se asocia al eje  $z$  como eje de simetría de la misma. Si el punto está localizada a una distancia  $z$  del

origen, la posición de éste se puede expresar como:

$$\vec{r} = z\hat{k}. \quad (3.160)$$

El plano de la arandela coincide con el plano  $xy$ , de manera que el vector de posición  $\vec{r}'$ , que identifica el elemento de carga  $dq'$ ; de acuerdo a la figura 3.31, se puede expresar como:

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} = \rho' \cos \phi' \hat{i} + \rho' \sin \phi' \hat{j}, \quad (3.161)$$

siendo  $\rho'$  la distancia medida desde el origen de coordenadas al elemento de carga  $dq'$  y  $\phi'$  el ángulo que forma el vector de posición  $\vec{r}'$  con el eje  $x$  (notación usual en coordenadas cilíndricas). Así, se deduce que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - (\rho' \cos \phi' \hat{i} + \rho' \sin \phi' \hat{j}) = -\rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j} + z\hat{k}, \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\rho'^2 \cos^2 \phi' + \rho'^2 \sin^2 \phi' + z^2} = \sqrt{\rho'^2 (\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi') + z^2} \\ &= (\rho'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Ahora, el elemento de carga  $dq'$  se relaciona con la densidad superficial de carga  $\sigma(r)$  mediante:

$$dq' = \sigma(\rho') da', \quad (3.164)$$

siendo  $da'$  el diferencial de área ocupada por la carga  $dq'$  en el plano  $xy$  y que en coordenadas polares se escribe como:

$$da = \rho' d\rho' d\phi'. \quad (3.165)$$

Por lo tanto,

$$dq' = \left( \sigma_0 \frac{\rho'}{(b-a)} \right) (\rho' d\rho' d\phi') = \sigma_0 \frac{\rho'^2}{(b-a)} d\rho' d\phi'. \quad (3.166)$$

Entonces, el campo eléctrico dado por  $dq'$  es:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= k_e \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_0 \frac{\rho'^2}{(b-a)} d\rho' d\phi' \left( -\rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j} + z\hat{k} \right) \\ &= \frac{k_e \sigma_0}{(b-a)} \frac{\rho'^2 d\rho' d\phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( -\rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j} + z\hat{k} \right). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Para obtener el campo total, se debe integrar sobre el plano cargado, de tal manera que

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{k_e \sigma_0}{(b-a)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho'^2 d\rho' d\phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( -\rho' \cos \phi' \hat{i} - \rho' \sin \phi' \hat{j} + z \hat{k} \right) \\
 &= \frac{k_e \sigma_0}{(b-a)} \left\{ -\hat{i} \int_a^b \frac{\rho'^3 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi'}_0 - \hat{j} \int_a^b \frac{\rho'^3 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi'}_{2\pi} \right. \\
 &\quad \left. + z \hat{k} \int_a^b \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \right\} \\
 &= \frac{2\pi k_e \sigma_0}{(b-a)} z \hat{k} \int_a^b \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.168}
 \end{aligned}$$

Al evaluar la integral en la expresión anterior, se tiene que:

$$\int \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln \left[ r + (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \tag{3.169}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{2\pi k_e \sigma_0}{(b-a)} z \hat{k} \left\{ -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln \left[ r + (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}_a^b \\
 &= \frac{2\pi k_e \sigma_0}{(b-a)} z \hat{k} \left\{ -\frac{b}{(b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln \left[ b + (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \ln \left[ a + (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \tag{3.170}
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\vec{E} = \frac{2\pi k_e \sigma_0}{(b-a)} z \hat{k} \left\{ -\frac{b}{(b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ln \left[ \frac{b + (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{a + (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} \tag{3.171}$$

**Ejercicio 3.21.** Un disco plano se encuentra en el plano  $xy$  con su centro ubicado en el origen de un plano cartesiano. Si el disco está cargado, encuentre el campo eléctrico generado por el disco, sobre cualquier punto a lo largo del eje  $z$ , para los casos en los cuales la densidad de carga esté dada por:

- $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{b}{\rho}$
- $\sigma(\rho) = -\frac{\sigma_0 c^3}{\sqrt{(\rho^2 + c^2)^3}}$ ,

donde  $\rho$  es la coordenada polar definida por  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Ejercicio 3.22.** Dos planos infinitos que poseen una densidad superficial de carga uniforme negativa  $\sigma$ , se interceptan formando un ángulo de  $45^\circ$ , como se muestra en la figura 3.32. Calcular la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto  $P$  ubicado sobre el eje perpendicular a la línea de intersección de los planos y a una distancia  $z$  de ella.

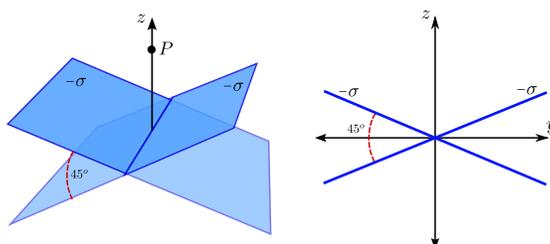


Figura 3.32: Ejercicio 3.22. Campo eléctrico generado por dos planos cargados.

**Ejercicio 3.23.** Dos planos infinitos poseen una carga opuesta pero distribuida de manera uniforme sobre su superficie. Los planos se interceptan formando un ángulo recto (ver figura 3.33). Encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico en cada uno de los cuatro cuadrantes definidos por los dos planos.

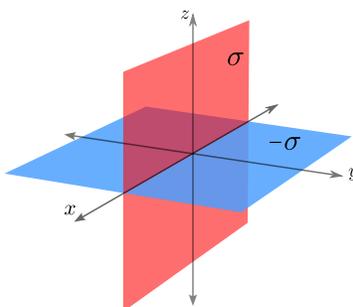


Figura 3.33: Ejercicio 3.23. Campo eléctrico generado por dos planos cargados.

**Pregunta 3.1.** Se tiene un sistema formado por dos conductores planos infinitos ubicados perpendicularmente al eje  $x$  y separados por una distancia  $d$ . Los planos se encuentran cargados uniformemente con una densidad de carga  $\sigma$ . El campo eléctrico en la región entre los planos tiene la dirección especificada en el figura 3.34. Para este sistema, respecto a los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , es correcto afirmar que:

1. Un protón en  $A$  debería sentir la misma fuerza que si se ubica en  $B$ , siempre y cuando la densidad de carga entre los planos sea igual en valor y opuesta en signo.
2. Un protón en  $A$  debería sentir la misma fuerza que si se ubica en  $B$ .
3. Un protón en  $A$ , sentiría la misma fuerza que la que experimental un electrón en  $B$ .
4. En los puntos  $C$  y  $D$  el campo eléctrico siempre es cero.
5. A medida que la separación  $d$  entre los planos aumenta, el campo eléctrico disminuye.

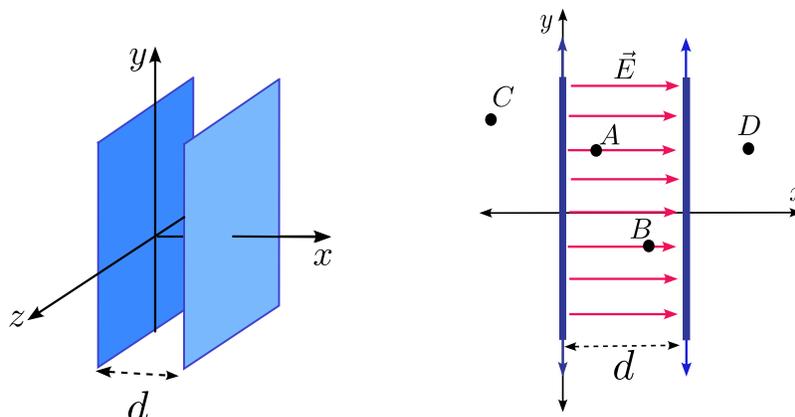


Figura 3.34: Pregunta 3.1. Interacción eléctrica de un protón y dos planos cargados.

**Pregunta 3.2.** Considere las configuraciones de cargas puntuales que se muestran en la figura 3.35. En todos los casos la distancia de las cargas al origen del sistema de coordenadas es la misma. Respecto al campo eléctrico en el origen es correcto afirmar que:

1. El campo eléctrico en el origen de coordenadas en las configuraciones 2), 3) y 4) es cero.
2. El campo eléctrico en el origen de coordenadas en las configuraciones 2), 3) y 4) es el mismo en magnitud y dirección.
3. El campo eléctrico en la configuración 1), 3) y 4) es cero.
4. El campo eléctrico es perpendicular al plano donde se encuentran las cargas en todas las configuraciones.

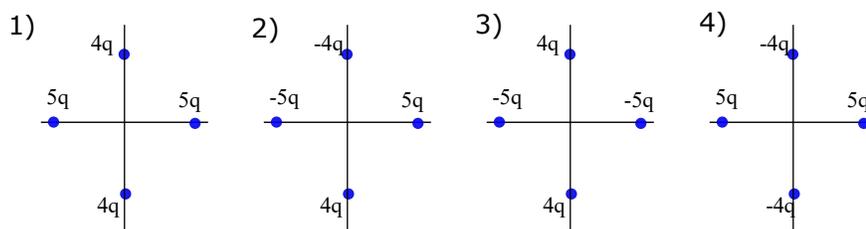


Figura 3.35: Pregunta 3.2. Campo eléctrico debido a cuatro cargas puntuales.

**Pregunta 3.3.** Un barra cargada se dobla como se muestra en la figura 3.36, formando un semicírculo. La parte superior del semicírculo (por encima del eje  $x$ ) tiene una carga positiva  $+Q$  y la parte inferior (por debajo del eje  $x$ ) una carga  $-Q$ . Respecto a la dirección del campo eléctrico en el punto  $O$ , es correcto afirmar que:

1. Se orienta hacia dentro del plano  $xy$  (hacia dentro de la página).
2. Se orienta en dirección  $y$ .

3. Se orienta hacia fuera del plano  $xy$  (hacia afuera de la página).
4. Se orienta en dirección  $-y$ .

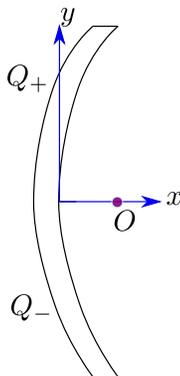


Figura 3.36: Pregunta 3.3. Campo eléctrico en el punto  $O$  debido a dos barras curvadas.

**Pregunta 3.4.** En una región del espacio se ubica una carga  $Q = -2\mu\text{C}$  inicialmente en reposo, donde existe un campo eléctrico uniforme dado por:

$$\vec{E} = 100\text{N/C}\hat{i}. \quad (3.172)$$

Respecto a la magnitud de la aceleración que experimenta la carga  $-2Q$  en presencia del campo eléctrico, es correcto afirmar que:

1. Es cero para todo tiempo  $t$ .
2. Es constante para todo tiempo  $t$  y en cualquier región del espacio donde existe el campo eléctrico.
3. Aumenta con el tiempo a medida que la carga se mueve dentro del campo eléctrico.
4. Disminuye con el tiempo a medida que la carga se mueve dentro del campo eléctrico.

**Pregunta 3.5.** Respecto a la dirección de movimiento de la carga eléctrica en el campo  $\vec{E}$  del ejercicio (3.4), se puede afirmar que:

1. La carga se mueve en la dirección del campo eléctrico.
2. La carga se mueve en dirección perpendicular al campo eléctrico.
3. La carga permanece en reposo.
4. La carga se dirige en dirección opuesta al campo eléctrico.

**Pregunta 3.6.** *Se tiene un sistema formado por un anillo cargado de radio  $R$  y carga  $Q$ , adicionalmente se ubica una carga puntual de valor  $q$  sobre el eje de simetría del anillo a una distancia  $z$  del centro del anillo ( $z > R$ ) (el plano del anillo coincide con el plano  $xy$ ). Si la carga  $q$  se aleja del anillo, respecto al campo eléctrico en el centro del anillo generado por el sistema anillo-carga puntual, se puede afirmar que:*

1. *Se reduce.*
2. *Aumenta.*
3. *No cambia.*
4. *Siempre es cero.*

**Pregunta 3.7.** *El campo eléctrico generado por una barra con carga  $Q$  y longitud  $L$  en un punto sobre el eje perpendicular a esta y a una distancia  $a$  de su centro, está dado por:  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{a\sqrt{a^2 + L^2/4}}$ , donde  $\lambda$  es la densidad de carga lineal. Si la longitud de la barra se duplica, el campo eléctrico:*

1. *Se duplica.*
2. *Se reduce a la mitad.*
3. *Se cuadruplica.*
4. *Disminuye.*

## 4– Ley de Gauss

---

La ley de Gauss es un principio fundamental en el campo del electromagnetismo, formulado por el matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss. Este principio establece una relación entre el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y la carga eléctrica total encerrada dentro de esa superficie. Matemáticamente, se expresa mediante una integral de superficie que vincula el campo eléctrico y la superficie en cuestión. La ley de Gauss es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, que constituyen el fundamento de la teoría clásica del electromagnetismo. Esta ley no solo proporciona una forma conceptual para entender cómo las cargas eléctricas generan campos eléctricos, sino que también ofrece una herramienta poderosa para calcular campos eléctricos en situaciones con una alta simetría, como es el caso de distribuciones esféricas, cilíndricas o planas de carga. Su versatilidad y utilidad la convierten en un elemento esencial para el análisis y la comprensión de fenómenos electromagnéticos en la física. Para entender la ley de Gauss, es necesario definir el concepto de flujo eléctrico, por lo tanto, este capítulo inicia con su descripción tanto conceptual como matemática.

### 4.1. Flujo Eléctrico

El flujo eléctrico se define tomando conceptos asociados de hidrodinámica, donde se estudia entre otras cosas, el flujo de un fluido. Para explicar dicho concepto, se considerará una corriente asociada a un fluido incomprensible no viscoso que fluye con velocidad  $\vec{v}$ , adicionalmente se considera un anillo con área  $A$  que se encuentra sumergido en dicha corriente, como se muestra en la figura 4.1. El vector de área  $\vec{A}$  tiene una magnitud igual al área del anillo  $A$  y su dirección es perpendicular al plano del anillo.

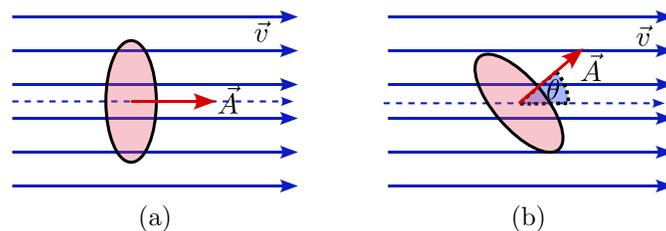


Figura 4.1: Flujo de un fluido incomprensible a través de un anillo.

En la figura 4.1a, el vector de área es paralelo a la velocidad del fluido; el producto  $Av$  determina la cantidad de agua que pasa por el área del anillo por unidad de tiempo. Si el plano del anillo se inclina con respecto a la dirección del flujo del líquido (ver figura 4.1b), la cantidad de agua que pasa por el anillo es  $Av \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre la velocidad  $\vec{v}$  del agua y el vector de área  $\vec{A}$ . La cantidad de agua que pasa por unidad de tiempo por el área del anillo se denomina flujo, y es expresada como:

$$\phi = Av \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (4.1)$$

Por analogía al flujo de un fluido, se define el flujo eléctrico. Si el campo  $\vec{E}$  es uniforme y “fluye” a través de un área  $A$  con el vector asociado formando un ángulo  $\theta$  con el vector de campo eléctrico (ver figura 4.2), el flujo eléctrico está dado por:

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta. \quad (4.2)$$

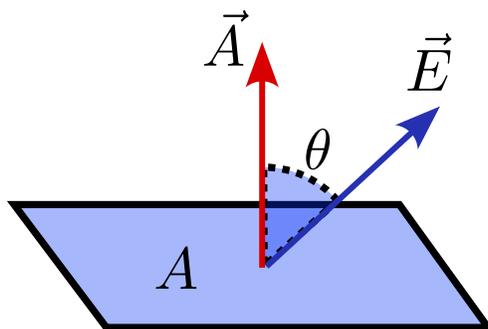


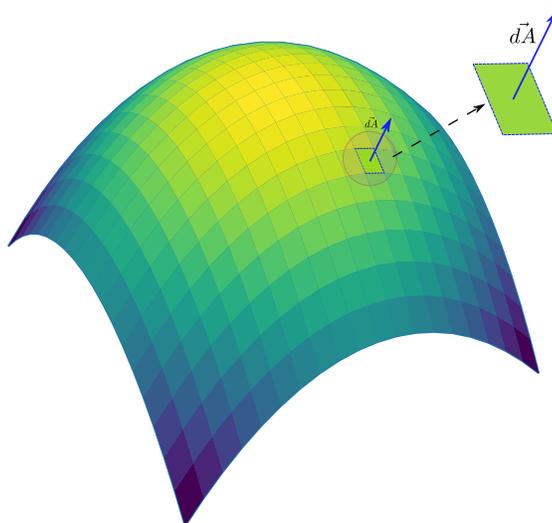
Figura 4.2: Flujo de campo eléctrico uniforme.

El flujo eléctrico definido en (4.2) se puede interpretar como el “ número de líneas” de campo eléctrico que atraviesan perpendicularmente el área  $\vec{A}$ . Lo cual es una consecuencia a la introducción del producto punto en la definición del flujo eléctrico, el cual proyecta el vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  en dirección de  $d\vec{A}$ , es decir, perpendicular al plano del área.

Como se mencionó, la ecuación (4.2) es válida si el campo eléctrico es uniforme. En una situación más general, el campo  $\vec{E}$  varía de punto a punto sobre la superficie, en tal caso la relación (4.2) solo es aplicable a elementos de área infinitesimales donde el campo eléctrico se puede considerar constante. Así, en una situación general, se divide la superficie en muchos elementos infinitesimales de área  $dA$ , como se muestra en la figura 4.3. Cada elemento es caracterizado por el vector  $d\vec{A}(\vec{r})$ , cuya magnitud representa el área  $dA(\vec{r})$  y su dirección es normal a la superficie en cada punto, como se indica en la figura 4.3. El flujo eléctrico asociado al área  $dA(\vec{r})$  es:

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA \cos \theta. \quad (4.3)$$

El flujo total a través de toda la superficie se obtiene al integrar la ecuación (4.3), con lo cual, se tiene que:

Figura 4.3: Vector de área  $d\vec{A}$ 

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (4.4)$$

Si el flujo se evalúa sobre una superficie cerrada, la dirección del vector  $d\vec{A}$  apunta siempre hacia fuera de la superficie, como se indica en la figura 4.4.

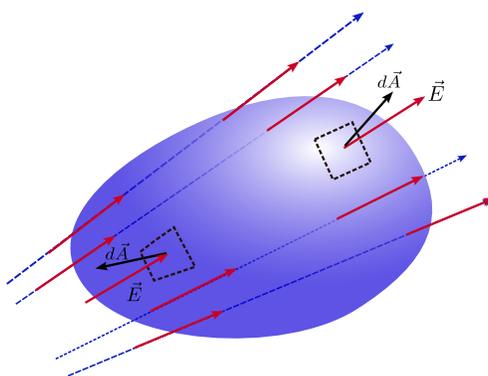


Figura 4.4: Flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada.

En una superficie los vectores  $d\vec{A}(\vec{r})$  apuntan en distintas direcciones de acuerdo a la curvatura de la superficie en estudio. Para una superficie cerrada inmersa en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}$ , se observará vectores de área  $d\vec{A}$  para los cuales  $\theta < 90^\circ$ , indicando que las líneas de campo atraviesan la superficie desde su interior, resultando en flujo eléctrico

positivo  $d\phi_E > 0$ . Se puede observar flujo eléctrico positivo hacia la derecha de la superficie indicada en la figura 4.4. También es posible encontrar elementos  $d\vec{A}$  perpendiculares al vector de campo  $\vec{E}$ , para los cuales el flujo eléctrico sea cero ( $d\phi_E = 0$ ). Finalmente, existirán elementos de área cuyos ángulo con respecto al campo eléctrico, estarán comprendidos entre  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , implicando que las líneas de campo cruzan la superficie de afuera hacia adentro, generando flujo negativo. Se puede observar flujo eléctrico negativo hacia la izquierda de la superficie indicada en la figura 4.4. El flujo sobre una integral cerrada se expresa como:

$$\phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (4.5)$$

donde  $\oint_s$  denota que la integral se evalúa sobre una superficie cerrada. El flujo neto a través de la superficie es proporcional al número neto de “líneas de campo” saliendo de la superficie (número de líneas que salen menos las que entran). Un flujo neto positivo indica más líneas de campo saliendo (flujo positivo), mientras un flujo negativo indica más líneas de campo entrando (flujo negativo).

Al calcular el flujo sobre una superficie cerrada, como una esfera, el vector diferencial de área ( $d\vec{A}$ ) apunta siempre hacia fuera del volumen encerrado por la superficie. Para una superficie abierta, como se muestra en la figura 4.3, la dirección del vector  $d\vec{A}$  es arbitraria. Esto se debe a que una superficie tiene dos caras y el vector de área puede ser normal a la superficie desde cualquiera de sus lados. Sin embargo, una vez que se establece la dirección de un elemento  $d\vec{A}$ , esta orientación debe mantenerse constante en toda la superficie de integración asociada.

**Ejemplo 4.1.** *Para una carga puntual  $q$ , en este ejemplo se encontrará el flujo eléctrico a través de una superficie esférica de radio  $r$  con centro en la posición de la carga  $q$ .*

**Solución:** *Tomando el origen de coordenadas en la ubicación de la carga  $q$ , el campo eléctrico en cualquier región del espacio vendrá dado en coordenadas esféricas por la expresión:*

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (4.6)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario normal en cada punto a la superficie de la esfera. Por otra parte, en coordenadas esféricas un elemento diferencial de área para la superficie esférica viene dado por:

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.7)$$

y el vector de área debe apuntar radialmente hacia afuera de la superficie esférica, por lo cual se tiene que

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}. \quad (4.8)$$

A partir de los resultados anteriores, el flujo eléctrico toma la forma:

$$\begin{aligned}
\phi_E &= \int_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_s E dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( k_e \frac{q}{r^2} \right) r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi \\
&= k_e q \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta d\phi = 4\pi k_e q.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

**Ejemplo 4.2.** El campo eléctrico en cierta región del espacio es descrito por:  $\vec{E} = (3.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 0.0\hat{k})\frac{N}{C}$ . Para el campo establecido se calculará el flujo eléctrico a través de las superficies mostradas en la figura 4.5, considerando  $L = 0.30\text{m}$ .

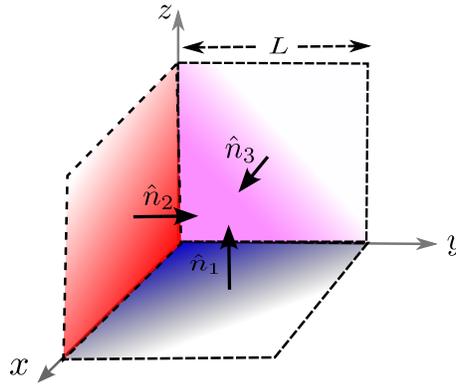


Figura 4.5: Ejemplo (4.2). Flujo eléctrico a través de tres superficies cuadradas.

**Solución:** Si se procede a evaluar el flujo eléctrico a través de la superficie  $S_1$ , se identifica que  $\hat{n}_1 = \hat{k}$ , de manera que  $\vec{A}_{S_1} = L^2\hat{n}_1 = L^2\hat{k}$ . Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es uniforme, el flujo a través de  $S_1$  es:

$$\phi_{E_{S_1}} = \vec{E} \cdot \vec{A}_{S_1} = (3.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + \hat{k}) \cdot (L^2\hat{k}) = L^2 = 0.90\text{m}^2. \tag{4.10}$$

En el caso de la superficie  $S_2$ , el vector normal se puede expresar como:  $\hat{n}_2 = \hat{j}$ , de manera que  $\vec{A}_{S_2} = L^2\hat{n}_2 = L^2\hat{j}$ . Por tanto, el flujo eléctrico es:

$$\phi_{E_{S_2}} = \vec{E} \cdot \vec{A}_{S_2} = (3.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + \hat{k}) \cdot (L^2\hat{j}) = 2.0L^2 = 1.8\text{m}^2. \tag{4.11}$$

Finalmente, en el caso de la superficie  $S_3$ , se considera el vector normal como:  $\hat{n}_3 = \hat{i}$ , con lo cual  $\vec{A}_{S_3} = L^2\hat{n}_3 = L^2\hat{i}$ . Entonces,

$$\phi_{E_{S_3}} = \vec{E} \cdot \vec{A}_{S_3} = (3.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + \hat{k}) \cdot (L^2\hat{i}) = 3.0L^2 = 2.7\text{m}^2. \tag{4.12}$$

**Ejemplo 4.3.** Se considera un campo eléctrico no uniforme definido por  $\vec{E}_2 = E_z\hat{k}$ , donde  $E_z = D(y - 2x)$ . En esta expresión  $x$  y  $y$  están medidos en metros y  $D$  es una constante con unidades de  $\frac{N}{C\text{m}}$ . El objetivo de este ejercicio es calcular el flujo eléctrico a través de una de las caras de un cubo de lado  $a$ , concretamente la cara 4 indicada en la figura 4.6.

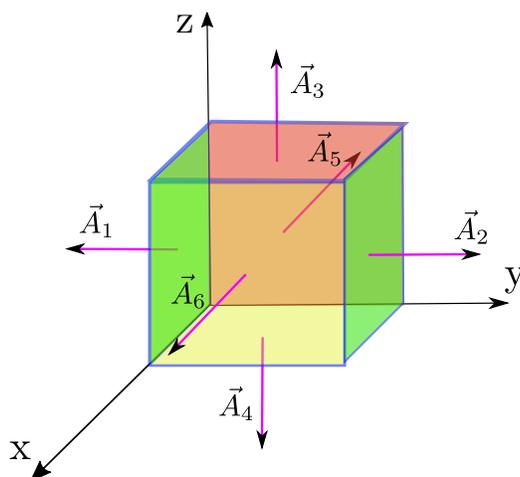


Figura 4.6: Ejemplo (4.3). Flujo eléctrico a través de una de las caras de un cubo de lado  $a$ , debido a un campo eléctrico  $\vec{E}$ .

**Solución:** Al ser un campo eléctrico no uniforme, el flujo eléctrico a través de la cara 4 del cubo, se debe evaluar a partir de la expresión:

$$\phi_{E_{S_4}} = \int_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (4.13)$$

donde

$$d\vec{A} = dA (-\hat{k}) = -dxdy\hat{k}. \quad (4.14)$$

Si se considera a la esquina inferior del cubo como el origen de coordenadas, es posible determinar que:

$$\begin{aligned} \phi_{E_{S_4}} &= \int_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_4} (E_z \hat{k}) \cdot (-dxdy\hat{k}) \\ &= -\int_0^a \int_0^a D(y-2x) dx dy = -D \left( \int_0^a dx \int_0^a y dy - 2 \int_0^a x dx \int_0^a dy \right) \\ &= -D \left[ (a) \left( \frac{1}{2} a^2 \right) - 2 \left( \frac{1}{2} a^2 \right) (a) \right] = \frac{1}{2} D a^3. \end{aligned} \quad (4.15)$$

**Ejemplo 4.4.** Una carga puntual  $Q$  negativa se encuentra localizada a lo largo del eje de un disco de radio  $a$ , a una distancia  $c$  del plano del disco (ver figura 4.7). Para la situación planteada, en este ejemplo se mostrará que si un cuarto del flujo eléctrico debido a la carga pasa a través del disco, entonces  $a = \sqrt{3}c$ .

**Solución:** En primer lugar, el flujo total para una carga puntual  $Q$ , viene dado por la expresión (4.9) calculada en el ejemplo (4.1); es decir:

$$\phi_T = 4\pi k_e Q = -4\pi k_e |Q| \quad (4.16)$$

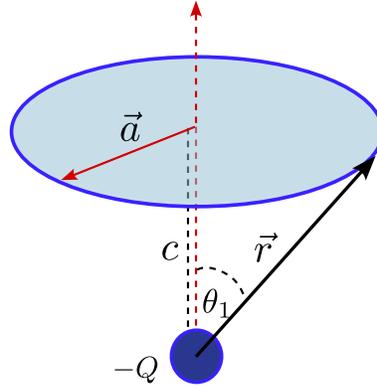


Figura 4.7: Ejemplo (4.4). Flujo eléctrico a través de una superficie circular debido a una carga puntual

Por otro lado, de acuerdo a la figura 4.7, el disco de radio  $a$  está delimitado por una frontera circular. Dicha frontera también delimita a la superficie asociada a un elemento de cascarón esférico de radio  $r$ . Por lo tanto, el flujo eléctrico a través del disco,  $\phi_{ED}$ , será igual al flujo eléctrico a través de la sección del cascarón esférico  $\phi_{EC}$ , es decir:

$$\phi_{ED} = \phi_{EC}, \quad (4.17)$$

siendo

$$\phi_{EC} = \int_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (4.18)$$

Ahora, el campo eléctrico debido a la carga puntual  $Q$  negativa se expresa como:

$$\vec{E} = k_e \frac{(-|Q|)}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{|Q|}{r^2} (-\hat{r}). \quad (4.19)$$

Por otra parte, el elemento de área  $d\vec{A}$  se encuentra sobre la superficie del cascarón de radio  $r$  y es normal a la superficie. En consecuencia, este se expresa como:

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}, \quad (4.20)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector normal a esta superficie, por lo tanto,

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi (\hat{r}). \quad (4.21)$$

Así, el flujo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \phi_{EC} &= \int_{S_{CS}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \left[ k_e \frac{|Q|}{r^2} (-\hat{r}) \right] \cdot [r^2 \sin \theta d\theta d\varphi (\hat{r})] \\ &= -k_e |Q| \int_0^{\theta_1} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k_e |Q| (\cos \theta_1 - 1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

De la figura 4.7 es posible determinar que:

$$\cos \theta_1 = \frac{c}{r} = \frac{c}{(c^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.23)$$

por lo cual,

$$\phi_{E_C} = 2\pi k_e |Q| \left[ \frac{c}{(c^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right], \quad (4.24)$$

Siendo que un cuarto del flujo eléctrico debido a la carga pasa a través del disco, se cumple que:

$$\phi_{E_D} = \phi_{E_c} = \frac{1}{4}\phi_T, \quad (4.25)$$

lo que conlleva a que,

$$-\pi k_e |Q| = 2\pi k_e Q \left[ \frac{c}{(c^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \quad (4.26)$$

por tanto,

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{c}{(c^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.27)$$

a partir de lo cual se obtiene que

$$3c^2 = a^2, \quad (4.28)$$

lo que implica que:  $a = \sqrt{3}c$ .

**Ejemplo 4.5.** El paraboloido mostrado en la figura 4.8, se encuentra inmerso en una región con un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}_0$ . Calcular el flujo eléctrico a través de la superficie del paraboloido.

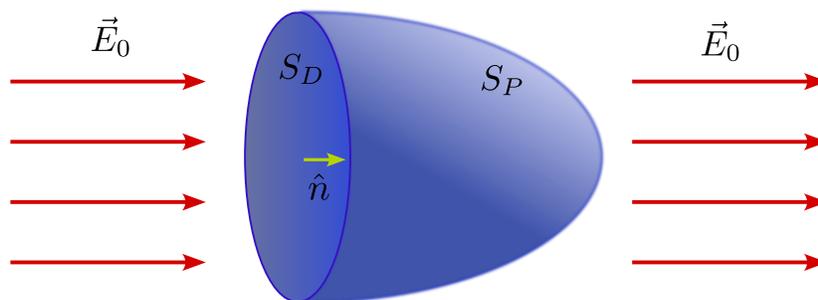


Figura 4.8: Ejemplo (4.5). Flujo eléctrico a través de un paraboloido.

**Solución:** Es importante destacar que las líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie circular  $S_D$  (la base del paraboloido), son las mismas que pasan a través de la superficie del paraboloido  $S_P$ . Esto significa que el flujo eléctrico debido al campo  $\vec{E}_0$  a través de ambas superficies es el mismo.

$$\phi_{E_D} = \phi_{E_P}. \quad (4.29)$$

Ahora, para la superficie del disco es posible establecer que el vector de campo eléctrico  $\vec{E}_0$  es paralelo a la normal  $\hat{n}$  de  $S_D$ , de manera que:

$$\phi_{E_P} = \int_{S_D} \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \int_{S_D} E_0 dA = E_0 \underbrace{\int_{S_D} dA}_{\pi r^2} = \pi r^2 E_0. \quad (4.30)$$

**Ejemplo 4.6.** Una carga puntual  $Q$  negativa se localiza en el centro de un anillo de radio  $b$ , el cual posee una densidad lineal de carga  $\lambda$  uniforme y negativa (ver figura 4.9). Para el sistema descrito, se calculará el flujo eléctrico a través de una esfera de radio  $a$ , en los casos:  $b < a$  y  $b > a$ .

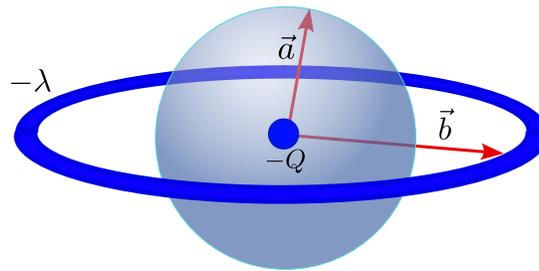


Figura 4.9: Ejemplo (4.6). Flujo eléctrico debido a una carga puntual y un anillo uniformemente cargado.

**Solución:** Para  $b < a$ , la superficie de integración es tal que solo encierra la carga puntual  $-Q$ , de manera que el flujo eléctrico es:

$$\phi_E = 4\pi k_e Q_{enc} = 4\pi k_e (-Q) = -4\pi k_e Q. \quad (4.31)$$

Ahora, si la superficie de la esfera cumple la condición  $b > a$ , resulta que,

$$\phi_E = 4\pi k_e Q_{enc} = 4\pi k_e (-Q + Q_\lambda), \quad (4.32)$$

donde  $Q_\lambda$  es la carga asociada al anillo, la cual se expresa como:

$$Q_\lambda = \lambda(2\pi a) = 2\pi a\lambda, \quad (4.33)$$

por tanto,

$$\phi_E = 4\pi k_e (-Q + 2\pi a\lambda). \quad (4.34)$$

**Ejercicio 4.1.** Calcular el flujo eléctrico a través de las caras 1, 2 y 3 para el cubo y el campo eléctrico descritos en el ejemplo (4.3).

**Ejercicio 4.2.** Se tiene un campo eléctrico dado por:  $\vec{E} = (2.0\hat{i} - 1.0\hat{j} + 3.0\hat{k}) \frac{N}{C}$ . Calcular el flujo eléctrico a través de una superficie de  $2.0\text{m}^2$  de área que es paralela al plano  $xy$ .

**Ejercicio 4.3.** Considerar una superficie cuadrada de lado  $a$ , localizada a una distancia  $d$  de una carga puntual negativa  $Q$ , como se muestra en la figura 4.10. Para la situación descrita, encuentre: (a) el flujo eléctrico a través de la superficie cuadrada, tomando la superficie perpendicularmente al eje  $x$  y aproxime el resultado al caso  $a \ll c$ , (b) el flujo eléctrico cuando la superficie se encuentra inclinada un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $x$  y analice el caso  $a \ll c$ .

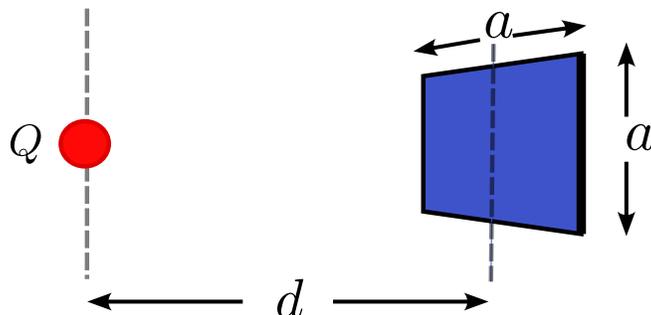


Figura 4.10: Ejercicio (4.3). Flujo eléctrico a través de una superficie rectangular, debido a una carga puntual

**Ejercicio 4.4.** Una carga puntual  $Q$  negativa se localiza en la esquina de un cubo de lado  $b$  como se muestra en la figura 4.11. Calcular el flujo eléctrico a través de la cara sombreada.

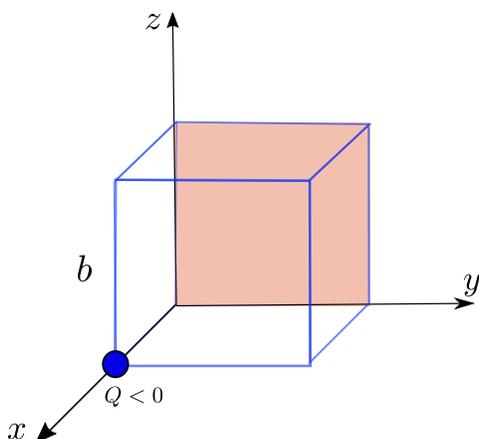


Figura 4.11: Ejercicio (4.4). Flujo eléctrico a través de una de las caras de un cubo de lado  $a$

**Ejercicio 4.5.** Resolver el Ejemplo (4.3) considerando que el campo eléctrico es dado por:  $\vec{E}_2 = E_z \hat{k}$ , donde  $E_z = D(x^2 - y^2)$ ,  $x$  y  $y$  están medidos en metros y  $D$  es una constante con unidades de  $\frac{N}{Cm^2}$ .

**Ejercicio 4.6.** Un campo eléctrico no uniforme es dado por la expresión  $\vec{E} = a_1 z \hat{i} + a_2 x \hat{j} + a_3 y^2 \hat{k}$ , donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son constantes. Calcular el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular paralela al plano  $xz$  que va desde  $x = 0$  hasta  $x = b$  y de  $z = 0$  hasta  $z = c$ . La superficie corta perpendicularmente el eje  $y$  en  $y = d$  ( $b, c, d$  son constantes).

**Ejercicio 4.7.** Una pirámide de base cuadrada de lado  $a$  y altura  $h$  está localizada en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , orientado perpendicularmente a la base de la pirámide. Calcular el flujo eléctrico total a través de las cuatro caras inclinadas de la pirámide.

**Ejercicio 4.8.** Un cable infinito que posee una carga por unidad de longitud  $\lambda$ , coincide con el eje de un cascarón cilíndrico de radio  $a$  y altura  $h$ . Calcular el flujo eléctrico a través del área lateral del cilindro.

**Ejercicio 4.9.** Un cubo de lado  $a$  se coloca en un campo eléctrico uniforme de intensidad  $E$ . Calcular el flujo eléctrico si:

- a) El campo eléctrico es perpendicular a dos caras opuestas del cubo.

b) El campo eléctrico es paralelo a una de las diagonales del cubo.

**Ejercicio 4.10.** Un campo eléctrico no uniforme orientado en la dirección del eje  $z$  está caracterizado por una intensidad:  $E = \frac{E_0}{x^2+y^2}$ , donde  $E_0$  es una constante. Calcular el flujo eléctrico a través de las siguientes superficies:

a) A través de un rectángulo extendido en el plano  $yz$ , entre  $a \ll y \ll b$  y  $d \ll z \ll d$ . El plano del rectángulo corta el eje  $x$  en  $x = x_0$  ( $x_0 = \text{cte}$ ).

b) A través de un rectángulo extendido en el plano  $xy$ , entre  $a < x < b$  y  $d < y < d$ .

## 4.2. Ley de Gauss

El flujo eléctrico conceptualmente tiene una aplicación adicional, cuando se calcula en superficies cerradas, en cuyo caso se presentan tres opciones posibles:

1. Se puede dar el caso que el número de líneas que “ingresan” al interior de la superficie cerrada, es menor que el número de número de líneas que “salen” de la misma, entonces el flujo neto sobre la superficie cerrada es positivo ( $\phi_E > 0$ ) y se puede inferir la existencia de una carga positiva dentro de la superficie, ya que las líneas de campo, salen de cargas positivas.
2. Si el número de líneas de campo eléctrico que “ingresan” a la superficie es mayor a las líneas de campo que “salen”, entonces el flujo total será negativo ( $\phi_E < 0$ ), y se puede inferir la existencia de una carga eléctrica negativa dentro de la superficie, ya que las líneas de campo ingresan sobre cargas negativas.
3. Si el flujo total es cero, entonces se puede inferir que el número de líneas que “salen” por algún sector de la superficie, se compensan con el número de líneas que “salen” por otro sector de la misma y por lo tanto, no hay fuentes de campo eléctrico dentro de la superficie (asumiendo que el campo eléctrico existe).

La ley de Gauss establece que el flujo neto a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por la superficie siendo el factor de proporcionalidad igual a  $1/\epsilon_0$ . Matemáticamente la ley de Gauss se escribe como:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}, \quad (4.35)$$

donde  $Q_{enc}$  corresponde a la carga neta encerrada por la superficie cerrada  $S$ . Si la carga neta está constituida por  $N$  cargas puntuales  $q_i$ , entonces la ley de Gauss se puede escribir como:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (4.36)$$

donde se requiere que todas las cargas  $q_i$  se encuentren encerradas por la superficie  $S$ . La figura 4.12 muestra 4 superficies cerradas ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ ), dos de ellas esféricas ( $S_1$ ,  $S_4$ ) y dos no esféricas ( $S_2$  y  $S_3$ ), que en virtud de la ley de Gauss, tienen el mismo flujo eléctrico  $q/\epsilon_0$  (sin importar si son esféricas o no).

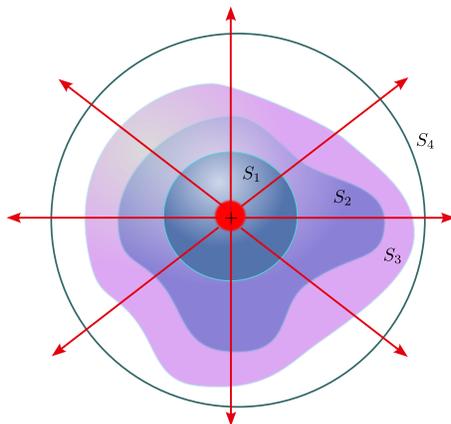


Figura 4.12: Diferentes superficies que encierran una carga.

Ahora, si se considera una carga puntual  $q$  localizada fuera de la superficie cerrada en estudio, como se muestra en la figura 4.13, es posible observar que las líneas de campo eléctrico que “ingresan” por un lado de la superficie, es igual al número de líneas que “salen” de la superficie, por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie cerrada es nulo y se concluye que dicha superficie no encierra ninguna carga.

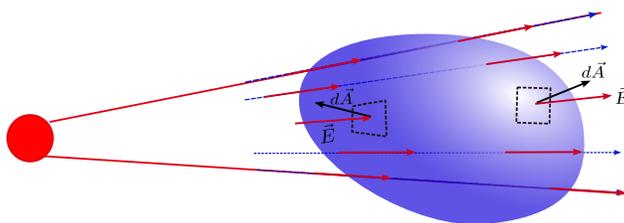


Figura 4.13: Flujo eléctrico debido a una carga puntual externa a una superficie cerrada.

**Ejemplo 4.7.** Aunque la expresión (4.35) es válida para toda superficie cerrada, se puede verificar fácilmente al considerar una superficie esférica que encierre una carga puntual  $q$ , lo cual se demostrará en este ejemplo.

**Solución:** El campo eléctrico para una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas, es dado por

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (4.37)$$

donde  $\hat{r}$  representa un vector unitario dirigido en dirección radial a la carga y con magnitud 1, que en términos de los vectores unitarios cartesianos se puede escribir como:  $\hat{r} = 1/\sqrt{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ . Ahora se considera una esfera centrada en la carga puntual  $q$ . En cada punto sobre la esfera,

se puede tomar un elemento diferencial de área  $dA$ , cuyo vector de área apunta en dirección  $\hat{r}$  (normal a la superficie), de tal manera que:  $d\vec{A} = dA\hat{r}$ . Con lo cual el flujo eléctrico sobre la superficie esférica vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_s \left( k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (dA\hat{r}) \\ &= k_e q \oint_s \frac{dA}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{r}) = k_e q \oint_s \frac{dA}{r^2}.\end{aligned}\quad (4.38)$$

En coordenadas esféricas, el elemento de área se expresa como:  $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ , así que el flujo de campo eléctrico que cruza la superficie esférica es:

$$\begin{aligned}\phi_E &= k_e q \oint_s \frac{dA}{r^2} = k_e q \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} \\ &= k_e q \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) q,\end{aligned}\quad (4.39)$$

es decir,

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.\quad (4.40)$$

Entonces, el flujo eléctrico a través de la superficie esférica es proporcional a la carga encerrada por la superficie esférica y dicho resultado es independiente del radio de la esfera.

**Ejemplo 4.8.** A continuación, se considera un sistema constituido por cuatro cargas puntuales:  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$ , como se muestra en la Figura 4.14. Para la configuración descrita se calculará el flujo eléctrico a través de las superficies: a)  $S_1$ , b)  $S_2$ , c)  $S_3$ , d)  $S_4$ .

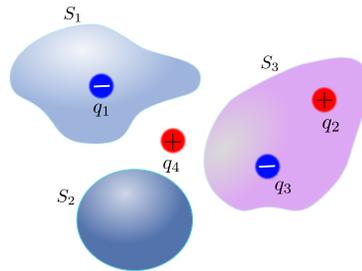


Figura 4.14: Ejemplo (4.8). Flujo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales.

**Solución:** El campo eléctrico en la región donde se encuentran las cuatro cargas, está dado por el principio de superposición, es decir

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4.\quad (4.41)$$

donde  $E_i$  corresponde al campo eléctrico generado por la carga  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). El flujo eléctrico a través de una única superficie cerrada  $S$  es:

$$\begin{aligned}\phi_E &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \left( \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \right) \cdot d\vec{A} \\ &= \int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{E}_4 \cdot d\vec{A} \\ &= \phi_{E_1} + \phi_{E_2} + \phi_{E_3} + \phi_{E_4},\end{aligned}\quad (4.42)$$

donde  $\phi_{E_i}$  determina el flujo del campo eléctrico  $\vec{E}_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , a través de la superficie  $S$ . Al evaluar el flujo eléctrico en cada superficie descrita en la figura 4.14, se tiene que:

- a) Si se identifica  $S = S_1$ , la superficie encierra solo la carga  $q_1$ , por tanto, el flujo a través de  $S_1$  es:

$$\begin{aligned}\phi_E &= \int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} + \underbrace{\int_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}}_0 + \underbrace{\int_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}}_0 + \underbrace{\int_S \vec{E}_4 \cdot d\vec{A}}_0 \\ &= \phi_{E_1}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

por lo tanto

$$\phi_E = \frac{q_1}{\varepsilon_0}.\quad (4.44)$$

Se debe observar, que las cargas  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  que son externas a la superficie  $S_1$  no contribuyen al flujo eléctrico a través de la superficie  $S_1$ .

- b) Si  $S = S_2$ , el flujo eléctrico es:

$$\phi_E = 0,\quad (4.45)$$

debido a que esta superficie no encierra ninguna carga.

- c) Para  $S = S_3$ , el flujo neto se debe a la contribución de las cargas  $q_2$  y  $q_3$  que encierra esta superficie, es decir,

$$\phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_2 + q_3).\quad (4.46)$$

- d) Ahora, la carga  $q_4$  es exterior a todas las superficies que se consideran, por tanto, el campo asociado a esta carga no contribuye al flujo eléctrico.

**Ejemplo 4.9.** En este ejemplo se considera un sistema de tres cargas puntuales ( $4Q, -2Q, Q$ ) localizadas en el espacio y se analizará el flujo eléctrico a través de cuatro superficies cerradas ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ) como se muestra en la figura 4.15.

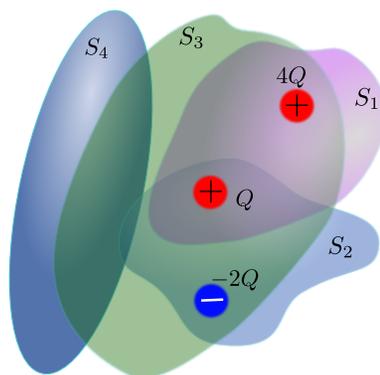


Figura 4.15: Ejemplo (4.9). Flujo eléctrico a través de 4 superficies cerradas y 3 cargas puntuales

**Solución:** La ley de Gauss establece que el flujo de un campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de una superficie cerrada  $S$  se expresa como:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 4\pi k_e Q_{enc}, \quad (4.47)$$

donde  $Q_{enc}$  es la carga neta encerrada por la superficie  $S$ . Así, el flujo eléctrico a través de cada superficie descrita en la figura 4.15 es:

$$S_1 : \phi_{ES_1} = 4\pi k_e Q_{S_1} = 4\pi k_e (4Q + Q) = 20\pi k_e, \quad (4.48)$$

$$S_2 : \phi_{ES_2} = 4\pi k_e Q_{S_2} = 4\pi k_e (Q - 2Q) = -4\pi k_e, \quad (4.49)$$

$$S_3 : \phi_{ES_3} = 4\pi k_e Q_{S_3} = 4\pi k_e (4Q + Q - 2Q) = 12\pi k_e, \quad (4.50)$$

$$S_4 : \phi_{ES_4} = 4\pi k_e Q_{S_4} = 4\pi k_e (0) = 0. \quad (4.51)$$

### Determinación de campo eléctrico a partir de la ley de Gauss

Una aplicación importante de la ley de Gauss, consiste en la evaluación rápida de campo eléctricos asociados a distribuciones de carga con una alta simetría, donde la integración establecida en la ley de Gauss, se pueda realizar de forma trivial.

A continuación se presentan ejemplos en los cuales se aplica la ley de Gauss (ecuación (4.35)) para encontrar el campo eléctrico sobre la superficie de integración.

**Ejemplo 4.10.** Uno de los ejemplos usuales para calcular campo eléctrico utilizando ley de Gauss, es el asociado a una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre el volumen de una esfera de radio  $R$ . En tal circunstancia, la superficie gaussiana (la superficie de integración que se elige en la ecuación (4.35)) es una esfera de radio  $r$ . Para la situación planteada se calculará el campo eléctrico en las regiones  $r \geq R$  y  $r < R$ .

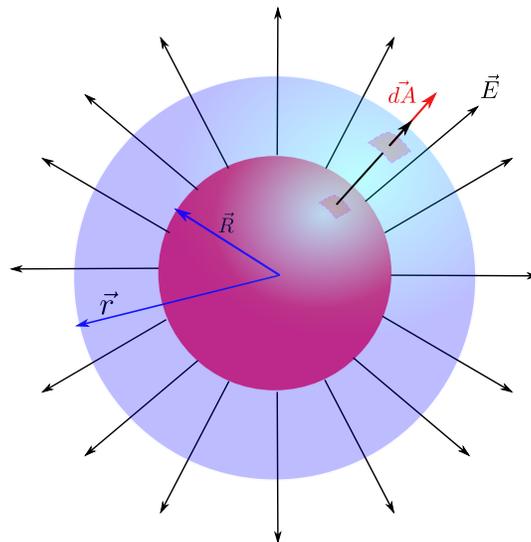


Figura 4.16: Ejemplo (4.10). Ley de Gauss aplicada a una esfera cargada de radio  $R$  para  $r > R$ .

**Solución:**

1. Para la región determinada por  $r \geq R$ , la carga encerrada por la esfera de radio  $r$  (superficie gaussiana) será la carga total  $Q$  dentro de la esfera de radio  $R$  (ver figura 4.16); es decir  $Q_{enc} = Q$ . En tal caso:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (4.52)$$

Por la simetría del problema, el campo eléctrico debe salir radialmente de la esfera cargada, así que en todo punto será paralelo al vector de área  $d\vec{A}$  y por lo tanto:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (4.53)$$

Ahora, la simetría del problema también deja en evidencia que la magnitud del campo en cualquier punto de la superficie esférica debe ser el mismo (ya que solo depende de la distancia  $r$ ) y por lo tanto, es constante en la integración que se debe realizar en (4.53), tal que:

$$\oint_A E dA = E \oint_A dA = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (4.54)$$

Por último, la integral  $\oint_A dA = A$ , donde  $A$  representa el área de la esfera de radio  $r$ ; es decir,  $A = 4\pi r^2$  con lo cual, se tiene que:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \equiv k_e \frac{Q}{r^2}. \quad (4.55)$$

Del resultado final expresado en (4.55), se puede concluir que el campo eléctrico debido a una esfera cargada, es equivalente al campo eléctrico que genera una partícula con carga  $Q$  ubicada en el centro de la esfera, siempre y cuando  $r \geq R$ .

2. En el caso que  $r < R$ , la superficie gaussiana queda dentro de la esfera de radio  $R$ , como se indica en la figura 4.17; sin embargo, el procedimiento realizado en el ítem anterior, específicamente en la parte derecha de la ley de Gauss (o sea, en  $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ ), se aplica también para la región establecida por  $r < R$ ; es decir, el campo sigue siendo paralelo al vector de área, su magnitud es constante en la integración y la integral  $\oint_A dA = 4\pi r^2$ , tal que (4.35), toma la forma:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2 \epsilon_0}. \quad (4.56)$$

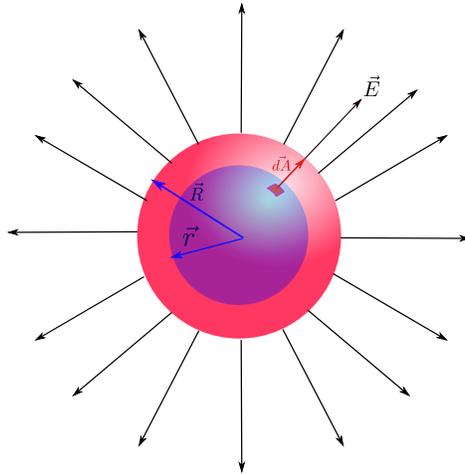


Figura 4.17: Ejemplo (4.10). Ley de Gauss aplicada a un esfera cargada en el caso  $r < R$

La diferencia respecto al caso  $r > R$ , es que ahora la carga encerrada  $Q_{enc}$  ya no corresponde a la carga total de la esfera  $Q$ . La carga encerrada será exclusivamente la carga dentro de la superficie gaussiana de radio  $r$  que será una fracción de  $Q$ . Para determinar la carga encerrada por la superficie gaussiana, se tiene en cuenta que si un cuerpo tiene una densidad de carga uniforme  $\rho = Q/V$ , entonces la carga almacenada  $q'$  en cualquier fracción de volumen  $V'$ , vendrá dada por:

$$q' = \rho V', \quad (4.57)$$

y por tanto,

$$Q_{enc} = \rho V_r, \quad (4.58)$$

donde  $V_r$  corresponde al volumen de la esfera gaussiana de radio  $r$ , es decir,  $V_r = \frac{4\pi r^3}{3}$ , y ya que  $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$ , se tiene que:

$$Q_{enc} = \rho V_r = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow Q_{enc} = \frac{Qr^3}{R^3}. \quad (4.59)$$

Al reemplazar (4.59) en (4.56), se obtiene:

$$E4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3} \Rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi R^3 \epsilon_0}. \quad (4.60)$$

Como conclusión de (4.60), se tiene que el campo eléctrico tiende a cero dentro de la esfera conforme  $r$  tiende a 0. La figura 4.18 indica los resultados obtenidos para el campo eléctrico generado por una esfera uniformemente cargada.

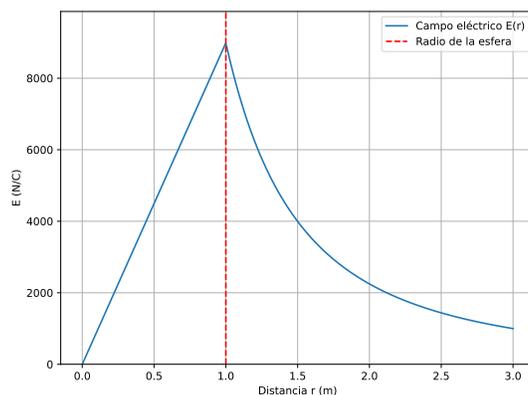


Figura 4.18: Ejemplo (4.10). Campo eléctrico generado por una esfera de radio 1 uniformemente cargada

**Ejemplo 4.11.** En este ejemplo se considera una esfera aislante con carga  $Q_1 = -2Q$ , de radio interior  $r = a$  y radio exterior  $r = b$  y densidad constante  $\rho$ . En el centro de la esfera se introduce una carga  $Q_2 = 4Q > 0$  (ver figura 4.19). Para tal situación, se calculará el campo eléctrico en las regiones:

- $r < a$ ,
- $a < r < b$ ,
- $r > b$ .

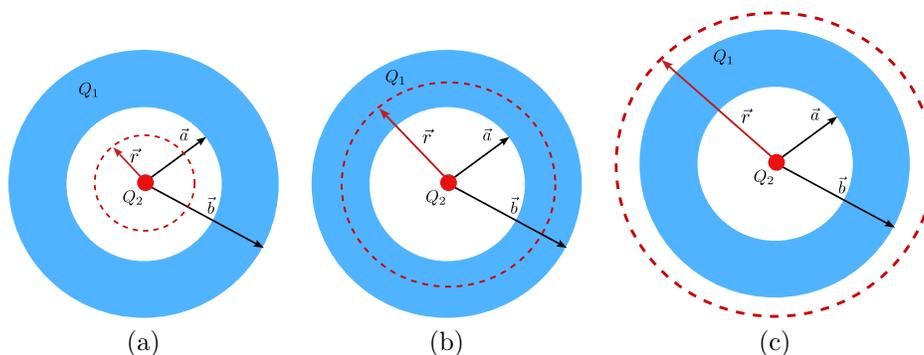


Figura 4.19: Ejemplo (4.11). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera aislante y una carga puntual. a) región  $r < a$ , b) región  $a < r < b$ , c) región  $r > b$ .

**Solución:** El problema a resolver posee simetría esférica, por lo tanto, se aplicará ley de Gauss.

- En la región  $r < a$ , la superficie de integración en la ley de Gauss será una esfera centrada en la carga  $Q_2$ , como se indica en la figura 4.19a. Dicha superficie solo encierra la carga  $Q_2$ , por tanto, la ley de Gauss determina que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_2}{\epsilon_0}. \quad (4.61)$$

Por la simetría del problema, el campo eléctrico es radial y solo depende de la distancia  $r$ , por lo tanto,  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y adicionalmente la magnitud del campo eléctrico  $E$  es constante en la superficie de integración. Matemáticamente se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2), \quad \text{para } r < a. \quad (4.62)$$

Por lo tanto:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.63)$$

Dado que  $Q_2 = 4Q$  y teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico, se concluye que

$$\vec{E} = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.64)$$

- b) La región  $a < r < b$ , comprende el espacio al interior del conductor, por lo tanto, la superficie de integración en la ley de Gauss, será una esfera centrada en  $Q_2$  con radio entre  $a < r < b$  (ver figura 4.19b). La simetría del problema establece que el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector  $d\vec{A}$ , serán paralelos sobre toda el área de integración, además, la magnitud del campo es constante, por lo tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E4\pi r^2. \quad (4.65)$$

Adicionalmente, la superficie de integración, encierra a la carga puntual  $Q_2$  y la porción de  $Q_1$  que se encuentra almacenada en el volumen del material aislante al interior de la superficie de integración (que se denominará  $V'$ ), es decir:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= Q_2 + \int_{V'} \rho dV' \\ &= Q_2 + \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^r \rho r'^2 \sin \theta' d\theta' \phi' dr' \\ &= Q_2 + 4\pi\rho \int_a^r r'^2 dr' \\ &= Q_2 + 4\pi\rho \frac{(r^3 - a^3)}{3}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Dado que  $\rho$  es constante, entonces

$$\rho = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3)}, \quad (4.67)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= Q_2 + Q_1 \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \\ &= 2Q \left( 2 - \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Reemplazando los resultados (4.65) y (4.68) en la ley de Gauss, se tiene que:

$$E4\pi r^2 = \frac{2Q}{\epsilon_0} \left( 2 - \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \right), \quad (4.69)$$

por lo tanto, se concluye que:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2 \epsilon_0} \left( 2 - \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \right) \hat{r}. \quad (4.70)$$

- c) En la región  $r > b$ , para la superficie de integración en la ley de Gauss, se tomará una esfera centrada en  $Q_2$  con un radio  $r > b$  (ver figura 4.19c). En este caso, la superficie de integración encierra la carga:  $Q_{enc} = Q_2 + Q_1$ . Respecto a la integral, la simetría del problema conlleva a un resultado similar al descrito en el literal anterior, es decir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2), \quad \text{para } r > b. \quad (4.71)$$

Por lo tanto

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{(Q_1 + Q_2)}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{(Q_2 + Q_1)}{4\pi \epsilon_0}. \quad (4.72)$$

Teniendo en cuenta que  $Q_2 = 4Q$  y  $Q_1 = -2Q$ , además de considerar la dirección radial del campo, se tiene que:

$$\vec{E} = \frac{2Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.73)$$

El resultado expresado en (4.72) es equivalente al que se obtendría para una partícula puntual con carga  $(Q_1 + Q_2)$ , ubicada en el origen de coordenadas.

**Ejemplo 4.12.** Una esfera sólida y aislante de radio  $R$  tiene una distribución de carga con simetría esférica dada por:  $\rho(r) = Cr^n$ , donde  $C$  es una constante y  $n > -3$ . Para la configuración anterior, se encontrará el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

**Solución:** Este problema se resuelve en forma similar al planteado en el ejemplo (4.10), salvo que en este caso la densidad de carga ya no es constante, pero dado que  $\rho$  solo depende

del valor  $r$  (distancia al centro de la esfera), se sigue manteniendo una simetría esférica. El campo eléctrico debe apuntar radialmente desde el centro de la esfera, es decir:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}. \quad (4.74)$$

Así, la superficie gaussiana  $S$  que se deberá considerar en la integración asociada a la ley de Gauss, debe ser una esfera de radio  $r$  con origen en el centro de la distribución de carga. Por tanto, el flujo eléctrico es:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (4.75)$$

donde  $d\vec{A}$  debe ser un elemento de área localizado en  $S$  y que se expresa en coordenadas esféricas como:

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}, \quad (4.76)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [E(r) \hat{r}] \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}) \\ &= r^2 E(r) \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 4\pi r^2 E(r), \end{aligned} \quad (4.77)$$

con lo cual, la ley de Gauss se reduce a:

$$\phi_E = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e Q_{enc}, \quad (4.78)$$

es decir,

$$E(r) = k_e \frac{Q_{enc}}{r^2}, \quad (4.79)$$

siendo  $Q_{enc}$  la carga encerrada por la superficie esférica  $S$  de radio  $r$ .

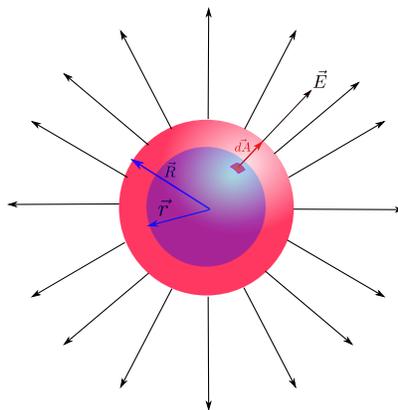


Figura 4.20: Ejemplo (4.12). Campo eléctrico al interior de una esfera con distribución de carga no uniforme.

Si se desea encontrar el campo eléctrico en el interior de la esfera, el radio de la superficie de integración esférica es tal que  $r < R$  (ver figura 4.20), de manera que la carga contenida en esta superficie, vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
Q_{enc} &= \int \rho(r') dV' = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} C r'^n r'^2 \text{sen } \theta' dr' d\theta' d\varphi' \\
&= C \underbrace{\int_0^r r'^{n+2} dr'}_{\frac{r^{n+3}}{n+3}} \underbrace{\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\
&= 4\pi C \frac{r^{n+3}}{n+3},
\end{aligned} \tag{4.80}$$

por tanto,

$$E(r) = k_e \frac{1}{r^2} \left[ 4\pi C \frac{r^{n+3}}{n+3} \right], \tag{4.81}$$

de forma que el campo eléctrico en el interior de la esfera es:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r} = 4\pi k_e C \frac{r^{n+1}}{n+3} \hat{r}. \tag{4.82}$$

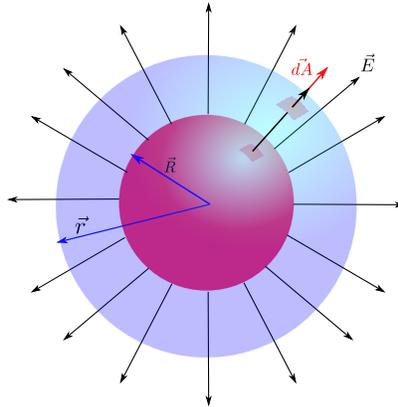


Figura 4.21: Ejemplo (4.12). Campo eléctrico al exterior de una esfera con distribución de carga no uniforme.

Ahora, si el campo eléctrico a considerar es en el exterior de la esfera, la superficie gaussiana debe cumplir la condición  $r > R$ , como lo muestra la figura 4.21. En este caso, la carga encerrada por esta superficie es,

$$\begin{aligned}
Q_{enc} &= \int \rho(r') dV' = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} C r'^n r'^2 \text{sen } \theta' dr' d\theta' d\varphi' \\
&= C \underbrace{\int_0^R r'^{n+2} dr'}_{\frac{R^{n+3}}{n+3}} \underbrace{\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\
&= 4\pi C \frac{R^{n+3}}{n+3},
\end{aligned} \tag{4.83}$$

por lo cual, la ley de Gauss indica que en el exterior de la distribución de carga se cumple:

$$E(r) = k_e \frac{1}{r^2} \left[ 4\pi C \frac{R^{n+3}}{n+3} \right], \quad (4.84)$$

así, el campo eléctrico para puntos donde  $r > R$ , es

$$\vec{E} = \left\{ 4\pi k_e C \frac{R^{n+3}}{n+3} \right\} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (4.85)$$

**Ejemplo 4.13.** Un cascarón esférico de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , como se muestra en la figura 4.22, posee una densidad de carga volumétrica no uniforme dada por:  $\rho(r) = \frac{A}{r^3}$ , donde  $A$  es una constante. Para la situación descrita se calculará el campo eléctrico en las regiones:  $r \leq a$ ,  $a \leq r \leq b$  y  $b \leq r$ .

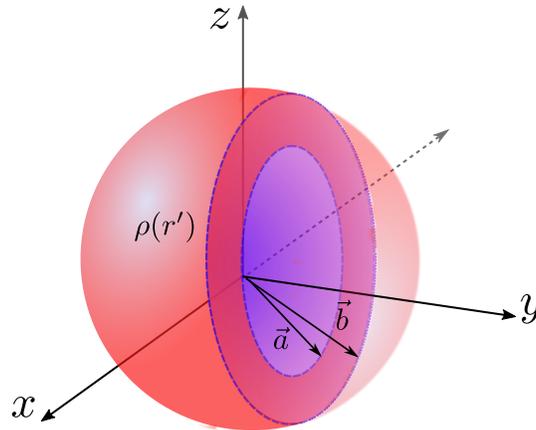


Figura 4.22: Ejemplo (4.13). Campo eléctrico debido a un cascarón esférico de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  con distribución de carga no uniforme.

**Solución:** Nuevamente, la distribución de carga indica que la simetría del problema es esférica, lo que permite considerar como superficie gaussiana una esfera de radio  $r$  centrada en el cascarón, por lo tanto,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e Q_{enc}. \quad (4.86)$$

En el interior del cascarón, la superficie gaussiana es tal que  $r \leq a$  y como tal:  $Q_{enc} = 0$ , así que el campo eléctrico en esta región es nulo. Ahora, dentro del cascarón la superficie gaussiana deberá tener un radio  $r$  que cumple la condición  $a \leq r \leq b$ , de manera que la carga encerrada por ella es:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho(r') dV' = \int_a^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{A}{r'^3} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \\ &= A \underbrace{\int_a^r \frac{1}{r'} dr'}_{\ln r'} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\ &= 4\pi A \ln \left( \frac{r}{a} \right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

De esta manera, a partir de la ley de Gauss se establece que,

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e \left[ 4\pi A \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right], \quad (4.88)$$

y por tanto, el campo eléctrico en el interior del cascarón se expresa como:

$$E(r) = \frac{4\pi A k_e}{r^2} \ln \left( \frac{r}{a} \right), \quad \text{si} \quad a \leq r \leq b. \quad (4.89)$$

Finalmente, en el exterior del cascarón se cumple que:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho(r') dV' = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{A}{r'^3} r'^2 \text{sen } \theta' dr' d\theta' d\varphi' \\ &= A \underbrace{\int_a^b \frac{1}{r'} dr'}_{\ln r'} \underbrace{\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\ &= 4\pi A \ln \left( \frac{b}{a} \right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

de tal modo que,

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e \left[ 4\pi A \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right]. \quad (4.91)$$

Entonces, en el exterior del cascarón el campo eléctrico es:

$$E(r) = 4\pi A k_e \ln \left( \frac{b}{a} \right) \frac{1}{r^2}, \quad \text{si} \quad b \leq r. \quad (4.92)$$

**Ejemplo 4.14.** En este ejemplo se considera un cilindro de radio  $R$  y longitud infinita que se extiende a lo largo del eje  $y$ , el cual tiene una densidad de carga  $\rho$ . Tratándose de un cilindro infinito, la carga sería infinita, así que la respuesta debe quedar en términos de la densidad de carga (que sí es una cantidad cuantificable). Para la configuración de carga anterior, se encontrará la magnitud del campo eléctrico a una distancia  $r$  medida perpendicularmente respecto al eje del cilindro, utilizando para ello la ley de Gauss.

**Solución:** Debido a la simetría del problema, la superficie gaussiana debe ser un cilindro y existen dos regiones diferentes de estudio, la región en la cual  $r \geq R$  y la región en la cual  $r < R$ , las cuales se analizan a continuación:

- Para la región  $r \geq R$ , y teniendo en cuenta la simetría del problema, la superficie gaussiana adecuada será la superficie de un cilindro de lado  $L$  y área trasversal circular de radio  $r$ , como se observa en la figura 4.23. La superficie gaussiana encerrará un elemento de volumen  $\Delta V$  del cilindro conductor de longitud  $L$  y área  $A$  ( $A = \pi R^2$ ), entonces la carga encerrada ( $Q_{enc}$ ) por la superficie gaussiana, será la carga dentro del volumen  $\Delta V$  del conductor, tal que:

$$Q_{enc} = \rho \Delta V = \rho L \pi R^2, \quad (4.93)$$

por lo tanto, aplicando la ley de Gauss, se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho L \pi R^2}{\epsilon_0}. \quad (4.94)$$

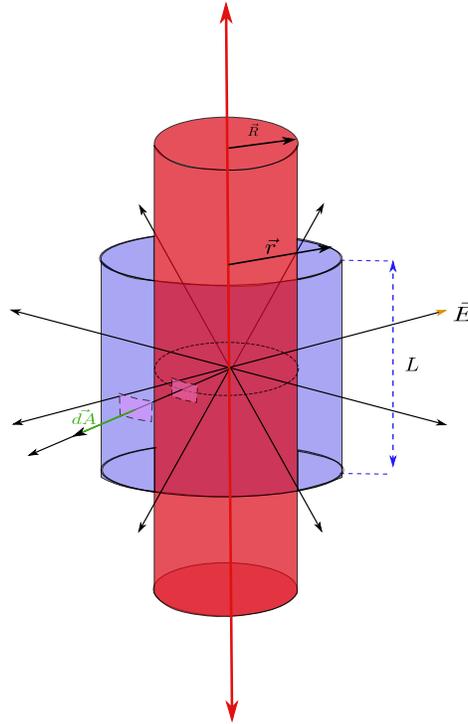


Figura 4.23: Ejemplo (4.14). Ley de Gauss aplicada a un cilindro cargado en la región  $r > R$ .

La integral cerrada que se debe realizar en este ejemplo, se puede resolver sumando las integrales sobre tres superficies: caras circulares superior e inferior con áreas  $A_s$  y  $A_{inf}$ , respectivamente, y la cara lateral del cilindro con área  $A_L$ , tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_s} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (4.95)$$

Dado que se está considerando un cilindro cargado de longitud infinita, el campo eléctrico tendrá dirección  $\hat{r}$  en todo punto (radial a la línea de carga), como se observa en la figura 4.23, por lo tanto, en las caras circulares superior e inferior del cilindro gaussiano, el flujo eléctrico es cero; dado que el vector de área en dichas superficies es perpendicular al campo eléctrico (ver figura 4.23). Para la cara lateral, el campo eléctrico es paralelo en todo punto al vector de área (ver figura 4.23) y adicionalmente su magnitud es constante en todo punto sobre la superficie lateral del cilindro y por tanto se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_L} E dA = E \int_{A_L} dA. \quad (4.96)$$

La integral de área  $\int_{A_L} dA$ , corresponde al área de la superficie lateral del cilindro, es decir  $2\pi rL$ , por lo tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E2\pi rL, \quad (4.97)$$

reemplazando el resultado de la integral (4.97) en (4.94), se tiene que:

$$E2\pi rL = \frac{\rho L\pi R^2}{\varepsilon_0} \quad (4.98)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho\pi R^2}{2\pi r\varepsilon_0}. \quad (4.99)$$

Ahora, la cantidad  $\rho\pi R^2$  (densidad por área transversal), tiene unidades de carga por unidad de longitud, y representa la carga almacenada por unidad de longitud a lo largo del cilindro que se denota por  $\lambda$ . Finalmente, se tiene que el campo eléctrico a una distancia  $r$  ( $r > R$ ) de un cable cilíndrico cargado de longitud infinita, viene dado por:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}. \quad (4.100)$$

- Si  $r < R$ , la superficie gaussiana adecuada es un cilindro interior al cilindro del conductor, como se observa en la figura 4.24. En este caso, respecto a la integral que se debe realizar en la ley de Gauss, se presentan las mismas condiciones que las analizadas en el caso  $r \geq R$ , es decir: caras circulares superior e inferior con flujo cero (por ser el campo perpendicular al vector de área), y en la cara lateral el campo es paralelo al vector de área y constante en todo punto sobre su área, tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E2\pi rL. \quad (4.101)$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana en este caso, vendrá dada por:

$$Q_{enc} = \rho\Delta V = \rho L\pi r^2. \quad (4.102)$$

Se debe enfatizar que en (4.102) aparece el radio de la superficie gaussiana  $r$  y no el radio del cilindro cargado  $R$  (lo que sí se presentaba en el caso  $r > R$ ). Al reemplazar los resultados expresados en (4.101) y (4.102) en la ley de Gauss, se tiene que:

$$E2\pi rL = \rho L\pi r^2/\varepsilon_0, \quad (4.103)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}. \quad (4.104)$$

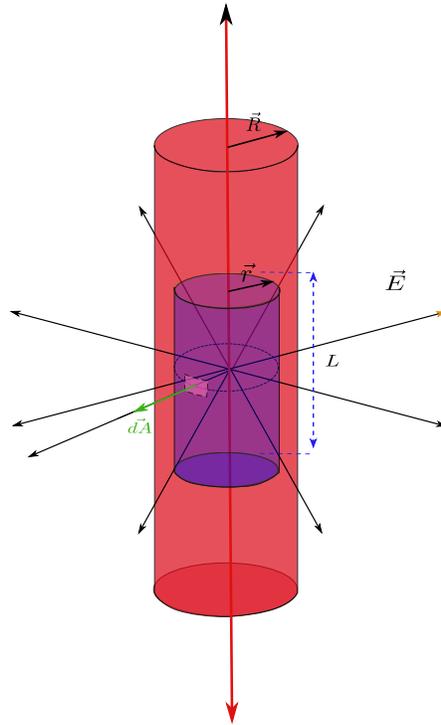


Figura 4.24: Ejemplo (4.14). Ley de Gauss aplicada a un cilindro cargado en la región  $r < R$ .

Dado que se está estudiando un elemento de longitud infinita, es usual escribir el resultado en términos de densidad lineal de carga  $\lambda$ , que en este caso es equivalente a  $\rho\pi R^2$ , por lo tanto, se tiene que:

$$E = \frac{\rho r \pi R^2}{2\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{(\rho\pi R^2)r}{2\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0 \pi R^2}. \quad (4.105)$$

El resultado anterior evidencia que el campo eléctrico en el interior del cilindro es proporcional a  $r$  y si  $r \rightarrow 0$ , entonces el campo eléctrico tiende a cero.

**Ejemplo 4.15.** En este ejemplo se considera un cilindro infinitamente largo de radio  $b$ , que posee una densidad de carga volumétrica dada por:

$$\rho(r) = \rho_0 \left( a_1 - \frac{r}{a_2} \right), \quad (4.106)$$

con  $(\rho_0, a_1, a_2)$  constantes y donde  $r$  representa la distancia medida perpendicularmente desde el eje de simetría del cilindro a cualquier punto del espacio. Para la configuración anterior, se calculará el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.

**Solución:** Siendo que la distribución de carga del cilindro depende de la distancia radial  $r$ , dicha configuración tiene una simetría cilíndrica, y por lo tanto:  $\vec{E} = E\hat{r}$ , donde  $\hat{r}$  en este caso representa el vector unitario que apunta perpendicularmente hacia fuera del eje de simetría del cilindro. La superficie de integración que se debe considerar en la ley de Gauss; dada la simetría del problema, es un cilindro de radio  $r$ . La superficie cilíndrica se puede

descomponer en tres superficies: dos circulares ( $A_s$  y  $A_{inf}$ ) y una superficie lateral ( $A_L$ ). El flujo eléctrico a través de las superficies circulares es cero, ya que su correspondiente vector de área es perpendicular al campo eléctrico, y respecto a la superficie lateral, el campo eléctrico es paralelo al vector de área. Matemáticamente lo anteriormente expuesto se describe como:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_s} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{A_L} E dA.\end{aligned}\quad (4.107)$$

Dado que el campo eléctrico solo puede depender de la distancia  $r$ , en la superficie  $A_L$  el campo debe ser constante, por lo tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_L} E dA = E \int_{A_L} dA = E 2\pi L. \quad (4.108)$$

Por lo tanto, la Ley de Gauss para este problema toma la forma:

$$2\pi r L E = 4\pi k_e Q_{enc}. \quad (4.109)$$

Si la región de interés donde se desea calcular el campo eléctrico se encuentra al interior del cilindro, la superficie gaussiana debe cumplir la condición  $r < a$ , lo que implica:

$$Q_{enc} = \int \rho(r') dV', \quad (4.110)$$

donde la integral se debe realizar sobre el volumen limitado por la superficie gaussiana. El diferencial de volumen  $dV'$  en coordenadas cilíndricas, viene dada por  $dV' = r' dr' d\phi dz$ , con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned}Q_{enc} &= \int \rho(r') dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho(r') r' dr' d\phi dz \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho_0 \left( a_1 - \frac{r'}{a_2} \right) r' dr' d\phi dz \\ &= \rho_0 \int_0^r \left[ a_1 r' - \frac{(r')^2}{a_2} \right] dr' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^L dz}_L \\ &= 2\pi L \rho_0 \left[ \underbrace{\int_0^r r' dr'}_{\frac{r^2}{2}} - \frac{1}{a_2} \underbrace{\int_0^r (r')^2 dr'}_{\frac{r^3}{3}} \right] \\ &= 2\pi L \rho_0 \left( a_1 \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a_2} \right).\end{aligned}\quad (4.111)$$

Así, la ley de Gauss determina:

$$2\pi rLE = 4\pi k_e \left[ 2\pi L\rho_0 \left( a_1 \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a_2} \right) \right], \quad (4.112)$$

por tanto,

$$E = 4\pi k_e \rho_0 \left( \frac{a_1 r}{2} - \frac{r^2}{3a_2} \right). \quad (r < b). \quad (4.113)$$

En el caso de considerar el campo eléctrico en el exterior del cilindro, la condición sobre la superficie gaussiana es  $r > b$ . En este caso, la superficie de integración debe corresponder a un cilindro de radio  $b$  y longitud  $L$  (volumen del material en estudio, encerrado por la superficie gaussiana), con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho(r) dV = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho(r') r' dr' d\varphi dz \\ &= \rho_0 \int_0^b \left[ a_1 r' - \frac{(r')^2}{a_2} \right] dr' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^L dz}_L \\ &= 2\pi L\rho_0 \left[ \underbrace{a_1 \int_0^b r' dr'}_{\frac{b^2}{2}} - \frac{1}{a_2} \underbrace{\int_0^b (r')^2 dr'}_{\frac{b^3}{3}} \right] \\ &= 2\pi L\rho_0 \left( a_1 \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3a_2} \right). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Por consiguiente:

$$2\pi rLE = 4\pi k_e \left[ 2\pi L\rho_0 \left( a_1 \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3a_2} \right) \right], \quad (4.115)$$

resultando que:

$$E = \frac{4\pi k_e \left[ \rho_0 \left( a_1 \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3a_2} \right) \right]}{r}. \quad (b < r). \quad (4.116)$$

**Ejemplo 4.16.** En este ejemplo se va a estudiar el campo eléctrico producido por un plano infinito cargado.

**Solución:** De acuerdo con la simetría del problema, el campo eléctrico sale perpendicularmente del plano (si el plano está cargado positivamente). En este caso la superficie gaussiana se puede tomar como un cilindro ubicado de tal forma que el plano cargado corte la superficie cilíndrica en dos partes iguales, como se observa en la figura 4.25.

La integral sobre la superficie gaussiana se puede realizar sumando las integrales sobre tres superficies: caras circulares izquierda y derecha con áreas  $A_{Iz}$  y  $A_{Der}$ , respectivamente, y la cara lateral del cilindro con área  $A_L$ , tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{Izq}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{der}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (4.117)$$

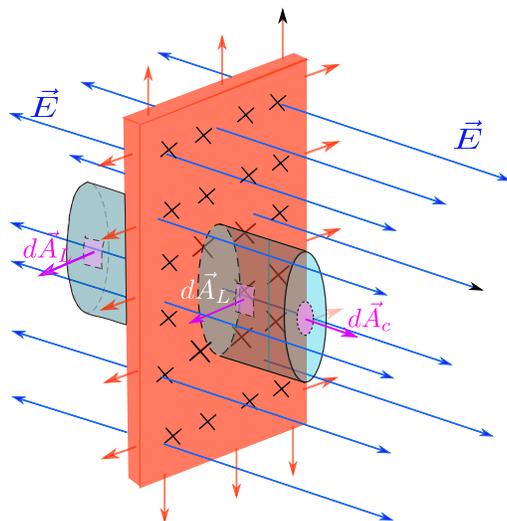


Figura 4.25: Ejemplo (4.16). Ley de Gauss aplicada a un plano infinito cargado.

En este caso, dado que el campo eléctrico es perpendicular al plano en estudio, la integral sobre la superficie lateral de la superficie gaussiana es cero (ya que  $\vec{E}$  será perpendicular a todo  $d\vec{A}$  sobre dicha superficie). Por otro lado, los vectores de área en las superficies izquierda y derecha del cilindro son paralelos al campo eléctrico. Además, la magnitud del campo eléctrico es constante sobre dichas superficies, ya que dicho campo solo puede depender de la distancia al plano cargado y todos los puntos sobre la superficie circular se encuentran a la misma distancia del plano. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_{Izq}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{der}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= E \int_{A_{Izq}} dA + E \int_{A_{Der}} dA. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Ahora, las integrales sobre las áreas izquierda y derecha son las mismas y corresponden al área de un círculo que se denotará simplemente como  $A_c$ , tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA_c. \quad (4.119)$$

Por otra parte, la superficie gaussiana encierra una área circular (de radio  $r$ ) del plano cargado. Por lo tanto, la carga encerrada por la superficie gaussiana será igual a la carga almacenada en el área circular; es decir, el área  $A_c$ . Ahora, teniendo en cuenta que el plano tiene una densidad de carga  $\sigma$ , la carga encerrada será:

$$Q_{enc} = \sigma A_c. \quad (4.120)$$

Reemplazando (4.119) y (4.120) en la ley de Gauss, se tiene que:

$$2EA_c = \frac{\sigma A_c}{\epsilon_0}, \quad (4.121)$$

por lo tanto, el campo eléctrico generado por un plano infinito cargado será:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (4.122)$$

La expresión anterior establece que el campo eléctrico generado por un plano cargado es constante.

**Ejemplo 4.17.** En este ejemplo se va a utilizar la ley de Gauss en una situación en la cual se conoce el campo eléctrico y lo que se desea encontrar es la carga encerrada por un cubo ubicado en el primer cuadrante de un plano cartesiano en tres dimensiones y con un vértice en el origen de coordenadas, tal como se observa en la figura 4.26. El campo eléctrico que se da como dato inicial en el problema es:

$$\vec{E} = (-x - 2y)\hat{i}\frac{Nc}{m} + (2xz - zy)\hat{j}\frac{Nc}{m}. \quad (4.123)$$

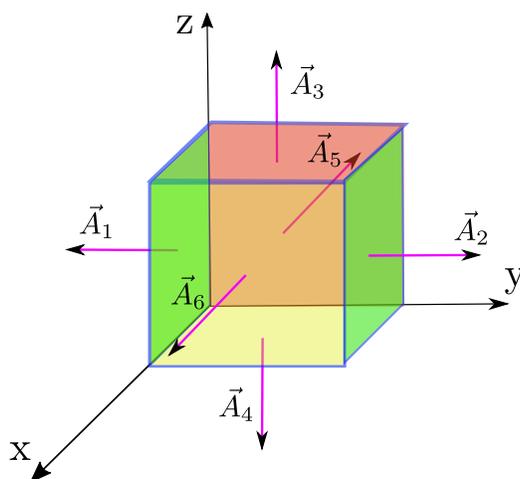


Figura 4.26: Ejemplo (4.17). Flujo eléctrico a través de un cubo.

**Solución:** Los vectores infinitesimales de área para cada una de las seis caras de un cubo, según la figura 4.26, están dados por:

$$\begin{aligned} d\vec{A}_1 &= -dx dz \hat{j}, & d\vec{A}_2 &= dx dz \hat{j}, \\ d\vec{A}_3 &= dx dy \hat{k}, & d\vec{A}_4 &= -dx dy \hat{k}, \\ d\vec{A}_5 &= -dy dz \hat{i}, & d\vec{A}_6 &= dy dz \hat{i}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

El flujo por la superficie del cubo se puede encontrar dividiendo la integral cerrada en seis integrales, correspondientes a los seis lados del cubo, tal que:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^6 \int_{A_i} \vec{E} \cdot d\vec{A}_i. \quad (4.125)$$

Ahora se realizarán las seis integrales, comenzando por la asociada a el área uno  $A_1$  (plano izquierdo del cubo):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_{A_1} \left( (-x - 2y) \hat{i} \frac{Nc}{m} + (2xz - zy) \frac{Nc}{m^2} \hat{j} \right) \cdot (-dx dz \hat{j}) \\ &= \int_{A_1} (-x - 2y) \frac{Nc}{m} \cancel{(\hat{i} \cdot \hat{j})} - \int_{A_1} (2xz - zy) dx dz \frac{Nc}{m^2} \cancel{(\hat{j} \cdot \hat{j})} \\ &= - \int_{A_1} (2xz - zy) dx dz \frac{Nc}{m^2}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

En la cara izquierda, el valor de la variable  $y$  es constante y es igual a cero, lo cual al ser reemplazado en (4.126) conlleva a:

$$\phi_1 = - \int_{A_1} (2xz - z \cancel{y}) dx dz \frac{Nc}{m^2} = -2 \left( \int_0^a x dx \right) \left( \int_0^a z dz \right) \frac{Nc}{m^2} = -\frac{a^4}{2} \frac{Nc}{m^2}. \quad (4.127)$$

La integral sobre el área derecha del cubo  $A_2$  se realiza aplicando un proceso similar al utilizado para encontrar el flujo sobre  $A_1$ , salvo que en este caso el valor de  $y$  es  $a$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_{A_2} \left( (-x - 2y) \hat{i} \frac{Nc}{m} + (2xz - zy) \frac{Nc}{m^2} \hat{j} \right) \cdot (dx dz \hat{j}) \\ &= \int_{A_2} (-x - 2y) \frac{Nc}{m} \cancel{(\hat{i} \cdot \hat{j})} + \int_{A_2} (2xz - zy) dx dz \frac{Nc}{m^2} \cancel{(\hat{j} \cdot \hat{j})} \\ &= - \int_{A_2} (2xz - z \underbrace{y}_a) dx dz \frac{Nc}{m^2} = \int_0^a \int_0^a (2xz - za) dx dz \frac{Nc}{m^2} \\ &= 2 \left( \int_0^a x dx \right) \left( \int_0^a z dz \right) - a \left( \int_0^a dx \right) \left( \int_0^a z dz \right) \\ &= \left( \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{2} \right) \frac{Nc}{m^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.128)$$

El flujo por la cara superior  $\phi_3$  es cero, ya que en esta cara el vector de campo eléctrico y el vector  $d\vec{A}_3$  son perpendiculares, por lo cual, su producto punto es cero (el vector de área  $d\vec{A}_3$  se encuentra sobre el eje  $z$ , mientras que el campo eléctrico se encuentra en el plano  $xy$ ). De igual forma el flujo por la cara inferior  $\phi_4$  también es cero (por la misma razón que el flujo  $\phi_3 = 0$ ). Para la cara del cubo que se encuentra en el plano  $yz$  con valor de  $x = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi_5 &= \int_{A_5} \vec{E} \cdot d\vec{A}_5 = \int_{A_5} \left( (-x - 2y)\hat{i} \frac{Nc}{m} + (2xz - zy) \frac{Nc}{m^2} \hat{j} \right) \cdot (-dydz\hat{i}) \\ &= \int_{A_5} (x + 2y) (\hat{i} \cdot \hat{i}) \frac{Nc}{m} - \int_{A_5} (2xz - zy) (\hat{j} \cdot \hat{i}) \frac{Nc}{m^2} \\ &= \int_{A_5} (x + 2y) dydz \frac{Nc}{m}.\end{aligned}\quad (4.129)$$

En la cara  $A_5$  el valor de  $x$  es contante e igual a cero, por lo tanto:

$$\phi_5 = \int_{A_5} (0 + 2y) dydz \frac{Nc}{m} = 2 \int_0^a y dy \int_0^a dz = a^3 \frac{Nc}{m}.\quad (4.130)$$

Por último, en la cara  $A_6$  indicada en la figura 4.26, se aplica un procedimiento similar al utilizado en el cálculo de la integral sobre el área  $A_5$ , salvo por el cambio de sentido en la dirección del vector de área y que la coordenada  $x$  toma el valor de  $a$ . Al tener en cuenta lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi_6 &= \int_{A_6} \vec{E} \cdot d\vec{A}_6 = \int_{A_6} \left( (-x - 2y)\hat{i} \frac{Nc}{m} + (2xz - zy) \frac{Nc}{m^2} \hat{j} \right) \cdot (dydz\hat{i}) \\ &= - \int_{A_6} (x + 2y) (\hat{i} \cdot \hat{i}) \frac{Nc}{m} + \int_{A_5} (2xz - zy) (\hat{j} \cdot \hat{i}) \frac{Nc}{m^2} \\ &= - \int_{A_6} (a + 2y) dydz \frac{Nc}{m} \\ &= -a \int_0^a dy \int_0^a dz - 2 \int_0^a y dy \int_0^a dz = -2a^3 \frac{Nc}{m}.\end{aligned}\quad (4.131)$$

Al sumar todas las contribuciones, el flujo total será:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{a^4}{2} \frac{Nc}{m^2} + a^3 \frac{Nc}{m} - 2a^3 \frac{Nc}{m} = -a^3 \left( \frac{a}{2m} + 1 \right) \frac{Nc}{m}.\quad (4.132)$$

Finalmente, al reemplazar el resultado anterior en la ley de Gauss, se establece que la carga eléctrica encerrada por el cubo, es:

$$Q_{enc} = -a^3 \epsilon_0 \left( \frac{a}{2m} + 1 \right) \frac{NC}{m}.\quad (4.133)$$

### 4.2.1. Campo eléctrico dentro de un conductor

Un material se define como conductor, si las cargas libres en su interior se pueden mover con facilidad; un conductor ideal, sería aquel donde una carga se pudiera mover de la misma forma como lo haría en el vacío. Un conductor se considera neutro, si sus cargas positivas y negativas se encuentran compensadas unas con otras, dejando al conductor con una carga neta igual a cero. Si un material conductor se introduce en una región donde exista un campo eléctrico, las cargas libres dentro del conductor se moverán por la acción del campo eléctrico. En un metal las cargas libres son electrones, por lo tanto, ante la presencia de un campo eléctrico dichos electrones se moverán en dirección contraria al campo eléctrico. Existen conductores donde las cargas son iones positivos o negativos, en tal caso ante la presencia de un campo eléctrico, los iones positivos se moverán en dirección del campo eléctrico externo y los iones negativos en sentido contrario al campo. Se dice que un conductor se encuentra en equilibrio electrostático, si las cargas libres dentro del conductor se encuentran en reposo (reposo en el sentido macroscópico <sup>1</sup>). Por lo tanto, al interior de un conductor que se encuentre en equilibrio electrostático, el campo eléctrico debe ser cero (de lo contrario, las partículas libres estarían en movimiento, lo que contradice la definición de equilibrio). Si dentro de un conductor neutro se introduce una carga neta (que se entiende está formada por varias partículas cargadas), los portadores de dicha carga por acción de la fuerza eléctrica se repelen y se alejan unas de otras hasta que llegan a la frontera del conductor (donde fuerzas de cohesión, impiden que dichas partículas escapen del conductor). Por lo tanto, en equilibrio, el exceso de carga eléctrica en un conductor siempre estará sobre su superficie. Adicionalmente en equilibrio, las cargas sobre la superficie de un conductor no pueden moverse sobre la superficie del mismo, por lo cual, se entiende que el campo eléctrico tangencial a la superficie del conductor es siempre cero y por tanto, en la superficie de un conductor en equilibrio, el campo eléctrico únicamente puede tener dirección normal a dicha superficie. En resumen a los razonamientos anteriores se tiene que:

- a) En un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es siempre igual a cero.
- b) Un exceso de carga en un conductor en equilibrio (positiva o negativa), siempre se encontrará sobre la superficie del conductor.
- c) Ante la presencia de un campo eléctrico externo, los electrones en un metal se moverán en dirección del campo eléctrico, lo que conlleva a que exista un exceso de electrones sobre una parte de la superficie del material y un exceso de carga positiva en la “cara opuesta” del conductor. Cuando dicho fenómeno se produce, se dice que el material está eléctricamente polarizado.
- d) El campo eléctrico sobre la superficie de un conductor siempre es normal en cada punto, a la superficie del conductor.

Ahora, el flujo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada al interior de un conductor es igual a cero (dado que el campo eléctrico es cero), y por lo tanto, a partir de la ley de Gauss, se

---

<sup>1</sup> A nivel atómico las partículas siempre están en movimiento en una región finita del espacio, sin embargo en promedio su movimiento macroscópico es cero.

concluye que no puede existir carga neta al interior de un conductor en equilibrio (ninguna superficie cerrada al interior de un conductor en equilibrio, puede encerrar una carga neta diferente de cero), ya que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (4.134)$$

**Ejemplo 4.18.** En este ejemplo se considera una esfera conductora neutra, de radio interior  $r = a$  y radio exterior  $r = b$ . En el centro de la esfera se introduce una carga  $Q > 0$ . Para tal situación, se calculará la densidad de carga eléctrica  $\sigma$  sobre cada una de las superficies de la esfera conductora.

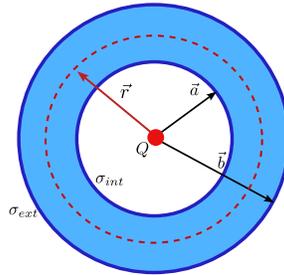


Figura 4.27: Ejemplo (4.18). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera aislante y una carga puntual. a) región  $r < a$ , b) región  $a < r < b$ , c) región  $r > b$ .

**Solución:** Dada la simetría del problema, se puede evidenciar que existe simetría esférica. La carga puntual  $Q$  genera un campo eléctrico radial, de tal manera que los electrones libres sobre la esfera conductora se moverán en dirección contraria al campo eléctrico hasta llegar a la superficie interior de la esfera, por tal motivo existirá una densidad de carga negativa sobre dicha superficie. De igual forma, se genera un exceso de carga positiva sobre la superficie exterior a la esfera y por consiguiente dicha superficie tendrá una densidad de carga positiva. Para establecer la carga sobre la superficie interior, se puede hacer uso de la ley de Gauss, tomando una superficie esférica cerrada centrada en la carga  $Q$  y con un radio  $r$  en  $a < r < b$ , como se indica en la figura 4.27, tal que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (4.135)$$

Como no existe campo eléctrico al interior de un conductor, la integral  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$  se anula, y por lo tanto, se concluye que la carga encerrada por la superficie gaussiana es igual a cero ( $Q_{enc} = 0$ ). Ahora, la superficie en consideración, está encerrando la carga puntual  $Q$  y la carga sobre la superficie interior a la esfera, la cual se denominará  $Q_{int}$ , por lo tanto:

$$Q_{enc} = Q + Q_{int} = 0, \quad (4.136)$$

de tal forma que  $Q_{int} = -Q$ . Por lo tanto, la densidad superficial de carga al interior de la esfera será:

$$\sigma_{int} = \frac{Q_{int}}{4\pi a^2} = -\frac{Q}{4\pi a^2}. \quad (4.137)$$

Para encontrar la carga sobre la superficie exterior, se debe considerar que el conductor es neutro, por lo tanto, su carga total  $Q_T$  debe ser cero, adicionalmente un conductor en equilibrio no puede tener una carga neta diferente de cero al interior del conductor y por lo tanto, la carga solo reside sobre sus superficies; es decir, la carga total  $Q_T$  sobre el conductor al ser cero, establece que:

$$Q_T = 0 = Q_{ext} + Q_{int} \quad \rightarrow \quad Q_{ext} = -Q_{int} = Q, \quad (4.138)$$

por lo tanto, la densidad de carga  $\sigma_{ext}$  en la superficie externa al conductor será:

$$\sigma_{ext} = \frac{Q_{ext}}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2}. \quad (4.139)$$

**Ejemplo 4.19.** En este ejemplo se considera una esfera conductora con carga  $Q_1 = Q > 0$ , de radio interior  $r = a$  y radio exterior  $r = b$ . En el centro de la esfera se introduce una carga  $Q_2 = -2Q$ . Para tal situación, se calculará el campo eléctrico en las regiones:

- $r < a$ ,
- $a < r < b$ ,
- $r > b$ .

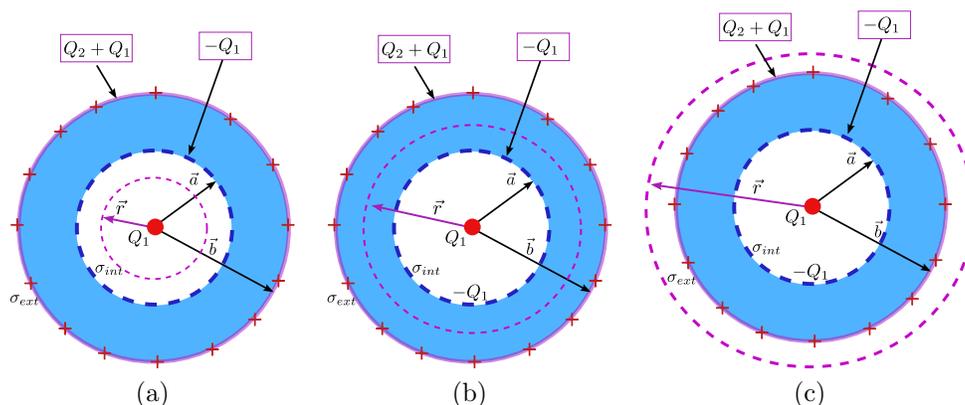


Figura 4.28: Ejemplo (4.19). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera conductora cargada y una carga puntual. a) región  $r < a$ , b) región  $a < r < b$ , c) región  $r > b$ .

**Solución:** El problema a resolver posee simetría esférica, por lo tanto, se aplicará ley de Gauss.

- En la región  $r < a$ , la superficie de integración en la ley de Gauss será una esfera centrada en la carga  $Q_2$  (ver figura 4.28a). Dicha superficie solo encierra la carga  $Q_2$ , por tanto, la ley de Gauss determina que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_2}{\epsilon_0}. \quad (4.140)$$

Por la simetría del problema, el campo eléctrico es radial y solo depende de la distancia  $r$ , por lo tanto,  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y adicionalmente la magnitud del campo eléctrico  $E$  es constante en la superficie de integración. Matemáticamente se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2), \quad \text{para } r < a. \quad (4.141)$$

Por lo tanto:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.142)$$

Dado que  $Q_2 = -2Q$  y teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico, se concluye que

$$\vec{E} = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.143)$$

- b) La región  $a < r < b$ , comprende el espacio al interior del conductor y por lo tanto, el campo eléctrico es cero (ver figura 4.28b).
- c) En la región  $r > b$ , para la superficie de integración en la ley de Gauss, se tomará una esfera centrada en  $Q_2$  con un radio  $r > b$  (ver figura 4.28c). La superficie en consideración, solo encierra a la carga del conductor  $Q_1$  y la carga de la partícula  $Q_2$ , por lo tanto, la carga encerrada será:  $Q_{enc} = Q_2 + Q_1$ . Respecto a la integral, la simetría del problema conlleva a un resultado similar al descrito en el literal a), es decir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2), \quad \text{para } r > b. \quad (4.144)$$

Por lo tanto

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{(Q_1 + Q_2)}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{(Q_2 + Q_1)}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.145)$$

Teniendo en cuenta que  $Q_2 = -2Q$  y  $Q_1 = Q$ , además de considerar la dirección radial del campo, se tiene que:

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.146)$$

El resultado expresado en (4.145) es equivalente al que se obtendría para una partícula puntual con carga  $(Q_1 + Q_2)$ , ubicada en el origen de coordenadas.

**Ejemplo 4.20.** En este ejemplo se considera un conductor neutro, representado por un plano infinito de ancho  $\Delta x$ . El conductor se ubica en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}_{ext}$  constante, tal como se muestra en la figura 4.29. Para la configuración descrita, se estudiará el campo eléctrico dentro y fuera del conductor.

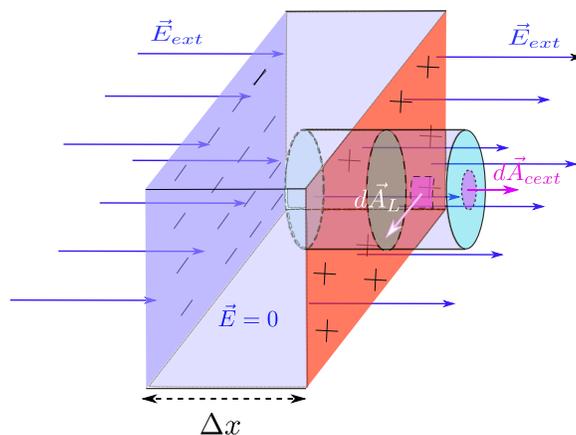


Figura 4.29: Ejemplo (4.20). Plano infinito conductor neutro en un campo eléctrico externo.

**Solución:** Dado que en un conductor existen electrones que pueden moverse con facilidad por el conductor, ante la presencia de un campo eléctrico dichos electrones se mueven en dirección contraria al campo eléctrico. El movimiento de electrones genera un exceso de carga negativa sobre una de las superficies del conductor y por tanto un exceso de carga positiva en la cara opuesta, tal como se ilustra en la figura 4.29.

Hay que resaltar las diferencias respecto al ejemplo (4.16), que hace que este ejemplo conceptual y físicamente sea muy diferente (a pesar, que como se determinara, su resultado puede ser similar). En primer lugar, en el ejemplo (4.16) se tenía un plano infinito cargado que no tenía un ancho; ahora se va a estudiar un conductor neutro y donde existe un ancho  $\Delta x$ . En el ejemplo (4.16) se buscaba el campo eléctrico producido por la carga del plano, en este ejemplo el plano no puede generar campo eléctrico porque tiene carga nula, pero sí afecta el campo eléctrico externo existente y reciprocamente el campo externo polariza las cargas en el conductor. En el ejemplo (4.16), las líneas del campo salían perpendicularmente del plano por las dos caras del mismo; en cambio en este caso, las líneas de campo ingresan perpendicularmente hacia una cara del conductor (donde existe exceso de cargas negativas) y sale perpendicularmente de la otra (donde hay exceso de cargas positivas).

Aclarado las diferencias físicas entre este ejemplo y el ejemplo (4.16), el campo eléctrico se puede encontrar utilizando la ley de Gauss, donde la superficie gaussiana corresponde a un cilindro ubicado en tal disposición que una de las dos caras del conductor corta el cilindro, quedando una de las caras circulares del cilindro dentro del conductor y la otra fuera del mismo, tal como se indica en la figura 4.29. Nuevamente la integral sobre la superficie

gaussiana se puede dividir en tres integrales: área circular interior  $A_{cint}$ , área circular exterior  $A_{cext}$  y el área correspondiente a la cara lateral  $A_L$ , tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{cint}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (4.147)$$

La integración en el área circular interior se anula, ya que dentro de un conductor el campo eléctrico es cero, por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_{cint}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

La integral asociada al área lateral también se anula por dos motivos: en la fracción del área lateral que queda dentro del conductor el campo eléctrico es cero y en la fracción que queda por fuera del conductor, el campo eléctrico es perpendicular al vector de área y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

El campo eléctrico en el área circular exterior es paralelo al vector de área y su magnitud es constante sobre todo punto en dicha área, por lo tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{cext}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_{A_{cext}} dA = EA_{cext}. \quad (4.150)$$

Por otra parte, la carga encerrada  $Q_{enc}$ , corresponde a la carga almacenada en el área circular encerrada por el cilindro ( $A_c$ ) y que por lo tanto, es igual al área circular del cilindro, es decir:

$$Q_{enc} = \sigma A_c \equiv \sigma A_{cext}. \quad (4.151)$$

Reemplazando (4.150) y (4.151) en la ley de Gauss, se tiene que:

$$EA_{cext} = \frac{\sigma A_{cext}}{\epsilon_0}. \quad (4.152)$$

Finalmente, se encuentra que:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (4.153)$$

El resultado anterior indica que el campo eléctrico en cualquier punto, es independiente de la distancia al conductor, además el efecto del campo eléctrico externo se refleja en la polarización del conductor que genera la densidad superficial de carga  $\sigma$ . Además, dado que el conductor era neutro, sin el campo externo no hubiera polarización y por tanto tampoco densidad superficial de carga en cada una de las caras del conductor.

**Ejercicio 4.11.** Se tiene una esfera dieléctrica de radio  $r_a$  con carga  $-2Q$  distribuida uniformemente sobre su volumen. Dicha esfera se encuentra en el centro de una esfera metálica hueca de radio interior  $r_b$  ( $r_b > r_a$ ) y radio exterior  $r_c$  la cual posee una carga  $3Q$ . Para la configuración planteada encontrar (ver figura 4.30): a) el campo eléctrico en las regiones  $r < r_a$ ,  $r_a < r < r_b$ ,  $r_b < r < r_c$  y  $r > r_c$ . b) La carga eléctrica en cada una de las superficies de la esfera metálica.

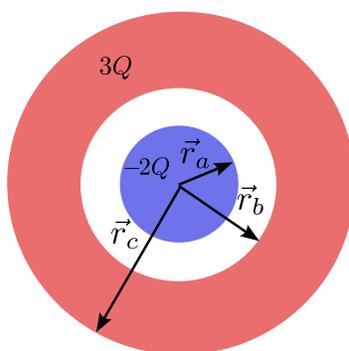


Figura 4.30: Ejercicio (4.11). Campo eléctrico de una esfera dieléctrica y una esfera hueca metálica.

**Ejercicio 4.12.** Para la configuración planteada en el ejemplo (4.19), demostrar que las densidades de carga superficial en la esfera conductora son:  $\sigma_{int} = -Q/(4\pi a^2)$  y  $\sigma_{ext} = 2Q/(4\pi b^2)$ .

**Ejercicio 4.13.** Calcular el flujo eléctrico en cada una de las superficies cerradas de la figura 4.31 (considerando las superficies en 3D).

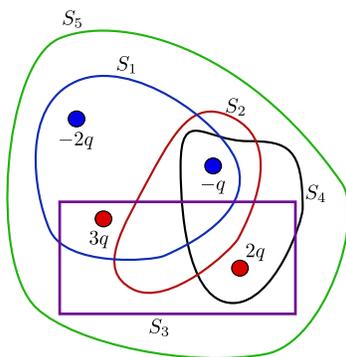


Figura 4.31: Ejercicio (4.13). Flujo eléctrico a través de 5 superficies cerrada, asociado a 4 cargas puntuales.

**Ejercicio 4.14.** La carga eléctrica del protón no está concentrada en un punto, sino sobre un volumen. Experimentalmente se establece que la carga distribuida en el protón se puede describir, aproximadamente, por una densidad de carga no uniforme de la forma:

$$\rho(r) = \frac{e}{8\pi b} \exp\left(-\frac{r}{b}\right), \quad (4.154)$$

donde  $e$  es la carga eléctrica elemental y  $b = 0.20 \times 10^{-15} \text{m}$ . Bajo las consideraciones anteriores, encuentre el campo eléctrico dentro y fuera del protón.

**Ejercicio 4.15.** Una distribución de carga negativa se encuentra uniformemente distribuida sobre una línea infinita. A una distancia  $l$  de la línea de carga se localiza un punto  $O$  como se muestra en la figura 4.32. Encontrar el flujo eléctrico a través de una esfera de radio  $a$  centrada en  $O$ , si  $a < l$  y  $a > l$ .

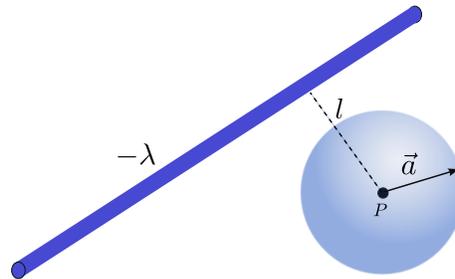


Figura 4.32: Ejercicio (4.15). Flujo eléctrico a través de una superficie esférica, debido a una línea infinita de carga.

**Ejercicio 4.16.** Un cascarón cilíndrico infinitamente largo de radio  $b$  posee una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Mostrar que al interior del cilindro el campo eléctrico es nulo y que en el exterior la intensidad de campo eléctrico es:  $E = 4\pi k_e \frac{\sigma b}{r}$ , donde  $r$  representa la distancia medida perpendicularmente desde el eje de simetría del cilindro a cualquier punto del espacio.

**Ejercicio 4.17.** Considere un cilindro sólido infinitamente largo de radio  $b$ , caracterizado por una distribución de carga no uniforme  $\rho(r) = \alpha r^2$ , donde  $\alpha$  representa una constante, y  $r$  la distancia medida perpendicularmente al eje de simetría del cilindro. Para la configuración planteada realice lo siguiente:

- Mostrar que la densidades líneal de carga se expresan como:  $\lambda_1 = \frac{2\pi\alpha b^3}{3}$ .
- Calcular el campo eléctrico en la región interior y exterior del cilindro.
- Encontrar la densidad líneal de carga y el campo eléctrico en cualquier región del espacio, en el caso que  $\rho(r) = \alpha r$ .

**Ejercicio 4.18.** Un cilindro sólido de radio  $a$  y longitud  $L$  posee una densidad de carga no uniforme  $\rho(r) = \frac{C}{r}$ , donde  $C$  es una constante y  $r$  la distancia medida perpendicularmente al eje de simetría del cilindro. Encontrar la carga del cilindro y determinar el campo eléctrico al interior del cilindro.

**Ejercicio 4.19.** Una lámina infinita de espesor  $b$  posee una distribución de carga  $\rho(x) = Ax^2$ , donde  $A$  es constante. Encontrar la intensidad del campo eléctrico dentro y fuera de la lámina.

**Ejercicio 4.20.** Una esfera aislante sólida de radio  $a$  posee una carga que varía con  $r$  de acuerdo a la relación  $\rho(r) = Br^2$ , donde  $B$  es una constante y  $r$  corresponde a la distancia medida respecto al centro de la esfera. Probar que la intensidad del campo eléctrico en el interior de la esfera es:  $E = \frac{4\pi k_e B}{5} r^3$ , en tanto que fuera de la esfera se expresa como:  $E = \frac{4\pi k_e B a^5}{5} \frac{1}{r^2}$ .

**Ejercicio 4.21.** Una esfera de radio  $R$  tiene la siguiente distribución de carga:

$$\rho(r) = \begin{cases} Ar & \text{si } 0 < r \leq a_1 \\ Br^2 & \text{si } a_1 \leq r \leq R \end{cases}, \quad (4.155)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Evaluar el campo eléctrico en:  $0 < r \leq a_1$ ,  $a_1 \leq r \leq R$  y  $r > R$ .

**Pregunta 4.1.** Teniendo en cuenta la ley de Gauss:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

1. El campo eléctrico  $\vec{E}$  debe ser el campo debido a la carga encerrada.
2. Si dentro de la superficie cerrada hay tres partículas con cargas de  $+3q$ ,  $-q$  y  $-2q$ , la integral de flujo eléctrico a través de la superficie es cero.
3. Sobre la superficie, el campo eléctrico apunta exactamente en la misma dirección que el vector normal a la superficie en cada punto.
4. Si la carga es cero, entonces el campo eléctrico en la expresión de la ley de Gauss es cero en todas partes de la superficie Gaussiana.

**Pregunta 4.2.** Una partícula con carga  $q$  se coloca dentro de un cubo, pero no en el centro de dicho cubo. El flujo eléctrico a través de uno de los lados del cubo es:

1. 0.
2.  $q/\epsilon_0$ ,
3.  $q/(8\epsilon_0)$ .
4. No se podría calcular con la ley de Gauss.

**Pregunta 4.3.** Una carga se distribuye de manera uniforme a lo largo de un alambre recto y muy largo. El campo eléctrico a 3cm del alambre es de  $30N/C$ . ¿Cuál es el valor del campo eléctrico a una distancia de 6cm del alambre?

1.  $180N/C$
2.  $50N/C$
3.  $100N/C$
4.  $15N/C$

# 5– Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

---

## 5.1. Energía potencial eléctrica

Para definir la energía potencial, se partirá del concepto de trabajo eléctrico y específicamente del trabajo realizado por fuerzas conservativas. El trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  sobre una partícula, cuando dicha partícula se mueve de un punto  $\vec{r}_1$  a un punto  $\vec{r}_2$  viene dado por:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.1)$$

Se dice que una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza no depende de la trayectoria recorrida por el cuerpo, sino únicamente de las posiciones inicial y final del mismo. Lo anterior establece que la integral presente en (5.1) tiene una solución analítica; es decir, una función escalar que depende de las coordenadas de posición (en coordenadas cartesianas, será una función de  $x, y, z$ ), es decir:

$$U(x, y, z) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.2)$$

donde el signo menos en (5.2) se introduce por convención. La función escalar  $U(x, y, z)$  (que también se denotará como  $U(\vec{r})$ ) se conoce como energía potencial. Toda fuerza conservativa tiene una energía potencial asociada. En términos de la energía potencial el trabajo producido por una fuerza conservativa se puede escribir como:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left( -U(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \right) \\ &= -(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)) \\ &= -\Delta U(\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a menos el cambio en la energía potencial correspondiente. La integral (5.2) permite encontrar la energía potencial si se conoce la respectiva fuerza conservativa. Adicionalmente se puede establecer una relación diferencial entre la energía potencial y su correspondiente fuerza conservativa, la cual está dada por (ver ejemplo (5.1)):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (5.4)$$

donde  $\vec{\nabla}U$  representa el gradiente de la función escalar  $U$ , operación que en coordenadas cartesianas se define como:

$$\vec{\nabla}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right). \quad (5.5)$$

**Ejemplo 5.1.** Verificar que si  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$ , entonces se cumple que:

$$U(x, y, z) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.6)$$

**Solución:** Reemplazando  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$ , en el lado derecho de (5.6), se tiene que

$$- \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla}U(x, y, z) \cdot d\vec{r}, \quad (5.7)$$

ahora, teniendo en cuenta la definición del gradiente (ecuación (5.5)) y que el diferencial  $d\vec{r}$  en coordenadas cartesianas se puede escribir como:  $d\vec{r} = \{dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\}$ , se tiene

$$\begin{aligned} - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right) \right\} \cdot \{dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\} \\ &= \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

El integrando en la última expresión, corresponde precisamente al diferencial de una función  $U(x, y, z)$ , por lo tanto:

$$- \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int dU(x, y, z) = U(x, y, z), \quad (5.9)$$

con lo cual se verifica (5.6).

A continuación se aplican los conceptos anteriores en el estudio del trabajo realizado por la fuerza eléctrica.

## 5.2. Energía potencial eléctrica

La interacción eléctrica entre dos partículas está descrita por la ley de Coulomb, tal que la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga  $q_i$  debido a su interacción con una partícula de carga  $q_j$ , está dada por:

$$\vec{F}_{ij} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.10)$$

donde  $\vec{r}_i$  corresponde al vector de posición de la carga  $q_i$  y  $\vec{r}_j$  al vector de posición de la carga  $q_j$ . Si la partícula con carga  $q_i$  se traslada desde una posición  $\vec{r}_0$  a una posición  $\vec{r}$  ( $q_j$  se mantiene fija en la posición  $\vec{r}_j$ <sup>1</sup>), el trabajo ejercido por la fuerza eléctrica sobre la carga  $q_i$  es (ver figura 5.1):

$$\begin{aligned} W^E &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \\ &= k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot d\vec{r}_i, \end{aligned} \quad (5.11)$$

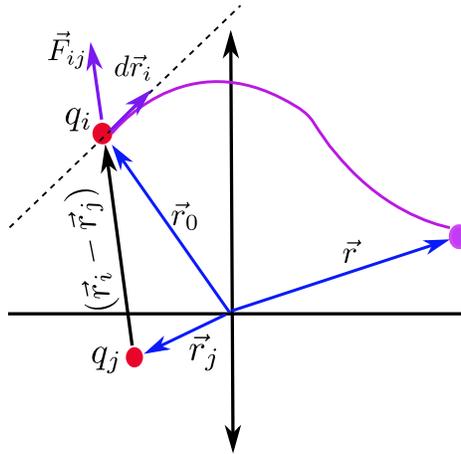


Figura 5.1: Desplazamiento de una carga  $q_i$  en presencia de fuerza eléctrica.

Con el ánimo de simplificar cálculos, se asumirá que la partícula  $q_j$  se encuentra en el origen de coordenadas, de tal manera que  $\vec{r}_j = \vec{0}$ , con lo cual el trabajo se puede escribir como:

$$W^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{r_i^3} (\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_i). \quad (5.12)$$

Ahora, si se considera que el desplazamiento se hace de tal forma que el diferencial de desplazamiento  $d\vec{r}_i$  sea paralelo al vector  $\vec{r}_i$ , entonces  $(\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_i) = r_i dr_i$ . Esta consideración se

<sup>1</sup> Debe existir una fuerza externa que mantenga a  $q_j$  fija en su posición

aplica para simplificar cálculos, sin embargo los resultados que se obtienen, son generales; independiente de como se mueva la partícula (ver ejemplo (5.4)). Teniendo en cuenta la observación anterior, el trabajo eléctrico se puede escribir como:

$$W^E = k_e \int_{r_0}^r \frac{q_i q_j}{r_i^2} dr_i, \quad (5.13)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} W^E &= - \left( k_e \frac{q_i q_j}{r_i} \right) \Big|_{r_0}^r \\ &= - \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{r} - k_e \frac{q_i q_j}{r_0} \right\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Comparando la primera línea en (5.3), con la primera línea de (5.14), se puede determinar que la energía potencial eléctrica para la carga  $q_i$  cuando se encuentra a una distancia  $r_i$  de  $q_j$  es:

$$U(r_i) = k_e \frac{q_i q_j}{r_i}. \quad (5.15)$$

Por la forma como se dedujo (5.15), claramente  $r_i$  corresponde a la magnitud del vector de posición de la carga  $q_i$ ; sin embargo, también corresponde a la distancia entre las dos partículas.

**Ejercicio 5.1.** *Verificar que*

$$\vec{\nabla} \left( k_e \frac{q_i q_j}{r} \right) = -k_e \frac{q_i q_j}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}_{ij}, \quad (5.16)$$

donde  $\vec{F}_{ij}$  representa la energía eléctrica que la partícula  $q_i$  siente debido a la carga  $q_j$ , cuando  $q_i$  se ubica a una distancia  $r$  de  $q_j$ .

En el caso más general, donde la partícula fija con carga  $q_j$  se encuentre en una posición arbitraria  $r_j$ , la energía potencial vendrá dada por (ver ejemplo (5.5)):

$$U(\vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (5.17)$$

y por consiguiente el trabajo eléctrico, vendrá dado por:

$$W_{ij}^E = - \left( k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \Big|_{r_0}^r, \quad (5.18)$$

donde se ha denotado como  $W_{ij}^E$  al trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_i$  cuando dicha carga se mueve por la acción de su interacción eléctrica con una carga  $q_j$ . La expresión (5.18) se puede escribir como

$$W_{ij}^E = \left\{ -k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} - k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|} \right\}. \quad (5.19)$$

Las relaciones para la energía potencial (5.17), y para el trabajo (5.18), se dedujeron considerando una partícula fija  $q_j$  y una partícula en movimiento  $q_i$ , por lo tanto, la expresión (5.17) se puede interpretar como la energía potencial eléctrica asociada a la carga  $q_i$  en la posición  $\vec{r}_i$ , debido a su interacción con la partícula  $q_j$  (ubicada en la posición  $\vec{r}_j$ ), cuando las partículas se encuentran alejadas una distancia  $d = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| > 0$ . Sin embargo, dado la simetría de la ecuación (5.17) se tiene que,

$$U(\vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = U(\vec{r}_j), \quad (5.20)$$

se evidencia que (5.20) también representa la energía potencial asociada a la carga  $q_j$  ubicada en la posición  $\vec{r}_j$ , debido a su interacción con la partícula  $q_i$  (ubicada en la posición  $\vec{r}_i$ ), cuando dichas cargas se encuentran alejadas por una distancia  $|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d$ . Por lo anterior, se podría denotar simplemente  $r = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  tal que

$$U(r) = k_e \frac{q_i q_j}{r}, \quad (5.21)$$

y se entiende que  $U(r)$  dada en (5.21) representa la energía potencial de cualquiera de las dos cargas en interacción.

**Ejemplo 5.2.** Considere dos partículas con cargas  $q_i = 2.0\mu C$  y  $q_j = -3.0\mu C$ , ubicadas en las posiciones definidas por los vectores  $\vec{r}_i = 3.0m\hat{i}$  y  $\vec{r}_j = 2.0m\hat{j}$ , respectivamente. Para la configuración planteada, se encontrará:

- La energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $q_i$ .
- La energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $q_j$ . Comparar el resultado con el ítem anterior.
- Asumir que la partícula con carga  $q_j$  se mantiene fija en la posición  $\vec{r}_j$  para encontrar el trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_i$ , cuando dicha partícula se mueve desde su posición inicial hasta el infinito (posición final  $\vec{r} \rightarrow \infty$ ).
- Asumir que la partícula con carga  $q_i$  se mantiene fija en la posición  $\vec{r}_i$  para encontrar el trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_j$ , cuando dicha partícula se mueve desde su posición inicial  $\vec{r}_j$  hasta el infinito (posición final  $\vec{r} \rightarrow \infty$ ).

**Solución:**

- a) La energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $q_i$  en la posición  $\vec{r}_i$ , está definida por la relación (5.17), es decir

$$U(\vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (5.22)$$

Reemplazando los valores establecidos para  $q_i$ ,  $q_j$ ,  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$ , se tiene que

$$U(\vec{r}_i) = -k_e \frac{6(\mu C)^2}{|3m\hat{i} - 2m\hat{j}|} = -k_e \frac{6(\mu C)^2}{\sqrt{13}m} \approx -14.957N \cdot m, \quad (5.23)$$

donde se ha tomado  $k_e \approx 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$ .

- b) La energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $q_j$  en la posición  $\vec{r}_j$ , se determina a partir de la relación (5.17) intercambiando  $i \rightarrow j$ , tal que:

$$U(\vec{r}_j) = k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (5.24)$$

Dado que  $|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ , se evidencia que la energía eléctrica asociada a la partícula con carga  $q_i$ , es igual a la energía eléctrica asociada a la partícula con carga  $q_j$ . Lo anterior se estableció previamente en (5.20) y por lo tanto,

$$U(\vec{r}_j) = U(\vec{r}_i) \approx -14.957N \cdot m. \quad (5.25)$$

- c) El trabajo eléctrico se puede escribir como:

$$W^E = -\Delta U(\vec{r}) = -U(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_i}^{\infty} = -(U(\vec{r} \rightarrow \infty) - U(\vec{r}_i)), \quad (5.26)$$

donde

$$U(\vec{r} \rightarrow \infty) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \rightarrow 0. \quad (5.27)$$

por lo tanto,

$$W^E = U(\vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (5.28)$$

El anterior resultado establece que el trabajo eléctrico realizado para llevar la partícula con carga  $q_i$  desde su posición inicial  $r_i$ , hasta el infinito, es igual a la energía potencial eléctrica que tiene la partícula  $i$  en la posición  $\vec{r}_i$ , con lo cual

$$W^E = U(\vec{r}_i) \approx -14.957N \cdot m. \quad (5.29)$$

d) Si, la partícula con carga  $q_i$  se mantiene fija, y la partícula con carga  $q_j$  se mueve desde su posición inicial  $\vec{r}_j$  hasta el infinito, entonces el trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_j$  es:

$$W^E = -\Delta U(\vec{r}) = -U(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_j}^{\infty} = -(U(\vec{r} \rightarrow \infty) - U(\vec{r}_j)), \quad (5.30)$$

donde

$$U(\vec{r} \rightarrow \infty) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \rightarrow 0. \quad (5.31)$$

por lo tanto,

$$W^E = U(\vec{r}_j) = k_e \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (5.32)$$

Dado que  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ , se concluye que el trabajo necesario para llevar la partícula  $q_j$  desde su posición inicial hasta el infinito (manteniendo  $q_i$  fija), es igual al trabajo necesario para llevar la partícula  $q_i$  desde su posición inicial hasta el infinito (manteniendo  $q_j$  fija), con lo cual

$$W^E = -14.957N \cdot m. \quad (5.33)$$

**Ejemplo 5.3.** Verificar que

$$\vec{F}_{ij} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_{(i)} \left( k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right), \quad (5.34)$$

donde el símbolo  $\vec{\nabla}_{(i)}$  representa el gradiente tomado sobre las coordenadas de  $\vec{r}_i$  (ya que la fuerza se aplica sobre la carga  $q_i$  ubicada en  $\vec{r}_i$ ).

**Solución:** Denotando

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}, \quad (5.35)$$

$$\vec{r}_j = x_j \hat{i} + y_j \hat{j} + z_j \hat{k} \quad (5.36)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} = & -\frac{d}{dx_i} \left( \frac{k_e q_i q_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \right) \hat{i} \\ & -\frac{d}{dy_i} \left( \frac{k_e q_i q_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \right) \hat{j} \\ & -\frac{d}{dz_i} \left( \frac{k_e q_i q_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

En (5.37), se ha tenido en cuenta que:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (5.38)$$

Realizando las derivadas en (5.37) se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} = & \left\{ k_e q_i q_j \frac{(x_i - x_j)}{((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}} \right\} \hat{i} \\ & \left\{ k_e q_i q_j \frac{(y_i - y_j)}{((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}} \right\} \hat{j} \\ & \left\{ k_e q_i q_j \frac{(z_i - z_j)}{((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}} \right\} \hat{k}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

lo que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= k_e q_i q_j \frac{\left\{ (x_i - x_j)\hat{i} + (y_i - y_j)\hat{j} + (z_i - z_j)\hat{k} \right\}}{((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}} \\ &= k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \end{aligned} \quad (5.40)$$

con lo cual queda demostrada la ecuación (5.34).

**Ejercicio 5.2.** Verificar que

$$\vec{F}_{ij} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{\nabla}_{(j)} \left( k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right), \quad (5.41)$$

donde el símbolo  $\vec{\nabla}_{(j)}$  representa el gradiente tomado sobre las coordenadas de  $\vec{r}_j$ .

**Ejemplo 5.4. Deducción Adicional:** En este ejemplo se considera dos partículas con carga  $q_i$  y  $q_j$  en interacción. La partícula con carga  $q_j$  se mantiene fija en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano. La partícula con carga  $q_i$  se mueve por la trayectoria descrita en rojo en la figura 5.4, cambiando su posición de  $\vec{r}_0$  a  $\vec{r}$ . Para tal sistema se encontrará el trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_i$  durante su recorrido.

**Solución:** El trabajo eléctrico sobre la carga  $q_i$  para la situación planteada, viene dado por la ecuación (5.12), tal que

$$W^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{r'^3} (\vec{r}' \cdot d\vec{r}'), \quad (5.42)$$

donde se ha denotado por  $\vec{r}'$  al vector de posición que determina la ubicación de la partícula  $q_i$  a lo largo de su recorrido.

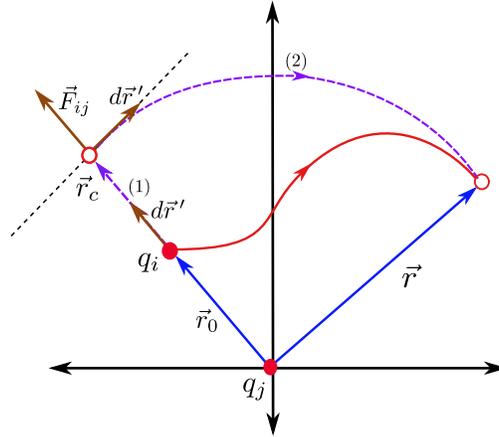


Figura 5.2: Ejemplo (5.4). Trabajo sobre una carga  $q_i$  debido a una carga  $q_j$

Ahora, dado que el trabajo eléctrico no depende de la trayectoria realizada por la partícula  $q_i$  para ir desde su posición inicial a su posición final, es posible elegir una trayectoria que permita realizar la integral presente en (5.42) más fácilmente. Por tanto la trayectoria que se elegirá para realizar el cálculo será la esquematizada con una línea punteada de color lila en la figura 5.2, la cual se puede analizar calculando el trabajo por dos tramos independientes: El primer tramo de recorrido consiste de un elemento recto a lo largo del eje definido por el vector  $\vec{r}_0$ ; que parte en  $\vec{r}_0$  y termina en  $\vec{r}_c$ , tal que  $|\vec{r}_c| = |\vec{r}|$  (ver figura 5.2). El segundo tramo consiste en un elemento circular de radio  $r$  que une el punto  $\vec{r}_c$  con el punto final  $\vec{r}$ . Bajo las anteriores consideraciones el trabajo eléctrico total será

$$W^E = W_1^E + W_2^E, \quad (5.43)$$

donde

$$W_1^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_c} \frac{q_i q_j}{r'^3} (\vec{r}' \cdot d\vec{r}'), \quad (5.44)$$

$$W_2^E = k_e \int_{\vec{r}_c}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{r'^3} (\vec{r}' \cdot d\vec{r}'). \quad (5.45)$$

En el recorrido recto, el vector  $\vec{r}'$  es paralelo al vector  $d\vec{r}'$  y por lo tanto,  $\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = r' dr'$ , con lo cual, se tiene que

$$W_1^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{r'^3} r' dr'. \quad (5.46)$$

Ahora, en el tramo circular la fuerza eléctrica es siempre normal a la trayectoria, y dado que el vector de desplazamiento  $d\vec{r}'$  es tangente a la trayectoria, se tiene que el producto  $(\vec{r}' \cdot d\vec{r}')$  se anula y por lo también se anula  $W_2^E$ , entonces

$$W_2^E = 0. \quad (5.47)$$

Con base en los resultados anteriores, se tiene que

$$W^E = W_1^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_c} \frac{q_i q_j}{r'^2} dr' = -k_e \frac{q_i q_j}{r'} \Big|_{r_0}^{r_c=r}, \quad (5.48)$$

resultado que se puede expresar como

$$W^E = - \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{r} - k_e \frac{q_i q_j}{r_0} \right\}. \quad (5.49)$$

Como se puede observar el resultado (5.49) es igual al expresado en (5.14) cuando se asumió que el desplazamiento siempre era paralelo al vector de fuerza.

### Ejemplo 5.5. Deducción Adicional

En este ejemplo se deducirá la expresión general para el trabajo eléctrico definida en la ecuación (5.18) a partir de la ecuación (5.11).

**Solución:** Se procede partiendo de la expresión (5.11), que define la ecuación para el trabajo, dada por:

$$W^E = k_e \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot d\vec{r}_i, \quad (5.50)$$

Ahora, dado que la posición de la carga  $q_j$  es fija, se tiene que

$$d\vec{r}_i \equiv d(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.51)$$

por lo tanto

$$W^E = k_e \int \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.52)$$

donde los límites de integración se calcularán posteriormente tras un apropiado cambio de variable. Como el trabajo eléctrico es conservativo, es posible tomar un camino de integración por tramos tal que los vectores  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  y  $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  sean en todo punto paralelos o perpendiculares (ver ejemplo (5.4)). En los tramos en que los vectores en mención sean perpendiculares el trabajo será nulo y solo quedará el trabajo correspondiente a los tramos en los cuales los vectores sean paralelos, tal que

$$W^E = k_e \int \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) d|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = k_e \int \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} d|\vec{r}_i - \vec{r}_j|. \quad (5.53)$$

Ahora, realizando el cambio de variable de integración por  $u_i = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ , se tiene que

$$\begin{aligned} W^E &= k_e \int_{u_0}^u \frac{q_i q_j}{u_i^2} du_i \\ &= -k_e \frac{q_i q_j}{u_i} \Big|_{u_0}^u. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Teniendo en cuenta que  $u_i = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ , se tiene que el límite superior para la variable  $u$  será  $u = |\vec{r} - \vec{r}_j|$ , mientras que el límite inferior vendrá dado por  $u = |\vec{r}_0 - \vec{r}_j|$ , ya que  $\vec{r}_0$  y  $\vec{r}$  corresponden a los vectores de posición inicial y final de la carga  $q_i$ , respectivamente. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} W^E &= -k_e \frac{q_i q_j}{u_i} \Big|_{|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|}^{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \\ &= - \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} - k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|} \right\}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

que se puede escribir como

$$W^E = -k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \Big|_{r_0}^r, \quad (5.56)$$

con lo cual se ha llegado a la expresión (5.18) requerida. De igual forma se establece que la energía potencial está dada por

$$U = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (5.57)$$

### 5.2.1. Trabajo sobre una carga puntual, debido a N cargas fijas

En el caso que una partícula con carga  $q_i$ , se mueva desde un punto definido por  $\vec{r}_0$  hasta un punto  $\vec{r}$ , en una región donde existan N partículas con cargas  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) que se mantienen fijas en las posiciones  $\vec{r}_j$ , el trabajo eléctrico sobre la carga  $q_i$  será la suma de los trabajos producidos por la interacción de la partícula  $q_i$  con cada partícula de carga  $q_j$ , tal que:

$$\begin{aligned} W_i^E &= \sum_{j=1}^N W_{ij}^E \\ &= - \sum_{j=1}^N \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right\} \Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = - \left[ \sum_{j=1}^N \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

En (5.58) se ha hecho uso de la definición establecida en (5.18) para  $W_{ij}^E$  y donde  $W_i^E$  representa el trabajo eléctrico total realizado sobre la carga  $q_i$ . A partir de (5.58) se puede identificar que la energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $q_i$  cuando se ubica en la posición  $\vec{r}_i$ , vendrá dada por:

$$U(\vec{r}_i) = k_e \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (5.59)$$

Dado que la energía potencial eléctrica depende de las distancias entre las partículas en interacción ( $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ), entonces la energía potencial es independiente del origen de coordenadas seleccionado, ya que las distancias entre partículas es una magnitud independiente de dicha selección.

**Ejemplo 5.6.** Se tiene cuatro partículas con carga  $q_j$  ( $q_j = q \forall j = 1, 2, 3, 4$ ) ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $L$  extendido en el plano  $xy$  y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas. Una quinta partícula con carga  $Q = -q$ , se localiza en la posición definida en coordenadas cartesianas por:  $(0, 0, z)$  (ver figura 5.3).

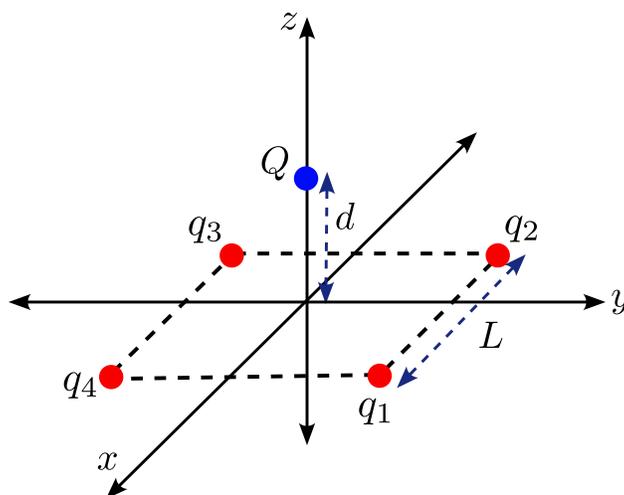


Figura 5.3: Ejemplo (5.6). Configuración de cinco cargas puntuales.

Para la situación descrita se encontrará:

- El potencial eléctrico asociado a la carga  $Q$  ubicada en el punto  $A$  definido por las coordenadas  $(0, 0, d)$ .
- El potencial eléctrico asociado a la carga  $Q$  cuando dicha partícula se ubica en el punto  $B$  definido por las coordenadas  $(0, 0, 0)$ .
- El trabajo eléctrico sobre la carga  $Q$  cuando dicha partícula se mueve del punto  $A$  al punto  $B$ .
- Si la partícula con carga  $Q$  parte del reposo en el punto  $A$ , ¿cual será su velocidad en el punto  $B$ ?

- e) Encontrar la energía potencial de una de las partículas de carga  $q$  que se encuentran ubicadas sobre los vértices del cuadrado. Concretamente sobre la carga ubicada en el punto  $(L/2, L/2, 0)$ . La carga  $Q$  para este cálculo se ubicará en el punto  $(0, 0, d)$ .

### Solución:

- a) Para encontrar el potencial eléctrico de la partícula con carga  $Q$ , se utiliza la expresión (5.59), haciendo  $q_i = Q$  (partícula sobre la cual se calculará la energía potencial), tal que

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_i) &= k_e \sum_{j=1}^4 \frac{Qq_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= k_e \frac{Qq_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} + k_e \frac{Qq_2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} + k_e \frac{Qq_3}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} + k_e \frac{Qq_4}{|\vec{r}_i - \vec{r}_4|}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Ahora,  $\vec{r}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) determina la posición de las cuatro partículas de carga  $q$  ubicadas sobre los vértices del cuadrado. Para aplicar la ecuación (5.60) se utilizará la siguiente notación:

$$\vec{r}_i = d\hat{k}, \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}, & \vec{r}_2 &= -\frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}, \\ \vec{r}_3 &= -\frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}, & \vec{r}_4 &= \frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

con lo cual

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_1| = |d\hat{k} - \frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}| = \sqrt{d^2 + L^2/2}, \quad (5.63)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_2| = |d\hat{k} + \frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}| = \sqrt{d^2 + L^2/2}, \quad (5.64)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_3| = |d\hat{k} + \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}| = \sqrt{d^2 + L^2/2}, \quad (5.65)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_4| = |d\hat{k} - \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}| = \sqrt{d^2 + L^2/2}. \quad (5.66)$$

A partir de las relaciones anteriores y teniendo en cuenta que  $Q = -q$  y que  $q_j = q$  para todo  $j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), la expresión (5.60) se reduce a:

$$U(\vec{r}_i \rightarrow d\hat{k}) = -4k_e \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + L^2/2}}. \quad (5.67)$$

- b) El procedimiento para encontrar la energía potencial eléctrica de la partícula  $Q$  en la posición  $(0, 0, 0)$ , es igual al realizado en el literal anterior, salvo que en este caso la posición de la partícula  $Q$  se establece con el vector

$$\vec{r}_i = \vec{0}, \quad (5.68)$$

y por lo tanto, se tiene que

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |-\vec{r}_j| = \sqrt{L^2/2}, \quad \forall j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.69)$$

De tal forma que la energía potencial vendrá dada por

$$U(\vec{r}_i \rightarrow \vec{0}) = -4k_e \frac{q^2}{\sqrt{L^2/2}}. \quad (5.70)$$

- c) El trabajo eléctrico sobre la partícula con carga  $Q$ , cuando dicha partícula se mueve del punto  $(0, 0, d)$  al punto  $(0, 0, 0)$ , corresponde a menos el cambio en su energía potencial, es decir:

$$W^E = -\Delta U(\vec{r}_i) = -\left(U(\vec{r}_i \rightarrow \vec{0}) - U(\vec{r}_i \rightarrow d\hat{k})\right). \quad (5.71)$$

Utilizando los resultados establecidos en (5.67) y (5.70), se tiene que

$$\begin{aligned} W^E &= -\left(-4k_e \frac{q^2}{\sqrt{L^2/2}} - 4k_e \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + L^2/2}}\right) \\ &= 4k_e q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{L^2/2}} + \frac{1}{\sqrt{d^2 + L^2/2}}\right). \end{aligned} \quad (5.72)$$

- d) Para encontrar la velocidad que la carga  $Q$  tiene cuando se encuentra en la posición  $(0, 0, 0)$  (punto  $B$ ), se tiene en cuenta que el trabajo realizado por cualquier fuerza (conservativa o no), se puede expresar en términos del cambio de la energía cinética, es decir:

$$W = \Delta K = K_B - K_A = \frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2}, \quad (5.73)$$

donde  $V_A$  y  $V_B$  corresponden a la velocidad de la partícula  $Q$  en el punto  $A$  y  $B$  respectivamente. Ahora, ya que la partícula parte del reposo en el punto  $A$ , se tiene que  $V_A = 0$  y por lo tanto

$$W = \frac{mV_B^2}{2}. \quad (5.74)$$

Por otro lado, dado que la fuerza eléctrica es conservativa, entonces el trabajo es igual a menos el cambio en la energía potencial cuando la partícula se mueve desde  $B$  hasta  $A$  (resultado expresado en (5.72)). Entonces, igualando (5.74) con (5.72), se tiene que:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{L^2/2}} + \frac{1}{\sqrt{d^2 + L^2/2}}, \quad (5.75)$$

por lo tanto

$$V_B = \sqrt{\frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{L^2/2}} + \frac{1}{\sqrt{d^2 + L^2/2}} \right\}}, \quad (5.76)$$

e) Para encontrar la energía eléctrica sobre la carga ubicada en uno de los vértices del cuadrado, se utiliza la expresión (5.59), tal que

$$U(\vec{r}_i) = k_e \frac{q_i q_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} + k_e \frac{q_i q_2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} + k_e \frac{q_i q_3}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} + k_e \frac{q_i q_4}{|\vec{r}_i - \vec{r}_4|}, \quad (5.77)$$

pero en este caso la carga sobre la cual se evaluará la energía potencial corresponde a la carga ubicada en el punto  $(L/2, L/2, 0)$ . Por lo tanto, en la expresión (5.77), se debe tener en cuenta que  $q_i = q$  y  $\vec{r}_i = L/2\hat{i} + L/2\hat{j}$ . Las cargas y sus posiciones se identificarán con la notación (que se utilizará en la expresión (5.77)):

$$q_i = q \rightarrow \vec{r}_i = \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}, \quad (5.78)$$

$$q_1 = Q \rightarrow \vec{r}_1 = d\hat{k}, \quad (5.79)$$

$$q_2 = q \rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}, \quad (5.80)$$

$$q_3 = q \rightarrow \vec{r}_3 = -\frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}, \quad (5.81)$$

$$q_4 = q \rightarrow \vec{r}_4 = \frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j}, \quad (5.82)$$

y se tiene que

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_1| = \left| \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} - d\hat{k} \right| = \sqrt{d^2 + L^2/2}, \quad (5.83)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_2| = \left| \left( \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} \right) - \left( -\frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} \right) \right| = L, \quad (5.84)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_3| = \left| \left( \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} \right) - \left( -\frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j} \right) \right| = \sqrt{2}L, \quad (5.85)$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_4| = \left| \left( \frac{L}{2}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} \right) - \left( \frac{L}{2}\hat{i} - \frac{L}{2}\hat{j} \right) \right| = L. \quad (5.86)$$

Reemplazando los resultados anteriores en (5.77) se tiene:

$$U = k_e \left\{ \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + L^2/2}} + \frac{q^2}{L} + \frac{q^2}{\sqrt{2}L} + \frac{q^2}{L} \right\}, \quad (5.87)$$

y ya que  $Q = -q$ , la energía potencial se puede escribir como

$$U = k_e q^2 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{d^2 + L^2/2}} + \frac{2}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}L} \right\}. \quad (5.88)$$

### 5.3. Energía potencial eléctrica para N cargas puntuales

Es importante destacar, en primer lugar, que en un conjunto de partículas cargadas, cada partícula tiene su propia energía potencial, un concepto que ya fue abordado en la sección anterior. Sin embargo, la energía potencial total del sistema no se limita a la simple suma de las energías potenciales individuales de cada partícula. En esta sección, se analizará la energía potencial eléctrica asociada al conjunto de partículas.

Se considera un conjunto de  $N$  partículas con cargas puntuales, en el que la distancia entre cada par de cargas puede medirse mediante el vector de posición relativa ( $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ ). Para tal configuración existe una energía específica denominada energía potencial eléctrica del sistema. Si las partículas se encuentran suficientemente lejos entre sí, la interacción eléctrica se anula y, por lo tanto, su energía potencial es cero. Sin embargo, si las distancias entre las partículas son finitas, habrá una energía potencial eléctrica debido a su configuración espacial particular. La energía potencial eléctrica de un sistema de  $N$  partículas se define como el trabajo externo realizado en contra de la fuerza eléctrica necesario para “traer” cada partícula desde el infinito (donde no existe interacción eléctrica entre partículas) hasta su posición actual en el espacio, configurando así el sistema bajo estudio. Matemáticamente, esta idea se representa como:

$$U = W^{ext} = -W^E = - \sum_{j=2}^N \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\infty}^{\vec{r}_j} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r} \right\}, \quad (5.89)$$

La expresión entre corchetes en (5.89) representa el trabajo eléctrico efectuado al traer la partícula  $j$  desde el infinito hasta su posición final  $\vec{r}_j$  debido a la presencia de  $j-1$  partículas en el espacio. La segunda sumatoria se debe al incremento en el número de partículas interactuantes a medida que dichas partículas se traen desde el infinito.

Para comprender la definición anterior, se calculará el trabajo externo necesario para traer tres partículas con cargas  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) desde el infinito a las posiciones  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Esquemáticamente en la figura 5.4, se entiende el infinito por la región sombreada en gris donde inicialmente se ubican las tres partículas, las cuales cuando se encuentran en dicha región, no interactúan debido a su separación infinita.

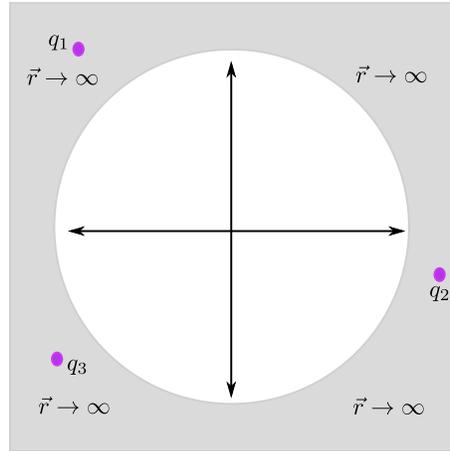


Figura 5.4: Tres cargas “ubicadas” en el infinito.

El trabajo externo para generar la configuración de partículas se puede realizar moviendo una partícula a la vez, como se describe a continuación.

- Para traer la primera carga desde el infinito hasta  $\vec{r}_1$  no se realiza trabajo, ya que en la cercanía de  $\vec{r}_1$  no hay cargas que interactúen con  $q_1$  ( $q_2$  y  $q_3$  aún están en el infinito, ver figura 5.5), por lo tanto

$$W_1^E = 0. \quad (5.90)$$

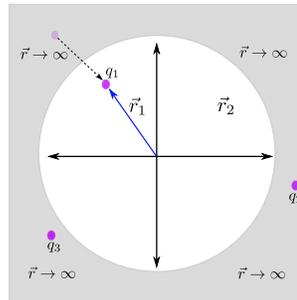


Figura 5.5: Ubicación de  $q_1$  desde el infinito al punto  $\vec{r}_1$ .

- Una vez la carga  $q_1$  se ha ubicado, se procede a traer la segunda carga  $q_2$  a su posición  $\vec{r}_2$  (ver figura 5.6), y como ya hay una carga  $q_1$  a una distancia finita de donde se ubica  $q_2$ , la fuerza eléctrica realiza trabajo. Entonces, a partir de (5.18), se tiene que el trabajo eléctrico realizado sobre la carga  $q_2$  es:

$$\begin{aligned} W_2^E &= -k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \Bigg|_{\infty}^{\vec{r}_2} \\ &= - \left\{ k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right\} \\ &= -k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \end{aligned} \quad (5.91)$$

donde los límites de integración en (5.91) se han establecido teniendo en cuenta que inicialmente  $q_2$  se encuentra en el infinito y que su posición final es  $\vec{r}_2$ . El vector  $\vec{r}$  en la primera línea de (5.91) se usa para definir la posición variable de la carga  $q_1$  a lo largo de su trayectoria.

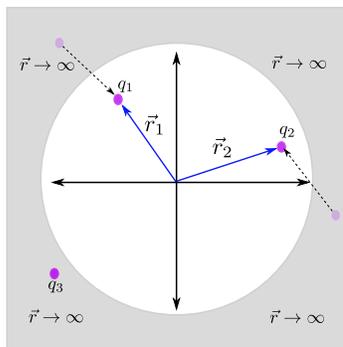


Figura 5.6: Ubicación de  $q_1$  y  $q_2$  desde el infinito a los puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$

- Por último, al traer la carga  $q_3$  a la posición  $\vec{r}_3$  es necesario realizar trabajo en contra de la interacción ejercida por las dos cargas ya ubicadas en  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  (ver figura 5.7). El trabajo eléctrico total  $W_3^E$ , vendrá dado por la suma del trabajo eléctrico debido a la interacción de la partícula  $q_3$  con las partículas  $q_1$  y  $q_2$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 W_3^E &= \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}_3} (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_{31} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_{32} \cdot d\vec{r} \\
 &= W_{31}^E + W_{32}^E \\
 &= -k_e \frac{q_3 q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \Big|_{\infty}^{\vec{r}_3} - k_e \frac{q_3 q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \Big|_{\infty}^{\vec{r}_3} \\
 &= -k_e \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} - k_e \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}.
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

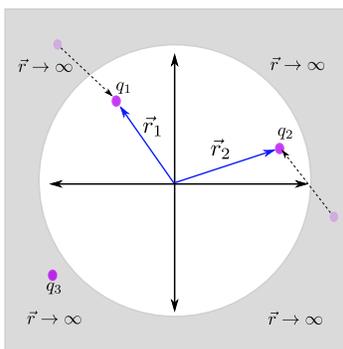


Figura 5.7: Ubicación de  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  desde el infinito a los puntos  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$

El trabajo eléctrico total realizado al traer las tres cargas a sus posiciones  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$ , será la suma de (5.90), (5.91) y (5.92), tal que:

$$\begin{aligned} W_T^E &= W_1^E + W_2^E + W_3^E \\ &= 0 - k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - k_e \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} - k_e \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Ahora el trabajo externo  $W^{ext}$  que se debe realizar en contra de la fuerza eléctrica en forma cuasiestática (es decir, manteniendo siempre a la fuerza externa igual a la fuerza eléctrica  $\vec{F}_{ext} = -F_E$ ), es igual a  $-W_T^E$ , por lo tanto:

$$W^{ext} = k_e \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + k_e \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + k_e \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}. \quad (5.94)$$

Por definición, el trabajo externo  $W^{ext}$  expresado en (5.94) es igual a la energía potencial asociada al sistema de partículas, la cual se puede escribir como:

$$U = \frac{k_e}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3}_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (5.95)$$

donde en (5.95) el factor 1/2 aparece para evitar un doble conteo en la sumatoria.

La expresión (5.95) se puede generalizar para encontrar la energía potencial eléctrica asociada a una configuración de  $N$  cargas puntuales; por lo tanto, para  $N$  partículas con cargas  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), ubicadas en las posiciones  $\vec{r}_i$ , respectivamente, la energía potencial viene dada por la expresión:

$$U = \frac{k_e}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N}_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (5.96)$$

Para un sistema dado de partículas, el resultado obtenido a partir de la expresión para la energía potencial eléctrica definida por (5.96) es independiente del origen asignado al sistema coordenado. Lo anterior dado que la energía potencial depende de la distancia entre las cargas en interacción, magnitud que es invariante respecto al origen elegido. Ahora, (5.96) se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N}_{i \neq j} k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right). \quad (5.97)$$

La expresión entre corchetes en la expresión (5.97) corresponde a la energía potencial asociada a la carga  $q_i$  debido a su interacción con las  $q_j$  cargas (ver ecuación (5.59)), por lo tanto, la ecuación (5.97) se puede escribir también como:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_{q_i}(\vec{r}_i). \quad (5.98)$$

donde en (5.97),  $U_{q_i}(\vec{r}_i)$  representa la energía potencial eléctrica asociada a la carga  $q_i$  en la posición  $\vec{r}_i$  (por su interacción con las restantes  $N - 1$  cargas), así que (5.96) representa un medio de la suma de la energía potencial asociada a cada partícula  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) en las posiciones  $\vec{r}_i$  respectivas. El factor  $1/2$  evita doble conteo de algunos términos presentes en la energía total, ya que en  $U_{q_i}(\vec{r}_i)$  (para cualquier  $i$ ) existe un término relacionado con la interacción de la partícula  $i$  con la partícula  $j$  el cual también está presente en  $U_{q_j}(\vec{r}_j)$  (interacción de la partícula  $j$  con la partícula  $i$ ). En la próxima sección se estudiará la energía potencial que adquiere una carga, cuando se ubica en una región donde existe un campo eléctrico dado y el trabajo asociado al desplazamiento de dicha partícula debida al campo eléctrico.

**Ejemplo 5.7.** Cuatro partículas con carga  $q$  se ubican en los vértices de un cuadrado de lado  $a$ , para tal sistema se encontrará la energía potencial eléctrica del sistema. La configuración planteada se presenta en la figura 5.8.

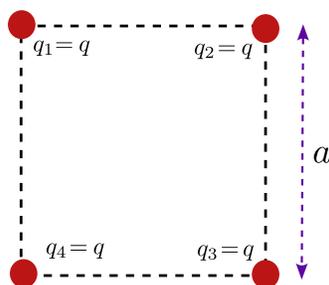


Figura 5.8: Ejemplo 5.7. Energía potencial asociada a cuatro partículas cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado.

**Solución:** La energía potencial eléctrica de la configuración planteada, está dada por la ecuación (5.95), la cual para 4 partículas, toma la forma :

$$\begin{aligned} U &= \frac{k_e}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^4}_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \\ &= \frac{k_e q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{k_e q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{k_e q_1 q_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} + \frac{k_e q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{k_e q_3 q_4}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} \end{aligned} \quad (5.99)$$

En este problema, no es necesario definir las posiciones de cada partícula en relación con un sistema de coordenadas, ya que lo único que se requiere es la distancia entre cada par

de partículas. Observando la ubicación de las cargas mostradas en la figura 5.8, se puede determinar directamente las siguientes distancias.

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = a \quad (5.100)$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = 2\sqrt{a} \quad (5.101)$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_4| = a \quad (5.102)$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = a \quad (5.103)$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_4| = 2\sqrt{a} \quad (5.104)$$

$$|\vec{r}_3 - \vec{r}_4| = a. \quad (5.105)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y ya que  $q_i = q$  para todo valor de  $i = 1, 2, 3, 4$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} U &= \frac{k_e q^2}{a} + \frac{k_e q^2}{\sqrt{2}a} + \frac{k_e q^2}{a} + \frac{k_e q^2}{a} + \frac{k_e q^2}{\sqrt{2}a} + \frac{k_e q^2}{a} \\ &= \left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \frac{k_e q^2}{a}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

**Ejercicio 5.3.** Siete partículas cargadas se mantienen fijas y se localizan en un cuadrado de lado  $b$  como se muestra en la figura 5.9, donde  $q \equiv e$ . Para la configuración descrita encuentre: a) El trabajo externo necesario para transportar una partícula con carga  $+6e$  desde el infinito y ubicarla en el centro del cuadrado, asumiendo una velocidad igual a cero en la ubicación inicial y final de la partícula. b) El trabajo eléctrico necesario para transportar una carga  $+6e$  desde el infinito y ubicarla en el centro del cuadrado. c) La energía potencial eléctrica de la partícula con carga  $+6e$  cuando se ubica en el centro del cuadrado. d) La energía del sistema formado por las siete partículas más la partícula con carga  $+6e$  cuando dicha carga se ubica en el centro del cuadrado.

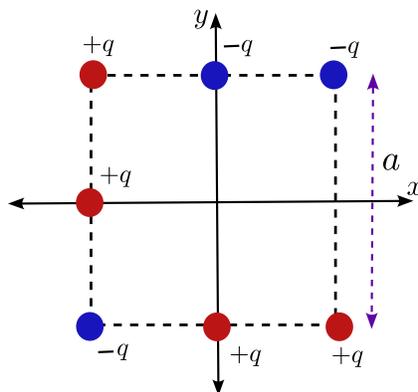


Figura 5.9: Ejercicio 5.3. Trabajo eléctrico establecido a partir de siete cargas puntuales.

**Ejercicio 5.4.** Dos cargas de valor  $q$  se encuentran localizadas a una distancia  $d$  como se muestra en la figura 5.10. Una carga adicional de valor  $q$  se ubica en el punto  $C$ . Para la configuración planteada encuentre: a) La energía potencial asociada a las tres cargas. b) Si la

carga ubicada en el punto  $C$  tiene una velocidad  $\vec{V}_C$ , encuentre el trabajo externo que llevará la partícula al infinito reduciendo su velocidad a  $\vec{V} = 0$ .

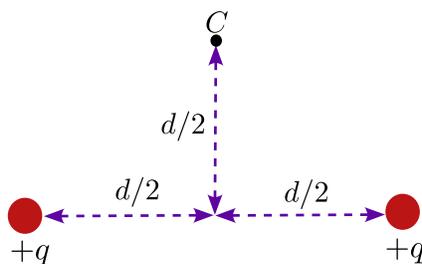


Figura 5.10: Ejercicio 5.4. Energía potencial asociada a tres cargas puntuales.

**Ejercicio 5.5.** *Cuanto trabajo externo se debe realizar para formar la configuración indicada en la figura 5.11, trayendo las partículas desde el infinito y asumiendo que todas las partículas tienen velocidad cero tanto en su posición inicial como en su posición final.*

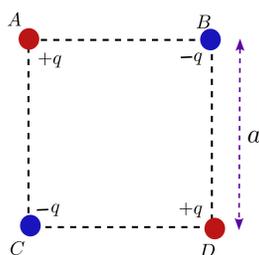


Figura 5.11: Ejercicio 5.5. Trabajo necesario para conformar una configuración de cuatro cargas puntuales.

### Trabajo debido a un campo eléctrico.

Si una partícula cargada se sitúa en una región donde existe un campo eléctrico, dicho campo realiza trabajo sobre la carga. Concretamente, si se tiene una carga  $q$  ubicada en el punto  $\vec{r}$  localizado en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , la fuerza que experimenta dicha partícula viene dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}), \quad (5.107)$$

y por tanto el trabajo eléctrico sobre la carga  $q$  cuando dicha carga se desplaza en presencia de un campo eléctrico entre los puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  está dado por:

$$W^E = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \left\{ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right\}. \quad (5.108)$$

**Ejemplo 5.8.** *Una partícula con carga  $q_j$  se ubica en una región donde existe un campo eléctrico definido por la expresión:*

$$\vec{E} = ax\hat{i} + by^2\hat{j} + cz\hat{j}, \quad (5.109)$$

donde  $a$  y  $c$  tienen unidades de  $N/(c \cdot m)$  y  $b$  unidades de  $N/c \cdot m^2$ . Para la situación planteada se encontrará el trabajo sobre la partícula cargada, cuando se traslada desde el punto  $(3.0m, 2.0m, 1.0m)$  al punto  $(-1.0m, 5.0m, 1.0m)$ .

**Solución:** A partir de la expresión (5.108) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 W &= q \left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) \\
 &= q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (ax\hat{i} + by^2\hat{j} + cz\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \\
 &= q \int_3^{-1} (axdx) + q \int_2^5 (by^2dy) + q \int_1^1 (czdz) \\
 &= qa \frac{x^2}{2} \Big|_3^{-1} + qb \frac{y^3}{3} \Big|_2^5 + qa \frac{z^2}{2} \Big|_1^1 \\
 &= q \left( 5am^2 + b \frac{133m^3}{3} + c(0) \right). \tag{5.110}
 \end{aligned}$$

## 5.4. Potencial eléctrico

Si se tiene un campo eléctrico generado por distribuciones de carga eléctrica, entonces la fuerza  $\vec{F} = q\vec{E}$  es conservativa (en tal circunstancia el campo eléctrico se denomina electrostático) y por lo tanto la integración del campo eléctrico expresada (5.108) depende solo de los puntos inicial y final (independiente de la trayectoria), lo que conlleva a que la integral definida en (5.108) tenga una expresión analítica, es decir:

$$\phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \left( - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right), \tag{5.111}$$

donde el signo menos en la integral para definir el potencial se incluye por convención. A partir de (5.111) se tiene

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \left( - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right), \tag{5.112}$$

La expresión analítica  $\phi(\vec{r})$  es una función escalar que se conoce como potencial eléctrico. Para que exista analíticamente la integral expresada en (5.111) es necesario que el campo eléctrico se relacione con el potencial eléctrico a través del gradiente de  $\phi(\vec{r})$ , tal que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \tag{5.113}$$

**Ejemplo 5.9.** Deducir la expresión (5.111) a partir de (5.113).

**Solución:** Reemplazando (5.113) en la la parte izquierda de la expresión (5.111) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left( \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\
 &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left( \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial z} dz \right) \\
 &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\phi(\vec{r}) = -\phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}, \tag{5.114}
 \end{aligned}$$

lo cual verifica el resultado expresado en (5.111) .

A partir de la expresión (5.111), tomando como puntos de integración  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_0$ , se tiene que

$$\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}'. \tag{5.115}$$

En (5.115) en el integrando se ha tomado  $r'$  como variable de integración, para poder utilizar  $\vec{r}$  como límite de integración. A partir de (5.115) se tiene que

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}' + \phi(\vec{r}_0). \tag{5.116}$$

La cantidad  $\phi(\vec{r}_0)$  representa el potencial eléctrico en el punto  $\vec{r}_0$ . Dicho valor es arbitrario y en general depende del origen elegido para el sistema de coordenadas. Respecto al potencial eléctrico, lo que se puede medir y tiene sentido físico, es la diferencia de potencial  $\Delta\phi = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ , valor que es independiente del origen escogido para el sistema de coordenadas que se esté utilizando. El valor  $\phi(\vec{r})$  dependerá del valor escogido para  $\phi(\vec{r}_0)$  y por tanto del origen de coordenadas establecido para medirlo. Para una distribución localizada de cargas (sea discreta o continua) el campo eléctrico evaluado muy lejos de dicha distribución es débil y tiende a cero si la distancia tiende a infinito, por lo anterior es viable considerar que el potencial es cero en el infinito y a partir de (5.116) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}' + \phi(\infty) \\
 &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}'. \tag{5.117}
 \end{aligned}$$

La ecuación (5.116) permite encontrar el potencial eléctrico en un punto  $\vec{r}$  a partir del conocimiento del campo eléctrico y del valor establecido para  $\phi(\vec{r}_0)$ . La expresión (5.117) brinda una opción para calcular el potencial eléctrico en una posición  $\vec{r}$  para distribuciones de carga localizadas en una región finita del espacio, donde se puede asumir que  $\phi(\vec{r}_0 \rightarrow \infty) = 0$ , en caso tal:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (5.118)$$

En términos del potencial eléctrico, teniendo en cuenta (5.112), el trabajo eléctrico descrito por (5.108) se puede escribir como

$$\begin{aligned} W^E &= q \left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) = -q \left( - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) \\ &= -q\Delta\phi, \end{aligned} \quad (5.119)$$

y ya que el trabajo eléctrico es igual a menos el cambio en la energía potencial, entonces

$$\Delta U = q\Delta\phi. \quad (5.120)$$

por lo tanto, se concluye que

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}). \quad (5.121)$$

A partir de (5.121) se tiene otra forma de calcular la energía potencial eléctrica asociada a una carga  $q$  si se conoce el valor del potencial eléctrico en la posición ocupada por la carga.

La expresión (5.121) deja la impresión que es posible definir el potencial eléctrico  $\phi(\vec{r})$ , en términos de la energía potencial que tendría una carga  $q$  ubicada en  $\vec{r}$ , simplemente dividiendo la energía potencial  $U(\vec{r})$  sobre  $q$ . Sin embargo, el potencial escalar es una función independiente de la carga  $q$ . Si se tiene una carga  $q$  en el punto  $\vec{r}$ , dicha carga influye en las características físicas del espacio y conceptualmente una simple división por  $q$  no es suficiente para eliminar su influencia en el espacio; a menos que dicha carga sea tan pequeña que no contribuya a modificar la estructura eléctrica del espacio en estudio; es decir, si  $q \rightarrow 0$ . Por lo tanto, se puede definir el potencial eléctrico en términos de la energía potencial a través de

$$\phi(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{U(\vec{r})}{q}. \quad (5.122)$$

La relación anterior se puede deducir también si se considera que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (5.123)$$

Ahora, al tener en cuenta que  $\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \vec{F}_q/q$  (donde  $\vec{F}_q$  representa la fuerza aplicada sobre una carga  $q$ ), y que  $\vec{F}_q = -\vec{\nabla}U$  (donde  $U$  representa la energía potencial eléctrica asociada a la carga  $q$ ) entonces se tiene que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q} = -\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla}U}{q}, \quad (5.124)$$

a partir de lo cual se puede establecer que:

$$\phi(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{U(\vec{r})}{q}. \quad (5.125)$$

De las definiciones anteriores es claro que el potencial no depende de la carga de prueba  $q$  y se debe a la presencia de otras cargas (discretas o continuas) en el espacio. A partir de (5.125), el potencial eléctrico tiene unidades de energía sobre carga eléctrica, en el sistema internacional se da en Julios/C, lo cual también se conoce como voltios (aunque voltios se refiere principalmente a diferencia de potencial eléctrico).

**Ejemplo 5.10.** *Un protón, localizado inicialmente en el infinito, se mueve con una velocidad  $v$  hacia un segundo protón. Asumiendo que el segundo protón está en reposo en un punto fijo, en este ejemplo se determinará la posición en la que el primer protón queda momentáneamente en reposo.*

**Solución:** *La energía inicial total asociada al protón en movimiento es:*

$$E_i = T_i + U_i, \quad (5.126)$$

donde la energía cinética inicial del primer protón es:

$$T_i = \frac{1}{2}mv^2, \quad (5.127)$$

en tanto que la energía potencial inicial del primer protón es:

$$U_i = q\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = q \lim_{r \rightarrow \infty} k_e \frac{q}{r} = 0, \quad (5.128)$$

de manera que:

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2. \quad (5.129)$$

Ahora, la energía final asociada al protón en movimiento, cuando se aproxima al segundo protón y queda momentáneamente en reposo a una cierta distancia  $R$ , es:

$$E_f = T_f + U_f = \frac{1}{2}mV_f^2 + q\phi(\vec{r} \rightarrow \vec{R}) = q \left( k_e \frac{q}{R} \right) = k_e \frac{q^2}{R}. \quad (5.130)$$

Ya que la única fuerza involucrada en el problema es la fuerza eléctrica, la energía mecánica se conserva y se tiene que

$$E_i = E_f, \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ \frac{1}{2}mv^2 &= k_e \frac{q^2}{R}. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Se concluye por lo tanto, que la distancia del primer protón en relación al segundo cuando se alcanza el reposo instantáneo es:

$$R = \frac{2k_e q^2}{mv^2}. \quad (5.133)$$

**Ejemplo 5.11.** Un electrón está sometido a un potencial unidimensional dado por:  $\phi(x) = Ax^2$ , donde  $A$  es una constante real positiva con unidades de energía por unidad carga y por unidad de área. Para dicho potencial se mostrará que el electrón realiza un movimiento armónico simple y se establecerá el periodo del movimiento.

**Solución:** Teniendo en cuenta la ecuación (5.121), se tiene que la energía potencial asociada al electrón sometido al potencial  $\phi(x) = Ax^2$ , vendrá dada por

$$U = e\phi(x) = eAx^2, \quad (5.134)$$

de manera que la fuerza a la cual está sometido el electrón es:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\hat{i}\frac{dU}{dx} = -\hat{i}\frac{d(eAx^2)}{dx} = -2eAx\hat{i}. \quad (5.135)$$

Al ser un movimiento limitado a lo largo del eje  $x$  se determina que,

$$\vec{F} = F_x\hat{i} = ma_x\hat{i}, \quad (5.136)$$

donde  $a_x$  indica la componente  $x$  de la aceleración y se expresa como:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (5.137)$$

de manera que:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}. \quad (5.138)$$

Así, la relación (5.135) se puede escribir como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} = -2eAx\hat{i}, \quad (5.139)$$

y por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2eAx, \quad (5.140)$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2eA}{m}x = 0. \quad (5.141)$$

Definiendo

$$\omega = \sqrt{\frac{2eA}{m}}, \quad (5.142)$$

la expresión (5.141) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (5.143)$$

La ecuación diferencial (5.143) corresponde a la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia  $\omega$ . Por lo tanto, se concluye que el electrón experimenta un movimiento de este tipo, cuya frecuencia está dada por  $\omega$  (ecuación (5.142)). En consecuencia, el periodo de oscilación es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2eA}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2eA}}. \quad (5.144)$$

**Ejemplo 5.12.** Considere un campo eléctrico uniforme dado por la expresión:  $\vec{E} = E_0\hat{k}$  ( $E_0 = \text{cte}$ ). Para tal situación, se encontrará  $\Delta\phi(r)$ , entre los puntos  $(-a, b, d)$  y  $(0, 0, 0)$ .

**Solución:** Para resolver la situación planteada, se parte de la relación (5.112) obteniendo:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (E_0\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \\ &= - \int_0^d (E_0 dz) = -E_0z \Big|_0^d = -E_0d. \end{aligned} \quad (5.145)$$

**Ejemplo 5.13.** Encontrar el potencial eléctrico generado por una partícula con carga  $q$  ubicada en el origen de coordenadas.

**Solución:** Como la carga está localizada en una región finita del espacio (concretamente en un punto), entonces el potencial eléctrico se puede determinar a partir de la ecuación (5.117), y se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \left( k_e \frac{q}{r'^2} \hat{r}' \right) \cdot d\vec{r}'. \quad (5.146)$$

Dado que el campo eléctrico es conservativo, se puede escoger una trayectoria de integración en (5.146) de manera que el campo eléctrico sea siempre perpendicular o paralelo al desplazamiento  $d\vec{r}'$ . En los tramos de la trayectoria donde el campo eléctrico sea perpendicular al desplazamiento, la integral se anula. Por lo tanto, la integral en estudio dependerá únicamente de los tramos en los cuales el campo eléctrico sea paralelo al desplazamiento. En estos tramos, se tiene que  $\vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = E dr'$ , entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \left( k_e \frac{q}{r'^2} \right) dr' \\ &= k_e \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^{\vec{r}} = k_e \frac{q}{r} - \lim_{r' \rightarrow \infty} k_e \frac{q}{r'},\end{aligned}\quad (5.147)$$

por lo tanto

$$\phi(\vec{r}) = k_e \frac{q}{r} \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.\quad (5.148)$$

El potencial eléctrico en el punto  $\vec{r}$  generado por una partícula con carga  $q$  ubicada en el punto  $\vec{r}_q$ , se puede escribir como:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}.\quad (5.149)$$

A partir de (5.149) se puede inferir el potencial en un punto  $\vec{r}$  debido a una distribución discreta de  $N$  partículas cargadas. En concreto, si se tiene  $N$  cargas  $q_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) ubicadas en posiciones descritas por  $\vec{r}_j$ , entonces el potencial eléctrico en un punto  $\vec{r}$  está dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N k_e \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}.\quad (5.150)$$

La expresión (5.150) se puede entender como la suma del potencial en el punto  $\vec{r}$ , generado por cada partícula ubicada en los puntos  $\vec{r}_j$ .

**Ejemplo 5.14.** Se tiene cuatro partículas con carga  $q_j$  ( $q_j = q \forall j = 1, 2, 3, 4$ ) ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $a$  extendido en el plano  $xy$  y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas (ver figura 5.12). Para la configuración descrita, se encontrará el potencial eléctrico en un punto a lo largo del eje  $z$ .

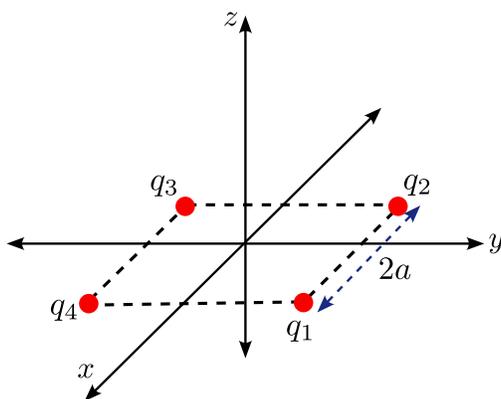


Figura 5.12: Ejemplo (5.14). Potencial eléctrico sobre el eje  $z$ , debido a cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado  $2a$ .

**Solución:** Aplicando la fórmula (5.150), se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \sum_{j=1}^4 k_e \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \\ &= k_e \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + k_e \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + k_e \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|} + k_e \frac{q_4}{|\vec{r} - \vec{r}_4|}.\end{aligned}\quad (5.151)$$

En este caso, se estableció que  $q_j = q$  para todo  $j = 1, 2, 3, 4$ . Las posiciones de las cuatro partículas estarán dadas por los vectores

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= a\hat{i} + a\hat{j}, & \vec{r}_2 &= -a\hat{i} + a\hat{j}, \\ \vec{r}_3 &= -a\hat{i} - a\hat{j}, & \vec{r}_4 &= a\hat{i} - a\hat{j},\end{aligned}\quad (5.152)$$

y la posición donde se evaluará el potencial eléctrico viene dado por el vector

$$\vec{r} = z\hat{k},\quad (5.153)$$

con lo cual, se tiene que:

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = | -z\hat{k} - a\hat{i} - a\hat{j} | = \sqrt{z^2 + 2a^2},\quad (5.154)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = | -z\hat{k} + a\hat{i} - a\hat{j} | = \sqrt{z^2 + 2a^2},\quad (5.155)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_3| = | -z\hat{k} + a\hat{i} + a\hat{j} | = \sqrt{z^2 + 2a^2},\quad (5.156)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_4| = | -z\hat{k} - a\hat{i} + a\hat{j} | = \sqrt{z^2 + 2a^2}.\quad (5.157)$$

Reemplazando los anteriores resultados en (5.151) se tiene que

$$\phi(\vec{r}) = 4k_e \frac{q}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}.\quad (5.158)$$

**Ejemplo 5.15.** Un sistema de seis cargas puntuales están localizadas en el perímetro de un rectángulo como se indica en la figura 5.13. Para el sistema dado, se evaluará en este ejemplo, el potencial en el centro del rectángulo.

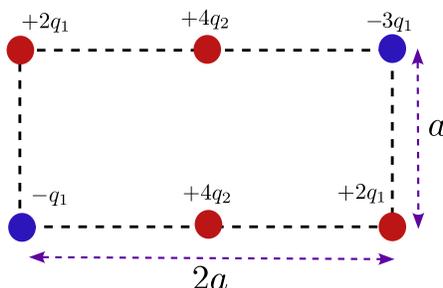


Figura 5.13: Ejemplo 5.15. Potencial eléctrico en el centro de un rectángulo debido a seis cargas puntuales.

**Solución:** Si se considera el origen de coordenadas en el centro del rectángulo, se puede identificar,

$$\vec{r} = \vec{0}. \quad (5.159)$$

Así, los vectores de posición que caracterizan cada una de las cargas son:

$$q'_1 = -3q_1 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_1 = a\hat{i} + a\hat{j} \quad (5.160)$$

$$q'_2 = 4q_2 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_2 = a\hat{j} \quad (5.161)$$

$$q'_3 = 2q_1 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_3 = -a\hat{i} + a\hat{j} \quad (5.162)$$

$$q'_4 = -q_1 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_4 = -a\hat{i} - a\hat{j} \quad (5.163)$$

$$q'_5 = 4q_2 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_5 = -a\hat{j} \quad (5.164)$$

$$q'_6 = 2q_1 \quad \rightarrow \quad \vec{r}_6 = a\hat{i} - a\hat{j} \quad (5.165)$$

lo que permitirá determinar:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = -a\hat{i} - a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{2}a, \quad (5.166)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = -a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_2| = a, \quad (5.167)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_3 = a\hat{i} - a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_3| = \sqrt{2}a, \quad (5.168)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_4 = a\hat{i} + a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_4| = \sqrt{2}a, \quad (5.169)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_5 = a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_5| = a, \quad (5.170)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_6 = -a\hat{i} + a\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_6| = \sqrt{2}a. \quad (5.171)$$

Así, el potencial asociado al sistema es:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^6 k_e \frac{q'_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \\ &= k_e \frac{q'_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + k_e \frac{q'_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + k_e \frac{q'_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|} + k_e \frac{q'_4}{|\vec{r} - \vec{r}_4|} \\ &\quad + k_e \frac{q'_5}{|\vec{r} - \vec{r}_5|} + k_e \frac{q'_6}{|\vec{r} - \vec{r}_6|} \\ &= k_e \frac{(-3q_1)}{\sqrt{2}a} + k_e \frac{(4q_2)}{a} + k_e \frac{(2q_1)}{\sqrt{2}a} + k_e \frac{(-q_1)}{\sqrt{2}a} + k_e \frac{(4q_2)}{a} + k_e \frac{(2q_1)}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{k_e}{a} \left( -\frac{3q_1}{\sqrt{2}} + 4q_2 + \frac{2q_1}{\sqrt{2}} - \frac{q_1}{\sqrt{2}} + 4q_2 + \frac{2q_1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{8k_e q_2}{a}. \end{aligned} \quad (5.172)$$

**Ejemplo 5.16.** Se tiene el siguiente potencial eléctrico dado por la expresión:

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + bx^2y + cxz^2, \quad (5.173)$$

donde  $(a, b, c)$  son constantes (la determinación de unidades para las constantes  $a, b$  y  $c$ , se deja como ejercicio para el lector). Para el potencial establecido se calculará el respectivo campo eléctrico y su valor en el punto definido por las coordenadas  $(1.0\text{m}, 0.0\text{m}, 1.0\text{m})$ .

**Solución:** Se sabe que el campo eléctrico se puede calcular a partir del potencial a través de la siguiente expresión:

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \quad (5.174)$$

Dado que el potencial en estudio está definido en coordenadas cartesianas, se calculará el gradiente en dichas coordenadas, tal que:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.175)$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= -\nabla\phi(x, y, z) \\ &= -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(x, y, z) \\ &= -\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z) - \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y, z) - \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\phi(x, y, z) \\ &= -\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + bx^2y + cz^2) - \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + bx^2y + cz^2) \\ &\quad - \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(ax^2 + bx^2y + cz^2) \\ &= -\hat{i}\left(a\frac{\partial x^2}{\partial x} + by\frac{\partial x^2}{\partial x} + cz^2\frac{\partial x}{\partial x}\right) - \hat{j}\left(bx^2\frac{\partial y}{\partial y}\right) \\ &\quad - \hat{k}\left(cx\frac{\partial z^2}{\partial z}\right) \\ &= -\left(2ax + 2bxy + cz^2\right)\hat{i} - \left(bx^2\right)\hat{j} - \left(2cxz\right)\hat{k}. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Por tanto, el valor del campo eléctrico en el punto (1.0m, 0.0m, 1.1m) es:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\left(2a \cdot m + c \cdot m^2\right)\hat{i} - b \cdot m^2\hat{j} - 2c \cdot m^2\hat{k}. \quad (5.177)$$

**Ejemplo 5.17.** El potencial eléctrico dentro de un tubo de longitud  $L = 10$  m y con eje de simetría orientado a lo largo del eje  $x$  está dado por:

$$\phi(x) = 2500(J/C) - 5x^2(J/C \cdot m^2), \quad (5.178)$$

Para la situación planteada se calculará:

- El campo eléctrico a lo largo del eje  $x$ .
- Para un protón ubicado en el punto  $x = 2.00$ m, se evaluará la aceleración del protón en el instante que se libera.
- Si en los extremos del tubo existe una placa metálica, se calculará la velocidad de impacto del protón con uno de los extremos del cilindro.

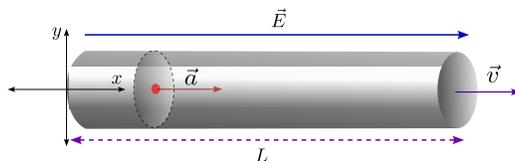


Figura 5.14: Ejemplo 5.17. Estudio de la energía eléctrica de un protón dentro de un tubo cilíndrico cargado.

### Solución:

- a) El campo eléctrico dentro del tubo es determinado a partir de (se omitirán por el momento las unidades):

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) &= -\nabla\phi(x) = -\hat{i}\frac{d\phi(x)}{dx} = -\hat{i}\frac{d}{dx}(2500 - 5x^2) \\ &= 5\frac{dx^2}{dx}\hat{i} = 10x\hat{i}.\end{aligned}\quad (5.179)$$

- b) La fuerza a la que estará sometido el protón en la presencia del campo eléctrico en estudio es:

$$\vec{F}(x) = q\vec{E}(x) = 10qx\hat{i}, \quad (5.180)$$

donde  $q$  corresponde a la carga del protón. La aceleración del protón se determina a partir de la segunda ley de Newton, tal que

$$\vec{F}(x) = q\vec{E}(x) = 10qx\hat{i} = m_p\vec{a}(x), \quad (5.181)$$

donde  $m_p$  corresponde a la masa del protón. Por lo tanto, la aceleración que adquiere el protón en cualquier punto del tubo es

$$\vec{a}(x) = \frac{10q}{m_p}x\hat{i}. \quad (5.182)$$

Por lo tanto, la aceleración del protón en  $x = 2.00$  m es:

$$\begin{aligned}\vec{a}(2) &= \frac{10q}{m_p}(2.0)\hat{i} = \frac{20.0q\hat{i}}{m_p} = \frac{20.0(1.602 \times 10^{-19})\hat{i}}{(1.67 \times 10^{-27})} \\ &= 1.27 \times 10^8 \frac{m}{s^2}\hat{i}.\end{aligned}\quad (5.183)$$

- c) La velocidad de impacto del protón se puede determinar a partir del principio de la conservación de la energía mecánica. La energía inicial corresponde a la energía del protón en  $x_i = 2.00$  m, de donde este se libera del reposo, de manera que:

$$\begin{aligned}E_i &= T_i + U_i = 0 + q\phi(x) \Big|_{x=2.0m} = (1.602 \times 10^{-19}) \left[ 2500 - 5(2)^2 \right] \\ &= 3.97 \times 10^{-16} \text{ J}.\end{aligned}\quad (5.184)$$

La energía final, corresponde a la energía del protón un instante antes del choque, cuando el protón lleva una velocidad  $v$ , de manera que:

$$\begin{aligned} E_f &= T_f + U_f = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi(x) \Big|_{x=10.00m} = \frac{1}{2}m_p v^2 + (1,602 \times 10^{-19}) [2500 - 5(10)^2] \\ &= \frac{1}{2}m_p v^2 + 3,20 \times 10^{-16} \text{ J}. \end{aligned} \quad (5.185)$$

Dado que en este caso la energía se conserva (solo hay presentes fuerzas conservativas), entonces

$$E_i = E_f, \quad (5.186)$$

↓

$$3,97 \times 10^{-16} \text{ J} = \frac{1}{2}m_p v^2 + 3,20 \times 10^{-16} \text{ J}, \quad (5.187)$$

con lo cual

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = 0,77 \times 10^{-16} \text{ J}, \quad (5.188)$$

es decir,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(0,77 \times 10^{-16} \text{ J})}{m_p}} = \sqrt{\frac{2(0,77 \times 10^{-16})}{(1,67 \times 10^{-27})}} \left(\frac{m}{s}\right) = \sqrt{0,92 \times 10^{11}} \frac{m}{s} \\ &= 3,03 \times 10^5 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (5.189)$$

**Ejercicio 5.6.** Calcular el potencial en el punto  $P$  debido a la distribución de carga indicada en la figura 5.15.

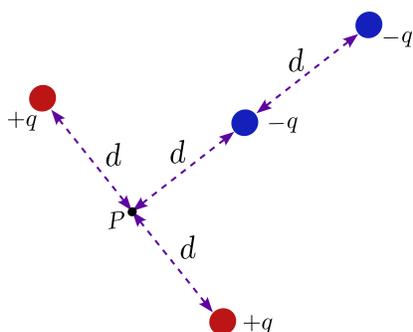


Figura 5.15: Ejercicio 5.6. Potencial eléctrico debido a cuatro cargas puntuales.

**Ejercicio 5.7.** Tres cargas idénticas  $q$  se localizan en el plano  $xy$ . Dos de ellas se encuentran en  $x = \pm b$  en tanto que la tercera se ubica en  $y = a$ . Para la configuración descrita encontrar: a) El potencial eléctrico sobre cualquier punto a lo largo del eje  $y$ . b) El campo eléctrico sobre cualquier punto a lo largo del eje  $y$ , derivando dicho resultado a partir del potencial eléctrico encontrado en el literal a). c) Analizar el comportamiento del potencial y del campo eléctrico sobre eje  $y$ , tomando  $y \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 5.8.** En un punto del plano  $xy$ , el potencial eléctrico es dado por la expresión:

$$\phi(x, y) = axy + bx^2y^2, \quad (5.190)$$

A partir de (5.190):

- Determinar las unidades de las constantes  $a$  y  $b$  incluidas en la expresión del potencial eléctrico.
- Evaluar el potencial en los puntos  $(1.00 \text{ m}, 1.00 \text{ m})$  y  $(2.00 \text{ m}, 3.00 \text{ m})$ , tomando que:  $a = 4.0$  y  $b = 2.5$  (las unidades de  $a$  y  $b$ , se determinan en el ítem anterior).
- Calcular el campo eléctrico en los puntos  $(1.00 \text{ m}, 1.00 \text{ m})$  y  $(2.00 \text{ m}, 3.00 \text{ m})$ , tomando que:  $a = 4.0$  y  $b = 2.5$ .

**Ejercicio 5.9.** Calcular el potencial eléctrico en un punto a lo largo del eje  $z$ , para las distribuciones de carga y ubicaciones descritas gráficamente en: a) figura 5.16a, b) Figura 5.16b, c) figura 5.16c, d) figura 5.16d; si la magnitud de  $q = 5.0 \mu\text{C}$ , y  $a = 2.5\text{m}$ .

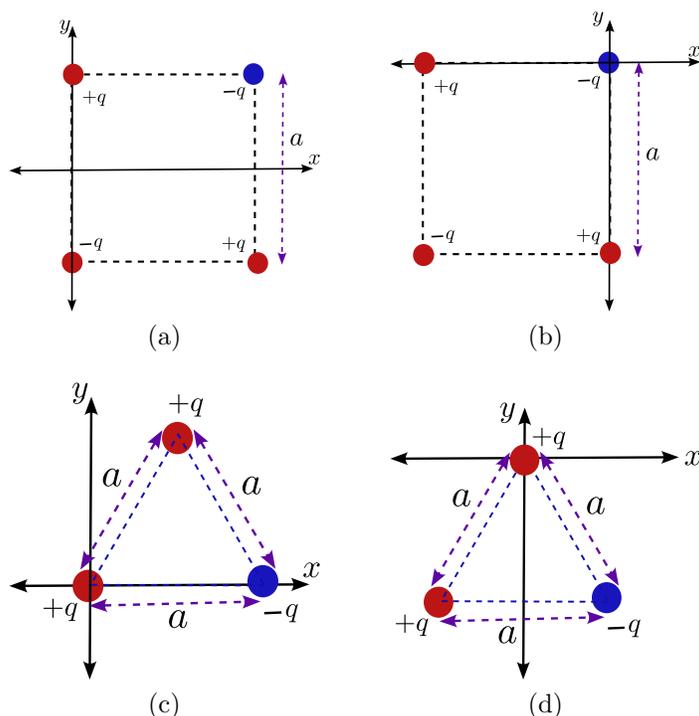


Figura 5.16: Ejercicio (5.9). Potencial eléctrico para diferentes arreglos de cargas puntuales.

**Ejercicio 5.10.** Dos cargas puntuales positivas de valor  $q$  están localizadas a lo largo del eje  $y$ , en los puntos  $y = \pm b$ , con una separación entre las cargas de valor  $a$ . Para el sistema descrito: a) Evaluar el potencial en un punto del eje  $x$ . b) Determinar el comportamiento para puntos distantes, es decir cuando  $x \gg a$ .

**Ejercicio 5.11.** Encontrar el potencial eléctrico en un punto a lo largo del eje  $z$  debido a la distribución de cargas descrita en la figura 5.17.

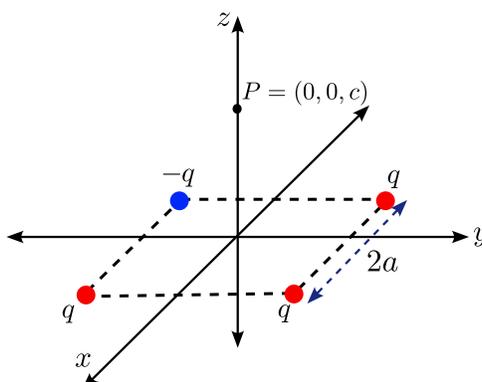


Figura 5.17: Ejercicio 5.11. Potencial eléctrico debido a 4 cargas puntuales.

**Ejercicio 5.12.** En el ejemplo 5.16 determinar las dimensiones de las constantes  $(a, b, c)$ .

**Ejercicio 5.13.** Determinar el campo eléctrico correspondiente a la configuración de cargas definida en el ejercicio 5.10.

**Ejercicio 5.14.** Un dipolo eléctrico es definido como un sistema de dos cargas puntuales iguales y opuestas de valor  $q$  y separadas a una distancia  $L$ . El dipolo se ubica de tal manera que el origen de coordenadas corresponde al punto medio de las cargas y estas se ubican a lo largo del eje  $y$  (ver Figura 5.18). Sea  $\vec{r}$  el vector de posición medido desde el origen de coordenadas a un punto arbitrario y donde  $\theta$  caracteriza el ángulo formado entre el vector  $\vec{r}$  y el eje  $z$  positivo. Para el sistema planteado, encuentre el potencial eléctrico y demuestre que para puntos distantes al dipolo ( $r \gg L$ ), el potencial se puede expresar como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{k_e p \cos \theta}{r^2}, \quad (5.191)$$

donde  $p = 2Lq$ , corresponde al momento dipolar eléctrico del sistema.

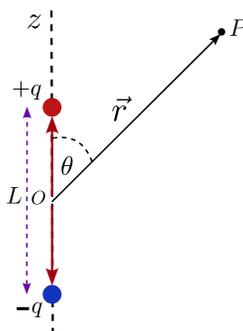


Figura 5.18: Ejercicio 5.14. Potencial eléctrico debido a un dipolo eléctrico.

**Ejercicio 5.15.** Calcular el campo eléctrico correspondiente al dipolo eléctrico descrito en el Ejercicio 5.14.

### 5.4.1. Distribuciones continuas de carga

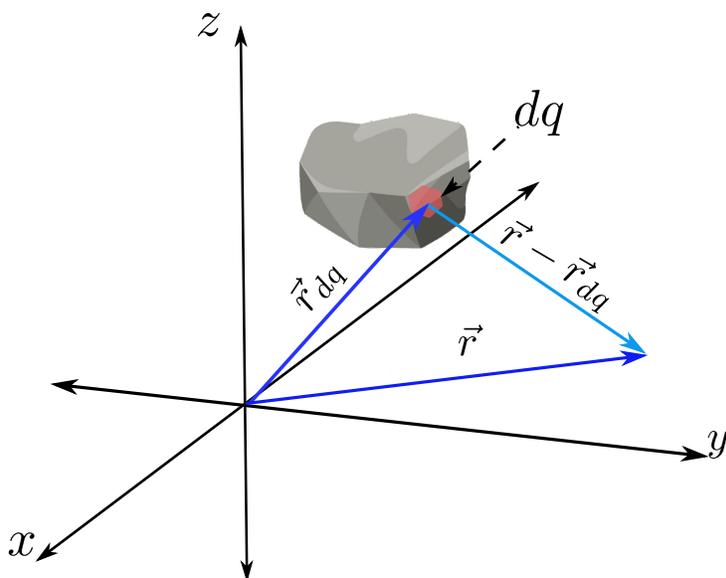


Figura 5.19: Potencial eléctrico asociado a una distribución continua de carga.

Para encontrar el potencial en un punto  $\vec{r}$  debido a una carga  $Q$  distribuida sobre un volumen  $V$ , se procede buscando en primer lugar el potencial  $d\phi$  asociado a un elemento diferencial de carga  $dq'$  ubicado en la posición  $\vec{r}'$  (ver figura 5.19). Para un elemento diferencial de carga  $dq'$ , el potencial viene dado por la expresión (5.149), y se tiene que

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.192)$$

El potencial total se puede obtener mediante integración de (5.192), tal que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int_Q \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.193)$$

La geometría de cada problema define la integral presente en (5.193). Para una mejor comprensión de la ecuación (5.193) en el cálculo de potenciales eléctricos, a continuación, se presentan algunos ejemplos de su uso.

**Ejemplo 5.18.** *En este ejemplo se calculará el potencial eléctrico en el origen de coordenadas, asociado a una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre un alambre en forma semicircular. El objeto semicircular cargado tiene radio  $R$  y se ubica en el plano  $xy$  como se indica en la figura 5.20.*

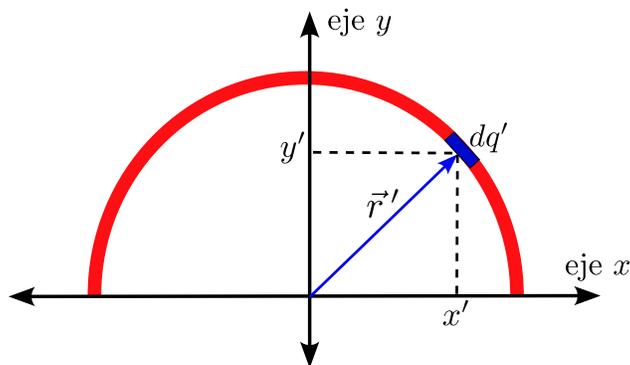


Figura 5.20: Ejemplo (5.18). Potencial eléctrico asociado a un semicírculo de carga  $Q$ .

**Solución:** Para resolver el problema se escoge un elemento de carga  $dq'$  sobre el alambre semicircular, tal que el potencial eléctrico asociado al elemento  $dq'$  vendrá dado por (5.19):

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.194)$$

donde el vector  $\vec{r}$  representa la posición en la que se va a calcular el potencial, que en este caso corresponde al origen de coordenadas, por lo tanto

$$\vec{r} = \vec{0}. \quad (5.195)$$

El vector  $\vec{r}'$  corresponde a la posición del elemento  $dq'$ , y según la figura 5.20, vendrá dado por

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}, \quad (5.196)$$

con lo cual

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |-\vec{r}'| = |-x'\hat{i} - y'\hat{j}| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = R. \quad (5.197)$$

El resultado anterior indica que  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  corresponde al radio del semicírculo, el cual permanece constante a lo largo del alambre semicircular. Dado que este valor no cambia durante la integración necesaria para evaluar el potencial eléctrico, se puede considerar como una constante en el proceso de integración, por lo tanto:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq'}{R} = \frac{k_e}{R} \int dq' = \frac{k_e Q}{R}. \quad (5.198)$$

En (5.198) se ha tenido en cuenta que  $R$  es una constante en la integración y que  $\int dq' = Q$ . Reemplazando  $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , finalmente se tiene que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (5.199)$$

**Ejemplo 5.19.** Una varilla de plástico ha sido deformada para generar un círculo de radio  $R$ , como se muestra en la figura 5.21. La varilla posee una carga  $Q_1$  distribuida de manera uniforme a lo largo de un cuarto de la circunferencia. El resto de la circunferencia posee una carga  $Q_2 = -2Q_1$ , también distribuida uniformemente. Para la configuración planteada, en este ejemplo se determinará el potencial en el centro del círculo.

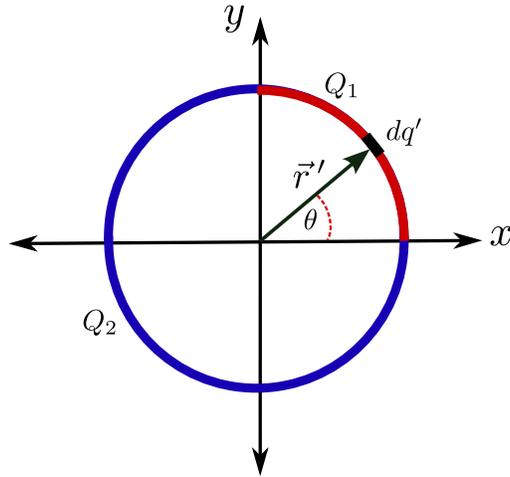


Figura 5.21: Ejemplo 5.19. Potencial eléctrico de un círculo cargado dividido en dos secciones con carga  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente.

**Solución:** El potencial asociado a esta distribución de carga se evalúa a partir de la expresión:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.200)$$

Se toma como origen de coordenadas el centro del círculo y por lo tanto, para el punto donde se evaluará el potencial eléctrico, se tiene que:

$$\vec{r} = \vec{0}. \quad (5.201)$$

Por otra parte, el vector  $\vec{r}'$  corresponde al vector de posición de cualquier punto sobre el anillo en estudio, cuya magnitud es constante e igual a  $R$  (por tratarse de un círculo), con lo anterior se tiene que:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |-\vec{r}'| = R, \quad (5.202)$$

de manera que,

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq}{R} = \frac{k_e}{R} \int dq, \quad (5.203)$$

donde la integral suma la carga distribuida en la circunferencia, de manera que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{k_e}{R} \left\{ \int dq \right\}. \quad (5.204)$$

La integral  $\int dq$ , corresponde a la carga neta en el anillo; es decir,  $\int dq = Q_1 + Q_2$ , con lo cual se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{k_e}{R} (Q_1 + Q_2) = \frac{k_e}{R} (Q_1 - 2Q_1) = -\frac{k_e Q_1}{R}. \quad (5.205)$$

**Ejemplo 5.20.** Se tiene una barra de longitud  $L$ , la cual se extiende a lo largo del eje  $z$  con una carga  $Q$  uniformemente distribuida sobre su longitud (ver figura 5.22). Para la configuración planteada, en este ejemplo se evaluará el potencial eléctrico en un punto sobre el eje  $x$ , es decir:  $\vec{r} = x\hat{i}$ .

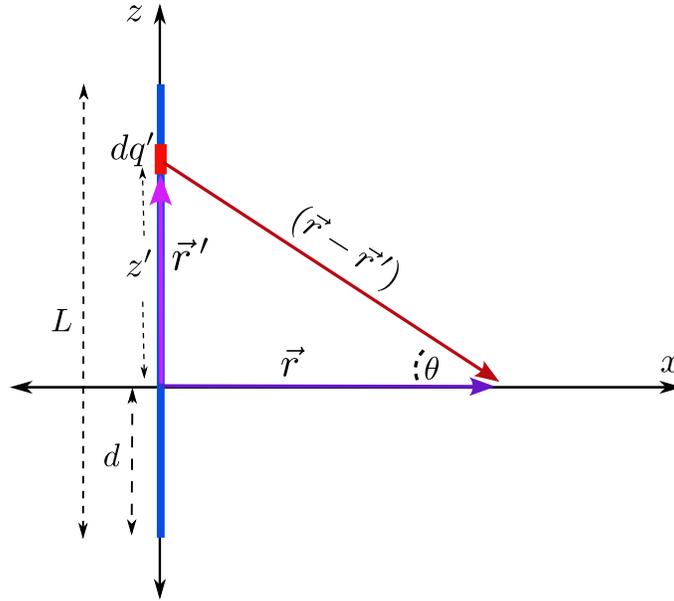


Figura 5.22: Ejemplo (5.20). Potencial eléctrico sobre el eje  $x$  asociado a un cable recto cargado con densidad de carga uniforme.

**Solución:** Para encontrar el potencial eléctrico, en primer lugar se toma un elemento de carga  $dq'$  sobre la barra, cuya posición se determina por el vector  $\vec{r}' = z'\hat{k}$ , como se describe esquemáticamente en la figura 5.22, con lo cual, se tiene que

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |x\hat{i} - z'\hat{k}| = \sqrt{x^2 + z'^2}, \quad (5.206)$$

por lo tanto, el potencial eléctrico  $d\phi(\vec{r})$  (ver 5.19), vendrá dado por:

$$\begin{aligned} d\phi(\vec{r}) &= k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= k_e \frac{dq'}{\sqrt{x^2 + z'^2}}. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Ahora, la carga  $dq'$  puede ser escrita en función de la densidad de carga lineal  $\lambda$ , con lo cual

$$dq' = \lambda dz'. \quad (5.208)$$

Con lo anterior el potencial eléctrico total se obtiene al integrar (5.207), y se puede escribir como:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \int_{-d}^{L-d} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}}. \quad (5.209)$$

La integral presente en (5.209) se encuentra resuelta en el apéndice (??) en la ecuación (??), a partir de la cual se tiene que:

$$\int_{-d}^{L-d} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}} = \ln \left( \frac{z + \sqrt{z^2 + x^2}}{x} \right) \Big|_{-d}^{L-d}. \quad (5.210)$$

donde los límites en (5.210) se han definido teniendo en cuenta que el punto más “bajo” de la barra se encuentra a una distancia  $-d$  respecto al origen de coordenadas sobre el eje  $z$ , y el punto más “alto” de la barra se encuentra a una distancia  $(L - d)$  respecto al origen de coordenadas sobre el eje  $z$ . Reemplazando el resultado expresado en (5.210) en (5.209), se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \left\{ \ln \left( \frac{(L - d) + \sqrt{(L - d)^2 + x^2}}{x} \right) - \ln \left( \frac{-d + \sqrt{d^2 + x^2}}{x} \right) \right\}. \quad (5.211)$$

**Ejemplo 5.21.** Una varilla de longitud  $L$  descansa sobre el eje  $x$  como se indica en la figura 5.23, con un extremo anclado en el origen. La varilla posee una densidad lineal de carga distribuida de manera no uniforme definida por:  $\lambda = \alpha x$ , donde  $\alpha$  es una constante positiva con unidades de carga por unidad de área. Para la situación descrita, se encontrará el potencial en el punto  $B$  indicado en la figura 5.23.

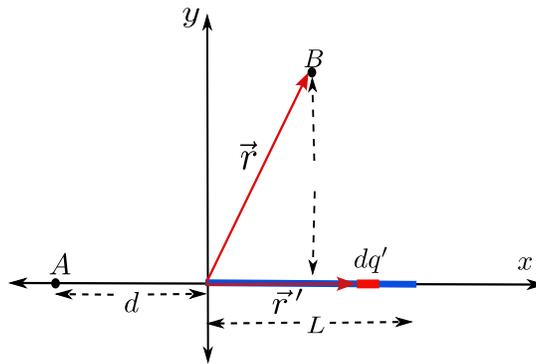


Figura 5.23: Ejemplo 5.21. Potencial asociado a un varilla cargada extendida sobre el eje  $x$ .

**Solución:** Si se considera el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la barra, se puede determinar que el vector de posición asociado al punto  $b$  donde se evalúa el potencial vendrá dado por:

$$\vec{r} = \frac{L}{2} \hat{i} + b \hat{j}. \quad (5.212)$$

Ahora, el vector de posición para un elemento infinitesimal de carga  $dq'$  tomado de la barra cargada (ver figura 5.23), está dado por:

$$\vec{r}' = x \hat{i}, \quad (5.213)$$

de manera que:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \left(\frac{L}{2} - x'\right) \hat{i} + b \hat{j}, \quad (5.214)$$

con lo cual

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left[ \left(\frac{L}{2} - x'\right)^2 + b^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.215)$$

Por otro lado, en términos de la densidad lineal de carga, el elemento  $dq'$  se escribe como,

$$dq' = \lambda dl = \alpha x' dx'. \quad (5.216)$$

Por lo tanto, el potencial electrostático debido a la distribución de carga considerada se expresa como:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k_e \int_0^L \frac{\alpha x' dx'}{\left[\left(\frac{L}{2} - x'\right)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}} = k_e \alpha \int_0^L \frac{x' dx'}{\left[\left(\frac{L}{2} - x'\right)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.217)$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\mu = \frac{L}{2} - x' \implies x' = \frac{L}{2} - \mu \implies d\mu = -dx', \quad (5.218)$$

los límites de integración en la variable  $\mu$  son:

$$x = 0 \implies \mu = \frac{L}{2} - 0 = \frac{L}{2}, \quad (5.219)$$

$$x = L \implies \mu = \frac{L}{2} - L = -\frac{L}{2}, \quad (5.220)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= k_e \alpha \int_0^L \frac{x dx}{\left[\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}} = k_e \alpha \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{L}{2} - \mu\right) (-d\mu)}{(\mu^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{k_e \alpha L}{2} \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \frac{d\mu}{(\mu^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + k_e \alpha \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.221)$$

La primera integral presente en (5.221) se evalúa en el apéndice (??) y su resultado se da en la expresión (??). La segunda integral se resuelve en forma directa (con un reemplazo  $\omega = \sqrt{\mu^2 + b^2}$ ), de tal manera que se tiene:

$$\int \frac{d\mu}{(\mu^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} = \ln\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + b^2}\right), \quad (5.222)$$

$$\int \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\mu^2 + b^2}, \quad (5.223)$$

a partir de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= -\frac{k_e \alpha L}{2} \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 + b^2}) \Big|_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} + k_e \alpha \sqrt{\mu^2 + b^2} \Big|_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \\
 &= -\frac{k_e \alpha L}{2} \left[ \ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}\right) - \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}\right) \right] \\
 &\quad + k_e \alpha \left[ \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2} \right] \\
 &= \frac{k_e \alpha L}{2} \left[ \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}\right) - \ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}\right) \right], \quad (5.224)
 \end{aligned}$$

es decir, el potencial debido a la barra en el punto  $B$  es dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{k_e \alpha L}{2} \ln \left[ \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + b^2}} \right]. \quad (5.225)$$

**Ejemplo 5.22.** Un alambre con densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ , se dobla como se muestra en la figura 5.24. Se determinará el potencial eléctrico en el centro del curvatura de la parte semicircular del alambre.

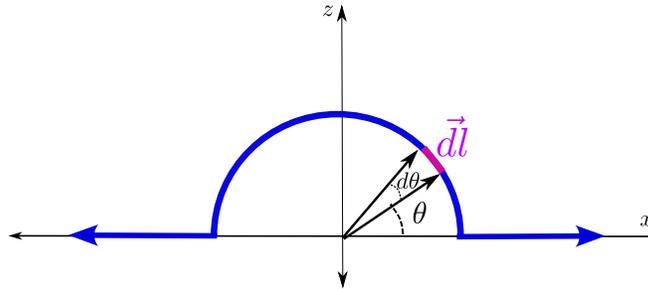


Figura 5.24: Ejemplo 5.22. Potencial eléctrico de un alambre con dos secciones rectas y una sección circular.

**Solución:** El potencial se puede evaluar dividiendo la trayectoria en tres tramos: tramo recto desde  $x = -R$  hasta  $x \rightarrow -\infty$ ; que se denominara como  $C_1$ , tramo semicircular comprendido desde  $x = -R$  hasta  $x = R$ ; que se denominara como  $C_2$ , tramo recto desde  $x = R$  hasta  $x \rightarrow \infty$ ; que se denominara como  $C_3$ . A partir de lo anterior el potencial eléctrico se puede determinar a partir de:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k_e \int_{C_1} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \int_{C_2} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \int_{C_3} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.226)$$

Siendo que la carga se define en términos de una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$  se puede expresar:

$$dq = \lambda dl, \quad (5.227)$$

de manera que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \int_{C_1} \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \lambda \int_{C_2} \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \lambda \int_{C_3} \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.228)$$

Ahora, si se considera el origen de coordenadas en el punto  $O$ , se determina que:

$$\vec{r} = 0, \quad (5.229)$$

de manera que

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\vec{r}', \quad (5.230)$$

con lo cual,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |-\vec{r}'| = r', \quad (5.231)$$

entonces,

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \int_{C_1} \frac{dl}{r'} + k_e \lambda \int_{C_2} \frac{dl}{r'} + k_e \lambda \int_{C_3} \frac{dl}{r'}. \quad (5.232)$$

Para el segmento  $C_1$  se entiende que:

$$dl = dx, \quad r' = x, \quad (5.233)$$

con lo cual:

$$\int_{C_1} \frac{dl}{r'} = \int_{-R}^{-3R} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{-R}^{-3R} = \ln \frac{-3R}{-R} = \ln 3. \quad (5.234)$$

De manera similar, para el segmento  $C_3$  resulta:

$$dl = dx, \quad r' = x, \quad (5.235)$$

con lo cual,

$$\int_{C_3} \frac{dl}{r'} = \int_R^{3R} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_R^{3R} = \ln \frac{3R}{R} = \ln 3. \quad (5.236)$$

Finalmente, para el segmento  $C_2$  se cumple:

$$dl = R d\theta, \quad r' = R, \quad (5.237)$$

con lo cual:

$$\int_{C_2} \frac{dl}{r'} = \int_0^\pi \frac{R d\theta}{R} = \int_0^\pi d\theta = \pi. \quad (5.238)$$

Por tanto, el potencial debido a la distribución de carga considerada es:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= k_e \lambda \int_{C_1} \frac{dl}{r'} + k_e \lambda \int_{C_2} \frac{dl}{r'} + k_e \lambda \int_{C_3} \frac{dl}{r'} \\ &= k \lambda (\ln 3) + k \lambda (\pi) + k \lambda (\ln 3) \\ &= k \lambda (\pi + 2 \ln 3). \end{aligned} \quad (5.239)$$

**Ejemplo 5.23.** En este ejemplo, se calculará el potencial eléctrico en un punto  $P$  definido por el vector  $\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$ , debido a una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre un alambre de longitud  $L$  que se extiende sobre un eje paralelo al eje  $z$ . La disposición relativa entre el alambre lineal, el punto  $P$  y el sistema de coordenadas se ilustra en la figura 5.25. A partir del potencial obtenido, se evaluará también el campo eléctrico en el punto  $P$ . Finalmente, se considerarán casos particulares como un alambre situado simétricamente respecto al eje  $x$  y un cable de longitud infinita.

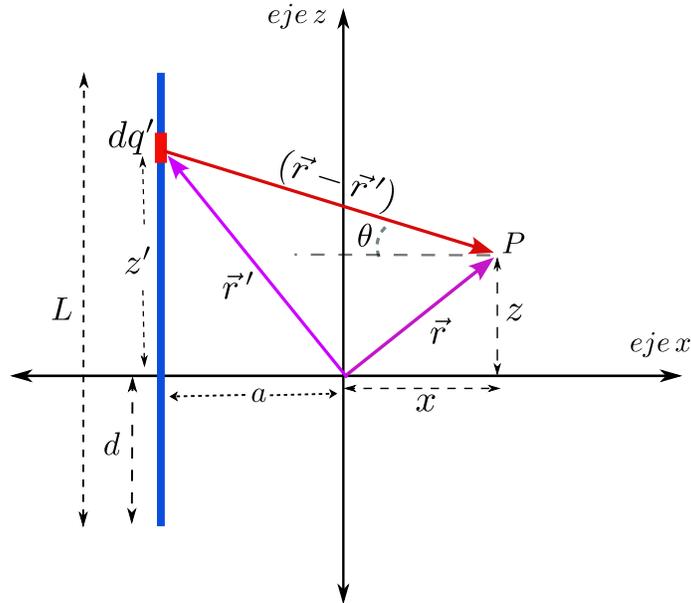


Figura 5.25: Ejemplo (5.23). Potencial eléctrico asociado a un cable recto de densidad de carga uniforme.

**Solución:** El diferencial de potencial eléctrico asociado a un elemento de carga  $dq'$  tomado sobre la barra en estudio, está definido por (ver 5.19):

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.240)$$

Como la carga total  $Q$  está distribuida uniformemente a lo largo de la longitud  $L$ , se puede expresar  $dq'$  a través de la distribución lineal de carga  $\lambda$ , ya que  $dq' = \lambda dz'$ , y por lo tanto:

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{\lambda dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.241)$$

En (5.241) el vector  $\vec{r}'$  define la posición del elemento diferencial  $dq'$  y el vector  $\vec{r}$  la posición en la cual se va a evaluar el potencial, que teniendo en cuenta la figura 5.25 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= -a\hat{i} + z'\hat{k}, \\ \vec{r} &= x\hat{i} + z\hat{k}, \end{aligned} \quad (5.242)$$

por lo tanto,

$$\vec{r} - \vec{r}' = (a + x)\hat{i} + (z - z')\hat{k} \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = ((a + x)^2 + (z - z')^2)^{1/2}. \quad (5.243)$$

Al reemplazar (5.243) en (5.241) e integrar, se tiene:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{\lambda dz'}{((a + x)^2 + (z - z')^2)^{1/2}}. \quad (5.244)$$

La integral presente en (5.244) se puede realizar tomando

$$a + x = b, \quad (5.245)$$

$$z' - z = u. \quad (5.246)$$

Realizando los reemplazos indicados en (5.245) y (5.246) en la expresión (5.244), se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int_{-(z+d)}^{L-(z+d)} \frac{\lambda du}{(b^2 + u^2)^{1/2}}. \quad (5.247)$$

Los límites de integración en (5.247) se han establecido teniendo en cuenta que según el origen del sistema cartesiano que se está trabajando, el extremo superior de la barra queda a una distancia  $L - d$  (y por tanto  $u_{max} = L - d - z$ ), y el extremo inferior a una distancia  $(-d)$  respecto al origen (y por tanto  $u_{min} = -d - z$ ). Ahora, la integral en (5.247) tiene la solución (ver (??)):

$$\int_{-(z+d)}^{L-(z+d)} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{1/2}} = \ln \left( z + \sqrt{z^2 + b^2} \right) \Big|_{-(z+d)}^{L-(z+d)}, \quad (5.248)$$

por lo tanto

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \int_{-(z+d)}^{L-(z+d)} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{1/2}} = k_e \lambda \ln \left( \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2}}{b} \right) \Big|_{-(z+d)}^{L-(z+d)}. \quad (5.249)$$

Evaluando en los límites de integración y teniendo en cuenta que  $b = (x + a)$ , finalmente se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \lambda \ln \left( \frac{\sqrt{(L - (z + d))^2 + (x + a)^2} + (L - (z + d))}{\sqrt{(z + d)^2 + (x + a)^2} - (z + d)} \right). \quad (5.250)$$

Ahora, para encontrar el campo eléctrico a partir del potencial eléctrico, se tiene en cuenta la relación

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}), \quad (5.251)$$

con lo cual:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_e \lambda \vec{\nabla} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{(L - (z + d))^2 + (x + a)^2} + (L - (z + d))}{\sqrt{(z + d)^2 + (x + a)^2} - (z + d)} \right) \right). \quad (5.252)$$

El potencial eléctrico evaluado sobre el eje  $x$  no depende de  $y$  (como se observa en (5.250)), por lo tanto, la derivada parcial del potencial con respecto a la variable  $y$  es cero y en consecuencia el campo eléctrico no tiene componente en dirección  $y$  (cuando se evalúa sobre el eje  $x$ ). En ese caso, el campo eléctrico en el punto  $P$  solo tendrá dos componentes:  $E_x$  y  $E_z$ , y están dadas por:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= -k_e \lambda \frac{d}{dx} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{(L - (z + d))^2 + (x + a)^2} + (L - (z + d))}{\sqrt{(z + d)^2 + (x + a)^2} - (z + d)} \right) \right), \\ E_z(\vec{r}) &= -k_e \lambda \frac{d}{dz} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{(L - (z + d))^2 + (x + a)^2} + (L - (z + d))}{\sqrt{(z + d)^2 + (x + a)^2} - (z + d)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.253)$$

Realizando las derivadas correspondientes en (5.253) y realizando algunas simplificaciones algebraicas, se tiene que:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{k_e \lambda}{a + x} \left( \frac{L - d - z}{\sqrt{(a + x)^2 + (L - d - z)^2}} + \frac{d + z}{\sqrt{(a + x)^2 + (d + z)^2}} \right), \quad (5.254)$$

$$E_z(\vec{r}) = -k_e \lambda \left( \frac{1}{\sqrt{(a + x)^2 + (d + z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a + x)^2 + (L - d - z)^2}} \right). \quad (5.255)$$

A partir de los resultados obtenidos para el potencial y las componentes del campo eléctrico, se pueden estudiar algunos casos particulares, como por ejemplo:

1. Si el alambre se extiende justo sobre el eje  $z$  y el punto  $P$  se encuentra sobre el eje  $x$ , entonces  $a = 0$  y  $z = 0$  (ver figura 5.26), por lo tanto, a partir de (5.250), (5.254) y (5.255) se tiene que:

$$\phi(x) = k_e \lambda \ln \left( \frac{\sqrt{(L - d)^2 + x^2} + (L - d)}{\sqrt{d^2 + x^2} - d} \right), \quad (5.256)$$

$$E_x(x) = \frac{k_e \lambda}{x} \left( \frac{L - d}{\sqrt{x^2 + (L - d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right), \quad (5.257)$$

$$E_z(x) = -k_e \lambda \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (L - d)^2}} \right). \quad (5.258)$$

El caso particular que se ha analizado, tiene las características asociadas al ejemplo (5.20) y se evidencia que el resultado expresado en (5.211) es igual al deducido para el potencial eléctrico en (5.256). Es importante mencionar que no es posible obtener la componente  $E_z$  del campo eléctrico mediante aplicación del gradiente sobre (5.256), dado que en (5.256) ya se ha eliminado la variable  $z$ ; es necesario primero aplicar el gradiente sobre el potencial eléctrico en (5.250) y luego el reemplazo de  $z = 0$ .

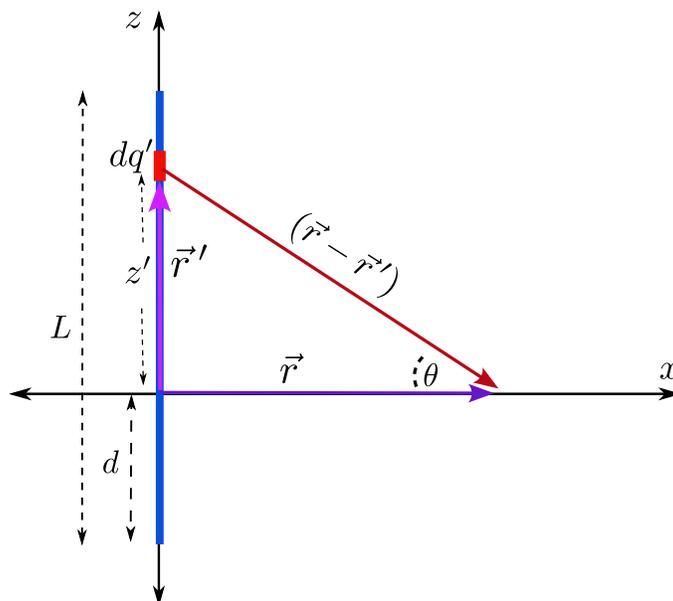


Figura 5.26: Ejemplo (5.23). Potencial eléctrico sobre el eje  $x$  asociado a un cable recto de densidad de carga uniforme.

2. En este caso, además de las consideraciones impuestas en el ítem anterior, se considera simetría respecto al eje  $x$ , tal que  $d = L/2$ . Reemplazando  $d = L/2$  en (5.256), (5.257) y (5.258), se tiene que:

$$\phi(x) = k_e \lambda \ln \left( \frac{\sqrt{L^2/4 + x^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4 + x^2} - L/2} \right), \quad (5.259)$$

$$E_x(\vec{r}) = \frac{k_e \lambda L}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + L^2/4}} \right), \quad (5.260)$$

$$E_z(\vec{r}) = 0. \quad (5.261)$$

La simetría del problema explica la cancelación de la componente del campo eléctrico en dirección  $z$ .

3. Ahora se considera la situación en la cual el cable tenga una longitud infinita. En ese caso, primero se encuentra el campo eléctrico tomando  $L \rightarrow \infty$  en (5.260), y partir de este resultado se calcula el potencial eléctrico. No es posible encontrar el potencial haciendo  $L \rightarrow \infty$  en (5.259), lo cual se explica al final de este ítem.

Si  $L \rightarrow \infty$ , entonces (5.260) se puede escribir como:

$$E_x(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{k_e \lambda L}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + L^2/4}} \right) = \frac{2k_e \lambda}{x}. \quad (5.262)$$

por lo tanto, la componente  $E_x$  para un punto cualquiera sobre el eje  $x$ , se puede escribir como:

$$E_x(x) = \frac{2k_e \lambda}{x}. \quad (5.263)$$

Para encontrar el potencial eléctrico, se parte de la relación

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (5.264)$$

que se puede escribir como

$$\vec{E} = - \left( \frac{d\phi}{dx} \hat{i} + \frac{d\phi}{dy} \hat{j} + \frac{d\phi}{dz} \hat{k} \right). \quad (5.265)$$

Debido a la simetría planteada en este ítem, solo existe componente en dirección  $x$  para el campo eléctrico, la cual vendrá dada por

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx}. \quad (5.266)$$

Al considerar el resultado expresado en (5.263), se tiene que:

$$\frac{2k_e \lambda}{x} = -\frac{d\phi}{dx}. \quad (5.267)$$

Al despejar  $d\phi$  e integrar en  $x$  (se utilizará  $x'$  como variable de integración para poner  $x$  como límite de integración), se tiene que

$$\int_{x_0}^x d\phi(x') = - \int_{x_0}^x \frac{2k_e \lambda}{x'} dx' \quad (5.268)$$

$$\Rightarrow \phi(x) - \phi(x_0) = 2k_e \lambda \ln \frac{x_0}{x}. \quad (5.269)$$

Antes de continuar, es importante tener en cuenta que cuando se encuentra el potencial en un punto  $P$ , en realidad se está calculando la diferencia de potencial entre el punto

$P$  y un punto de referencia. Hasta ahora se había asumido que dicho punto se encuentra en el infinito. Es decir, se había tomado que:

$$\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (5.270)$$

La consideración (5.270) es razonable para objetos de dimensiones finitas, ya que si se está lo suficiente lejos del objeto, el efecto de su carga eléctrica debe disminuir y por tanto es apropiado considerar cualquier efecto producido por la carga como cero. Lo anterior no es cierto si el objeto tiene su carga distribuida en una región infinita del espacio (los efectos de la carga no disminuirán aún considerando puntos muy alejados del objeto en estudio). Por lo anterior, cuando se trabaja con objetos que tienen dimensiones infinitas, como en el caso contemplado en este ítem, es apropiado considerar el potencial cero en un punto finito del espacio. En (5.269) se puede elegir convenientemente un punto de referencia para el potencial eléctrico, por ejemplo:

$$\phi(x_0) \rightarrow 0, \quad (5.271)$$

por lo tanto:

$$\phi(x) = 2k_e \lambda \ln \frac{x_0}{x}. \quad (5.272)$$

El resultado descrito por (5.272) no es posible obtenerlo haciendo  $L \rightarrow \infty$  en (5.256), ya que (5.256) tenía como premisa que  $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , que como ya se explicó, no es conveniente para objetos de dimensiones infinitas.

**Ejemplo 5.24.** En este ejemplo, se considera el potencial eléctrico generado por un anillo de carga total  $Q$  y radio  $R$ , situado en el plano  $xz$ . El punto  $P$ , donde se calcula el potencial, se encuentra a una distancia  $y$  del centro del anillo y sobre un eje perpendicular al plano del mismo, como se observa en la figura 5.27.

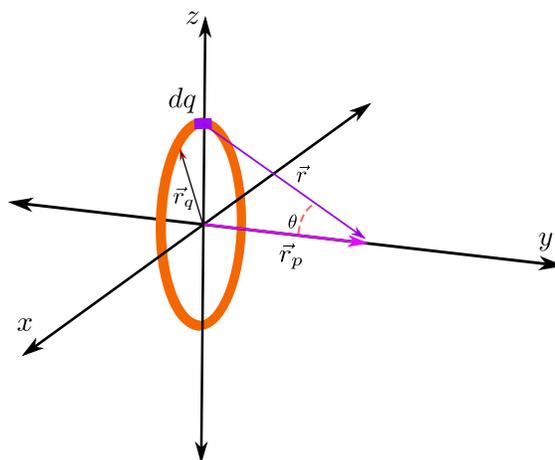


Figura 5.27: Ejemplo (5.24). Potencial eléctrico sobre el eje  $y$  asociado a un anillo cargado.

**Solución:** Como se trata de una carga uniformemente distribuida sobre el perímetro del anillo de radio  $R$ , en primer lugar se debe calcular el potencial eléctrico generado en el punto  $P$  por un elemento  $dq'$ , como se observa en la figura 5.27. El potencial  $d\phi$ , para tal configuración está dado por 5.19):

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.273)$$

El elemento de carga  $dq'$  se puede expresar como:  $dq' = \lambda dl'$ , donde  $dl'$  representa un elemento de longitud a lo largo del perímetro del anillo. Por lo tanto, el potencial total en el punto  $P$  está dado por:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \int \frac{\lambda dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.274)$$

En este caso, la magnitud  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  representa la distancia entre el elemento de carga  $dq'$  y el punto  $P$ , la cual es la misma para cualquier elemento de carga  $dq'$  dentro del anillo y por lo tanto, es una constante en la integración que se debe aplicar en (5.274), concretamente:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= y\hat{j}, \\ \vec{r}' &= x\hat{i} + z\hat{k}, \end{aligned} \quad (5.275)$$

con lo cual

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |y\hat{j} - x\hat{i} - z\hat{k}| = \sqrt{y^2 + x^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + R^2}. \quad (5.276)$$

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + y^2}} \int dl' = k_e \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + y^2}} 2\pi R. \quad (5.277)$$

En (5.277) se ha tenido en cuenta que la integral  $\int dl'$  corresponde al perímetro del anillo dado por  $2\pi R$ . Finalmente, teniendo en cuenta que  $\lambda = Q/(2\pi R)$ , la expresión (5.277) se puede escribir como:

$$\phi(\vec{r}) = k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2 + y^2}}. \quad (5.278)$$

**Ejemplo 5.25.** Un anillo fijo de radio  $R$  y carga positiva  $Q$  posee un eje de simetría a lo largo del eje  $x$ . En el centro del anillo se encuentra localizada una carga positiva  $q$  de masa  $m$ . Cuando esta se desplaza ligeramente, la partícula se acelera a lo largo del eje  $x$  y se mueve hacia el infinito. En este ejemplo se calculará la velocidad final de la partícula.

**Solución:** Se mostró que el potencial generado por un anillo de radio  $R$  y carga  $Q$  en un punto a lo largo del eje de simetría y que coincide con el eje  $x$  está dado por (ver ecuación (5.278)):

$$\phi(\vec{r}) = k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (5.279)$$

Ahora, la energía potencial asociada a una carga  $q$  localizada a una distancia  $x$  respecto al centro del anillo es:

$$U = q\phi(\vec{r}) = k_e \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (5.280)$$

Si la carga  $q$  inicialmente se localiza en el centro del anillo y se encuentra en reposo, la energía total inicial asociada es:

$$E_i = T_i + U_i = 0 + k_e \frac{qQ}{\sqrt{R^2}} = 0 + k_e \frac{qQ}{R}. \quad (5.281)$$

Por tanto, si la carga  $q$  se desplaza ligeramente del origen y se mueve hacia el infinito, la energía final que esta adquiere se expresa como:

$$E_f = T_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \lim_{x \rightarrow \infty} k_e \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{2}mv_f^2, \quad (5.282)$$

siendo  $v_f$  la velocidad que alcanza la partícula en el infinito. Así, de la conservación de la energía ( $E_i = E_f$ ) se determina que:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = k_e \frac{qQ}{R}, \quad (5.283)$$

de manera que la velocidad de la partícula en el infinito es:

$$v_f = \sqrt{\frac{2k_e qQ}{mR}}. \quad (5.284)$$

**Ejemplo 5.26.** En este ejemplo se calculará el potencial eléctrico generado por un carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre un disco de radio interior  $r_1$  y radio exterior  $r_2$ . El plano del anillo se encuentra en el plano  $xz$  y el potencial eléctrico se evaluará en un punto  $P$  ubicado sobre el eje  $y$  (ver figura 5.28).

**Solución:** Considerando que un disco se puede considerar como un conjunto de anillos concéntricos de ancho infinitesimal, es posible solucionar el problema planteado haciendo uso del resultado expresado en (5.278) para el potencial eléctrico generado por un anillo deducido en el ejemplo (5.24). Entonces, se puede establecer que el potencial eléctrico asociado a un anillo de radio  $r'$  y ancho  $dr'$  evaluado sobre un punto ubicado a lo largo del eje  $y$ , según la ecuación (5.278) (cambiando  $R \rightarrow r'$  y  $q \rightarrow dq'$ ) vendrá dado por:

$$d\phi(\vec{r}) = k_e \frac{dq}{\sqrt{r'^2 + y^2}}. \quad (5.285)$$

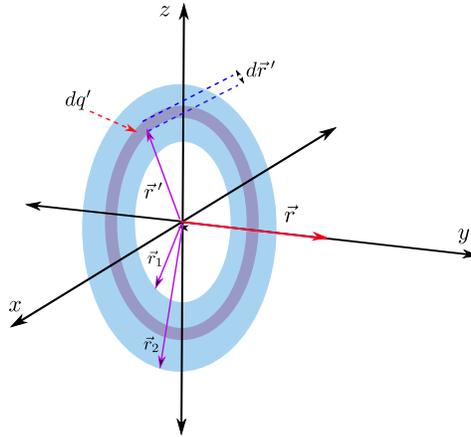


Figura 5.28: Ejemplo (5.26). Potencial eléctrico sobre el eje  $x$  asociado a un disco cargado.

Integrando (5.285) sobre toda la carga del disco, se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = \int_Q k_e \frac{dq}{\sqrt{r'^2 + y^2}}. \quad (5.286)$$

Como se trata de un objeto cuya carga se encuentra distribuida uniformemente sobre su área, se puede establecer que:

$$dq' = \sigma da' = \sigma 2\pi r' dr'. \quad (5.287)$$

En (5.287) se ha tenido en cuenta que el área de un anillo de radio  $r'$  y ancho  $dr'$  está dada por  $da = 2\pi r' dr'$  (ver figura 5.28). Reemplazando (5.287) en (5.286), se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= 2\pi k_e \sigma \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + y^2}} \\ &= 2\pi k_e \sigma \sqrt{r'^2 + y^2} \Big|_{r_1}^{r_2} \\ &= 2\pi k_e \sigma \left( \sqrt{r_2^2 + y^2} - \sqrt{r_1^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.288)$$

Por la simetría del problema, el campo eléctrico únicamente tendrá componente a lo largo del eje que atraviesa perpendicularmente el disco, que en este ejemplo se ha tomado como el eje  $y$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{d\phi}{dy} \\ &= -2\pi k_e \sigma \left( \frac{y}{\sqrt{r_2^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{r_1^2 + y^2}} \right). \end{aligned} \quad (5.289)$$

Dos casos particulares se pueden resolver a partir de los resultados anteriores, los cuales son:

1. Un caso particular del resultado expresado en (5.288) y (5.289) es cuando  $r_1 = 0$ , en tal situación se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = 2\pi k_e \sigma \left( \sqrt{r_2^2 + y^2} - y \right), \quad (5.290)$$

$$E_y = -2\pi k_e \sigma \left( \frac{y}{\sqrt{r_2^2 + y^2}} - 1 \right). \quad (5.291)$$

2. El campo eléctrico de un plano infinito cargado con densidad de carga  $\sigma$  se puede obtener a partir de (5.291) tomando  $r_2 \rightarrow \infty$ , con lo cual, se tiene que:

$$E_x = 2\pi k_e \sigma, \quad (5.292)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (5.293)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$ .

No es recomendable hacer  $r_2 \rightarrow \infty$  en la expresión (5.290) para obtener el potencial eléctrico de un plano infinito. La razón se explicó en la última parte del ejemplo (5.23) y concretamente se da porque (5.290) se obtuvo con la premisa que en el infinito el potencial se anulaba, consideración que no es adecuada para un cuerpo cargado con dimensiones infinitas. En este caso, lo mejor es obtener el potencial a partir de integración del campo  $E_y$  (ecuación (5.293)), tal que:

$$E_y = -\frac{d\phi}{dy} \quad (5.294)$$

$$\Rightarrow \int_{\phi(y_0)}^{\phi(y)} d\phi = - \int_{y_0}^y E_y dy = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{y_0}^y dy \quad (5.295)$$

$$\Rightarrow \phi(y) - \phi(y_0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (y - y_0). \quad (5.296)$$

Finalmente, se obtiene:

$$\Delta\phi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Delta y. \quad (5.297)$$

**Ejemplo 5.27.** Un disco de radio  $R$  posee una densidad superficial de carga no uniforme  $\sigma = Ar$ , donde  $A$  es una constante con unidades de carga por unidad de volumen. El valor de  $r$  se mide a partir del centro del disco. El plano del disco se ubica perpendicularmente al eje  $x$ . Para la situación planteada se determinará el potencial en un punto  $x$  a lo largo del eje de simetría (eje  $x$ ).

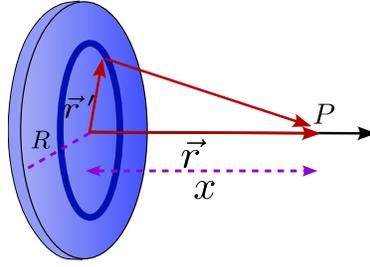


Figura 5.29: Ejemplo 5.27. Potencial eléctrico asociado a un disco cargado con densidad de carga superficial no uniforme.

**Solución:** El potencial debido a una distribución de carga continua se calcula a partir de:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{k_e dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.298)$$

Un disco se puede representar como un conjunto de anillos concéntricos de ancho infinitesimal  $dr'$  (ver figura 5.29). La carga contenida en uno de dichos anillos  $dq'$  se localizará a una distancia  $r'$  del centro del disco y ocupará una área  $da'$ , la cual se puede expresar como:

$$da' = r' dr' d\phi', \quad (5.299)$$

con lo cual

$$dq' = \sigma da' = Cr' da' = Cr'^2 dr' d\phi'. \quad (5.300)$$

De la figura 5.29 es posible determinar que  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados  $|\vec{r}| = x$  y  $|\vec{r}'| = r'$ , de manera que:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r'^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.301)$$

con lo cual, se tiene que

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{k_e dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k_e \frac{Ar'^2 dr' d\phi'}{(r'^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.302)$$

por lo tanto, el potencial debido al disco es:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= Ak_e \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 dr' d\phi'}{(r'^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = Ak \int_0^R \frac{r'^2 dr'}{(r'^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= 2\pi Ak \int_0^R \frac{r'^2 dr'}{(r'^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.303)$$

Ahora, teniendo en cuenta que (ver (??))

$$\int \frac{r^2 dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} r \sqrt{r^2 + x^2} - \frac{1}{2} x^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 + x^2} \right), \quad (5.304)$$

se determina que

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= 2\pi Ak \left[ \frac{1}{2} r \sqrt{r^2 + x^2} - \frac{1}{2} x^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 + x^2} \right) \right]_0^R \\
 &= 2\pi Ak \left[ \frac{1}{2} R \sqrt{R^2 + x^2} - \frac{1}{2} x^2 \ln \left( R + \sqrt{R^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right] \\
 &= 2\pi Ak \left[ \frac{1}{2} R \sqrt{R^2 + x^2} - \frac{1}{2} x^2 \ln \left( \frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x} \right) \right], \tag{5.305}
 \end{aligned}$$

de manera que el potencial en el punto  $P$ , debido al disco es:

$$\phi(\vec{r}) = 2\pi Ak \left[ \frac{1}{2} R \sqrt{R^2 + x^2} - \frac{1}{2} x^2 \ln \left( \frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x} \right) \right]. \tag{5.306}$$

## 5.5. Energía de una distribución continua de cargas

Para encontrar la energía potencial asociada a una distribución continua de cargas, se inicia con la expresión de energía potencial para una distribución de  $N$  cargas puntuales definida en (5.97):

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{k_e}{2} \sum_{i=1}^N \left( \underbrace{\sum_{j=1}^N}_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_{q_i}(\vec{r}_i). \tag{5.307}
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior, la energía  $U_{q_i}(\vec{r}_i)$  corresponde a la energía potencial eléctrica de la partícula  $q_i$  ubicada en la posición  $\vec{r}_i$ , dada por:

$$U_{q_i} = q_i \left( \underbrace{\sum_{j=1}^N}_{i \neq j} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right). \tag{5.308}$$

Adicionalmente, de la expresión (5.150) se puede inferir que el resultado entre paréntesis de (5.308) corresponde al potencial generado por las  $q_j$  partículas en el punto  $\vec{r}_i$ , tal que (5.308) se puede escribir como:

$$U_{q_i} = q_i \phi(\vec{r}_i). \quad (5.309)$$

Al considerar un objeto con distribución continua de carga y conociendo el potencial en cualquier punto dentro y fuera del objeto, se puede establecer, a partir de (5.309), que la energía  $U_{dq}$  asociada a un elemento diferencial dentro del objeto de carga  $dq$ , ubicada en una posición  $\vec{r}$  del espacio, vendrá dada por:

$$U_{dq} = dq \phi(\vec{r}). \quad (5.310)$$

Ahora, un elemento diferencial de carga  $dq$  corresponde a la carga total  $Q$  dividida entre  $N$ , con  $N$  tendiendo a infinito, por lo tanto:

$$U_{dq} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Q}{N} \phi(\vec{r}). \quad (5.311)$$

Tal como se describió en la ecuación (5.307) para cargas puntuales, la energía potencial eléctrica total corresponde a un medio de la suma del potencial eléctrico de cada partícula cargada. Para este caso, la energía asociada a una carga infinitesimal dada por la expresión (5.310) hace las veces de la energía de una partícula y la suma se reemplaza por una integral, por lo tanto, se tiene que:

$$U = \frac{1}{2} \int_Q dq \phi(\vec{r}). \quad (5.312)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  evita “doble conteo” en la integración, tal como se explicó al deducir la ecuación (5.307) para cargas puntuales. Con el conocimiento de la densidad de carga del cuerpo, se puede establecer la integral presente en (5.312) como una integral de volumen, de área o de línea, dependiendo de si el objeto en estudio tiene tres, dos o una dimensión relevantes, tal que:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV, \quad (5.313)$$

o,

$$U = \frac{1}{2} \int_A \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dA, \quad (5.314)$$

o,

$$U = \frac{1}{2} \int_L \lambda(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dl. \quad (5.315)$$

**Ejercicio 5.16.** Para la distribución de carga considerada en el ejemplo 5.21, calcular el potencial en el punto  $A$ .

**Ejercicio 5.17.** Una varilla de longitud  $L$  tiene una carga  $Q$  distribuida de manera uniforme. La varilla reposa a lo largo del eje  $y$  y donde su centro se considera como el origen de coordenadas. Evaluar el potencial en:

- Un punto  $P$  localizado a lo largo del eje  $y$ .
- Un punto  $P$  localizado a lo largo del eje  $x$ .

Mostrar que si el punto  $P$  se encuentra muy distante de la varilla, el potencial se reduce al de una carga puntual  $Q$ .

**Ejercicio 5.18.** Calcular el potencial eléctrico para el disco descrito en el ejemplo 5.27, en un punto a lo largo del eje de simetría del disco, cuando el disco presente una distribución superficial de carga, dada por: a)  $\sigma = \frac{\sigma_0 r^2}{R^2}$ , b)  $\sigma = \frac{\sigma_0 R}{r}$ .

**Ejercicio 5.19.** Una varilla de longitud  $L$  reposa sobre el eje  $x$  y presenta una carga distribuida de manera uniforme y caracterizada por una densidad  $\lambda$  (ver figura 5.30). Determinar el potencial en el punto  $P$  indicado en la figura 5.30.

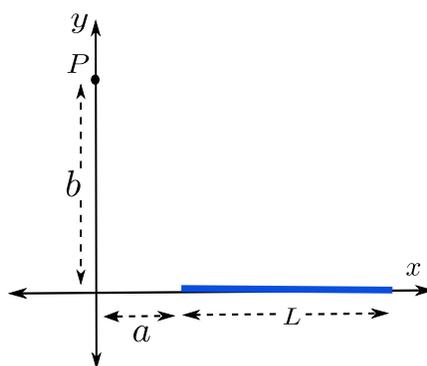


Figura 5.30: Ejercicio 5.19. Potencial eléctrico debido a una varilla cargada.

**Ejercicio 5.20.** Una varilla de plástico tiene una carga  $Q$  distribuida de manera uniforme. La varilla se ha deformado de manera que se ha generado un arco de círculo de radio  $R$  y ángulo central  $\phi$ , como se muestra en la Figura 5.31. Calcular el potencial eléctrico en centro de curvatura del arco.

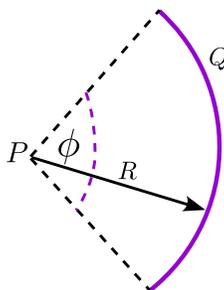


Figura 5.31: Ejercicio 5.20. Potencial eléctrico debido a un arco circular cargado.

**Ejercicio 5.21.** La figura 5.32 muestra tres arcos no conductores de radio  $R$ . Las cargas en los arcos son:  $q_1$ ,  $q_2 = 4q_1$  y  $q_3 = -2q_1$ . Encontrar el potencial en el centro de curvatura.

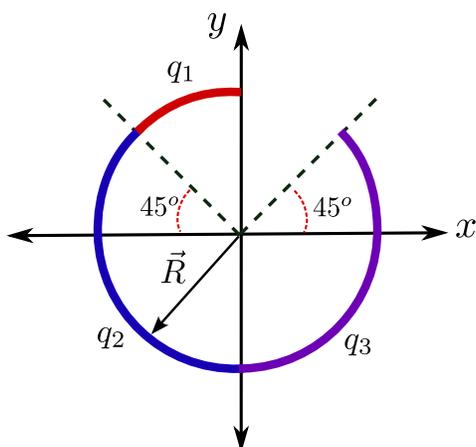


Figura 5.32: Ejercicio 5.21. Potencial eléctrico debido a tres arcos circulares cargados.

**Ejercicio 5.22.** Un cuarto de un disco de radio  $R$  tiene una carga distribuida de manera uniforme y caracterizada por una densidad  $\sigma$ . Calcular el potencial en el punto  $P$  indicado en la figura 5.33.

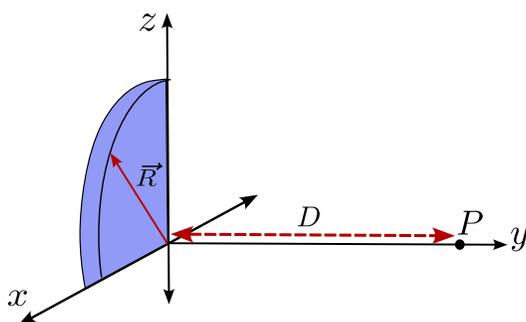


Figura 5.33: Ejercicio 5.22. Potencial eléctrico debido a un cuarto de disco cargado.

**Ejercicio 5.23.** Calcular el potencial en el centro de curvatura de las configuraciones de carga mostradas en la figura 5.34. Considerar que la carga se encuentra distribuida de manera uniforme en todos los elementos circulares.

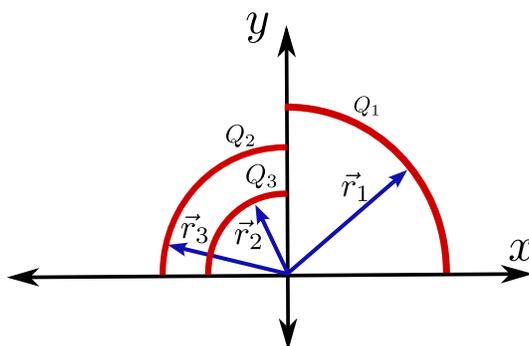


Figura 5.34: Ejercicio 5.23. Potencial eléctrico debido a tres arcos circulares cargados.

**Ejercicio 5.24.** Una partícula de carga  $Q_1$  se encuentra fija en un punto  $A$ . Una segunda partícula de masa  $M$  y carga  $Q_2$  se encuentra inicialmente a una distancia  $R_1$  de la primera de donde es liberada. Encontrar la velocidad de la segunda partícula cuando esta se encuentra a una distancia  $R_2$  de la primera.

**Pregunta 5.1.** Una carga de  $2C$  se mueve desde el punto  $A$ , donde el potencial es  $\phi_A = 100\text{V}$ oltios, hasta el punto  $B$ , donde el potencial es  $\phi_B = 40\text{V}$ oltios. En este caso, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga es:

- a.  $-120J$ .
- b.  $-80J$ .
- c.  $120J$
- d.  $-200J$ .

**Pregunta 5.2.** Un anillo de radio  $R$  y carga total  $Q$  se encuentra en el plano  $xy$ , el potencial eléctrico en el centro del anillo es:

- a.  $0$ .
- b.  $\frac{k_e Q}{0.5R}$ .
- c.  $\frac{k_e Q}{2R}$
- d.  $\frac{k_e Q}{R}$ .

**Pregunta 5.3.** Si el potencial eléctrico en un punto  $A$  es mayor que en un punto  $B$ , esto significa que:

- a. Una carga positiva se moverá espontáneamente de  $A$  a  $B$ .
- b. Una carga negativa se moverá espontáneamente de  $A$  a  $B$ .
- c. El potencial eléctrico no afecta el movimiento de una carga, independiente de su signo.
- d. El trabajo necesario para mover una carga de  $B$  a  $A$  es negativo.

**Pregunta 5.4.** Se coloca una carga  $q$  en un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E$ . ¿Cuánto trabajo se requiere para mover la carga  $q$  una distancia  $d$  en dirección opuesta al campo eléctrico?

- a.  $qEd$
- b.  $-qEd$
- c.  $\frac{qE}{d}$
- d.  $qE^2d$

## 6– Capacitores

---

En la sección (5.5) se determinó que una configuración dada de cargas —ya sea discreta o continua— tenía asociada una energía potencial eléctrica, equivalente al trabajo necesario realizado por una fuerza externa para generar dicha configuración, es decir, para traer las cargas desde el infinito y ubicarlas en sus posiciones finales. Este trabajo externo no se pierde, sino que se almacena en el sistema como energía potencial, por lo que puede ser recuperado posteriormente.

Un caso sencillo que ilustra cómo el trabajo externo se almacena como energía potencial es el de dos partículas con carga positiva separadas una distancia  $d$ , que tienen una cierta energía potencial debido a su posición relativa. Si se liberan, se repelerán mutuamente por la naturaleza de la interacción eléctrica, transformando su energía potencial en energía cinética. Esta energía cinética podría ser aprovechada, por ejemplo, al hacerlas chocar contra un material y generar calor. En conclusión, el trabajo externo empleado para establecer la configuración de cargas se almacena como energía potencial eléctrica y puede transformarse en otras formas de energía útil.

Con base en esta interpretación, es claro que si se quieren separar las cargas positivas y negativas de un material neutro es necesario realizar un trabajo externo que se almacena como energía potencial eléctrica en la configuración final de las cargas. Por ejemplo, si se tienen dos conductores neutros, aplicando un trabajo externo se puede quitar una carga  $\Delta q > 0$  de un conductor para llevarla al segundo, dejando un exceso de carga positiva en el primer conductor y por tanto cargando negativamente el segundo (en una cantidad  $-\Delta q$ ). El trabajo externo necesario para separar la carga  $\Delta q$  se almacena en energía potencial eléctrica.

A nivel tecnológico, el almacenamiento de energía potencial eléctrica se aprovecha a través de elementos electrónicos como por ejemplo los denominados capacitores (o condensadores), que se presentan en diferentes configuraciones geométricas y con diferentes capacidades de almacenamiento. Básicamente, un capacitor se compone de dos conductores inicialmente neutros separados por un medio dieléctrico, es decir, un material que dificulta el paso de electrones entre ellos. Sin embargo, también es posible que la separación entre los conductores este vacía.

La figura 6.1 muestra tres posibles configuraciones geométricas en la que se pueden presentar los conductores para formar un capacitor: la configuración de placas paralelas, la configuración de conductores esféricos y la configuración con conductores cilíndricos.

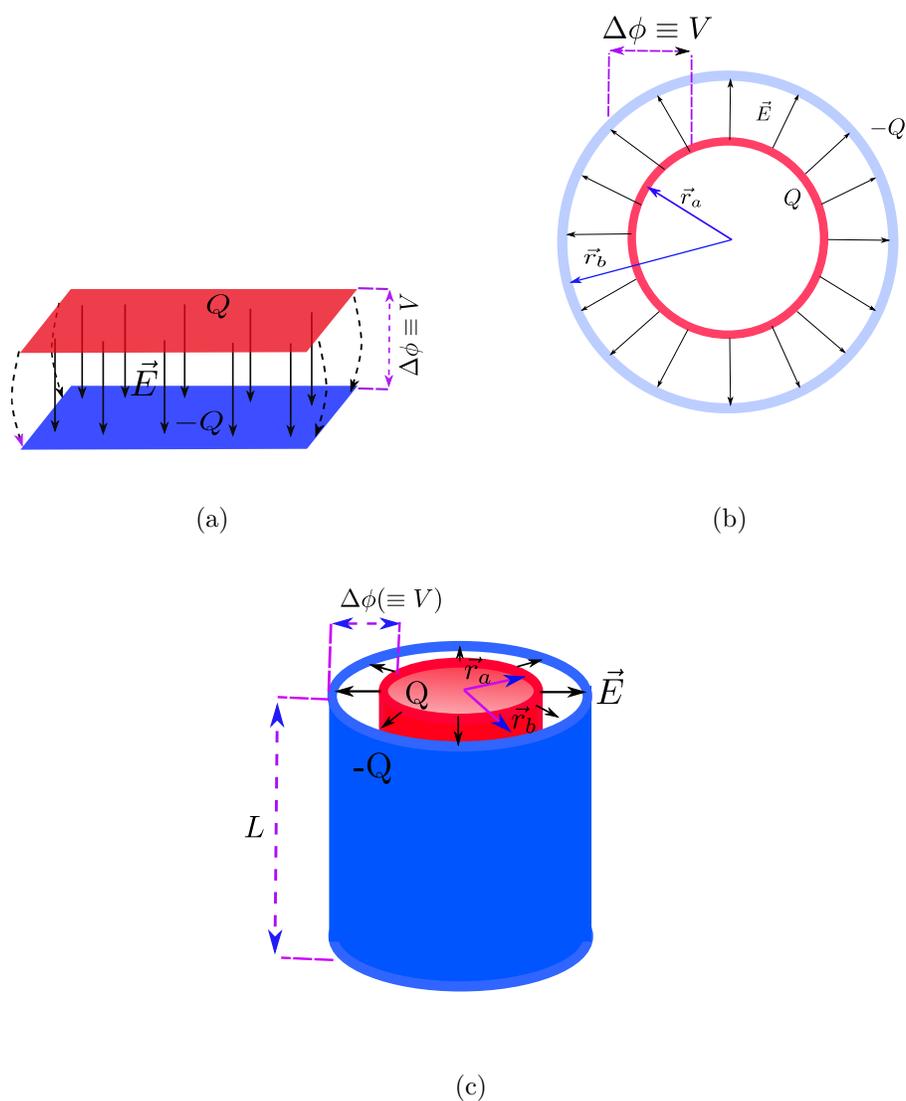


Figura 6.1: Capacitores de placas paralelas, esféricas y cilíndricas.

Un capacitor se carga aplicando un trabajo externo llevando electrones de un conductor al otro. Para determinar cuantitativamente la capacidad de almacenamiento de un capacitor, se define la capacitancia  $C$ , que viene dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}, \quad (6.1)$$

donde  $Q$  representa la carga neta almacenada en uno de los dos conductores (los dos conductores tienen en magnitud la misma carga) y  $\Delta\phi$  la diferencia de potencial eléctrico entre los dos conductores que forman el capacitor. Por lo tanto, las unidades de capacitancia son culombios ( $C$ ) sobre voltios ( $V$ ), donde el voltio es la unidad de potencial eléctrico utilizada para describir diferencia de potencial, y se define como  $\text{voltios} \equiv (N \cdot m)/C$ . La capacitancia

es un valor positivo, por lo tanto la carga y la diferencia de potencial se deben tomar como positivos (valor absoluto). En los circuitos eléctricos, la diferencia de potencial se denomina voltaje y se denotará con la letra  $V$ . Además, la capacitancia depende de las propiedades físicas y disposición geométrica de los materiales de los que está compuesto el capacitor.

Como ya se mencionó, los conductores inicialmente no tienen carga y el almacenamiento de energía se da al extraer electrones de un conductor y llevarlos al segundo conductor con la aplicación de un trabajo externo, lo cual se denomina proceso de carga del capacitor. Por lo anterior, si uno de los conductores queda cargado en una cantidad  $Q$ , el otro conductor queda cargado en una cantidad  $-Q$ . El proceso de carga origina un campo eléctrico en la región que separa los conductores del capacitor, el cual aumenta a medida que la carga en cada conductor aumenta. El campo eléctrico generado en el proceso de carga va del conductor cargado positivamente hacia el conductor cargado negativamente (ver figura 6.1), generando sobre los electrones ubicados en el conductor cargado negativamente una fuerza eléctrica dirigida hacia el conductor cargado positivamente (ver figura 6.1). La razón por la que los electrones no se mueven entre los conductores se debe a la presencia de fuerzas moleculares que mantienen a los electrones dentro de un conductor, así como a la presencia del material dieléctrico que separa a los dos conductores que componen el capacitor. Sin embargo, si el campo entre los conductores es suficientemente grande se podrían vencer las fuerzas moleculares y la resistencia que impone el dieléctrico, permitiendo el tránsito de electrones entre los conductores y, por lo tanto, liberando la energía potencial eléctrica almacenada, lo cual en la práctica no es deseable. Lo anterior define un límite en la cantidad de carga que puede soportar cada conductor y por lo tanto un límite en la energía potencial almacenada por un capacitor que depende nuevamente de las propiedades físicas y geométricas del mismo.

Teniendo en cuenta la disposición geométrica del capacitor se destacan los capacitores de placas paralelas, capacitores de simetría esférica y capacitores cilíndricos, los cuales se describen a continuación:

## 6.1. Capacitor de placas paralelas

Como su nombre lo indica el capacitor de placas paralelas consiste de dos placas rectangulares conductoras ubicadas paralelamente separadas por una distancia  $d$  a través de un material dieléctrico (o vacío), como se observa en la figura 6.2.

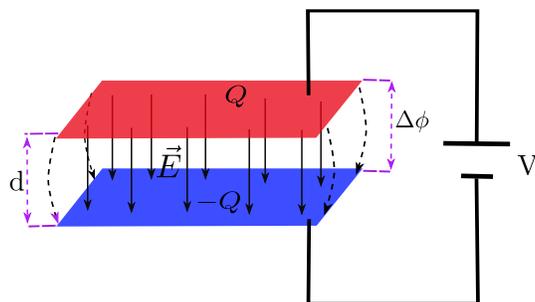


Figura 6.2: Capacitor de placas paralelas.

Para cargar el capacitor, se aplica una diferencia de potencial entre las placas con el uso de una fuente externa de voltaje  $V$  (voltaje representa la diferencia de potencial de la fuente externa). La fuente externa extrae electrones de una de las placas y las lleva a la otra placa. Durante el proceso de carga, la diferencia de potencial entre las placas del capacitor tiene sentido contrario al de la fuente externa, por lo cual solo se traslada electrones de una placa a la otra mientras la diferencia de potencial entre las placas del capacitor ( $\Delta\phi$ ) sea menor a la diferencia de potencial de la fuente externa ( $V$ ). El tránsito de electrones finalizará cuando la carga almacenada sea tal que la diferencia de potencial entre las placas sea igual a la diferencia de potencial de la fuente externa ( $\Delta\phi = V$ ). Por lo mencionado anteriormente, uno de los factores que determina la máxima carga en el capacitor es la diferencia de potencial de la fuente externa; si la diferencia de potencial de la fuente externa aumenta, también aumentará la carga en el capacitor (siempre que no se llegue al límite de carga impuesto por las propiedades del capacitor). Al no existir un medio conductor en la región que separa los conductores del capacitor, los electrones en dichos conductores no podrán moverse de una placa a la otra (asumiendo que el campo eléctrico generado en el espacio en medio de las placas no sea lo suficientemente grande para vencer las fuerzas que mantienen los electrones en dichas placas).

Una vez cargado el capacitor, la carga almacenada se mantiene al desconectar la fuente externa. Ahora, si las placas se conectan mediante un cable conductor, los electrones se moverán de la placa cargada negativamente a la placa cargada positivamente, lo cual se puede aprovechar colocando en el medio del camino un dispositivo (como por ejemplo una resistencia) que convierta la energía cinética de los electrones en otro tipo de energía, por ejemplo en luz o calor (aunque a nivel tecnológico no tienen en general dicho uso).

Para encontrar la capacidad de almacenamiento de carga de un capacitor de placas paralelas, se parte de un capacitor cargado como el descrito en la figura 6.2. Si la distancia entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de ellas, se puede considerar que el campo eléctrico es constante en la región entre las placas (exceptuando en las sectores cercanos a los bordes de las placas, donde el campo no es uniforme; sin embargo excluir dichos sectores en el cálculo representa una aproximación adecuada para fines prácticos). Para encontrar el campo eléctrico entre las placas, se hace uso de la ley de Gauss, tomando como superficie gaussiana un cilindro que atraviesa un lado de una de las placas del conductor, de tal manera que una de las caras circulares del cilindro gaussiano quede dentro del conductor y la otra cara circular en el región entre las dos placas, como se observa en la figura 6.3 (donde se presenta exclusivamente la placa cargada positivamente del capacitor y se ha exagerado el ancho  $w$  de la misma para favorecer la visualización). En la situación anteriormente descrita, se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (6.2)$$

Ahora, la integral se puede realizar separando el área total de la superficie gaussiana en tres áreas: dos circulares y el área lateral del cilindro, tal que:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{c1}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{c2}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_L} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (6.3)$$

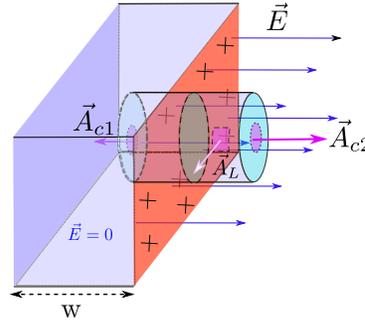


Figura 6.3: Campo eléctrico dentro de un capacitor de placas paralelas.

Las áreas  $A_{c1}$ , y  $A_{c2}$  representan el área circular interna y externa al conductor, respectivamente, y  $A_L$  representa el área lateral del cilindro. La integral sobre el área circular interna es cero, ya que no existe campo eléctrico dentro de un conductor. La integral sobre el área lateral también se anula, por dos razones: en la parte del área lateral que queda dentro del conductor el campo es cero y por tanto el flujo  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ , y en la parte del área lateral que queda fuera del conductor el campo eléctrico es perpendicular al área lateral del cilindro, por lo cual se anula el producto interno  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ . Por lo mencionado anteriormente se tiene que:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{c2}} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (6.4)$$

Ahora, si se restringe el análisis en un sector alejado de los bordes de la placa conductora (alrededor del centro del conductor), el campo eléctrico es aproximadamente uniforme y paralelo al vector de área  $d\vec{A}$ , por lo cual se tiene que:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{c2}} E dA = E \int_{A_{c2}} dA = EA_{c2}. \quad (6.5)$$

En la expresión anterior, del producto interno solo se mantienen el producto de las magnitudes de los vectores, al ser  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  paralelos, y posteriormente el campo eléctrico sale de la integral por ser aproximadamente constante en la región de estudio. Volviendo a la ley de Gauss y utilizando el resultado (6.5) se tiene que:

$$EA_{c2} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (6.6)$$

de donde:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q_{enc}}{A_{c2}}. \quad (6.7)$$

Ahora  $\frac{q_{enc}}{A_{c2}}$  corresponde a la densidad de carga superficial  $\sigma$  del conductor, por lo tanto:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (6.8)$$

La dirección del campo eléctrico va de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente. Por otro lado, la diferencia de potencial entre las placas del capacitor se puede encontrar a partir de:

$$\Delta\phi = - \int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}_a} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (6.9)$$

donde  $\vec{r}_a$  corresponde a cualquier punto sobre la placa cargada positivamente (ya que cualquier punto se encuentra al mismo potencial), y  $\vec{r}_b$  a la posición de cualquier punto sobre la placa cargada negativamente. Por comodidad en este análisis, el camino de integración en la expresión (6.9) se realiza a través de una línea recta que atraviesa perpendicularmente las placas del condensador y que va del conductor positivo al negativo, de tal manera que el producto  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  es simplemente  $E dr$ , tal que:

$$\Delta\phi = - \int_{r_b}^{r_a} E dr. \quad (6.10)$$

Ahora, ya que el campo eléctrico entre las placas es constante, se tiene que:

$$\Delta\phi = -E \int_{r_b}^{r_a} dr = E(r_b - r_a), \quad (6.11)$$

cuyo valor absoluto se puede escribir como

$$|\Delta\phi| = E|(r_b - r_a)| = Ed. \quad (6.12)$$

En la última igualdad de la expresión anterior, se ha definido como  $|(r_b - r_a)| = d$  la distancia que separa los conductores del capacitor. Teniendo en cuenta el resultado dado en (6.8) se tiene que:

$$|\Delta\phi| = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \quad (6.13)$$

Ahora, la capacitancia se define como:

$$C = \frac{Q}{|\Delta\phi|}, \quad (6.14)$$

por lo tanto, se tiene que:

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{Q}{\sigma d}. \quad (6.15)$$

Por otro lado, la densidad superficial de carga se puede escribir como:  $\sigma = Q/A$ , y por lo tanto, la capacitancia la expresión para la capacitancia toma la forma:

$$C = \epsilon_0 \frac{Q}{(Q/A)d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (6.16)$$

La expresión (6.16) representa la capacitancia de un capacitor de placas paralelas de área  $A$  con una separación entre placas  $d$  y vacío en medio de las placas (por eso la presencia del factor de permitividad en el vacío  $\epsilon_0$ ). La ecuación (6.16) pone en evidencia que la capacitancia aumenta con el área de las placas y disminuye a medida que la distancia  $d$  entre ellas aumenta.

Siguiendo con el mismo procedimiento aplicado para encontrar (6.16), a continuación se presentan los condensadores de geometría cilíndrica y esférica en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 6.1.** *Un capacitor con geometría cilíndrica consta de dos conductores cilíndricos ubicados uno dentro del otro, como se indica en la figura 6.1c. Se asume que el capacitor está cargado y que el cilindro interior tiene una carga positiva  $Q$ , de tal manera que en la región comprendida entre los conductores (y lejos de los bordes) el campo eléctrico sale “radialmente” del conductor interno hacia el conductor externo como se observa en la figura 6.4. Para dicha configuración se encontrará la capacitancia.*

**Solución:** *En este caso, lo primero para encontrar la capacitancia es encontrar el campo eléctrico entre los conductores, y luego, a partir de la expresión (6.10), calcular la diferencia de potencial entre los cilindros. Para encontrar el campo eléctrico dentro de este sistema se utiliza la ley de Gauss, con una superficie de integración dada por un cilindro concéntrico a los conductores del capacitor, representada en azul con contorno punteado en la figura 6.4 (donde solo se indica la superficie gaussiana y el conductor interno cargado positivamente).*

*Aplicando la ley de Gauss se tiene que:*

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (6.17)$$

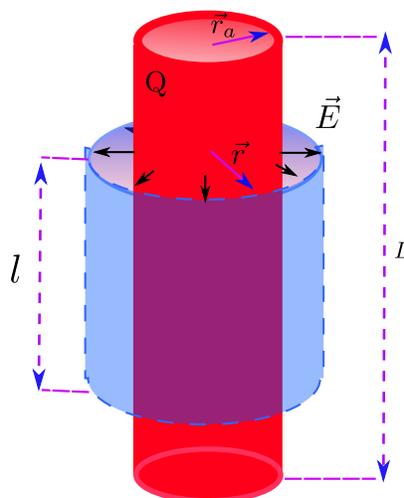


Figura 6.4: Campo eléctrico dentro de un capacitor de placas cilíndricas.

La integral cerrada en la ley de Gauss se puede separar en tres integrales correspondientes a las dos caras circulares del cilindro de integración y el área lateral del mismo, tal que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_l} \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (6.18)$$

donde  $A_{\text{inf}}$  y  $A_{\text{sup}}$  representan las áreas circulares superior e inferior del cilindro gaussiano, y  $A_l$  representa su área lateral. Por la geometría del problema (y lejos de los bordes del capacitor), el campo eléctrico es perpendicular a los vectores de área de las caras circulares, por lo cual el producto punto  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  se anula en dichas áreas. Por otra parte, dado que el campo eléctrico es “radial” el producto punto  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  en la cara lateral del cilindro es simplemente  $E dA$ , y por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_l} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{A_l} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_l} E dA. \end{aligned} \quad (6.19)$$

A partir del resultado anterior, la ley de Gauss se puede escribir como:

$$\int_{A_l} E dA = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}. \quad (6.20)$$

Ahora, el campo eléctrico es constante en la superficie lateral del cilindro gaussiano, ya que todos los puntos de la superficie lateral se encuentran a la misma distancia del eje del cilindro.

Por ello, el campo eléctrico puede salir de la integral en la expresión (6.20), de modo que:

$$\int_{A_l} E dA = E \int_{A_l} dA = E A_l = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (6.21)$$

El área lateral del cilindro gaussiano  $A_l$  es  $2\pi r l$ , y por tanto:

$$E = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0(2\pi r l)}. \quad (6.22)$$

La relación  $q_{enc}/l$  se puede interpretar como una densidad lineal de carga del conductor interno y se denota como  $\lambda$ , tal que:

$$E = \frac{\lambda}{\epsilon_0(2\pi r)}. \quad (6.23)$$

La expresión anterior representa el campo eléctrico en la región comprendida entre los conductores del capacitor cilíndrico, el cual es de naturaleza radial: emerge radialmente del conductor cargado positivamente (en este caso, del cascarón de radio  $r_a$ ) y se dirige hacia el conductor cargado negativamente (el cilindro de radio  $r_b$ ). Por lo tanto, se puede encontrar la diferencia de potencial entre los conductores a través de la relación:

$$\Delta\phi = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (6.24)$$

donde  $\vec{r}_a$  corresponde a cualquier punto sobre el cilindro cargado positivamente (ya que cualquier punto sobre dicho cilindro se encuentra al mismo potencial), y  $\vec{r}_b$  a la posición de cualquier punto sobre el cilindro cargado negativamente. Por conveniencia, el camino de integración para realizar la integral presente en (6.24) se toma como una línea recta radial que une los dos conductores en el capacitor y que va del cilindro cargado positivamente al cilindro cargado negativamente, de tal manera que el producto  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  es simplemente  $E dr$ , y por lo tanto:

$$\Delta\phi = - \int_{r_a}^{r_b} E dr. \quad (6.25)$$

Ahora, teniendo en cuenta (6.23) se tiene que:

$$\Delta\phi = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{\lambda}{\epsilon_0(2\pi r)} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right). \quad (6.26)$$

El potencial eléctrico establecido en (6.26) es negativo, ya que se ha tomado un camino de integración en el mismo sentido del campo eléctrico. Dado que este campo va desde puntos

de mayor potencial a puntos de menor potencial, se cumple que  $\phi(r_b) < \phi(r_a)$ , y  $\Delta\phi = \phi(r_b) - \phi(r_a) < 0$ . Reemplazando el resultado expresado en (6.26) en la definición de la capacitancia, se tiene que:

$$C = \frac{Q}{|\Delta\phi|} = \frac{Q}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}. \quad (6.27)$$

Finalmente, la densidad lineal de carga del conductor interno se define como:  $\lambda = Q/L$ , y por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}, \\ C &= \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

La expresión (6.28) representa la capacitancia de un capacitor de geometría cilíndrica con vacío en el espacio existente en medio de los conductores que conforman el capacitor.

**Ejemplo 6.2.** Un capacitor esférico está conformado por dos conductores esféricos concéntricos (ver figura 6.1b). Para la configuración descrita se encontrará la capacitancia.

**Solución:** Se asume inicialmente que el capacitor está cargado. En dicha situación, el campo eléctrico es radial y sale del conductor esférico cargado positivamente (que se tomará como el interno), al conductor cargado negativamente (en este caso el externo). Aplicando la ley de Gauss, se puede establecer que el campo eléctrico en la región comprendida entre los dos conductores es equivalente al campo eléctrico que genera una carga ubicada en el origen (ver ejemplo (4.10)), por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (6.29)$$

Ahora, la diferencia de potencial eléctrica entre los dos conductores está dada por:

$$\Delta\phi = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (6.30)$$

donde  $r_b$  representa el radio del conductor esférico externo (negativo), y  $r_a$  el radio del conductor esférico interno (positivo). Para realizar la integral (6.30) se toma como camino de integración una recta radial que conecte los dos conductores y que vaya del conductor interno al externo, tal que  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E dr$ , y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= - \int_{r_a}^{r_b} E dr \\
&= - \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
&= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right).
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Dado que  $1/r_b < 1/r_a$ , se tiene en (6.31) que  $\Delta\phi = \phi(r_b) - \phi(r_a) < 0$ , lo cual se debe a que el camino de integración se tomó a favor del campo eléctrico y que el campo siempre va desde puntos de mayor potencial a puntos de menor potencial. Reemplazando el resultado anterior en la expresión para la capacitancia, se tiene que:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{|\Delta\phi|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)} \\
&= \frac{4\pi\epsilon_0}{\left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

En los ejemplos anteriores se ha considerado que el espacio entre los conductores del capacitor está vacío. Sin embargo, para mejorar la capacitancia, es común insertar un medio dieléctrico entre las placas. La presencia de un dieléctrico reduce la intensidad del campo eléctrico en comparación con el que se produciría en el vacío, lo que permite al capacitor almacenar una mayor cantidad de carga eléctrica para una misma diferencia de potencial (recordando que existe un límite en la carga que puede almacenar un capacitor). En estos casos, los procedimientos de cálculo aplicados previamente siguen siendo válidos, con la única diferencia de que se debe reemplazar la permitividad del vacío  $\epsilon_0$ , por la permitividad del medio correspondiente  $\epsilon$ <sup>1</sup> (que se puede encontrar en tablas para diferentes materiales). Los capacitores con medios dieléctricos se discutirán más adelante en este capítulo.

**Ejemplo 6.3.** *Un condensador cilíndrico tiene una carga negativa en el núcleo metálico interior y una carga positiva en el cascarón cilíndrico exterior. La magnitud de la carga en cada conductor es de 10.0 pC. El cilindro interior tiene un radio de 0.50 mm, mientras que el cascarón exterior tiene un radio de 5.00 mm. La longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. Para el capacitor descrito se determinará la capacitancia y la diferencia de potencial que se requiere para lograr una carga en el condensador de 10.0 pC.*

**Solución:** De la ecuación (6.28) se establece que la capacitancia asociada a este condensador cilíndrico se determina a partir de:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}. \tag{6.33}$$

<sup>1</sup> Considerando dieléctricos lineales e isotrópicos.

En la configuración planteada se tiene que:

$$r_a = 0.50 \text{ mm} = 0.50 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (6.34)$$

$$r_b = 5.00 \text{ mm} = 5.00 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (6.35)$$

$$L = 18.0 \text{ cm} = 18.0 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad (6.36)$$

de manera que

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = 2\pi \frac{\left(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right) (18.0 \times 10^{-2} \text{ m})}{\ln\left(\frac{5.00 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.50 \times 10^{-3} \text{ m}}\right)} \\ &= 4.34 \times 10^{-12} \text{ F} = 4.34 \text{ pF}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Ahora, la magnitud de la diferencia de potencial entre los cilindros es dada a partir de la relación (6.26), con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \\ &= \frac{(10.0 \times 10^{-12} \text{ C})}{2\pi (8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}) (18.0 \times 10^{-2} \text{ m})} \ln\left(\frac{5.00 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.50 \times 10^{-3} \text{ m}}\right) \\ &= 2.30 \text{ V}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

**Ejemplo 6.4.** Un condensador esférico, constituido por dos cascarones esféricos concéntricos conductores separados por el vacío, tiene una capacitancia de 127 pF. La esfera interior posee un radio de 15.0 cm. Para la configuración planteada, se evaluará el radio del cascarón esférico exterior y se determinará el valor de la carga almacenada por el condensador, de tal manera que la diferencia de potencial sea de 200 V.

**Solución:** Para un condensador esférico de radio interior  $r_a$  y radio exterior  $r_b$  la capacitancia es dada por (ver ecuación (6.32)):

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}. \quad (6.39)$$

A partir de la cual se puede determinar que:

$$\frac{1}{r_a} - \frac{4\pi\epsilon_0}{C} = \frac{1}{r_b}, \quad (6.40)$$

lo cual implica que el radio exterior es

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{1}{\left(\frac{1}{r_a} - \frac{4\pi\epsilon_0}{C}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{15.0 \times 10^{-2} \text{ m}} - 4\pi \frac{8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}}{127 \times 10^{-12} \text{ F}}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{10^2}{15} - 4\pi \frac{8.85}{127}\right)} \\ &= 17.3 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ahora, la magnitud de la diferencia de potencial viene dada por la expresión:

$$\Delta\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (6.42)$$

Para una diferencia de potencial de 200 V entre los cascarones, la carga almacenada por los conductores está dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4\pi\epsilon_0\Delta\phi}{\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)} = \frac{4\pi \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right) (200 \text{ V})}{\left(\frac{1}{15.0 \times 10^{-2} \text{ m}} - \frac{1}{17.3 \times 10^{-2} \text{ m}}\right)} \\ &= 27.2 \text{ nC}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

**Ejemplo 6.5.** Un capacitor de placas paralelas tiene una carga  $Q$  y placas de área  $A$ . Para el capacitor descrito, se determinará la fuerza que ejerce una placa sobre la otra.

**Solución:** El campo eléctrico generado por la placa cargada positivamente es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}, \quad (6.44)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular a la placa. Ahora, si se considera un elemento de carga infinitesimal  $-dq$  localizado en la placa cargada negativamente, la fuerza que la placa con carga positiva ejerce sobre este elemento de carga es:

$$d\vec{F} = -dq\vec{E} = -dq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}, \quad (6.45)$$

y la fuerza total es:

$$\vec{F} = - \int dq\vec{E} = - \int dq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \underbrace{\int dq}_Q = - \frac{Q}{2\epsilon_0} \underbrace{\frac{\sigma}{A}}_{\hat{n}}, \quad (6.46)$$

es decir:

$$\vec{F} = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \hat{n}. \quad (6.47)$$

**Ejercicio 6.1.** Se tiene un condensador cilíndrico consistente de un núcleo sólido coaxial a un tubo conductor hueco de radio 0.320 cm. La longitud del condensador es 15.0 cm y su capacitancia es de 34.2 pF. a) Considerando que el espacio entre los conductores es aire, evaluar el radio del conductor interior. b) Para una diferencia de potencial de 150 V, calcular la densidad lineal de carga del capacitor.

**Ejercicio 6.2.** Un capacitor esférico está sometido a una diferencia de potencial de 210 V y la carga que almacena es de 4.30 nC. Si el cascarón exterior posee un radio de 5.00 cm y el espacio entre los cascarones es vacío, determinar: a) La capacitancia del sistema, b) evaluar el radio del conductor interior, c) calcular el campo eléctrico entre los cascarones.

**Ejercicio 6.3.** Un capacitor de placas paralelas posee una densidad superficial de carga de  $25.0 \frac{nC}{cm^2}$ . Si la diferencia de potencial es 120 V, calcular: a) El espacio entre las placas. b) Si la carga almacenada por las placas es de 15 nC determinar la capacitancia del condensador.

## 6.2. Capacitores en circuitos

Los capacitores son elementos usuales de circuitos electrónicos y se representan gráficamente como se observa en la figura 6.5.

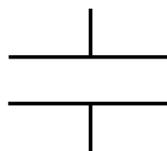


Figura 6.5: Representación esquemática de un capacitor.

De igual forma, un dispositivo electrónico puede contener varios capacitores que se conectan en diferentes configuraciones dependiendo de la función que desempeñen en el dispositivo. Las configuraciones básicas en las cuales se pueden conectar dos o más capacitores en un circuito se denominan configuraciones en serie, paralelo y configuración mixta, y se presentan a continuación.

### 6.2.1. Configuración en serie

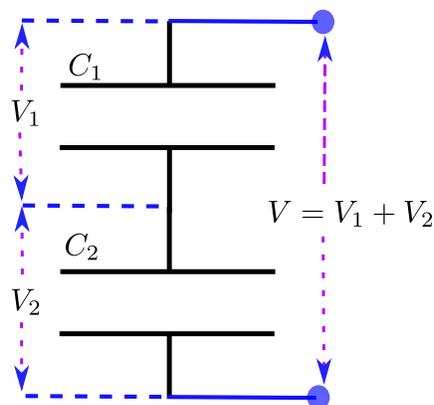


Figura 6.6: Dos capacitores en serie.

La configuración básica de dos capacitores en serie se indica en la figura 6.6. Como se ve, uno de sus lados se encuentran unidos por un camino (conductor) que no se divide en su recorrido. Los conductores conectados (de diferentes capacitores) junto con el medio que los une, forman una región equipotencial. Si una diferencia de potencial externa  $V$  se conecta a los dos extremos libres de los capacitores (como se observa en la figura 6.6), entonces la suma de las diferencias de potencial en cada capacitor será igual a la diferencia de potencial externa aplicada sobre los capacitores, como se indica en la figura 6.6, es decir:

$$V = V_1 + V_2. \quad (6.48)$$

Algunas consideraciones para tener en cuenta en un arreglo de dos capacitores (que se puede generalizar a  $N$  capacitores), se discuten teniendo en cuenta la notación usada en la figura 6.7, donde los capacitores se describen como  $C_A$  y  $C_B$ , los dos conductores asociados al capacitor  $A$  son  $c_{a1}$  y  $c_{a2}$ , y los conductores asociados al capacitor  $B$  son  $c_{b1}$  y  $c_{b2}$ . El arreglo de capacitores se encuentran unidos a una fuente externa con una diferencia de potencial  $V$  con lo cual se genera un potencial  $V_p$  en uno de los extremos del arreglo y  $V_q$  en otro de los extremos. A partir de lo anterior se tiene que:

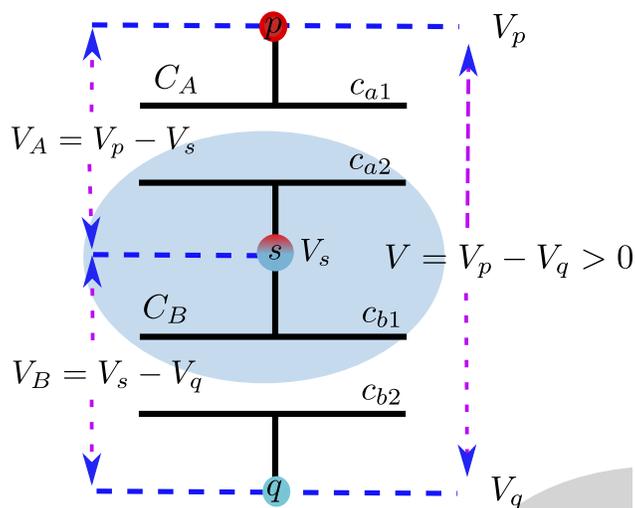


Figura 6.7: Configuración de dos capacitores en serie.

- En dos capacitores en serie hay cuatro conductores (dos por cada capacitor). En un arreglo en serie, dos de dichos conductores se conectan mediante un medio conductor ( $c_{a2}$  y  $c_{b1}$  en la figura 6.7), de tal manera que el sistema conformado por los dos conductores y el medio que los conecta, forman una región equipotencial. Ya que el arreglo se puede considerar como un solo conductor y un conductor siempre es una región equipotencial (se indica como región sombreada en la figura 6.7).
- Si una diferencia de potencial  $V$  se conecta a los extremos libres de los conductores en serie, la suma de la diferencia de potencial en cada capacitor, será igual a la diferencia de potencial aplicada al sistema (como se observa en la figura 6.6), tal que

$$V = V_A + V_B. \quad (6.49)$$

- En el proceso de carga, electrones de uno de los conductores conectados a la fuente externa son extraídos ( $c_{a1}$ ) y llevados al otro conductor ( $c_{b2}$ ) que se encuentra conectado al otro polo de la fuente externa. No se extraen ni adicionan electrones a los conductores de los capacitores que se encuentran unidos ( $c_{a2}$  y  $c_{b1}$ ).
- Durante el proceso de carga, los dos conductores que se unen en el arreglo de capacitores en serie se polarizan. Dado que el conductor  $c_{b2}$  se está cargando negativamente, polariza al conductor  $c_{b1}$  positivamente. De igual forma, dado que el conductor  $c_{a1}$  se carga positivamente, el conductor  $c_{b1}$  se polariza negativamente. La polarización se da porque electrones en  $c_{b1}$  se mueven al conductor  $c_{a2}$ , por lo tanto, la carga total en el sistema formado por  $c_{a2}$  y  $c_{b1}$  (y el medio que los une) sigue siendo cero.

- e) La diferencia de potencial entre el punto  $p$  y el punto  $s$  para el capacitor  $C_A$  es  $V_A = V_p - V_s$ . Donde  $V_s$  corresponde al potencial del sistema formado por el conductor  $c_{a2}$  y  $c_{b1}$  (y el medio que los une). De igual forma, la diferencia de potencial entre el punto  $s$  y el punto  $q$  para el capacitor  $V_B$  viene dada por:  $V_B = V_s - V_q$ .
- f) Es muy importante recordar que la carga almacenada en un capacitor corresponde al valor absoluto de la carga presente en una de sus placas. Todo capacitor cargado tiene una carga neta igual a cero, ya que la carga en una placa es igual y de signo contrario a la de la otra. En un arreglo de dos capacitores en serie, los electrones depositados en uno son equivalentes a los extraídos del otro; por lo tanto, la carga almacenada en cada capacitor es la misma:

$$Q_A = Q_B. \quad (6.50)$$

- g) En un arreglo de dos capacitores en serie, solo existen dos conductores cargados  $c_{a1}$  y  $c_{b2}$ . El sistema formado por  $c_{a2}$  y  $c_{b1}$  es neutro (la suma de las cargas de polarización es cero). Por lo tanto, la carga almacenada en la configuración de dos capacitores en serie, se entiende como la carga almacenada en cada condensador; es decir :

$$Q = Q_A = Q_B, \quad (6.51)$$

donde  $Q$  corresponde a la carga almacenada en el arreglo de capacitores en serie, y se enfatiza que la carga total no corresponde a la suma de las cargas individuales en cada capacitor.

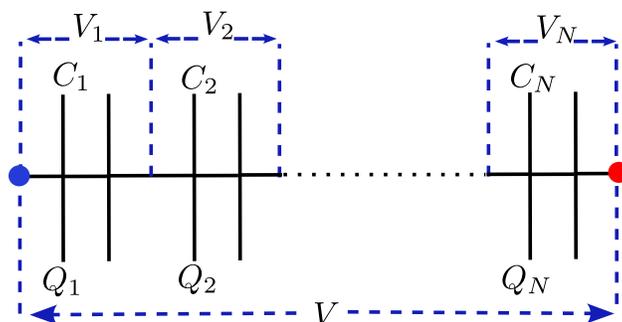
Las características descritas anteriormente, se aplican para un arreglo de  $N$  conductores en serie. Es decir, todos los capacitores almacenan la misma carga (independiente que tengan diferentes capacitancias) y se entiende que la carga total del sistema ( $Q_T$ ) es la carga asociada a un capacitor, es decir:

$$Q_T = Q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.52)$$

Se debe tener en cuenta que si se retira un solo capacitor del arreglo, la carga  $Q_i$  de los capacitores restantes cambiaría (y por tanto la carga total del arreglo). En el caso de dos capacitores en serie como los mostrados en la figura 6.6, se tiene que:  $Q = Q_1 = Q_2$ .

En un arreglo de  $N$  capacitores en serie, la diferencia de potencial total entre los extremos libres del arreglo es igual a la suma de las diferencias de potencial en cada capacitor, como se observa en la figura 6.8, tal que:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N = \sum_{i=1}^N V_i. \quad (6.53)$$

Figura 6.8: Arreglo de  $N$  capacitores en serie

### 6.2.2. Capacitancia equivalente para un arreglo de capacitores en serie

Un arreglo de capacitores en serie se puede reemplazar por un solo capacitor, manteniendo la misma carga de cada uno de los capacitores del arreglo original y aplicando sobre este la misma diferencia de potencial externa utilizada en dicho arreglo. La capacitancia del capacitor que cumple dicha condición se denomina capacitancia equivalente del arreglo en serie.

Como ejemplo para calcular la capacitancia equivalente en el arreglo en serie, se va a considerar el circuito de dos capacitores en serie descrito en figura 6.6. La capacitancia para cualquier capacitor viene dada por  $C = Q/V$ , y por tanto, la diferencia de potencial para cada capacitor se puede escribir como:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}, \quad (6.54)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}. \quad (6.55)$$

Como ya se mencionó, la carga en los dos capacitores en serie es la misma ( $Q_1 = Q_2 = Q$ ), y la suma de la diferencia de potenciales en cada capacitor es igual a la diferencia de potencial total sobre el arreglo, por lo tanto:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \\ &= Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

La anterior expresión se puede escribir como:

$$\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{Q}{V}. \quad (6.57)$$

La expresión  $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$  tiene unidades de capacitancia y representa la capacitancia de un único capacitor que podría reemplazar los dos capacitores del circuito inicial. Este circuito almacenaría la misma carga que los capacitores individuales conectados en serie. A esta cantidad se le denomina capacitancia equivalente del arreglo en serie, y está dada por:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}. \quad (6.58)$$

En el caso de tener  $N$  capacitores en serie (como los indicados en la figura 6.8), la expresión (6.58) se generaliza, tal que:

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}\right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

### 6.2.3. Configuración en paralelo

Dos capacitores están conectados en paralelo si sus extremos se encuentran unidos a la misma diferencia de potencial, como se observa en la figura 6.9. En esta configuración, cada capacitor puede almacenar una carga diferente, dependiendo de su capacitancia. En este caso, la carga total almacenada en el sistema es igual a la suma de las cargas almacenadas en cada capacitor.

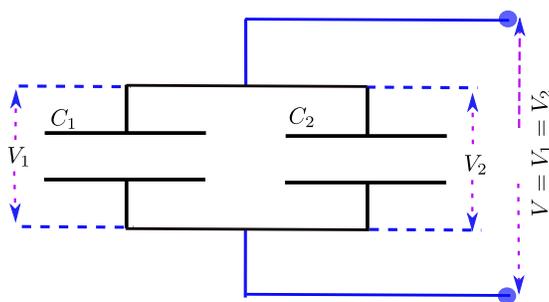


Figura 6.9: Dos capacitores en paralelo.

Para aclarar lo mencionado anteriormente sobre un arreglo de dos capacitores en paralelo; lo cual puede generalizarse a un arreglo de  $N$  capacitores, se analizará la configuración mostrada en la figura 6.10. En dicha figura, los capacitores en paralelo se representan como  $C_A$  y  $C_B$ ; los dos conductores asociados al capacitor  $A$  son  $c_{a1}$  y  $c_{a2}$ , mientras que los del capacitor  $B$  son  $c_{b1}$  y  $c_{b2}$ . El arreglo completo está conectado a una fuente externa que establece una

diferencia de potencial  $V$ , generando un potencial  $V_p$  en uno de los extremos del sistema y  $V_q$  en el otro (asumiendo  $V_p > V_q$ ). A partir de lo anterior, se tiene que:

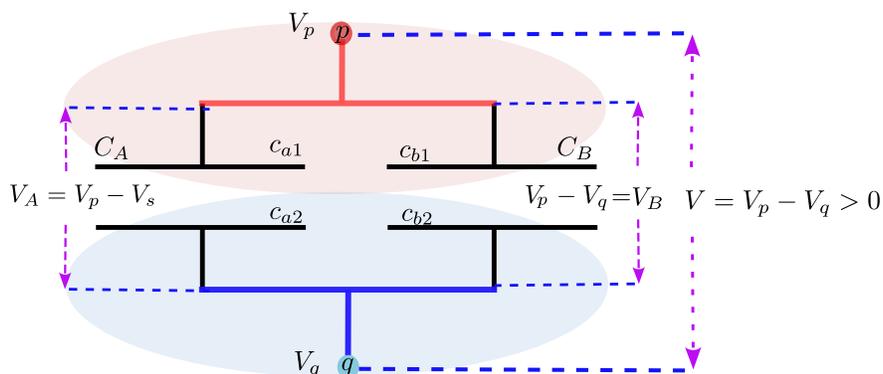


Figura 6.10: Configuración de dos capacitores en paralelo.

- a) En un arreglo de dos capacitores en paralelo, un conductor del primer capacitor se conecta, mediante un medio conductor, a un conductor del segundo capacitor; de igual forma, se conectan los otros dos conductores restantes. En el arreglo en paralelo mostrado en la figura 6.10, el conductor  $c_{a1}$  se une con  $c_{b1}$ , y el conductor  $c_{a2}$  con  $c_{b2}$ . Esto implica que los conductores  $c_{a1}$  y  $c_{b1}$ , junto con el medio que los une, pueden considerarse como un único conductor. Por lo tanto, se encontrarán siempre al mismo potencial, formando una región equipotencial (representada en rojo en la figura 6.10). Lo mismo aplica para los conductores  $c_{a2}$  y  $c_{b2}$ , que constituyen una región equipotencial (representada en azul en la figura 6.10). Como consecuencia, en cada capacitor del arreglo en paralelo se mide la misma diferencia de potencial, es decir:

$$V_A = V_B. \quad (6.60)$$

Si el arreglo se conecta a una diferencia de potencial externa  $V$ , entonces

$$V = V_A = V_B. \quad (6.61)$$

- b) Durante el proceso de carga, el arreglo de dos capacitores se conecta a una fuente externa, la cual extrae electrones de dos conductores (uno por cada capacitor) y los transfiere a los conductores opuestos. En el arreglo representado en la figura 6.10, la fuente externa, de voltaje  $V$ , extrae electrones de los conductores  $c_{a1}$  y  $c_{b1}$ , y los deposita en  $c_{a2}$  y  $c_{b2}$ , respectivamente. El número de electrones transferidos de  $c_{a1}$  hacia  $c_{a2}$ , en general, no coincide con el número de electrones transferidos de  $c_{b1}$  hacia  $c_{b2}$ ; esta diferencia depende de la capacitancia de cada capacitor. Cuanto mayor sea la capacitancia, mayor será la cantidad de carga desplazada. Por lo tanto, la carga almacenada en cada conductor, en general, no es la misma (excepto en el caso en que ambos capacitores tengan igual capacitancia). Es decir:

$$Q_A \neq Q_B. \quad (6.62)$$

La carga almacenada en el arreglo de capacitores será igual a

$$Q_T = Q_A + Q_B. \quad (6.63)$$

Las características descritas anteriormente, se generalizan para un arreglo de  $N$  conductores en paralelo. Es decir, cada conductor se encuentra a la misma diferencia de potencial y almacenan diferente carga eléctrica, siendo la carga total almacenada igual a la suma de las cargas individuales en cada capacitor, es decir:

$$Q_T = \sum_i^N Q_i, \quad (6.64)$$

$$V = V_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.65)$$

#### 6.2.4. Capacitancia equivalente para capacitores en paralelo

Un único capacitor puede tener las mismas características de almacenamiento de carga de un sistema conformado por dos capacitores en paralelo, siempre que se le aplique la misma diferencia de potencial eléctrico  $V$ . Para ello, dicho capacitor debe tener una capacitancia específica, la cual se denomina como capacitancia equivalente del arreglo. Para determinar esta capacitancia equivalente, se considera el sistema de dos capacitores en paralelo indicado en la figura 6.7. La carga total almacenada en el arreglo está dada por la suma de las cargas individuales almacenadas en cada capacitor:

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (6.66)$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula general de capacitancia  $C = Q/V$ , se tiene que  $Q = CV$ , por lo tanto, para cada capacitor se tiene que

$$Q_1 = C_1 V_1, \quad (6.67)$$

$$Q_2 = C_2 V_2. \quad (6.68)$$

Sin embargo, dado que los dos capacitores están en paralelo, se cumple que:  $V_1 = V_2 = V$ , entonces:

$$Q_1 = C_1 V, \quad (6.69)$$

$$Q_2 = C_2 V, \quad (6.70)$$

de tal manera que la carga total almacenada vendrá dada por

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V, \quad (6.71)$$

y por lo tanto,

$$(C_1 + C_2) = \frac{Q}{V}. \quad (6.72)$$

La magnitud  $(C_1 + C_2)$  tiene dimensiones de capacitancia y para la configuración en estudio representa la capacitancia equivalente que un único capacitor debería tener para reemplazar los dos capacitores de la configuración de la figura 6.9, almacenando la misma carga total que la suma de las cargas de los dos capacitores individuales. La ecuación (6.72) se puede generalizar para  $N$  capacitores en paralelo, en ese caso la capacitancia equivalente está dada por:

$$\begin{aligned} C_{eq} &= (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \\ &= \sum_{i=1}^N C_i. \end{aligned} \quad (6.73)$$

La capacitancia equivalente expresada en (6.73) corresponde a la capacitancia que debería tener un único capacitor para reemplazar  $N$  capacitores en paralelo.

### 6.2.5. Arreglos mixtos de capacitores

En un dispositivo electrónico, los capacitores pueden ubicarse en diferentes configuraciones: en serie, en paralelo, o en combinaciones más complejas que incluyan ambos tipos de arreglos. Si se consideran únicamente casos en los que los capacitores están organizados en arreglos en serie y/o paralelo, se puede encontrar una capacitancia equivalente con ayuda de las expresiones (6.59) y (6.73). Estas expresiones permiten reemplazar todos los capacitores del sistema por un único capacitor que pueda almacenar la misma carga total del arreglo original, tal como se muestra en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 6.6.** *La figura 6.11 muestra un arreglo de 5 capacitores para el cual se va a encontrar la capacitancia equivalente, y posteriormente la carga y diferencia de potencial que tiene cada capacitor. Las respectivas capacitancias asociadas a los capacitores descritos en la figura 6.11 son:*

$$C_a = C_c = 3C, \quad (6.74)$$

$$C_b = C_d = C_e = 2C. \quad (6.75)$$

*Adicionalmente, en este ejemplo se considera que los 5 capacitores se pueden reemplazar por un único capacitor de capacitancia equivalente  $C_{eq}$ .*

**Solución:** *En el arreglo indicado en la figura 6.11, se evidencia que los capacitores con capacitancias  $C_c$  y  $C_d$  se encuentran en serie, por lo tanto, se puede encontrar una capacitancia equivalente que se denomina como  $C_{cd}$ , tal que:*

$$\begin{aligned}
 C_{cd} &= \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_d} \right)^{-1} \\
 &= \left( \frac{1}{3C} + \frac{1}{2C} \right)^{-1} \\
 &= \frac{6C}{5}.
 \end{aligned} \tag{6.76}$$

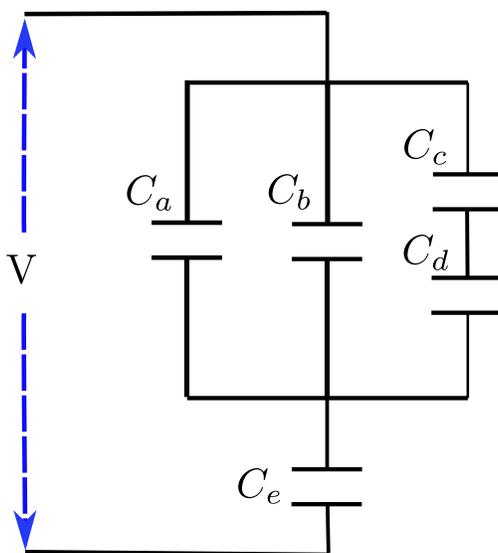


Figura 6.11: Ejemplo (6.6). Arreglo de cinco capacitores en configuración mixta.

Reemplazando los capacitores de capacitancias  $C_c$  y  $C_d$  por un único capacitor equivalente de capacitancia  $C_{cd}$ , el circuito se simplifica según se indica en la figura 6.12a. A partir del circuito simplificado 6.12a, se puede observar que los capacitores con capacitancias  $C_a$ ,  $C_b$  y  $C_{cd}$  se encuentran en paralelo, por lo tanto, se puede determinar una capacitancia equivalente para los tres capacitores en mención, tal que:

$$C_{abcd} = C_a + C_b + C_{cd} = 3C + 2C + 6C/5 = \frac{31C}{5}. \tag{6.77}$$

Al reemplazar los capacitores de capacitancias  $C_a$ ,  $C_b$  y  $C_{cd}$  por un capacitor de capacitancia  $C_{abcd}$ , el circuito se simplifica según se indica en la figura 6.12b. Por último, en el circuito descrito en la figura 6.12b se tiene que  $C_{abcd}$  está en serie con  $C_e$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 C_{abcde} &= \left( \frac{1}{C_e} + \frac{1}{C_{abcd}} \right)^{-1} \\
 &= \left( \frac{1}{2C} + \frac{1}{31C/5} \right)^{-1} \\
 &= 62C/41.
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

La capacitancia equivalente asociada a los 5 capacitores iniciales está dada por  $C_{abcde}$  (y el circuito simplificado a un solo capacitor se indica en la figura 6.12c).

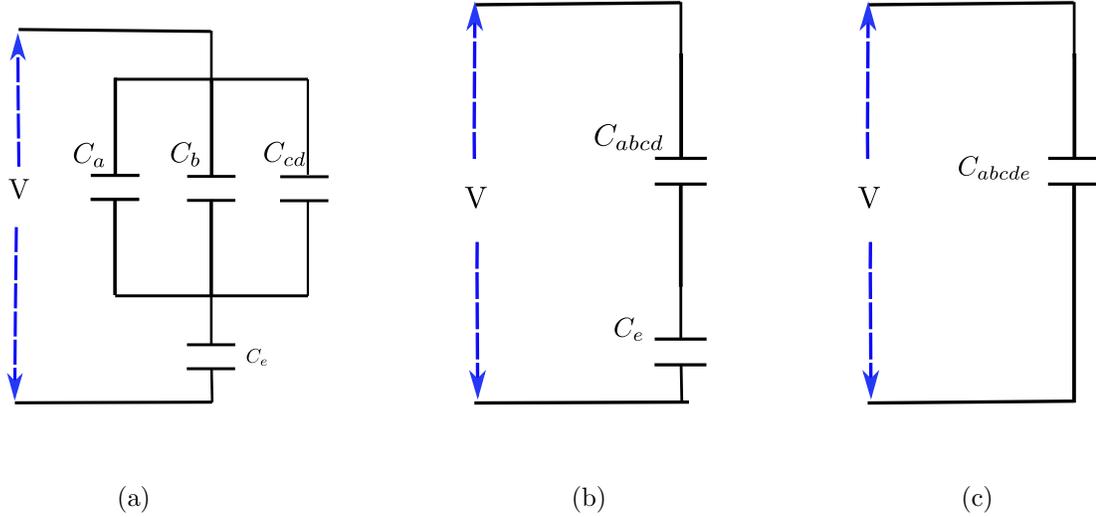


Figura 6.12: Ejemplo (6.6). Reducción asociado al arreglo de cinco capacitores en configuración mixta.

Para encontrar la carga almacenada y la diferencia de potencial en cada capacitor, se trabaja con la ecuación de la capacitancia, que para cualquier capacitor viene dada por:  $C = Q/V$ . Ahora, la carga almacenada en el capacitor equivalente de capacitancia  $C_{abcde}$ , está dada por:

$$Q_{abcde} = C_{abcde}V = \frac{62C}{41}V. \quad (6.79)$$

Observando el circuito indicado en la figura 6.12b, se tiene que la carga almacenada en  $Q_{abcde}$  es igual a la carga almacenada en  $Q_{abcd}$  y  $Q_e$  (por estar en serie  $C_{abcd}$  y  $C_e$ ), y la diferencia de potencial en el capacitor de capacitancia  $C_{abcd}$  y en el capacitor de capacitancia  $C_e$  son:

$$V_{abcd} = \frac{Q_{abcde}}{C_{abcd}} = \frac{62CV}{41} \frac{5}{31C} = \frac{10V}{41}, \quad (6.80)$$

$$V_e = \frac{Q_{abcde}}{C_e} = \frac{62CV}{41} \frac{1}{2C} = \frac{31V}{41}. \quad (6.81)$$

A partir del resultado anterior se puede evidenciar que  $V_{abcd} + V_e = V$ , como se debe cumplir al estar considerando dos capacitores en serie. Al observar el circuito simplificado 6.12a, se observa que los capacitores de capacitancias  $C_a$ ,  $C_b$  y  $C_{cd}$  están en paralelo y por lo tanto, la diferencia de potencial  $V_{abcd}$  es igual para cada uno de los tres capacitores en mención, es decir:

$$V_a = V_b = V_{cd} = V_{abcd} = \frac{10V}{41}. \quad (6.82)$$

Ahora, la carga en los capacitores de capacitancias  $C_a$ ,  $C_b$  y  $C_{cd}$ , están dadas por:

$$Q_a = C_a V_a = C_a V_{abcd} = 3C \frac{10V}{41} = \frac{30CV}{41}, \quad (6.83)$$

$$Q_b = C_b V_b = C_b V_{abcd} = 2C \frac{10V}{41} = \frac{20CV}{41}, \quad (6.84)$$

$$Q_{cd} = C_{cd} V_{cd} = C_{cd} V_{abcd} = \frac{6C}{5} \frac{10V}{41} = \frac{12CV}{41}. \quad (6.85)$$

Volviendo al circuito original (figura 6.11), se observa que los capacitores de capacitancias  $C_c$  y  $C_d$  se encuentran en serie, por lo tanto, la carga  $Q_{cd} = Q_c = Q_d$ , es decir:

$$Q_c = \frac{12CV}{41}, \quad (6.86)$$

$$Q_d = \frac{12CV}{41}. \quad (6.87)$$

Por último, las diferencias de potencial en los capacitores de capacitancias  $C_c$  y  $C_d$  son:

$$V_c = \frac{Q_c}{C_c} = \frac{12CV}{41 * 3C} = \frac{4V}{41}, \quad (6.88)$$

$$V_d = \frac{Q_{cd}}{C_d} = \frac{12CV}{41 * 2C} = \frac{6V}{41}. \quad (6.89)$$

Como se puede verificar de los resultados anteriores  $V_c + V_d = V_{cd} = 10V/41$ .

**Ejemplo 6.7.** Seis capacitores idénticos, cada uno de capacitancia  $C$ , se conectan entre sí como se muestra en la figura 6.13. Para el sistema planteado se calculará la capacitancia equivalente del sistema.

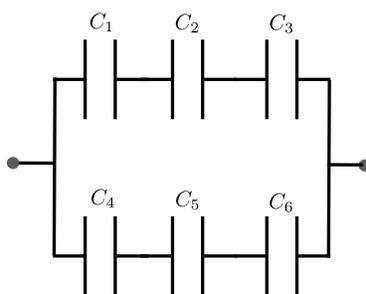


Figura 6.13: Ejemplo 6.7. Capacitancia equivalente para un arreglo de seis capacitores.

**Solución:** Caracterizando los condensadores de la manera como se indica la figura 6.13, es posible determinar que los condensadores  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ , y de igual forma se encuentran en serie los capacitores  $C_4 = C_5 = C_6 = C$ , de manera que el circuito se puede reducir al circuito equivalente indicado en la figura 6.14, donde:

$$C_{e1} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = \frac{C}{3}, \quad (6.90)$$

y

$$C_{e2} = \left( \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} \right)^{-1} = \frac{C}{3}, \quad (6.91)$$

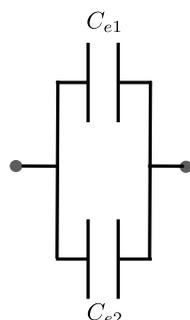


Figura 6.14: Ejemplo 6.7. Circuito equivalente asociado al circuito descrito en la figura 6.13.

Ahora, los condensadores  $C_{e1}$  y  $C_{e2}$  se encuentran en paralelo (ver figura 6.14), de manera que estos se reducen a un solo condensador de valor:

$$C_{e3} = C_{e1} + C_{e2} = \frac{C}{3} + \frac{C}{3} = \frac{2C}{3}. \quad (6.92)$$

**Ejemplo 6.8.** Siete condensadores se conectan como se muestra en la figura 6.15. Para el sistema planteado se evaluará la capacitancia equivalente teniendo en cuenta que

$$C_1 = C_3 = 6.0\text{mF}, \quad C_2 = C_4 = 3.0\text{mF}, \quad C_5 = C_6 = C_7 = 9.0\text{mF}. \quad (6.93)$$

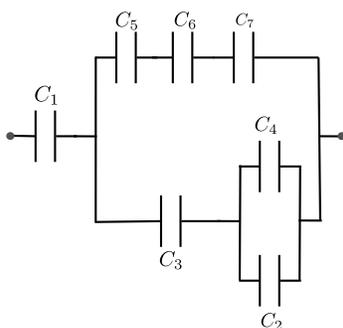


Figura 6.15: Ejemplo 6.8. Arreglo de siete capacitores en un arreglo mixto.

**Solución:** De la figura 6.15 es posible establecer que los condensadores  $C_2$  y  $C_4$  se encuentran en paralelo, y su capacitancia equivalente será:

$$C_{e1} = C_2 + C_4 = 6.0 \text{ mF}. \quad (6.94)$$

Ahora, los capacitores  $C_5$ ,  $C_6$  y  $C_7$  están en serie y se pueden reducir a un capacitor  $C_{e2}$ , dado por:

$$\begin{aligned} C_{e2} &= \left( \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{9.0 \text{ mF}} + \frac{1}{9.0 \text{ mF}} + \frac{1}{9.0 \text{ mF}} \right)^{-1} \\ &= 3.0 \text{ mF}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Lo anterior permite simplificar el circuito indicado en la figura 6.15, obteniendo el circuito equivalente representado en la figura 6.16.

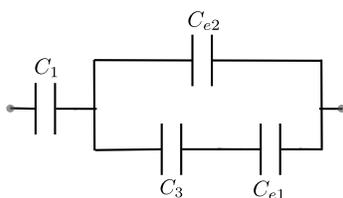


Figura 6.16: Ejemplo 6.8. Simplificación parcial de el circuito descrito en la figura 6.15.

Ahora, los capacitores  $C_3$  y  $C_{e1}$  están en serie. Al combinarse generan el circuito indicado en la figura 6.17, donde

$$C_{e3} = \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{e1}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{9.0 \text{ mF}} + \frac{1}{6.0 \text{ mF}} \right)^{-1} = \frac{18 \text{ mF}}{5}. \quad (6.96)$$

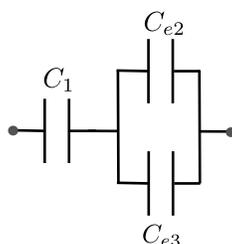


Figura 6.17: Ejemplo 6.8. Simplificación del circuito indicado en la figura 6.16.

De la figura 6.17 se determina que  $C_{e3}$  y  $C_{e2}$  están en paralelo, lo que permite reducir el sistema al indicado en la figura 6.18, con

$$C_{e4} = C_{e3} + C_{e2} = 6.6 \text{ mF}. \quad (6.97)$$



Figura 6.18: Ejemplo 6.8. Circuito equivalente al indicado en la figura 6.17.

Finalmente, los condensadores  $C_1$  y  $C_{e4}$  están en serie. Por tanto, la capacitancia equivalente del sistema  $C_{e5}$  es:

$$C_{e5} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{e4}} \right)^{-1} = \left( 0.32 \frac{1}{\text{mF}} \right)^{-1}, \quad (6.98)$$

con lo cual

$$C_{e5} = 3.14 \text{ mF}. \quad (6.99)$$

**Ejemplo 6.9.** En la figura 6.19 se muestra un sistema compuesto por cuatro capacitores idénticos de  $5.00 \mu F$ , conectados a una diferencia de potencia  $V_{ab} = 30.0 V$ . Calcular la carga y el potencial en cada condensador y la diferencia de potencial entre los puntos a y d.

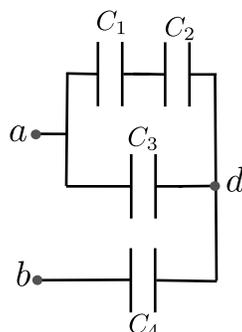


Figura 6.19: Ejemplo 6.9. Arreglo de cuatro capacitores en configuración mixta.

**Solución:** En primer lugar se evaluará la capacitancia equivalente del circuito. Los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran en serie, de manera que se pueden combinar y formar el condensador  $C_{e1}$ , como se muestra en la figura 6.20. El valor de  $C_{e1}$  es:

$$C_{e1} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \left( \frac{2}{5.00 \mu F} \right)^{-1}, \quad (6.100)$$

con lo cual,

$$C_{e1} = 2.50 \mu F. \quad (6.101)$$

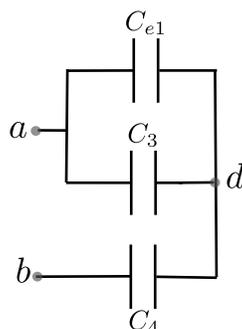


Figura 6.20: Ejemplo 6.9. Circuito simplificado asociado al circuito descrito en la figura 6.19.

Ahora, los condensadores  $C_{e1}$  y  $C_3$  se encuentran en paralelo. De ellos se obtiene un condensador de capacitancia  $C_{e2}$  (ver figura 6.21), cuyo valor es:

$$C_{e2} = C_{e1} + C_3 = 7.50 \mu F. \quad (6.102)$$

Finalmente, los condensadores  $C_4$  y  $C_{e2}$  están en serie, lo que permite establecer que la capacitancia equivalente del sistema es:

$$C_{e3} = \left( \frac{1}{C_{e2}} + \frac{1}{C_4} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{0.30 \mu F} \right)^{-1}, \quad (6.103)$$

con lo cual

$$C_{e3} = 3.00 \mu F. \quad (6.104)$$

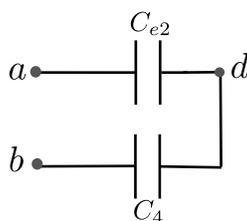


Figura 6.21: Ejemplo 6.9. Circuito simplificado asociado al circuito descrito en la figura 6.20.

La diferencia de potencial para el capacitor equivalente  $C_{e3}$  es  $V_{ab} = 30.0 V$ , de manera que la carga que almacena es:

$$Q_{C_{e3}} = C_{e3}V_{ab} = (3.00 \mu F)(30.0 V) = 90.0 \mu C. \quad (6.105)$$

Ahora, siendo que  $C_{e3}$  resulta de la combinación en serie de los condensadores  $C_4$  y  $C_{e2}$ , estos poseen la misma carga que almacena  $C_{e3}$ , por tanto,

$$Q_{C_{e3}} = Q_{C_{e2}} = Q_{C_4} = 90.0 \mu C. \quad (6.106)$$

Así, la diferencia de potencial sobre  $C_{e2}$  es

$$V_{C_{e2}} = \frac{Q_{C_{e2}}}{C_{e2}} = \frac{90.0 \mu C}{7.50 \mu F} = 12.0 V. \quad (6.107)$$

De igual forma, la diferencia de potencial en el condensador  $C_4$  es:

$$V_{C_4} = \frac{Q_{C_4}}{C_4} = \frac{90.0 \mu C}{5.00 \mu F} = 18.0 V. \quad (6.108)$$

De la figura 6.21 es posible determinar que

$$V_{ad} = V_{C_{e2}} = 12.0 V. \quad (6.109)$$

A partir de la figura 6.20 se concluye que la diferencia de potencial en  $C_{e2}$  es la misma que en los condensadores  $C_{e1}$  y  $C_3$  (ya que se encuentran en paralelo), es decir

$$V_{C_{e2}} = V_{C_{e1}} = V_{C_3} = 12.0 V, \quad (6.110)$$

con lo cual, la carga que se almacena en estos condensadores es:

$$Q_{C_{e1}} = C_{e1}V_{C_{e1}} = (2.50 \mu F)(12.0 V) = 30.0 \mu C. \quad (6.111)$$

$$Q_{C_3} = C_3V_{C_3} = (5.00 \mu F)(12.0 V) = 60.0 \mu C. \quad (6.112)$$

Ya que  $C_{e1}$  resulta de la combinación en serie de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , la carga almacenada por  $C_1$  y  $C_2$  es la misma que la de  $C_{e1}$ , es decir,

$$Q_{C_{e1}} = Q_{C_1} = Q_{C_2} = 30.0 \mu C. \quad (6.113)$$

Así, la diferencia de potencial en dichos condensadores es:

$$V_{C_1} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{30.0 \mu C}{5.00 \mu F} = 6.00 V = V_{C_2}. \quad (6.114)$$

**Ejemplo 6.10.** Dos condensadores de placas paralelas al vacío tienen separaciones entre placas de valor  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente. Ambos condensadores tienen el mismo valor de área de las placas, denotada por  $A$ . En este ejemplo se mostrará que, al conectar estos condensadores en serie, la capacitancia equivalente es igual a la de un único condensador con área  $A$  y una separación entre placas de valor igual a  $d_1 + d_2$ .

**Solución:** La capacitancia para un capacitor de placas paralelas viene dada por (ver ecuación (6.16)):

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}. \quad (6.115)$$

En el caso de los capacitores considerados, las capacitancias correspondientes son:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_2}. \quad (6.116)$$

La capacitancia equivalente asociada a estos condensadores conectados en serie es:

$$\begin{aligned} C_e &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_2}} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{d_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 A} \right)^{-1} = \left( \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon_0 A} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.117)$$

por lo tanto,

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1 + d_2}, \quad (6.118)$$

que equivale a un condensador de placas paralelas separadas por una distancia de valor  $d_1 + d_2$ .

**Ejercicio 6.4.** La figura 6.22 muestra un sistema de tres capacitores con los siguientes valores:  $C_1 = 7.00 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.00 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 6.00 \mu\text{F}$ . La configuración está conectada a una diferencia de potencial  $V_{ab}$ . Una vez que los capacitores alcanzan su máxima carga, se sabe que el capacitor  $C_2$  tiene una carga de  $45.0 \mu\text{C}$ . Determinar el valor de las cargas de los capacitores  $C_1$  y  $C_3$ , y calcular el valor del potencial  $V_{ab}$ .

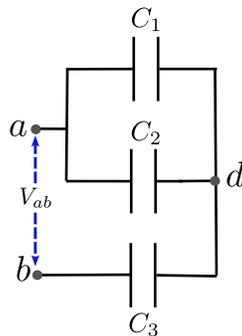


Figura 6.22: Ejercicios 6.4 y 6.5. Arreglo de tres capacitores en configuración mixta.

**Ejercicio 6.5.** Considere que el capacitor  $C_1$  de la figura 6.22 tiene una capacitancia de  $4.00 \mu\text{F}$  y almacena una carga de  $160 \mu\text{C}$ . Si la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ ,  $V_{ab}$ , es de  $140 \text{ V}$ , evaluar la diferencia de potencial a través de los otros capacitores del sistema.

**Ejercicio 6.6.** Se tienen dos capacitores de placas paralelas al vacío, con áreas  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, y con la misma distancia de separación entre placas  $d$ . Mostrar que, si estos capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia total del sistema equivale a la de un único capacitor con área  $A_1 + A_2$ , y separación  $d$  entre placas.

**Ejercicio 6.7.** En la figura 6.23 cada condensador  $C_1$  tiene una capacitancia de  $7.50 \mu\text{F}$ , mientras que los condensadores  $C_2$  tienen una capacitancia de  $5.20 \mu\text{F}$ . Para el sistema planteado, encontrar: a) la capacitancia equivalente del sistema, b) evaluar la carga y diferencia de potencial en cada capacitor, c) determinar la diferencia de potencial entre los puntos  $c$  y  $d$  indicados en la figura 6.23. Lo anterior teniendo en cuenta que  $V_{ab} = 100\text{V}$ .

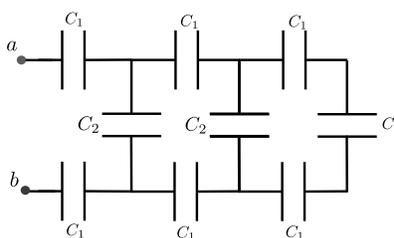


Figura 6.23: Ejercicio 6.7. Arreglo de nueve capacitores en configuración mixta.

**Ejercicio 6.8.** En el arreglo de capacitores indicado en la figura 6.24, se tiene que:  $C_1 = C_2 = 4.8 \mu\text{F}$  y  $C_3 = C_4 = C_5 = 2.4 \mu\text{F}$ . Para una diferencia de potencial de  $V_{ab} = 230\text{V}$ , evaluar la carga y la diferencia de potencial en cada capacitor.

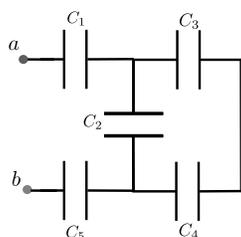


Figura 6.24: Ejercicio 6.8. Arreglo de cinco capacitores en configuración mixta.

**Ejercicio 6.9.** Encontrar la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  para el conjunto de condensadores mostrados en la figura 6.25, siendo que  $C_1 = 7.00 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 12.0 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 4.00 \mu\text{F}$ . Ahora, si la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  es de  $80\text{V}$ , calcular la carga almacenada en el condensador  $C_3$ .

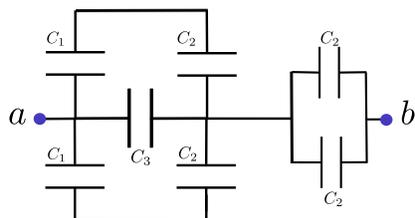


Figura 6.25: Ejercicio 6.9. Arreglo de siete capacitores en configuración mixta.

**Ejercicio 6.10.** Un conjunto de capacitores idénticos se conecta primero en serie y luego en paralelo. La capacitancia equivalente de la combinación en paralelo es 200 veces mayor que la obtenida en serie. Determinar el número de capacitores que conforman el sistema.

### 6.3. Capacitores con dieléctricos

Si los conductores dentro de un capacitor están separados por un medio dieléctrico (lineal<sup>2</sup> e isotrópico<sup>3</sup>), entonces la capacitancia dependerá de la susceptibilidad eléctrica del medio dieléctrico, de tal manera que a mayor susceptibilidad, mayor capacitancia (mayor resistencia al paso de portadores de carga entre los conductores del capacitor, mayor capacidad de almacenar carga en el capacitor). Por ejemplo, la capacitancia para un capacitor de placas paralelas, vendrá dada por (ver ecuación (6.16)):

$$C = \frac{\epsilon A}{d}, \quad (6.119)$$

donde  $A$  corresponde al área de las placas,  $d$  la distancia de separación y  $\epsilon$  la susceptibilidad del medio dieléctrico entre las placas conductoras. La razón entre la susceptibilidad eléctrica del medio y la susceptibilidad eléctrica del vacío, se conoce como constante dieléctrica, tal que

$$k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}. \quad (6.120)$$

En términos de la constante dieléctrica, la capacitancia dada en (6.119) vendrá dada por

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d} = kC_0, \quad (6.121)$$

donde se ha definido como  $C_0$  la capacitancia que el capacitor tendría si el medio de separación entre los conductores estuviera vacío. De igual forma, la capacitancia de un capacitor cilíndrico con constante dieléctrica  $k$  será (ver (6.28)):

$$C = \frac{2\pi k\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = kC_0, \quad (6.122)$$

y la capacitancia de un condensador esférico será (ver ecuación (6.32)):

$$C = \frac{4\pi k\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)} = kC_0. \quad (6.123)$$

Es posible que, dentro del espacio entre los dos conductores que forman un capacitor, se encuentren presentes más de un material dieléctrico. En tales casos, la capacitancia debe calcularse a partir de su definición fundamental. Sin embargo, ciertas configuraciones permiten realizar simplificaciones. Por ejemplo, la figura 6.26 muestra un capacitor de placas paralelas que contiene dos materiales dieléctricos diferentes en el espacio entre sus placas,

<sup>2</sup> En forma sencilla se puede considerar un material dieléctrico lineal, cuando las cargas en presencia de un campo eléctrico se *mueven* siguiendo las líneas de campo eléctrico

<sup>3</sup> Materiales que mantienen sus propiedades en cualquier dirección

con constantes dieléctricas  $k_1$  y  $k_2$ . Esta configuración puede interpretarse como un sistema equivalente de dos capacitores conectados en serie, como se ilustra en la figura 6.27. Por lo tanto, su capacitancia equivalente está dada por:

$$C_{eq} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.124)$$

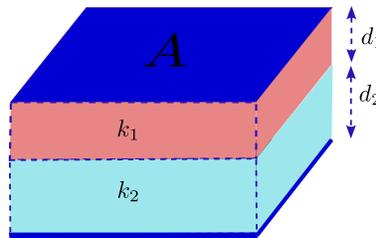


Figura 6.26: Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores.

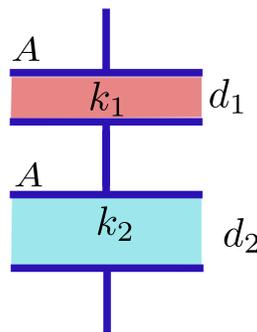


Figura 6.27: Configuración equivalente de dos capacitores en serie asociado al capacitor de la figura 6.26.

Ahora, dado que los capacitores son de placas paralelas, se tiene que:

$$C_1 = k_1 \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}, \quad (6.125)$$

$$C_2 = k_2 \frac{\varepsilon_0 A}{d_2}. \quad (6.126)$$

Por lo tanto

$$C_{eq} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 d_2 + k_2 d_1)} (\varepsilon_0 A), \quad (6.127)$$

donde  $d_1 + d_2 = d$ .

La figura 6.28 muestra otra configuración posible, la cual se puede interpretar como un arreglo de dos capacitores en paralelo, tal como se indica en la figura 6.29. Con lo cual la capacitancia equivalente será:

$$C_{eq} = C_1 + C_2, \quad (6.128)$$

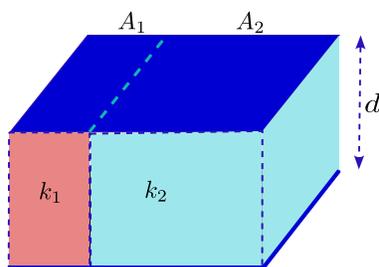


Figura 6.28: Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores.

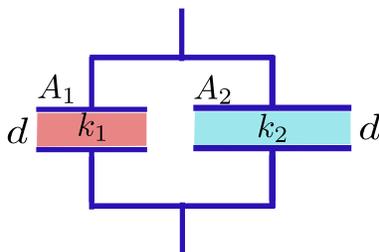


Figura 6.29: Configuración equivalente de dos capacitores en paralelo asociado al capacitor de la figura 6.28.

Reemplazando (6.125) y (6.126) en (6.128), se tiene que

$$C_{eq} = k_1 \frac{\varepsilon_0 A_1}{d} + k_2 \frac{\varepsilon_0 A_2}{d} = (k_1 A_1 + k_2 A_2) \frac{\varepsilon_0}{d}, \quad (6.129)$$

donde  $A_1 + A_2 = A$ .

**Ejemplo 6.11.** Encontrar la capacitancia asociada al capacitor que se indica en la figura 6.30.

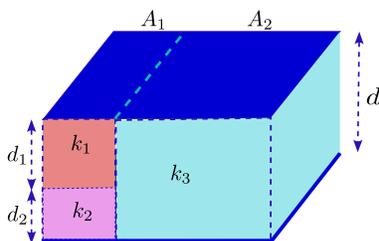


Figura 6.30: Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores.

**Solución:** El capacitor en estudio puede analizarse como un arreglo equivalente de tres capacitores: dos conectados en serie y un tercero en paralelo con dicha combinación, como se muestra en la figura 6.31.

Por lo tanto, la capacitancia equivalente del sistema estará dada por:

$$C_{eq} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} + C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3, \quad (6.130)$$

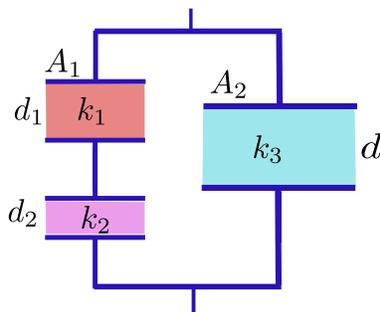


Figura 6.31: Configuración equivalente de tres capacitores asociado al capacitor de la figura 6.30.

Ahora, las capacitancias se pueden expresar como:

$$C_1 = k_1 \frac{\varepsilon_0 A_1}{d_1}, \quad (6.131)$$

$$C_2 = k_2 \frac{\varepsilon_0 A_1}{d_2}, \quad (6.132)$$

$$C_3 = k_3 \frac{\varepsilon_0 A_2}{d}. \quad (6.133)$$

donde  $A_1 + A_2 = A$  y  $d_1 + d_2 = d$ . Al reemplazar (6.131), (6.132) y (6.133) en (6.130), se tiene que

$$C_{eq} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 d_2 + k_2 d_1)} (\varepsilon_0 A_1) + k_3 \frac{\varepsilon_0 A_2}{d}. \quad (6.134)$$

**Ejemplo 6.12.** El espacio entre las placas de un capacitor está ocupado por dos bloques de material dieléctrico con constantes dieléctricas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ . Cada bloque tiene un espesor de  $\frac{d}{2}$ , siendo  $d$  la distancia entre las placas, las cuales tienen un área  $A$ . Para el sistema planteado, se calculará la capacitancia equivalente.

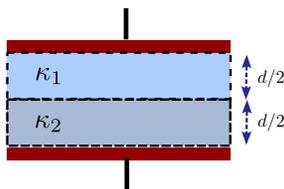


Figura 6.32: Ejemplo 6.12. Capacitor con dos medios dieléctricos en “serie”.

**Solución:** El sistema descrito por la figura 6.32 se puede simplificar al circuito mostrado en la figura 6.33, donde las capacitancias  $C_1$  y  $C_2$  corresponden a:

$$C_1 = \kappa_1 C_{0,1}, \quad C_2 = \kappa_2 C_{0,2}, \quad (6.135)$$

siendo  $C_{0,1}$  y  $C_{0,2}$  las capacitancias en ausencia de material dieléctrico, las cuales están dadas por

$$C_{0,1} = C_{0,2} = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d}{2}} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}, \quad (6.136)$$

de manera que:

$$C_1 = \frac{2\kappa_1\epsilon_0 A}{d}, \quad C_2 = \frac{2\kappa_2\epsilon_0 A}{d}. \quad (6.137)$$

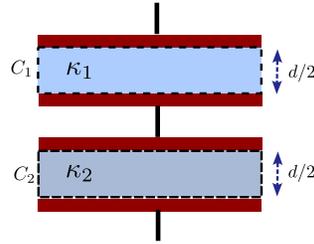


Figura 6.33: Ejemplo 6.12. Configuración equivalente del capacitor indicado en la figura 6.32.

La capacitancia equivalente del sistema es:

$$\begin{aligned} C_e &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{\frac{2\kappa_1\epsilon_0 A}{d}} + \frac{1}{\frac{2\kappa_2\epsilon_0 A}{d}} \right)^{-1} = \left( \frac{d}{2\kappa_1\epsilon_0 A} + \frac{d}{2\kappa_2\epsilon_0 A} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{d}{2\epsilon_0 A} \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \right)^{-1} = \left( \frac{d}{2\epsilon_0 A} \left( \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_1 \kappa_2} \right) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.138)$$

lo cual se podría escribir como:

$$C_e = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2 + \kappa_1} \right). \quad (6.139)$$

**Ejemplo 6.13.** El espacio entre un par de placas paralelas de área  $A$  está ocupado por dos bloques de material dieléctrico con constantes dieléctricas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , tal como se indica en la figura 6.34. En esta configuración, los bloques tienen un espesor  $d$  (distancia entre las placas) y un área  $A/2$  (siendo  $A/2$  el área de las placas metálicas), de manera que los bloques ocupan la mitad del volumen entre las placas del capacitor. Para esta configuración, se calculará la capacitancia del sistema.

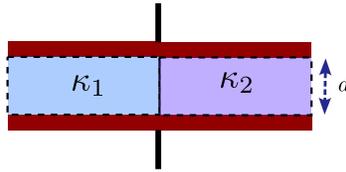


Figura 6.34: Ejemplo 6.13. Capacitor con dos medios dieléctricos en "paralelo".

**Solución:** El sistema descrito en la figura 6.34 se puede simplificar al circuito indicado en la figura 6.35, donde

$$C_1 = \kappa_1 C_{0,1}, \quad C_2 = \kappa_2 C_{0,2}, \quad (6.140)$$

siendo

$$C_{0,1} = C_{0,2} = \frac{\epsilon_0 \frac{A}{2}}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d}, \quad (6.141)$$

de manera que:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 A}{2d}, \quad C_2 = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 A}{2d}. \quad (6.142)$$

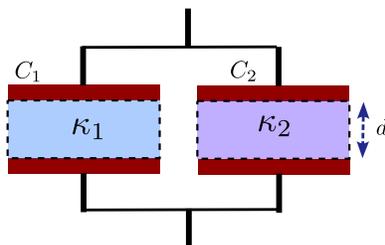


Figura 6.35: Ejemplo 6.13. Configuración equivalente al capacitor indicado en la figura 6.13.

Al estar los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  en paralelos, la capacitancia equivalente es:

$$C_e = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{2d} + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A (\kappa_1 + \kappa_2)}{2d}. \quad (6.143)$$

**Ejemplo 6.14.** El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas se llena hasta la mitad con un material dieléctrico cuya constante dieléctrica es  $\kappa = 2.00$ , tal como se muestra en la figura 6.36a. Cuando el mismo capacitor se coloca en posición horizontal, se llena parcialmente con el material dieléctrico de la misma constante  $\kappa = 2.00$ , como se indica en la figura 6.36b. Para la configuración horizontal, se determinará la altura hasta la cual debe llenarse el capacitor con el material dieléctrico para que su capacitancia sea igual a la que se obtiene cuando el capacitor está en posición vertical.

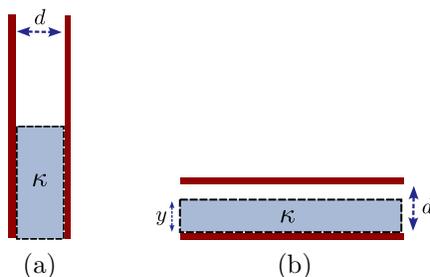


Figura 6.36: Ejemplo 6.14. Dos capacitores parcialmente llenos de un material con constante dieléctrica  $\kappa$ .

**Solución:** El sistema descrito en la figura 6.36a se puede expresar de manera equivalente el sistema indicado en la figura 6.37, para el cual se establece que,

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{A}{2}\right)}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}, \quad (6.144)$$

$$C_2 = \kappa \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{A}{2}\right)}{d} = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{2d}, \quad (6.145)$$

donde se considera que  $A$  corresponde al área de las placas y  $d$  la distancia entre estas. El sistema se interpreta como una combinación en paralelo, de manera que la capacitancia equivalente es,

$$C_p = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} + \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left( \frac{1 + \kappa}{2} \right). \quad (6.146)$$

Para el capacitor ubicado en forma horizontal, el sistema es equivalente al indicado en la figura 6.38. En este caso, se identifica que  $d - y$  está asociada a la separación entre las placas

del condensador  $C_3$ , en tanto que  $y$  corresponde a la separación entre placas del condensador  $C_4$ . En este caso, se determina que

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 A}{d - y}, \quad (6.147)$$

$$C_2 = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{y}. \quad (6.148)$$

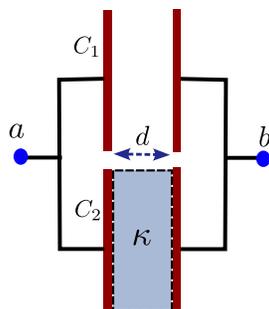


Figura 6.37: Ejemplo 6.14. Configuración equivalente asociada al capacitor indicado en la figura 6.36a.

La capacitancia equivalente de este sistema se puede evaluar a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_s} &= \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-y}} + \frac{1}{\kappa \frac{\varepsilon_0 A}{y}} = \frac{d-y}{\varepsilon_0 A} + \frac{y}{\kappa \varepsilon_0 A} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 A} \left( d - y + \frac{y}{\kappa} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \left( \frac{\kappa d - \kappa y + y}{\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 A} \left[ \frac{\kappa d + (1 - \kappa) y}{\kappa} \right], \end{aligned} \quad (6.149)$$

de manera que:

$$C_s = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{\kappa d + (1 - \kappa) y}. \quad (6.150)$$

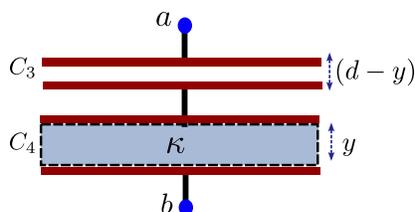


Figura 6.38: Ejemplo 6.14. Configuración equivalente asociada al capacitor indicado en la figura 6.36b.

Ahora, el valor de  $y$ , deberá ser tal que  $C_s = C_p$ , de manera que,

$$\begin{aligned} C_s &= C_p \\ &\downarrow \\ \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{\kappa d + (1 - \kappa) y} &= \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left( \frac{1 + \kappa}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.151)$$

que se reduce a

$$\frac{\kappa}{\kappa d + (1 - \kappa)y} = \frac{1}{d} \left( \frac{1 + \kappa}{2} \right), \quad (6.152)$$

↓

$$\begin{aligned} 2d\kappa &= (1 + \kappa) [\kappa d + (1 - \kappa)y] \\ &= \kappa(1 + \kappa)d + (1 + \kappa)(1 - \kappa)y \\ &= \kappa(1 + \kappa)d + (1 + \kappa)(1 - \kappa)y, \end{aligned} \quad (6.153)$$

y se tiene que,

$$\begin{aligned} (1 + \kappa)(1 - \kappa)y &= 2d\kappa - \kappa(1 + \kappa)d \\ &= \kappa d(2 - 1 - \kappa) \\ &= \kappa d(1 - \kappa), \end{aligned} \quad (6.154)$$

lo que implica que se cumpla la siguiente identidad

$$(1 + \kappa)y = \kappa d, \quad (6.155)$$

con lo cual

$$y = \frac{\kappa}{(1 + \kappa)}d, \quad (6.156)$$

por tanto, para  $\kappa = 2.00$  se establece que

$$y = \frac{2}{3}d. \quad (6.157)$$

**Ejercicio 6.11.** El condensador de placas paralelas, con un área  $A$  y una separación entre placas  $d$ , mostrado en la figura 6.39, está lleno con tres materiales dieléctricos diferentes, cuyas constantes dieléctricas son  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$ , y con espesores  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , respectivamente. Mostrar que la capacitancia equivalente del sistema es:

$$C_{eq} = \frac{d}{\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} + \frac{d_3}{\kappa_3}}. \quad (6.158)$$

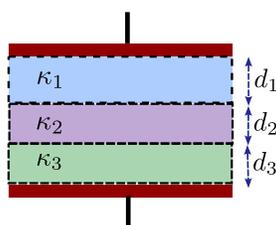


Figura 6.39: Ejercicio 6.11. Capacitor de placas paralelas lleno con tres dieléctricos.

**Ejercicio 6.12.** La figura 6.40 muestra un capacitor de placas paralelas con un área  $4.00 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ , el cual está lleno con dos láminas de material dieléctrico, cada uno con un espesor de 6.00 mm. Una de las láminas posee una constante dieléctrica de valor 3.50, mientras que la constante dieléctrica de la otra es de 5.00. Determinar la carga que el capacitor almacena si este es conectado a una batería de 9.00 V.

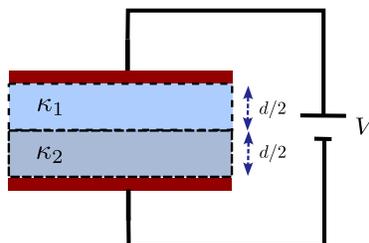


Figura 6.40: Ejercicio 6.12. Carga en un capacitor lleno con dos materiales dieléctricos en “serie”.

## 6.4. Energía de un capacitor

Si en un tiempo  $t$  un capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus conductores igual a  $\Delta\phi$ , entonces el trabajo externo necesario para llevar una carga  $dq$  desde la placa cargada negativamente hacia la placa cargada positivamente, vendrá dado por:

$$dW_{ext} = dq\Delta\phi. \quad (6.159)$$

Se debe observar, que a medida que el capacitor se carga, la diferencia de potencial  $\Delta\phi$  aumenta. Ahora, el trabajo necesario para mover una carga  $Q$  entre los conductores del capacitor será:

$$W_{ext} = \int_0^Q dq\Delta\phi. \quad (6.160)$$

Por otra parte, la capacitancia para un capacitor se define como

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{q}{C}, \quad (6.161)$$

por lo tanto,

$$W_{ext} = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{C} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C}. \quad (6.162)$$

El trabajo establecido en (6.162) corresponde a la energía potencial eléctrica almacenada cuando un capacitor tiene una carga  $Q$ ; es decir

$$U = \frac{Q^2}{2C}. \quad (6.163)$$

En un arreglo de capacitores en serie, paralelo o mixtos, la energía almacenada en el arreglo se obtiene reemplazando en la expresión (6.163) la capacitancia  $C$  por la capacitancia equivalente del circuito  $C_{eq}$ .

**Ejemplo 6.15.** Encontrar la energía potencial almacenada en el arreglo de capacitores indicado en la figura 6.11.

**Solución:** La capacitancia equivalente del circuito propuesto, fue encontrada en el ejemplo (6.6), ecuación (6.78) con un valor de

$$C_{abcde} = 62C/41. \quad (6.164)$$

y se encontró que la carga tenía un valor de (ver ecuación (6.79))

$$Q_{abcde} = \frac{62C}{41}V. \quad (6.165)$$

Por lo tanto, la energía almacenada en el arreglo será:

$$U = \frac{Q_{abcde}^2}{2C_{abcde}} = \frac{\left(\frac{62C}{41}V\right)^2}{2\left(\frac{62C}{41}\right)} = \frac{31V^2}{41C}. \quad (6.166)$$

**Ejercicio 6.13.** Encontrar la energía potencial eléctrica almacenada en cada uno de los capacitores indicados en la figura 6.11, para los cuales se tiene que:

$$\begin{aligned} C_a &= C_c = 3C, \\ C_b &= C_d = C_e = 2C. \end{aligned} \quad (6.167)$$

**Ejemplo 6.16.** Para el sistema de capacitores mostrado en la figura 6.41, la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es de  $20\text{ V}$ . Las capacitancias de los capacitores son:  $C_1 = 8.6\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.8\mu\text{F}$ ,  $C_3 = 6.2\mu\text{F}$ ,  $C_4 = 11.8\mu\text{F}$  y  $C_5 = 3.5\mu\text{F}$ . Para el sistema planteado, se calculará la energía total almacenada en el sistema y se determinará la energía almacenada en el capacitor de  $4.80\mu\text{F}$ .

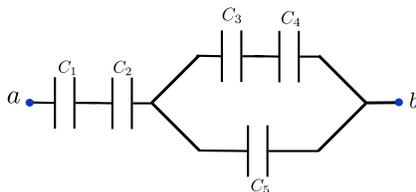


Figura 6.41: Ejemplo 6.16. Energía potencial eléctrica en un arreglo de cinco capacitores en configuración en mixta (serie y paralelo).

**Solución:** El sistema mostrado en la figura 6.41 se puede reducir al circuito indicado en la figura 6.42, donde los capacitores  $C_{e1}$  y  $C_{e2}$  están dados por:

$$C_{e1} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{8.60\mu\text{F}} + \frac{1}{4.80\mu\text{F}}\right)^{-1} = 3.08\mu\text{F}, \quad (6.168)$$

$$C_{e2} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6.20\mu\text{F}} + \frac{1}{11.8\mu\text{F}}\right)^{-1} = 4.06\mu\text{F}. \quad (6.169)$$

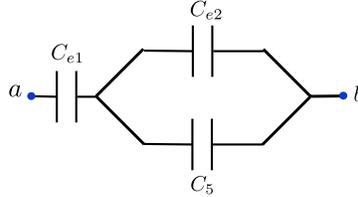


Figura 6.42: Ejemplo 6.16. Primera simplificación del circuito indicado en la figura 6.41.

Ahora, bajo una simplificación adicional el circuito se puede reducir al indicado en la figura 6.43, donde se tiene que:

$$C_{e3} = C_{e2} + C_5 = 4.06 \mu F + 3.50 \mu F = 7.56 \mu F. \quad (6.170)$$



Figura 6.43: Ejemplo 6.16. Segunda simplificación del circuito indicado en la figura 6.42.

Finalmente, el sistema indicado en la figura 6.43 se reduce a un solo capacitor de capacitancia

$$C_{e4} = \left( \frac{1}{C_{e1}} + \frac{1}{C_{e3}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{3.08 \mu F} + \frac{1}{7.56 \mu F} \right)^{-1} = 2.19 \mu F. \quad (6.171)$$

Ahora, siendo que la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  es de  $V_{ab} = 20 V$ , la energía del sistema es equivalente a la energía almacenada en  $C_{e4}$ , y dado que

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}C(V)^2, \quad (6.172)$$

la energía almacenada por el condensador  $C_{e4}$  es:

$$U_{C_{e4}} = \frac{1}{2}C_{e4}(V_{ab})^2 = \frac{1}{2}(2.19 \mu F)(20 V)^2 = 438 J. \quad (6.173)$$

Al estar los condensadores  $C_{e1}$  y  $C_{e3}$  en serie, la carga que almacenan es la misma que aquella correspondiente al condensador  $C_{e4}$ , la cual es dada por:

$$Q_{e4} = C_{e4}V_{ab} = (2.19 \mu F)(20 V) = 43.8 \mu C, \quad (6.174)$$

con lo cual, se determina que la carga de los condensadores  $C_{e1}$  y  $C_{e3}$  es:

$$Q_{e4} = Q_{e1} = Q_{e3} = 43.8 \mu C. \quad (6.175)$$

Ahora, la capacitancia  $C_{e1}$  resulta también de la combinación en serie de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , por tanto, se puede establecer que la carga que almacena el condensador  $C_2 = 4.80 \mu F$  es:

$$Q_{e1} = Q_1 = Q_2 = 43.8 \mu C. \quad (6.176)$$

Así, la energía potencial correspondiente a este condensador es:

$$U_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{(43.8 \mu C)^2}{2(4.80 \mu F)} = 0.19 mJ. \quad (6.177)$$

**Ejemplo 6.17.** Para el circuito mostrado en la figura 6.44, la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es de  $85\text{ V}$  y las capacitancias son:  $C_1 = 20\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10\mu\text{F}$ ,  $C_3 = 40\mu\text{F}$ ,  $C_4 = 50\mu\text{F}$ ,  $C_5 = 30\mu\text{F}$  y  $C_6 = 25\mu\text{F}$ . Para la configuración planteada, se determinará la energía almacenada en el sistema.

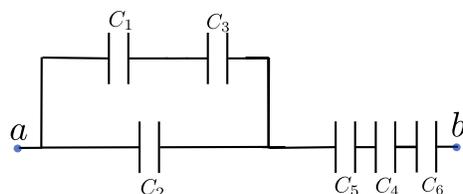


Figura 6.44: Ejemplo 6.17. Energía almacenada en un arreglo de seis capacitores en configuración mixta.

**Solución:** El circuito mostrado en la figura 6.44 se puede reducir al circuito indicado en la figura 6.45. Las capacitancias  $C_{e1}$  y  $C_{e2}$  son:

$$C_{e1} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{20.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{40.0\ \mu\text{F}} \right)^{-1} = 13.3\ \mu\text{F}. \quad (6.178)$$

$$C_{e2} = \left( \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{50.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{30.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{25.0\ \mu\text{F}} \right)^{-1} = 10.7\ \mu\text{F}. \quad (6.179)$$

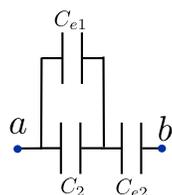


Figura 6.45: Ejemplo 6.17. Primera simplificación al arreglo de capacitores indicado en la figura 6.44.

Ahora, el sistema indicado en la figura 6.45 se puede simplificar al indicado en la figura 6.46, donde la capacitancia  $C_{e3}$  viene dada por:

$$C_{e3} = C_{e1} + C_2 = 13.3\ \mu\text{F} + 10.0\ \mu\text{F} = 23.3\ \mu\text{F}. \quad (6.180)$$

Finalmente, el sistema se reduce a un circuito de un solo condensador de valor:

$$C_{e4} = \left( \frac{1}{C_{e2}} + \frac{1}{C_{e3}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{10.7\ \mu\text{F}} + \frac{1}{23.3\ \mu\text{F}} \right)^{-1} = 73.3\ \mu\text{F}. \quad (6.181)$$



Figura 6.46: Ejemplo 6.17. Segunda simplificación al arreglo de capacitores indicado en la figura 6.44.

Ahora, la energía total del sistema es aquella almacenada por el capacitor  $C_{e4}$ , de manera que:

$$U_{C_{e4}} = \frac{1}{2} C_{e4} (V_{ab})^2 = \frac{1}{2} (73.3\ \mu\text{F}) (85\ \text{V})^2 = 264\ \text{mJ}. \quad (6.182)$$

**Ejercicio 6.14.** Para el sistema de capacitores descritos en el Ejemplo 6.16, calcular la energía potencial asociada a los demás capacitores.

**Ejercicio 6.15.** Para el sistema de capacitores indicados en el Ejemplo 6.17, calcular: a) La carga almacenada por los capacitores  $C_1$  y  $C_6$ , b) la diferencia de potencial en los capacitores  $C_2$  y  $C_3$ , c) la energía asociada a cada capacitor. Lo anterior teniendo en cuenta que:  $C_1 = 20\mu F$ ,  $C_2 = 10\mu F$ ,  $C_3 = 40\mu F$ ,  $C_4 = 50\mu F$ ,  $C_5 = 30\mu F$  y  $C_6 = 25\mu F$ .

**Ejercicio 6.16.** Cuatro capacitores son conectados como se muestra en la figura 6.47. Para una diferencia de potencial entre los puntos a y b de 25 V, calcular la energía almacenada por cada capacitor en el circuito.

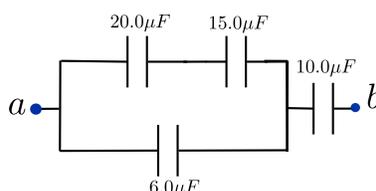


Figura 6.47: Ejercicio 6.16. Energía almacenada en cuatro capacitores en arreglo mixto.

**Ejercicio 6.17.** La figura 6.48 muestra un sistema de capacitores con las siguientes capacitancias:  $C_1 = 4.80 \mu F$ ,  $C_2 = C_4 = 2.40 \mu F$  y  $C_3 = C_5 = 9,5 \mu F$ . Para el sistema descrito calcular la energía potencial del sistema y la energía potencial correspondiente a cada capacitor si la diferencia de potencial entre el punto a y b es de 250 V.

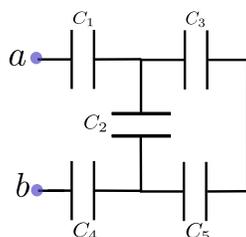


Figura 6.48: Ejercicio 6.17. Energía almacenada en cinco capacitores en arreglo mixto.

**Ejercicio 6.18.** La diferencia de potencial entre los puntos a y b para el sistema de capacitores que se indica en la figura 6.49 es de 2.0 V. Calcular la energía potencial del sistema en caso que el interruptor S esté abierto y para cuando esté cerrado.

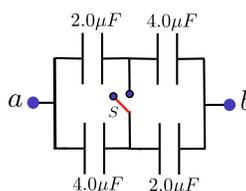


Figura 6.49: Ejercicio 6.18. Energía potencial de cuatro capacitores con configuraciones: con interruptor cerrado e interruptor abierto.

**Ejercicio 6.19.** Dos capacitores se conectan en serie y la combinación se conecta a una batería de 10.0 V. Un capacitor posee una capacitancia de  $6.00 \mu F$  y la diferencia de potencial a través del otro es de 5.00 V. Determinar la capacitancia del segundo capacitor y la energía almacenada en cada capacitor.

**Ejercicio 6.20.** Una lámina de material dieléctrico, caracterizada por una constante  $\kappa$  y espesor  $b$ , se ubica exactamente en la mitad de un capacitor de placas paralelas de área  $A$  y separación  $d$  (ver figura 6.50). Para la situación planteada, calcular: a) la capacitancia del sistema. b) Si una carga  $Q$  se distribuye entre las placas, encontrar la razón entre la energía almacenada por el condensador antes y después de insertar el material dieléctrico.

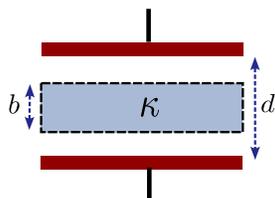


Figura 6.50: Ejercicio 6.20. Capacitor parcialmente lleno de material dieléctrico.

**Ejercicio 6.21.** En la figura 6.51 se muestra un sistema de dos capacitores de placas paralelas  $A$  y  $B$  conectados través de una diferencia de potencial suministrado por una batería de  $650\text{ V}$ . Cada placa tiene una área de  $90.0\text{ cm}^2$  y una separación entre placas de  $50.0\text{ mm}$ . El condensador  $A$  está lleno de aire en tanto que el  $B$  está lleno de un material de constante dieléctrica  $\kappa = 3.50$ . Para el sistema planteado calcular: a) la intensidad del campo eléctrico en cada una de los condensadores. b) Determinar la densidad superficial de carga de cada condensador. c) La energía del sistema y la de cada condensador.

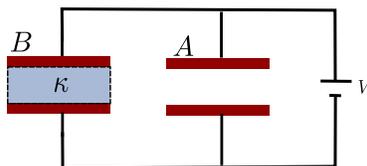


Figura 6.51: Ejercicio 6.21. Energía almacenada en condensadores en paralelo.

**Pregunta 6.1.** Si se duplica el voltaje aplicado a un capacitor, ¿qué sucede con la carga almacenada?

- Se duplica
- Se reduce a la mitad
- Se mantiene igual
- Se cuadruplica

**Pregunta 6.2.** Dos capacitores de  $6\mu\text{F}$  y  $3\mu\text{F}$  están en paralelo y se conectan a una batería de  $12\text{V}$ . Luego, se desconectan de la batería y se conectan entre sí con placas de signos opuestos en contacto. ¿Cuál es la diferencia de potencial final?

- $4\text{V}$
- $6\text{V}$
- $8\text{V}$

d. 10V

**Pregunta 6.3.** En un capacitor de placas paralelas, si la distancia entre placas se duplica y la carga se mantiene constante, ¿qué sucede con la diferencia de potencial?

- a. Se duplica
- b. Se reduce a la mitad
- c. Se mantiene constante
- d. Se cuadruplica

**Pregunta 6.4.** Cinco capacitores de placas paralelas tienen las siguientes áreas de placa y separaciones entre placas:

- Capacitor 1 ( $C_1$ ): área  $a_0$ , separación  $d_0$ .
- Capacitor 2 ( $C_2$ ): área  $3a_0$ , separación  $3d_0$ .
- Capacitor 3 ( $C_3$ ): área  $2a_0$ , separación  $\frac{d_0}{2}$ .
- Capacitor 4 ( $C_4$ ): área  $\frac{a_0}{2}$ , separación  $2d_0$ .
- Capacitor 5 ( $C_5$ ): área  $a_0$ , separación  $\frac{d_0}{3}$ .

En ese caso, el orden de los capacitores de menor a mayor capacitancia es:

- a.  $C_4 < C_2 < C_1 < C_3 < C_5$
- b.  $C_2 < C_4 < C_1 < C_5 < C_3$
- c.  $C_1 < C_2 < C_4 < C_3 < C_5$
- d.  $C_4 < C_1 < C_2 < C_3 < C_5$

**Pregunta 6.5.** Un capacitor de placas paralelas tiene un área de placas de  $0.3\text{m}^2$  y una separación entre placas de  $0.2\text{mm}$ . Para obtener un campo eléctrico de  $1.5 \times 10^6\text{V/m}$  entre las placas, ¿cuál debe ser la magnitud de la carga en cada placa?

- a.  $0.5\mu\text{C}$
- b.  $1.0\mu\text{C}$
- c.  $2.0\mu\text{C}$
- d.  $4.0\mu\text{C}$

**Pregunta 6.6.** Considerar un capacitor esférico de radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$ , en ese sistema la capacitancia es proporcional a

- a.  $\frac{R_1}{R_2}$
- b.  $R_2 - R_1$
- c.  $R_2^2 - R_1^2$
- d.  $\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

**Pregunta 6.7.** La capacitancia de un capacitor cilíndrico puede aumentarse mediante:

- a. Disminuir tanto el radio del cilindro interno como la longitud.
- b. Aumentar tanto el radio del cilindro interno como la longitud.
- c. Aumentar el radio del cilindro externo y disminuir la longitud.
- d. Disminuir el radio del cilindro interno y aumentar el radio del cilindro externo.

# 7– Corriente Eléctrica

---

En general las cargas eléctricas están en movimiento, lo cual conlleva a importantes consecuencias físicas más allá de las propiedades ya estudiadas por solo la presencia de cargas eléctricas en el espacio (como el campo eléctrico). Por lo cual, el estudio del movimiento de cargas eléctricas es de fundamental importancia para entender conceptos físicos, como campo magnético y ondas electromagnéticas, entre otros. Como punto de partida se comienza por definir el concepto de corriente eléctrica.

Para analizar el movimiento de portadores de carga dentro de un medio, se contabilizan las cargas que atraviesan una sección transversal del mismo. La corriente eléctrica se define como la cantidad total de carga que pasa a través de dicha sección transversal en un intervalo de tiempo.

El medio por el cual las cargas pueden moverse puede ser un fluido (gas o líquido), un sólido, o incluso el espacio vacío. Las cargas en movimiento pueden ser positivas (como protones o iones positivos) o negativas (como electrones o moléculas con exceso de carga negativa). Una solución de agua y sal es un buen conductor, en el que los portadores de carga son moléculas cargadas que se desplazan a través del fluido, generando corriente eléctrica.

En un sólido conductor, existen electrones débilmente ligados a los átomos que componen el material, lo que permite un transporte relativamente fácil de cargas. Este movimiento es posible generalmente cuando se aplica una diferencia de potencial a lo largo del material.

En este texto se presenta únicamente el estudio de corriente eléctrica a través de medios conductores sólidos; es decir, se considera que los portadores de carga son electrones libres, y cuando se haga referencia a un conductor, se debe entender que se trata de un sólido conductor.

Un conductor (como por ejemplo un cable cilíndrico) presenta una área transversal al flujo de electrones (ver figura 7.2) y en cualquier parte del material se puede establecer el número de cargas  $\Delta q$  que atraviesa la sección transversal del mismo en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La corriente se define entonces como la carga que atraviesa una área transversal del conductor en un intervalo de tiempo, cuando dicho intervalo tiende a cero, lo cual matemáticamente se expresa como:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

La corriente eléctrica es un escalar, por lo tanto, no tiene una dirección asociada como ocurre con las cantidades vectoriales. Es importante señalar que, en muchos libros de texto, se asigna una dirección convencional a la corriente eléctrica basándose en la velocidad de los portadores de carga positiva dentro del conductor (o su equivalente en caso de portadores con carga negativa). Sin embargo, dicha dirección corresponde realmente al vector velocidad de las partículas en movimiento, no a la corriente como tal.

Una característica importante en la definición de corriente eléctrica es que la carga eléctrica asociada siempre se considera positiva, incluso cuando las partículas en movimiento tienen carga negativa. Para ilustrar este concepto, se presenta la siguiente situación: se considera un conductor cilíndrico donde se señalan dos puntos como se observa en la figura 7.1. Además, se asume que un electrón con carga  $e$  ( $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ ) se encuentra en la posición  $A$  del conductor en el instante  $t = t_1$ , y que en el tiempo  $t_2$  se ha desplazado al punto  $B$ . En este caso, se puede establecer que durante el tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , una carga igual a  $-e$  ( $-e < 0$ ) se movió desde el punto  $A$  al punto  $B$ , es decir, de izquierda a derecha.

Bajo esta interpretación, se entiende que en intervalo  $\Delta t$ , el punto  $A$  aumentó su carga en una cantidad  $+e$  ( $+e > 0$ ), mientras que el punto  $B$  la disminuyó en la misma cantidad  $-e$ . Esto puede interpretarse como el movimiento de una carga positiva  $+e$  de derecha a izquierda durante el mismo intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Esta convención, basada en el desplazamiento equivalente de carga positiva, es la que se utiliza en la definición de corriente eléctrica, incluso cuando los portadores de carga son negativos.



Figura 7.1: Interpretación de la corriente eléctrica con portadores de carga negativa.

A pesar de lo mencionado anteriormente, en un gran número de textos (y también en este texto), la corriente se representa esquemáticamente mediante una flecha. Aunque una flecha es una notación típica de una magnitud vectorial, es importante aclarar que la corriente eléctrica es una magnitud escalar. El uso de la flecha tiene como propósito indicar la dirección del flujo de partículas cargadas en el material conductor (o la dirección opuesta en el caso de cargas negativas). Esta dirección está asociada, en realidad, al vector velocidad de las partículas cargadas, o en materiales óhmicos <sup>1</sup> a la dirección del campo eléctrico en cada punto del conductor. En ningún caso debe interpretarse que la flecha representa una dirección inherente a la corriente eléctrica según su definición formal dada por la ecuación (7.1). Por lo tanto, cuando se utilice una flecha para representar la corriente, debe entenderse que esta simboliza la dirección de una magnitud vectorial relacionada, como la velocidad de los portadores o el campo eléctrico, y no una propiedad vectorial de la corriente misma.

<sup>1</sup> Materiales que obedecen la ecuación (7.11) que se explicará en una próxima sección

En el Sistema Internacional de medidas la unidad fundamental de corriente eléctrica es el Amperio y teniendo en cuenta (7.1), un amperio ( $A$ ) es:

$$A = \frac{\text{Culombio}}{\text{segundo}}. \quad (7.2)$$

En un conductor los electrones siempre están en movimiento a velocidades muy altas, pero dicho movimiento es aleatorio y en general no existe un desplazamiento neto de los portadores de carga a lo largo del material. Cuando existe un campo eléctrico a lo largo del conductor, a pesar de los múltiples choques que sufren los electrones con los átomos del material y otros electrones, se genera un desplazamiento neto a lo largo del conductor (los electrones se mueven en dirección contraria al campo). El desplazamiento neto de los electrones se asocia a la velocidad de deriva  $v_d$ , que es muy pequeña en comparación con la velocidad que en general tienen los electrones en el material; es decir, los electrones en presencia del campo eléctrico se mueven chocando unos con otros en el proceso, pero en promedio tienen una velocidad en dirección contraria al campo eléctrico, que representa la velocidad de deriva.

La corriente en un conductor se puede escribir en términos de la velocidad de deriva. Para deducir dicha relación, se hará uso de la figura 7.2 donde se ha esquematizado un volumen  $\Delta V$  de un conductor cilíndrico.

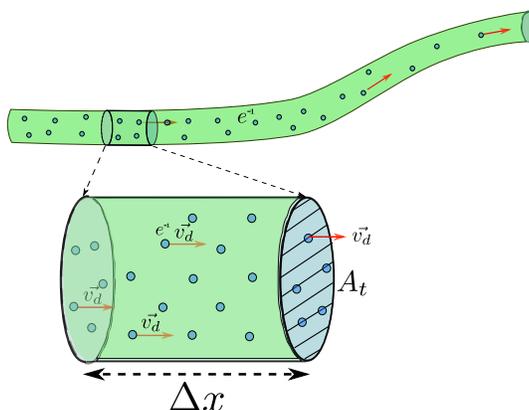


Figura 7.2: Movimiento de portadores de carga en un conductor lineal

Se asume que todas las partículas dentro del volumen  $\Delta V$  se mueven a lo largo del conductor con una velocidad de deriva constante  $\vec{v}_d$ , en la dirección  $\hat{i}$  como se muestra en la figura 7.2. Con base en esto, las partículas situadas en el extremo izquierdo del volumen  $\Delta V$  requieren un tiempo  $\Delta t = \Delta x/v_d$  para recorrer la distancia  $\Delta x$  asociada al volumen  $\Delta V$ . Si las partículas en el extremo izquierdo del volumen  $\Delta V$  demoran  $\Delta t$  en atravesar dicho volumen, entonces cualquier electrón que se encuentre dentro del volumen  $\Delta V$  saldrá de este en un

tiempo menor que  $\Delta t$ . Esto implica que todas las partículas contenidas en el volumen  $\Delta V$  abandonan dicho volumen en un tiempo  $\Delta t$ . El número de partículas que salen del volumen  $\Delta V$  durante el tiempo  $\Delta t$  se denota  $N_{\Delta V}$ . Por otra parte, el número de portadores de carga en el material por unidad de volumen está dado por:

$$n = N/V, \quad (7.3)$$

donde  $N$  representa al número total de portadores de carga y  $V$  el volumen total del material; es decir,  $n$  representa una densidad de portadores de carga. Si  $n$  es uniforme a lo largo de todo el material, entonces se tiene que:

$$N_{\Delta V} = n\Delta V. \quad (7.4)$$

El número de cargas  $N_{\Delta V}$  por la carga de cada electrón ( $q$ ) representa la carga total  $\Delta Q$  en el volumen  $\Delta V$ , tal que:  $\Delta Q = N_{\Delta V}q$ . La carga  $\Delta Q = N_{\Delta V}q$  atraviesa la sección  $A_t$  (sección transversal del conductor) en el tiempo  $\Delta t$ . Por lo anterior la corriente sobre el área  $A_t$  está dada por:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\Delta V}q}{\Delta t} = nq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (7.5)$$

Por otra parte, geoméricamente  $\Delta V = A_t\Delta x$ , por lo tanto:

$$I = nq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = nqA_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (7.6)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $v_d = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , se tiene que:

$$I = nqA_tv_d. \quad (7.7)$$

El resultado anterior muestra una dependencia explícita de la corriente con el área transversal del conductor; además, existe una relación con la magnitud de la velocidad de deriva. Por esta razón, es útil definir una nueva magnitud vectorial, independiente del área transversal, cuya dirección corresponde a la dirección del campo eléctrico o a la velocidad de deriva (siempre que la velocidad sea originada exclusivamente por el campo eléctrico). Tal magnitud se conoce como la densidad de corriente y se denota como  $\vec{J}$ . La magnitud de la densidad de corriente se define como:

$$J = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{dI}{dA}, \quad (7.8)$$

La dirección de la densidad de corriente corresponde a la velocidad de deriva en cada punto del conductor. Teniendo en cuenta la definición (7.8) y la ecuación (7.7), se tiene que (tomando  $A_t \equiv A$ ):

$$J = \frac{dI}{dA} = qnvd, \quad (7.9)$$

o

$$\vec{J} = qn\vec{v}_d. \quad (7.10)$$

La densidad de corriente se puede definir directamente en términos del campo eléctrico en ciertos materiales (denominados materiales óhmicos), a través de la ley de Ohm, la cual se puede escribir en la forma:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (7.11)$$

donde  $\sigma$  se denomina conductividad del material (no se debe confundir con la densidad superficial de carga) y es un parámetro que depende de las propiedades físicas del material que se mide en unidades del inverso de ohmios por metro<sup>2</sup> ( $1/(\Omega \cdot m)$ ). La conductividad es un coeficiente que indica, en cierto modo, qué tan fácil es poner en movimiento las cargas en un conductor: a mayor conductividad, mayor será la densidad de corriente.

Otra magnitud importante es la resistividad, que se define como el inverso de la conductividad:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (7.12)$$

La resistividad se mide en metros por ohmios ( $m \cdot \Omega$ ). En general la resistividad (y de igual forma la conductividad) es una propiedad de los materiales que depende de la temperatura. Para metales y para cierto intervalo de temperatura, la relación entre resistividad y temperatura viene dada por:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha(T - T_0)). \quad (7.13)$$

El valor  $\rho_0$  es la resistividad del material medida a la temperatura  $T_0$  (una temperatura de referencia, como la temperatura ambiente) y constituye una condición inicial para la ecuación (7.13). Por otra parte,  $\alpha$  es una constante adimensional denominada coeficiente de temperatura para la resistividad, que depende del material. En general, se determina experimentalmente en laboratorios, y existen tablas con valores de  $\alpha$  para diversos materiales que se pueden consultar en la literatura.

---

<sup>2</sup> Los ohmios corresponden a la unidad de medida de la resistencia eléctrica, que se simboliza con la letra griega  $\Omega$  y que se definirá en la sección (7.1) en la expresión (7.42) a partir de la ecuación (7.41).

Para algunos materiales, tales como el aluminio, cobre, hierro, entre otros, la constante de resistividad es positiva. Por tanto, para una temperatura  $T > T_0$ , se puede deducir a partir de (7.13) que la resistividad aumenta a medida que se incrementa  $T$ ; es decir, al aumentar la temperatura, el material dificulta el movimiento de los portadores de carga. Esto se debe a que los átomos del material vibran con mayor amplitud, lo que incrementa la probabilidad de choque de los portadores de carga móviles, y por tanto disminuyendo su velocidad.

**Ejemplo 7.1.** La densidad de corriente en un alambre cilíndrico está dada por:  $\vec{J}(\rho) = C\rho\hat{k}$ , donde  $\rho$  es la distancia radial medida desde el eje central, en tanto que  $C$  es una constante con unidades de corriente sobre volumen. El radio del alambre es  $R$ . Para la configuración planteada se encontrará: a) la corriente transportada por el alambre, b) la corriente a través de un anillo concéntrico al alambre que tiene un ancho radial de  $\frac{R}{10}$  y cuyo radio interior es  $\frac{R}{2}$ .

**Solución:**

a) La corriente transportada por el alambre se determina a partir de:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}, \quad (7.14)$$

por lo tanto, la corriente eléctrica representa el flujo del vector de densidad de corriente. Dada la simetría del problema, es conveniente resolver el problema en coordenadas cilíndricas con lo cual el elemento de área  $d\vec{a}$  asociado a la superficie  $S$ , viene dado por:

$$d\vec{a} = da\hat{k} = \rho d\rho d\phi\hat{k}, \quad (7.15)$$

de manera que la corriente total transportada por el alambre es:

$$\begin{aligned} I &= \int_S (C\rho\hat{k}) \cdot (\rho d\rho d\phi\hat{k}) \doteq C \underbrace{\int_0^R \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &\doteq \frac{2\pi}{3} R^3 C. \end{aligned} \quad (7.16)$$

b) Ahora, para la corriente contenida en el anillo de ancho radial  $\frac{R}{10}$ , se tiene que :

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = B \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2} + \frac{R}{10}} \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = 2\pi B \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{3}{5}R} \rho^2 d\rho \\ &\doteq 2\pi B \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right)_{\frac{R}{2}}^{\frac{3}{5}R} \doteq \frac{2\pi}{3} B \left[ \left( \frac{3}{5}R \right)^3 - \left( \frac{R}{2} \right)^3 \right] \\ &\doteq \frac{91}{1500} \pi R^3 B. \end{aligned} \quad (7.17)$$

**Ejemplo 7.2.** En este ejemplo, se evaluará la corriente en un alambre de sección transversal circular de radio  $R$ , si la magnitud de la densidad de corriente es dada por: a)  $J(\rho) = J_0 \frac{\rho}{R}$  y

b)  $J(\rho) = J_0 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$ , donde  $\rho$  corresponde a la coordenada radial en coordenadas cilíndricas, y  $J_0$  es una constante medida en amperios por metro cuadrado. La densidad de corriente se dirige a lo largo del eje de simetría del cilindro.

**Solución:**

a) La corriente en el alambre con  $J(\rho) = J_0 \frac{\rho}{R}$  es:

$$\begin{aligned} I &= \int_S \left( J_0 \frac{\rho}{R} \hat{k} \right) \cdot (\rho d\rho d\phi \hat{k}) \equiv \underbrace{\frac{J_0}{R} \int_0^R \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &= \frac{J_0}{R} \left( \frac{1}{3}R^3 \right) (2\pi) = \frac{2\pi}{3} J_0 R^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

b) De manera similar, para el caso donde  $J(\rho) = J_0 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_S \left[ J_0 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \hat{k} \right] \cdot (\rho d\rho d\phi \hat{k}) \equiv J_0 \int_0^R \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &= 2\pi J_0 \left( \underbrace{\int_0^R \rho d\rho}_{\frac{1}{2}R^2} - \frac{1}{R} \underbrace{\int_0^R \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}R^3} \right) = 2\pi J_0 \left[ \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{R} \left( \frac{1}{3}R^3 \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{3} R^2 J_0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

**Ejemplo 7.3.** Un conductor transporta una corriente cuya función con respecto al tiempo viene dada por:  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , donde  $I_0 = 3.0$  A es la corriente medida a  $t = 0.0$  s y donde  $\tau = 0.50$  s. Para la situación descrita, se determinará la carga que fluye por el conductor entre  $t = 0.0$  s y  $t = 4\tau$ .

**Solución:** La corriente que circula en un conductor por definición, está dada por:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (7.20)$$

por lo tanto, la cantidad de carga  $dq$  transportada en un intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$dq(t) = I(t) dt, \quad (7.21)$$

a partir de lo cual se puede establecer que la carga que circula en un intervalo de  $t = 0$  s hasta un tiempo  $t$  arbitrario es:

$$\int_0^Q dq(t) = Q(t) = \int_0^t I(t') dt', \quad (7.22)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t I_0 e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' = I_0 \int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' = I_0 \left( -\tau e^{-\frac{t'}{\tau}} \right)_0^t \\ &= \tau I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Ahora, para un  $t = 4\tau$  se tiene,

$$\begin{aligned} Q(4\tau) &= \tau I_0 \left( 1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}} \right) = \tau I_0 (1 - e^{-4}) \\ &= (0.50 \text{ s}) (3.0 \text{ A}) (1 - e^{-4}) \\ &= 1.47 \text{ C}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

**Ejemplo 7.4.** La definición más general del coeficiente de temperatura para una resistencia se expresa como:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \quad (7.25)$$

donde  $\rho$  es la resistividad medida a una temperatura  $T$ . Si se asume que  $\alpha$  es constante, se encontrará una relación para la resistividad en función de la temperatura.

**Solución:** De la relación (7.25) se puede deducir que:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha dT, \quad (7.26)$$

integrando 7.26 con las condiciones:  $\rho = \rho_0$  para  $T = T_0$ , y  $\rho(T)$  para una temperatura arbitraria  $T$ , se tiene que

$$\int_{\rho_0}^{\rho(T)} \frac{d\rho}{\rho} = \alpha \int_{T_0}^T dT', \quad (7.27)$$

$$\downarrow$$

$$\ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho(T)} = \ln \rho(T) - \ln \rho_0 = \alpha (T - T_0), \quad (7.28)$$

$$\downarrow$$

$$\ln \left[ \frac{\rho(T)}{\rho_0} \right] = \alpha (T - T_0), \quad (7.29)$$

resultado que se puede escribir como:

$$\rho(T) = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)}. \quad (7.30)$$

Ahora, si se considera que  $\alpha(T - T_0) \ll 1$ , es posible aproximar la relación anterior utilizando la siguiente expansión,

$$e^x \simeq 1 + x \quad \text{si} \quad x \ll 1. \quad (7.31)$$

De manera que:

$$\rho(T) = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)} \simeq \rho_0 \left[ 1 + \alpha(T - T_0) \right]. \quad (7.32)$$

El anterior resultado da la relación de la resistividad en función de la temperatura introducido en la ecuación (7.13).

**Ejercicio 7.1.** La magnitud de la densidad de corriente en un alambre cilíndrico de sección transversal circular de radio  $R$  es dado por:  $J(\rho) = C\rho^2$ , donde  $C$  es una constante (la dirección de la densidad de corriente se encuentra a lo largo del eje de simetría del alambre). Calcular la corriente a través de un disco circular, delimitado entre  $\rho = \frac{2}{3}R$  y  $\rho = R$ .

**Ejercicio 7.2.** Un alambre cilíndrico de radio  $r$  posee una resistencia  $R$ . Evaluar la resistencia de un segundo alambre hecho del mismo material que posee la mitad de la longitud y la mitad del diámetro del alambre original.

**Ejercicio 7.3.** La corriente en un alambre cambia con el tiempo de acuerdo con la relación:  $I(t) = I_0 - \alpha t^2$ , con  $I_0 = 60$  A y  $\alpha = 0.75 \frac{A}{s^2}$ . Calcular la cantidad de carga que cruza la sección transversal del alambre en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0.0$  s y  $t = 10.0$  s.

**Ejercicio 7.4.** La carga que circula en un cable se modela por medio de la siguiente ecuación:  $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{T}}$ , donde  $q_0 = 15.0$  C y  $T = 10$  s. Para el caso planteado calcular: a) La corriente en  $t = \frac{1}{3}T$ , b) evaluar el instante en que la corriente se reduce a la mitad de su valor inicial.

**Ejercicio 7.5.** Una barra en forma de cubo de lado  $L = 4.0$  cm, posee una densidad de corriente dada por:  $\vec{J} = J_0 e^{\beta x} \hat{k}$ , donde  $J_0 = 0.40 \frac{A}{m^2}$  y  $\beta = 1.2 \times 10^{-3} m^{-1}$ . La disposición de la barra sobre un eje cartesiano se indica en la figura 7.3. Para el sistema planteado, calcular la corriente que pasa por una cara perpendicular al eje  $z$  y que corta al eje  $z$  en el punto  $z = 0$ .

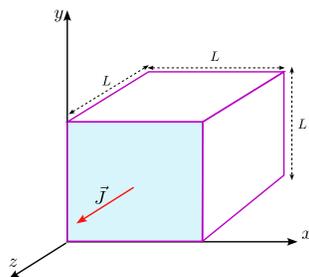


Figura 7.3: Ejercicio 7.5. Cálculo de corriente eléctrica por una cara de un cubo.

## 7.1. Ley de Ohm y resistencia eléctrica

En la ecuación (7.11) se ha definido la densidad de corriente en términos del campo eléctrico, relación que se conoce como la ley de Ohm. Sin embargo, existen otras expresiones equivalentes para la ley de Ohm, una de las cuales relaciona la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor y la corriente que circula por dicho conductor. Para deducir dicha relación en forma sencilla a partir de (7.11), se considera un conductor con un segmento recto entre dos puntos  $a$  y  $b$  donde circula una densidad de corriente constante que se pueda escribir como  $J = I/A$ . En ese caso se tiene que:

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{E} = \sigma \vec{E}, \quad (7.33)$$

donde  $\hat{E}$  representa un vector unitario adimensional en dirección  $\vec{E}$ . Si se multiplica la expresión por el desplazamiento infinitesimal a lo largo del conductor  $\vec{dl}$  y se integra entre los puntos  $a$  y  $b$  del conductor, se tiene que:

$$\int_a^b \frac{I}{A} \hat{E} \cdot \vec{dl} = \sigma \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (7.34)$$

Ahora, teniendo en cuenta que la diferencia de potencial entre el punto  $a$  y  $b$  se define como:

$$\Delta\phi = - \int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}, \quad (7.35)$$

se tiene que:

$$\int_a^b \frac{I}{A} \hat{E} \cdot \vec{dl} = \sigma \Delta\phi. \quad (7.36)$$

Dado que se ha asumido una densidad de corriente constante, donde tanto  $I$  como  $A$  mantienen constantes en el tramo comprendido entre  $a$  y  $b$ , y adicionalmente que el campo eléctrico está en dirección del desplazamiento infinitesimal  $\vec{dl}$ , el lado izquierdo de la expresión (7.36) se puede escribir como:

$$\int_a^b \frac{I}{A} \hat{E} \cdot \vec{dl} = \frac{I}{A} \int_a^b dl = \frac{I}{A} (a - b) = \frac{I}{A} L, \quad (7.37)$$

donde  $L$  representa la distancia entre  $a$  y  $b$ . Con lo anterior la ecuación (7.36) toma la forma:

$$\frac{I}{A} L = \sigma \Delta\phi. \quad (7.38)$$

Denotando  $\Delta\phi \equiv V$ , a partir de (7.38) se tiene que:

$$V = I \left( \frac{L}{\sigma A} \right) \equiv I \left( \frac{\rho L}{A} \right). \quad (7.39)$$

La cantidad  $\left( \frac{\rho L}{A} \right)$  que aparece en la última expresión se conoce como resistencia eléctrica del material conductor y se representa con la letra  $R$ , la cual depende de las características físicas y geométricas del material, es decir:

$$R = \left( \frac{\rho L}{A} \right). \quad (7.40)$$

Como se observa a partir de (7.40), la resistencia aumenta con la longitud del material, ya que al incrementarse la longitud, también lo hace el número de choques de los portadores de carga en el conductor. Por otro lado, la resistencia disminuye al aumentar el área transversal, dado que una mayor área permite la circulación de un mayor número de portadores de carga. Asimismo, la resistencia aumenta al incrementarse la resistividad del material. Finalmente, se tiene que una forma equivalente de la ley de Ohm está dada por:

$$V = RI, \quad (7.41)$$

donde  $V$  corresponde a la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor que transporta una corriente  $I$ , y  $R$  es la resistencia del material. A partir de (7.41), es posible determinar las unidades de la resistencia eléctrica. Dado que en el sistema internacional la diferencia de potencial se mide en voltios  $V$  y la corriente en amperios, se obtiene que la unidad fundamental de la resistencia eléctrica está dada por la relación  $\frac{\text{Voltios}}{\text{Amperios}}$ . La anterior relación se conoce como ohmios y se denota como  $\Omega$ , tal que:

$$\Omega = \text{Ohmio} = \frac{\text{Voltios}}{\text{Amperios}}. \quad (7.42)$$

Aunque la expresión (7.41) se obtuvo a partir de (7.11) tomando consideraciones especiales, la fórmula (7.41) es general y se aplica para todo material óhmico.

### Potencia disipada por una resistencia

Se sabe que el trabajo necesario para trasladar una carga  $dq$  entre dos puntos que presentan una diferencia de potencial  $\Delta\phi$  es:

$$W = -dq\Delta\phi, \quad (7.43)$$

En una resistencia, las partículas viajan de puntos de mayor potencial a puntos de menor potencial (por eso a la diferencia de potencial sobre la resistencia se le denomina caída de potencial), por lo tanto,  $\Delta\phi < 0$ . Si se denota  $|\Delta\phi| = V$ , el trabajo sobre una partícula  $dq$  al pasar por una resistencia  $R$  se puede expresar como:  $W = dqV$ . El trabajo descrito anteriormente también corresponde a la energía potencial perdida por la carga  $dq$  al pasar por la diferencia de potencial  $V$ . Con lo cual, la potencia  $P$  asociada a la resistencia; es decir, la energía disipada por la resistencia en la unidad de tiempo será:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV, \quad (7.44)$$

y teniendo en cuenta la ley de Ohm, la expresión para la potencia también se puede escribir como:

$$P = IV = I(IR) = I^2R. \quad (7.45)$$

**Ejemplo 7.5.** En este ejemplo se hace uso de la ecuación (7.40) para determinar la resistencia que tiene un conductor con geometría cilíndrica, con radio interior  $a$ , radio exterior  $b$  y con resistividad  $\rho$ . La resistencia se evalúa en dirección perpendicular al eje de simetría. En dicho caso a medida que las cargas recorran el material, el área transversal aumenta. Si se desea calcular la resistencia que el cilindro tendría cuando las cargas se mueven a lo largo del eje de simetría, el área transversal se mantendría constante (se deja como ejercicio para el lector).

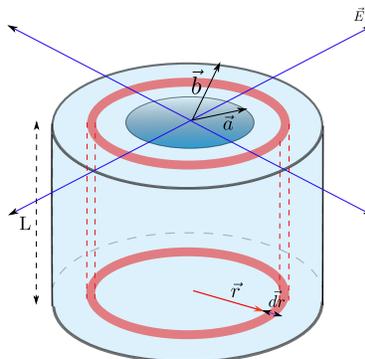


Figura 7.4: Resistencia eléctrica a lo largo del eje “radial” para un conductor cilíndrico.

**Solución:** Si el cilindro en estudio se sitúa en una región donde existe un campo eléctrico en dirección  $\hat{r}$  radial<sup>3</sup>, como se indica en la figura 7.4, entonces los electrones libres en el material se moverán en dirección  $-\hat{r}$ . Ya que el área transversal aumenta conforme  $r$  aumenta, es necesario establecer inicialmente la resistencia para un elemento cilíndrico de espesor  $dr$  (longitud a lo largo de la cual se mueven los electrones) y área transversal  $A$  (área de la parte lateral del elemento cilíndrico) dada por:

$$A = 2\pi rL, \quad (7.46)$$

donde  $L$  representa la longitud del cilindro. A partir de (7.40), la resistencia  $dR$  del elemento cilíndrico está dada por:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi rL}. \quad (7.47)$$

Para obtener la resistencia total, se deben “sumar” las contribuciones de todos los elementos cilíndricos de espesor  $dr$  que componen el conductor cilíndrico, lo cual se hace mediante una integral, tal que:

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi rL}. \quad (7.48)$$

<sup>3</sup> Aunque en coordenadas cilíndricas la notación usual para la dirección en mención es  $\hat{\rho}$ , dado la confusión que se puede presentar con la resistividad, se ha optado por utilizar la notación usual en coordenadas polares  $\hat{r}$ .

Teniendo en cuenta que la resistividad es constante a lo largo del material, se tiene que:

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \int_0^a \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}. \quad (7.49)$$

**Ejemplo 7.6.** La región entre dos esferas conductoras concéntricas de radios  $r_1$  y  $r_2$  se encuentra llena de un material conductor cuya resistividad es  $\rho$ . Para la situación planteada, se calculará la resistencia que presenta el material entre los dos cascarones esféricos, es decir, en dirección radial. Adicionalmente, se evaluará la densidad de corriente cuando se establece una diferencia de potencial entre los cascarones esféricos igual a  $\Delta V$ .

**Solución:** La resistencia a lo largo de un material de resistividad  $\rho$ , evaluada entre dos puntos separados por una distancia  $L$ , a través de una sección transversal  $A$ , viene dada por la expresión (7.40):

$$R = \rho \frac{L}{A}. \quad (7.50)$$

En la ecuación (7.50), se asume que el área transversal  $A$  es constante en todo punto a lo largo de la longitud  $L$ . Sin embargo, esta condición no siempre se cumple. Por ejemplo, al medir la resistencia entre dos cascarones esféricos de radio  $r_1$  y  $r_2$ , la longitud  $L$  en (7.50) correspondería la distancia definida por  $|r_2 - r_1|$ . Sin embargo, en este caso, el área transversal entre los cascarones esféricos no es constante, sino que varía entre el área  $4\pi r_1^2$  y  $4\pi r_2^2$ . Por esta razón, la expresión (7.50) deja de ser válida. Para solucionar esta dificultad, se evalúa primero la resistencia entre dos puntos separados por una distancia infinitesimal  $dl$ , lo cual se obtiene al diferenciar (7.50). Así, que se tiene que:

$$dR = \rho \frac{dl}{A}, \quad (7.51)$$

donde  $A$  representa el área transversal a lo largo del elemento diferencial  $dl$ , la cual se considera constante en dicho intervalo. La resistencia total del material se obtiene integrando la expresión (7.51). Volviendo al problema en estudio, la resistencia  $dR$ , dada por (7.51), corresponde a la resistencia de un cascarón esférico de radio  $r$ , espesor  $dr$  y área  $4\pi r^2$  (ver figura 7.5). Por lo tanto, se tiene que:

$$dR = \rho \frac{dl}{A} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}. \quad (7.52)$$

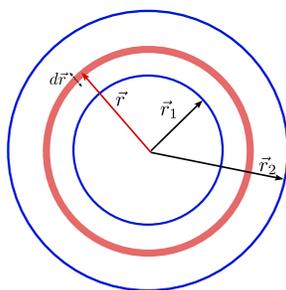


Figura 7.5: Ejemplo 7.6. Resistencia eléctrica entre cascarones esféricos concéntricos.

Por tanto, la resistencia entre las dos esferas concéntricas es:

$$\begin{aligned} R &= \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( -\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho(r_2 - r_1)}{4\pi r_2 r_1}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Ahora, siendo que la diferencia de potencial  $\Delta V$  se da entre los cascarones, la ley de Ohm establece que la corriente que circula es:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\frac{\rho(r_2 - r_1)}{4\pi r_2 r_1}} = \frac{4\pi r_2 r_1}{\rho(r_2 - r_1)} \Delta V. \quad (7.54)$$

Por lo tanto, la densidad de corriente que fluye a través de la esfera de radio  $r$  es:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{\frac{4\pi r_2 r_1 \Delta V}{\rho(r_2 - r_1)}}{4\pi r^2} = \frac{r_2 r_1}{\rho(r_2 - r_1)} \frac{\Delta V}{r^2}, \quad (7.55)$$

relación que muestra la dependencia de la densidad de corriente con el radio.

**Ejemplo 7.7.** Un material de resistividad  $\rho$  tiene la forma de una cuña, como se muestra en la figura 7.6. Calcular la resistencia entre las caras A y B.

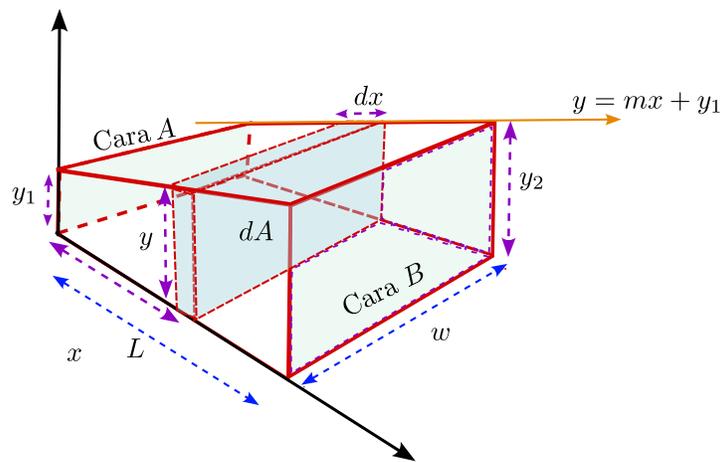


Figura 7.6: Ejemplo 7.7. Resistencia eléctrica asociada a un material en forma de cuña.

**Solución:** Dado que el área transversal de la cuña entre las caras A y B no es constante, para resolver el problema es necesario utilizar la relación (7.51)

$$dR = \rho \frac{dl}{A}. \quad (7.56)$$

Teniendo en cuenta que la corriente va a circular de la cara A hasta la B, se tiene en este caso que  $dl = dx$ . Ahora, el elemento de área A se entiende como la sección transversal localizada a una distancia  $x$  del origen, cuyo valor depende de la coordenada  $y$  (la altura de la cuña), y viene dado por la expresión:

$$A = yw, \quad (7.57)$$

donde  $w$  es el ancho constante de la cuña en la dirección perpendicular al plano  $xy$ . De este modo, se puede expresar la resistencia  $dR$  como:

$$dR = \rho \frac{dx}{wy}. \quad (7.58)$$

Para establecer una relación entre las variables  $x$  y  $y$ , se considera el origen de coordenadas en el extremo inferior izquierdo de la cuña, como se indica en la figura 7.6, donde se muestra también los ejes coordenados  $xy$ . Así, es posible establecer una relación lineal entre la altura de la cuña y la distancia  $x$  en la forma:

$$y = mx + y_1, \quad (7.59)$$

donde las constantes  $m$  y  $y_1$  corresponden a la pendiente y al intercepto de la recta que define la inclinación de la parte superior de la cuña, de acuerdo con el sistema de coordenadas y el origen establecido (ver figura 7.6). A partir de las características geométricas del problema, se puede establecer que la pendiente  $m$  está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{L}. \quad (7.60)$$

Por lo tanto, la relación entre la altura  $y$  y la distancia sobre el eje  $x$  para la cuña, puede escribirse como,

$$y = \left( \frac{y_2 - y_1}{L} \right) x + y_1. \quad (7.61)$$

El resultado anterior permite expresar

$$dR = \frac{\rho}{w} \frac{dx}{y} = \frac{\rho}{w} \frac{dx}{\left( \left( \frac{y_2 - y_1}{L} \right) x + y_1 \right)}. \quad (7.62)$$

La resistencia entre la cara  $A$  y  $B$  se obtiene de integral la expresión anterior, es decir,

$$R = \frac{\rho}{w} \int_0^L \frac{dx}{\left( \left( \frac{y_2 - y_1}{L} \right) x + y_1 \right)}. \quad (7.63)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{w} \ln \left( \left( \frac{y_2 - y_1}{L} \right) x + y_1 \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{\rho}{w} \ln \left( \frac{y_2}{y_1} \right). \end{aligned} \quad (7.64)$$

**Ejemplo 7.8.** Se tiene un capacitor de placas paralelas de área  $A$  y distancia entre placas  $d$ . Adicionalmente, el material dieléctrico entre las placas del capacitor tiene una conductividad  $\sigma$  y una constante dieléctrica  $\kappa$ . Para la configuración planteada, se encontrará una relación entre la resistencia  $R$  del material y la capacitancia  $C$  del capacitor.

**Solución:** La capacitancia del condensador en presencia de un material dieléctrico de constante dieléctrica  $\kappa$  viene dada por:

$$C = \kappa C_0, \quad (7.65)$$

donde  $C_0$  es la capacitancia del condensador en ausencia de material dieléctrico. Para el caso de un condensador de placas paralelas de área  $A$  y separación entre placas  $d$ , se cumple que

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad (7.66)$$

de manera que

$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d}. \quad (7.67)$$

Ahora, la resistencia del material dieléctrico que ocupa el capacitor, medida entre las placas del mismo es:

$$R = \rho \frac{d}{A} = \frac{d}{\sigma A}, \quad (7.68)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad del material. De la relación (7.67) se deduce que:

$$\frac{d}{A} = \kappa \frac{\varepsilon_0}{C}, \quad (7.69)$$

que al ser substituida en (7.68) resulta

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{1}{\sigma} \kappa \frac{\varepsilon_0}{C}, \quad (7.70)$$

por lo tanto

$$RC = \frac{\kappa \varepsilon_0}{\sigma}, \quad (7.71)$$

lo cual establece la relación buscada.

**Ejercicio 7.6.** Se tiene un resistor de longitud  $L$ , fabricado a partir de un cilindro hueco de carbono, con radio interior  $\vec{r}_1$  y radio exterior  $\vec{r}_2$ , como se muestra en la figura 7.7. Para dicho material, encontrar la resistencia a lo largo del eje de simetría del cilindro.

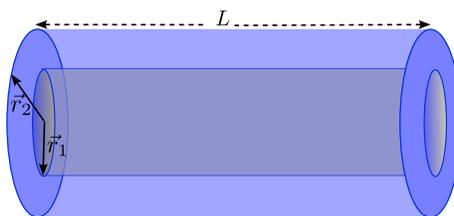


Figura 7.7: Ejercicio 7.6. Resistencia eléctrica de un objeto cilíndrico hueco.

## 7.2. Circuitos

En un dispositivo electrónico, se encuentran numerosos componentes eléctricos interconectados. Uno de los elementos más comunes son las resistencias eléctricas. Muchos aparatos funcionan gracias a resistencias que han sido colocadas intencionalmente en el dispositivo. Por ejemplo, una bombilla de filamento funciona con una resistencia que al paso de electrones produce luz;

de manera similar, las resistencias en estufas eléctricas se calientan por el mismo principio. En electrónica, los dispositivos pueden representarse mediante esquemas, al igual que una casa se puede representar en un plano arquitectónico. En estos diagramas una resistencia eléctrica se representa mediante el símbolo indicado en la figura 7.8.



Figura 7.8: Símbolo de resistencia eléctrica.

Todo material posee una resistencia, pero según las necesidades de un dispositivo específico y la función que deba cumplir, esta resistencia tendrá diferentes características: valores grandes o pequeños, fijos o variables, entre otras. En cualquier caso, para que una resistencia cumpla su función es necesario que exista un flujo de portadores de carga (usualmente electrones), lo cual requiere una diferencia de potencial eléctrico entre sus extremos que genere una corriente eléctrica. El sentido de la densidad de corriente indica la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico. Esto se debe a que la densidad de corriente, en general, tiene la misma dirección que el campo eléctrico, y el campo eléctrico apunta precisamente hacia donde el potencial disminuye. Por lo anterior, ante un flujo de carga eléctrica, los portadores de carga positiva disminuyen su potencial eléctrico, y de igual forma, su energía potencial eléctrica. En el caso de los electrones (carga negativa), aunque se mueven naturalmente a lugares de mayor potencial, su energía potencial también disminuye debido a su signo negativo.

Por convención, cuando los portadores de carga son negativos (como los electrones), se toma el sentido de la densidad de corriente como opuesto al flujo real de los portadores. Es decir, se considera la dirección en la que se moverían las cargas positivas si estuvieran presentes.

Por lo mencionado anteriormente, y teniendo en cuenta la dirección de la densidad de corriente, la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia se denomina caída de potencial. Si se mide la diferencia de potencial entre dos puntos tomando la dirección definida por el vector densidad de corriente eléctrica, dicha diferencia es negativa.

Para generar una diferencia de potencial constante a través de una resistencia, es necesario conectar una fuente de voltaje. Esta fuente tiene dos terminales los cuales se encuentran a una diferencia de potencial distinta (Voltaje = diferencia de potencial). Al conectar un extremo de la resistencia a una salida de la fuente y el otro extremo a la salida opuesta, se genera una diferencia de potencial a través de la resistencia. Esta diferencia de potencial es necesaria para producir un flujo de electrones (una corriente).

En una fuente de voltaje ideal, se supone que los electrones pueden circular a través de la fuente sin encontrar resistencia interna. Esto implica que toda la caída de potencial ocurre únicamente en los elementos del circuito, como la resistencia conectada, y no dentro de la fuente misma.

Esquemáticamente, el símbolo de una fuente de voltaje constante se representa como se muestra en la figura 7.9. En este símbolo, la línea más corta corresponde al terminal de menor potencial (que se suele representar con el signo menos), mientras que la línea más larga representa el terminal de mayor potencial (que se suele representar con el signo +).

Esta convención facilita la interpretación del sentido del flujo de corriente en los circuitos eléctricos.

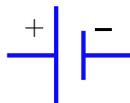


Figura 7.9: Símbolo de fuente eléctrica constante ideal (sin resistencia interna).

El circuito más sencillo para producir una corriente eléctrica consta de una fuente de voltaje y una resistencia, como se observa en la figura 7.10. En esta configuración, si se asume que los portadores de carga son partículas con carga positiva, estas se moverían desde el terminal positivo de la fuente de voltaje (mayor potencial) hacia el terminal negativo (menor potencial), disminuyendo su potencial eléctrico al atravesar la resistencia. La fuente de voltaje, por su parte, toma las cargas positivas que llegan al terminal negativo y las “eleva” nuevamente hacia el terminal positivo. Este movimiento ocurre en contra de la dirección natural de las cargas, por lo que se requiere un agente externo que realice el trabajo necesario para mantener el ciclo de corriente. Dicho trabajo es efectuado por propiedades internas de la fuente, las cuales permiten mover las cargas desde el terminal negativo al positivo. Es importante destacar que toda fuente de voltaje presenta una resistencia interna al paso de los portadores de carga. En general, esta resistencia es muy pequeña si se desea una fuente eficiente. Idealmente, se considera que dicha resistencia es nula, por lo que no se incluirá en los análisis y cálculos posteriores. Sin embargo, en la práctica, las fuentes reales presentan un límite en la corriente que pueden generar en un circuito. Este límite está determinado por la resistencia interna y la tolerancia del material con el que está fabricada: si la corriente excede el valor máximo permitido, el material puede perder sus propiedades físicas.

Aunque el análisis anterior se realizó suponiendo portadores de carga positivos, en los conductores metálicos los portadores de carga son electrones, es decir, cargas negativas. Sin embargo, como es común en el estudio de circuitos eléctricos, se adopta la convención de corriente positiva, que asume el movimiento de cargas positivas en sentido opuesto al desplazamiento real de los electrones.

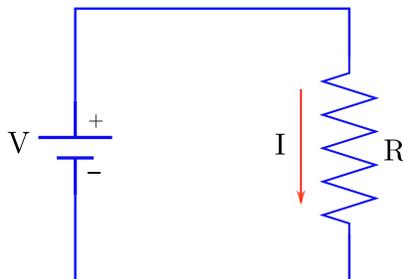


Figura 7.10: Circuito básico con resistencia Óhmica.

Si se asume que se trabaja con materiales óhmicos, la corriente que circula por el circuito descrito en la figura 7.10 estará dada por:

$$I = \frac{V}{R}. \quad (7.72)$$

En la ecuación (7.72), la diferencia de potencial (o voltaje)  $V$  representa la caída de potencial en la resistencia, la cual, en el circuito mostrado en la figura 7.10, corresponde a la diferencia de potencial suministrada por la fuente.

En un dispositivo electrónico típico, existen múltiples resistencias que se combinan en diferentes configuraciones con el objetivo de cumplir funciones específicas. Las formas más simples de combinación de resistencias se dan en arreglos en serie y en paralelo, los cuales se explican en las siguientes secciones.

### 7.3. Resistencias en serie

Cuando dos resistencias se encuentran conectadas en serie, la corriente que circula por una de estas es la misma que circula por la otra. Esto se debe a que no existe, entre los extremos de ambas resistencias, ningún punto donde la corriente pueda dividirse. Un punto de división de corriente se denomina nodo, y su ausencia es una condición necesaria para que dos resistencias se consideren en serie.

En este tipo de conexión, todos los portadores de carga que atraviesan una de las resistencias deben necesariamente pasar por la otra. En la figura 7.11, se muestran dos configuraciones típicas en las que pueden aparecer dos resistencias conectadas en serie.

Se observa en la figura 7.11b que entre las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  hay una fuente de voltaje; sin embargo, no existe un camino alternativo para los portadores de carga que permita una bifurcación de la corriente. Por lo tanto, las resistencias siguen estando conectadas en serie, a pesar de la presencia de la fuente entre ellas.

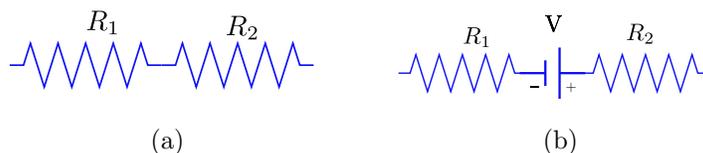


Figura 7.11: Dos resistencias en serie.

Dado que en una conexión en serie la corriente que circula a través de cada resistencia es la misma, y considerando que la caída de potencial en una resistencia se determina mediante la ley de Ohm ( $V = IR$ ), se concluye que la caída de potencial en cada resistencia dependerá del valor de su resistencia. En general, la caída de potencial será diferente para cada resistencia, a menos que ambas tengan el mismo valor, en cuyo caso experimentarían la misma caída de potencial. Para ilustrar este concepto, se analizará el circuito mostrado en la figura 7.12.

Del circuito mostrado en la figura 7.12, y siguiendo la dirección de la densidad de corriente, se puede establecer que la diferencia de potencial entre el punto  $b$  y el punto  $a$ , que corresponde a la caída de potencial sobre la resistencia  $R_1$ , está dada por:

$$V_{ba} = V_b - V_a = -IR_1. \quad (7.73)$$

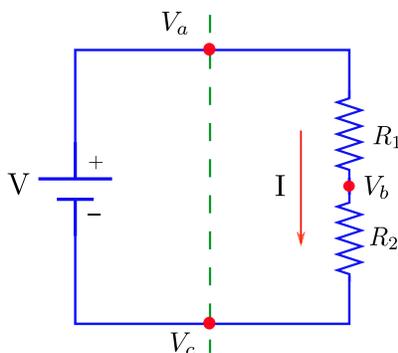


Figura 7.12: Circuito con dos resistencias en serie.

El signo negativo en la ecuación (7.73), se debe a que  $V_b$  es menor a  $V_a$  por la dirección de la densidad de corriente ( $V_b < V_a \Rightarrow V_b - V_a < 0$ ). De igual forma, para la resistencia  $R_2$  se tiene que:

$$V_{cb} = V_c - V_b = -IR_2. \quad (7.74)$$

Por otra parte, a partir del circuito esquematizado en la figura 7.12, se puede determinar que la diferencia de potencial entre el punto  $a$  y el punto  $c$  corresponde a la diferencia de potencial suministrada por la fuente. Esto se observa al considerar únicamente los componentes ubicados hacia la izquierda del circuito (es decir, a la izquierda de la línea verde punteada). Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{ac} &= V_a - V_c \\ &= V. \end{aligned} \quad (7.75)$$

La diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $c$  también corresponde a la suma de las caídas de potencial sobre las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ , al analizar únicamente los elementos ubicados a la derecha del circuito (es decir, a la derecha de la línea verde punteada). Por lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{ac} &= V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) \\ &= V_{ab} + V_{bc} = -V_{ba} - V_{cb}. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Al reemplazar los resultados obtenidos en (7.73) y (7.74) en (7.76) se tiene:

$$V_{ac} = (IR_1 + IR_2). \quad (7.77)$$

Y ya que en (7.75) se ha determinado que  $V = V_{ac}$ , se concluye que:

$$V = I(R_1 + R_2), \quad \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}. \quad (7.78)$$

A partir de la ecuación (7.78), se puede evidenciar que es posible construir un circuito con la misma fuente de voltaje, que genere la misma corriente  $I$  expresada en (7.78) con una sola resistencia, denominada resistencia equivalente  $R_{eq}$ , la cual vendrá dada por:

$$R_{eq} = R_1 + R_2. \quad (7.79)$$

El circuito equivalente se esquematiza en la figura 7.13.

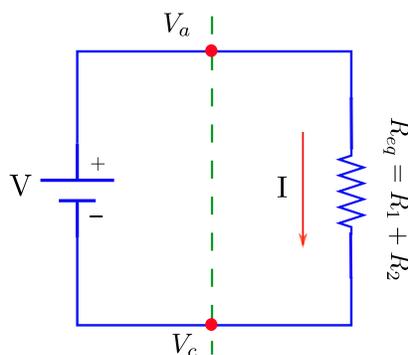


Figura 7.13: Circuito equivalente asociado a dos resistencias en serie.

La generalización de la fórmula (7.79) para  $N$  resistencias en serie (ver figura 7.14), está dada por:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 + \dots + R_N \\ &= \sum_{i=1}^N R_i. \end{aligned} \quad (7.80)$$

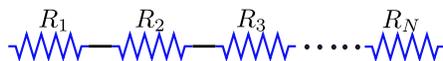


Figura 7.14:  $N$  resistencias en serie.

## 7.4. Resistencias en paralelo

Dos resistencias se encuentran en paralelo, si los extremos de cada resistencia se unen como se ilustra en la figura 7.15.

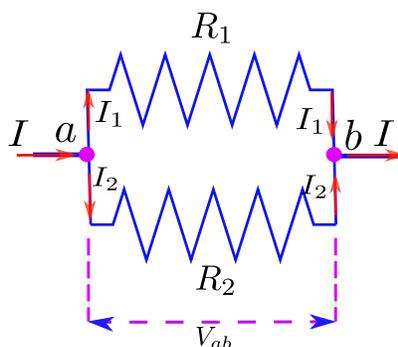


Figura 7.15: Configuración de dos resistencias en paralelo.

Como se observa en la figura 7.15, cada extremo de una resistencia se conecta a un extremo de la otra resistencia, formando dos puntos de unión denominados nodos. En estos nodos pueden confluir distintas corrientes, ya sea entrando o saliendo por diferentes trayectorias (representadas en el circuito por cables de conexión). Es fundamental tener en cuenta que en un nodo no puede haber acumulación de carga; por lo tanto, la corriente total que entra al nodo debe ser igual a la que sale, sin importar cuántos caminos de entrada o salida existen.

En la figura 7.15 se observan dos resistencias en paralelo. Los nodos del circuito, identificados como los puntos de unión de los extremos de las resistencias, se denominan  $a$  y  $b$ . Si este arreglo forma parte de un circuito eléctrico, el punto  $a$  estará a un cierto potencial eléctrico  $V_a$ , y el punto  $b$  a un potencial  $V_b$ . En la figura 7.15, se ha representado una corriente que fluye de izquierda a derecha, por lo tanto, se asume que  $V_b < V_a$ , por lo cual:

$$V_{ab} = (V_a - V_b) > 0. \quad (7.81)$$

Ahora, dado que los puntos  $a$  y  $b$  son comunes a ambas resistencias, la diferencia de potencial entre ellos,  $V_{ab} = V_a - V_b$ , es la misma para las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . Es decir, ambas resistencias están sometidas a la misma diferencia de potencial. Esta es una característica fundamental de las conexiones en paralelo: todas las resistencias conectadas en paralelo comparten la misma diferencia de potencial. Por lo tanto, una condición necesaria para afirmar que dos o más resistencias estén en paralelo es que se encuentren conectadas entre los mismo nodos, y, en consecuencia, estén sometidas a un mismo voltaje. En general, por cada resistencia circula una corriente diferente, a menos que tengan exactamente el mismo valor de resistencia.

Teniendo en cuenta el circuito esquematizado en la figura 7.16 conformado por dos resistencias y una fuente de voltaje, y teniendo en cuenta la ley de Ohm, se puede establecer que:

$$V_{ab} = V_1 = I_1 R_1, \quad (7.82)$$

$$V_{ab} = V_2 = I_2 R_2. \quad (7.83)$$

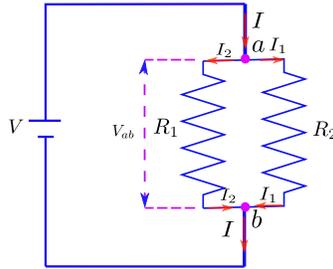


Figura 7.16: Circuito con dos resistencias en paralelo.

Se debe aclarar que, teniendo en cuenta la dirección de la densidad de corriente, se cumple que  $V_a > V_b$ , y, por lo tanto,  $V_{ab} = V_a - V_b > 0$ . Ahora bien, la corriente total que circula por las dos resistencias es simplemente la suma de las corrientes que circulan por cada resistencia. Por lo tanto:

$$I = I_1 + I_2. \quad (7.84)$$

Si se reemplazan (7.82) y (7.83) en (7.84), se tiene que:

$$I = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} \quad (7.85)$$

$$= V_{ab} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (7.86)$$

La diferencia de potencial  $V_{ab}$  es igual al voltaje  $V$  de la fuente. Por lo tanto, a partir de la ecuación (7.86), se tiene que:

$$V = I \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}. \quad (7.87)$$

Por lo anterior, se concluye que es posible reemplazar dos resistencias en paralelo por una única resistencia equivalente  $R_{eq}$ , dada por:

$$R_{eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}. \quad (7.88)$$

Sobre la resistencia  $R_{eq}$  circula una corriente  $I$ , tal que dicha corriente es igual a la suma de las corrientes que circulan por las dos resistencias en paralelo; es decir  $I = I_1 + I_2$ . El circuito equivalente asociado al circuito de la figura 7.16, se indica en la figura 7.17.

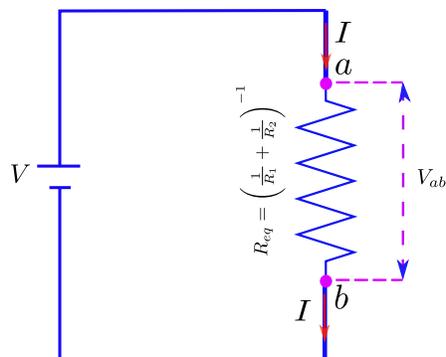


Figura 7.17: Circuito equivalente asociado a dos resistencias en paralelo.

Las propiedades que se han definido para dos resistencias en paralelo, se generalizan a  $N$  resistencias en paralelo. De este modo, todas las resistencias en paralelo dentro de un circuito están sujetas a una misma diferencia de potencial. La corriente que ingresa al arreglo de resistencias se divide, pasando una parte de la corriente total por cada una de ellas, teniendo en cuenta que a una mayor resistencia corresponde una menor corriente.

Si se tienen  $N$  resistencias en paralelo (ver figura 7.18), la resistencia equivalente está dada por:

$$\begin{aligned}
 R_{eq} &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)^{-1} \\
 &= \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{7.89}$$

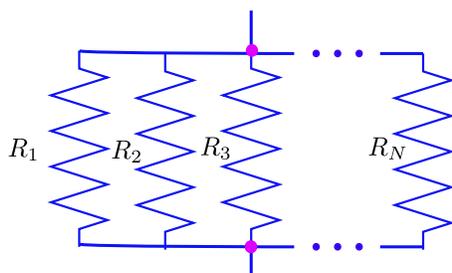


Figura 7.18:  $N$  resistencias en paralelo.

## 7.5. Circuitos mixtos

En un circuito, las diferentes resistencias que forman parte del mismo pueden aparecer en diferentes configuraciones: en serie, en paralelo o en otras combinaciones. Para los circuitos donde las resistencias se encuentren exclusivamente en serie y paralelo, que se denominarán como arreglos mixtos, es posible reducir el número de resistencias a una sola, manteniendo la misma corriente total del circuito original. Esto significa que la carga que fluye desde un polo de la fuente de voltaje hacia el otro, en una unidad de tiempo, se mantiene igual al simplificar el circuito. Lo anterior es posible de lograr con la ayuda de las resistencias equivalentes en serie y en paralelo, conceptos que ya se han estudiado.

Para entender como aplicar los conceptos de resistencias equivalentes en un circuito mixto, a continuación se presenta un ejemplo.

**Ejemplo 7.9.** En el circuito indicado en la figura 7.19 se va a determinar la diferencia de potencial en cada resistencia y la corriente que circula por cada una de ellas. Adicionalmente, y como punto de partida, se calculará la resistencia equivalente del circuito.

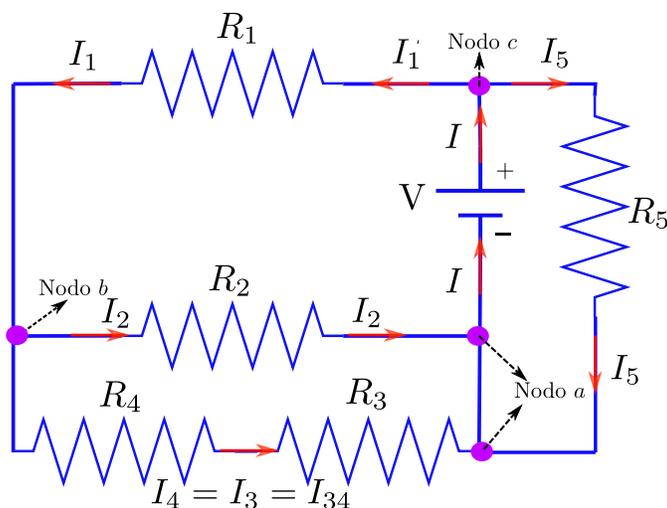


Figura 7.19: Ejemplo de un circuito con resistencias en configuración mixta.

**Solución:** En primer lugar, se va a encontrar la resistencia equivalente del circuito siguiendo un procedimiento paso a paso; es decir, buscando la resistencia equivalente por cada par de resistencias hasta reducir el circuito a un circuito equivalente con una sola resistencia. Gráficamente dicha simplificación paso a paso se indica en la figura 7.20.

El primer paso en la simplificación que se desea realizar (ver figura 7.20a), consiste en encontrar la resistencia equivalente entre la resistencia  $R_3$  y la resistencia  $R_4$  que se encuentran en serie, y que se denomina  $R_{34}$  (toda la corriente que pasa por  $R_3$  debe pasar por  $R_4$ , no hay nodos entre la línea que une las dos resistencias en mención), por lo tanto:

$$R_{34} = R_3 + R_4. \quad (7.90)$$

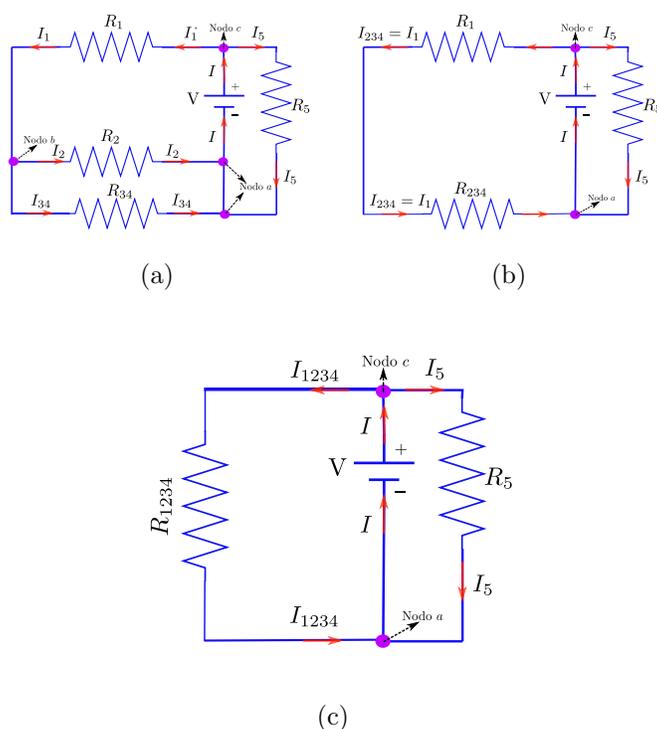


Figura 7.20: Simplificación para el circuito descrito en la figura 7.19.

La figura 7.20a muestra el circuito con la primera simplificación de resistencias aplicada. Ahora, se puede observar del circuito de la figura 7.20a, que la resistencia  $R_{34}$  se encuentra en paralelo con la resistencia  $R_2$ , ya que los extremos de las dos resistencias en mención ( $R_{34}$  y  $R_2$ ) se encuentran conectados. Los puntos  $a$  y  $b$  (Nodos  $a$  y  $b$ ) indicados en la figura 7.20a, son comunes para las resistencias  $R_{34}$  y  $R_2$ ; por lo tanto, la diferencia de potencial  $V_{ab} = V_a - V_b$  es la misma para las dos resistencias. En conclusión las resistencias  $R_{34}$  y  $R_2$  se pueden reemplazar por una resistencia equivalente tal que:

$$\begin{aligned} R_{234} &= \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

El circuito simplificado con la resistencia equivalente  $R_{234}$ , se indica en figura 7.20b. Siguiendo el procedimiento, se observa que la resistencia  $R_1$  se encuentra en serie con la resistencia  $R_{234}$ ; por lo tanto, las resistencias  $R_{234}$  y  $R_1$  se pueden reemplazar por la resistencia equivalente dada por:

$$\begin{aligned} R_{1234} &= R_1 + R_{234} \\ &= R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Finalmente, del circuito mostrado en la figura 7.20c, se observa que las resistencias  $R_{1234}$  y  $R_5$  se encuentran en paralelo; por lo tanto, la resistencia equivalente de todo el circuito viene dada por:

$$R_{eq} = \left( \frac{1}{R_{1234}} + \frac{1}{R_5} \right). \quad (7.93)$$

Ahora se procederá a encontrar la caída de potencial en cada una de las resistencias. Observando el circuito de la figura 7.20c, se evidencia que la diferencia de potencial aplicada a la resistencia  $R_5$  es igual a la diferencia de potencial aplicada a la resistencia  $R_{1234}$  (por estar en paralelo), y corresponde a la diferencia de potencial que entrega la fuente; es decir, la diferencia de potencial  $V$ . Ahora, aplicando la ley de Ohm, se puede determinar que las corrientes que circulan por la resistencia  $R_5$  y  $R_{1234}$ , están dadas por:

$$I_5 = \frac{V}{R_5}, \quad (7.94)$$

$$I_{1234} = \frac{V}{R_{1234}}, \quad (7.95)$$

donde se ha definido como  $I_{1234}$  a la corriente que circula en la resistencia  $R_{1234}$ , descrita en la figura 7.20c. Reemplazando (7.92) en (7.95), se tiene que:

$$I_{1234} = \frac{V}{R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right)^{-1}}. \quad (7.96)$$

La dirección de la densidad de corriente en cada caso, se especifica en la figura 7.19 (En este caso se habla de la dirección de la densidad y no de la corriente  $I$ , puesto como ya se explicó en secciones anteriores, la corriente no es un vector). Como ya se ha definido la corriente que circula por la resistencia equivalente  $R_{1234}$ , ahora se puede analizar el circuito de la figura 7.20b y determinar la diferencia de potencial por las resistencias  $R_1$  y  $R_{234}$ . Las resistencias  $R_1$  y  $R_{234}$  se encuentran en serie, por lo tanto, la corriente  $I_{1234}$  circula por las dos resistencias, es decir,

$$I_{1234} = I_1 = I_{234}. \quad (7.97)$$

Al haber obtenido la corriente que circula por  $R_1$  y  $R_{234}$ , se puede encontrar la diferencia de potencial por cada resistencia haciendo uso de la ley de Ohm, de modo que:

$$V_1 = I_{1234}R_1, \quad (7.98)$$

$$V_{234} = I_{1234}R_{234}, \quad (7.99)$$

donde se ha definido a  $V_{234}$  como la diferencia de potencial en la resistencia  $R_{234}$ , la cual se observa en la figura 7.20b. Al reemplazar (7.96) en (7.98) y (7.99), se obtiene:

$$V_1 = \frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} R_1, \quad (7.100)$$

$$V_{234} = \frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} R_{234} \quad (7.101)$$

$$= \frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right)^{-1}. \quad (7.102)$$

En la última línea se ha reemplazado el valor de la resistencia equivalente  $R_{234}$  (ecuación (7.91)). Continuando con el proceso, se regresa al circuito de la figura 7.20a. Como ya se había descrito, las resistencias  $R_2$  y  $R_{34}$  se encuentran en paralelo, por lo tanto, el potencial  $V_{234}$  que se encuentra en la ecuación (7.102), corresponde a la diferencia de potencial para la resistencia  $R_2$  como también para la resistencia  $R_{34}$ , y a partir de la ley de Ohm, se puede determinar las corrientes que circulan por las resistencias en mención, tal que:

$$I_2 = \frac{V_{234}}{R_2}, \quad (7.103)$$

$$I_{34} = \frac{V_{234}}{R_{34}}, \quad (7.104)$$

donde  $I_{34}$  corresponde a la corriente que circula por la resistencia  $R_{34}$ . Reemplazando los valores que ya se han encontrado para  $V_{234}$ , y  $R_{34}$ , se tiene que:

$$I_2 = \frac{\frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}}{R_2}, \quad (7.105)$$

$$I_{34} = \frac{\frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}}{R_3 + R_4}. \quad (7.106)$$

Finalmente, se retoma el circuito original descrito en la figura 7.19, donde se identificó que las resistencias  $R_3$  y  $R_4$  se encontraban en serie, de modo que la corriente  $I_{34}$  es común a ambas resistencias. Por lo tanto, la diferencia de potencial en  $R_3$  y en  $R_4$  puede deducirse a partir de la ley de Ohm, tal que:

$$V_3 = I_{34}R_3, \quad (7.107)$$

$$V_4 = I_{34}R_4. \quad (7.108)$$

Al reemplazar (7.106) en (7.108) se tiene que:

$$V_4 = \frac{\frac{V}{R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}\right)^{-1}}{R_3 + R_4} R_4. \quad (7.109)$$

Con lo anterior, se ha cumplido el objetivo de encontrar todas las corrientes y diferencias de potencial por cada resistencia presente en el circuito de la figura 7.19.

**Ejemplo 7.10.** En este ejemplo se pretende encontrar la resistencia y la diferencia de potencial sobre la resistencia  $R_c$ , que se encuentra en el circuito esquematizado en la figura 7.21a, teniendo en cuenta que:

$$R_a = R_b = R_c = R_e = 3R, \quad (7.110)$$

$$R_d = R_f = 2R. \quad (7.111)$$

**Solución:** Se puede determinar por las características del circuito, que  $R_b$ ,  $R_c$  y  $R_d$  se encuentran en paralelo. De igual forma  $R_e$  y  $R_f$  están en paralelo, por lo cual, el circuito inicial se puede reducir al circuito equivalente esquematizado en la figura 7.21b, para el cual se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{bcd} &= \left( \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \frac{6R}{7} \approx 0.86R, \end{aligned} \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned} R_{ef} &= \left( \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} = \frac{6R}{5} = 1.2R. \end{aligned} \quad (7.113)$$

Las expresiones finales de (7.112) y (7.113), se obtienen al realizar los reemplazos indicados en (7.111). Ahora, las resistencias  $R_{bcd}$ ,  $R_{ef}$  y  $R_a$ , se encuentran en paralelo; por lo tanto, el circuito puede reducirse a un circuito con una sola resistencia  $R_{eq}$  (ver 7.21c), para la cual se tiene que :

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_{bcd} + R_{ef} + R_a \\ &= 3R + \frac{6R}{7} + \frac{6R}{5} \approx 5.06R. \end{aligned} \quad (7.114)$$

En la última igualdad de la anterior expresión, se reemplazaron los valores expresados en (7.112) y (7.113). Ahora, la corriente que circula por el circuito equivalente esquematizado en la figura 7.21c es:

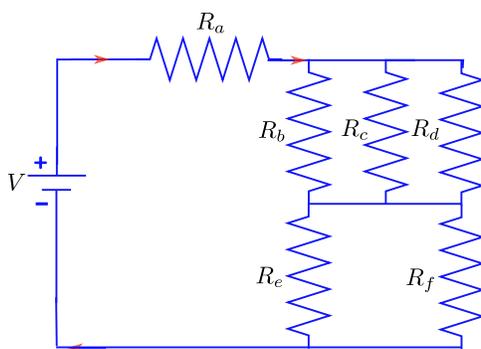
$$I_T = \frac{V}{R_{eq}} \approx 0.20 \frac{V}{R}. \quad (7.115)$$

La diferencia de potencial que hay en los terminales de la resistencia  $R_{bcd}$ , es igual a la diferencia de potencial en las resistencias  $R_b$  ( $V_b$ ),  $R_c$  ( $V_c$ ) y  $R_d$  ( $V_d$ ), ya que estas se encuentran en paralelo. Por lo tanto, dicha diferencia de potencial está dada por:

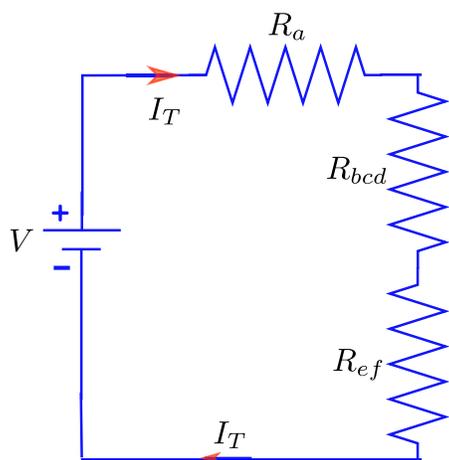
$$\begin{aligned}
 V_{bcs} &= V_c = V_b = V_d \\
 &= I_T R_{bcd} \approx 0.20 \frac{V}{R} 0.86R = 0.172V.
 \end{aligned}
 \tag{7.116}$$

Ahora, teniendo en cuenta el objetivo de este ejemplo, la corriente que circula por la resistencia  $R_c$  está dada por:

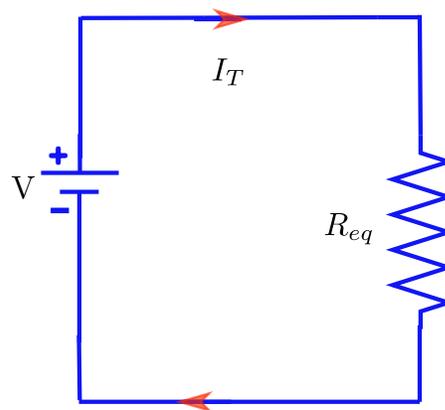
$$I_c = V_c / R_c \approx \frac{0.172V}{3R} \approx 0.057V/R.
 \tag{7.117}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 7.21: Simplificación circuito mixto ejemplo (7.10).

**Ejemplo 7.11.** La figura 7.22 muestra cinco resistores de resistencia  $R = 5.0 \Omega$ . Para dicha configuración, se encontrará la resistencia equivalente entre los puntos  $F$  y  $H$ .

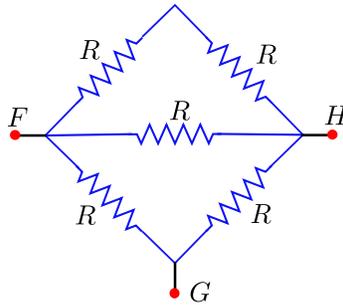


Figura 7.22: Ejemplo 7.11. Arreglo de cinco resistencia con igual valor  $R$ .

**Solución:** Entre los puntos  $F$  y  $H$ , se observa que las dos resistencias ubicadas por la línea superior del circuito están conectadas en serie. Lo mismo ocurre con las dos resistencias situadas en la línea inferior del circuito. Por lo tanto, el circuito se puede simplificar como se muestra en la figura 7.23a, donde la resistencia equivalente  $R_{e1}$  está dada por:

$$R_{e1} = R + R = 2R. \quad (7.118)$$

En este nuevo circuito, las resistencias se encuentran en paralelo, por lo que pueden combinarse y reducir el sistema a un solo resistor  $R_{e2}$ , como se indica en la figura 7.23b. El valor de la resistencia  $R_{e2}$  se determina a partir de:

$$\frac{1}{R_{e2}} = \frac{1}{R_{e1}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{e1}} = \frac{2}{R_{e1}} + \frac{1}{R} = \frac{2}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}, \quad (7.119)$$

de manera que

$$R_{e2} = \frac{R}{2} = \frac{(5.0 \Omega)}{2} = 2.50 \Omega. \quad (7.120)$$

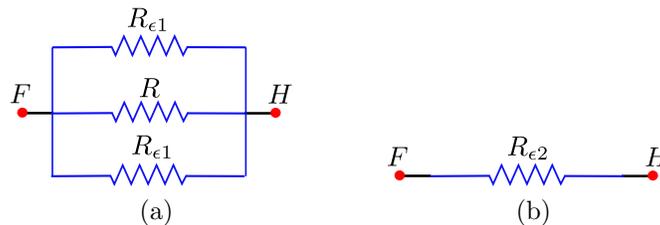


Figura 7.23: Ejemplo 7.11. Primera y segunda simplificación del circuito descrito en la figura 7.22.

**Ejemplo 7.12.** Para el circuito indicado en la figura 7.22, se calculará la resistencia equivalente entre  $F$  y  $G$ .

**Solución:** Entre los puntos  $F$  y  $G$ , el circuito en estudio puede reducirse esquemáticamente al indicado en la figura 7.24, donde  $R_{e1}$  está dado por:

$$R_{e1} = R + R = 2R. \quad (7.121)$$

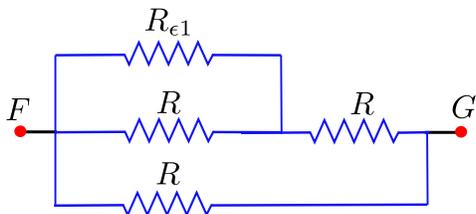


Figura 7.24: Ejemplo 7.12. Primera simplificación del circuito descrito en la figura 7.22, en el cálculo de la resistencia equivalente entre el punto  $F$  y  $G$ .

Ahora, la resistencia  $R_{\epsilon 1}$  se encuentra en paralelo con una de las resistencias de valor  $R$ , con lo cual se puede realizar una simplificación adicional que se indica en la figura 7.25a, donde la resistencia  $R_{\epsilon 3}$  se puede calcular a partir de:

$$\frac{1}{R_{\epsilon 3}} = \frac{1}{R_{\epsilon 1}} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R}, \quad (7.122)$$

de manera que

$$R_{\epsilon 3} = \frac{2R}{3}. \quad (7.123)$$

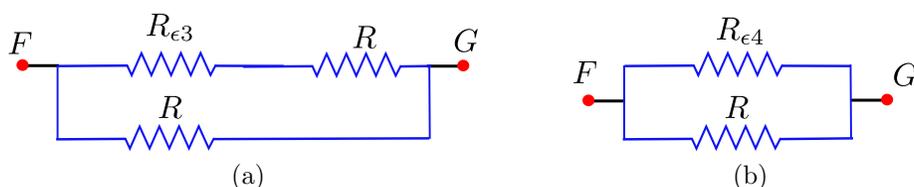


Figura 7.25: Ejemplo 7.12. Segunda y tercera simplificación del circuito descrito en la figura 7.22, en el cálculo de la resistencia equivalente entre el punto  $F$  y  $G$ .

En el circuito resultante, se puede observar que la resistencia  $R_{\epsilon 3}$  se encuentra en serie con una resistencia de valor  $R$ . Estas dos resistencias pueden reemplazarse por una única resistencia equivalente  $R_{\epsilon 4}$ , con lo cual se llega al circuito indicado en la figura 7.25b, donde

$$R_{\epsilon 4} = R_{\epsilon 3} + R = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3}. \quad (7.124)$$

Finalmente, el sistema se ha reducido a un sistema de dos resistencias en paralelo, las cuales pueden combinarse para formar una resistencia equivalente. Esta resistencia se puede calcular a partir de:

$$\frac{1}{R_{\epsilon 5}} = \frac{1}{R_{\epsilon 4}} + \frac{1}{R} = \frac{3}{5R} + \frac{1}{R} = \frac{8}{5R}, \quad (7.125)$$

con lo cual

$$R_{\epsilon 5} = \frac{5R}{8} = \frac{5}{8} (5.0 \Omega) = 3.13 \Omega. \quad (7.126)$$

**Ejemplo 7.13.** Nueve alambres de cobre de resistividad  $\rho_C$ , longitud  $L$  y diámetro  $d$ , se conectan en paralelo para formar un solo conductor con una resistencia  $R$ . En este ejemplo se encontrará el valor del diámetro  $D$  de un simple alambre de cobre de longitud  $L$ , que posea la misma resistencia asociada a los nueve alambres de diámetro  $d$  en paralelo.

**Solución:** Si  $R$  es la resistencia equivalente de los nueve alambres de cobre, su valor está dado por:

$$R = \frac{R_C}{9}, \quad (7.127)$$

donde  $R_C$  es la resistencia de un solo alambre de cobre, la cual se expresa como,

$$R_C = \rho_C \frac{L}{A}, \quad (7.128)$$

con  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ , y por tanto

$$R = \frac{R_C}{9} = \frac{1}{9} \frac{\rho_C L}{A} = \frac{1}{9} \frac{\rho_C L}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4}{9} \frac{\rho_C L}{\pi d^2}. \quad (7.129)$$

Ahora, la resistencia de un alambre de diámetro  $D$  es:

$$R' = \frac{\rho_C L}{A'} = \frac{\rho_C L}{\frac{\pi D^2}{4}} = 4 \frac{\rho_C L}{\pi D^2}. \quad (7.130)$$

Ya que se debe cumplir que  $R = R'$ , se tiene que

$$\frac{4}{9} \frac{\rho_C L}{\pi d^2} = 4 \frac{\rho_C L}{\pi D^2}, \quad (7.131)$$

que se reduce a

$$\frac{1}{9} \frac{1}{d^2} = \frac{1}{D^2}. \quad (7.132)$$

Esto implica que, para un solo alambre de diámetro  $D$  que cumpla con la característica solicitada, se requiere que

$$D = 3d. \quad (7.133)$$

**Ejemplo 7.14.** Las resistencias del circuito indicado en la figura 7.26 tienen los siguientes valores:  $R_1 = 48.0 \, \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 30.0 \, \Omega$  y  $R_4 = 60.0 \, \Omega$ . La fuente de voltaje establece una diferencia de potencial de  $12.0 \, V$ . Para el circuito planteado se calculará la resistencia equivalente y la corriente en cada una de las resistencias que componen el circuito.

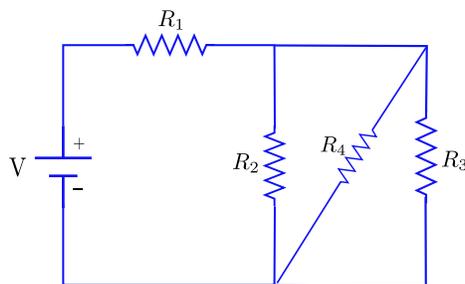


Figura 7.26: Ejemplo 7.14. Arreglo mixto de cuatro resistencias.

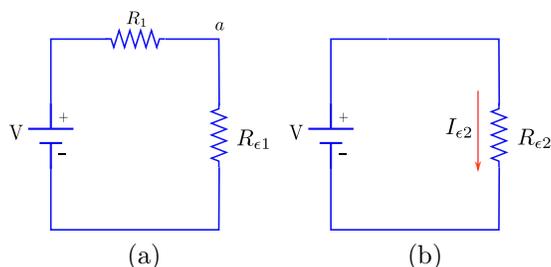


Figura 7.27: Ejemplo 7.14. Primera y segunda simplificación del circuito indicado en la figura 7.26.

**Solución:** En el circuito en estudio las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  se encuentran en paralelo; por lo tanto, el circuito puede reducirse al indicado en la figura 7.27a, donde  $R_{e1}$  se puede calcular a partir de

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{e1}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \\ &= \frac{1}{30.0 \Omega} + \frac{1}{30.0 \Omega} + \frac{1}{60.0 \Omega}, \end{aligned} \quad (7.134)$$

de manera que

$$R_{e1} = 12.0 \Omega. \quad (7.135)$$

Ahora, las resistencias  $R_1$  y  $R_{e1}$  se encuentran en serie y se puede reducir el sistema a una única resistencia de valor:

$$R_{e2} = R_{e1} + R_1 = 60.0 \Omega. \quad (7.136)$$

Para determinar las corrientes sobre cada resistencia, en primer lugar se debe obtener la corriente que circula por la resistencia equivalente  $R_{e2}$ , la cual está dada por:

$$I_{e2} = \frac{V}{R_{e2}} = \frac{12.0 V}{60.0 \Omega} = 0.2 A. \quad (7.137)$$

Dado que las resistencias  $R_1$  y  $R_{e1}$  se encuentran en serie, se tiene que la corriente que circula por  $R_1$  y  $R_{e1}$  es la misma y corresponde a la corriente  $I_{e2}$ , es decir:

$$I_1 = I_{e1} = I_{e2} = 0.2 A. \quad (7.138)$$

Ahora, a partir de la ley de Ohm se tiene que la diferencia de potencial a través de la resistencia  $R_1$  es

$$V_1 = I_1 R_1 = 9.6V \quad (7.139)$$

y de igual forma se tiene que

$$V_{e1} = I_{e1} R_{e1} = 2.4V. \quad (7.140)$$

Dado que las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  se encuentran en paralelo, la diferencia de potencial por cada resistencia es la misma e igual a  $V_{e1}$ ; es decir

$$V_2 = V_3 = V_4 = V_{\epsilon 1} = 2.4V. \quad (7.141)$$

Por lo tanto, las corrientes por las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ , serán:

$$I_2 = \frac{V_{\epsilon 1}}{R_2} = 0.08, \quad (7.142)$$

$$I_3 = \frac{V_{\epsilon 1}}{R_3} = 0.08, \quad (7.143)$$

$$I_4 = \frac{V_{\epsilon 1}}{R_4} = 0.04. \quad (7.144)$$

**Ejemplo 7.15.** En este ejemplo se encontrará la resistencia equivalente para el circuito indicado en la figura 7.28, teniendo en cuenta que:  $R_1 = R_2 = 10.0 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 20.0 \Omega$  y  $R_5 = R_6 = 15.0 \Omega$ .

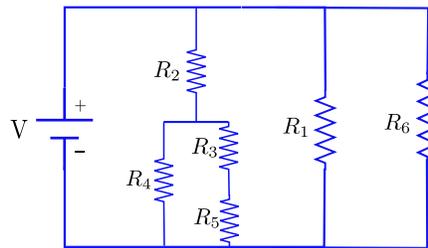


Figura 7.28: Ejemplo 7.15. Circuito con seis resistencias en configuración mixta.

**Solución:** El sistema indicado en la figura 7.28 se puede reducir al circuito mostrado en la figura 7.29a, donde  $R_{\epsilon 1}$  representa la resistencia equivalente para las resistencias en serie  $R_3$  y  $R_5$  y donde  $R_{\epsilon 2}$  corresponde a la resistencia equivalente para las resistencias en paralelo  $R_1$  y  $R_6$ . La resistencia  $R_{\epsilon 1}$  viene dada por:

$$R_{\epsilon 1} = R_3 + R_5 = 20.0 \Omega + 15.0 \Omega = 35.0 \Omega, \quad (7.145)$$

en tanto que la resistencia equivalente  $R_{\epsilon 2}$  se puede evaluar a partir de

$$\frac{1}{R_{\epsilon 2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10.0 \Omega} + \frac{1}{15.0 \Omega}, \quad (7.146)$$

por lo tanto

$$R_{\epsilon 2} = 6.0 \Omega. \quad (7.147)$$

Ahora, en el circuito simplificado (ver figura 7.29a), las resistencias  $R_4$  y  $R_{\epsilon 1}$  se encuentran en paralelo, las cuales se pueden remplazar por una única resistencia  $R_{\epsilon 3}$  que se determina a partir de,

$$\frac{1}{R_{\epsilon 3}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{\epsilon 1}} = \frac{1}{20.0 \Omega} + \frac{1}{35.0 \Omega}, \quad (7.148)$$

es decir

$$R_{\epsilon 3} = 12.7 \Omega. \quad (7.149)$$

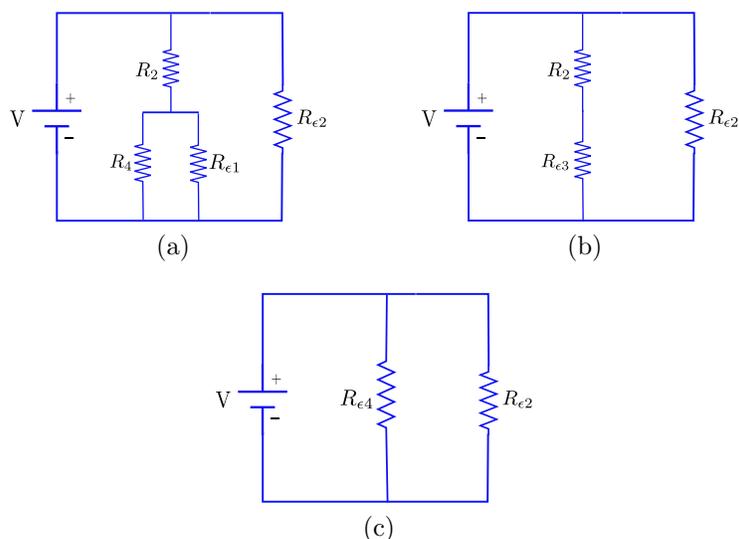


Figura 7.29: Ejemplo 7.14. Primera y segunda simplificación del arreglo indicado en la figura 7.26.

En el circuito simplificado indicado en la figura 7.29b, se observa que las resistencias  $R_2$  y  $R_{e3}$  están en serie, de manera que se pueden reducir a una resistencia  $R_{e4}$ , dada por:

$$R_{e4} = R_2 + R_{e3} = 10.0 \, \Omega + 12.7 \, \Omega = 22.7 \, \Omega. \quad (7.150)$$

Ahora, el circuito 7.29c indica que  $R_{e2}$  y  $R_{e4}$  están en paralelo, de manera que se pueden combinar y obtener finalmente una resistencia equivalente al sistema inicial  $R_e$ , la cual se puede encontrar numéricamente a partir de

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{e2}} + \frac{1}{R_{e4}} = \frac{1}{6.0 \, \Omega} + \frac{1}{22.7 \, \Omega}, \quad (7.151)$$

es decir,

$$R_e = 4.75 \, \Omega. \quad (7.152)$$

**Ejercicio 7.7.** La corriente en la resistencia  $R_6$  de la figura 7.30 es  $I_6 = 1.4 \, A$ , y las resistencias tienen los siguientes valores:  $R_1 = R_2 = R_3 = 3.0 \, \Omega$  y  $R_4 = 10.0 \, \Omega$ ,  $R_5 = 9.0 \, \Omega$  y  $R_6 = 5.0 \, \Omega$ . Teniendo en cuenta estos valores, se requiere calcular el voltaje suministrado por la fuente de voltaje.

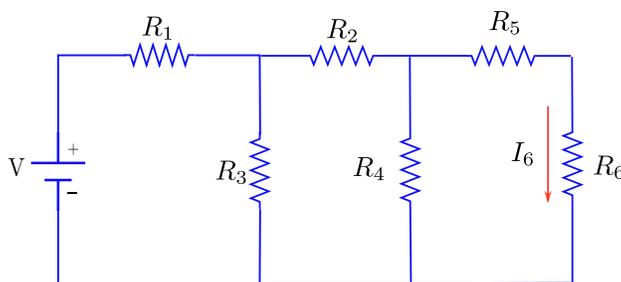


Figura 7.30: Ejercicio 7.7. Arreglo de seis resistencias en configuración mixta.

**Ejercicio 7.8.** Para el circuito del Ejemplo 7.15, considere que la fuente de voltaje tiene un valor de  $55.0\text{ V}$ . Calcular la corriente que circula por las resistencias  $R_4$  y  $R_6$ , así como la diferencia de potencial en  $R_1$  y  $R_2$ .

**Ejercicio 7.9.** Las resistencias indicadas en el circuito descrito en la figura 7.31 tienen un valor de  $15.0\ \Omega$  cada una, y la diferencia de potencial suministrada por la fuente de voltaje es de  $20.0\text{ V}$ . El circuito tiene un interruptor  $S$ . Para el circuito planteado, encontrar la corriente que circula por cada resistencia en dos casos: cuando el interruptor está abierto y cuando el interruptor esté cerrado.

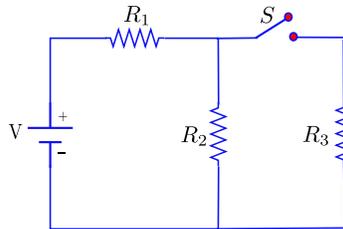


Figura 7.31: Ejercicio 7.9. Corriente en cada resistencia con interruptor abierto e interruptor cerrado.

**Ejercicio 7.10.** Para la combinación de resistencias establecida en la figura 7.32, donde  $R_1 = R_2 = 6.0\ \Omega$  y  $R_3 = 4.5\ \Omega$ , calcular la resistencia equivalente entre los puntos  $D$  y  $E$ .

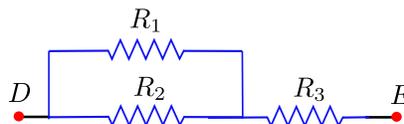


Figura 7.32: Ejercicio 7.10. Arreglo de tres resistencias en configuración mixta.

**Ejercicio 7.11.** Una fuente de voltaje de  $6.0\text{ V}$  genera una corriente en el circuito indicado en la figura 7.33. Cuando el circuito está abierto, la corriente total (es decir, la corriente sobre la resistencia equivalente del circuito) es de  $1.5\text{ mA}$ . Si el interruptor se cierra en la posición  $S_1$ , la corriente total en el circuito es  $2.0\text{ mA}$ . Ahora, cuando el interruptor se cierra en la posición  $S_2$ , la corriente total en el circuito es de  $2.5\text{ mA}$ . Encontrar el valor de las resistencias que garantizan las corrientes establecidas anteriormente.

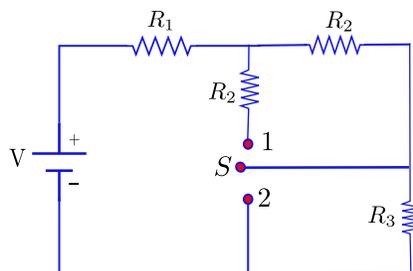


Figura 7.33: Ejercicio 7.11. Circuito con cuatro resistencias, una fuente y un interruptor.

**Ejercicio 7.12.** Una corriente de  $7.0\text{ A}$  circula por la resistencia  $R_1$  que se muestra en el circuito descrito en la figura 7.34. Determinar la corriente que circula por la resistencia  $R_3$  y por la resistencia  $R_4$ , teniendo en cuenta que:  $R_1 = 30.0\ \Omega$ ,  $R_2 = 10.0\ \Omega$ ,  $R_3 = 35.0\ \Omega$  y  $R_4 = 30.0\ \Omega$  (El valor de la fuente de voltaje se desconoce).

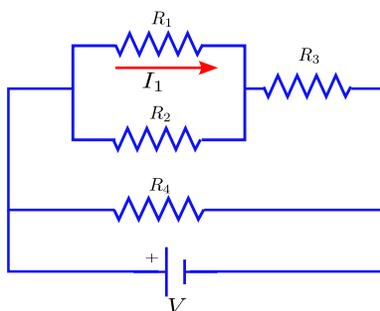


Figura 7.34: Ejercicio 7.12. Determinación de la corriente por las resistencias  $R_3$  y  $R_4$ .

**Ejercicio 7.13.** La figura 7.35 describe un circuito donde  $R = 15.0 \Omega$ , para tal sistema encontrar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

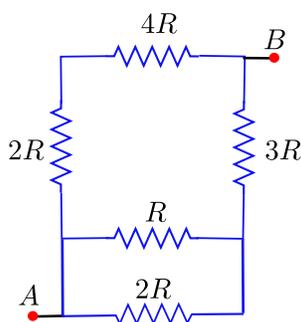


Figura 7.35: Ejercicio 7.13 . Resistencia equivalente para una arreglo de cinco resistencias en configuración mixta.

## 7.6. Leyes de Kirchhoff

En un circuito eléctrico, además de resistencias y fuentes de voltaje, pueden existir otros componentes. Asimismo, no siempre las configuraciones de las resistencias corresponden a conexiones en serie o en paralelo, por lo que se requieren métodos adicionales para encontrar la corriente y la diferencia de potencial en cada elemento del circuito.

Una herramienta útil para el análisis de circuitos son las leyes de Kirchhoff, las cuales se conocen como ley de mallas y de nodos, y se describen a continuación.

### 7.6.1. Ley de mallas

Se define una malla como cualquier trayectoria cerrada que se pueda trazar en un circuito. Para ello se puede partir de un punto en el circuito y elegir un camino a través de los diversos componentes del mismo hasta llegar nuevamente al punto de partida (evitando pasar dos veces por el mismo camino). En general, un circuito puede contener varias mallas, dependiendo de la cantidad de elementos y su disposición. La figura 7.37 muestra algunas de las mallas que pueden identificarse para el circuito esquematizado en la figura 7.36 (estas no son las únicas que se pueden construir).

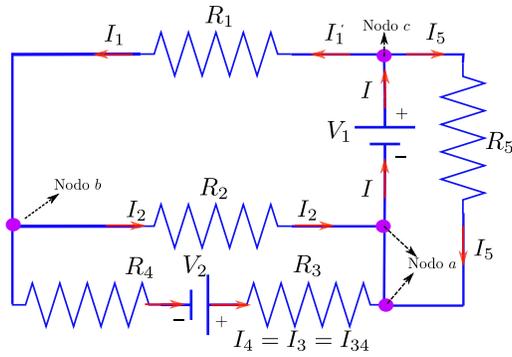


Figura 7.36: Mallas y nodos en un circuito eléctrico.

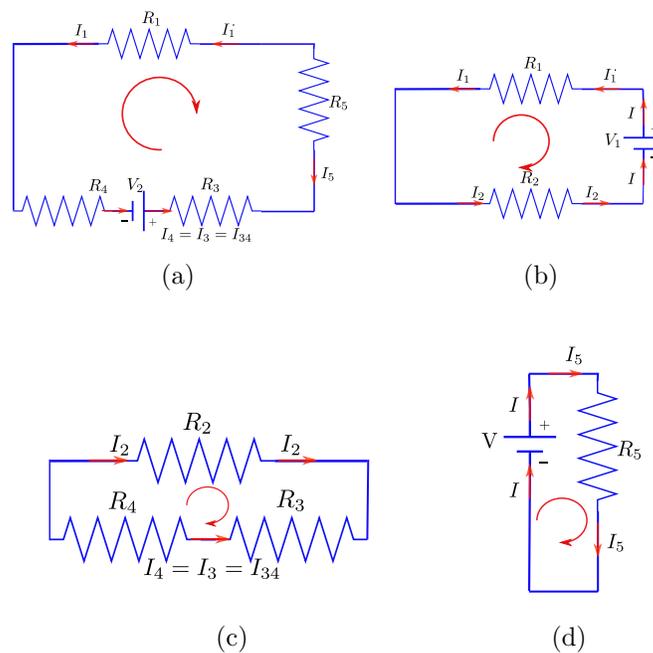


Figura 7.37: Mallas asociadas al circuito de la figura 7.36

La ley de mallas establece que la suma de voltajes y caídas de potencial a lo largo de cualquier trayectoria cerrada (malla) en un circuito debe ser igual a cero. Para comprender esta ley, se considera la malla representada en la figura 7.38, en la que se han marcado dos puntos arbitrarios,  $a$  y  $b$ , dentro de la malla. En cualquier malla, siempre existen al menos dos caminos que conectan un par de puntos. En la figura mencionada, estos caminos se ilustran en azul y rojo. En términos de diferencia de potencial, la diferencia  $V_{ab}$  a lo largo de un camino (por ejemplo, el azul) debe ser igual a la obtenida a lo largo del otro camino (el rojo). Esta igualdad en las diferencias de potencial es la base conceptual de la ley de mallas. Es importante destacar que cualquier componente que no se encuentre dentro de la trayectoria cerrada en estudio no afecta el análisis de esa malla específica.

Al analizar un circuito mediante el método de las mallas, es necesario definir las “direcciones” de las corriente que circulan por cada componente en el circuito (recordando que la dirección en realidad esta asociada al vector densidad de corriente). En principio, dichas direcciones

usualmente se desconocen, por lo tanto, la elección de estas direcciones es arbitraria al inicio del planteamiento del problema. Si se elige incorrectamente la dirección de alguna corriente, esto se reflejará en la solución como un valor negativo para dicha corriente. Esto indica simplemente que la dirección real de la corriente es opuesta a la asumida inicialmente, sin afectar la validez del resultado.

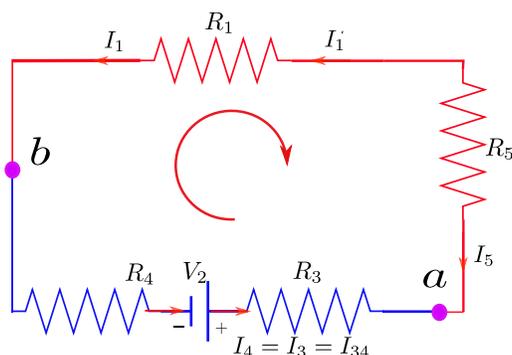


Figura 7.38: Malla asociada al circuito de la figura 7.36.

Para aplicar la ley de mallas en un circuito, se deben seguir una serie de pasos, los cuales se explican a continuación y se ilustran tomando como ejemplo el circuito de la figura 7.36:

1. Elegir la dirección para las diferentes corrientes que circulan sobre cada resistencia en el circuito (recordando que sobre resistencias en serie circula una misma corriente), lo cual en principio se puede realizar en forma arbitraria. La figura 7.37 muestra la elección de direcciones para las distintas corrientes en el circuito de estudio.
2. Establecer una trayectoria cerrada en el circuito. En este caso, tomando como referencia el circuito de la figura 7.36, se analizará la malla representada en la figura 7.38.
3. Asignar una dirección de recorrido a la malla, que servirá como guía para sumar las diferencias de potencial en cada componente a lo largo de la trayectoria. Cada malla puede tener su propia dirección de recorrido, sin embargo, no se deben modificar las direcciones previamente asignadas a corrientes del circuito. En la figura 7.38, la dirección de la malla ha sido escogida en sentido contrario a las manecillas del reloj.
4. Realizar la suma de las diferencias de potencial asociadas a cada componente ubicado a lo largo de la malla, e igualar esta suma a cero. Para realizar la suma se debe tener en cuenta que:
  - La diferencia de potencial sobre una resistencia obedece la ley de Ohm. Por lo tanto, para una resistencia  $R_i$  por la cual atraviesa una corriente  $I_i$ , la diferencia de potencial está dada por:

$$V_{Ri} = R_i I_i. \quad (7.153)$$

- La diferencia de potencial  $V_{Ri}$  en cada resistencia se incorpora en la suma con signo negativo si la corriente a través de dicha resistencia circula en la misma dirección que el sentido de recorrido asignado en la malla, y con signo positivo si circula en sentido opuesto. En el caso de la malla representada en la figura 7.38, las densidades de corriente asociadas a  $I_1$  e  $I_{34}$  (donde  $I_{34} = I_3 = I_4$ ) circulan en sentido contrario a la dirección asignada a la malla, mientras que la corriente  $I_5$  lo hace en el mismo sentido. Por lo tanto, los potenciales  $V_{R1}$ ,  $V_{R3}$  y  $V_{R4}$  se suman con signo positivo, y el potencial  $V_{R5}$  se suma con signo negativo.
- La diferencia de potencial asociada a un fuente de voltaje se considera positiva si la dirección asignada a la malla recorre la fuente desde el polo negativo (línea más pequeña en el símbolo de una fuente) hasta el polo positivo (línea más grande en el símbolo de una fuente), en caso contrario la diferencia de potencial ingresa con signo negativo. En la malla ilustrada en la figura 7.38, la dirección asignada a la malla atraviesa la fuente partiendo del polo positivo hacia el polo negativo y por lo tanto, es negativa.

Con todo lo anterior, para la malla representada en la figura 7.38, la ley de mallas conlleva a:

$$V_{R1} + V_{R3} + V_{34} - V_{R5} - V_2 = 0, \quad (7.154)$$

$$I_1 R_1 + I_{34} R_3 + I_{34} R_4 - I_5 R_5 - V_2 = 0. \quad (7.155)$$

Por cada malla, se puede obtener una ecuación asociada a la suma de diferencias de potencial sobre la trayectoria cerrada correspondiente. En general para encontrar todas las corrientes que circulan en un circuito, es necesario analizar más de una malla y aplicar también la ley de nodos que se explica a continuación.

## 7.6.2. Ley de nodos

Como nodo se entiende a todo punto dentro de un circuito donde exista división o unión de corriente provenientes de diferentes caminos. También se puede dar el caso que en un nodo no hay división de corriente, pero en dicho punto debe existir una conexión de un potencial externo aplicado por el polo de una fuente de voltaje externa (ideal si no hay corriente) o de un capacitor. Dado que la conexión entre los componentes de un circuito se da por cables conductores, un nodo se puede entender como un punto donde se conectan cables (cada cable llevará una corriente diferente y/o conectará con un potencial externo). La figura 7.39 indica un nodo en cual se unen 4 cables (no se indica todo el circuito).

Ya que no pueden existir puntos de acumulación de cargas sobre ningún punto del circuito (incluidos los nodos), entonces toda corriente neta que entre a un nodo (por uno o varios cables) debe salir del mismo por otro cable conectado al nodo (o por otros cables conectados al nodo) como se indica en la figura 7.39, en el cual  $I_1 + I_3 + I_4 = I_2$ . Con lo anterior, se puede establecer la ley de nodos así: la carga neta que ingresa en un nodo en la unidad de

tiempo, debe salir del nodo en la misma unidad de tiempo. Lo anterior aplica para cualquier punto sobre los cables de conducción en el circuito, sea nodo o no, pero es particularmente útil cuando se analiza sobre nodos. Como ejemplo, en el circuito descrito en la figura 7.36, se tienen 3 nodos denominados, Nodo  $a$ , Nodo  $b$ , y Nodo  $c$ . Se debe notar que en la figura 7.36, existen dos puntos identificados como Nodo  $a$ , que en el circuito real corresponden al mismo punto; se podría quitar del gráfico la línea que une a los dos puntos identificados como Nodo  $a$  y las corrientes y diferencias de potencial en el circuito no se afectan.

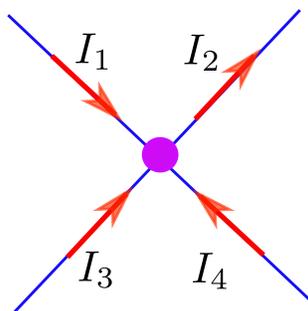


Figura 7.39: Nodo con dos corrientes entrantes y dos corrientes salientes.

Como ejemplo para aplicar la ley de nodos, se toma nuevamente el circuito esquematizado en la figura 7.36, en el cual se tiene que:

1. Sobre el nodo  $c$ , ingresa la corriente  $I$  y salen las corrientes  $I_1$  e  $I_5$ , por lo tanto, se tiene que:

$$I = I_1 + I_5. \quad (7.156)$$

2. Sobre el nodo  $b$ , ingresa la corriente  $I_1$  y salen las corrientes  $I_2$  e  $I_{34}$  (donde  $I_{34} = I_3 = I_4$ ), por lo tanto, se tiene que:

$$I_1 = I_2 + I_{34}. \quad (7.157)$$

3. Sobre el nodo  $b$ , ingresan las corrientes  $I_2$ ,  $I_{34}$  e  $I_5$  y sale la corriente  $I$ , por lo tanto, se tiene que:

$$I_5 + I_2 + I_{34} = I. \quad (7.158)$$

Como se puede verificar, en conjunto los nodos  $a$  y  $c$  son equivalentes al nodo  $b$ , ya que si se despeja  $I_1$  de (7.157) y se reemplaza en (7.156), se obtiene la misma relación dada por (7.158).

En general, para encontrar todas las corrientes en un circuito haciendo uso de las leyes de Kirchhoff, se deben establecer tantas ecuaciones como corrientes existan en el circuito. Estas

ecuaciones se obtienen del análisis de mallas y nodos dentro del circuito. Por lo general, el número de ecuaciones posibles a partir de mallas y nodos es mayor que el número de corrientes desconocidas, por lo que no es necesario establecer las ecuaciones para todas las mallas o nodos presentes en el circuito, sino únicamente las necesarias para obtener un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas (corrientes) que de ecuaciones. A continuación, se presenta un ejemplo de la aplicación de las leyes de Kirchhoff para la determinación de corrientes:

**Ejemplo 7.16.** Como aplicación de la leyes de nodos y mallas, en este ejemplo se encuentran todas las corrientes descritas en el circuito esquematizado en la figura 7.40, donde ya se ha asumido y se indica mediante flechas, las diferentes “direcciones” de las corrientes asociadas a cada resistencia en el circuito. Los valores para cada resistencia y fuentes de voltaje se indican en la figura 7.40.

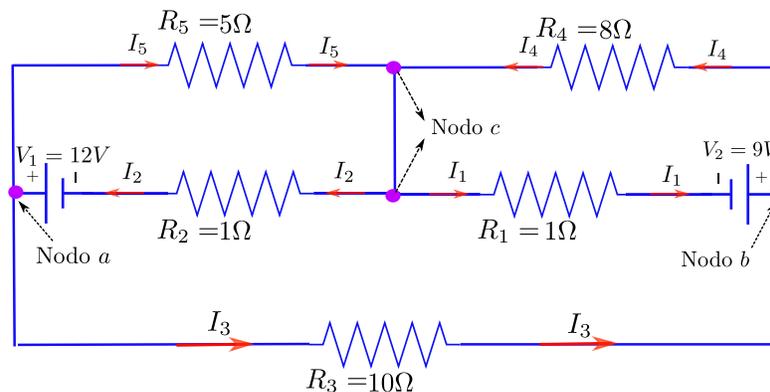


Figura 7.40: Circuito mixto ejemplo (7.16).

**Solución:** El circuito descrito en la figura 7.40 tiene tres nodos, que en el esquema se etiquetan como: Nodo a, Nodo b y Nodo c (Al Nodo c, le corresponden gráficamente dos puntos, pero en la práctica solo es uno). Al aplicar la ley de nodos se tiene que:

$$\text{Nodo a} \Rightarrow I_2 = I_5 + I_3, \quad (7.159)$$

$$\text{Nodo b} \Rightarrow I_3 + I_1 = I_4, \quad (7.160)$$

$$\text{Nodo c} \Rightarrow I_4 + I_5 = I_2 + I_1. \quad (7.161)$$

Para aplicar la ley de mallas, se han escogido del circuito original tres mallas esquematizadas en la figura 7.41, eligiendo en todas ellas el sentido de las manecillas del reloj para realizar la suma de las diferencias de potencial. Aplicando la ley de mallas de Kirchhoff se tiene que:

$$\text{Malla (a)} \Rightarrow 12V - I_5(5\Omega) - I_2(1\Omega) = 0, \quad (7.162)$$

$$\text{Malla (b)} \Rightarrow -9V + I_1(1\Omega) + I_4(8\Omega) = 0, \quad (7.163)$$

$$\text{Malla (c)} \Rightarrow 9V + I_3(10\Omega) - 12V + I_2(1\Omega) - I_1(1\Omega) = 0. \quad (7.164)$$

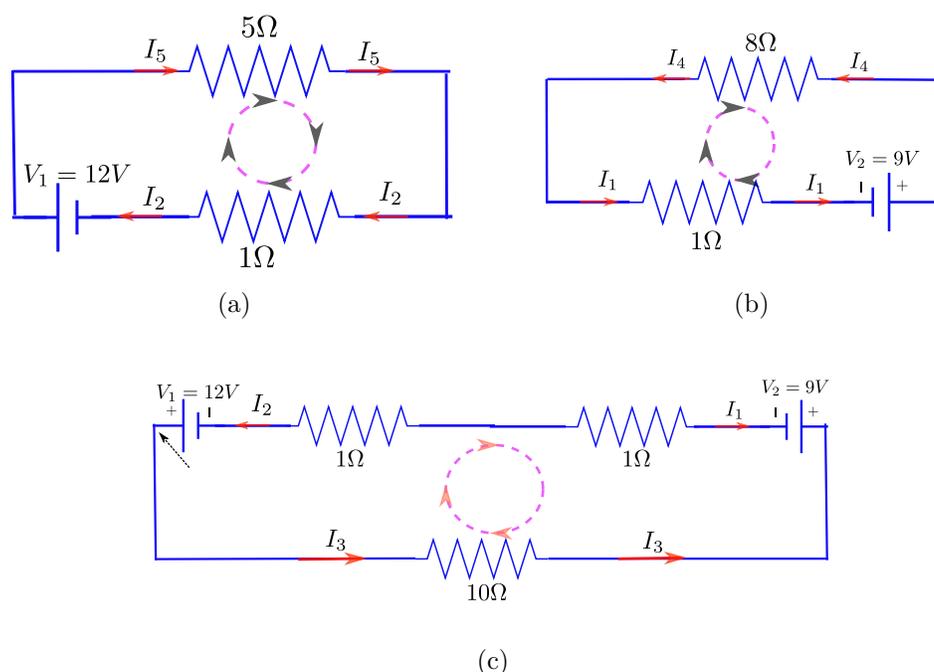


Figura 7.41: Mallas para el circuito descrito en 7.40.

El circuito original tiene cinco corrientes, por lo tanto, entre las relaciones de corrientes y voltajes establecidos en la aplicación de nodos y mallas se deben escoger cinco ecuaciones, para formar un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas (las corrientes). Dos de las tres ecuaciones relacionadas con los nodos son equivalentes, así que solo dos son útiles. Si se toman las ecuaciones encontradas para los nodos  $a$  y  $b$  (ecuaciones (7.159) y (7.160)), y las ecuaciones establecidas para las tres mallas (a), (b) y (c) (ecuaciones (7.162), (7.163) y (7.164)), se tiene un sistema de cinco incógnitas con cinco ecuaciones, que se puede resolver por cualquier método matemático, cuyos resultados son:

$$I_1 = \frac{179}{211}A, \quad I_2 = \frac{452}{211}A, \quad I_3 = \frac{36}{211}A, \quad I_4 = \frac{215}{211}A, \quad I_5 = \frac{416}{211}A. \quad (7.165)$$

La diferencia de potencial en cada resistencia, se obtiene al multiplicar cada una de las corrientes encontradas por la resistencia correspondiente; es decir,  $V_i = I_i R_i$ , con lo cual:

$$V_1 = I_1 R_1 = \frac{179}{211}A(1\Omega) = \frac{179}{211} \text{ Voltios}, \quad (7.166)$$

$$V_2 = I_2 R_2 = \frac{452}{211}A(1\Omega) = \frac{179}{211} \text{ Voltios}, \quad (7.167)$$

$$V_1 = I_3 R_3 = \frac{36}{211}A(10\Omega) = \frac{360}{211} \text{ Voltios}, \quad (7.168)$$

$$V_1 = I_4 R_4 = \frac{215}{211}A(8\Omega) = \frac{1720}{211} \text{ Voltios}, \quad (7.169)$$

$$V_1 = I_5 R_5 = \frac{416}{211}A(5\Omega) = \frac{2080}{211} \text{ Voltios}. \quad (7.170)$$

**Ejemplo 7.17.** La figura 7.42 describe un circuito con tres resistencias y tres fuentes de voltaje. Para tal sistema se encontrará la corriente en cada resistencia y la diferencia de potencial entre los puntos  $c$  y  $f$  teniendo en cuenta que:  $V_1 = 70.0V$ ,  $V_2 = 60.0V$ ,  $V_3 = 80.0V$ ,  $R_1 = 2.0k\Omega$ ,  $R_2 = 3.0k\Omega$  y  $R_3 = 4.0k\Omega$ .

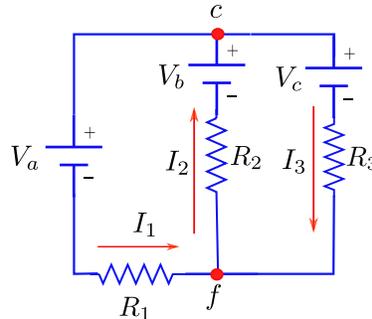


Figura 7.42: Ejemplo 7.17. Aplicación de las leyes de Kirchhoff.

**Solución:** Para determinar las corrientes en cada una de las resistencias presentes en el circuito, se utilizarán las leyes de Kirchhoff. Para ello se han asignado las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , con su posible orientación, como se indica en la figura 7.42. El circuito presenta dos nodos equivalentes: el nodo definido en el punto  $c$  y el nodo definido en el punto  $f$ . Para cualquiera de los nodos se tiene que:

$$I_2 = I_1 + I_3. \quad (7.171)$$

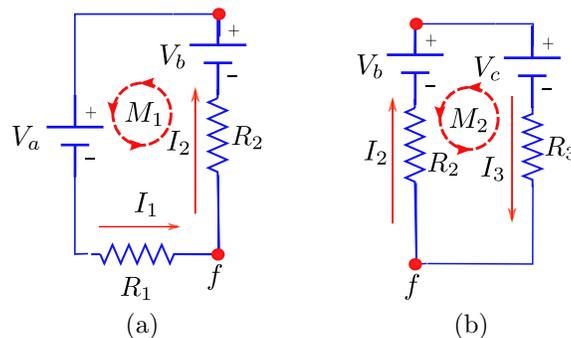


Figura 7.43: Ejemplo 7.17. Mallas asociadas al circuito indicado en la figura 7.42.

Para aplicar la ley de mallas, se escogen dos mallas dentro del circuito, las cuales se describen en la figura 7.43. Considerando un recorrido en sentido antihorario para realizar la suma de potenciales y caídas de potencial a través de las mallas, es posible establecer las siguientes ecuaciones:

- Malla (I):
 
$$-70.0 V - (2.0 k\Omega) I_1 - (3.0 k\Omega) I_2 + 60.0 V = 0. \quad (7.172)$$

- Malla (II):
 
$$-60.0 V + (3.0 k\Omega) I_2 + 80.0 V + (4.0 k\Omega) I_3 = 0. \quad (7.173)$$

Reemplazando (7.171) en (7.172) resulta,

$$\begin{aligned} -(2.0 \text{ k}\Omega) I_1 - (3.0 \text{ k}\Omega) I_2 &= 10.0 \text{ V}, \\ &\downarrow \\ -(2.0 \text{ k}\Omega) I_1 - (3.0 \text{ k}\Omega) (I_1 + I_3) &= 10.0 \text{ V}, \\ &\downarrow \\ -(5.0 \text{ k}\Omega) I_1 - (3.0 \text{ k}\Omega) I_3 &= 10.0 \text{ V}. \end{aligned} \quad (7.174)$$

Ahora, reemplazando (7.171) en (7.173) se tiene,

$$\begin{aligned} (3.0 \text{ k}\Omega) I_2 + (4.0 \text{ k}\Omega) I_3 &= -20.0 \text{ V}, \\ &\downarrow \\ (3.0 \text{ k}\Omega) (I_1 + I_3) + (4.0 \text{ k}\Omega) I_3 &= -20.0 \text{ V}, \\ &\downarrow \\ (3.0 \text{ k}\Omega) I_1 + (7.0 \text{ k}\Omega) I_3 &= -20.0 \text{ V}. \end{aligned} \quad (7.175)$$

De la ecuación (7.174) es posible despejar la corriente  $I_3$  tal que

$$I_3 = \frac{-10.0 \text{ V} - (5.0 \text{ k}\Omega) I_2}{3.0 \text{ k}\Omega}. \quad (7.176)$$

Al substituir el valor obtenido de  $I_3$  en (7.175), se tiene:

$$(3.0 \text{ k}\Omega) I_1 + (7.0 \text{ k}\Omega) \left[ \frac{-10.0 \text{ V} - (5.0 \text{ k}\Omega) I_2}{3.0 \text{ k}\Omega} \right] = -20.0 \text{ V}, \quad (7.177)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ (9.0 \text{ k}\Omega) I_1 - 70.0 \text{ V} - (35.0 \text{ k}\Omega) I_2 &= -60.0 \text{ V}, \end{aligned} \quad (7.178)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ -(26.0 \text{ k}\Omega) I_2 &= 10.0 \text{ V}. \end{aligned} \quad (7.179)$$

Por lo tanto,

$$I_2 = -\frac{10.0 \text{ V}}{26.0 \text{ k}\Omega} = -0.385 \text{ mA}. \quad (7.180)$$

Ahora, de la ecuación (7.176) resulta

$$I_3 = \frac{-10.0 \text{ V} - (5.0 \text{ k}\Omega) (-0.385 \text{ mA})}{3.0 \text{ k}\Omega}. \quad (7.181)$$

por tanto,

$$I_3 = -2.69 \text{ mA}. \quad (7.182)$$

Finalmente, de (7.171) se tiene,

$$I_2 = I_1 + I_3 = -0.385 \text{ mA} - 2.69 \text{ mA} = -3.08 \text{ mA}. \quad (7.183)$$

los signos en las corrientes indican que la dirección real de las mismas es opuesta a la considerada inicialmente en la aplicación del método.

Ahora, la diferencia de potencial entre los puntos  $c$  y  $f$  es:

$$\begin{aligned} V_{cf} &= -60.0 \text{ V} - (3.0 \text{ k}\Omega) I_2 = -60.0 \text{ V} - (3.0 \text{ k}\Omega) (3.08 \text{ mA}) \\ &= -69.2 \text{ V}, \end{aligned} \quad (7.184)$$

lo que indica que el punto  $c$  está a un potencial más alto en relación al punto  $f$ .

**Ejemplo 7.18.** Para el circuito indicado en la figura 7.44, se calculará  $V_1$ ,  $V_2$  y  $R_4$  teniendo en cuenta que:  $R_1 = 6.0\Omega$ ,  $R_2 = 4.0\Omega$ ,  $R_3 = 6.0\Omega$ ,  $R_5 = 4.0\Omega$ ,  $I_1 = 4.0\text{A}$ ,  $I_2 = 3.0\text{A}$ ,  $I_3 = 1.0\text{A}$ ,  $I_4 = 2.0\text{A}$ ,  $I_5 = 3.0\text{A}$  e  $I_6 = 1.0\text{A}$ .

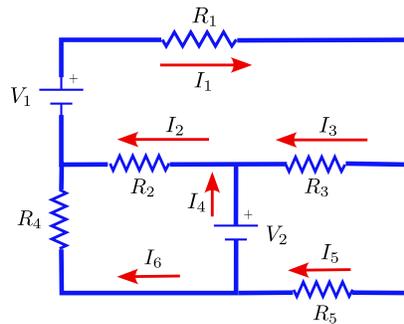


Figura 7.44: Ejemplo 7.18. Aplicación de las leyes de Kirchoff, tomando tres mallas.

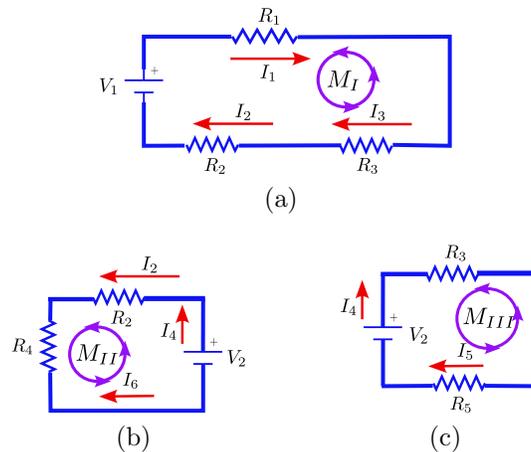


Figura 7.45: Ejemplo 7.17. Mallas (7.44).

**Solución:** El circuito en estudio presenta cuatro nodos identificados por los puntos (1, 2, 3, 4) en la figura 7.44. Adicionalmente, es posible elegir tres mallas dentro del circuito que se ilustran en la figura 7.45. A partir del estudio de nodos y mallas, se puede establecer el siguiente conjunto de ecuaciones:

- Malla (I):

$$(4.0 \Omega) (3.0 \text{ A}) + (6.0 \Omega) (1.0 \text{ A}) + (6.0 \Omega) (4.0 \text{ A}) - V_1 = 0. \quad (7.185)$$

- Malla (II):

$$(1.0 \text{ A}) R_4 + V_2 - (4.0 \text{ } \Omega)(3.0 \text{ A}) = 0. \quad (7.186)$$

- Malla (III):

$$-V_2 + (4.0 \text{ } \Omega)(3.0 \text{ A}) - (6.0 \text{ } \Omega)(1.0 \text{ A}) = 0. \quad (7.187)$$

- Nodos (1):

$$I_1 = I_2 + I_6. \quad (7.188)$$

- Nodos (2):

$$I_2 = I_3 + I_4. \quad (7.189)$$

- Nodos (3):

$$I_1 = I_3 + I_5. \quad (7.190)$$

- Nodos (4):

$$I_5 = I_6 + I_4. \quad (7.191)$$

De la expresión (7.185) resulta que

$$12.0 \text{ V} + 6.0 \text{ V} + 24.0 \text{ V} - V_1 = 0, \quad (7.192)$$

de manera que

$$V_1 = 42.0 \text{ V}. \quad (7.193)$$

Ahora, de (7.187) :

$$-V_2 + 12.0 \text{ V} - 6.0 \text{ V} = 0, \quad (7.194)$$

es decir,

$$V_2 = 6.0 \text{ V}. \quad (7.195)$$

Finalmente, utilizando (7.186) y (7.195) se determina que

$$(1.0 \text{ A}) R_4 + 6.0 \text{ V} - (4.0 \text{ } \Omega)(3.0 \text{ A}) = 0, \quad (7.196)$$

es decir

$$R_4 = \frac{12.0 \text{ V} - 6.0 \text{ V}}{1.0 \text{ A}} = 6.0 \text{ } \Omega. \quad (7.197)$$

Es posible verificar que las ecuaciones de nodos se satisfacen automáticamente.

**Ejercicio 7.14.** Teniendo en cuenta que la potencia disipada en un circuito corresponde a la cantidad de energía transformada en calor como consecuencia de la resistencia eléctrica de los elementos del circuito, y que dicha potencia se calcula mediante la expresión  $P = I^2 R$ , calcular la potencia disipada en cada uno de los resistores del circuito representado en la figura 7.46. Lo anterior teniendo en cuenta los siguientes valores:  $R_1 = 60.0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 40.0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 60.0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 40.0 \text{ k}\Omega$ ,  $V_1 = 100 \text{ V}$  y  $V_2 = 200 \text{ V}$ .

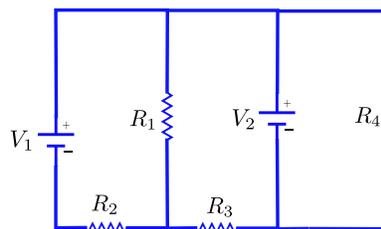


Figura 7.46: Ejercicio 7.14. Circuito con dos fuentes y cuatro resistencias.

**Ejercicio 7.15.** Para el circuito indicado en la figura 7.47, calcular la potencia disipada en la resistencia de  $R_2$  y evaluar la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ , teniendo en cuenta que:  $R_1 = 4.0\Omega$ ,  $R_2 = 2.0\Omega$ ,  $R_3 = 6.0\Omega$ ,  $V_1 = 8.0V$  y  $V_2 = 12.0V$ .

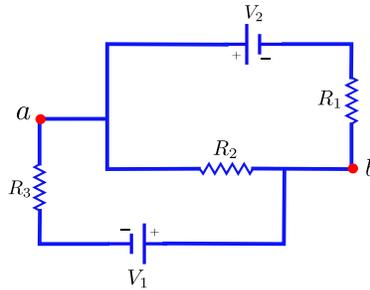


Figura 7.47: Ejercicio 7.15. Potencia disipada en la resistencia  $R_2$ .

**Ejercicio 7.16.** En el circuito mostrado en la figura 7.48, el voltímetro indica una lectura de  $25.0V$  cuando el interruptor se encuentra abierto. Determinar el valor del voltaje suministrado por la fuente, así como la lectura del amperímetro una vez el interruptor se cierra. Para esto, tener en cuenta los siguientes valores de los componentes del circuito:  $R_1 = 30.0\Omega$ ,  $R_2 = 20.0\Omega$ ,  $R_3 = 75.0\Omega$ ,  $R_4 = 50.0\Omega$ , y  $V_2 = 25.0V$ .

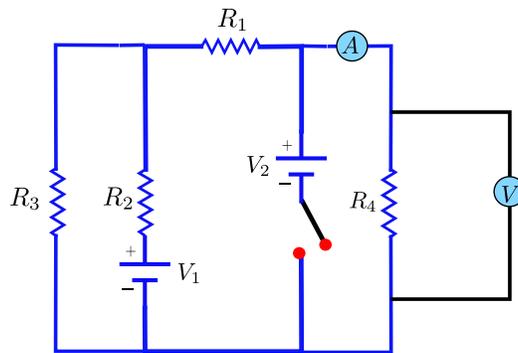


Figura 7.48: Ejercicio 7.16. Determinación del voltaje suministrado por la fuente de voltaje  $V_2$ .

**Ejercicio 7.17.** Para el circuito de la figura 7.49, calcular la potencia disipada por cada uno de los resistores y evaluar la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ , teniendo en cuenta que:  $R_1 = 1.0\Omega$ ,  $R_2 = 6.0\Omega$ ,  $R_3 = 1.0\Omega$ ,  $R_4 = 2.0\Omega$ ,  $R_5 = 4.0\Omega$ ,  $R_6 = 1.0\Omega$ ,  $I_1 = 1.0A$ ,  $I_2 = 2.0A$ , y  $V_3 = 20.0V$ .

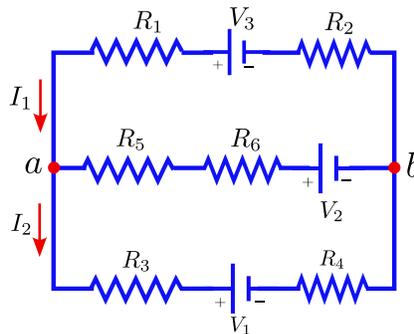


Figura 7.49: Ejercicio 7.17. Potencia disipada por cada resistor en un circuito con seis resistencias y tres fuentes de voltaje.

**Ejercicio 7.18.** La resistencia  $R_2$  del circuito indicado por la Figura 7.50, consume energía a razón de  $30 \frac{J}{s}$ . Encontrar la corriente a través del amperímetro y evaluar el valor de  $V_1$ , teniendo en cuenta que:  $R_1 = 17.0\Omega$ ,  $R_2 = 6.0\Omega$ ,  $R_3 = 3.0\Omega$ ,  $R_4 = 2.0\Omega$ ,  $R_5 = 13.0\Omega$ ,  $R_6 = 1.0\Omega$ ,  $R_7 = 19.0\Omega$  y  $R_8 = 20.0\Omega$ .

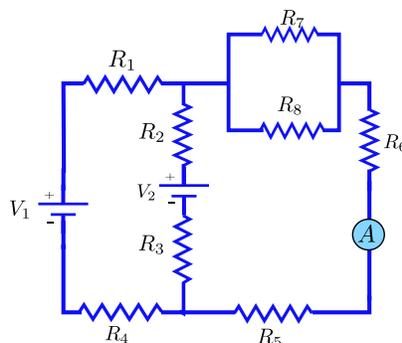


Figura 7.50: Ejercicio 7.18. Corriente medida en el amperímetro ubicado entre  $R_5$  y  $R_6$ .

**Ejercicio 7.19.** Calcular las tres corrientes del circuito indicado por la Figura 7.51, teniendo en cuenta que:  $R_1 = 10.0\Omega$ ,  $R_2 = 1.0\Omega$ ,  $R_3 = 1.0\Omega$ ,  $R_4 = 5.0\Omega$ ,  $R_5 = 8.0\Omega$ ,  $V_1 = 12.0V$  y  $V_2 = 9.0V$ .

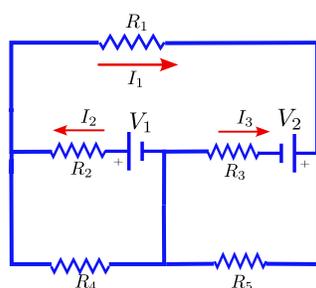


Figura 7.51: Ejercicio 7.19. Determinación de las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

Hasta el momento solo se han analizado circuitos donde existen fuentes de voltaje y resistencias, pero los dispositivos electrónicos contienen muchos más componentes dependiendo de la complejidad del mismo.

Un elemento adicional que puede tener un circuito sencillo es un capacitor. Cuando un capacitor descargado se conecta a una fuente de voltaje a través de una resistencia, dicho capacitor no se carga instantáneamente y se puede comprobar que el tiempo en el proceso de carga depende de la resistencia en el circuito y de la capacitancia del capacitor. De igual forma, si una vez cargado el capacitor se conectan sus terminales a través de una resistencia, el capacitor se descarga y la velocidad de descarga depende de la resistencia y la capacitancia en los elementos del circuito, lo cual se analiza en la siguiente sección.

## 7.7. Carga y Descarga de un Capacitor

Como ya se explicó, un capacitor es un dispositivo eléctrico que tiene la capacidad de almacenar carga eléctrica, en un circuito dicha propiedad es útil para cumplir diferentes

funciones como: almacenamiento temporal de energía, estabilización de señales eléctricas, filtrado, generación de señales oscilantes, entre otras. Si bien un capacitor se puede cargar instantáneamente al ser conectado a una fuente de voltaje, es muy importante analizar cómo es el proceso de carga si el capacitor se conecta a la fuente de voltaje a través de una resistencia. De igual forma es importante el estudio del proceso de descarga, cuando los terminales de un capacitor cargado son conectados mediante una resistencia.

### 7.7.1. Proceso de carga de un capacitor

Para estudiar el proceso de carga de un capacitor, se va a considerar el circuito de la figura 7.52. La resistencia en la figura 7.52 se usa para cargar el capacitor gradualmente en el tiempo. Si no hubiera resistencia, el capacitor se cargaría a su máximo valor instantáneamente (En la práctica siempre existe una resistencia debido a los cables de conexión, pero puede ser despreciada).

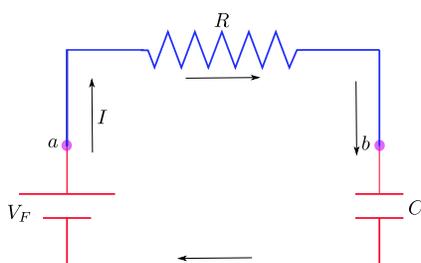


Figura 7.52: Carga de un capacitor.

Si se observa la figura 7.52, se puede evidenciar que la diferencia de potencial medida entre el punto  $a$  y el punto  $b$ , que se denota con  $V_{ab}$ , debe ser igual independientemente de si se mide considerando los elementos que están en la parte superior de los dos puntos (elementos en azul), o los elementos que están en la parte inferior (elementos en rojo). Si se considera la diferencia de potencial entre el punto  $a$  y  $b$  tomando los elementos por la parte superior (en azul), se tiene que:

$$V_{ab} = IR. \quad (7.198)$$

Ahora, al considerar la diferencia de potencial entre el punto  $a$  y  $b$  tomando los elementos por la parte inferior (en rojo), se tiene

$$V_{ab} = V - V_C, \quad (7.199)$$

donde  $V$  representa el voltaje de la fuente y  $V_C$  la diferencia de potencial en el capacitor. Se debe evidenciar que durante el proceso de carga, la polaridad de la fuente es contraria a la polaridad del capacitor. Ahora, al comparar (7.198) y (7.199), se tiene que:

$$V - V_c = IR. \quad (7.200)$$

Por otro lado, se tiene que

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (7.201)$$

donde la corriente  $I$  determina el paso de carga  $dq$  en el tiempo  $dt$  a través de una sección transversal de la resistencia. Adicionalmente, la diferencia de potencial en el capacitor, viene dada por:

$$V_C = \frac{q_c}{C}, \quad (7.202)$$

donde  $q_c$  hace referencia a la carga almacenada en el capacitor en un cierto tiempo  $t$ . Si se reemplaza lo anterior en (7.200), se tiene que:

$$V - \frac{q_c}{C} = R \frac{dq}{dt}. \quad (7.203)$$

La expresión (7.203) no se puede integrar aún, ya que en (7.203) existen dos variables; por un lado se tiene  $dq$  que está asociada a la carga que atraviesa la resistencia, y por otro  $q_c$  que es la carga almacenada en el condensador. Sin embargo, la carga  $dq$  que atraviesa la resistencia en un tiempo  $dt$ , representa también el aumento de carga  $dq_c$  en el capacitor en el mismo tiempo  $dt$ , por lo tanto:

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv \frac{dq_c}{dt}, \quad (7.204)$$

y reemplazando el último resultado en (7.203) se tiene:

$$V - \frac{q_c}{C} = R \frac{dq_c}{dt}. \quad (7.205)$$

Al despejar  $\frac{dq_c}{dt}$  de la última relación, resulta:

$$\frac{dq_c}{dt} = \frac{(VC - q_c)}{RC}, \quad (7.206)$$

y por lo tanto

$$\frac{dq_c}{(VC - q_c)} = \frac{dt}{RC}. \quad (7.207)$$

Si se asume que el circuito en estudio se cerró al tiempo cero, iniciando el proceso de carga con un condensador completamente descargado; es decir, al tiempo  $t = 0 \rightarrow q_c = 0$ . Al

integrar la expresión (7.207) entre el tiempo  $t = 0$  ( $q_c = 0$ ) y cualquier tiempo  $t$ , se tiene que:

$$\Rightarrow \int_0^{q_c} \frac{dq'_c}{(VC - q'_c)} = \frac{\int_0^t dt'}{RC}, \quad (7.208)$$

donde en la última igualdad se han renombrado las variables de integración  $q_c$  y  $t$ , por  $q'_c$  y  $t'$ , respectivamente, para usar las primeras  $q_c$  y  $t$  como límites de integración. Al integrar (7.208) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\ln(VC - q'_c) \Big|_0^{q_c} &= \frac{t}{RC} \\ \Rightarrow \ln \frac{VC - q_c}{VC} &= -\frac{t}{RC} \\ \Rightarrow q_c &= VC \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right). \end{aligned} \quad (7.209)$$

La expresión (7.209) indica la carga  $q_c$  almacenada en el capacitor a cualquier tiempo  $t$ . Como se puede observar, al tiempo cero la carga en el capacitor es cero (justo cuando se conecta la fuente de voltaje  $V$ ). También se establece que para alcanzar la máxima carga ( $VC$ ), se requiere un tiempo infinito, pero en la práctica en un tiempo relativamente grande (relativamente grande en comparación a  $1/(RC)$ ), se puede considerar el capacitor completamente cargado. La figura 7.53 muestra la gráfica de carga vs tiempo para el capacitor en el proceso de carga con valores específicos de  $V$ ,  $R$  y  $C$ .

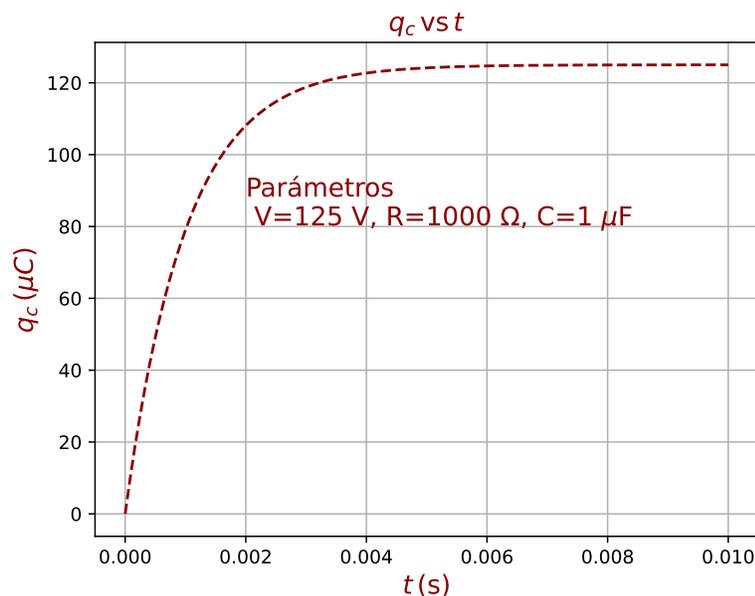


Figura 7.53:  $q_c$  vs  $t$  en el proceso de carga de un capacitor.

A partir del último resultado de (7.209), se puede encontrar la corriente en el circuito a cualquier tiempo  $t$  mediante derivación, y teniendo en cuenta que  $I = \frac{dq}{dt} \equiv \frac{dq_c}{dt}$ , se tiene que:

$$I = \frac{dq_c}{dt} = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (7.210)$$

A partir de (7.210), se puede observar que al tiempo cero la corriente es máxima ( $V/R$ ) y disminuye conforme aumenta el tiempo, lo cual se explica dado que el capacitor se carga con polaridad contraria a la fuente y su diferencia de potencial aumenta a medida que la carga aumenta, disminuyendo paulatinamente la acción que la fuente externa ejerce sobre los portadores de carga. Cuando alcanza la máxima carga, la diferencia de potencial en el capacitor es igual a la diferencia de potencial de fuente, pero dada su polaridad, anula completamente el efecto que tiene la fuente externa sobre los portadores de carga.

La figura 7.54 muestra la gráfica de corriente vs tiempo en el proceso de carga del capacitor, para valores específicos de  $V$ ,  $R$  y  $C$ .

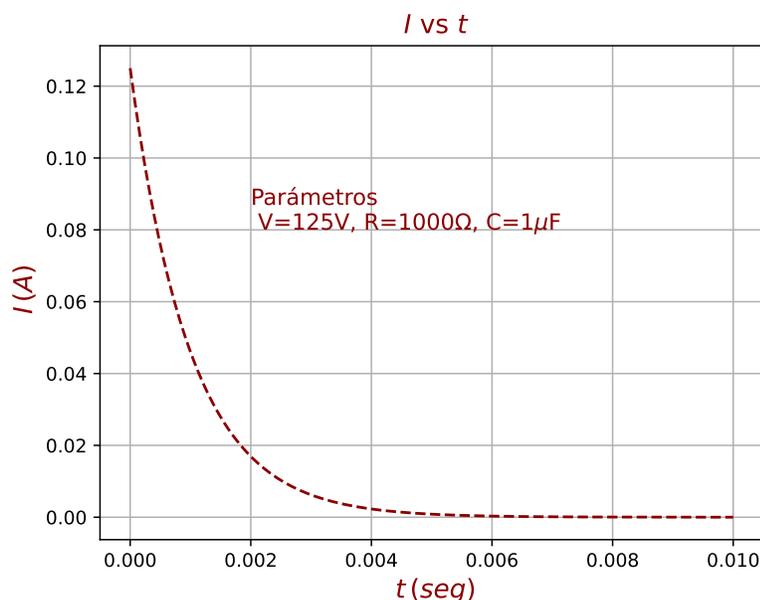


Figura 7.54:  $I$  vs  $t$  en el proceso de carga de un capacitor.

### 7.7.2. Proceso de descarga de un capacitor

Para explicar el proceso de descarga de un capacitor, se utilizará el circuito descrito en la figura 7.55.

Al no existir fuente, los electrones almacenados en una de las placas del capacitor, se mueven para cubrir el exceso de carga positiva en la carga opuesta del mismo, generando una corriente a través del circuito (recordar que la corriente tiene dirección contraria al movimiento de los electrones). En este caso, se tiene que:

$$V_c = IR, \quad (7.211)$$

y por lo tanto:

$$\frac{q_c}{C} = R \frac{dq}{dt}. \quad (7.212)$$

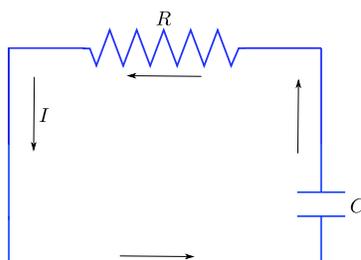


Figura 7.55: Circuito asociado a descarga de un capacitor.

Ahora, la carga  $dq$  que atraviesa la resistencia en el tiempo  $dt$ , es igual a la carga  $dq_c$  que sale del capacitor al tiempo  $dt$ , pero dado que en este caso la carga en el condensador disminuye al pasar el tiempo (la carga  $dq_c$  sale del capacitor en el tiempo  $dt$ ), se tiene que:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dq_c}{dt}. \quad (7.213)$$

Remplazando (7.213) en (7.212) se tiene que:

$$\frac{q_c}{C} = -R \frac{dq_c}{dt}. \quad (7.214)$$

Integrando (7.214) se tiene que:

$$\int_{q_{max}}^{q_c} \frac{dq'_c}{q'_c} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}. \quad (7.215)$$

En la expresión anterior, se ha tenido en cuenta que el proceso de descarga se inicia con un capacitor cargado (al tiempo cero, la carga es máxima), y se han tomado las variables de integración como  $q'_c$  y  $t'$ , para utilizar  $q_c$  y  $t$  como límites de integración. Al integrar (7.215) se tiene que

$$\ln \frac{q_c}{q_{max}} = -\frac{t}{RC}, \quad (7.216)$$

con lo cual

$$q_c = q_{max} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (7.217)$$

Se puede asumir que la carga máxima en el condensador  $q_{max}$ , se alcanza en un proceso de carga mediante una fuente externa de voltaje  $V$  y por lo tanto,  $q_{max} = VC$ . La expresión (7.217) indica que la carga es máxima al tiempo cero y tiende a cero conforme el tiempo avanza (en  $t \rightarrow \infty$ ). La figura 7.56 muestra la gráfica de carga vs tiempo en el proceso de descarga de un capacitor con valores específicos de  $V$ ,  $R$  y  $C$ .

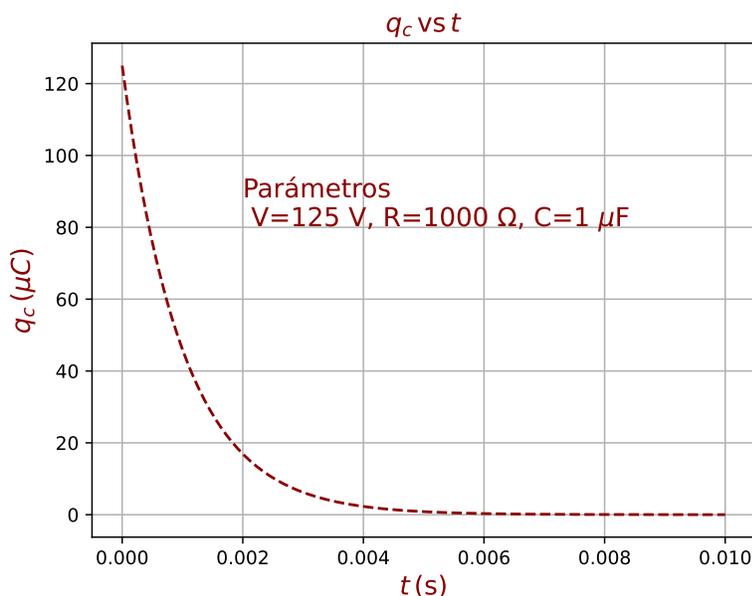


Figura 7.56:  $q_c$  vs  $t$  en el proceso de descarga de un capacitor.

La corriente en el circuito, se puede encontrar a través de la equivalencia (7.213), tal que:

$$I = \frac{q_{max}}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (7.218)$$

Se debe aclarar que  $\frac{dq_c}{dt}$ , que se determina a partir de (7.213) es negativa, lo cual radica en el hecho que la carga disminuye con respecto al tiempo en el proceso de descarga, pero la corriente eléctrica (carga que pasa en la unidad de tiempo por la resistencia) siempre es positiva  $I > 0$ . La figura 7.57 muestra la gráfica de corriente vs tiempo en el proceso de descarga de un capacitor con valores específicos de  $V$  ( $V \equiv q_{max}/C$ ),  $R$  y  $C$ .

Si se comparan las gráficas de  $I$  vs  $t$  para el proceso de carga y descarga, se puede evidenciar que son exactamente las mismas. Efectivamente la corriente en el proceso de carga parte al tiempo cero de su máximo valor, definido por la diferencia de potencial suministrada por la fuente externa  $V$  y la resistencia en el circuito, y disminuye a cero conforme el capacitor se carga. En el proceso de descarga sucede algo similar, la corriente parte al tiempo cero

de su máximo valor, relacionado con la máxima diferencia de potencial del capacitor  $V_c$  cargado y la resistencia en el circuito. Si se asume que el capacitor se dejó cargar un tiempo suficientemente largo con una fuente externa de voltaje  $V$ , entonces la diferencia de potencial inicial en el capacitor que genera la corriente en el circuito será igual a  $V_c$ , y por tanto, las corrientes en el proceso de carga y descarga serán la misma (asumiendo que se mantiene la misma resistencia en los dos procesos).

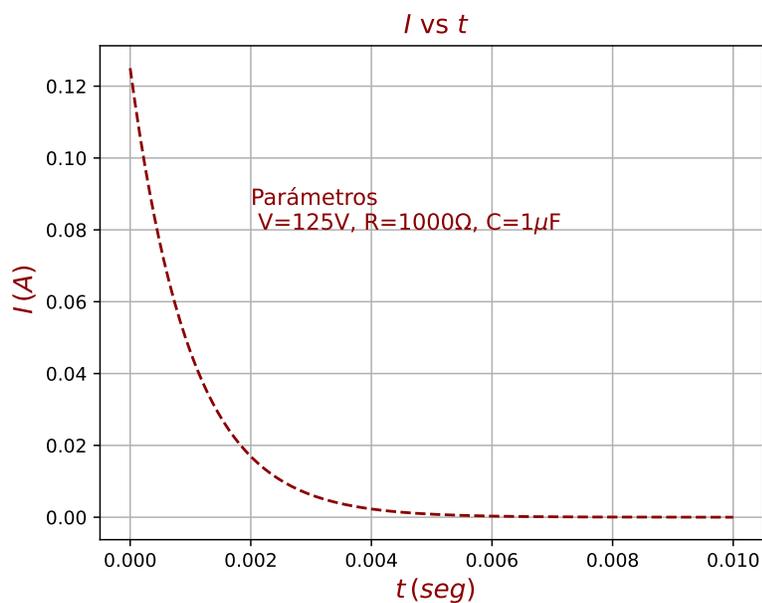


Figura 7.57: corriente ( $I$ ) vs tiempo ( $t$ ) en el proceso de descarga de un capacitor.

**Ejemplo 7.19.** Determinar la carga máxima que puede alcanzar el capacitor mostrado en el circuito de la figura 7.58.

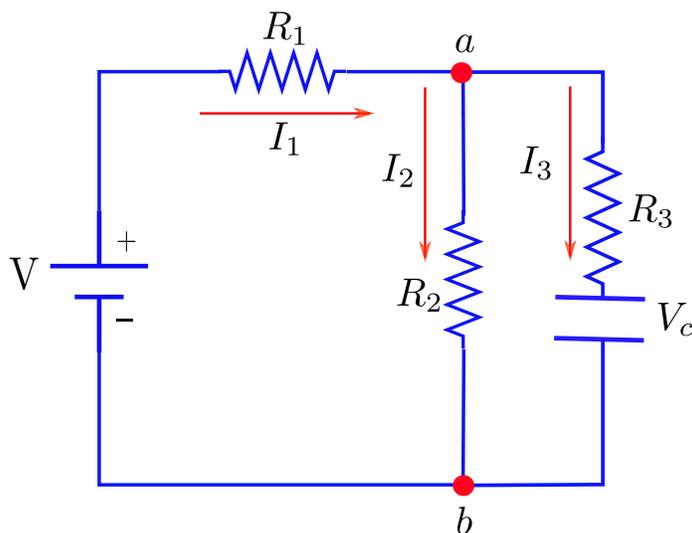


Figura 7.58: Ejemplo (7.19). Carga máxima en un capacitor.

**Solución:** Cuando el capacitor se encuentra completamente cargado, no circula corriente a través de la línea donde se encuentra la resistencia  $R_2$ ; de existir corriente, significaría que el capacitor aún no ha alcanzado su carga máxima. Por la misma razón, no hay caída de potencial en  $R_2$ , debido a que  $V_2 = I_2 R_2$  e  $I_2 = 0$ . Por lo tanto, toda la corriente que pasa por  $R_1$  debe pasar por  $R_2$ , ya que no puede existir puntos de acumulación.

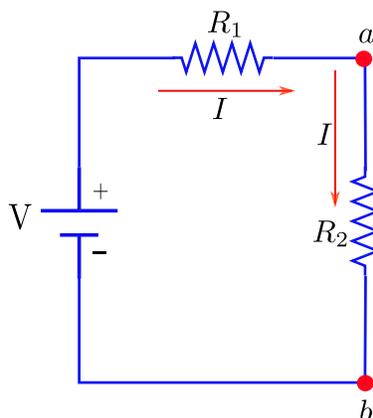


Figura 7.59: Ejemplo (7.19). Malla a la izquierda del circuito indicado en la figura 7.58.

Entonces, la malla ubicada a la derecha del circuito será equivalente al circuito mostrado en la figura 7.59, en la cual las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  pueden considerarse conectadas en serie. Es decir, la resistencia equivalente para el circuito definido por la malla en consideración, será:  $R_{eq} = R_1 + R_2$ . Ahora, a partir de ley de mallas se tiene

$$V = I(R_1 + R_2) \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}. \quad (7.219)$$

Con lo cual, la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ , indicados en la figura 7.59, corresponde a la caída de potencial en la resistencia  $R_2$ ; es decir:  $V_2 = IR_2$ . Por tanto,

$$V_2 = IR_2 = \frac{V R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.220)$$

La diferencia de potencial  $V_2$  corresponde a la diferencia de potencial en los puntos extremos de  $R_2$ , pero también a la diferencia de potencial del capacitor, ya que no circula corriente a través de  $R_3$ . Por lo tanto, se puede observar que el capacitor está conectado a los puntos  $a$  y  $b$  del circuito. En conclusión,

$$q_c = V_2 C = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V C. \quad (7.221)$$

Otra forma de analizar el problema consiste en encontrar la relación entre la carga almacenada en el capacitor y el tiempo. Para ello se tiene en cuenta las dos mallas descritas en la figura 7.60, las cuales corresponden al circuito en estudio.

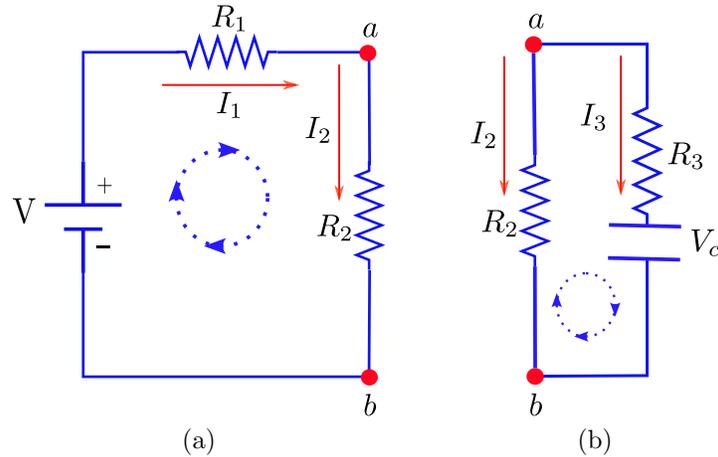


Figura 7.60: Ejemplo (7.19). Mallas del circuito indicado en la figura 7.58.

Aplicando la ley de mallas para cada una de las mallas indicadas en 7.60, se tiene que:

$$V - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, \quad (7.222)$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 - V_c = 0. \quad (7.223)$$

Adicionalmente, para el nodo a se tiene que  $I_1 = I_2 + I_3$ . Reemplazando  $I_1$  en términos de  $I_2$  e  $I_3$  en (7.222), se tiene que:

$$V - I_3 R_1 - I_2 (R_2 + R_1) = 0, \quad (7.224)$$

Despejando  $I_2$  de (7.223) y (7.224), se tiene que:

$$I_2 = \frac{I_3 R_3 + V_c}{R_2}, \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{V - I_3 R_1}{R_2 + R_1}, \quad (7.225)$$

por lo tanto

$$\frac{I_3 R_3 + V_c}{R_2} = \frac{V - I_3 R_1}{R_2 + R_1}, \quad (7.226)$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V - I_3 \left( \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} + R_3 \right) - V_c = 0. \quad (7.227)$$

Si denotamos  $V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$  y  $R' = \left( \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} + R_3 \right)$ , la anterior expresión se puede escribir como:

$$V' - I_3 R' - V_c = 0. \quad (7.228)$$

Ya que  $I_3 \equiv \frac{dq_c}{dt}$  y  $V_c = q/C$ , se tiene

$$V' - \frac{dq_c}{dt}R' - \frac{q_c}{C} = 0. \quad (7.229)$$

La ecuación (7.229) corresponde a la ecuación diferencial que determina el proceso de carga de un capacitor cuando el voltaje aplicado es  $V'$  y la resistencia es  $R'$ . Su solución está dada por (ver ecuación (7.209)):

$$q_c = V'C \left(1 - e^{-t/(R'C)}\right), \quad (7.230)$$

por lo tanto, la carga máxima será igual a:  $q_{max} = V'C$ , es decir

$$q_{max} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}VC, \quad (7.231)$$

y se obtiene el mismo resultado expresado en (7.221).

**Ejemplo 7.20.** En el circuito de la figura 7.61, los dos capacitores se encuentran cargados y tienen una diferencia de potencial entre sus placas de 45 V. Al cerrar el interruptor indicado en figura, los capacitores se descargan. En este ejemplo se determinará el tiempo que tardan los capacitores en alcanzar una diferencia de potencial de 10 V y la corriente en el circuito en dicho instante, teniendo en cuenta que:  $R_1 = 30.0\Omega$ ,  $R_2 = 50.0\Omega$ ,  $C_1 = 15.0\mu F$ ,  $C_2 = 20.0\mu F$ .

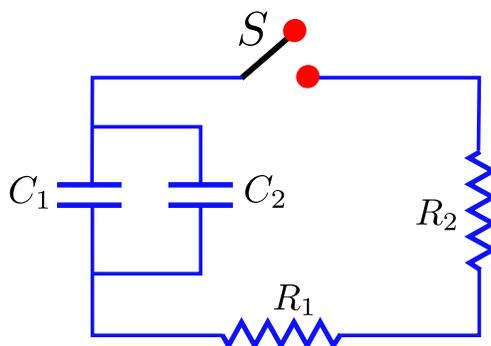


Figura 7.61: Ejemplo 7.20. Análisis de la descarga de dos capacitores en paralelo con dos resistencias en serie.

**Solución:** De la figura 7.61 es posible determinar que los dos capacitores están en paralelo, de manera que estos se pueden reducir a un solo capacitor de valor:

$$C_{eq} = 15.0 \mu F + 20.0 \mu F = 35.0 \mu F. \quad (7.232)$$

Ahora, las resistencias también se reducen a una sola equivalente dado que se encuentran en serie y cuyo valor es:

$$R_{eq} = 50.0 \Omega + 30.0 \Omega = 80.0 \Omega. \quad (7.233)$$

Ahora bien, a partir de la relación (7.209), se sabe que la carga del capacitor durante un proceso de descarga, en función del tiempo, se expresa como:

$$q_c(t) = q_{m\acute{a}x} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (7.234)$$

donde  $q_{\text{máx}} = CV_{\text{máx}}$ , siendo  $V_{\text{máx}}$  la diferencia de potencial al tiempo cero. En términos del potencial, la relación (7.234) se puede expresar como

$$CV(t) = CV_{\text{máx}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (7.235)$$

es decir,

$$V(t) = V_{\text{máx}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (7.236)$$

Para el circuito en estudio, se tiene que:  $R \rightarrow R_{\text{eq}}$  y  $C \rightarrow C_{\text{eq}}$ , por lo tanto se tiene que:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C_{\text{eq}}}\right). \quad (7.237)$$

Al despejar la variable de tiempo  $t$  de la ecuación (7.237), se puede establecer que:

$$t = -R_{\text{eq}}C_{\text{eq}} \ln \left[ \frac{V(t)}{V_{\text{máx}}} \right]. \quad (7.238)$$

Ahora, el tiempo que tarda un condensador en pasar de un valor de potencial de 45 V a 10 V será:

$$t = -(80.0 \, \Omega)(35.0 \, \mu\text{F}) \ln \left[ \frac{10 \, \text{V}}{45 \, \text{V}} \right] = 4211 \, \mu\text{s}. \quad (7.239)$$

La corriente en el circuito durante el proceso de descarga se expresa como (ver ecuación (7.218)):

$$I(t) = \frac{q_{\text{máx}}}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{CV_{\text{máx}}}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{V_{\text{máx}}}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (7.240)$$

que para el caso en estudio se puede expresar como:

$$I(t) = \frac{V_{\text{máx}}}{R_{\text{eq}}} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C_{\text{eq}}}\right). \quad (7.241)$$

Por lo tanto, para un tiempo de 4211  $\mu\text{s}$  la corriente es:

$$I(t) = \frac{45 \, \text{V}}{80.0 \, \Omega} \exp\left(-\frac{4211 \, \mu\text{s}}{(80.0 \, \Omega)(35.0 \, \mu\text{F})}\right) = 0.12 \, \text{A}. \quad (7.242)$$

**Ejemplo 7.21.** El circuito ilustrado en la figura 7.62, indica tres capacitores que se encuentran cargados con una carga igual a 4.0 nC. El circuito posee un interruptor que se puede cerrar o abrir. Al cerrar el interruptor se produce una corriente sobre el circuito. Una vez que el circuito se cierre, se iniciará un proceso de descarga. En este ejemplo se evaluará el valor de la energía almacenada en los capacitores y el valor de la corriente cuando la energía se haya reducido al 20 % de su energía inicial, teniendo en cuenta que:  $R_1 = 25.0 \, \Omega$ ,  $C_1 = 15.0 \, \text{pF}$ ,  $C_2 = 20.0 \, \text{pF}$  y  $C_3 = 10.0 \, \text{pF}$ .

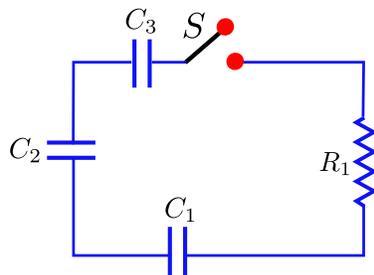


Figura 7.62: Ejemplo 7.21. Energía almacenada en tres capacitores en serie.

**Solución:** Una vez que el circuito se cierre, el circuito se puede simplificar, teniendo en cuenta que los capacitores se encuentran en paralelo. La capacitancia equivalente se puede calcular a partir de:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10.0 \text{ pF}} + \frac{1}{20.0 \text{ pF}} + \frac{1}{15.0 \text{ pF}}, \quad (7.243)$$

de manera que

$$C_{eq} = 4.61 \text{ pF}. \quad (7.244)$$

Ahora, la energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor viene dada por:

$$U_k = \frac{Q_k^2}{2C_k}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (7.245)$$

por lo tanto, la energía almacenada en los tres capacitores vendrá dada por:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{2C_k} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3} \\ &= \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \\ &= \frac{Q^2}{2C_{eq}}, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (7.246)$$

donde se ha tenido en cuenta que para capacitores en serie  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ , y donde  $C_{eq}$  es la capacitancia equivalente de los tres capacitores. Ya que  $Q_i = 4.0 \text{ nC}$ , para llegar al 20 % de la energía inicial se tiene que

$$U_f = 0.20 U_i, \quad (7.247)$$

que en términos de cargas se expresa como

$$\begin{aligned} U_f &= 0.2 U_i, & (7.248) \\ &\downarrow \\ \frac{Q_f^2}{2C_{eq}} &= 0.2 \frac{Q^2}{2C_{eq}}, & (7.249) \end{aligned}$$

lo que implica

$$Q_f = \sqrt{0.2} Q = 0.447 Q, \quad (7.250)$$

donde  $Q_f$  corresponde a la carga almacenada en los capacitores cuando se ha perdido un 80 % de energía inicial. Ahora, la carga en un condensador en función del tiempo se expresa como:

$$q_c(t) = q_{\text{máx}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (7.251)$$

que para los datos considerados corresponde a

$$Q_f = Q_i \exp\left(-\frac{t}{RC_{eq}}\right), \quad (7.252)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} t &= -RC_{eq} \ln\left(\frac{Q_f}{Q_i}\right) = -(25.0 \Omega)(4.61 \text{ pF}) \ln\left(\frac{0.447 Q_i}{Q_i}\right) \\ &= -(25.0 \Omega)(4.61 \text{ pF}) \ln(0.447) = 92.7 \text{ ps}. \end{aligned} \quad (7.253)$$

Ahora, la corriente que tendrá el circuito en este tiempo se expresa como

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{q_{\text{máx}}}{RC_{eq}} \exp\left(-\frac{t}{RC_{eq}}\right) \\ &= \frac{(4.0 \text{ nC})}{(25.0 \Omega)(4.61 \text{ pF})} \exp\left[-\frac{92.7 \text{ ps}}{(25.0 \Omega)(4.61 \text{ pF})}\right] \\ &= 15.4 \text{ A}. \end{aligned} \quad (7.254)$$

**Ejemplo 7.22.** El circuito mostrado en la figura 7.63 está compuesto por dos resistencias en paralelo, con valores  $R_1 = 4.0 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 6.0 \text{ k}\Omega$ , conectadas a su vez a dos capacitores también en paralelo, cuyas capacitancias son  $C_1 = 3.0 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 5.0 \mu\text{F}$ . El sistema es alimentado por una fuente de voltaje de valor  $V = 150 \text{ Voltios}$ . Para este circuito, se calculará la carga almacenada en los capacitores como función del tiempo.

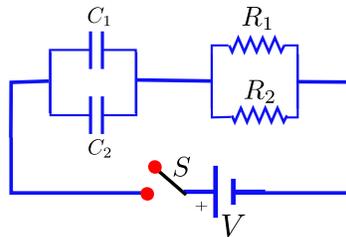


Figura 7.63: Ejemplo 7.22. Análisis del proceso de carga para dos capacitores en paralelo.

**Solución:** Dado que las resistencias están en paralelo, pueden reemplazarse por una resistencia equivalente, la cual se puede calcular mediante la expresión:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4.0 \Omega} + \frac{1}{4.0 \Omega}, \quad (7.255)$$

es decir,

$$R_{eq} = 2.40 \text{ k}\Omega. \quad (7.256)$$

Ahora, en el caso de los capacitores en paralelo, la capacitancia equivalente es:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 3.0 \text{ }\mu\text{F} + 5.0 \text{ }\mu\text{F} = 8.0 \text{ }\mu\text{F}. \quad (7.257)$$

Con lo anterior, el circuito original puede simplificarse a un circuito que presenta una única resistencia  $R_{eq}$  y un único capacitor  $C_{eq}$ . La carga que almacena el capacitor equivalente, se expresa como:

$$q_{eq}(t) = VC_{eq} \exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}\right). \quad (7.258)$$

donde se ha denotado  $q_{eq}$  como la carga almacenada en función del tiempo para un capacitor equivalente con capacitancia  $C_{eq}$ . Ahora, teniendo en cuenta que la diferencia de potencial en el capacitor se expresa como

$$V = \frac{q}{C}, \quad (7.259)$$

la diferencia de potencial en las placas del capacitor  $C_{eq}$  es:

$$\begin{aligned} V_{eq}(t) &= \frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq}} VC_{eq} \exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}\right) = V \exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}\right) \\ &= (150 \text{ V}) \exp\left[-\frac{t}{(2.40 \text{ k}\Omega)(8.0 \text{ }\mu\text{F})}\right] = (150 \text{ V}) \exp\left[-\frac{52.08}{s}t\right]. \end{aligned} \quad (7.260)$$

Dado que  $C_{eq}$  es el resultado de combinar los capacitores en paralelo  $C_1$  y  $C_2$ , la diferencia de potencial establecida por la ecuación (7.260) es la misma para  $C_1$  y  $C_2$ , así, la carga que almacenaría el capacitor  $C_1$  es:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= C_1 V_{eq}(t) = (3.0 \text{ }\mu\text{F})(150 \text{ V}) \exp\left[-\frac{52.08}{s}t\right] \\ &= (450 \text{ }\mu\text{C}) \exp\left[-\frac{52.08}{s}t\right], \end{aligned} \quad (7.261)$$

en tanto que para  $C_2$  es:

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= C_2 V_{eq}(t) = (5.0 \text{ }\mu\text{F})(150 \text{ V}) \exp\left[-\frac{52.08}{s}t\right] \\ &= (750 \text{ }\mu\text{C}) \exp\left[-\frac{52.08}{s}t\right]. \end{aligned} \quad (7.262)$$

**Ejemplo 7.23.** En la figura 7.64, el interruptor se ha cerrado por un tiempo suficiente largo para permitir que el capacitor se cargue completamente. Para el circuito en cuestión se encontrará: a) La corriente en cada resistencia y la carga del condensador. b) Se determinará la ecuación de corriente en función del tiempo para la resistencia  $R_2$  cuando el interruptor se abra (tomando  $t=0$ , el instante en el cual se abre el interruptor). c) Se encontrará el tiempo que toma llevar la carga a un quinto de su valor inicial. Lo anterior teniendo en cuenta que:  $R_1 = 5.0\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 15.0\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 3.0\text{k}\Omega$ ,  $R_4 = 7.0\Omega$ ,  $C_1 = 10.0\mu\text{F}$  y  $V_1 = 9.0\text{V}$ .

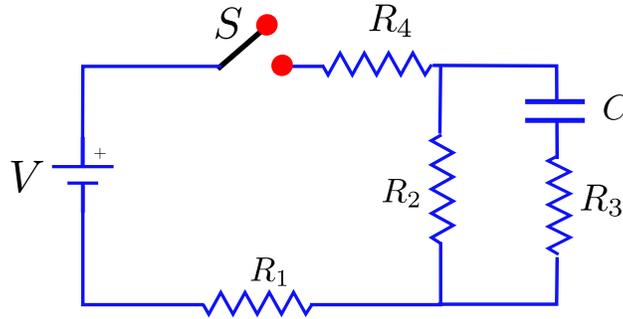


Figura 7.64: Ejemplo 7.23. Análisis del proceso de carga y descarga de un condensador en un dos configuraciones diferentes (interruptor abierto y cerrado).

### Solución:

- a) Si el tiempo que se considera ha sido suficiente para cargar el condensador, ya no habrá corriente a través de la resistencia  $R_3$  de  $3.0\text{k}\Omega$  y se establecerá una corriente constante por el circuito formado por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_4$ . Esta corriente que pasa a través de las resistencias en serie  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_4$  vendrá dada por:

$$I = \frac{9.0\text{ V}}{5.0\text{k}\Omega + 7.0\text{ k}\Omega + 15.0\text{ k}\Omega} = 0.3\text{ mA}. \quad (7.263)$$

Con esta corriente, es posible determinar la caída de potencial  $V_2$  en la resistencia  $R_2$  utilizando la ley de Ohm, tal que:

$$V_2 = IR_2 = (0.3\text{ mA})(15.0\text{ k}\Omega) = 4.50\text{ V}. \quad (7.264)$$

Ahora, si se considera la malla constituida por las resistencias en serie  $R_3$  ( $3.0\text{ k}\Omega$ ) y  $R_2$  junto con el capacitor, la diferencia de potencial  $V_2 = IR_2$ , termina siendo la misma que se establece en el capacitor (ya que no hay corriente a través de la resistencia de  $3.0\text{k}\Omega$ ), de manera que la carga almacenada en el capacitor es,

$$Q = CV_2 = (10.0\text{ }\mu\text{F})(4.50\text{ V}) = 45.0\text{ }\mu\text{C}. \quad (7.265)$$

- b) Una vez se abre el interruptor, el capacitor inicia un proceso de descarga a través de las resistencias  $R_2$  y  $R_3$ . Para calcular la corriente en la resistencia  $R_2$ , es posible reducir el circuito constituido por las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  y el capacitor, a un circuito con una sola resistencia  $R_{eq} = R_2 + R_3$  y el capacitor. Numéricamente para la resistencia equivalente se tiene:

$$R_{eq} = 3.0\text{ k}\Omega + 15.0\text{ k}\Omega = 18.0\text{ k}\Omega. \quad (7.266)$$

Ahora bien, la corriente que circula durante el proceso de descarga en la resistencia  $R_2$  es la misma que circula en la resistencia  $R_{eq}$ , y está dada por:

$$I(t) = \frac{q_{\text{máx}}}{R_{eq}C} \exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C}\right), \quad (7.267)$$

donde  $q_{\text{máx}} = Q$ , por tanto,

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{Q}{R_{\text{eq}}C} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C}\right) = \frac{CV_2}{R_{\text{eq}}C} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C}\right) \\ &= \frac{V_2}{R_{\text{eq}}} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C}\right) = \frac{4.50 \text{ V}}{18.0 \text{ k}\Omega} \exp\left[-\frac{t}{(18.0 \text{ k}\Omega)(10.0 \text{ }\mu\text{F})}\right] \\ &= 0.25 \text{ mA} \exp\left[-\frac{5.50}{s}t\right]. \end{aligned} \quad (7.268)$$

c) La carga en el condensador, para el sistema en consideración, se expresa como:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_{\text{máx}} \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{eq}}C}\right) = (45.0 \text{ }\mu\text{C}) \exp\left[-\frac{t}{(18.0 \text{ k}\Omega)(10.0 \text{ }\mu\text{F})}\right] \\ &= (45.0 \text{ }\mu\text{C}) \exp\left[-\frac{5.50}{s}t\right]. \end{aligned} \quad (7.269)$$

Ahora, si  $q(t) = \frac{1}{5}q_{\text{máx}} = \frac{1}{5}Q$ , se cumple que

$$q(t) = \frac{1}{5}(45.0 \text{ }\mu\text{C}) = (45.0 \text{ }\mu\text{C}) \exp\left[-\frac{5.50}{s}t\right], \quad (7.270)$$

de manera que

$$\frac{1}{5} = \exp\left[-\frac{5.50}{s}t\right], \quad (7.271)$$

con lo cual,

$$t = \frac{1}{5.50} \ln 5 = \frac{1}{5.50} \ln 5 = 0.29 \text{ s}, \quad (7.272)$$

que es el tiempo que se requiere para que el condensador alcance un quinto de su carga inicial.

**Ejercicio 7.20.** Una carga  $Q$  está almacenada en un capacitor de capacitancia  $C$ . Este capacitor se conecta al circuito mostrado en la figura 7.65, el cual está compuesto por una resistencia  $R$  y un segundo capacitor de capacitancia  $3C$ , inicialmente descargado. Una vez se cierra el circuito, determinar la diferencia de potencial entre las placas del capacitor de capacitancia  $C$  y expresar la carga en función del tiempo.

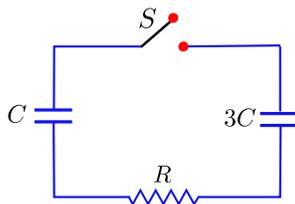


Figura 7.65: Ejercicio 7.20. Proceso de carga de un capacitor.

**Ejercicio 7.21.** En el circuito de la figura 7.66, el interruptor se ha mantenido abierto por un largo tiempo. Una vez el interruptor se cierre, calcular la corriente y la carga en el capacitor, teniendo en cuenta que:  $R_1 = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 30.0\Omega$ ,  $R_3 = 120\text{k}\Omega$ ,  $V_1 = 20\text{V}$  y  $C = 10\text{pF}$ .

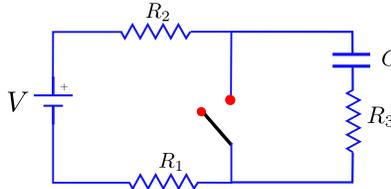


Figura 7.66: Ejercicio 7.21. Análisis del proceso de carga y descarga de un capacitor en dos configuraciones diferentes (interruptor abierto y cerrado).

**Ejercicio 7.22.** El capacitor en el circuito de la figura 7.67, es de  $25.0\ \mu\text{F}$ . Una vez cerrado el interruptor del circuito y considerado un tiempo largo, evaluar: a) La potencia disipada por cada resistencia. b) La carga en el capacitor. c) Si el interruptor se abre (tras un largo tiempo de haber estado cerrado), determinar el tiempo que tarda la corriente en alcanzar una quinta parte de su valor inicial. Lo anterior teniendo en cuenta que:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$  y  $V = 15\text{V}$ oltios.

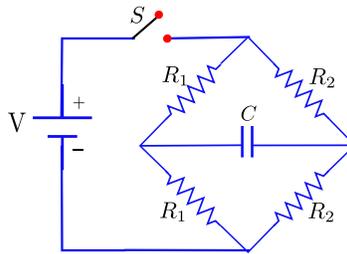


Figura 7.67: Ejercicio 7.22. Análisis de un circuito con un capacitor, cuatro resistencias y una fuente de voltaje.

**Ejercicio 7.23.** En un circuito RC, la expresión para corriente, carga o diferencia de potencial en un capacitor son funciones del tiempo, y todas dependen del factor:  $e^{-t/(RC)}$ , donde el producto RC tiene unidades de tiempo. Por esta razón, dicho producto se conoce como la constante de tiempo del circuito. Teniendo en cuenta lo anterior, considerar que se tienen dos capacitores de  $4.0\ \mu\text{F}$  y  $8.0\ \mu\text{F}$ , y dos resistencias de  $45.0\ \text{k}\Omega$  y  $200\ \text{k}\Omega$ . Realizar todos los circuitos que se puedan establecer con los cuatro elementos y calcular, en cada caso, las respectivas constantes de tiempo.

**Pregunta 7.1.** ¿Qué principio físico explica que la suma de las corrientes que entran a una unión eléctrica es igual a la suma de las corrientes que salen de ella?

- Ley de Ohm
- Conservación de la carga
- Tercera ley de Newton
- Conservación de la energía

**Pregunta 7.2.** Se conectan tres resistencias:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$  y  $R_3 = 6\Omega$ .  $R_1$  y  $R_2$  están en paralelo, y el conjunto se conecta en serie con  $R_3$ . ¿Cuál es la resistencia equivalente?

- a.  $3\Omega$
- b.  $6\Omega$
- c.  $7\Omega$
- d.  $8\Omega$
- e.  $10\Omega$

**Pregunta 7.3.** Un capacitor de  $10\mu F$  se conecta en serie con una resistencia de  $1k\Omega$  a una batería de  $12V$ . ¿Qué voltaje tiene el capacitor después de un tiempo igual a  $3\tau$  (tres constantes de tiempo)?

- a.  $2.2V$
- b.  $4.4V$
- c.  $6.3V$
- d.  $10.0V$
- e.  $11.4V$

**Pregunta 7.4.** Una bombilla de  $60W$  está conectada a una fuente de  $120V$ . ¿Cuál es la corriente que consume?

- a.  $0.25A$
- b.  $0.5A$
- c.  $1A$
- d.  $2A$
- e.  $4A$

**Pregunta 7.5.** Un capacitor de capacitancia  $C = 5\mu F$ , se carga a través de una fuente de voltaje de  $10V$  y una resistencia de  $R = 2k\Omega$ . Encontrar el voltaje en el capacitor al tiempo  $t = 5ms$ :

- a.  $2V$
- b.  $3V$
- c.  $6V$
- d.  $7.8V$
- e.  $9.2V$

## 8– Fuerza magnética

---

En secciones anteriores se explicó que partículas cargadas interactúan eléctricamente a través de la ley de Coulomb. Si adicionalmente las partículas se encuentran en movimiento, se puede identificar un tipo de interacción adicional a la interacción eléctrica, la cual se conoce como fuerza magnética. La expresión de la fuerza magnética que una carga  $q$  en movimiento con velocidad  $\vec{v}$  siente debido a una carga  $q'$  en movimiento con velocidad  $\vec{v}'$ , en un instante en el cual la carga  $q$  se encuentra en la posición  $\vec{r}$  y la carga  $q'$  en la posición  $\vec{r}'$ , está dada por (ver figura 8.1):

$$\vec{F}_q = \frac{\mu_0 q q'}{4\pi} \vec{v} \times \left\{ \frac{\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\}. \quad (8.1)$$

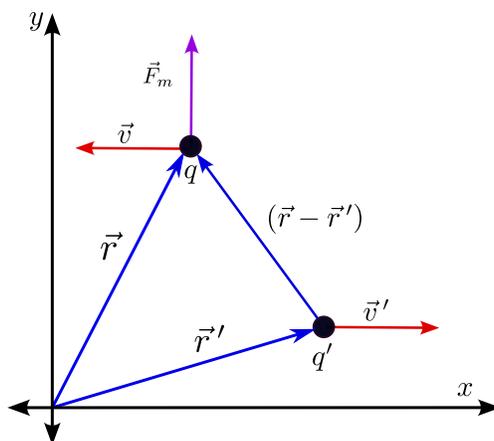


Figura 8.1: Fuerza magnética entre dos cargas en movimiento.

De igual forma, la fuerza magnética que la carga  $q'$  siente debido a la carga  $q$  vendrá dada por:

$$\vec{F}_{q'} = \frac{\mu_0 q' q}{4\pi} \vec{v}' \times \left\{ \frac{\vec{v} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right\}. \quad (8.2)$$

Ahora, la ecuación (8.1) se puede escribir convenientemente como:

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \left\{ \frac{\mu_0 q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\}, \quad (8.3)$$

y se observa que la expresión entre corchetes en (8.3) es un función vectorial independiente de la carga  $q$  y de su velocidad, que se conoce como el campo magnético evaluado en la posición definida por el vector  $\vec{r}$ , generado por una carga  $q'$  en movimiento con velocidad  $\vec{v}'$  ubicada en la posición  $\vec{r}'$ , tal que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\mu_0 q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\}. \quad (8.4)$$

Al igual que el campo eléctrico se entiende como una propiedad que adquiere el espacio debido a la presencia de cargas, el campo magnético se entiende como una propiedad que adquiere el espacio debido a la presencia de cargas en movimiento. En términos del campo magnético, la expresión (8.3) se puede escribir como:

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (8.5)$$

En la práctica las expresiones de la fuerza magnética definida por (8.1) o (8.2) y el campo magnético (ecuación (8.4)) son de poca utilidad, ya que a nivel macroscópico no se trata con pocas partículas cargadas en movimiento, sino con muchas partículas que pueden viajar a diferentes velocidades, pero que macroscópicamente se pueden analizar a través de la corriente eléctrica que producen, y se define la fuerza magnética y el campo magnético en términos de dichas corrientes, lo cual se analizará en la siguiente sección. Por ahora, se asumirá que se conoce el campo magnético (sin tener en cuenta la fuente que lo produce) y se analizará la fuerza magnética a partir de (8.5).

Las unidades en las cuales se mide el campo magnético se pueden determinar a partir de la expresión (8.5). Si la fuerza se mide en newtons, la carga en culombios y la velocidad en metros sobre segundos, entonces el campo magnético, en términos de unidades de medida vendrá dada por:

$$B \rightarrow \frac{N}{Cm/s} \equiv \text{teslas}. \quad (8.6)$$

En el sistema internacional, la unidad fundamental para el campo magnético son las teslas, definidas en (8.6).

Una característica importante de la fuerza magnética es que no produce trabajo, si es la única fuerza aplicada sobre un objeto (consecuencia de la definición 8.5). Lo anterior se puede explicar teniendo en cuenta que si una partícula se desplaza una cantidad  $\vec{dr}$ , el trabajo  $dW$  en dicho desplazamiento por definición está dado por:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}, \quad (8.7)$$

y ya que  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , se tiene que la velocidad es paralela al vector desplazamiento  $d\vec{r}$ . Ahora, la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula (por las propiedades del producto cruz y de la definición (8.5)), y por tanto la fuerza magnética es perpendicular al desplazamiento  $d\vec{r}$ . Dado que el producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero, entonces el trabajo realizado por la fuerza magnética es cero. Adicionalmente, ya que el trabajo es igual al cambio en la energía cinética, entonces dicha energía no cambia cuando el trabajo es cero y por lo tanto, la magnitud en la velocidad no cambia (aunque si puede cambiar su dirección y en la afirmación anterior se ha asumido que la masa es constante). A continuación, se presentan ejemplos donde se aplica la ecuación (8.5).

**Ejemplo 8.1.** La figura 8.2 indica una región del espacio (región sombreada) con un campo magnético uniforme orientado en la dirección  $-\hat{k}$  (entrando perpendicularmente a la página y esquematizado en la figura 8.2 por cruces rojas). Un electrón ingresa a la región sombreada con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$ . Para tal situación, se va a encontrar la trayectoria del electrón mientras permanece en la región sombreada.

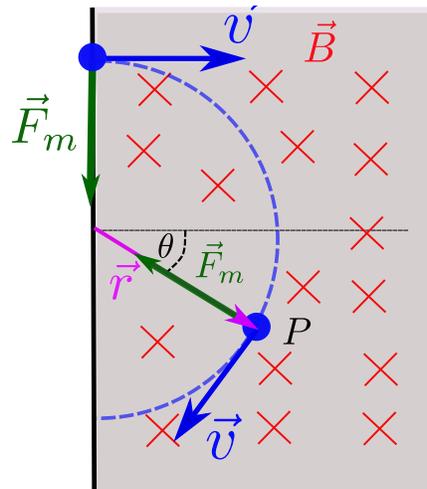


Figura 8.2: Electrón en presencia de un campo magnético uniforme.

**Solución:** A partir de la definición (8.5) se tiene que:

$$\vec{F}_q = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = -e(v\hat{i} \times (-B\hat{k})) = -e \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -evB\hat{j}. \quad (8.8)$$

Como ya se explicó, la fuerza magnética no cambia la magnitud de la velocidad, así que la fuerza magnética solo puede cambiar la dirección de la velocidad; por lo tanto, se está ante un movimiento donde la magnitud de la velocidad no cambia pero sí su dirección, debido a la aplicación de una fuerza constante perpendicular a la velocidad. El movimiento circular uniforme reúne las anteriores condiciones y, por tanto, el movimiento que experimenta el electrón debe ser un movimiento circular uniforme. La figura 8.2 muestra dicha trayectoria. Se puede verificar tomando cualquier punto en la trayectoria circular que la fuerza magnética siempre apunta hacia el centro del círculo. Por ejemplo, en la figura 8.2 se indica un punto  $P$ , en el cual la velocidad se puede escribir como  $\vec{v} = -v \sin \theta \hat{i} - v \cos \theta \hat{j}$ , en dicho punto se

tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_m &= -e\vec{v} \times \vec{B} = -e \left( -v \operatorname{sen} \theta \hat{i} - v \operatorname{cos} \theta \hat{j} \right) \times (-B\hat{k}) \\
 &= -e \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -v \operatorname{sen} \theta & -v \operatorname{cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} \\
 &= -evB(\operatorname{cos} \theta \hat{i} - \operatorname{sen} \theta \hat{j}). \tag{8.9}
 \end{aligned}$$

Ahora, se puede determinar a partir de la figura 8.2, que el vector de posición que define el punto  $P$  es

$$\vec{r} = (r \operatorname{cos} \theta \hat{i} - r \operatorname{sen} \theta \hat{j}), \tag{8.10}$$

por lo tanto

$$\hat{r} = (\operatorname{cos} \theta \hat{i} - \operatorname{sen} \theta \hat{j}), \tag{8.11}$$

y se tiene que

$$\vec{F}_m = -evB\hat{r}. \tag{8.12}$$

La última expresión indica que la dirección de la fuerza es  $-\hat{r}$ ; es decir, hacia el centro del círculo. Si se toma otro punto en la trayectoria circular, se debe llegar a la misma conclusión. Ya que el movimiento es circular, lo importante para definir la trayectoria es el radio. Se observa en el movimiento que la única fuerza que se dirige hacia el centro de curvatura (centro del círculo) es la fuerza magnética y ya que en un movimiento circular la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el eje radial es la fuerza centrípeta, entonces se tiene que:

$$|\vec{F}_m| = F_c = ma_c. \tag{8.13}$$

Se debe recordar que la fuerza centrípeta es una resultante (es decir, la suma de varias fuerzas), por lo tanto, en un diagrama de cuerpo libre no se dibuja. Al sumar todas las fuerzas que van hacia el centro de giro, se obtiene la fuerza centrípeta. Como ya se conoce la fuerza magnética (ver (8.9)), al reemplazar en (8.13) se tiene:

$$evB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}, \tag{8.14}$$

donde se ha tenido en cuenta que  $a_c = \frac{mv^2}{r}$ .

**Ejemplo 8.2.** En este ejemplo se considera una situación similar a la planteada en el ejemplo (8.1), donde existe un campo magnético en sentido  $-\hat{k}$ , salvo que en lugar de enviar un electrón, habrá un flujo de electrones ingresando desde la izquierda con diferentes velocidades y adicionalmente al campo magnético, en la región sombreada habrá un campo eléctrico orientado en dirección  $-\hat{j}$  (indicado con flechas negras en la figura 8.3). Bajo la situación planteada se determinará qué electrones atraviesan la región sombreada sin cambiar su dirección.

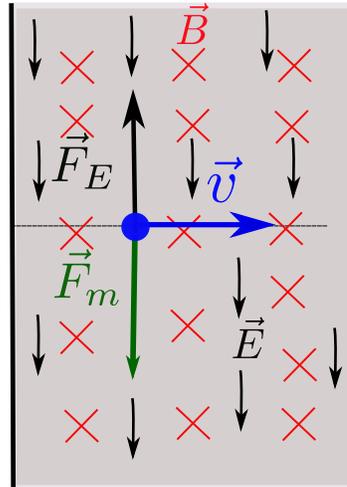


Figura 8.3: Electrón en presencia de un campo magnético y campo eléctrico uniformes.

**Solución:** Se sabe del ejemplo (8.1) que un electrón que ingrese a la región en estudio, siente una fuerza magnética en dirección  $-\hat{j}$ , pero ahora también sentirá una fuerza debida al campo eléctrico, orientada en dirección  $\hat{j}$  (se debe recordar que partículas cargadas negativamente se mueven en contra del campo eléctrico). Ya que tanto la fuerza eléctrica como magnética están orientadas sobre el eje vertical, dichas fuerzas se deben anular para que no exista cambio en la dirección de los electrones (no quiere decir que para todas los electrones las fuerzas se anulen, solo ocurrirá para aquellos electrones que no cambien su dirección), y en dicha situación se tiene:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = -evB\hat{j} + eE\hat{j} = 0, \quad (8.15)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{F}_e = (-e)\vec{E}$  y que  $\vec{E} = -E\hat{j}$  (se ha tomado  $q = e$  para indicar la magnitud de la carga eléctrica del electrón, el signo de la carga ya está introducido en la dirección de la fuerza). A partir de (8.15) se tiene que:

$$evB = eE \Rightarrow v = \frac{E}{B}. \quad (8.16)$$

En conclusión, solo las partículas que tengan una velocidad igual a la razón entre el campo eléctrico y magnético ( $E/B$ ) atravesarán la región sombreada sin cambiar su dirección.

Este ejemplo reúne las condiciones básicas de lo que se denomina como un “selector de velocidades”. En la práctica, al imponer las condiciones físicas planteadas en este ejercicio, se logra escoger partículas con cierta velocidad de un flujo aleatorio de partículas (el flujo no necesariamente tiene que ser de electrones). El resultado es independiente de la carga de las partículas, aunque para cargas positivas la orientación de la fuerza magnética y eléctrica cambian (por el cambio de signo en la carga).

**Ejemplo 8.3.** Un electrón se proyecta en un campo magnético uniforme  $(0.80\hat{i} + 2.20\hat{j})$  T con una velocidad  $(5.00\hat{i} + 2.00\hat{j}) * 10^6 \frac{m}{s}$ . Determinar la fuerza magnética sobre el electrón.

**Solución:** Para el caso en consideración se identifica que:

$$q = -1.602 * 10^{-19} \text{ C}, \quad (8.17)$$

$$\vec{v} = (5.00\hat{i} + 2.00\hat{j}) * 10^6 \frac{m}{s}, \quad (8.18)$$

$$\vec{B} = (0.80\hat{i} + 2.20\hat{j}) \text{ T}, \quad (8.19)$$

de manera que la fuerza magnética es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (-1.602 * 10^{-19} \text{ C}) \left[ (5.00\hat{i} + 2.00\hat{j}) * 10^6 \frac{m}{s} \right] \times \left[ (0.80\hat{i} + 2.20\hat{j}) \text{ T} \right] \\ &= (-1.602) \left[ \underbrace{11.0(\hat{i} \times \hat{j})}_{\hat{k}} + 1.60(\hat{j} \times \hat{i})_{-\hat{k}} \right] (10^{-13}) \underbrace{\left( C \frac{m}{s} T \right)}_N \\ &= -1.505 * 10^{-12} \hat{k} \text{ N}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

**Ejemplo 8.4.** Una partícula alfa se mueve con una velocidad  $(\vec{v} = 3.00\hat{i} - 5.00\hat{j}) * 10^6 \frac{m}{s}$  en una región donde está presente un campo eléctrico uniforme  $\vec{E} = (1.50\hat{i} - 2.20\hat{j}) * 10^6 \frac{V}{m}$  y un campo magnético uniforme  $\vec{B} = (1.40\hat{i} + 4.50\hat{j})$  T. A partir del enunciado anterior, se determinará la fuerza inicial que actúa sobre la partícula.

**Solución:** Del principio de superposición, la fuerza neta que actúa sobre la carga es:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B, \quad (8.21)$$

siendo  $\vec{F}_E$  y  $\vec{F}_B$  las fuerzas eléctricas y magnéticas, las cuales se expresan como:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}, \quad \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (8.22)$$

donde  $q$  identifica la carga de la partícula alfa cuyo valor es:  $3.20 * 10^{-19} \text{ C}$ . Por tanto, la fuerza eléctrica vendrá dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_E &= q\vec{E} = (3.20 * 10^{-19} \text{ C}) \left[ (1.50\hat{i} - 2.20\hat{j}) * 10^6 \frac{V}{m} \right] \\ &= (4.80\hat{i} - 7.04\hat{j}) * 10^{-13} \text{ N}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

y la fuerza magnética está dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_B &= q\vec{v} \times \vec{B} \\
 &\cong (3.20 * 10^{-19} \text{ C}) \left[ \left( 3.00\hat{i} - 5.00\hat{j} \right) * 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times \left[ \left( 1.40\hat{i} + 4.50\hat{j} \right) \text{ T} \right] \\
 &= (3.20) \left[ 13.5 \left( \hat{i} \times \hat{j} \right) - 7.00 \left( \hat{j} \times \hat{i} \right) \right] \times (10^{-13}) \left( C \frac{\text{m}}{\text{s}} T \right) \\
 &= (3.20) \left( 13.5\hat{k} + 7.00\hat{k} \right) * 10^{-13} \text{ N} \\
 &= 65.6 * 10^{-13} \hat{k} \text{ N},
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

de manera que la fuerza neta sobre la partícula alfa es:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_E + \vec{F}_B \\
 &= \left( 4.80\hat{i} - 7.04\hat{j} \right) \times 10^{-13} \text{ N} + 65.6 * 10^{-13} \hat{k} \text{ N} \\
 &= \left( 4.80\hat{i} - 7.04\hat{j} + 65.6 \hat{k} \right) \times 10^{-13} \text{ N}.
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

**Ejemplo 8.5.** Una partícula de carga  $q$ , masa  $m$ , momento lineal  $p$  y energía cinética  $K$  se mueve por acción de un campo magnético uniforme  $B$  en una trayectoria circular de radio  $R$ . Para la situación planteada, se mostrará que  $p = qRB$  y  $K = \frac{q^2 R^2 B^2}{2m}$ .

**Solución:** La fuerza magnética sobre la partícula está dada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{8.26}$$

Ya que la fuerza magnética es la que produce el movimiento circular, su aplicación es perpendicular al desplazamiento instantáneo, y por lo tanto perpendicular a la velocidad. La magnitud de la fuerza magnética entonces se puede escribir como:

$$F_m = qBV. \tag{8.27}$$

Al no existir otras fuerzas aplicadas sobre la partícula, la fuerza magnética debe ser igual a la fuerza centrípeta, tal que

$$qvB = ma_c, \tag{8.28}$$

donde

$$a_c = \frac{v^2}{R}, \tag{8.29}$$

de manera que,

$$qvB = m \frac{v^2}{R}, \tag{8.30}$$

por lo tanto,  $mv = qRB$ , con lo cual

$$p = mv = qRB. \tag{8.31}$$

Ahora, la correspondiente energía cinética se expresa como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m} (mv)^2 = \frac{1}{2m} (qRB)^2 = \frac{q^2 R^2 B^2}{2m}. \tag{8.32}$$

**Ejemplo 8.6.** En este ejemplo se estudiará el movimiento de una partícula cargada  $q$  que ingresa con una velocidad  $\vec{v}_0$  a una región donde está presente un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  orientado en la dirección positiva del eje  $z$ .

**Solución:** De la segunda ley de Newton se determina que la dinámica de la partícula es descrita por medio de la siguiente ecuación,

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.33)$$

Siendo que

$$\vec{B} = B\hat{k}, \quad (8.34)$$

se determina que

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_y B \hat{i} - v_x B \hat{j}, \quad (8.35)$$

de manera que

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}\right) = qv_y B \hat{i} - qv_x B \hat{j}. \quad (8.36)$$

Así, la igualdad anterior implica que se deban cumplir las siguientes relaciones:

$$m\frac{dv_x}{dt} = qv_y B, \quad (8.37)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qv_x B, \quad (8.38)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (8.39)$$

La ecuación (8.39) establece que la velocidad  $v_z$  a lo largo del eje  $z$  es constante y ya que la partícula ingresa con una velocidad inicial

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}, \quad (8.40)$$

se determina que la solución de la ecuación (8.39) es

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = v_{0z}. \quad (8.41)$$

El sistema de ecuaciones (8.37) y (8.38) está acoplado, de manera que para resolverlo se procede de la siguiente manera: se deriva la ecuación (8.37) obteniéndose

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt}. \quad (8.42)$$

utilizando la anterior relación, la expresión (8.38) toma la forma:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \left(-\frac{qB}{m}v_x\right) = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x, \quad (8.43)$$

que se puede expresar como:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2v_x = 0, \quad (8.44)$$

donde se ha definido

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}. \quad (8.45)$$

La expresión (8.44) representa la ecuación diferencial asociada a un movimiento oscilatorio, y su solución se puede escribir como:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t. \quad (8.46)$$

Reemplazando el resultado de (8.46) en la expresión (8.37) se determina que

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = -A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t. \quad (8.47)$$

La solución de las ecuaciones (8.41), (8.46) y (8.47) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{B}{\omega} \cos \omega t + D, \\ y(t) &= \frac{A}{\omega} \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + E, \\ z(t) &= v_{0z}t + F. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Para determinar las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$ , es necesario conocer la velocidad al tiempo cero (ver ecuación (8.40)) y la posición al tiempo cero, la cual se puede escribir como:

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}. \quad (8.49)$$

Ahora, de las relaciones (8.46) y (8.47) se deduce que,

$$v_x(t=0) = A \equiv v_{0x}, \quad (8.50)$$

$$v_y(t=0) = B \equiv v_{0y}. \quad (8.51)$$

de manera que

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t + D, \quad (8.52)$$

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + E. \quad (8.53)$$

De la condición inicial en la posición se deduce que:

$$x(t=0) = -\frac{v_{0y}}{\omega} + D = x_0, \quad (8.54)$$

$$y(t=0) = \frac{v_{0x}}{\omega} + E = y_0, \quad (8.55)$$

$$z(t=0) = F = z_0. \quad (8.56)$$

Por lo tanto:

$$D = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, \quad (8.57)$$

$$E = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}, \quad (8.58)$$

$$F = z_0. \quad (8.59)$$

A partir de lo anterior, la posición de la partícula se expresa como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t + x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, \\ y(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}, \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Las anteriores relaciones determinan completamente el movimiento de la partícula e indican que la partícula se mueve formando una espiral; rotando en el plano  $xy$  en movimiento circular y avanzando en el eje  $Z$  a velocidad constante. Para mostrar lo anterior, se escribe las ecuaciones (8.60) en la forma

$$x - \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}\right) = \frac{v_{0x}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t. \quad (8.61)$$

$$y - \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}\right) = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t. \quad (8.62)$$

Al elevar al cuadrado las relaciones anteriores, se tiene que

$$\left[x - \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}\right)\right]^2 = \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t + \frac{v_{0y}^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t - 2 \frac{v_{0x}v_{0y}}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t. \quad (8.63)$$

$$\left[y - \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}\right)\right]^2 = \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t + \frac{v_{0y}^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t + 2 \frac{v_{0x}v_{0y}}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t. \quad (8.64)$$

Al sumar (8.63) y (8.64), y realizar las simplificaciones pertinentes, se tiene que

$$\begin{aligned} \left[x - \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}\right)\right]^2 &= \frac{1}{\omega^2} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) (\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) \\ &= \left(\frac{m}{qB}\right)^2 (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) \end{aligned} \quad (8.65)$$

es decir,

$$\left[x - \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}\right)\right]^2 = \left(\frac{mv_T}{qB}\right)^2, \quad (8.66)$$

donde

$$v_T^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2. \quad (8.67)$$

La expresión anterior caracteriza la velocidad perpendicular a la dirección del campo. La ecuación (8.66) representa una circunferencia de radio  $R = \frac{mv_T}{qB}$  centrada en el punto definido

por la dupla  $(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega})$  en el plano  $xy$ . Ahora, la relación asociada a la variable  $z$  en (8.48) indica que esta coordenada aumenta linealmente en el tiempo. Así, el par de ecuaciones (8.48) y (8.66) indican que la trayectoria de la partícula es una helicoides de radio  $R$ .

**Ejercicio 8.1.** Un electrón que se mueve con una velocidad  $\vec{v} = (5.10\hat{i} + 1.02\hat{j} + 5.15\hat{k}) \cdot 10^6 \frac{m}{s}$  entra a una región donde existen un campo eléctrico y magnético uniforme, de tal manera que el electrón pasa la región sin aceleración. El campo magnético aplicado es  $\vec{B} = (4.20\hat{i} - 3.50\hat{j} + 2.00\hat{k})T$ . Teniendo en cuenta las características de movimiento descritas anteriormente, encontrar el campo eléctrico en la región por la que pasa el electrón.

**Ejercicio 8.2.** Un protón y un electrón tienen la misma energía cinética y ambos se mueven en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme. Encontrar la relación entre el periodo de sus órbitas.

**Ejercicio 8.3.** Una partícula con una masa de  $2.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$  y una carga de  $3.18 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ , posee en un tiempo  $t = t_0$  una velocidad  $\vec{v} = 4.50 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \hat{j}$ . Determinar la magnitud y dirección de la aceleración de la partícula producida por un campo magnético uniforme de  $\vec{B} = (1.65\hat{i} + 2.50\hat{j} + 4.98\hat{k}) T$ , al tiempo  $t = t_0$ .

**Ejercicio 8.4.** Una partícula de  $20 \text{ g}$  de masa y una carga de  $90 \mu\text{C}$  se mueve a través de una región donde está presente un campo magnético uniforme y un campo gravitacional aproximadamente uniforme ( $\vec{g} = -9.8\hat{j} \frac{m}{s^2}$ ). La partícula se mantiene a una velocidad constante  $\vec{v} = 20\hat{i} \frac{km}{s^2}$  que es perpendicular al campo magnético. Para la situación descrita, determinar el valor y la dirección del campo magnético.

**Ejercicio 8.5.** Una partícula se mueve en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = 5.00B_y\hat{i} + B_y\hat{j}$ . La fuerza magnética que actúa sobre la partícula es  $\vec{F}_m = 7.45 \cdot 10^{-19} \text{ N} \hat{k}$  cuando la velocidad de la partícula es  $\vec{v} = (3.50\hat{i} + 4.20\hat{j}) \frac{m}{s}$ . Para la situación planteada, encontrar la componente en dirección  $\hat{j}$  del campo magnético.

## 8.1. Fuerza magnética sobre conductores

En esta sección se generaliza la ecuación (8.5) para determinar la fuerza sobre un conductor lineal que tiene una corriente  $I$ , debida a un campo magnético uniforme, como se observa en la figura 8.4.

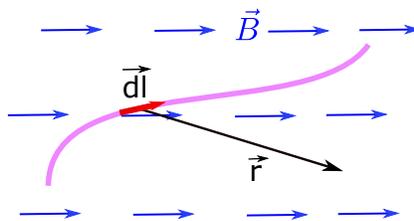


Figura 8.4: Conductor lineal en medio de un campo magnético uniforme.

En el caso de un conductor, la fuerza total magnética ejercida sobre el conductor no se puede calcular directamente de la ecuación (8.3). Se debe encontrar en primer lugar la fuerza magnética sobre una carga  $dq$  asociada a un elemento de longitud  $d\vec{l}$  del conductor. Entonces, la fuerza magnética ejercida por un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  sobre una carga  $dq$  del conductor es:

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v}_d \times \vec{B}, \quad (8.68)$$

donde  $\vec{v}_d$  representa la velocidad de deriva de las partículas cargadas en el conductor. Ahora, la carga  $dq$  que atraviesa la unidad de tiempo  $dt$ , se puede escribir como:  $dq = \frac{dq}{dt} dt = I dt$ . De igual forma la velocidad de deriva viene dada por:  $\vec{v}_d = \frac{d\vec{l}}{dt}$ . Con lo anterior se tiene que:

$$dq\vec{v}_d = I dt \frac{d\vec{l}}{dt} = I d\vec{l}. \quad (8.69)$$

Reemplazando (8.69) en (8.68) se tiene:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (8.70)$$

La magnitud del vector  $d\vec{l}$  representa un elemento diferencial de longitud del conductor con carga  $dq$  (también representa el desplazamiento de una carga  $dq$  en un tiempo  $dt$  a lo largo del conductor). La dirección de  $d\vec{l}$  corresponde a la velocidad de deriva de los portadores de carga en cada punto sobre el conductor (es decir, es tangencial a la curva descrita por el conductor). Para encontrar la fuerza total sobre un conductor lineal, se debe integrar todas las contribuciones de carga infinitesimal  $dq$  (o  $d\vec{l}$ ) del conductor, por lo cual:

$$\vec{F}_m = \int_c I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (8.71)$$

donde  $c$  representa la trayectoria que siguen las cargas en el conductor (la curva descrita por el conductor). A continuación, se presentan algunos ejemplos para mostrar el uso de la ecuación (8.71).

**Ejemplo 8.7.** *Se considera un conductor que está representado por la cuarta parte de un círculo que lleva una corriente  $I$  en contra de las manecillas del reloj, como se observa en la figura 8.5 (no es necesario especificar de donde proviene la corriente que circula por el circuito o a donde va, fuera del cuarto de círculo en estudio). El conductor se encuentra en una región donde existe un campo magnético constante en dirección  $-\hat{i}$ , tal que:  $\vec{B} = -B\hat{i}$ . Para la configuración planteada se evaluará el campo magnético en el centro de curvatura del material, que se asumirá como el origen de coordenadas.*

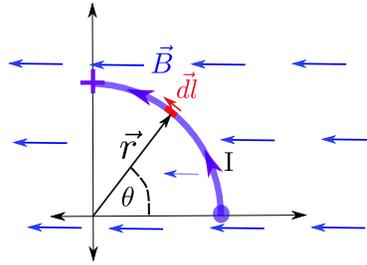


Figura 8.5: Conductor circular en medio de un campo magnético uniforme.

**Solución:** Para aplicar la ecuación (8.71), primero se debe escoger un elemento  $\vec{dl}$  en el conductor y escribir la expresión de la fuerza magnética ejercida por el campo  $\vec{B}$  sobre el elemento  $\vec{dl}$  (tal como se observa en la figura 8.5), y se tiene que,

$$d\vec{F}_m = I\vec{dl} \times \vec{B}. \quad (8.72)$$

Ahora, de la figura 8.5 se determina que  $\vec{dl} = (-dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{j})$ , por lo tanto:

$$\vec{dl} \times \vec{B} = (-dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{j}) \times (-B\hat{i}) = -dlB \cos \theta (\hat{j} \times \hat{i}) = dlB \cos \theta (\hat{k}), \quad (8.73)$$

donde se ha utilizado el hecho que  $(\hat{i} \times \hat{i}) = 0$  y que  $(\hat{j} \times \hat{i}) = -\hat{k}$ . El resultado obtenido en (8.73) es independiente del elemento  $\vec{dl}$  seleccionado en la trayectoria circular, ya que las diferentes orientaciones se obtienen simplemente cambiando el ángulo  $\theta$  en la definición de  $\vec{dl}$ . Con lo anterior se tiene que:

$$\vec{F}_m = \int_c I\vec{dl} \times \vec{B} = IB \left( \int_c dl \cos \theta \right) (\hat{k}). \quad (8.74)$$

Ya que  $dl$  corresponde a la longitud de arco asociada a un ángulo  $d\theta$ , dado por:  $dl = r d\theta$ , la expresión (8.74) toma la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= IrB \left( \int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta \right) (\hat{k}) \\ &= -rIB\hat{k}. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Si en lugar de un cuarto de círculo, el conductor fuera un semicírculo de radio  $r$ , se aplicaría el mismo procedimiento descrito anteriormente. En ese caso lo único diferente serían los límites de integración de la variable  $\theta$  en la primera línea de la ecuación (8.75). Para un semicírculo, los límites irían de 0 a  $\pi$  lo cual conllevaría a que  $\vec{F}_m = 0$ . Lo anterior se da

porque en el cuarto de círculo del segundo cuadrante, el producto cruz entre  $d\vec{l}$  y  $\vec{B}$  está en la dirección  $\hat{k}$  (en el primer cuadrante tenía la dirección  $-\hat{k}$ ). Al sumar las contribuciones de los dos cuartos de círculo, la fuerza resultante magnética se anula.

**Ejemplo 8.8.** En este ejemplo, se va a encontrar la fuerza magnética sobre un conductor con forma de semicírculo, que lleva una corriente  $I$  en contra de las manecillas del reloj, debido a un campo magnético orientado en dirección  $\hat{k}$  (en el ejemplo (8.7), el campo estaba en dirección  $\hat{i}$ ), como se observa en la figura 8.6 donde los puntos rojos representan el campo magnético saliendo de la página.

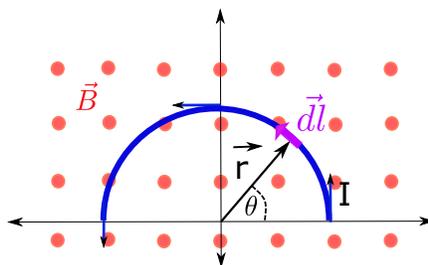


Figura 8.6: Conductor semicircular en medio de un campo magnético uniforme.

**Solución:** En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times \vec{B} &= (-dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{j}) \times (B \hat{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -dl \sin \theta & dl \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \\ &= Bdl(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}). \end{aligned} \quad (8.76)$$

Reemplazando el resultado de la ecuación (8.76) en la expresión para la fuerza magnética, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= IB \int_c dl(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = IBr \int_0^\pi \cos \theta d\theta \hat{i} + IBr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{j} \\ &= 2IBr \hat{j}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

donde en la anterior expresión se ha tenido en cuenta que  $dl$  representa la longitud de arco asociada a un ángulo  $d\theta$ , tal que:  $dl = r d\theta$ . Si en lugar de considerar un conductor en forma de semicírculo, se considera un conductor circular manteniendo la dirección de la corriente, lo único que cambiaría en el procedimiento anterior, serían los límites de integración para el ángulo  $\theta$  en la primera línea de (8.77), los cuales irían de 0 a  $2\pi$ , y por lo tanto, la fuerza magnética asociada sería cero; es decir, el semicírculo inferior aportaría una cantidad dada por  $\vec{F}_m = -2IBr \hat{j}$ .

**Ejemplo 8.9.** Se considera un conductor delgado con una trayectoria rectangular que lleva una corriente  $I$  en sentido de las manecillas del reloj, situado en una región donde existe un campo magnético en dirección  $-\hat{i}$ , como se observa en la figura 8.7. Para la configuración planteada se encontrará la fuerza magnética que el campo magnético ejerce sobre el conductor rectangular.

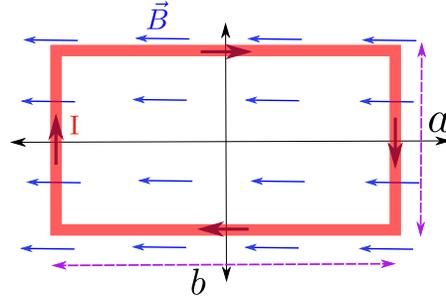


Figura 8.7: Conductor rectangular en medio de un campo magnético uniforme.

**Solución:** Al aplicar la ecuación (8.71) en este ejemplo, se observa que la integración se puede separar en cuatro integrales, correspondientes al lado izquierdo ( $l_{iz}$ ), lado superior ( $l_{sup}$ ), lado derecho ( $l_{der}$ ) y lado inferior ( $l_{inf}$ ) del rectángulo, tal que:

$$\vec{F}_m = \int_c I \vec{dl} \times \vec{B} = \int_0^a I \vec{dl}_{iz} \times \vec{B} + \int_0^b I \vec{dl}_{sup} \times \vec{B} + \int_0^a I \vec{dl}_{der} \times \vec{B} + \int_0^b I \vec{dl}_{inf} \times \vec{B}. \quad (8.78)$$

Sin embargo, a partir del planteamiento del ejemplo, se conoce que  $\vec{dl}_{iz} = -\vec{dl}_{der}$  y por tanto:

$$\int_0^a I \vec{dl}_{iz} \times \vec{B} + \int_0^a I \vec{dl}_{der} \times \vec{B} = \int_0^a I \vec{dl}_{iz} \times \vec{B} - \int_0^a I \vec{dl}_{iz} \times \vec{B} = 0. \quad (8.79)$$

Por otro lado,  $\vec{dl}_{sup} \times \vec{B} = -\vec{dl}_{inf} \times \vec{B} = 0$ , ya que  $\vec{dl}_{sup}$  es un vector paralelo a  $\vec{B}$ . En conclusión:

$$\vec{F}_m = \int_c I \vec{dl} \times \vec{B} = 0. \quad (8.80)$$

**Ejemplo 8.10.** En este ejemplo se considera una varilla conductora de longitud  $L$  que se encuentra extendida sobre el eje  $y$  y donde existe un campo magnético uniforme en dirección  $-\hat{k}$ . La varilla se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$ , como se observa en la figura 8.8. Como se explicará a lo largo del desarrollo de este ejemplo, la varilla se polarizará generando una diferencia de potencial entre sus terminales la cual se evaluará a continuación:

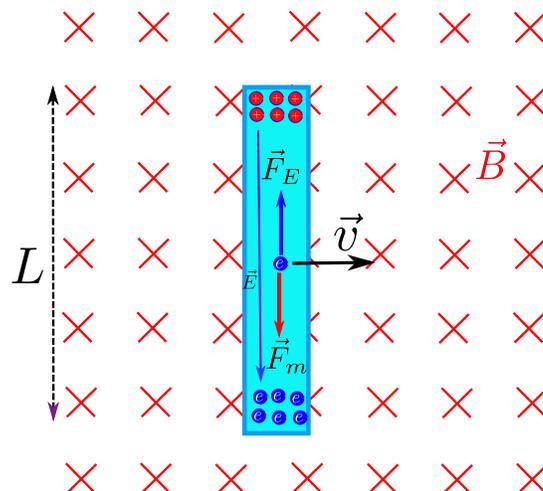


Figura 8.8: Varilla conductora en medio de un campo magnético uniforme.

**Solución:** *Teniendo en cuenta que los electrones dentro de la varilla se mueven con la velocidad  $\vec{v}$  y que existe un campo magnético en el medio sobre el cual se mueve la varilla, entonces habrá una fuerza magnética sobre los electrones dada por:*

$$\vec{F}_m = (-e)\vec{v} \times \vec{B}, \quad (8.81)$$

donde  $(-e)$  representa la carga de los electrones. Ahora, inicialmente, en el momento en que la varilla ingresa al espacio donde existe campo magnético, los electrones llevan la velocidad de la varilla y por lo tanto

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = evB (\hat{i} \times \hat{k}) = -evB\hat{j}. \quad (8.82)$$

El resultado anterior permite intuir que la fuerza magnética llevará electrones a un extremo de la varilla dejando un exceso de carga positiva en el otro extremo<sup>1</sup>. Lo anterior generará un campo eléctrico dentro de la varilla como se indica en la figura 8.8. Por lo anterior, la fuerza total sobre los electrones dentro de la varilla, será igual a la fuerza magnética más la fuerza eléctrica  $(-e\vec{E})$ , es decir:

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= \vec{F}_m + \vec{F}_E \\ &= -e\vec{v} \times \vec{B} - e\vec{E}. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Dado que el campo eléctrico aumenta conforme los electrones se desplazan (y que la fuerza magnética tiene dirección opuesta a la fuerza eléctrica), llegará un momento en que las

<sup>1</sup> Es claro que si los electrones se desplazan a lo largo de la varilla, tendrán una componente de la velocidad en dirección  $-\hat{j}$ , resultando en una fuerza magnética con una componente adicional en dirección  $-\hat{i}$ . Sin embargo, dado que los electrones no están acelerados en dirección  $-\hat{i}$  se entiende que existen fuerzas internas que anularán dicha componente que no aporta al análisis que se está realizando y por lo tanto, se omitirá su estudio.

fuerzas se equilibrarán. En dicha situación de equilibrio, ya no existirá desplazamiento de electrones y la fuerza total será cero, es decir:

$$\vec{F}_T = -e\vec{v} \times \vec{B} - e\vec{E} = 0, \quad (8.84)$$

por lo tanto

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}. \quad (8.85)$$

Dado que  $\vec{F}_T = 0$ , la aceleración de los electrones será cero y el electrón solo se desplazará por el movimiento de la varilla, es decir con velocidad uniforme  $\vec{v} = v\hat{i}$ , y se tiene que

$$\vec{v} \times \vec{B} = vB(\hat{i} \times (-\hat{k})) = vB\hat{j}. \quad (8.86)$$

Adicionalmente,  $e\vec{E} - eE\hat{j}$ , por lo tanto, la expresión (8.85) se puede escribir como

$$-evB\hat{j} = -eE\hat{j}, \quad (8.87)$$

y por tanto:

$$E = vB. \quad (8.88)$$

Ahora, la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla cuando se ha alcanzado el equilibrio, está dada por:

$$\Delta\phi = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (8.89)$$

Si se toma  $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ , y ya que  $\vec{E} = -E\hat{j}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) &= -E \left( \hat{j} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \right) \\ &= -E dy, \end{aligned} \quad (8.90)$$

de manera que:

$$\Delta\phi = \int_0^L E dy = vBy \Big|_0^L = vBL. \quad (8.91)$$

La última expresión representa la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla cuando se ha alcanzado el equilibrio entre la fuerza magnética y la fuerza eléctrica.

**Ejemplo 8.11.** Un alambre de longitud  $L$  y masa  $M$  que conduce una corriente  $I$ , está suspendido y se mantiene en equilibrio por un par de resortes de masa despreciable. El alambre se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  como se muestra en la figura 8.9. Para el sistema descrito se determinará la magnitud y dirección de la corriente en el conductor que garantice eliminar la fuerza sobre los resortes.

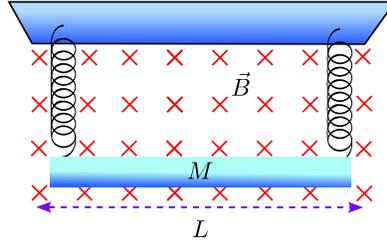


Figura 8.9: Ejemplo 8.11. Equilibrio sobre una barra suspendida por dos resortes ideales.

**Solución:** Las fuerzas que actúan sobre el alambre son: la fuerza magnética  $\vec{F}_m$ , el peso  $\vec{W}$  y la fuerza aplicada por cada resorte  $\vec{F}_k$ . La fuerza neta aplicada sobre el alambre, vendrá dada por:

$$\vec{F}_T = \vec{W} + \vec{F}_m + 2\vec{F}_k. \quad (8.92)$$

Dado que el alambre se encuentra en equilibrio, la fuerza neta es cero, por lo tanto:

$$\vec{W} + \vec{F}_m + 2\vec{F}_k = 0. \quad (8.93)$$

Para la situación planteada, donde los resortes no ejercen fuerza, se tiene que  $\vec{F}_k = 0$ , por lo tanto, a partir de (8.93) se concluye que:

$$\vec{F}_m = -\vec{W} = -(-Mg\vec{j}) = Mg\vec{j}, \quad (8.94)$$

lo cual establece que la fuerza magnética debe tener dirección  $\vec{j}$ . Dado que el campo magnético es constante, la fuerza magnética sobre el alambre vendrá dada por:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}, \quad (8.95)$$

con lo cual

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B} = Mg\vec{j}. \quad (8.96)$$

Ya que el campo magnético tiene dirección  $-\hat{k}$ , para que el producto de  $\vec{L} \times \vec{B}$  tenga la dirección requerida para la fuerza magnética ( $\hat{j}$ ), se necesita que  $\vec{l} = \hat{l}_i$ , y se tiene que:

$$ILB \left( \underbrace{\vec{i} \times (-\hat{k})}_{\hat{j}} \right) = Mg\vec{j} \Rightarrow ILB = Mg, \quad (8.97)$$

de manera que la intensidad de la corriente es:

$$I = \frac{mg}{LB}. \quad (8.98)$$

**Ejemplo 8.12.** Se tiene una barra de masa despreciable y longitud  $L$  por la cual circula una corriente  $I$ . La barra se sujeta al piso en el punto  $P$ , por medio de un pivote con un eje de giro sobre el cual la barra puede rotar libremente. Adicionalmente, un resorte de constante de elasticidad  $k$  conecta el otro extremo de la barra a una pared, como se observa en la figura 8.10. Si la varilla se somete a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  orientado hacia la página, determinar cuánto se estira el resorte.

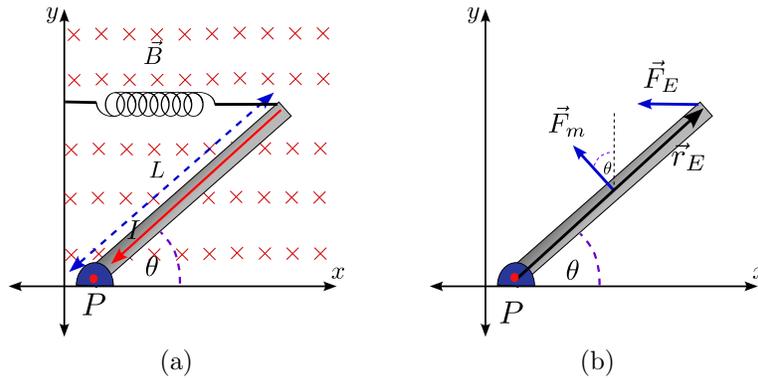


Figura 8.10: Ejemplo 8.12. Torque sobre una barra pivoteada en uno de sus extremos, debido a la aplicación de una fuerza magnética y una fuerza elástica.

**Solución:** La condición de equilibrio de rotación establece que la suma de torques que se ejercen sobre la barra es cero. Tomando como eje de referencia el punto  $P$ , el torque neto sobre la barra viene dado por (considerando que la barra tiene masa despreciable):

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_E + \vec{\tau}_B = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_E = -\vec{\tau}_B \Rightarrow \tau_E = \tau_B, \quad (8.99)$$

donde  $\vec{\tau}_E$  representa el torque ejercido por la fuerza elástica que es dado por:

$$\tau_E = \left| \vec{r}_E \times \vec{F}_E \right|, \quad (8.100)$$

siendo  $\vec{r}_E$  el vector medido desde el punto  $P$  al punto de aplicación de la fuerza  $\vec{F}_E$ . De la figura 8.10b se determina que

$$\vec{r}_E = L \left( \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \right), \quad (8.101)$$

$$\vec{F}_E = -kx\hat{i}, \quad (8.102)$$

donde  $x$  caracteriza el estiramiento del resorte. Con lo anterior se tiene que:

$$\tau_E = L \left| \left( \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \right) \times \left( -kx \hat{i} \right) \right| = (kx)L \sin \theta. \quad (8.103)$$

Dado que el campo magnético es constante, para la fuerza magnética se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= \int I \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right) = I \left( \int d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B} \\ &= L \left( \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \right) \times (-B\hat{k}) \\ &= -LB \left( \cos \theta \left( \hat{i} \times \hat{k} \right) + \sin \theta \left( \hat{j} \times \hat{k} \right) \right) \\ &= LB \left( \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i} \right). \end{aligned} \quad (8.104)$$

El resultado se pudo encontrar aplicando la regla de la mano derecha entre la dirección del flujo de corriente y el campo magnético, evidenciando que la fuerza magnética se aplica perpendicularmente a la barra. Por otro lado, si la barra tiene una distribuida uniforme de masa, la fuerza magnética neta sobre la barra, se aplica sobre el centro de masa de la barra, y por lo tanto, el torque vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_B &= I \frac{\vec{L}}{2} \times \vec{F}_m \\ &= \frac{IL^2 B}{2} \underbrace{\left( \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \right) \times \left( \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i} \right)}_{\hat{k}} \\ &= \frac{IL^2 B}{2} \hat{k} \end{aligned} \quad (8.105)$$

Ya que se ha determinado que  $\tau_E = \tau_B$ , se tiene que:

$$kxL \sin \theta = \frac{IBL^2}{2}, \quad (8.106)$$

lo que implica que el resorte se estira un valor  $x$  dado por:

$$x = \frac{IBL}{2k \sin \theta}. \quad (8.107)$$

**Ejemplo 8.13.** Una espira cuadrada de alambre de lado  $L$  se localiza en el plano  $xy$ , como se muestra en la figura 8.11. La espira está sometida a un campo magnético no uniforme  $\vec{B}(y, z) = \frac{B_0}{L} z \hat{j} + \frac{B_0}{L} y \hat{k}$ , donde  $B_0$  es una constante positiva. Para la configuración presentada, se determinará la fuerza magnética ejercida sobre la espira.

**Solución:** La fuerza magnética ejercida sobre la espira se puede derivar de:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (8.108)$$

Para realizar la integral, la espira cuadrada se puede expresar como la suma de los tramos rectos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , y por tanto:

$$\vec{F} = I \int_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_2} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_3} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_4} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (8.109)$$

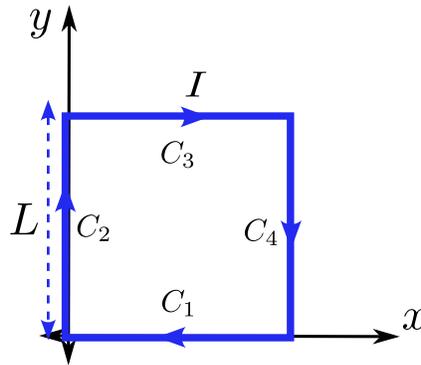


Figura 8.11: Ejemplo 8.13. Espira cuadrada con corriente  $I$  en presencia de un campo magnético no uniforme.

Ahora, siendo que la espira se encuentra en el plano  $xy$ , se debe tener en cuenta que  $z = 0$ , de manera que el campo magnético que actúa sobre cada una de los segmentos en consideración es:

$$\vec{B}(y, 0) = \frac{B_0}{L} y \hat{k}. \quad (8.110)$$

Ahora, para el tramo  $C_1$  se tiene que

$$d\vec{l} = dx (-\hat{i}), \quad y = 0, \quad (8.111)$$

de manera que

$$\int_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B} = \int_L^0 (-dx \hat{i}) \times \left( \frac{B_0}{L} y \hat{k} \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (8.112)$$

Para el segmento  $C_2$  se cumple que

$$d\vec{l} = dy (\hat{j}), \quad x = L, \quad (8.113)$$

con lo cual

$$\int_{C_2} d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^L (dy \hat{j}) \times \left( \frac{B_0}{L} y \hat{k} \right) \Big|_{x=L} = \frac{B_0}{L} \hat{i} \underbrace{\int_0^L y dy}_{\frac{L^2}{2}} = \frac{B_0 L}{2} \hat{i}. \quad (8.114)$$

Ahora, para  $C_3$  se tiene que,

$$d\vec{l} = dx \hat{i}, \quad y = L, \quad (8.115)$$

entonces

$$\int_{C_3} d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^L (dx \hat{i}) \times \left( \frac{B_0}{L} y \hat{k} \right) \Big|_{y=L} = -\frac{B_0}{L} L \hat{j} \underbrace{\int_0^L dx}_L = -B_0 L \hat{j}. \quad (8.116)$$

Finalmente, en el trayecto  $C_4$

$$d\vec{l} = -dy \hat{j}, \quad x = 0, \quad (8.117)$$

resultando

$$\int_{C_4} d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^L (-dy \hat{j}) \times \left( \frac{B_0}{L} y \hat{k} \right) \Big|_{x=0} = -\frac{B_0}{L} \hat{i} \underbrace{\int_0^L y dy}_{\frac{L^2}{2}} = -\frac{B_0 L}{2} \hat{i}. \quad (8.118)$$

Así, la fuerza magnética sobre la espira es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \int_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_2} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_3} d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_{C_4} d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= I(0) + I \left( \frac{B_0 L}{2} \hat{i} \right) + I (-B_0 L \hat{j}) + I \left( -\frac{B_0 L}{2} \hat{i} \right) \\ &= -IB_0 L \hat{j}. \end{aligned} \quad (8.119)$$

**Ejemplo 8.14.** La figura 8.11 muestra una barra de masa  $m$  y sección transversal circular, con radio  $R$ , que reposa sobre dos rieles paralelos separados una distancia  $d$  y de longitud  $L$ . Cuando una corriente  $I$  circula en la barra, esta comienza a rodar a través de los rieles sin deslizarse. Un campo magnético uniforme  $B$  está orientado perpendicularmente a las barra y a los rieles, como se observa en la figura 8.11. Para la situación planteada, se evaluará la velocidad de la barra al momento que la barra abandona los rieles, considerando que el movimiento se inicia desde el reposo.

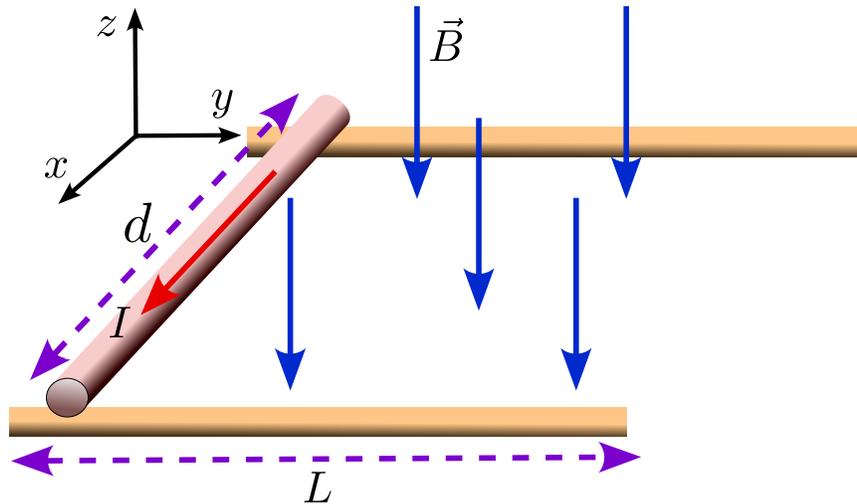


Figura 8.12: Ejemplo 8.14. Barra de masa  $m$  que reposa sobre dos rieles paralelos separados una distancia  $d$  y de longitud  $L$ .

**Solución:** Teniendo en cuenta que el campo magnético es uniforme, la fuerza magnética que se ejerce sobre la barra es:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}, \quad (8.120)$$

donde

$$\vec{l} = d\hat{i}, \quad \vec{B} = B(-\hat{k}), \quad (8.121)$$

con lo cual

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = I(d\hat{i}) \times (-B\hat{k}) = -IdB \underbrace{(\hat{i} \times \hat{k})}_{-\hat{j}} = IdB\hat{j}. \quad (8.122)$$

El teorema del trabajo y la energía establece que:

$$W = K_f - K_i, \quad (8.123)$$

donde  $W$  caracteriza el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$ , en tanto que  $K$  identifica la energía cinética de la barra. Ahora, dado que la barra se mueve sin deslizarse, la energía cinética es la suma de la energía cinética rotacional más la traslacional, es decir,

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (8.124)$$

donde  $I$  caracteriza el momento de inercia de la barra medido a lo largo del eje de la barra, es decir,

$$I = \frac{1}{2}mR^2, \quad (8.125)$$

en tanto que  $\omega$  es la velocidad angular que se expresa en términos de la velocidad del centro de masa  $v$  como (si la barra rota sin deslizarse):

$$v = R\omega. \quad (8.126)$$

En el momento en cual la barra abandona los rieles, la velocidad será  $v_f$  y se tiene que,

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{4}mv_f^2 = \frac{3}{4}mv_f^2. \quad (8.127)$$

Dado que la masa parte del reposo, se tiene que  $K_i = 0$ , y por lo tanto

$$W = K_f = \frac{3}{4}mv_f^2. \quad (8.128)$$

Ahora, para una fuerza constante, el trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  al trasladar un cuerpo una distancia  $\vec{L}$  viene dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{L} = FL \cos \theta. \quad (8.129)$$

Dado que en el caso en estudio la fuerza va en dirección del desplazamiento ( $\cos \theta = 1$ ), y teniendo en cuenta (8.122) y (8.128) se tiene

$$W = FL = IdBL = \frac{3}{4}mv_f^2 \quad (8.130)$$

con lo cual, la rapidez de la barra al final de los rieles es:

$$v_f = \sqrt{\frac{4IdBL}{3m}}. \quad (8.131)$$

**Ejercicio 8.6.** La espira rectangular de la figura 8.13 tiene una masa por centímetro de longitud de  $0.30 \frac{g}{cm}$ . Sobre la espira circula una corriente de  $50.0 \text{ A}$ . Cuando un campo magnético orientado en la dirección  $y$  se aplica, la espira que puede girar sobre el lado  $pq$ , se mueve hasta que su plano forme un ángulo de  $\theta$  con el plano  $xz$ . Calcular la orientación y la intensidad del campo magnético que garantiza que esta configuración sea posible, teniendo en cuenta que:  $l_1 = 20.0\text{cm}$ ,  $l_2 = 25.0\text{cm}$ , y  $\theta = 45^\circ$ .

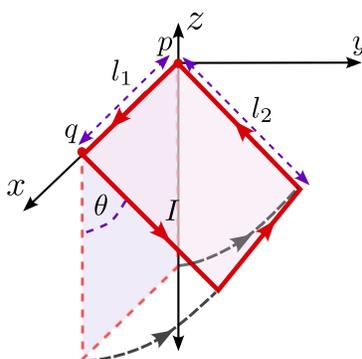


Figura 8.13: Ejercicio 8.6. Espira rectangular en un campo magnético.

**Ejercicio 8.7.** Una corriente de  $3.50 \text{ A}$  circula por el tramo de  $a$  hasta  $b$  del conductor que se muestra en la figura 8.14. Este se localiza en un campo magnético de  $3.50 \text{ T}$  orientado en la dirección de  $z$  positivo. Encontrar la fuerza total sobre el conductor, teniendo en cuenta que la longitud horizontal del alambre es de  $30.0\text{cm}$  y la longitud vertical de  $40.0\text{cm}$ .

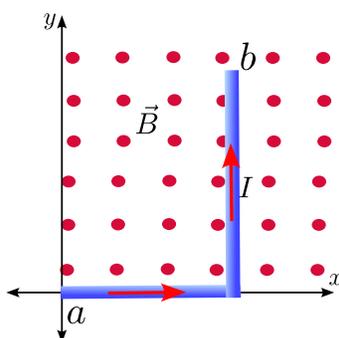


Figura 8.14: Ejercicio 8.7. Conductor en campo magnético en la dirección  $z$ .

**Ejercicio 8.8.** Un campo magnético uniforme de  $0.50 \text{ T}$  se orienta en la dirección positiva del eje  $y$ . En la región donde está presente el campo se localiza una espira generada a partir de un cubo de  $25.0 \text{ cm}$  como se muestra en la figura 8.15. A través de la espira circula una corriente de  $9.50 \text{ A}$ . Calcular la fuerza magnética sobre la espira.

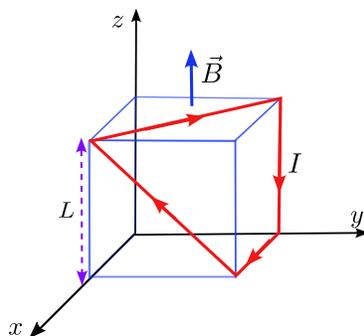


Figura 8.15: Ejercicio 8.8. Fuerza magnética sobre una espira, debida a un campo magnético uniforme.

**Ejercicio 8.9.** Un alambre de 20.0 g de masa y 50.0 cm de longitud está suspendido por un par de resortes como se muestra en la figura 8.16. Los resortes de masa despreciable, se estiran 0.3 cm debido al peso del alambre. El sistema anterior forma un circuito cuando los resortes se conectan a una resistencia de 40.0  $\Omega$  y a una batería 5.0 V, los cuales se encuentran fijos. Cuando un campo magnético orientado hacia fuera de la página es aplicado, los resortes se estiran 0.2 cm adicionales (0.5 cm respecto a su longitud natural). Determinar la magnitud del campo magnético.

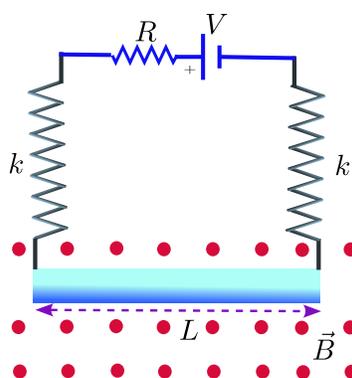


Figura 8.16: Ejercicio 8.9. Elongación de dos resortes que mantienen en equilibrio una barra de masa  $M$  con corriente  $I$ .

**Ejercicio 8.10.** Un campo magnético de 2.50 T es aplicado a un conductor por el cual circula una corriente de 8.00 A. Esquemáticamente, el campo magnético se orienta de tal manera que ingresa a la hoja, como se observa en la figura 8.17. Calcular la fuerza magnética sobre el conductor, teniendo en cuenta que:  $a = 12.0\text{cm}$ ,  $r = 3.0\text{cm}$ .

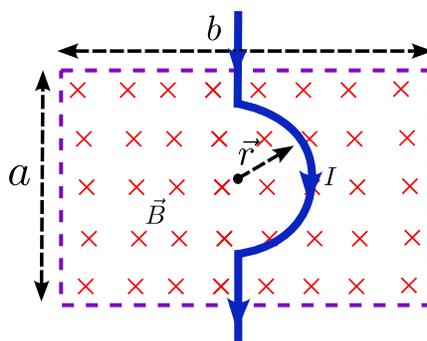


Figura 8.17: Ejercicio 8.10. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente  $I$ .

### 8.1.1. Torque y momento dipolar magnético

Si una espira (que corresponde a un conductor con una trayectoria cerrada), se ubica en una región donde existe un campo magnético, dicha espira es susceptible a experimentar rotación debido al torque generado por la interacción entre la corriente eléctrica que circula por la espira y el campo magnético externo.

Como ejemplo particular, de una espira que gira por la presencia de un campo magnético, se va a encontrar el torque ejercido sobre el conductor rectangular con corriente  $I$ , en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{i}$ , como es el caso del ejemplo (8.9). Esta situación se representa en la figura 8.18.

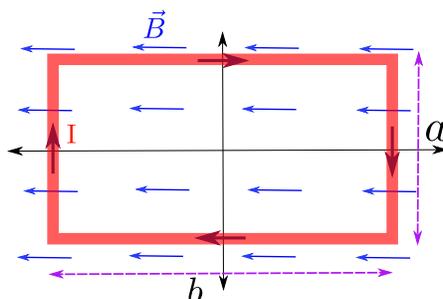


Figura 8.18: Torque ejercido por un campo magnético sobre un conductor rectangular.

En el ejemplo (8.9) se determinó que la fuerza total sobre el circuito rectangular descrito en la figura 8.18 es cero, lo cual conlleva a que el conductor como un todo no se traslade (o que la velocidad del centro de masa sea cero). Sin embargo, no se estudió si el conductor puede rotar. Para determinar si el cuerpo puede rotar, es necesario calcular el torque total ejercido por la fuerza magnética sobre el conductor. Por definición el torque ejercido por una fuerza  $\vec{F}$ , se determina mediante la relación:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (8.132)$$

donde  $\vec{r}$  representa el vector que determina la separación entre un punto de referencia (un punto en principio arbitrario, que generalmente y convenientemente se toma sobre el eje de giro) y el punto donde se aplica la fuerza. Para la espira rectangular en estudio, se calculará el torque sobre cada lado del conductor y el torque total se obtendrá sumando los resultados parciales. El método aplicado para el cálculo del torque sobre un lado del conductor es el mismo que se debe aplicar en los lados restantes. En primer lugar se evaluará el torque sobre el lado izquierdo.

Para cumplir el objetivo propuesto, se puede proceder de dos formas: 1) encontrar el torque  $d\vec{\tau}$  ejercido por la fuerza  $d\vec{F}_m$  aplicada sobre un elemento  $d\vec{l}$  del conductor y luego encontrar el torque total sobre el lado izquierdo mediante integración. 2) buscar la fuerza total  $\vec{F}_m$  sobre el lado izquierdo del conductor y encontrar el torque asociado, teniendo en cuenta que la fuerza  $\vec{F}_m$  se aplica sobre el centro de masa del lado izquierdo del conductor (asumiendo una distribución uniforme de masa). En este ejemplo se utiliza el segundo método y se deja

al lector comprobar que el resultado obtenido sería el mismo si se aplica el método 1). Como se mencionó anteriormente, se procede a encontrar la fuerza magnética aplicada sobre el lado izquierdo del conductor  $\vec{F}_{m_{iz}}$ , que se determina a partir de:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m_{iz}} &= \int_0^a I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^a I (dl \hat{j}) \times (-B \hat{i}) \\ &= - \int_0^a IB dl \hat{k} = IB \left( \int_0^a dl \right) \hat{k} \\ &= IBa \hat{k}.\end{aligned}\tag{8.133}$$

En (8.133) se ha tenido en cuenta que  $(\hat{j} \times \hat{i}) = -\hat{k}$  para todo elemento  $d\vec{l}$  en el lado izquierdo del conductor (por tanto, constante en la integración), además que la corriente  $I$  y el campo  $B$  son constantes. Ahora, con el resultado obtenido en (8.133), se puede encontrar el torque, tomando como punto de referencia el centro del rectángulo, con lo cual  $\vec{r} = -b/2 \hat{i}$  (distancia del centro del rectángulo al centro del lado izquierdo del conductor), por lo tanto, en este caso el torque está dado por:

$$\vec{\tau}_{izq} = \vec{r} \times (IBa \hat{k}) = \frac{IBab}{2} (-\hat{i} \times \hat{k}) = \frac{IBab}{2} \hat{j},\tag{8.134}$$

donde en la última expresión se ha utilizado que  $(\hat{i} \times \hat{k}) = -\hat{j}$ . En el lado derecho del conductor, el cálculo de la fuerza  $\vec{F}_{m_{der}}$  cambia respecto a (8.133) únicamente en la dirección de  $d\vec{l}$ , ya que en el lado derecho (a diferencia del izquierdo) la dirección del flujo de corriente es  $-\hat{j}$ , y por tanto  $d\vec{l} = -dl \hat{j}$ , con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m_{der}} &= \int_0^a I d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= \int_0^a I (-dl \hat{j}) \times (-B \hat{i}) \\ &= - \int_a^0 IB dl \hat{k} \\ &= -IB \underbrace{\int_0^a dl}_{a} \hat{k} = -IBa \hat{k}.\end{aligned}\tag{8.135}$$

Para el lado derecho del conductor, el vector  $\vec{r}$  necesario en el cálculo del torque es  $\vec{r} = \frac{b}{2} \hat{i}$ , por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{\tau}_{der} = \vec{r} \times \vec{F}_{m_{der}} = (b/2 \hat{i} \times (-IBa \hat{k})) = \frac{IBab}{2} \hat{j}.\tag{8.136}$$

La parte superior e inferior del conductor no experimentan torque, ya que la fuerza sobre dichos segmentos es cero ( $\vec{dl}$  es paralelo o antiparalelo al campo), por lo tanto, el torque total sobre la espira rectangular es:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{izq} + \vec{\tau}_{der} = I B a b \hat{j} = I A B \hat{j}, \quad (8.137)$$

donde en la última igualdad de (8.137) se ha definido  $A = ab$ , que representa el área encerrada por el circuito del conductor rectangular. Es posible definir un vector de área  $\vec{A}$  cuya magnitud sea igual al área del rectángulo definido por el conductor y que esté orientado en dirección  $-\hat{k}$  (en general, si el rectángulo en el plano de la hoja lleva una corriente en sentido de las manecillas del reloj, la orientación del vector de área será hacia dentro de la hoja ( $-\hat{k}$ ) y si el sentido de la corriente es en contra de las manecillas del reloj, el vector de área estaría orientado hacia fuera de la hoja ( $\hat{k}$ )). Con la definición anterior del vector de área, el torque se puede escribir como:

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}. \quad (8.138)$$

El lector puede comprobar que efectivamente  $I \vec{A} \times \vec{B} = I A B \hat{j}$  para el problema en análisis. El resultado encontrado en (8.138) se aplica en general a todo conductor que encierre una área  $A$  y se encuentre dentro de una región donde exista un campo uniforme  $\vec{B}$ , por lo tanto, es útil definir una nueva cantidad  $\vec{\mu}$  conocida como el momento dipolar magnético de una espira, tal que:

$$\vec{\mu} = I \vec{A}, \quad (8.139)$$

donde la orientación del momento dipolar magnético  $\vec{\mu}$  corresponde a la orientación del vector de área  $\vec{A}$ . Para un conductor cerrado que se pueda representar esquemáticamente en el plano de la hoja, la orientación de  $\vec{\mu}$  saldrá perpendicularmente de la hoja si el flujo de corriente en el conductor va en contra de las manecillas del reloj, y entrará perpendicularmente a la hoja, si el flujo de corriente va a favor de las manecillas del reloj. Con la anterior definición, para una conductor que encierre una área  $A$  y esté en una región donde exista un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , el torque está dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (8.140)$$

El torque está orientado a lo largo de eje de rotación del conductor. A continuación, se presenta un ejemplo sencillo del uso de la ecuación (8.140).

**Ejemplo 8.15.** *Se considera un conductor circular (una espira) que lleva una corriente  $I$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, y que está dentro de una región donde existe un campo magnético dado por:  $\vec{B} = B(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j})$  ( $\vec{B}$  forma un ángulo de  $45^\circ$  con*

respecto al eje positivo del eje  $x$ ), como se observa en la figura 8.19. Para la situación descrita anteriormente se va a determinar el torque sobre la espira circular.

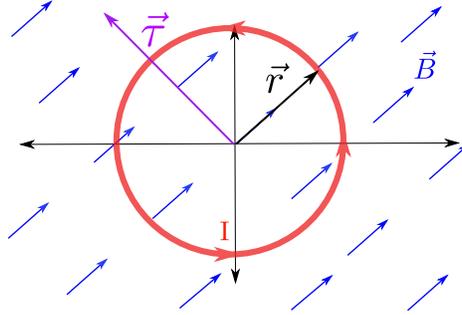


Figura 8.19: Torque sobre una espira producido por un campo magnético uniforme.

**Solución:** En primer lugar, si se dibuja el conductor en el plano de una hoja y se tiene en cuenta que la dirección de la corriente va en contra de las manecillas del reloj, entonces el momento dipolar magnético apunta hacia afuera de la página (dirección  $\hat{k}$ ), y está dado por:

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = I(\pi r^2)\hat{k}, \quad (8.141)$$

donde  $r$  corresponde al radio del conductor circular y por lo tanto, el torque es:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I\pi r^2 B(\hat{k} \times (\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j})) = \pi r^2 IB \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{k} \times \hat{i} + \hat{k} \times \hat{j}). \quad (8.142)$$

Ya que  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$  y que  $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ , se tiene que:

$$\vec{\tau} = \pi r^2 IB(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}). \quad (8.143)$$

El resultado anterior indica un torque con una magnitud  $\pi r^2 IB$  que forma un ángulo de  $45^\circ$  respecto al eje negativo del eje  $x$ . El eje de giro es un vector en el segundo cuadrante del plano  $xy$  formando  $45$  grados con respecto a la horizontal. Con respecto al eje en mención la espira gira en sentido contrario a las manecillas del reloj (desde el punto de vista asociado al eje de giro).

**Ejemplo 8.16.** En la figura 8.20 se indica una varilla metálica que se encuentra pivoteada en el punto  $A$ . La varilla tiene una longitud  $L$  y una masa  $M$  uniformemente distribuida sobre su longitud. La varilla conduce una corriente  $I$  proveniente del punto  $A$  y que termina en el extremo opuesto de la varilla. Existe un campo magnético dirigido hacia dentro de la página, indicado con cruces rojas en la figura 8.20. La varilla se encuentra en equilibrio rotacional cuando forma un ángulo  $\theta$  respecto al eje horizontal. Para la situación descrita se encontrará la magnitud del campo magnético.

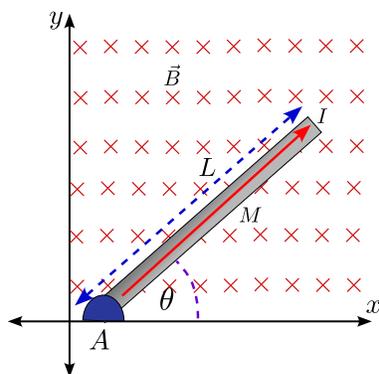


Figura 8.20: Ejemplo (8.16). Torque sobre una varilla conductora de corriente I.

**Solución:** Las fuerzas aplicadas sobre la varilla son: Fuerza magnética sobre la varilla debida a la interacción entre la corriente eléctrica I y el campo magnético, el peso de la varilla y la fuerza normal aplicada en el punto A (extremo inferior de la varilla). El diagrama de cuerpo libre para la varilla se indica en la figura 8.21 (la dirección de la fuerza magnética se ha determinado utilizando la regla de la mano derecha).

Para el cálculo del torque se tomará como punto de referencia el punto A y por tanto la fuerza normal no ejerce torque, ya que en este caso

$$\vec{\tau}_N = \underbrace{\vec{r}_N}_{\vec{0}} \times \vec{N} = \vec{0}. \quad (8.144)$$

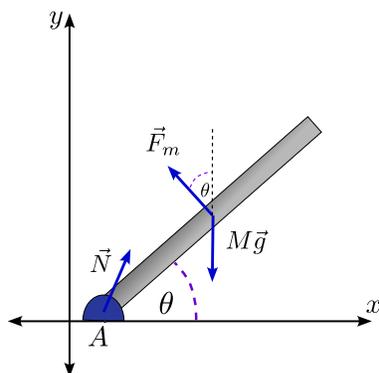


Figura 8.21: Ejemplo (8.16). Diagrama de cuerpo libre, sobre una varilla conductora de corriente I.

Por otra parte, el torque generado por el peso de la varilla es

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_W &= \vec{r}_W \times \vec{W} \\ &= \frac{L}{2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \times (-mg \hat{j}) \\ &= -\frac{Lmg}{2} \cos \theta \hat{k}. \end{aligned} \quad (8.145)$$

El anterior resultado indica que el torque generado por la fuerza magnética debe estar orientado en dirección  $\hat{k}$ , para compensar el torque debido al peso. Ahora, la fuerza magnética sobre

un elemento  $d\vec{l}$  del conductor vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_m &= Id\vec{l} \times \vec{B} \\
 &= Idl \left( \cos \theta \hat{i} + \text{sen } \theta \hat{j} \right) \times \left( -B\hat{k} \right) \\
 &= -Idl \left( \underbrace{\cos \theta \hat{i} \times \hat{k}}_{-\hat{j}} + \text{sen } \theta \underbrace{\hat{j} \times \hat{k}}_{\hat{i}} \right) \\
 &= IBdl \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right), \tag{8.146}
 \end{aligned}$$

y la fuerza magnética total será:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_m &= \int_0^L IB \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right) dl \\
 &= IB \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right) \int_0^L dl \\
 &= ILB \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right). \tag{8.147}
 \end{aligned}$$

Dado que la varilla es uniforme, la fuerza magnética se aplica sobre el centro de masa, es decir a una distancia  $L/2$  respecto al punto A; por lo tanto, el torque asociado a la fuerza magnética está dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_m &= \vec{r}_m \times ILB \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right) \\
 &= \frac{L}{2} \left( \cos \theta \hat{i} + \text{sen } \theta \hat{j} \right) \times ILB \left( \cos \theta \hat{j} - \text{sen } \theta \hat{i} \right) \\
 &= \frac{IL^2B}{2} \left( \cos^2 \theta \hat{k} + \text{sen}^2 \theta \hat{k} \right) \\
 &= \frac{IL^2B}{2} \hat{k}. \tag{8.148}
 \end{aligned}$$

En la situación de equilibrio descrita en el planteamiento del problema, se cumple que:

$$\vec{\tau}_m + \vec{\tau}_W = \frac{IL^2B}{2} \hat{k} - \frac{Lmg}{2} \cos \theta \hat{k} = 0, \tag{8.149}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{IL^2B}{2} = \frac{Lmg}{2} \cos \theta, \quad \rightarrow B = \frac{mg \cos \theta}{IL}. \tag{8.150}$$

En conclusión, el campo magnético viene dado por:

$$\vec{B} = -\frac{mg \cos \theta}{IL} \hat{k}. \tag{8.151}$$

## 8.2. Energía de un dipolo magnético

El trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  que genera rotación sobre un cuerpo (no traslación), cuando el cuerpo gira un ángulo  $d\theta$ , viene dado por:

$$dW = \tau d\alpha, \quad (8.152)$$

donde  $\tau$  representa la magnitud del torque ejercido por la fuerza  $\vec{F}$  ( $\tau = |\vec{r} \times \vec{F}|$ ). Para el caso de una espira, la magnitud del torque generada por un campo magnético se puede escribir como:

$$\tau = |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin \theta. \quad (8.153)$$

A partir de la definición del torque, se puede evidenciar que la rotación que dicho torque produce sobre un objeto, tiende a alinear el vector de momento dipolar magnético  $\vec{\mu}$  con el vector de campo magnético  $\vec{B}$ . En consecuencia, esta rotación disminuye el ángulo  $\theta$  (ángulo entre el vector  $\vec{\mu}$  y el vector  $\vec{B}$ ); es decir  $d\alpha = -d\theta$ . Por lo tanto, la expresión (8.152) se puede escribir como:

$$dW = \tau d\alpha = -\mu B \sin \theta d\theta. \quad (8.154)$$

Por lo anterior, el trabajo total ante una rotación entre un ángulo  $\theta_i$  y  $\theta_f$ , está dado por:

$$W = - \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mu B \sin \theta d\theta. \quad (8.155)$$

Si se asume que el momento dipolar  $\mu$  y el campo magnético  $\vec{B}$  son constantes, se tiene que:

$$W = \mu B \cos \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_f} \quad (8.156)$$

Teniendo en cuenta la definición del producto punto, la expresión (8.156) se puede escribir como:

$$W = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \Big|_{\theta_i}^{\theta_f} \equiv - \left( -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \right) \Big|_{\theta_i}^{\theta_f}. \quad (8.157)$$

Dado que el resultado no depende de la trayectoria entre los puntos límites de la integración, se puede establecer que la fuerza es conservativa y que la función escalar  $(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$  corresponde

a la energía potencial; es decir, la energía potencial magnética asociado a un dipolo  $\vec{\mu}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  es:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (8.158)$$

**Ejemplo 8.17.** Por un conductor, con la forma geométrica descrita en la figura 8.22, circula una corriente  $I$ . Para el conductor en mención se determinará el momento dipolar magnético asociado a la espira.

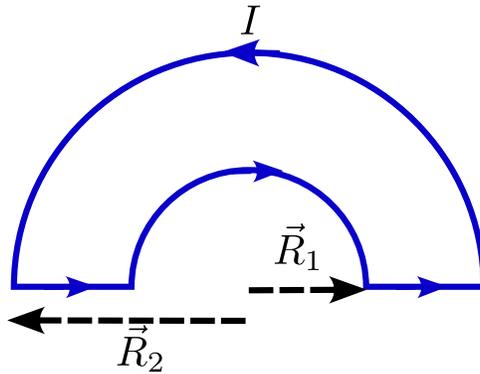


Figura 8.22: Ejemplo 8.17. Momento magnético dipolar de una espira.

**Solución:** El momento dipolar magnético se define como:

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\hat{n}, \quad (8.159)$$

donde  $A$  es el área generada por la trayectoria de la espira y  $\hat{n}$  es un vector normal unitario a dicha superficie, el cual se define por la regla de la mano derecha. El área de la espira es:

$$A = \frac{1}{2} (\pi R_2^2 - \pi R_1^2) = \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2). \quad (8.160)$$

Ahora, si se considera que la superficie generada por la espira se encuentra en el plano  $xy$ , el vector unitario  $\hat{n}$  deberá orientarse a lo largo del eje  $z$ . Dada la orientación de la corriente en la espira, se determina de la regla de la mano derecha que

$$\hat{n} = \hat{k}, \quad (8.161)$$

por lo tanto, el momento dipolar magnético asociado a la espira es:

$$\vec{\mu} = \frac{I\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2) \hat{k}. \quad (8.162)$$

**Ejemplo 8.18.** Una bobina rectangular de lados  $a$  y  $b$  con  $N$  vueltas, tiene la posibilidad de girar a lo largo del eje  $z$ . El plano de la bobina forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $y$  (ver figura 8.23a). Para el sistema descrito se calculará el momento dipolar magnético de la bobina. Adicionalmente, se evaluará el torque ejercido sobre la bobina si se aplica un campo

magnético uniforme en dirección  $\hat{j}$  ( $\vec{B} = -B\hat{j}$ ). Finalmente, se evaluará la energía potencial magnética de la bobina.

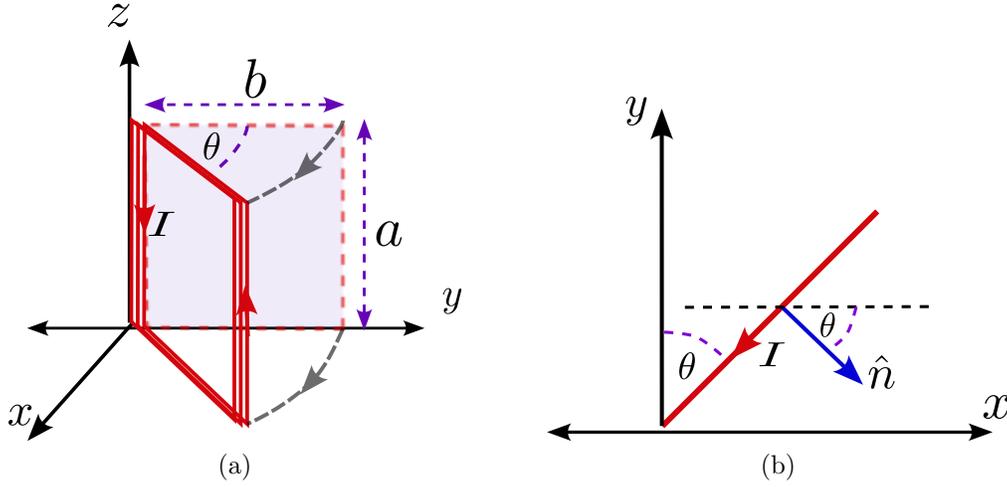


Figura 8.23: Ejemplo 8.18. Momento dipolar, torque y energía magnética para una bobina rectangular.

**Solución:** El momento dipolar magnético asociado a la bobina es:

$$\vec{\mu}_N = N\vec{\mu}, \quad (8.163)$$

donde  $\vec{\mu}$  es el momento dipolar magnético que corresponde a una de las espiras y que se expresa como

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}, \quad (8.164)$$

donde el área de una espira es:

$$A = ab, \quad (8.165)$$

en tanto que el vector unitario  $\hat{n}$  se orienta como se muestra en la figura 8.23b. De acuerdo a la figura 8.23b, el vector  $\hat{n}$  se representa por:

$$\hat{n} = \cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j}. \quad (8.166)$$

de manera que

$$\vec{\mu}_N = NIab \left( \cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j} \right). \quad (8.167)$$

Así, el torque que el campo magnético ejerce sobre la bobina es:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\mu}_N \times \vec{B} = \left[ NIab \left( \cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j} \right) \right] \times \left( -B\hat{j} \right) \\ &= -NIabB \left[ \underbrace{\cos\theta(\hat{i} \times \hat{j})}_{\hat{k}} - \underbrace{\text{sen}\theta((\hat{j} \times \hat{j}))}_0 \right] \\ &= -NIabB \cos\theta\hat{k}. \end{aligned} \quad (8.168)$$

Ahora, la energía potencial asociada la bobina es:

$$\begin{aligned}
 U &= -\vec{\mu}_N \cdot \vec{B} = - \left[ NIab \left( \cos \theta \hat{i} - \text{sen} \theta \hat{j} \right) \right] \cdot \left( -B \hat{j} \right) \\
 &= NIabB \left[ \underbrace{\cos \theta (\hat{i} \cdot \hat{j})}_0 - \underbrace{\text{sen} \theta (\hat{j} \cdot \hat{j})}_1 \right] \\
 &= -NIabB \text{sen} \theta.
 \end{aligned} \tag{8.169}$$

**Ejemplo 8.19.** Una partícula que posee una carga  $q$  y una masa  $m$  se mueve con una velocidad angular  $\omega$  en una trayectoria circular de radio  $a$ . Para el sistema descrito se demostrará que el momento angular de la partícula es:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}, \tag{8.170}$$

donde  $\vec{L}$  es el momento angular de la partícula medido en relación al centro del círculo.

**Solución:** Si se coloca un detector de carga en un punto de la trayectoria circular recorrida por la partícula, dicho detector marcará por cada tiempo  $T$  (tiempo que la tarda a la partícula dar una vuelta) el paso de una carga  $q$ . Lo anterior se puede interpretar como una corriente promedio  $I$  transportada en un circuito circular de radio  $a$ , dada por:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q}{T}. \tag{8.171}$$

Ahora, la velocidad angular  $\omega$  de la partícula se relaciona con el periodo por medio de

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{8.172}$$

de manera que la corriente se puede expresar como:

$$I = \frac{q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega}{2\pi}. \tag{8.173}$$

La magnitud del momento dipolar magnético asociado a la trayectoria circular descrita por esta corriente es:

$$\mu = IA = \left( \frac{q\omega}{2\pi} \right) (\pi a^2) = \frac{q\omega a^2}{2}, \tag{8.174}$$

que vectorialmente se expresa como:

$$\vec{\mu} = \frac{q\omega a^2}{2} \hat{n}, \tag{8.175}$$

donde  $\hat{n}$  es un vector normal unitario respecto a la trayectoria circular de radio  $a$ . Si se considera que la partícula rota en sentido contrario a las manecillas del reloj, en el plano  $xy$ , el momento dipolar magnético se orientará en dirección  $\hat{k}$  (es decir,  $\hat{n} = \hat{k}$ ). Por tanto,

$$\vec{\mu} = \frac{q\omega a^2}{2} \hat{k}. \tag{8.176}$$

Por otra parte, el momento angular de la partícula viene dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad (8.177)$$

donde  $v = a\omega$  y  $\vec{r}$  es el vector de posición de la partícula en relación al centro de la trayectoria circular, es decir  $\vec{r} = a\hat{r}$ . En un movimiento circular uniforme, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares. Entonces, si el movimiento se esquematiza en el plano  $xy$ , siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj, se tiene que:

$$\vec{L} = mav\hat{k} = ma(a\omega)\hat{k} = m\omega a^2\hat{k}. \quad (8.178)$$

Comparando las relaciones (8.176) y (8.178), se determina que:

$$\vec{\mu} = \frac{q\omega a^2}{2}\hat{k} = \frac{q}{2m} \underbrace{(m\omega a^2\hat{k})}_{\vec{L}} = \frac{q}{2m}\vec{L}. \quad (8.179)$$

**Ejemplo 8.20.** Una barra no conductora de masa  $m$  y longitud  $l$  posee una carga distribuida de manera uniforme y caracterizada por una densidad lineal de carga  $\lambda$ . La barra gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje que pasa por una de sus extremos como se muestra en la figura 8.24. En este ejemplo se demostrará que el momento dipolar magnético de la barra es:

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2m}\vec{L}, \quad (8.180)$$

donde  $Q$  es la carga total de la barra.

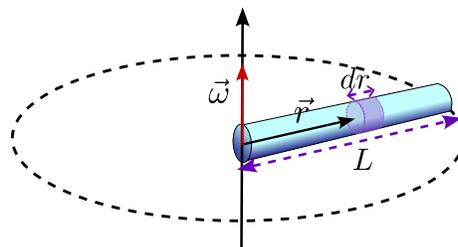


Figura 8.24: Ejemplo 8.20. Momento dipolar magnético para una barra en rotación.

**Solución:** Un elemento de carga  $dq$  distribuido sobre la barra en un segmento de longitud  $dr$  y localizado a una distancia  $r$  del eje de rotación describe una trayectoria circular de radio  $r$  con una velocidad angular  $\omega$ . Utilizando la ecuación (8.173) de los resultados derivados en el Ejemplo 8.19, la corriente promedio asociada a este elemento de carga es:

$$dI = \frac{\omega}{2\pi}dq. \quad (8.181)$$

Ahora, el elemento de carga  $dq$  se puede expresar como

$$dq = \lambda dr. \quad (8.182)$$

Por otra parte, para la corriente  $dI$ , el momento dipolar magnético se expresa como:

$$d\mu = AdI, \quad (8.183)$$

donde  $A$  es el área generada por la trayectoria circular que corresponde al elemento de carga  $dq$ . Así, se determina que,

$$A = \pi r^2. \quad (8.184)$$

Por tanto,

$$d\mu = AdI = (\pi r^2) \left( \frac{\omega}{2\pi} dq \right) = \frac{\omega}{2} \lambda r^2 dr. \quad (8.185)$$

Entonces, el momento dipolar magnético asociado a la barra se obtiene por integración de (8.185), con lo cual se tiene que:

$$\mu = \frac{\omega}{2} \lambda \underbrace{\int_0^l r^2 dr}_{\frac{1}{3}l^3} = \frac{\omega \lambda l^3}{6}. \quad (8.186)$$

Ahora, siendo que la carga sobre la barra se distribuye de manera uniforme, se deduce que

$$\lambda = \frac{Q}{l}, \quad (8.187)$$

y por tanto

$$\mu = \frac{\omega l^3}{6} \left( \frac{Q}{l} \right) = \frac{\omega Q l^2}{6}. \quad (8.188)$$

Se sabe que para una barra que gira con una velocidad angular  $\omega$ , el correspondiente momento angular es:

$$L = I\omega, \quad (8.189)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la barra medido desde el extremo de la misma y que tiene el valor de:

$$I = \frac{1}{3}ml^2, \quad (8.190)$$

con lo cual

$$L = \frac{m\omega l^2}{3}. \quad (8.191)$$

Por tanto, de la relación asociada al momento dipolar magnético de la barra se deduce que,

$$\mu = \frac{Q}{2m} \left( \frac{m\omega l^2}{3} \right) = \frac{Q}{2m} L, \quad (8.192)$$

siendo que los vectores  $\vec{\mu}$  y  $\vec{L}$  son paralelos, se determina que,

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2m} \vec{L}. \quad (8.193)$$

**Ejemplo 8.21.** Un disco de radio  $R$  y masa  $m$  posee una densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$  que rota con una velocidad angular  $\omega$  a través de un eje que pasa por su centro. El disco se encuentra en una región donde está presente un campo magnético uniforme que forma un ángulo  $\theta$  como se muestra en la figura 8.25a. Para la configuración planteada se evaluará el torque ejercido por el campo magnético sobre el disco.

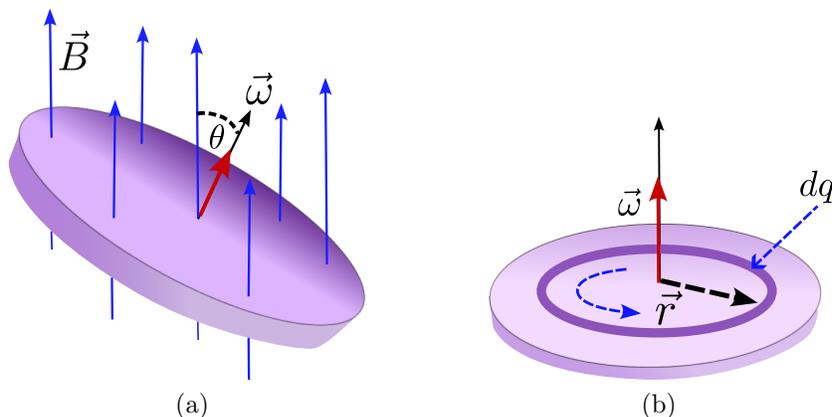


Figura 8.25: Ejemplo 8.21. Torque aplicado sobre un disco cargado en rotación.

**Solución:** En primer lugar se procede a calcular el momento dipolar magnético asociado a la distribución de carga que está rotando. Se considera el elemento de carga  $dq$  que se encuentra distribuida en un anillo de radio  $r$  como se muestra en la figura 8.25b.

Sobre un punto de la trayectoria circular de radio  $r$  cada tiempo  $T$  (periodo), pasará una carga  $dq$ ; por lo tanto, la corriente promedio asociada vendrá dada por:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma da, \quad (8.194)$$

donde el área del anillo ( $da$ ), de radio de espesor  $dr$ , en coordenadas polares está dada por:

$$da = 2\pi r dr, \quad (8.195)$$

con lo cual, se tiene que

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} \sigma (2\pi r dr) = \omega \sigma r dr. \quad (8.196)$$

El momento dipolar magnético asociado a esta corriente es:

$$d\mu = A dI = (\pi r^2) (\omega \sigma r dr) = \pi \omega \sigma r^3 dr. \quad (8.197)$$

Así, el momento dipolar magnético total se obtiene por integración de (8.197), y se tiene que:

$$\mu = \pi \omega \sigma \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{1}{4}R^4} = \frac{1}{4} \pi \omega \sigma R^4, \quad (8.198)$$

el cual se puede expresar como

$$\vec{\mu} = \frac{1}{4} \pi \omega \sigma R^4 \hat{n}, \quad (8.199)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario orientado a lo largo del eje de rotación. La magnitud del torque neto que actúa sobre el disco es:

$$\tau = \left| \vec{\mu} \times \vec{B} \right| = \mu B \sin \theta = \frac{1}{4} \pi \omega \sigma R^4 B \sin \theta. \quad (8.200)$$

**Ejercicio 8.11.** Demostrar que el momento dipolar magnético asociado a un solenoide de  $N$  vueltas trasportando una corriente  $I$ , viene dado por:

$$\mu = \frac{IL^2}{4\pi N} \quad (8.201)$$

**Ejercicio 8.12.** Dos alambre circulares concéntricos de radios  $r_1$  y  $r_2$  se encuentran ubicados en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 8.26. Por cada alambre circula una corriente  $I$ . a) Calcular el momento dipolar magnético del sistema en el caso en que la corrientes se orienten en el sentido indicado en la figura 8.26. b) Evaluar el momento dipolar magnético para el caso en que la corriente interna tenga sentido contrario a la espira exterior.

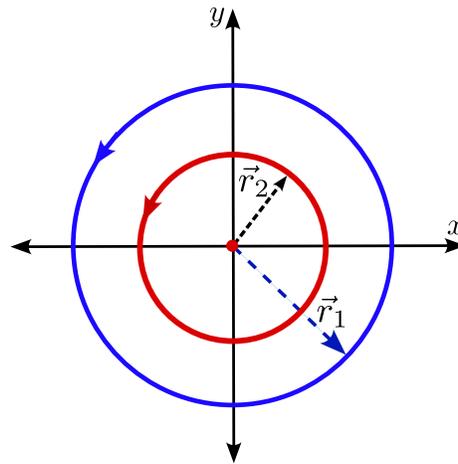


Figura 8.26: Ejercicio 8.12. Momento dipolar magnético para dos espiras con corriente  $I$ .

**Ejercicio 8.13.** Un campo magnético uniforme de  $0.50\text{ T}$  en la dirección  $x$  positiva actúa sobre una bobina rectangular de  $N$  vueltas, por la cual circula una corriente de  $10.0\text{ A}$ . La espira está articulada a lo largo del eje  $z$  como se indica en la figura 8.27. a) Calcular el torque y la energía potencial asociada a la espira, teniendo en cuenta que:  $a = 30\text{ cm}$ ,  $b = 20\text{ cm}$ , y  $\theta = 50^\circ$ .

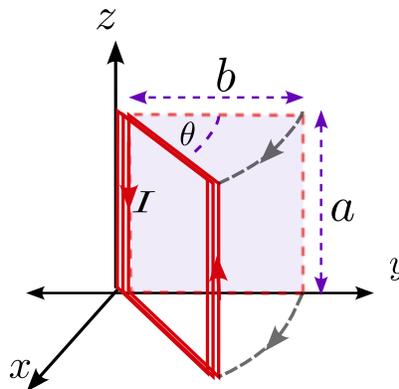


Figura 8.27: Ejercicio 8.13. Torque aplicado sobre una bobina de  $N$  espiras.

**Ejercicio 8.14.** Un campo magnético uniforme  $\vec{B} = (-3.00\hat{i} - 4.50\hat{j} + 1.00\hat{k})\text{ T}$  es aplicado a una bobina de 25 vueltas, como se muestra en la figura 8.28. Por la bobina de área

$3.20 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  circula una corriente de 3.00 A. Evaluar la energía y el torque debido al campo magnético.

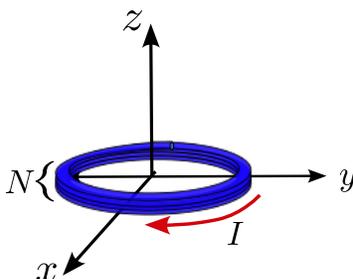


Figura 8.28: Ejercicio 8.14. Torque y momento dipolar magnético sobre una bobina circular de N espiras.

**Ejercicio 8.15.** Por la espira rectangular de la figura 8.29 circula una corriente de 2.50 A. La espira está sometida a un campo magnético uniforme de 1.50 T. Determinar la energía y el torque debido al campo.

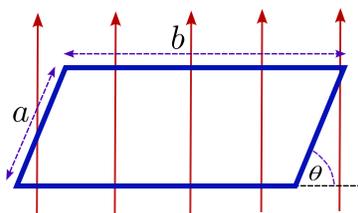


Figura 8.29: Ejercicio 8.15. Energía y torque sobre una espira.

**Pregunta 8.1.** Dos conductores paralelos de longitud infinita, separados por una distancia  $d$  llevan un flujo de corriente en la misma dirección. Para la situación planteada, se puede decir que la dirección de la fuerza magnética entre los conductores es:

- Paralela a los conductores.
- Perpendicular al eje de los conductores y repulsiva.
- Perpendicular al eje de los conductores y atractiva.
- No existe fuerza magnética entre ellos.

**Pregunta 8.2.** A lo largo del eje  $y$ , se extiende un cable delgado infinito que lleva una corriente  $I$ . A una distancia  $d$  a la derecha de dicho cable se ubica un electrón que a un tiempo  $t$  lleva una velocidad en dirección  $x$  ( $\hat{i}$ ). Para la situación descrita anteriormente, la fuerza magnética sobre el electrón al tiempo  $t$ , tendrá la dirección dada por:

- Saliendo de la página (dirección  $\hat{k}$ ).
- Dirección positiva en el eje  $x$  ( $\hat{i}$ ).
- Dirección negativa respecto al eje  $x$  ( $-\hat{i}$ ).
- Dirección negativa respecto al eje  $y$  ( $-\hat{j}$ ).

e) Dirección positiva respecto al eje  $y$  ( $\hat{j}$ ).

**Pregunta 8.3.** Se tiene un resorte metálico de longitud natural  $L_0$  y constante elástica  $k$ . Si se hace pasar una corriente  $I$  sobre el resorte, ¿que le sucede a la longitud del resorte?

a) Se comprime.

b) Se estira.

c) No se afecta.

d) El resorte comienza a girar.

*Ayuda:* Analice la dirección de la interacción magnética entre dos espiras contiguas.

**Pregunta 8.4.** Se tiene una espira circular que lleva una corriente  $I$  ubicada en una región donde existe un campo magnético uniforme. ¿En que dirección se debe orientar el plano de la espira en relación a la dirección del campo magnético de tal manera que no exista un momento de torsión sobre ella?

a) Formando un ángulo de  $45^\circ$ .

b) Formando un ángulo de  $30^\circ$ .

c) Con el plano de la espira paralelo a la dirección del campo.

d) Con el plano de la espira perpendicular a la dirección del campo magnético.

# 9– Campo magnético

---

## 9.1. Campo magnético de una carga en movimiento

Como se explicó en la sección anterior, las fuentes de campo magnético son cargas en movimiento. La intensidad de campo magnético calculada en el punto  $\vec{r}$ , que genera una carga  $q'$  ubicada en la posición  $\vec{r}'$  con velocidad  $\vec{v}'$ , viene dada por la expresión:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (9.1)$$

donde  $\mu_0$  es una constante, cuyo valor es:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}. \quad (9.2)$$

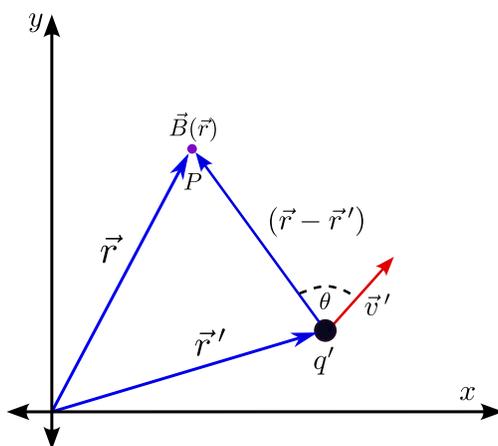


Figura 9.1: Campo magnético ejercido por una carga puntual en movimiento.

La figura 9.1 muestra una carga  $q'$  con velocidad  $\vec{v}'$ , la cual genera un campo magnético en la posición  $\vec{r}$ . A partir de los vectores esquematizados en la figura 9.1 se puede establecer que el vector de campo magnético en el punto  $\vec{r}$  generado por una carga  $q' > 0$ , apunta hacia afuera de la página (se representa por un punto púrpura en la figura 9.1). De la ecuación (9.1) y tomando en cuenta la figura 9.1, se puede determinar que el campo magnético sale

de la página perpendicularmente (dirección  $\hat{k}$ ). Dicha dirección se mantendría siempre que el ángulo  $\theta$  (ángulo entre el vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y  $\vec{v}'$ ) sea menor que  $\pi$ , pero si  $\pi < \theta < 2\pi$ , el campo tendría dirección  $-\hat{k}$  (ya que  $\sin \theta < 0$  si  $\pi < \theta < 2\pi$ ). En el análisis anterior se ha asumido un valor de  $q' > 0$ , pero la ecuación (9.1) sigue siendo válida si  $q' < 0$ ; cuando se ponga explícitamente el signo de la carga, se corregirá la dirección del campo.

Si la carga en movimiento  $q'$  se ubica en el origen de coordenadas, entonces  $\vec{r}' = 0$ , y la expresión (9.1) toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q' \vec{v}' \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (9.3)$$

Como se observa de la expresión (9.1), el campo magnético  $\vec{B}$  depende de la velocidad de la carga  $q'$  y dado que la velocidad es una cantidad que depende del observador, el campo magnético dependerá también del sistema de referencia del observador. Si se establece un sistema de referencia para el observador que viaje a la misma velocidad que la carga que produce el campo, entonces el campo magnético será cero (ya que en dicho caso, el observador medirá una velocidad cero para la carga) y la carga solo generará campo eléctrico. En caso contrario (si el observador no viaja a la misma velocidad que la carga), la carga eléctrica generará campo eléctrico y magnético.

**Ejemplo 9.1.** Se tiene una carga  $q > 0$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  cuando se encuentra en la posición  $\vec{r}$ . Para la situación descrita, se encontrará el campo magnético en los puntos : a)  $\vec{r}_1$  y b)  $\vec{r}_2$  (ver figura 9.2).

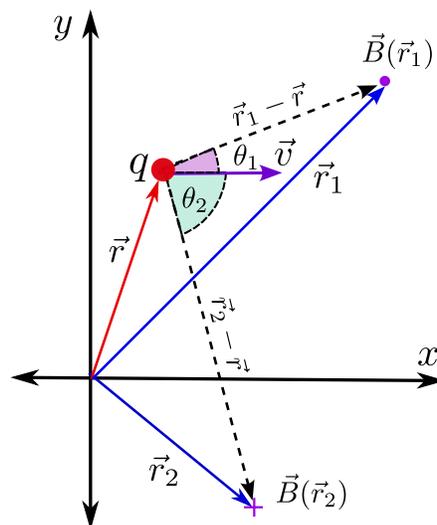


Figura 9.2: Ejemplo (9.2): Campo magnético producido por una carga puntual.

### Solución:

- a) A partir de la definición de campo eléctrico generado por una carga puntual (ec (9.1)), se tiene que el campo magnético en  $\vec{r}_1$  será:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}|^3}, \quad (9.4)$$

La dirección de  $\vec{B}(\vec{r}_1)$  se puede determinar a partir de algún recurso mnemotécnico definido para evaluar la dirección del producto cruz entre los vectores  $\vec{v}$  y  $(\vec{r}_1 - \vec{r})$ . Aplicando la regla de la mano derecha, en este caso se observa que la dirección del campo magnético es  $\hat{k}$ , por lo tanto, el campo magnético será:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 |q\vec{v} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})|}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \hat{k} = \frac{\mu_0 qv}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}|^2} \text{sen } \theta_1 \hat{k}, \quad (9.5)$$

donde  $\theta_1$  representa el ángulo entre el vector  $\vec{v}$  y el vector  $(\vec{r}_1 - \vec{r})$ .

- b) Para encontrar la dirección del campo magnético en el punto  $\vec{r}_2$  se debe establecer la dirección del producto cruz entre el vector  $\vec{v}$  y  $(\vec{r}_2 - \vec{r})$ , el cual según la figura 9.1 y la regla de la mano derecha es igual a  $-\hat{k}$ , por lo tanto, el campo magnético será:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = -\frac{\mu_0 qv}{4\pi |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2} \text{sen } \theta_2 \hat{k}, \quad (9.6)$$

donde  $\theta_2$  representa el ángulo entre el vector  $\vec{v}$  y el vector  $(\vec{r}_2 - \vec{r})$ .

### 9.1.1. Campo magnético de un conductor lineal

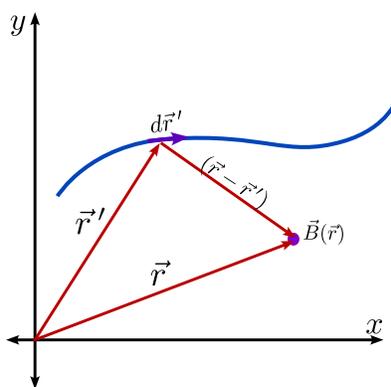


Figura 9.3: Campo magnético debido a un conductor lineal con flujo de corriente  $I$ .

Una corriente  $I$  se puede pensar como un flujo de cargas positivas que viajan por un conductor con una velocidad de deriva  $\vec{v}_d$ . Por lo tanto, para un conductor lineal, se puede escoger un elemento infinitesimal  $d\vec{r}'$  que contenga una carga  $dq'$  que se mueve a lo largo del conductor con una velocidad  $\vec{v}_d$ . A partir de lo anterior, es posible utilizando la ecuación (9.1) establecer el campo magnético  $d\vec{B}(\vec{r})$  generado por la carga  $dq'$  en movimiento en un punto  $\vec{r}$  del espacio, tal que:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq' \vec{v}_d \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (9.7)$$

donde  $\vec{r}'$  representa la posición de la carga  $dq'$ . Ahora, para  $dq'$  y  $\vec{v}_d$  se tiene que:  $dq' = \frac{dq'}{dt} dt$  y  $\vec{v}_d = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ , por lo tanto

$$dq' \vec{v}_d = \frac{dq'}{dt} dt \frac{d\vec{r}'}{dt} \equiv \frac{dq'}{dt} \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} dt \right) \equiv I' d\vec{r}'. \quad (9.8)$$

A partir de lo anterior, el campo magnético generado por un conductor lineal que lleva una corriente  $I'$ , se puede obtener al integrar la expresión (9.7), tal que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I' d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (9.9)$$

donde la integral en (9.9) se extiende sobre toda la longitud del conductor. Adicionalmente, la dirección del vector  $d\vec{r}'$  será la dirección de la velocidad de deriva de las partículas en movimiento dentro del conductor (asumiendo siempre cargas positivas o su equivalente); es decir,  $d\vec{r}'$  será tangente a la curva generada por el conductor y con orientación definida por el movimiento de las cargas positivas contenidas en este (o su equivalente si los portadores de carga son negativos). Para mostrar la aplicación de la ecuación (9.9), a continuación se presentan algunos ejemplos con diferentes configuraciones.

**Ejemplo 9.2.** La figura 9.4 muestra un conductor delgado de longitud  $L$ , que lleva una corriente  $I$  y densidad de corriente en dirección  $\hat{j}$ . Para tal situación se encontrará el campo magnético en un punto situado a una distancia horizontal  $a$  del conductor, como se indica en la figura 9.4.

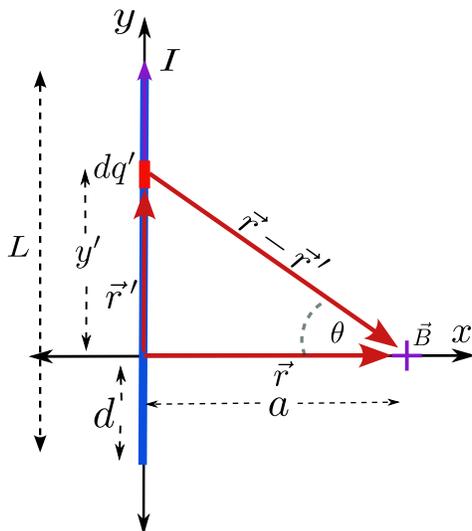


Figura 9.4: Campo magnético asociado a un conductor lineal recto e infinito.

**Solución:** Para utilizar la ecuación (9.9) en primer lugar se toma una sección del conductor con carga  $dq'$  y longitud  $d\vec{r}'$ , como se observa en la figura 9.4. El campo debido al elemento  $d\vec{r}'$  en el punto definido por el vector  $\vec{r} = a\hat{i}$ , vendrá dado por la ecuación (9.7) y su integral por (9.9). De los valores esquematizados en 9.4, se determina que:

$$\vec{r}' = y'\hat{j}, \quad (9.10)$$

$$\vec{r} = a\hat{i}, \quad (9.11)$$

de tal manera que

$$\vec{r} - \vec{r}' = a\hat{i} - y'\hat{j} \quad y \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + y'^2}. \quad (9.12)$$

Adicionalmente,  $d\vec{r}' = dy'\hat{j}$ , por lo tanto, el campo magnético se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I dy' \left( \hat{j} \times (a\hat{i} - y'\hat{j}) \right)}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_l \frac{dy' (\hat{j} \times \hat{i})}{(a^2 + y'^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

donde la distancia  $a$  y la corriente  $I$  han salido fuera de la integral por ser valores constantes. Ahora, ya que  $(\hat{j} \times \hat{i}) = -\hat{k}$ , la expresión (9.13) se puede escribir como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 a I}{4\pi} \left\{ \int_{-d}^{L-d} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} \right\} \hat{k}, \quad (9.14)$$

donde los límites de integración se han establecido observando la posición del punto inicial y final del conductor a lo largo del eje  $y$ . Ahora, teniendo en cuenta el resultado establecido en el apéndice (??) en la ecuación (??), se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-d}^{L-d} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2} \frac{y'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} \Big|_{-d}^{L-d} \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \frac{L-d}{\sqrt{a^2 + (L-d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right), \end{aligned} \quad (9.15)$$

con lo cual el campo magnético se escribe como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{L-d}{\sqrt{a^2 + (L-d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right\} \hat{k}. \quad (9.16)$$

Como se evidencia, el campo magnético se dirige hacia dentro de la página (tomando el eje  $z$  como aquel que corta perpendicularmente la página). Dado que el resultado expresado en (9.16) se obtuvo tomando  $\vec{r} = a\hat{i}$ , se puede inferir que si se evaluara el campo magnético a la izquierda del conductor, donde  $\vec{r} = -a\hat{i}$ , el campo magnético en dicho punto, estaría definido por (9.16) cambiando  $a \rightarrow -a$ , es decir:

$$\vec{B}(\vec{r} = -a\hat{i}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{L-d}{\sqrt{a^2 + (L-d)^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right\} \hat{k}; \quad (9.17)$$

es decir, el campo magnético a la izquierda del conductor se dirige hacia afuera de la página.

**Ejemplo 9.3.** A partir de la solución obtenida en el ejemplo (9.2) establecida en la ecuación (9.16), evaluar el campo magnético para los casos particulares: a)  $d = L/2$  y b)  $L \rightarrow \infty$ .

**Solución:**

a) Para el caso particular en el cual  $d = L/2$ , por reemplazo directo en la expresión (9.16) se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{L}{\sqrt{a^2 + (L)^2/4}} \right\} \hat{k}. \quad (9.18)$$

b) Si el conductor tuviera una longitud infinita ( $L \rightarrow \infty$ ), entonces

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{L}{\sqrt{a^2 + (L)^2/4}} \right\} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{L}{\sqrt{(L)^2/4}} \right\} = 2. \quad (9.19)$$

Reemplazando (9.19) en (9.18), se obtiene que el campo magnético generado a una distancia  $a$  (a la derecha del conductor) de un conductor infinitamente largo extendido sobre el eje  $y$  y que lleva una corriente  $I$ , cuyos portadores de carga se mueven en dirección  $\hat{j}$ , está dado por la expresión:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k}. \quad (9.20)$$

El campo magnético evaluado en un punto a la izquierda del conductor (y a una distancia  $a$  del mismo), vendrá dada por (cambiando  $a \rightarrow -a$  en (9.20)):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k}. \quad (9.21)$$

Al considerar un círculo de radio  $r$  en el plano  $xz$  centrado en el eje de un conductor lineal infinito (ver figura 9.5), se puede inferir que la magnitud del campo magnético generado por el conductor sobre cualquier punto a lo largo del círculo debe ser constante e igual a la magnitud del campo magnético deducido en (9.20) (cambiando  $a \rightarrow r$ ); es decir

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (9.22)$$

Por otra parte, la dirección del campo magnético, debe ser tal, que gire alrededor del conductor, como se observa en la figura 9.5 (lo cual se puede inferir a partir de los resultados expresados en (9.20) y (9.21)).

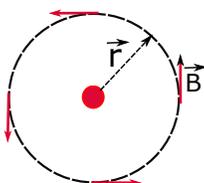


Figura 9.5: Campo magnético alrededor de un conductor recto que lleva una densidad de corriente hacia afuera de la página.

**Ejemplo 9.4.** Se tiene un conductor circular que lleva una corriente  $I$  cuyos portadores de carga se dirigen en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se observa en la figura 9.6. Para la situación descrita se evaluará el campo magnético en el centro del círculo definido por el conductor.

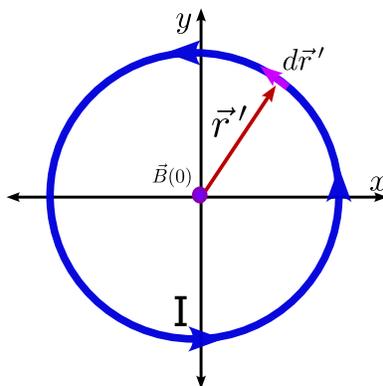


Figura 9.6: Campo magnético asociado a una espira circular.

**Solución:** Por facilidad en los cálculos en este ejemplo se tomará el origen de coordenadas en el centro del conductor circular y ya que el campo magnético se evaluará en dicho punto, se deberá tomar en la expresión (9.9) que  $\vec{r} = 0$ ; por lo tanto, el campo magnético vendrá dado por:

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I' d\vec{r}' \times (\vec{r}')}{r'^3}. \quad (9.23)$$

El vector  $d\vec{r}'$  es tangente en todo punto al círculo definido por el conductor y teniendo en cuenta la regla de la mano derecha, se tiene que:

$$\vec{dr}' \times \vec{r}' = -r' dr' \hat{k}. \quad (9.24)$$

El resultado anterior es independiente del elemento  $\vec{dr}'$  seleccionado a lo largo de la trayectoria circular, y por lo tanto, la dirección del producto  $\vec{dr}' \times \vec{r}'$  es constante en la integración para encontrar el campo magnético, tal que:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{dr}' \times \vec{r}')}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int \frac{I dr'}{r'^2} \right) \hat{k}. \quad (9.25)$$

Ya que en este caso, tanto la corriente, como la magnitud del vector  $\vec{r}'$  es constante ( $r'=R$ ), se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int \frac{I dr'}{r'^2} \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \left( \int dr' \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \left( \int_0^{2\pi} R d\theta \right) \hat{k}, \quad (9.26)$$

donde en la última igualdad de la expresión (9.26), se ha utilizado el hecho de que un elemento de arco  $dr'$  es igual al producto del radio  $R$  por  $d\theta$ , y ya que se tiene una espira circular, la integración va de 0 a  $2\pi$ , por tanto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}. \quad (9.27)$$

Si la dirección de la corriente se cambia (es decir, en sentido de las manecillas del reloj), cambiaría la dirección del campo, tal que  $\hat{k} \rightarrow -\hat{k}$ . De igual forma, si la espira no fuera un círculo completo, lo único que cambiaría en el cálculo anterior serían los límites de integración en (9.26), donde en lugar de  $2\pi$  se debería colocar el ángulo asociado al elemento de arco del conductor.

**Ejemplo 9.5.** Se tiene una espira circular de radio  $r$  cuyo plano coincide con el plano  $xy$ . El centro del anillo coincide con el origen del sistema de coordenadas. La espira conduce una corriente  $I$  en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para tal sistema se encontrará el campo magnético generado por el anillo sobre un punto a lo largo del eje  $z$  (ver figura 9.7).

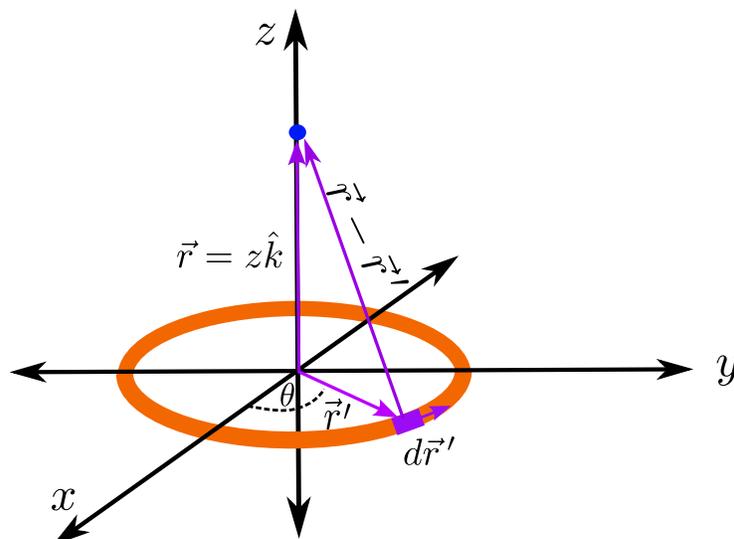


Figura 9.7: Campo magnético sobre el eje  $z$  asociado a una espira circular ubicada en el plano  $xy$ .

**Solución:** Para encontrar el campo magnético se toma un elemento  $d\vec{r}'$  sobre el anillo y se calcula el campo magnético que genera dicho elemento (que lleva una corriente  $I$ ) sobre un punto a lo largo del eje  $z$ . La posición del elemento  $d\vec{r}'$  respecto al origen de coordenadas, se encuentra a partir del vector de posición  $\vec{r}'$  y se tiene que:

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} \rightarrow d\vec{r}' = dx'\hat{i} + dy'\hat{j}, \quad (9.28)$$

La posición sobre un punto a lo largo del eje  $z$  se define a través del vector

$$\vec{r} = z\hat{k}, \quad (9.29)$$

con lo cual

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j}, \quad (9.30)$$

y

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} \\ &= \sqrt{R^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

A partir de lo anterior, la expresión (9.9) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I \left( dx'\hat{i} + dy'\hat{j} \right) \times \left( -x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k} \right)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Dado que la corriente  $I$  y el denominador  $(R^2 + z^2)^{3/2}$  son constantes de integración, se tiene que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_l \left\{ (dx'\hat{i} + dy'\hat{j}) \times (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) \right\}. \quad (9.33)$$

Para el integrando en la expresión (9.33) se tiene

$$\begin{aligned} (dx'\hat{i} + dy'\hat{j}) \times (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx' & dy' & 0 \\ -x' & -y' & z \end{vmatrix} \\ &= (zdy')\hat{i} - (zdx')\hat{j} + (-y'dx' + x'dy')\hat{k}, \end{aligned} \quad (9.34)$$

lo cual se puede simplificar al considerar que:  $x' = R \cos \theta \rightarrow dx' = -R \sin \theta d\theta$  y  $y' = R \sin \theta \rightarrow dy' = R \cos \theta d\theta$ , y se obtiene

$$(dx'\hat{i} + dy'\hat{j}) \times (-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}) = (zR \cos \theta d\theta)\hat{i} + (z \sin \theta d\theta)\hat{j} + R^2 d\theta \hat{k}. \quad (9.35)$$

Reemplazando la relación (9.35) en (9.33) se tiene que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left\{ (zR \cos \theta d\theta)\hat{i} + (z \sin \theta d\theta)\hat{j} + R^2 d\theta \hat{k} \right\}. \quad (9.36)$$

Las integrales a resolver son:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad (9.37)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0, \quad (9.38)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad (9.39)$$

con lo cual la expresión para el campo magnético en estudio toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} (R^2 2\pi \hat{k}), \quad (9.40)$$

y se obtiene finalmente que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (9.41)$$

**Ejemplo 9.6.** Para la espira descrita en la figura 9.8, se calculará en el campo magnético en el punto  $P$ , considerando que la espira lleva una corriente  $I$ .

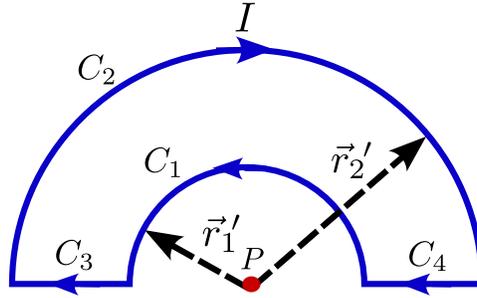


Figura 9.8: Ejemplo 9.6. Campo magnético en el centro de curvatura de una espira cerrada.

**Solución:** El campo magnético se determina a partir de,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (9.42)$$

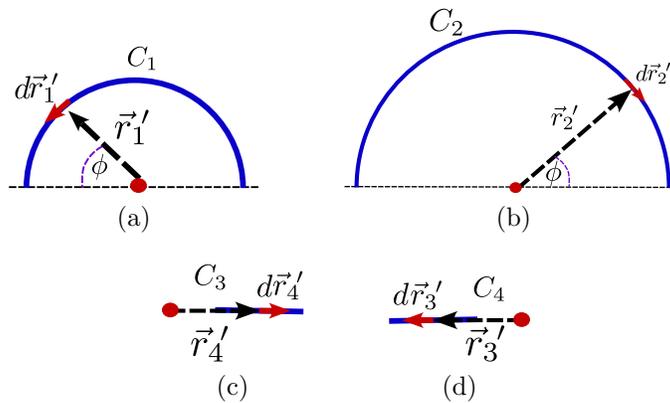


Figura 9.9: Ejemplo 9.6. Tramos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  asociados a la espira cerrada indicada en la figura 9.8.

Si se considera el origen de coordenadas en el punto  $P$  donde se evaluará el campo magnético, se cumple que

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad (9.43)$$

por lo tanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times (-\vec{r}')}{|-\vec{r}'|^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times \vec{r}'}{|\vec{r}'|^3}. \quad (9.44)$$

Separando el contorno de integración en las trayectorias  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , como se indica en la figura 9.9, el campo magnético se puede evaluar como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1}{|\vec{r}'_1|^3} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2}{|\vec{r}'_2|^3} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_3} \frac{d\vec{r}'_3 \times \vec{r}'_3}{|\vec{r}'_3|^3} \quad (9.45)$$

$$- \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_4} \frac{d\vec{r}'_4 \times \vec{r}'_4}{|\vec{r}'_4|^3}. \quad (9.46)$$

Para las trayectorias  $C_3$  y  $C_4$ , se determina que el vector de posición ( $\vec{r}'$ ) es paralelo al vector de desplazamiento ( $d\vec{r}'$ ), y por lo tanto, su producto cruz se anula. Debido a lo anterior, las contribuciones de los segmentos  $C_3$  y  $C_4$  al campo magnético en el punto  $P$  es nula. Por otra parte, para el cálculo del campo magnético generado por la trayectoria  $C_1$ , se tiene que el vector de posición  $\vec{r}'_1$  sobre un punto a lo largo de la trayectoria, se puede escribir como:

$$\vec{r}'_1 = R_1 (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \Rightarrow |\vec{r}'_1| = R_1 \Rightarrow d\vec{r}'_1 = R_1 d\phi (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}), \quad (9.47)$$

de manera que

$$d\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1 = -R_1^2 d\phi \hat{k}, \quad (9.48)$$

con lo cual

$$\int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1}{|\vec{r}'_1|^3} = - \int_0^\pi \frac{R_1^2 d\phi \hat{k}}{R_1^3} = -\frac{1}{R_1} \hat{k} \int_0^\pi d\phi = -\frac{\pi}{R_1} \hat{k}. \quad (9.49)$$

En el caso de la trayectoria  $C_2$  resulta que:

$$\vec{r}'_2 = R_2 (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}), \quad |\vec{r}'_2| = R_2, \quad d\vec{r}'_2 = R_2 d\phi (\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}), \quad (9.50)$$

lo que implica

$$d\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2 = R_2^2 d\phi \hat{k}, \quad (9.51)$$

entonces

$$\int_{C_2} \frac{d\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2}{|\vec{r}'_2|^3} = \int_0^\pi \frac{R_2^2 d\phi \hat{k}}{R_2^3} = \frac{1}{R_2} \hat{k} \int_0^\pi d\phi = \frac{\pi}{R_2} \hat{k}. \quad (9.52)$$

De manera que el campo magnético en el punto  $P$  debido al conductor es:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( -\frac{\pi}{R_1} \hat{k} \right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\pi}{R_2} \hat{k} \right) = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{k}. \quad (9.53)$$

**Ejemplo 9.7.** Se tiene un circuito cerrado formado por dos semicírculos de radios  $R_1$  y  $R_2$ , conectados por segmentos rectos (ver la figura 9.10). El circuito lleva una corriente  $I$  con un flujo en sentido de las manecillas del reloj. Para la situación planteada, se evaluará el campo magnético en el punto  $P$  siendo que  $R_1 > R_2$ .

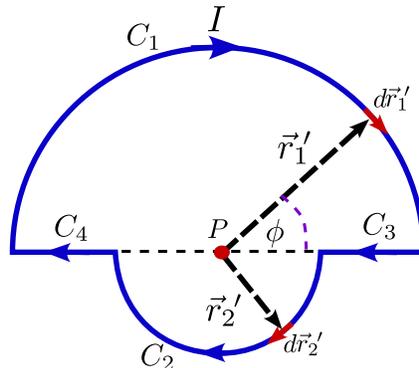


Figura 9.10: Ejemplo 9.7. Campo magnético en el centro de curvatura de una espira cerrada.

**Solución:** Para evaluar el campo magnético, la trayectoria cerrada se puede dividir en cuatro trayectorias: dos semi circulares y dos rectas, como se observa en la figura 9.10. Bajo la división en las trayectorias sugeridas, el campo se puede evaluar a través de:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times (\vec{r} - \vec{r}'_1)}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}'_2)}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^3} \\
 &\quad + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_3} \frac{d\vec{r}'_3 \times (\vec{r} - \vec{r}'_3)}{|\vec{r} - \vec{r}'_3|^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_4} \frac{d\vec{l}_4 \times (\vec{r} - \vec{r}'_4)}{|\vec{r} - \vec{r}'_4|^3}. \tag{9.54}
 \end{aligned}$$

Tomando el origen de coordenadas en el punto  $P$ , las trayectorias rectas no contribuyen al campo magnético, debido a que en todo punto el vector de posición es paralelo al vector de desplazamiento y por tanto las integrales en  $C_3$  y  $C_4$  se anulan. Además, al tomar el punto  $P$  como el origen de coordenadas se tiene que

$$\vec{r} = \vec{0}, \tag{9.55}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times (-\vec{r}'_1)}{|-\vec{r}'_1|^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}'_2 \times (-\vec{r}'_2)}{|-\vec{r}'_2|^3} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1}{|\vec{r}'_1|^3} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2}{|\vec{r}'_2|^3}. \tag{9.56}
 \end{aligned}$$

Bajo la configuración planteada, los vectores de posición y de desplazamiento para puntos a la largo de la trayectoria  $C_1$  y  $C_2$  serán:

$$\vec{r}'_1 = R_1 (\cos \hat{\phi} i + \sin \hat{\phi} j), \quad |\vec{r}'_1| = R_1, \quad d\vec{r}'_1 = R_1 d\phi (\sin \hat{\phi} i - \cos \hat{\phi} j), \tag{9.57}$$

$$\vec{r}'_2 = R_2 (\cos \hat{\phi} i + \sin \hat{\phi} j), \quad |\vec{r}'_2| = R_2, \quad d\vec{r}'_2 = R_2 d\phi (\sin \hat{\phi} i - \cos \hat{\phi} j), \tag{9.58}$$

con lo cual

$$d\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_1 = R_1^2 d\phi \hat{k}, \tag{9.59}$$

$$d\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2 = R_2^2 d\phi \hat{k}. \tag{9.60}$$

Entonces, el campo magnético debido a la espira es:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{r}'_1 \times \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}'_2 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{R_1^2 d\phi \hat{k}}{R_1^3} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{R_2^2 d\phi \hat{k}}{R_2^3} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R_1} \hat{k} \underbrace{\int_0^\pi d\phi}_\pi - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R_2} \hat{k} \underbrace{\int_\pi^{2\pi} d\phi}_\pi \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4} \frac{1}{R_1} \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4} \frac{1}{R_2} \hat{k} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{9.61}$$

**Ejemplo 9.8.** La figura 9.11 muestra dos alambres rectos paralelos separados por una distancia  $2a$ . Ambos llevan una corriente  $I$  con un flujo de cargas en el mismo sentido. Para el sistema planteado se evaluarán los campos magnéticos en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

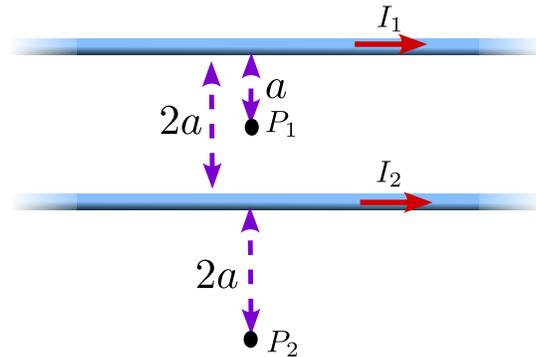


Figura 9.11: Ejemplo 9.8. Campo magnético asociado a dos cables rectos conductores.

**Solución:** La intensidad del campo magnético debido a un conductor largo y recto que transporta una corriente  $I$  es (ver ecuación (9.22)):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{9.62}$$

donde  $r$  es distancia radial medida perpendicularmente desde el eje conductor al punto donde se desea evaluar el campo. La dirección del campo lo va a determinar la regla de la mano derecha y para ello se va a considerar que los dos conductores definen un plano que coincide con el plano  $xy$ . Al considerar individualmente los dos puntos planteados en el ejemplo, se tiene que:

- Campo en el punto  $P_1$ : en  $P_1$ , la distancia de los conductores al punto es:

$$r_1 = a, \quad r_2 = a, \tag{9.63}$$

de manera que la magnitud del campo magnético asociada a cada conductor en el punto  $P_1$ , está dada por:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (9.64)$$

De la regla de la mano derecha se puede determinar que:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (-\hat{k}), \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\hat{k}), \quad (9.65)$$

con lo cual el campo magnético total es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k} = \vec{0}. \quad (9.66)$$

- Campo en el punto  $P_2$ : para este punto, se deduce que

$$r_1 = 4a, \quad r_2 = 2a, \quad (9.67)$$

y la magnitud de los campos magnéticos se expresan como:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} (-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I_1}{8\pi a} \hat{k}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} (-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a} \hat{k}. \quad (9.68)$$

Así, el campo magnético neto en este punto es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_1}{8\pi a} \hat{k} - \frac{\mu_0 I_2}{4\pi a} \hat{k} = -\frac{\mu_0}{8\pi a} (I_1 + 2I_2) \hat{k}. \quad (9.69)$$

**Ejemplo 9.9.** Se tiene tres conductores rectos y paralelos. Esquemáticamente, estos tres conductores atraviesan perpendicularmente el plano de la página, posicionándose en tres de las cuatro esquinas de un cuadrado de lado  $L$ , como se ilustra en la figura 9.12. Los tres conductores transportan una corriente  $I$ . Se calculará el campo magnético en el cuarto vértice del cuadrado en las siguientes situaciones: a) Todas las corrientes ingresan a la página. b) Las corrientes  $I_1$  e  $I_3$  ingresan a la página, mientras que  $I_2$  sale de ella. c) Las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  ingresan a la página y la corriente  $I_3$  sale.

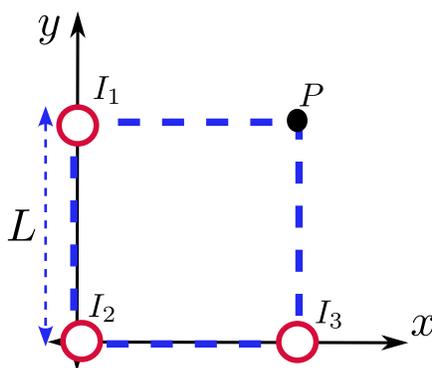


Figura 9.12: Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos.

**Solución:** Se caracterizará los campos magnéticos generados por cada conductor de la siguiente manera:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}, \quad (9.70)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{2}L}, \quad (9.71)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}. \quad (9.72)$$

Para los casos en consideración se tiene que:

- a) Todas las corrientes entrando a la página: Los campos magnéticos asociados se muestran en la figura 9.13.

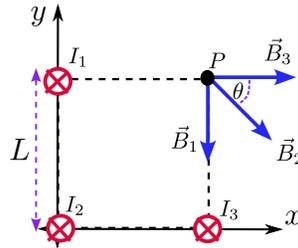


Figura 9.13: Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  entrando en la página.

Vectorialmente los campos se representan como:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} (-\hat{j}), \quad (9.73)$$

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} - B_{2y}\hat{j}, \quad (9.74)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i}. \quad (9.75)$$

Donde,

$$B_{2x} = B_2 \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi L} \cos \theta, \quad B_{2y} = B_2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi L} \sin \theta, \quad (9.76)$$

siendo que  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , se determina que,

$$B_{2x} = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi L} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}, \quad B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}, \quad (9.77)$$

con lo cual

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} - B_{2y}\hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} - \hat{j}). \quad (9.78)$$

Así, el campo magnético total en el punto  $P$  es:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{j} + \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} - \hat{j}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[ \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hat{i} - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hat{j} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left( \frac{3}{2} \hat{i} - \frac{3}{2} \hat{j} \right) \\
 &= \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{\pi L} (\hat{i} - \hat{j}).
 \end{aligned} \tag{9.79}$$

b) Las corrientes  $I_1$  e  $I_3$  entran a la página en tanto que la  $I_2$  sale de ella: Los campos magnéticos asociados se muestran en la figura 9.14. Vectorialmente los campos se representan como:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{j}, \tag{9.80}$$

$$\vec{B}_2 = -B_{2x} \hat{i} + B_{2y} \hat{j} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{i} + \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (-\hat{i} + \hat{j}), \tag{9.81}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i}. \tag{9.82}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{j} + \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (-\hat{i} + \hat{j}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \hat{i} + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \hat{j} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left( \frac{1}{2} \hat{i} - \frac{1}{2} \hat{j} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} - \hat{j}).
 \end{aligned} \tag{9.83}$$

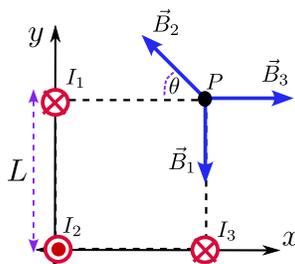


Figura 9.14: Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con  $I_1$ ,  $I_3$  entrando en la página e  $I_2$  saliendo.

c) Las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  entran a la página mientras que  $I_3$  sale: Los campos magnéticos asociados se muestran en la figura 9.15. Vectorialmente los campos se representan como:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{j}, \quad (9.84)$$

$$\vec{B}_2 = B_{2x} \hat{i} - B_{2y} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} - \hat{j}), \quad (9.85)$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i}. \quad (9.86)$$

De manera que

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \quad (9.87)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{j} + \frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} - \hat{j}) - \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \hat{i} \quad (9.88)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[ \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \hat{i} - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \hat{j} \right] \quad (9.89)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left( -\frac{1}{2} \hat{i} - \frac{3}{2} \hat{j} \right) \quad (9.90)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi L} (\hat{i} + 3\hat{j}). \quad (9.91)$$

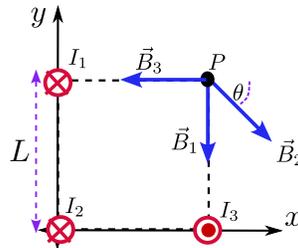


Figura 9.15: Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con  $I_1$ ,  $I_2$  entrando en la página e  $I_3$  saliendo.

**Ejemplo 9.10.** La corriente en un conductor largo y recto  $I_1$  interactúa con la corriente  $I_2$  que circula por una espira rectangular con lados  $a$  y  $l$ , la cual se encuentra inicialmente a una distancia  $c$  respecto al conductor recto, tal como se ilustra en la figura 9.16. Para el sistema planteado se calculará la fuerza magnética que el conductor recto ejerce sobre la espira.

**Solución:** Considerando que el flujo de corriente en el conductor recto se da en dirección  $\hat{j}$ , el campo magnético a la derecha de dicho conductor se puede escribir como:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k}), \quad (9.92)$$

donde  $x$  representa la distancia medida perpendicularmente a la derecha del conductor recto. La fuerza magnética que ejerce este campo sobre la espira rectangular es:

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint d\vec{r}' \times \vec{B}_1, \quad (9.93)$$

donde  $C$  representa la trayectoria rectangular definida por la espira y tomada en sentido de las manecillas del reloj (de acuerdo al flujo de corriente en dicha espira). La integración en  $C$  se puede dividir en cuatro tramos tal como se indica en la figura 9.16, con lo cual la fuerza magnética se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 = & I_2 \int_{C_1} d\vec{r}'_1 \times \vec{B}_1 + I_2 \int_{C_2} d\vec{r}'_2 \times \vec{B}_1 + I_2 \int_{C_3} d\vec{r}'_3 \times \vec{B}_1 \\ & + I_2 \int_{C_4} d\vec{r}'_4 \times \vec{B}_1. \end{aligned} \quad (9.94)$$

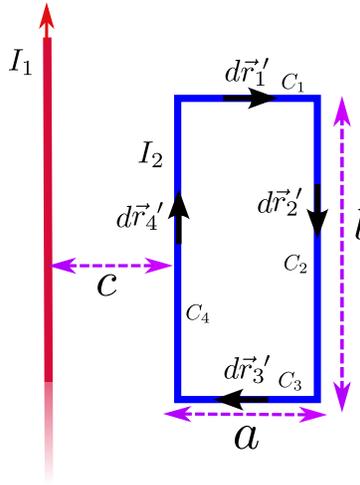


Figura 9.16: Ejemplo 9.10. Interacción magnética entre un cable recto y una espira.

Para cada una de las trayectorias se tiene que:

- Para el tramo  $C_1$  se tiene que:

$$d\vec{r}'_2 = dx\hat{i}, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\hat{k}), \quad (9.95)$$

entonces

$$d\vec{r}'_1 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j}. \quad (9.96)$$

- En el tramo  $C_2$  se tiene:

$$d\vec{r}'_2 = dz(-\hat{j}), \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c+a)}(-\hat{k}), \quad (9.97)$$

de manera que

$$d\vec{r}'_2 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c+a)} dz \hat{i}. \quad (9.98)$$

- Para el tramo  $C_3$  se tiene:

$$d\vec{r}'_3 = dx(-\hat{i}), \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\hat{k}), \quad (9.99)$$

con lo cual

$$d\vec{r}'_3 \times \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j}. \quad (9.100)$$

- Para el tramo  $C_4$  se tiene:

$$d\vec{r}'_4 = dz\hat{j}, \quad \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c}(-\hat{k}), \quad (9.101)$$

así que

$$d\vec{r}'_4 \times \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} dz(-\hat{i}). \quad (9.102)$$

Con lo cual la fuerza magnética es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{j} \underbrace{\int_c^{c+a} \frac{dx}{x}}_{\ln \frac{c+a}{c}} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c+a)} \hat{i} \underbrace{\int_0^l dy}_l - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{j} \underbrace{\int_c^{c+a} \frac{dx}{x}}_{\ln \frac{c+a}{c}} \\ &\quad - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi c} \hat{i} \underbrace{\int_0^l dy}_l \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \hat{j} + \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(c+a)} \hat{i} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \hat{j} \\ &\quad - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi c} \hat{i} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left( \frac{1}{c+a} - \frac{1}{c} \right) \hat{i} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left[ \frac{a}{c(c+a)} \right] \hat{i}. \end{aligned} \quad (9.103)$$

**Ejercicio 9.1.** Para el conductor de la figura 9.17 evaluar el campo magnético en el punto  $P$ .

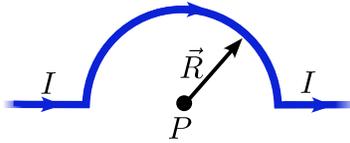


Figura 9.17: Ejercicio 9.1. Campo magnético debido a un conductor con dos segmentos rectos y un segmento semicircular.

**Ejercicio 9.2.** El circuito mostrado en la figura 9.18 consiste de dos arcos de radios  $a$  y  $b$  conectados por medio de dos segmentos rectos. El circuito lleva un flujo de corriente  $I$  en sentido de las manecillas del reloj. Evaluar el campo magnético en el punto  $P$  (centro de curvatura).

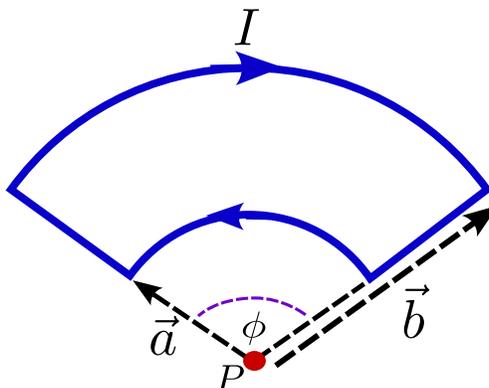


Figura 9.18: Ejercicio 9.2. Campo magnético debido a espira con dos segmentos rectos y dos arcos circulares.

**Ejercicio 9.3.** En la figura 9.19, se presentan dos cables paralelos, y uno de ellos tiene una curva semicircular con un radio  $R$ . Suponiendo que ambos cables transportan una corriente idéntica  $I$ , determinar la dirección del flujo de corriente en el cable recto y calcular la distancia entre las partes paralelas de los cables, de manera que el campo magnético en el punto  $P$ , señalado en la figura 9.19, sea nulo.

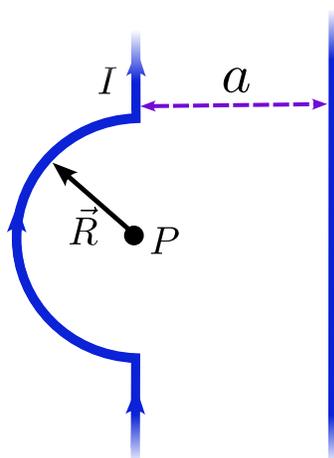


Figura 9.19: Ejercicio 9.3. Campo magnético debido a dos conductores.

**Ejercicio 9.4.** La figura 9.20 presenta dos conductores que transportan corriente. El alambre 1 lleva una corriente  $I_1$  y está compuesto por un arco de radio  $R_1$  y un segmento en forma de “V” (medido desde el centro de curvatura del arco) con una abertura angular de  $\theta$ . Por otro lado, el alambre 2 transporta una corriente  $I_2$  y se compone de dos segmentos rectos y un semicírculo de radio  $R_2$ . Tanto el arco del alambre 1 como el semicírculo del alambre 2, comparten el mismo centro de curvatura. Determinar la intensidad y la dirección de la corriente  $I_2$ , en función de  $I_1$ , de modo que el campo magnético neto en el centro del arco sea igual a cero.

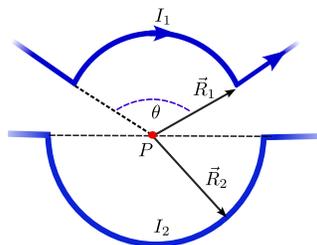


Figura 9.20: Ejercicio 9.4. Campo magnético debido a dos conductores con segmentos de arcos circulares.

**Ejercicio 9.5.** Resolver el Ejemplo 9.8 para el caso en que el flujo de corriente en cada conductor tengan sentidos opuestos.

**Ejercicio 9.6.** Tres conductores rectos y paralelos atraviesan perpendicularmente el plano de la página, tal como se muestra de manera esquemática en la figura 9.21. En el plano, estos alambres están situados en los vértices de un triángulo equilátero con lado  $L$ . Cada conductor transporta la misma corriente  $I$ . Los conductores esquematizados en la base del triángulo atraviesan el plano de la página entrando en ella, mientras que en el tercer conductor, el flujo de corriente, sale del plano. Calcular el campo magnético en el centro del triángulo.

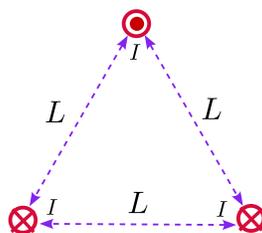


Figura 9.21: Ejercicio 9.6. Campo magnético debido a tres conductores rectos ubicados en los vértices de un triángulo.

## 9.2. Ley de Ampère

La Ley de Ampère es una de las leyes fundamentales del electromagnetismo y relaciona el campo magnético con la corriente eléctrica que lo produce. En su forma integral, la Ley de Ampère se enuncia de la siguiente manera: la circulación del campo magnético  $\vec{B}$  ( $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ) a lo largo de un camino cerrado es igual a la permeabilidad del medio  $\mu_0$  multiplicada por la corriente eléctrica total  $I_{enc}$  que atraviesa la superficie delimitada por ese camino cerrado. Matemáticamente, se expresa como:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}. \quad (9.104)$$

Algunas observaciones respecto a la ley de Ampère (9.104), son:

- La corriente  $I_{enc}$  se refiere a la corriente total que atraviesa el área definida por la trayectoria cerrada. La figura 9.22 muestra varias trayectorias cerradas que son

atravesadas por diferentes flujos de corrientes. Si se toma la trayectoria cerrada (a) de la figura 9.22, se puede establecer que  $I_{enc} = I_1$ . El flujo de corriente asociado a  $I_1$ , atraviesa “positivamente” el área encerrada por la trayectoria (a). Para la trayectoria (b),  $I_{enc} = (I_1 - I_2)$  (sale  $I_1$  y entra  $I_2$ ). Para la trayectoria (c),  $I_{enc} = (I_1 - I_2 + I_3)$  (sale  $I_1$  e  $I_3$  y sale  $I_2$ ). En este punto se debe entender que el área encerrada por una trayectoria cerrada no es única, lo cual se explicará más adelante.

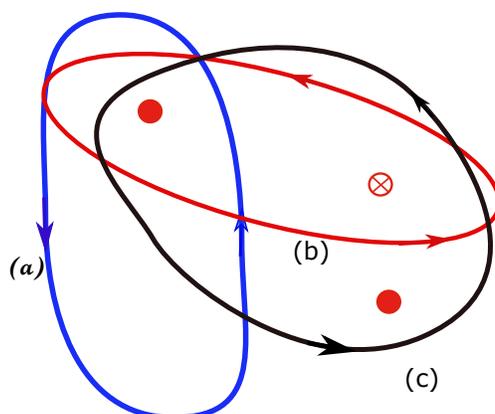


Figura 9.22: Ley de Ampère aplicada sobre cuatro trayectorias cerradas.

- El vector diferencial  $\vec{ds}$  en (9.104), sigue el sentido de la trayectoria cerrada, pero dicho sentido no está definido en la Ley de Ampère (es arbitrario). Si únicamente se está interesado en la corriente que atraviesa el área descrita por la trayectoria cerrada, basta en (9.104) considerar valores absolutos, con lo que la ambigüedad del sentido en la trayectoria carece de importancia. Por otra parte, si la trayectoria es plana (en dos dimensiones), se puede siempre dibujar la trayectoria en una hoja de papel, y elegir la orientación en contra de las manecillas del reloj. Entonces si el resultado de  $\oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$  es positivo, significa que la corriente atraviesa el área definida por la trayectoria “saliendo” del plano establecido por la hoja de papel, en caso contrario, si  $\oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} < 0$ , la corriente “entra” a la hoja de papel.
- El área encerrada por una trayectoria cerrada no es única. Por ejemplo, un círculo puede ser el límite de una semiesfera como también el límite de un círculo. La ambigüedad que resulta del área encerrada por una trayectoria cerrada exige un ajuste a la ley de Ampère establecida en la forma (9.104), lo cual se discutirá más adelante. Por ahora y hasta que se diga lo contrario, siempre que se hable de área encerrada por la trayectoria cerrada, se estará haciendo alusión a la más pequeña; en caso de una trayectoria circular, sería el área del círculo.

La ley de Ampère, al igual que la ley de Gauss, sirve en la práctica para determinar campos magnéticos de configuraciones con una alta simetría. Para aclarar su uso, se presentan a continuación algunos ejemplos.

**Ejemplo 9.11.** Se toma el caso del ejemplo (9.2), donde se tenía un conductor delgado infinito sobre el eje  $y$ , que llevaba una corriente  $I$  en dirección  $\hat{j}$ . Dada la simetría del problema, el campo magnético se puede encontrar haciendo uso de la ley de Ampère, para ello se utiliza como superficie de integración un círculo con centro en el eje del conductor y cuyo plano es perpendicular a dicho eje (eje  $y$  en este caso), como se observa en la figura 9.23 (en este caso el conductor puede ser cilíndrico con un cierto radio diferente de cero, siempre  $y$  cuando se mida el campo fuera del conductor).

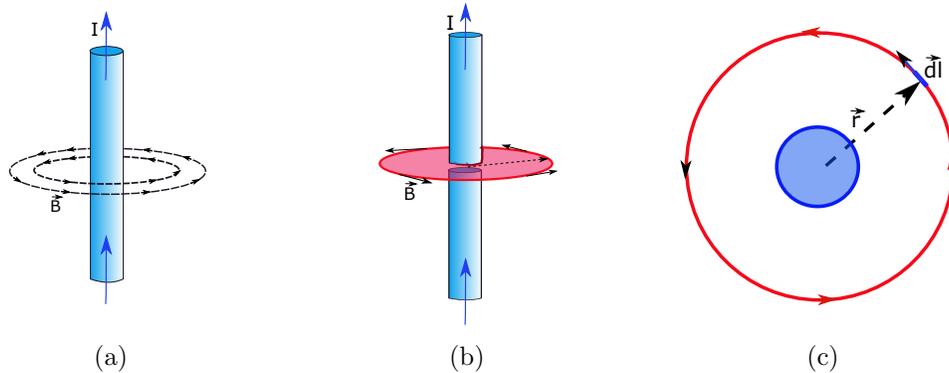


Figura 9.23: Campo magnético alrededor de un conductor recto e infinito.

**Solución:** Como se estableció en el ejemplo (9.2), el campo magnético es tangente a un círculo de radio  $r$  con centro en el eje de conductor y se dirige en sentido positivo (contra las manecillas del reloj) si la corriente sale del plano establecido por el círculo. Por lo anterior, como trayectoria cerrada de integración, se elige un círculo de radio  $r$  orientado positivamente y con origen en el eje del conductor. Con la anterior elección, el campo magnético en toda la trayectoria cerrada es paralelo al vector  $\vec{ds}$  (ya que  $\vec{ds}$  siempre es tangente a la trayectoria), por lo tanto,  $\vec{B} \cdot \vec{ds} = B ds$ . Adicionalmente, y por la simetría del problema, la magnitud del campo alrededor del círculo debe ser la misma (es decir, es constante en la integración), así que:

$$\oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oint_s (B ds) = B \oint ds = B 2\pi r. \quad (9.105)$$

En la anterior expresión se ha hecho uso que  $\vec{B}$  y  $\vec{ds}$  son paralelos, que  $B$  es constante y que la integral cerrada de un elemento de arco es el perímetro de la trayectoria, que en este caso es el perímetro de un círculo. Aplicando la ley de Ampère se tiene

$$B 2\pi r = \mu_0 I_{enc}, \quad (9.106)$$

y finalmente

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (9.107)$$

En (9.107) se ha establecido que la corriente encerrada por el círculo de integración ( $I_{enc}$ ), corresponde a la corriente total  $I$  que atraviesa el conductor.

**Ejemplo 9.12.** Se considera un conductor cilíndrico de radio  $R$  que lleva una corriente  $I$ , tal como lo muestra la figura 9.24. El campo magnético en un punto fuera del cilindro ( $r > R$ ) viene dado por la expresión (9.107) del ejemplo (9.11), ya que toda la corriente que circula por el cilindro atraviesa la trayectoria de radio  $r$  para  $r > R$ . En este ejemplo se va a encontrar el campo magnético para un punto dentro del cilindro  $r < R$ .

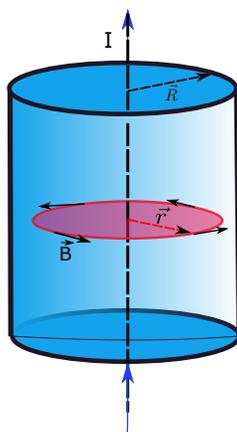


Figura 9.24: Campo magnético dentro de un conductor cilíndrico.

**Solución:** La trayectoria cerrada de integración que se utilizará para aplicar la ley de Ampère será un círculo de radio  $r < R$ , como se observa en la figura 9.24. Todas las condiciones del ejemplo (9.11) se aplican para este caso; es decir,  $\vec{B}$  y  $d\vec{s}$  son paralelas y el campo magnético es constante alrededor del círculo de integración, tal que:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_s (B ds) = B \oint_s ds = B 2\pi r. \quad (9.108)$$

Ahora, la corriente encerrada  $I_{enc}$  por la trayectoria de integración, ya no corresponde a la corriente total  $I$  que recorre el conductor, sino solamente una fracción de ella. Si se asume una corriente con densidad uniforme, que atraviesa el área transversal del conductor, la corriente encerrada por la superficie de radio  $r$  se puede encontrar aplicando una regla de tres simple. Si se tiene una corriente  $I$  para una área  $A = \pi R^2$ , la corriente para un área  $A' = \pi r^2$  se puede calcular a partir de:

$$I \rightarrow \pi R^2, \quad I_{enc} \rightarrow \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad I_{enc} = \frac{I r^2}{R^2}. \quad (9.109)$$

Por lo anterior, la ley de Ampère toma la forma:

$$B 2\pi r = \mu_0 I_{enc} = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \quad (9.110)$$

Como se observa de la última expresión, el campo magnético tiende a cero conforme  $r \rightarrow 0$ , y en el límite  $r \rightarrow R$ , las expresiones (9.107) y (9.110) son equivalentes.

**Ejemplo 9.13.** Un toroide es un devanado de espiras alrededor de un núcleo que en general es de metal. Un toroide con sección transversal circular se indica en la figura 9.25a). En este ejemplo se va a calcular el campo magnético en el centro del núcleo metálico de un toroide con sección transversal circular.

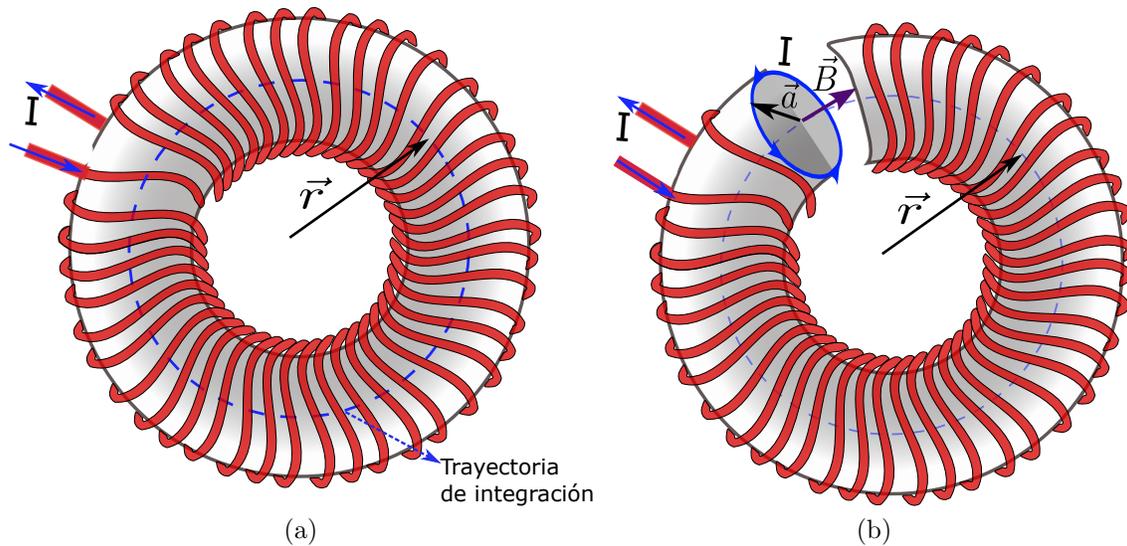


Figura 9.25: Ejemplo (9.13). Campo magnético dentro de un toroide.

**Solución:** El toroide en estudio tiene una sección transversal circular de radio  $a$  (ver figura 9.25b) que no se debe confundir con el radio  $r$ , que define el círculo medio del toroide. Se asume que el devanado es muy denso, de tal manera que si se corta transversalmente el toroide en cualquier lugar, el corte transversal indicaría una espira circular de corriente de radio  $a$  como se indica en la figura 9.25b). Desde la perspectiva de un corte transversal (figura 9.25b), se tiene una espira circular de corriente  $I$  con un flujo en sentido contrario a las manecillas del reloj, que genera un campo magnético en todo punto tangencial al círculo medio del toroide de radio  $r$  (perpendicular en todo punto a la sección transversal del toroide) y en sentido horario en relación al círculo de radio  $r$ . Por la simetría del problema, se establece que el campo magnético en cualquier punto en la parte central del toroide (círculo de radio  $r$ ) debe tener la misma magnitud. Por lo anterior, la trayectoria cerrada al aplicar la ley de Ampère debe ser un círculo que atraviese el centro del toroide (línea azul puntuada en la figura 9.26), y por lo tanto, el vector  $\vec{B}$  es anti-paralelo al vector  $\vec{dr}$  ( $\vec{dr}$  corresponde al vector tangencial a la línea azul puntuada en la figura 9.26 que apunta siempre en sentido anti-horario), y adicionalmente, la magnitud del campo  $\vec{B}$  es una constante en la integración. Por lo anterior, se tiene que:

$$\oint_s \vec{B} \cdot \vec{dr} = - \oint_s (B dr) = -B \oint_s dr = -B 2\pi r. \quad (9.111)$$

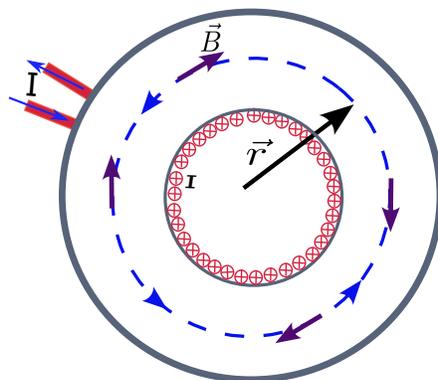


Figura 9.26: Ejemplo (9.13). Líneas de corriente que atraviesan un círculo de radio  $r$  en un toroide.

Ahora, se puede observar que el círculo de radio  $r$  es atravesado por  $N$  espiras (siendo  $N$  el número de espiras que rodean al toroide) y ya que cada espira lleva una corriente  $I$ , entonces la corriente total que atraviesa el círculo de radio  $r$  es  $NI$ ; es decir  $I_{enc} = -NI$  (el signo menos dado que la corriente entra en la página, ver figura 9.26), siendo  $I$  la corriente que circula por una sola espira. Con lo anterior se tiene que:

$$-B2\pi r = -\mu_0 NI, \quad (9.112)$$

y finalmente:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (9.113)$$

**Ejemplo 9.14.** Un solenoide es un devanado de espiras sobre una base en general metálica. La figura 9.27 indica un solenoide con una sección transversal circular. En este ejemplo se calculará el campo magnético en el interior de un solenoide (lejos de los extremos del mismo).

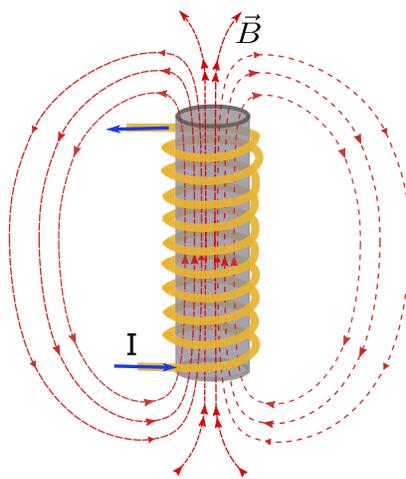


Figura 9.27: Ejemplo (9.14). Campo magnético asociado a un solenoide.

**Solución:** Si el solenoide se corta con un plano perpendicular a su eje de simetría, se observa una sección transversal circular. Desde esta perspectiva, aparece una espira circular con corriente  $I$ , a través de la cual pasa el campo magnético que atraviesa el área circular del solenoide. Generalmente, el campo magnético dentro del solenoide no es constante, lo que es evidente cerca de los bordes, donde las líneas del campo magnético se curvan (ver figura 9.27), lo que compromete la simetría necesaria para aplicar eficientemente la ley de Ampère. No obstante, si el solenoide es muy largo y se analiza una región alejada de los bordes, el campo permanece aproximadamente uniforme. Bajo estas condiciones, el campo fuera del solenoide es aproximadamente nulo y, en su interior, se presenta un campo uniforme, donde las líneas de campo son rectas que atraviesan la sección circular del solenoide (la magnitud y la dirección del campo son constantes). Esta simetría permite el uso de la ley de Ampère y sugiere una trayectoria de integración de forma rectangular. La figura 9.28 muestra un corte vertical del solenoide, donde se esquematiza la trayectoria rectangular que se utilizará en la integración de la ley de Ampère (con un lado mayor  $l_1$  y se asumirá un sentido antihorario). La integral se puede descomponer en cuatro integrales: Lado izquierdo ( $l_{iz}$ ), superior ( $l_{sup}$ ), derecho ( $l_{der}$ ) e inferior ( $l_{inf}$ ), tal que:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_{iz}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{sup}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{der}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{inf}} \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (9.114)$$

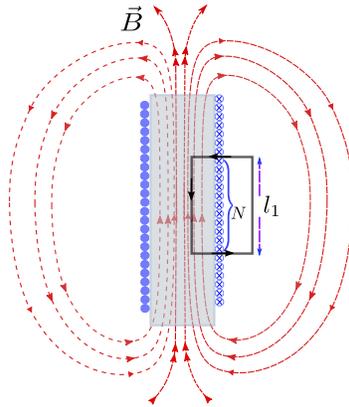


Figura 9.28: Trayectoria cerrada para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide.

La integral sobre el lado derecho de la trayectoria es cero, ya que el campo fuera del solenoide es cero. En los lados superior e inferior de la trayectoria, la integral también es cero, por dos razones diferentes a saber: 1) para el sector del lado superior (o inferior) que queda dentro del solenoide, el campo magnético es perpendicular al vector  $d\vec{r}'$  asociado al recorrido de la trayectoria rectangular y por lo tanto, el producto  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  se anula y 2) para el sector que queda fuera del solenoide, el campo magnético es cero. Con lo anterior, de las cuatro integrales solo es diferente de cero la primera, en la cual el vector de campo es anti paralelo a  $d\vec{l}$  y donde la magnitud del campo magnético es constante, por lo tanto:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{l_1} (B dl) = -B \int_0^{l_1} dl = -Bl_1. \quad (9.115)$$

Ahora, la integral anterior es proporcional a la corriente que atraviesa la trayectoria cerrada rectangular. Si el número de espiras es muy grande y se distribuye uniformemente sobre la longitud del solenoide, se puede definir una densidad de espiras dadas por:

$$n = \frac{N}{L}, \quad (9.116)$$

donde  $N$  corresponde al número total de espiras. Por lo tanto, el número de espiras envueltas sobre una longitud  $l_1$  del solenoide será:

$$N_1 = nl_1 \rightarrow n = \frac{N_1}{l_1}. \quad (9.117)$$

Se sabe que existen un número  $N_1$  de espiras que atraviesan el área rectangular y por tanto la sección rectangular es atravesada por una corriente total  $-N_1I$  (el signo menos, dado que la corriente ingresa hacia la página), tal que:

$$-Bl_1 = -\mu_0 N_1 I, \quad (9.118)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I \\ &= \mu_0 n I. \end{aligned} \quad (9.119)$$

**Ejemplo 9.15.** La figura 9.29 muestra la sección transversal de una bobina de  $N$  vueltas por la cual circula una corriente  $I$ . Para las trayectorias señaladas en la figura 9.29 se evaluará la circulación del campo magnético definido por la integral:

$$\int_C d\vec{r}' \cdot \vec{B} \quad (9.120)$$

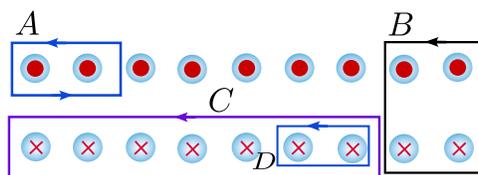


Figura 9.29: Ejemplo 9.15. Cálculo de circulación de campo magnético a través de cuatro trayectorias.

**Solución:** Matemáticamente, la ley de Ampère se define como:

$$\oint d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 I, \quad (9.121)$$

la cual establece que la circulación del campo magnético a lo largo de la trayectoria cerrada  $C$  es proporcional a la corriente neta que atraviesa la superficie generada por dicha trayectoria. Ahora, considerando como corrientes positivas aquellas que esquemáticamente salen de la página y negativas las que entran, para cada trayectoria en consideración, se tiene que:

- Trayectoria A:

$$\oint_A d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 (I + I) = 2\mu_0 I. \quad (9.122)$$

- Trayectoria B:

$$\oint_B d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 (I + I - I - I) = 0. \quad (9.123)$$

- Trayectoria C:

$$\oint_C d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 (-I - I - I - I - I - I - I) = -7\mu_0 I. \quad (9.124)$$

- Trayectoria D:

$$\oint_d d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 (-I - I) = -2\mu_0 I. \quad (9.125)$$

**Ejemplo 9.16.** Se tiene un cascarón cilíndrico de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ . El cascarón lleva una densidad de corriente  $J = C\rho^2$ , donde  $\rho$  corresponde a la distancia medida perpendicularmente desde el eje de simetría del cilindro a cualquier punto del espacio. La constante  $C$  tiene unidades de corriente sobre longitud a la cuarta potencia ( $A/L^4$ ). Para la configuración planteada se evaluará el campo magnético en cualquier región del espacio.

**Solución:** La distribución de corriente asociada posee simetría cilíndrica; es decir, para un valor  $\rho$  dado, la densidad de corriente es la misma. Las características asociadas al problema, permiten establecer que las líneas de campo magnético son círculos concéntricos con el eje de simetría del cascarón cilíndrico; es decir, a lo largo de un círculo de radio  $\rho$  el campo magnético debe ser constante. Lo anterior permite el uso de la ley de Ampère para el cálculo del campo magnético, tomando como trayectoria de integración círculos concéntricos al eje de simetría del cascarón.

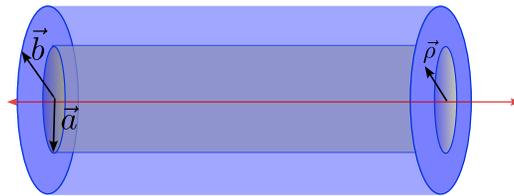


Figura 9.30: Ejemplo 9.16.

La ley de Ampère establece que:

$$\oint_C d\vec{r}' \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{enc}, \quad (9.126)$$

siendo  $C$  un círculo de radio  $\rho$ . El campo  $\vec{B}$  es tangente a la trayectoria en cada punto del círculo de integración (y por lo tanto, paralelo al vector  $d\vec{r}'$ ) y su intensidad se mantiene constante en cada punto de dicha trayectoria, de manera que

$$\oint_C d\vec{r}' \cdot \vec{B} = B \oint dl = B(2\pi\rho), \quad (9.127)$$

con lo cual:

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 I_{enc}, \quad (9.128)$$

El valor de  $\rho$  dependerá de la región en donde se desea determinar  $\vec{B}$ , por lo tanto, se necesita considerar las siguientes situaciones:

- Región  $\rho < a$ : En esta región se tiene que

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 I_{enc}, \quad (9.129)$$

Para un círculo de radio  $\rho < a$ , no existe corriente alguna que atraviese el área definida por la trayectoria circular y por lo tanto,  $I_{enc} = 0$ , y se tiene que

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 I_{enc} = 0, \quad (9.130)$$

lo que implica que

$$B = 0, \quad \text{para } \rho < a. \quad (9.131)$$

- Región  $a < \rho < b$ : En este caso  $I_{enc}$  corresponde a la corriente que atraviesa un disco de radio interior  $a$  y radio exterior  $\rho$ . Dado que la densidad de corriente no es constante, la corriente  $I_{enc}$  se calcula a partir de

$$I_{enc} = \int_A da' J, \quad (9.132)$$

donde la integral se evalúa sobre la superficie  $A$  asociada al disco de radio exterior  $\rho$  e interior  $a$ . Tomando el diferencial de área en coordenadas polares con radio  $\rho$  dado por:  $da' = \rho' d\rho' d\phi$ , se tiene que:

$$I_{enc} = \int_C da' J = \int_a^\rho \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\phi (C\rho'^2) = C \underbrace{\int_a^{\rho'} d\rho' \rho'^3}_{\frac{1}{4}(\rho'^4 - a^4)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \quad (9.133)$$

$$= \frac{C}{2} \pi (\rho^4 - a^4), \quad (9.134)$$

por tanto

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \frac{C}{2} \pi (\rho^4 - a^4), \quad (9.135)$$

con lo cual la magnitud del campo magnético es:

$$B = \mu_0 \frac{C}{4} \frac{(\rho^4 - a^4)}{\rho}, \quad \text{para } a < \rho < b. \quad (9.136)$$

- *Región  $\rho > b$ : En este caso, se debe evaluar la corriente que atraviesa el disco de radio exterior  $\rho > b$ , pero considerando que la densidad de corriente en la región  $\rho < a$  y  $\rho > b$  es cero, se cumple que:*

$$I_{enc} = \int_C da' J = \int_a^b \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\phi C \rho'^2 = C \underbrace{\int_a^b d\rho' \rho'^3}_{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \quad (9.137)$$

$$= \frac{C}{2} \pi (b^4 - a^4). \quad (9.138)$$

Entonces,

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \frac{C}{2} \pi (b^4 - a^4), \quad (9.139)$$

lo que implica que el campo magnético es:

$$B = \mu_0 \frac{C (b^4 - a^4)}{4 \rho}, \quad \text{para } \rho > b. \quad (9.140)$$

**Ejercicio 9.7.** *Evaluar la circulación del campo magnético para las trayectorias consideradas en la figura 9.31.*

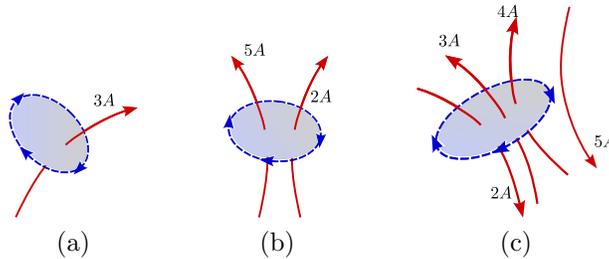


Figura 9.31: Ejercicio 9.7. Circulación a través de tres espiras circulares.

**Ejercicio 9.8.** *Un cilindro recto, sólido y con su eje de simetría orientado a lo largo del eje  $z$ , conduce una corriente cuya densidad se distribuye de manera no uniforme, y está dada por:*

$$\vec{J} = \begin{cases} \frac{2I_0}{\pi a^2} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \right] \hat{k} & \text{para } \rho \leq a, \\ 0 & \text{para } \rho \geq a. \end{cases} \quad (9.141)$$

donde  $a$  es el radio del cilindro,  $\rho$  es la distancia radial medida desde el eje del cilindro e  $I_0$  es una constante que se mide en amperios. Calcular la corriente total que pasa por toda la sección transversal del alambre. Evaluar el campo magnético dentro y fuera del alambre.

**Ejercicio 9.9.** *La figura 9.32 muestra dos cables coaxiales, largos, cilíndricos y concéntricos por los cuales circula la misma corriente  $I$  pero en sentidos opuestos. Asumiendo que las corrientes se distribuyen de manera uniforme, evaluar el campo magnético en las regiones: a)  $\rho \leq r_1$ , b)  $r_1 \leq \rho \leq r_2$ , c)  $r_2 \leq \rho \leq r_3$  y d)  $\rho \geq r_3$ .*

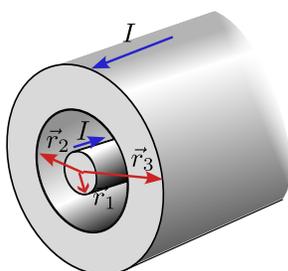


Figura 9.32: Ejercicio 9.9. Cables coaxiales con corriente  $I$ .

### 9.2.1. Corriente de desplazamiento

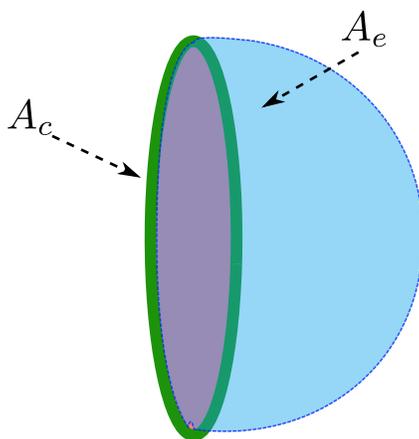


Figura 9.33: Dos posibles superficies limitadas por una circunferencia.

Una trayectoria cerrada puede servir como límite para infinitas superficies. Por ejemplo, la figura 9.33 muestra un anillo verde que limita dos superficies distintas: 1) el área circular dentro del anillo (sombreada en gris) y 2) el área de una semiesfera que también tiene el anillo como límite (sombreada en azul). Aunque se han dibujado estas dos superficies, se podrían definir infinitas más.

La ambigüedad asociada a definir qué superficie es la apropiada para una trayectoria cerrada, plantea un desafío en la interpretación de la ley de Ampère. Para abordar este problema, se considera el ejemplo de un capacitor de placas paralelas en proceso de carga, ilustrado en la figura 9.34. En este caso, hay una corriente de conducción  $I_c$  en los conductores que conectan las placas del capacitor. Si se traza una trayectoria circular alrededor de uno de estos conductores (representada en verde en la figura 9.34) y se aplica la ley de Ampère al área encerrada por el círculo  $A_c$  (en gris), se obtiene:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_c, \quad (9.142)$$

donde  $I_c$  es la corriente que atraviesa el área  $A_c$ . Sin embargo, si se considera que el área encerrada es la de una semiesfera  $A_e$  (en azul), que no es atravesada por la corriente de conducción, la corriente encerrada en la ley de Ampère parece ser cero:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (9.143)$$

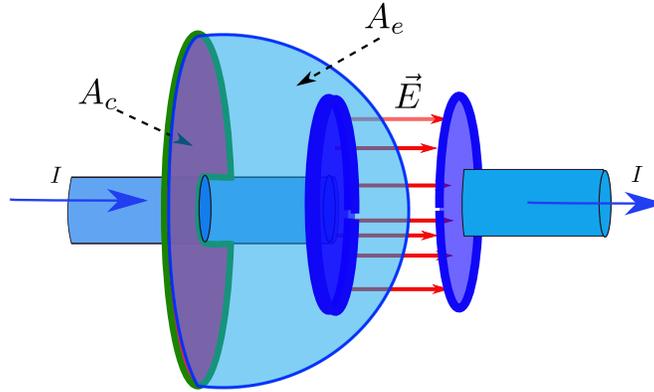


Figura 9.34: Corriente de conducción y corriente de desplazamiento.

Dado que ambas integrales (9.142) y (9.143) consideran la misma trayectoria cerrada, los resultados deberían coincidir. Para resolver esta ambigüedad, es necesario realizar un ajuste a la ley de Ampère, para lo cual se considerará el caso de un capacitor de placas paralelas que se encuentre en proceso de carga.

Entre las placas del capacitor, un campo eléctrico variable genera un flujo eléctrico sobre el área de la semiesfera  $A_e$ . Considerando la ley de Gauss, es claro que el flujo eléctrico tiene unidades de  $q/\epsilon_0$ , entonces la variación temporal de este flujo tiene unidades equivalentes a Amperios/ $\epsilon_0$ . El producto de la derivada del flujo respecto al tiempo y  $\epsilon_0$  tiene unidades de corriente y se define como corriente de desplazamiento  $I_D$ , que se escribe como:

$$I_D \equiv \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (9.144)$$

Puede demostrarse que esta corriente de desplazamiento es igual a la corriente de conducción durante la carga del capacitor. Así, al considerar la semiesfera, la ecuación (9.143) se ajusta a:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (9.145)$$

En conclusión, para resolver la ambigüedad sobre la superficie en la ley de Ampère, se debe modificar la corriente total en la ecuación original para incluir la corriente de desplazamiento, tal que la ley de Ampère se debe escribir como:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (9.146)$$

En el ejemplo de la figura 9.34, para el área plana circular, la corriente que atraviesa es la de conducción  $I_c$  y la corriente de desplazamiento  $I_D$  es cero. Por otro lado, para la superficie semiesférica, la corriente de conducción es cero, pero existe  $I_D$ . Esta equivalencia corrige la ambigüedad en la ley de Ampère.

**Pregunta 9.1.** *Se tiene un alambre infinito extendido sobre el eje  $y$ . El alambre lleva una corriente eléctrica  $I$  en dirección  $\hat{j}$ . A una distancia  $x$  a la derecha del alambre el campo magnético es  $B$ . Si la distancia  $x$  se duplica, respecto a la magnitud del campo magnético se puede decir que:*

- a) *Se duplica.*
- b) *Se reduce a la mitad.*
- c) *No se altera.*
- d) *Disminuye pero faltan datos para determinar la proporción.*

**Pregunta 9.2.** *Se tiene una espira cuadrada que se puede esquematizar en el plano de una hoja y la cual lleva una densidad de corriente que fluye en sentido de las manecillas del reloj. Para la situación descrita, respecto al campo eléctrico al interior de la espira se puede decir que:*

- a) *La magnitud del campo magnético es constante en cualquier punto al interior de la espira.*
- b) *El campo magnético es nulo.*
- c) *El campo magnético atraviesa el plano de la hoja perpendicularmente saliendo de ella.*
- d) *El campo magnético atraviesa el plano de la hoja perpendicularmente entrando hacia ella.*

**Pregunta 9.3.** *Respecto al campo magnético al interior de un solenoide con  $N$  espiras que llevan una corriente  $I$ , no se puede decir que:*

- a) *Es aproximadamente constante en las regiones lejos de los bordes.*
- b) *Depende de la densidad de espiras.*
- c) *Se anula cerca del eje del solenoide.*
- d) *Pierde uniformidad cerca de los bordes.*

**Pregunta 9.4.** *Se tiene un cable cilíndrico infinito de sección transversal circular de radio  $R$  que lleva una corriente  $I$ . Respecto al campo magnético generado por el conductor en consideración se puede decir que:*

- a) Es cero en los puntos interiores del cilindro.*
- b) Para puntos exteriores al cilindro, el campo aumenta conforme aumenta la distancia al eje del cilindro.*
- c) Para puntos interiores al cilindro, el campo aumenta conforme aumenta la distancia al eje del cilindro.*
- d) Es constante en puntos interiores al cilindro.*

# 10– Ley de inducción electromagnética

---

Antes de entrar en el tema central de este capítulo, es necesario definir y entender el concepto de flujo magnético, que en forma análoga al flujo eléctrico, se define como:

$$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (10.1)$$

El flujo magnético se puede entender como el número de “líneas” de campo magnético que atraviesan el área  $A$  en un cierto tiempo. Si el vector de campo magnético es constante sobre el área  $A$ , entonces la expresión (10.1) se puede escribir como:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \theta. \quad (10.2)$$

En la expresión (10.1), el vector  $d\vec{A}$  representa un vector de área con magnitud  $dA$  y orientado perpendicularmente al plano del área definida por  $dA$ . Teniendo en cuenta la definición del producto interno, el ángulo  $\theta$  corresponde al ángulo entre el vector de campo magnético y el vector de área. Como se presentó en el capítulo de Ley de Gauss, el flujo eléctrico sobre una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por dicha superficie; sin embargo, en relación con el campo magnético no existen cargas aisladas como generadoras de campo magnético y por ello el flujo magnético calculado sobre una superficie cerrada es siempre cero; es decir:

$$\phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (10.3)$$

La ecuación (10.3) es el equivalente a la ley de Gauss para el campo magnético.

**Ejemplo 10.1.** *Se tiene un solenoide de radio  $R$  y de longitud  $L$  que lleva una corriente  $I$  como se muestra en la figura 10.1. Para la configuración planteada se determinará el flujo magnético a través de un disco de radio  $r > R$  cuyo eje de simetría coincide con el eje del solenoide como se observa en la figura 10.1.*

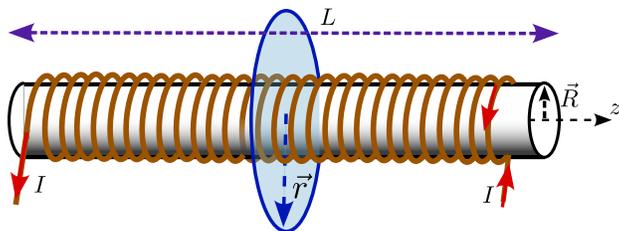


Figura 10.1: Ejemplo 10.1. Flujo magnético sobre un disco de radio  $R$ , debido a el campo magnético generado por un solenoide.

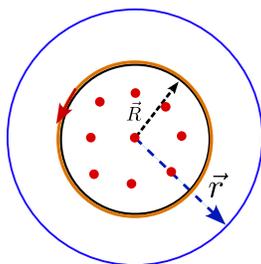


Figura 10.2: Ejemplo 10.1. Corte transversal para el sistema indicado en la figura 10.1.

**Solución:** Con el fin de evaluar el flujo magnético, se considera una vista de la sección transversal del solenoide, como se indica en la figura 10.2. En ella se muestra que el campo magnético está orientado saliendo perpendicularmente respecto al plano de la página (puntos rojos). Considerando que el solenoide es ideal, que el disco se ubica cerca del punto medio respecto a la longitud del solenoide y que el área ocupada por el disco fuera del solenoide no es muy grande, entonces el flujo a través del disco es exclusivamente producido por el campo magnético al interior del solenoide, el cual es uniforme y paralelo al eje de simetría. La intensidad de este campo se calculó en el ejemplo (9.14) y está dada por:

$$B = \mu_0 n I, \quad (10.4)$$

donde el parámetro  $n$  identifica el número de vueltas por unidad de longitud, que en términos de la información suministrada en el planteamiento del problema, se puede escribir como  $n = \frac{N}{L}$ , de manera que

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L}. \quad (10.5)$$

El flujo magnético es definido por:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (10.6)$$

donde  $S$  identifica la superficie del disco. Dada la simetría del problema en la cual  $\vec{B} = B\hat{k}$  y donde el eje del disco coincide con el eje de simetría del solenoide, se puede expresar:

$$d\vec{a} = da\hat{k}. \quad (10.7)$$

Ahora, siendo que el campo magnético está restringido a la región interior del solenoide (y que es aproximadamente uniforme al interior del solenoide, lejos de los bordes), el flujo magnético a través del disco de radio  $r > R$  es:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S B da = B \underbrace{\int_S da}_A = \left( \mu_0 \frac{NI}{L} \right) (\pi R^2) = \mu_0 \frac{\pi N I R^2}{L}. \quad (10.8)$$

**Ejemplo 10.2.** Se tiene un cascarón semiesférico cerrado de radio  $R$ , limitado por el área esférica  $S_2$  y el área plana  $S_1$ . El cascarón se ubica en una región donde existe un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  como se indica en la figura 10.3. Para el sistema planteado en este ejemplo se evaluará el flujo magnético a través de las áreas  $S_1$  y  $S_2$ .

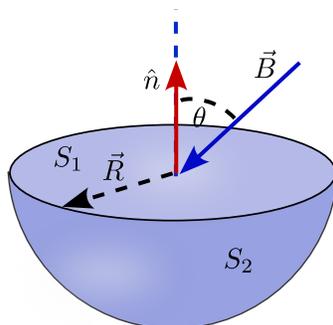


Figura 10.3: Ejemplo 10.2. Flujo magnético a través de un cascarón semiesférico.

**Solución:** EL flujo magnético a través de  $S_1$  se determina a partir de

$$\Phi_{B_{S_1}} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (10.9)$$

Ahora,

$$d\vec{a} = da \hat{n}_1, \quad (10.10)$$

donde  $\hat{n}_1$  es un vector unitario perpendicular al área plana  $S_1$  (ver figura 10.3), de tal manera que el flujo magnético a través del área  $S_1$  será:

$$\begin{aligned} \Phi_{B_{S_1}} &= \int_{S_1} \vec{B} \cdot (da \hat{n}_1) = \int_{S_1} B da \cos(\pi - \theta) = - \int_{S_1} B da \cos \theta = -B \cos \theta \int_{S_1} da \\ &= -B \cos \theta (\pi R^2) = -\pi B R^2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (10.11)$$

donde se ha tenido en cuenta que el ángulo entre el vector de campo magnético y el vector de área es  $(\pi - \theta)$ . Ahora, para evaluar el flujo magnético a través de  $S_2$  se puede utilizar el hecho que el flujo magnético total a través de una superficie cerrada siempre es cero, por lo tanto se tiene que:

$$\Phi_{B_{\text{hemisferio}}} = \Phi_{B_{S_1}} + \Phi_{B_{S_2}} = 0, \quad (10.12)$$

de manera que

$$\Phi_{B_{S_2}} = -\Phi_{B_{S_1}} = \pi B R^2 \cos \theta. \quad (10.13)$$

**Ejemplo 10.3.** La figura 10.4 muestra un conductor lineal infinito a lo largo del eje vertical, que lleva una corriente  $I$  en dirección  $\hat{j}$  (las cruces rojas en la figura, indican el campo magnético que apunta hacia dentro de la hoja, en el lado izquierdo del conductor infinito). A una distancia horizontal  $x_c$  del eje vertical, se ubica el centro de una espira rectangular de lados  $a$ ,  $b$ . De tal forma que el lado  $a$  se extiende horizontalmente y el lado  $b$  verticalmente. Para la configuración anterior se encontrará el flujo magnético sobre la espira rectangular.

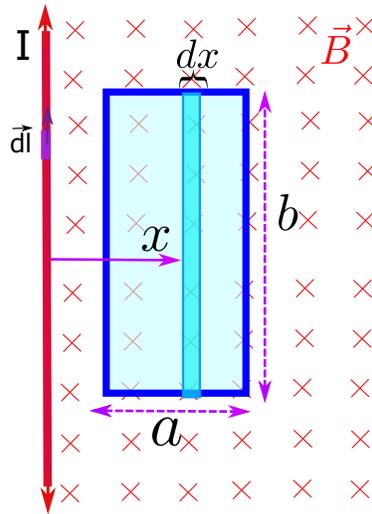


Figura 10.4: Ejemplo (10.3). Flujo magnético sobre una espira rectangular.

**Solución:** Ya que el campo no es uniforme sobre el área encerrada por la espira rectangular, no es posible calcular el flujo total directamente, se debe considerar primero un área de lado vertical  $b$  y ancho horizontal infinitesimal  $dx$  (ver figura 10.4), de tal forma que:

$$d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (10.14)$$

Ahora, el campo magnético a una distancia horizontal  $x$  del conductor infinito y en cualquier punto a la izquierda del conductor, está dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{k}). \quad (10.15)$$

A partir de (10.15), se puede evidenciar que en un área  $dA$  como la que se observa en la figura 10.4, el campo magnético es constante, ya que en todo punto a lo largo del eje vertical el campo magnético no cambia (el campo no depende de la posición vertical) y en el ancho  $dx$  se puede considerar que la variación de  $\vec{B}$  es despreciable. El vector  $d\vec{A}$  es perpendicular al plano del área en estudio, tal que:  $d\vec{A} = b dx (\hat{k})$ . Con lo expuesto anteriormente, la ecuación (10.14) se puede escribir como:

$$d\phi_B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx. \quad (10.16)$$

El flujo total a través de la espira rectangular, se obtiene integrando (10.16), tal que:

$$\begin{aligned}\phi_B &= -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{x_c - a/2}^{x_c + a/2} \frac{dx}{x}, \\ &= -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{x_c + a/2}{x_c - a/2} \right).\end{aligned}\quad (10.17)$$

El flujo magnético en este caso es negativo, debido a que se ha tomado el vector de área en dirección contraria al campo magnético.

**Ejercicio 10.1.** Resolver el Ejemplo 10.1 para el caso  $r < R$ .

**Ejercicio 10.2.** El cubo de lado de lado  $L$  que se muestra en la figura 10.5, se encuentra en una región donde existe un campo magnético no uniforme definido por la expresión:  $\vec{B} = (2x^2y\hat{i} + zx\hat{j} + y^2x^3\hat{k}) T$ . Calcular el flujo magnético en la cara del cubo definida por  $y = L$ .

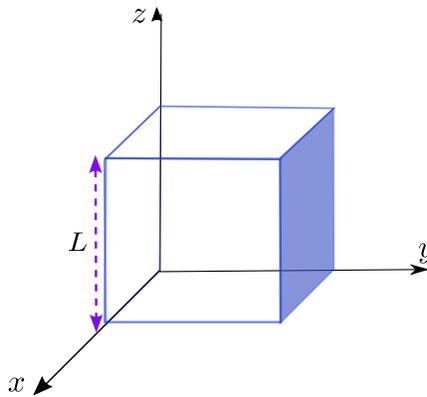


Figura 10.5: Ejercicio 10.2. Flujo magnético a través de la cara de un cubo, debido a un campo magnético externo no uniforme.

**Ejercicio 10.3.** Un largo solenoide de radio  $R_1$  que transporta una corriente  $I$  posee  $n$  vueltas por unidad de longitud. Una bobina circular de radio  $R_2$  y que tiene  $N$  vueltas es coaxial con el solenoide y equidistante de sus extremos. Encontrar el flujo magnético a través de la bobina si: a)  $R_2 > R_1$ , b)  $R_2 < R_1$ .

## 10.1. Ley de Faraday

En capítulos anteriores se estableció que en un circuito se puede generar corriente eléctrica mediante una fuente externa que imponga una diferencia de potencial. Otra manera de producir corriente eléctrica en un circuito cerrado es situándolo en una región donde existe un campo magnético. Si se logra establecer un flujo magnético variable en el tiempo a través de la espira, es posible generar una corriente en el circuito. Para que exista un flujo magnético variable a través del área encerrada por un circuito (y por lo tanto, una corriente inducida), y teniendo en cuenta que:

$$\phi_B = \int_A B dA \cos \theta, \quad (10.18)$$

se debe cumplir por lo menos una de las siguientes condiciones:

- Que la magnitud del campo magnético que atraviesa el área  $A$  encerrada por el circuito, cambie en el tiempo.
- Que el circuito sea flexible posibilitando que el área encerrada cambie su tamaño.
- Que el ángulo entre el vector de campo magnético  $\vec{B}$  y el área  $d\vec{A}$  cambie en el tiempo. Para que esto se cumpla, el vector de campo magnético y/o el vector de área pueden modificar su dirección.

Las anteriores condiciones conllevan a un cambio en el tiempo del flujo magnético que atraviesa el área  $A$ ; por lo tanto, un flujo magnético variable en el tiempo sobre el área limitada por un circuito cerrado, genera una corriente eléctrica sobre el circuito, lo cual se conoce como la ley de inducción de Faraday.

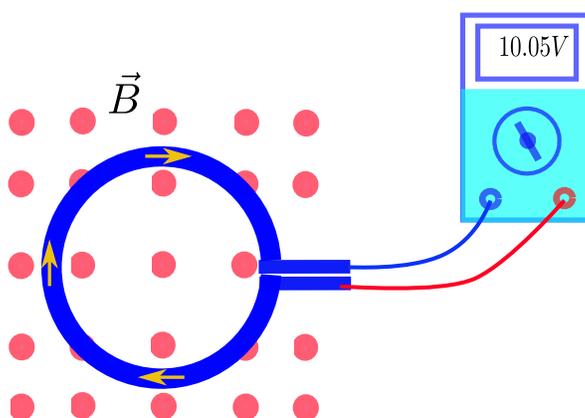


Figura 10.6: Espira cerrada en medio de un campo magnético en dirección  $\hat{k}$ , con una corriente y fem inducida por un aumento en el tiempo en el flujo magnético.

Para expresar matemáticamente la ley de inducción de Faraday, se va a tener en cuenta un circuito cerrado donde sus extremos se conecten a un voltímetro, como se observa en la figura 10.6 (donde la corriente esquematizada corresponde a un aumento de flujo magnético a través del área de la espira). Al existir un flujo magnético variable sobre el área encerrada por el circuito, el voltímetro mide una diferencia de potencial; es decir, el cambio en el flujo magnético produce una diferencia de potencial sobre el circuito. La diferencia de potencial que se obtiene en este proceso se denomina *Fuerza Electromagnética Inducida*, que a pesar de su nombre no es una fuerza, sino una diferencia de potencial que se denota por  $\varepsilon$ , y en forma simplificada se denomina *fem inducida*. Con lo anterior, una forma equivalente de enunciar

la ley de inducción de Faraday es: Una fem inducida se genera sobre un circuito cerrado, si existe un flujo magnético variable en el tiempo a través del área encerrada por el mismo, que matemáticamente se escribe como:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (10.19)$$

Si el circuito tiene una resistencia  $R$ , la corriente inducida en el circuito será:  $I_i = \varepsilon/R$ .

El signo menos en la expresión (10.19) no hace parte de la ley de inducción de Faraday, es un factor adicional que proviene de lo que se conoce como la *ley de Lenz*, la cual establece el sentido de la fem inducida y por tanto el sentido de la densidad de corriente en el circuito, lo cual se explicará con más detalle en la siguiente sección.

### 10.1.1. Ley de lenz

Como se explicó anteriormente, para que exista una corriente inducida sobre un circuito cerrado, debe haber un cambio en el flujo magnético a través del área encerrada por el circuito. A su vez y como se explicó en capítulos pasados, una corriente sobre un circuito genera un campo magnético, que en el caso de la corriente inducida se denomina campo magnético inducido (que es diferente al campo magnético externo). La dirección de la densidad de corriente asociada a la corriente inducida debe ser tal, que el campo magnético inducido tenga asociado un flujo magnético que busque compensar el cambio en el flujo magnético externo.

Para mejorar la comprensión de lo anteriormente expuesto, se va a considerar un ejemplo que consiste de un circuito cerrado representado por un círculo ubicado sobre el plano de una hoja y que se coloca en medio de un campo magnético externo orientado inicialmente en dirección  $\hat{k}$ , como se observa en la figura 10.6 (donde el campo magnético se ha representado por puntos rojos que simbolizan un campo que sale perpendicularmente del plano de la hoja). Partiendo del circuito esquematizado en la figura 10.6 y las condiciones iniciales descritas anteriormente, se pueden presentar las siguientes situaciones:

- La magnitud del campo magnético externo puede variar en el tiempo. Si la magnitud aumenta, la corriente inducida debe generar un campo magnético inducido contrario al campo magnético externo. La figura 10.7a representa un campo magnético externo que aumenta con respecto al tiempo produciendo una corriente sobre el circuito que genera un campo magnético inducido en contra del campo magnético externo. Si la magnitud disminuye, el campo magnético inducido debe tener la dirección del campo magnético externo. La figura 10.7b representa un campo magnético externo que disminuye con respecto al tiempo produciendo una corriente sobre el circuito que genera un campo magnético inducido a favor del campo magnético externo. En las dos figuras, el campo magnético externo se representa con flechas de color rojo, mientras que el inducido con flechas azules.

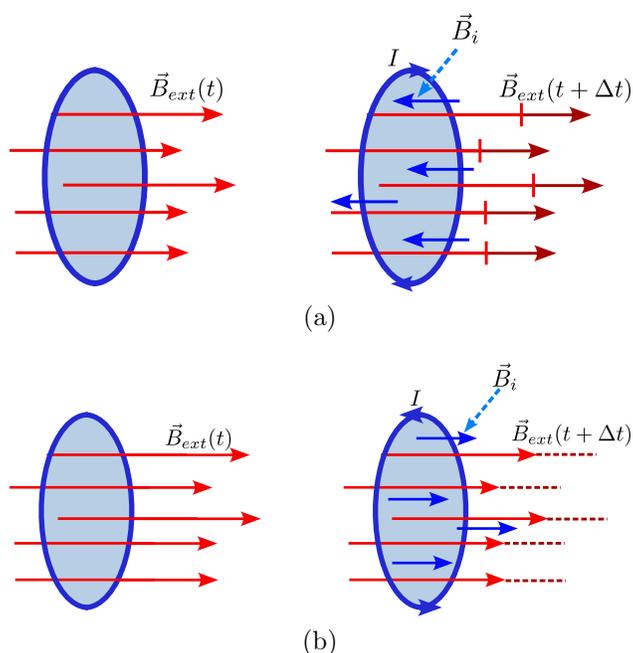


Figura 10.7: Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo.

- Un cambio en el tamaño del área encerrada por el circuito. Si el área aumenta (el flujo aumenta), la corriente inducida debe generar un campo en contra del campo magnético externo (ver figura 10.8a). Si el área disminuye (el flujo disminuye), la corriente inducida debe generar un campo magnético inducido en dirección del campo magnético externo (ver figura 10.8b). Siempre el campo magnético inducido trata de compensar el cambio producido en el flujo del campo magnético externo.

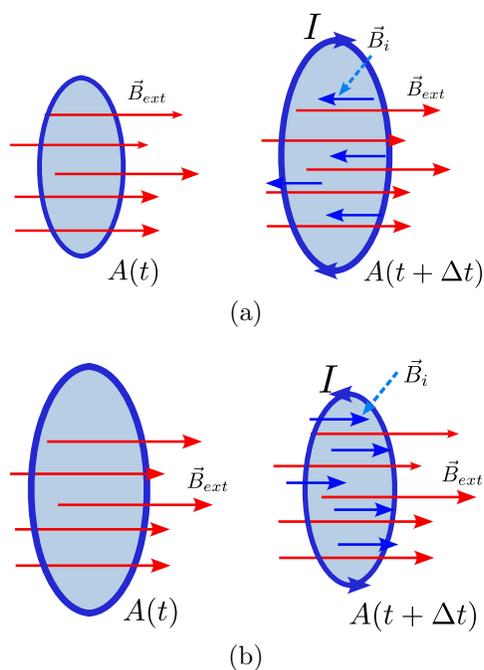


Figura 10.8: Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo.

- Si el ángulo entre el campo magnético externo y el vector de área aumenta, el flujo disminuye ( si  $\theta$  aumenta, entonces  $\cos \theta$  disminuye), y por tanto, la corriente inducida debe generar un campo magnético en dirección del vector de área, favoreciendo el flujo magnético a través de la espira (ver figura 10.9a). Si el ángulo disminuye el flujo aumenta y por tanto la corriente inducida debe generar un campo magnético inducido en sentido opuesto al vector de área (ver figura 10.9b). Nuevamente, el campo magnético inducido trata de compensar el cambio en el flujo del campo magnético externo.

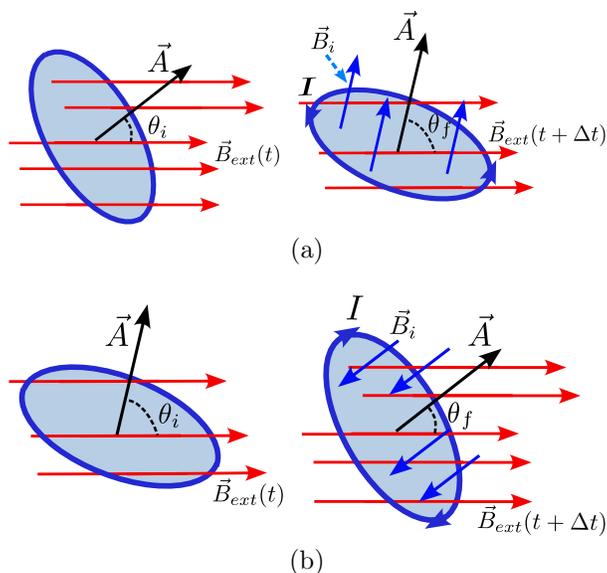


Figura 10.9: Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo.

Con el objetivo de mejorar el entendimiento de la ley de Lenz y de la ecuación (10.19), se presentan algunos ejemplos:

**Ejemplo 10.4.** Se tiene una espira cuadrada de longitud  $L$  ubicada en el interior de un circuito compuesto de una resistencia  $R$ , una fuente de voltaje  $V$ , un capacitor  $C$  y un interruptor  $S$ , el cual inicialmente se encuentra abierto (ver figura 10.10). Al tiempo cero el interruptor se cierra. Para la configuración planteada se encontrará el sentido del flujo de corriente eléctrica sobre la espira cuadrada.

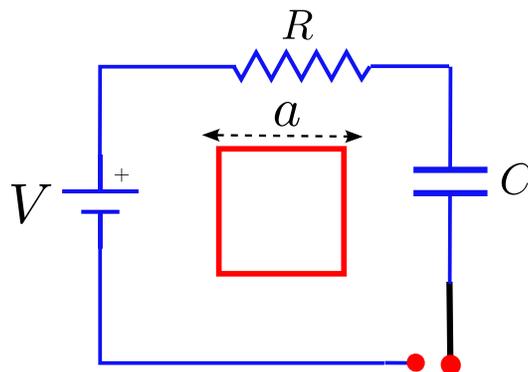


Figura 10.10: Ejemplo (10.4). Ley de Lenz aplicada a una espira cuadrada.

**Solución:** Al cerrar el interruptor el capacitor inicia un proceso de carga y por lo tanto, la corriente en el circuito vendrá dada por la expresión

$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}. \quad (10.20)$$

El sentido del flujo de corriente según la disposición de la fuente de voltaje, será el sentido de las manecillas del reloj. Ahora, la corriente  $I(t)$  genera un campo magnético, el cual en los puntos al interior del circuito tendrá una dirección que será perpendicular al plano de la hoja y entrando a la página. Lo anterior dado que, para cualquier punto al interior del circuito definido por el vector  $\vec{r}$  y cualquier elemento diferencial  $d\vec{r}'$  (el cual lleva la dirección del flujo de corriente  $I(t)$ ) a lo largo del circuito definido por la posición  $\vec{r}'$ , el producto  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$  tiene dirección  $\hat{k}$ , y corresponde a la dirección del campo magnético para cualquier punto al interior del circuito, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \left\{ \oint \frac{|d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} (-\hat{k}). \end{aligned} \quad (10.21)$$

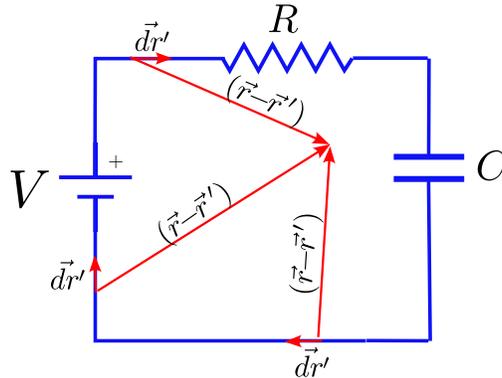


Figura 10.11: Ejemplo (10.4). Vector  $d\vec{r}'$  y  $\vec{r} - \vec{r}'$ , para tres puntos a lo largo del circuito. El producto  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$  tiene dirección  $-\hat{k}$ .

En la figura 10.11 se indican los vectores  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y  $d\vec{r}'$  para un punto dentro del circuito (definido por la posición  $\vec{r}$ ) y para tres puntos sobre el circuito (definidos por las posiciones  $\vec{r}'$ ). En los tres casos se puede verificar que la dirección del producto  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$  es  $-\hat{k}$ , aplicando la regla de la mano derecha o por cálculo algebraico directo. La expresión (10.21) establece que el campo magnético depende la corriente eléctrica  $I(t)$  y dado que la corriente disminuye con el tiempo, el campo magnético también disminuye con el tiempo, lo que conlleva a que el flujo magnético sobre la espira cuadrada disminuya. Teniendo en cuenta la ley de Lenz, se concluye que el flujo de corriente eléctrica inducida sobre la espira cuadrada debe llevar el sentido de las manecillas del reloj, para producir un flujo magnético inducido que favorezca el flujo magnético inicial (es decir, un campo magnético inducido en dirección  $-\hat{k}$ ).

**Ejemplo 10.5.** Una espira circular de alambre de radio  $R$ , se ubica en una región donde existe un campo magnético. Si la espira se esquematiza en una hoja de papel, el campo magnético se orienta de tal manera que ingresa a la hoja, como se observa en la figura 10.12. Para tal configuración se determinará el sentido de la corriente inducida en la espira cuando la magnitud del campo magnético aumenta o disminuye.

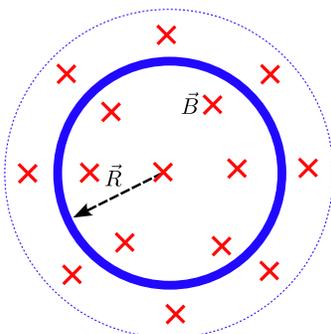


Figura 10.12: Ejemplo 10.5. Corriente inducida sobre una espira circular de radio  $R$  debida a un campo magnético variable en el tiempo.

**Solución:** El flujo magnético a través de la espira circular es:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S B da = B \underbrace{\int_S da}_{\pi R^2} = \pi R^2 B. \quad (10.22)$$

De manera que:

- Si el campo magnético aumenta, lo mismo ocurre con el flujo magnético. Por tanto, la corriente inducida en la espira deberá ser tal que mantenga constante el flujo. Esto se alcanza si la corriente inducida establece un campo magnético orientado hacia afuera de la página, lo cual se logra cuando la corriente inducida en la espira se orienta en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
- Ahora, si el campo magnético disminuye, el flujo magnético se reduce. Por tanto, el flujo magnético se mantiene constante si el campo generado por la corriente inducida apunta en la misma dirección del campo magnético externo. Así, la corriente inducida deberá orientarse en el sentido de las manecilla del reloj.

**Ejemplo 10.6.** Se tiene un conductor recto e infinito que lleva una corriente dada por la expresión:  $I(t) = I_0 e^{-bt}$ , donde  $b$  es una constante positiva. El conductor se extiende a lo largo del eje  $x$ . Adicionalmente, se ubica una espira conductora de radio  $R$  por debajo del conductor (como se indica en la figura 10.13). Para tal sistema se encontrará el sentido del flujo de la corriente inducida sobre la espira a un tiempo  $t > 0$ .

**Solución:** La magnitud del campo magnético generado por el conductor a una distancia  $|y|$  por debajo del conducto lineal, viene dada por:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2|y|} \hat{k}, \quad (10.23)$$

y teniendo en cuenta la expresión para la corriente en función del tiempo, se tiene que

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I_0 e^{-bt}}{2\pi|y|} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi|y|} \hat{\phi} e^{-bt}. \quad (10.24)$$

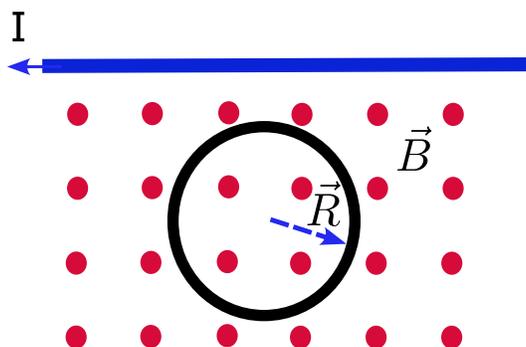


Figura 10.13: Ejemplo 10.6. Corriente inducida sobre una espira circular debido a el campo magnético generado por un cable infinito de corriente  $I$ .

La relación (10.24) establece que la intensidad del campo magnético disminuye a medida que transcurre el tiempo, lo que implica que el flujo magnético a través de la bobina circular para  $t > 0$  también tiende a disminuir. Por tanto, el campo que surge de la corriente inducida deberá señalar hacia afuera con el fin de oponerse a la disminución en el flujo. Entonces, el flujo de corriente inducida debe orientarse en sentido antihorario.

**Ejercicio 10.4.** Una espira cuadrada de lado  $L$  está sometida a un campo magnético que está dirigido hacia afuera de la página (ver figura 10.14). La intensidad del campo magnético es dada por  $B = 4.0 t^2$ , donde  $B$  se mide en teslas y  $t$  en segundos. Determinar la dirección del flujo de corriente inducida para  $t > 0$ .

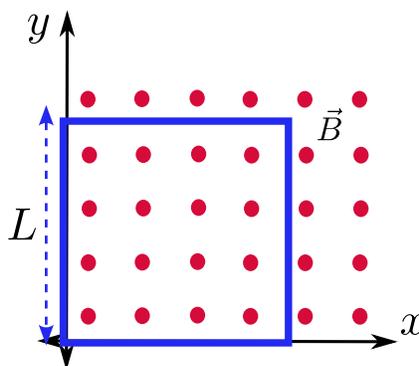


Figura 10.14: Ejercicio 10.4 y ejemplo (10.13). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular generadas por un campo magnético variable.

**Ejercicio 10.5.** En la figura 10.15 se observa una barra de longitud  $L$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  sobre unos rieles en la presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  que apunta hacia afuera de la página. Encontrar la orientación del flujo de corriente inducida, cuando la barra se mueve a velocidad constante, cuando la dirección de la velocidad va hacia: a) la derecha, b) la izquierda.

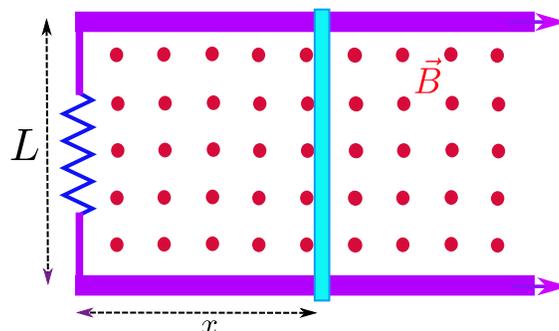


Figura 10.15: Ejercicio 10.5. Corriente inducida sobre una barra que desliza sobre rieles paralelos, en presencia de un campo magnético uniforme.

**Ejercicio 10.6.** Los planos de dos espiras circulares mostrados en la figura 10.16 son paralelos. Una corriente  $I$  circula en la espira A en el sentido horario (respecto al semieje  $x$  positivo). Si la magnitud de la corriente  $I$  se incrementa, determine: a) la dirección de la corriente inducida en la espira B, b) el sentido de fuerza magnética sobre la espira B, c) analice el caso cuando la magnitud de la corriente disminuye.

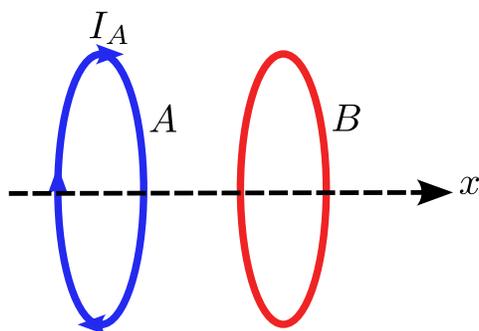


Figura 10.16: Ejercicio 10.6. Corriente inducida sobre la espira B debido a la interacción con una espira A con corriente eléctrica  $I$ .

**Ejercicio 10.7.** Se tiene una espira circular de radio  $R$  ubicada al interior de una de las dos mallas que componen el circuito que se indica en la figura 10.17. El interruptor del circuito en estudio, inicialmente se encuentra abierto. Teniendo en cuenta el sistema descrito, encontrar: a) Si el interruptor se cierra al tiempo  $t = 0$ , encontrar la dirección del flujo de corriente inducida sobre el circuito circular. b) Si el interruptor pasado un largo tiempo después de estar cerrado se abre, encontrar la dirección del flujo de corriente inducida sobre el circuito circular de radio  $r$ .

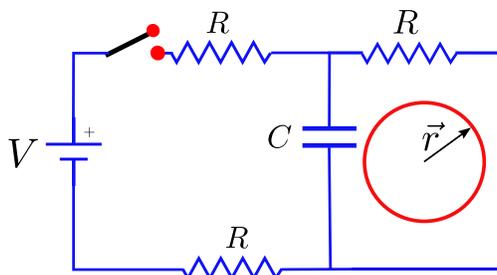


Figura 10.17: Ejercicio (10.7). Sentido de la corriente inducida sobre una espira circular.

**Ejercicio 10.8.** Se tiene un imán cilíndrico con su eje de simetría sobre el eje vertical y una espira circular de radio  $R$  como se indica en la figura 10.18. Para la configuración planteada, encontrar la dirección del flujo de corriente eléctrica inducida sobre la espira, en el caso en que el imán se aleje de la espira y en el caso en que el imán se acerque a la espira.

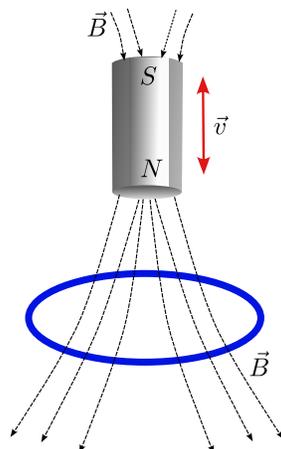


Figura 10.18: Ejercicio (10.8). Sentido de la corriente inducida sobre una espira circular.

**Ejemplo 10.7.** La figura 10.19 muestra un conductor lineal infinito a lo largo del eje vertical, que lleva una corriente  $I$  en dirección  $\hat{j}$  (las cruces rojas en la figura, indican el campo magnético que apunta hacia dentro de la hoja, en el lado izquierdo del conductor infinito). A una distancia horizontal  $x_c$  del eje vertical, se ubica el centro de una espira rectangular de lados  $a$ ,  $b$ . De tal forma que el lado  $a$  se extiende horizontalmente y el lado  $b$  verticalmente. Para la configuración anterior se determinará la corriente inducida sobre la espira rectangular (de resistencia  $R$ ), si la espira se mueve con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$ .

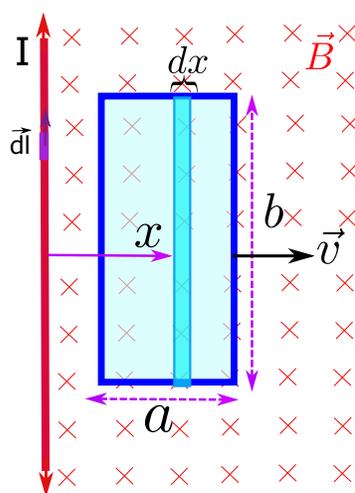


Figura 10.19: Ejemplo (10.7). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular.

**Solución:** En el ejemplo (10.3), ya se calculó el flujo magnético a través de la espira cuadrada debido al campo magnético generado por el conductor lineal, y se obtuvo que (ver ecuación (10.25)):

$$\phi_B = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{x_c + a/2}{x_c - a/2} \right). \quad (10.25)$$

Ahora, la fem inducida viene dada por menos la derivada del flujo magnético total respecto al tiempo, y si se observa (10.25), la única variable que cambia al moverse la espira, es la variable  $x_c$ , por lo tanto:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dx_c} \frac{dx_c}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{4a}{4x^2 - a^2} \right) v, \quad (10.26)$$

donde en la última igualdad de (10.26) se ha reemplazado  $\frac{dx_c}{dt} = v$ . Ahora, teniendo en cuenta la fem inducida, la corriente inducida sobre el conductor rectangular es:

$$I_i = -\frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \left( \frac{4a}{4x^2 - a^2} \right) v, \quad (10.27)$$

El signo en (10.27) se presenta porque la corriente inducida debe estar a favor del sentido de las manecillas del reloj. Teniendo en cuenta que el flujo magnético disminuye a medida que la espira se mueve hacia la derecha, la corriente inducida debe generar un campo magnético que aumente el flujo a través de la espira.

**Ejemplo 10.8.** En la figura 10.20 se observa una región de ancho  $S$ , donde existe un campo magnético en dirección  $\hat{k}$  (saliendo de la página). Una espira cuadrada de lado  $a$  incide con una velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  de izquierda a derecha. Para tal configuración se va a encontrar la corriente en función de la distancia  $x$  que recorre la espira, tomando a  $x$  como la posición del lado derecho de la espira.

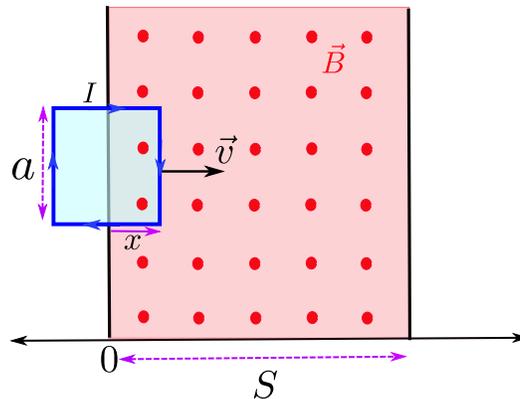


Figura 10.20: Ejemplo (10.8). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular al ingresar en una región de campo magnético constante.

**Solución:** El problema se resolverá dividiendo su análisis en cinco momentos diferentes: El primero se da cuando la espira se encuentra a la derecha de la región sombreada. El segundo momento se presenta cuando la espira inicia su ingreso a la región sombreada y finaliza cuando la espira ingresa completamente a dicha región. El tercer momento se da cuando la espira se encuentra completamente en el interior de la región sombreada. El cuarto, se presenta cuando la espira comienza a salir de la región sombreada y termina cuando la espira sale completamente de dicha región. El último momento se presenta cuando la espira se mueve hacia la derecha fuera de la región con campo magnético. El análisis del flujo magnético, fem y corriente inducida, en los cinco momentos anteriormente descritos, se realiza a continuación:

1. En el primer intervalo al no existir campo magnético que atraviere la espira en estudio, no existe flujo magnético, por lo tanto, la fem y la corriente inducida serán iguales a cero.
2. Cuando la espira inicia su ingreso a la región sombreada y hasta que ingrese completamente en dicha región, solo existirá flujo magnético en la porción del área de la espira que se encuentre dentro de la región sombreada. Si se observa la figura 10.20, el área que presenta flujo magnético está dada por:  $A = ax$ , siendo  $x$ , la distancia de la espira que ha ingresado en la región con campo magnético. Por lo anterior, se tiene que:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = Bax, \quad (10.28)$$

donde se ha tomado convenientemente la dirección del vector área, igual a la dirección del campo magnético. En (10.28) lo único que varía con el tiempo es la porción de la espira que ha ingresado en la región de campo magnético (es decir,  $x$ ). Por lo tanto, se tiene que:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav, \quad (10.29)$$

donde se ha tomado que  $v = \frac{dx}{dt}$ . En ese caso, la corriente inducida está dada por:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{Bav}{R}. \quad (10.30)$$

A medida que la espira ingresa en la región sombreada, el flujo aumenta hacia fuera de la página, y por lo tanto, la dirección del campo magnético inducido debe entrar perpendicularmente a la página, lo cual es posible por un flujo de corriente que lleve el sentido de las manecillas del reloj.

3. Una vez la espira ingresa completamente en la región sombreada, y mientras ninguna porción salga de la misma, el flujo magnético se mantiene constante ( $Ba^2$ ); por tanto, la fem y corriente inducidas son iguales a cero.

4. Cuando la espira empieza a salir, la situación es similar al ítem 2. El flujo en la espira empieza a disminuir, ya que disminuye el área de la espira dentro de la región sombreada (ver figura 10.21). Cuando una cantidad  $d = x - s$  de la espira ha salido de la región, el área que se mantiene al interior de la región sombreada es  $A = a(a - d) = a(a - x + s)$ . Por tanto, el flujo magnético es:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = Ba(a - d) = Ba(a - x + s). \quad (10.31)$$

Durante el tiempo que tarda en salir completamente la espira de la región sombreada, la única variable que cambia con respecto al tiempo en la expresión (10.31) es  $x$ , por lo tanto la fem inducida será:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = Ba\frac{dx}{dt} = Bav, \quad (10.32)$$

donde nuevamente se ha tomado que  $v = \frac{dx}{dt}$ . Si se compara (10.29) con (10.32), se observa que la única diferencia entre las dos expresiones es un signo menos. Por lo tanto, el valor de la corriente sigue igual (ver (10.30)), pero su sentido cambia, tal que en este caso, el flujo de corriente va en contra de las manecillas del reloj.

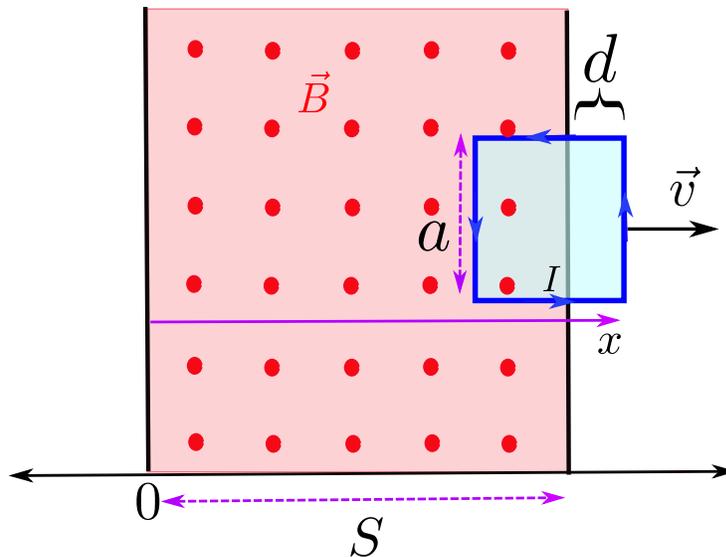


Figura 10.21: Ejemplo (10.8). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular al salir de una región de campo magnético constante.

5. Finalmente, cuando la espira se mueve hacia la derecha, fuera completamente de la región sombreada, el flujo magnético es cero. En consecuencia, la fem y corriente inducida son igualmente cero.

**Ejemplo 10.9.** Se considera una espira circular de radio  $r$  con resistencia  $R$ , la cual posee un eje de giro en el eje  $y$ . En la región en la cual la espira se encuentra, existe un campo magnético uniforme orientado en dirección  $\hat{k}$  (saliendo de la página). Al tiempo cero, el plano de la espira coincide con el plano  $xy$  (el eje  $z$  sale perpendicularmente del plano de la hoja). En este ejemplo se encontrará la fem y corriente inducida si la espira rota alrededor del eje  $y$  (que corresponde a su eje de simetría vertical) con una velocidad angular constante  $\omega$  en sentido contrario a las manecillas del reloj (desde la perspectiva del eje positivo  $y$ ).

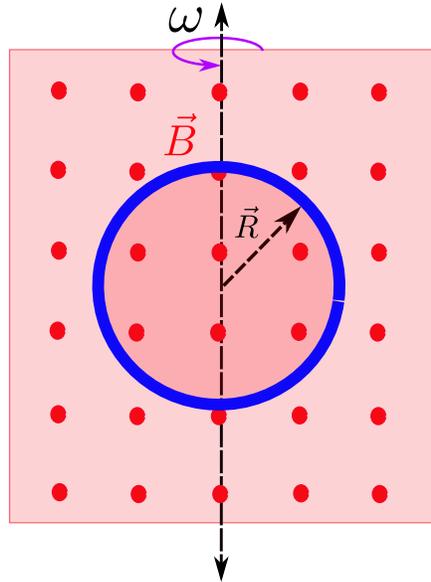


Figura 10.22: Ejemplo (10.8). Corriente y fem en una espira circular que rota sobre su eje vertical de simetría.

**Solución:** En la situación descrita, el vector de área  $\vec{A}$  de la espira al ser perpendicular al eje de giro, se encuentra en todo momento en el plano  $xz$ , por lo cual se puede escribir como:

$$\vec{A} = A \left( \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k} \right), \quad (10.33)$$

donde  $\theta$  representa el ángulo entre el eje  $z$  y el vector  $\vec{A}$ . Como el campo se encuentra orientado en dirección  $\hat{k}$ , el flujo magnético a un tiempo dado, está dado por:

$$\begin{aligned} \phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \int d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} \\ &= B \hat{k} \cdot \left( A \left( \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k} \right) \right) \\ &= BA \cos \theta. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Para encontrar la fem, se observa que lo que varía respecto al tiempo en el flujo magnético es únicamente el ángulo  $\theta$ . Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -BA \frac{d \cos \theta}{dt} = -BA \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= BA\omega \sin \theta = BA\omega \sin \omega t.\end{aligned}\quad (10.35)$$

Donde, en la última igualdad de (10.35) se ha tenido en cuenta que  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  y que  $\theta$  varía con el tiempo ( $\theta = \omega t$ ). Teniendo en cuenta (10.35), la corriente inducida es:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{BA\omega}{R} \sin \omega t. \quad (10.36)$$

Del resultado obtenido para la corriente, se puede evidenciar que la corriente cambia de signo conforme la espira gira. Lo anterior, ya que el flujo en una mitad del giro disminuye y, en la otra mitad, aumenta, obligando a la corriente a generar un campo magnético inducido que cambia de orientación para compensar la pérdida o ganancia de flujo magnético a medida que la espira rota. Por lo tanto, si  $0 < \theta < \pi$  (flujo disminuyendo), la corriente debe estar en contra de las manecillas del reloj, alrededor de la espira; y si  $\pi < \theta < 2\pi$  (flujo aumentando), la corriente debe ir a favor de las manecillas del reloj.

**Ejemplo 10.10.** En este problema se va a considerar un riel rectangular, sobre el cual se monta una varilla móvil de masa  $M$ , como se observa en la figura 10.23. Se asume que el riel no tiene resistencia eléctrica ni genera fricción y que la varilla móvil tiene resistencia  $R$ , de tal forma que en todo momento la resistencia en el circuito es  $R$ . El área establecida entre el riel y la varilla móvil es atravesada por un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  en dirección  $-\hat{k}$  (hacia dentro de la página). Si la varilla se pone en movimiento, el flujo magnético cambia con respecto al tiempo y por lo tanto, se genera una corriente en el circuito formado por el riel y la varilla. Bajo las condiciones anteriores se calculará: a) La fem y corriente inducida en el instante en que la varilla se mueva con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$ . b) La velocidad de la varilla en función del tiempo.

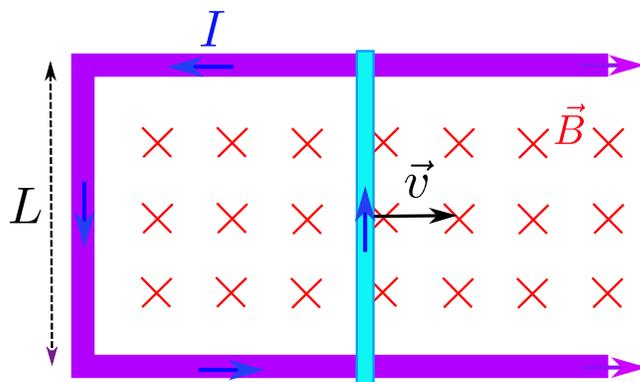


Figura 10.23: Ejemplo (10.10). Corriente y fem inducida en un circuito de área variable

**Solución:**

- a) Convenientemente el vector de área se toma en dirección  $\hat{k}$ . Si a un tiempo  $t$ , el ancho de la espira es  $x$ , entonces el flujo al tiempo  $t$  está dado por:

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \int d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = BLx(-\hat{k}) \cdot \hat{k} \\ &= -BLx.\end{aligned}\tag{10.37}$$

El flujo magnético definido por la expresión (10.37), cambia a medida que la distancia  $x$  aumenta (ya que aumenta el área del circuito). Por lo tanto, la fem inducida está dada por:

$$\varepsilon_i = BL \frac{dx}{dt} = BLv,\tag{10.38}$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\frac{dx}{dt} = v$ . A partir de (10.38), la corriente inducida es:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{BLv}{R}.\tag{10.39}$$

Como el flujo aumenta, la corriente debe generar un campo inducido que se oponga al cambio en el flujo. Por lo tanto, el campo inducido debe tener dirección  $\hat{k}$  (se debe recordar que el flujo producido por el campo externo  $\vec{B}$  aumenta en dirección  $-\hat{k}$ ), lo cual es posible con un flujo de corriente en contra de las manecillas del reloj.

- b) En primer lugar se calculará la fuerza magnética generada por el campo magnético externo sobre la varilla en movimiento. En el literal a) se encontró que existe una corriente inducida sobre la varilla; por lo tanto, existirá una fuerza magnética generada por la interacción del campo magnético externo con la corriente inducida, la cual vendrá dada por:

$$\vec{F}_m = \int I_i d\vec{r}' \times \vec{B}.\tag{10.40}$$

En este caso,  $d\vec{r}' = dy\hat{j}$  y  $\vec{B} = -B\hat{k}$ ; por lo tanto, aplicando la regla de la mano derecha (o por cálculo algebraico directo) se tiene que:  $d\vec{r}' \times \vec{B} = -Bdy\hat{i}$  y se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= -I_i \int_0^L Bdy\hat{i} \\ &= -BLI_i\hat{i}.\end{aligned}\tag{10.41}$$

La fuerza magnética es la única fuerza aplicada en dirección  $x$  sobre la varilla (donde se ha despreciado la contribución debido al campo magnético inducido). Por lo anterior, la aceleración en dirección  $x$  será:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{M} = -\frac{I_i}{M}BL\hat{i}. \quad (10.42)$$

Reemplazado el resultado obtenido para la corriente inducida en (10.39), se tiene que

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{M} = -\frac{v}{MR}B^2L^2\hat{i}. \quad (10.43)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{MR}B^2L^2, \quad (10.44)$$

Al integrar la expresión anterior entre un tiempo  $t = 0$  y un tiempo  $t$  cualquiera, se puede establecer que:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -\frac{1}{MR}B^2L^2 \int_0^t dt', \quad (10.45)$$

$$\downarrow$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2L^2}{MR}t, \quad (10.46)$$

$$\downarrow$$

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2L^2}{MR}t\right) \quad (10.47)$$

donde  $v_0$  corresponde a la velocidad al tiempo cero.

**Ejemplo 10.11.** Se tiene una barra metálica de longitud  $L$ , masa  $M$  y resistencia  $R$ , montada sobre dos rieles paralelos al eje  $x$  (de resistencia despreciable) como se indica en la figura 10.24. La barra es libre de moverse sin fricción sobre los rieles. Un extremo de cada uno de los rieles se puede conectar a una fuente de voltaje  $V$  al cerrar un interruptor  $S$  (ver figura 10.24). Adicionalmente, el sistema se encuentra en una región donde existe un campo magnético que ingresa perpendicularmente a la página (es decir, en dirección  $\hat{k}$ ). Para el sistema descrito se encontrará la velocidad terminal de la barra metálica una vez se cierra el interruptor.

**Solución:** Al cerrar el interruptor, se genera una corriente que circula por el circuito formado por la barra metálica, los rieles y la fuente de voltaje. Una fuerza magnética se ejerce sobre la barra debida a la interacción de la corriente eléctrica con el campo magnético externo, la cual se puede escribir en la forma:

$$\vec{F}_m = \int I d\vec{r}' \times \vec{B}. \quad (10.48)$$

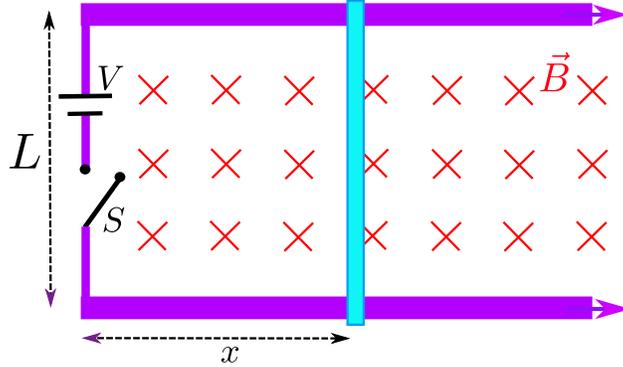


Figura 10.24: Ejemplo (10.11). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

La corriente, dado la disposición de la fuente, fluye en sentido de las manecillas del reloj; por lo tanto, sobre la barra  $d\vec{r}' = -dy\hat{j}$  y dado que  $\vec{B} = -B\hat{k}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= \int_0^L IBdy \underbrace{(\hat{j}' \times \vec{k})}_{\hat{i}} \\ &= IBL\hat{i}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Por lo tanto, al tiempo  $t = 0$  (en el instante en el cual se cierra el interruptor), la aceleración que experimenta la barra será:

$$\vec{a} = \vec{F}_m/M = IBL\hat{i}. \quad (10.50)$$

A partir de lo anterior, se establece que una vez cerrado el interruptor, la barra iniciará un movimiento en dirección  $\hat{i}$ . Dicho movimiento aumenta el área limitada por el circuito formado por la barra, los rieles y la fuente de voltaje; por lo tanto, existirá una fem inducida sobre el circuito y una corriente inducida. Dicha corriente, a su vez, interactuará con el campo magnético externo, generando una fuerza adicional sobre la barra, la cual se debe calcular. Para ello, en primer lugar se evalúa el flujo magnético sobre el área generada por el circuito, y se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \int d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = -BA \\ &= -BLx, \end{aligned} \quad (10.51)$$

donde  $x$  denota el ancho del circuito para algún tiempo dado  $t$ , y se ha tomado el vector  $\vec{A}$  en dirección  $\hat{k}$ . El flujo magnético definido por la expresión (10.51) cambia a medida que la distancia  $x$  aumenta, ya que la barra se está moviendo en dirección  $\hat{i}$ . Por lo tanto, la fem inducida vendrá dada por:

$$\varepsilon_i = BL \frac{dx}{dt} = BLv, \quad (10.52)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\frac{dx}{dt} = v$ . A partir de (10.52), la corriente inducida es:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{BLv}{R}. \quad (10.53)$$

El sentido de la corriente inducida corresponde al sentido contrario de las manecillas del reloj. Para calcular la fuerza magnética sobre la barra debido a la interacción del campo magnético externo con la corriente inducida, se procede aplicando el mismo procedimiento empleado para encontrar (10.49), salvo que en este caso  $d\vec{r}' = dy\hat{j}$ . A partir de lo anterior, se tiene que la fuerza magnética debida a  $I_i$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{mi} &= - \int_0^L I_i B dy \underbrace{(\hat{j}' \times \vec{k})}_{\hat{i}} \\ &= -I_i BL \hat{i} \\ &= -\frac{B^2 L^2 v}{R} \hat{i}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Entonces, la fuerza total sobre la barra será:  $\vec{F}_T = \vec{F}_m + \vec{F}_{mi}$ , y al reemplazar los resultados dados en (10.49) y (10.54), se tiene

$$\vec{F}_T = \left( IBL - \frac{B^2 L^2 v}{R} \right) \hat{i}. \quad (10.55)$$

El primer término en (10.55) es constante ( $\vec{F}_m$ ), mientras que el segundo término aumenta conforme aumenta la velocidad en la barra  $v$ ; por lo tanto, llegará un momento en el cual la fuerza total se anule y la velocidad tome su valor máximo, en dicho instante, se tiene:

$$IBL = \frac{B^2 L^2 v_{max}}{R} \rightarrow v_{max} = \frac{IR}{BL}. \quad (10.56)$$

Al tener en cuenta que  $I = V/R$ , finalmente se tiene que:

$$v_{max} = \frac{V}{BL}. \quad (10.57)$$

**Ejemplo 10.12.** La figura 10.25 indica una barra de masa  $M$  y resistencia  $R$  que desliza sin fricción sobre dos rieles con una inclinación de ángulo  $\theta$ . Los rieles y la base forman una cuña. En la región donde se encuentra la cuña, existe un campo magnético uniforme dirigido verticalmente hacia abajo, como se indica en la figura 10.25. Para el sistema planteado se encontrará la velocidad máxima que alcanza la barra.

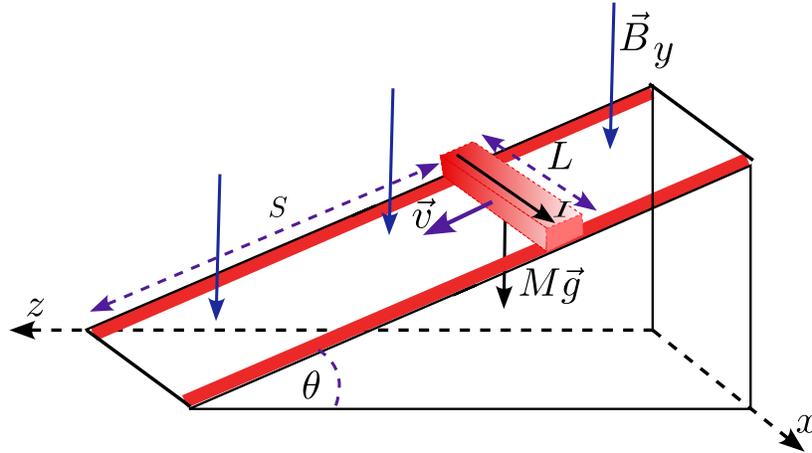


Figura 10.25: Ejemplo (10.12). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

**Solución:** Para resolver el sistema, se escoge un sistema de referencia adecuado, donde el eje de la barra coincide con el eje  $x$ ; el eje  $y$  se elige de manera que corresponda al eje perpendicular a la barra y paralelo al campo magnético (y a la gravedad). Por lo anterior, el eje  $z$  será el eje perpendicular tanto al eje de la barra como al campo magnético (ver figura 10.25). La barra, debido a su peso, inicia un movimiento desplazándose hacia la parte baja de la cuña con una velocidad que es paralela a la pendiente de la cuña. La barra y los rieles sobre los que se sostienen forman una espira (los rieles se unen también sobre la parte baja de la cuña). El área limitada por la espira, disminuye conforme la barra desciende; por lo tanto, existe una fem alrededor de la espira y una corriente inducida. Para resolver el problema, en primer lugar se calculará la fem y corriente inducida sobre la espira. El flujo magnético sobre el área limitada por la espira en estudio, viene dado por:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (10.58)$$

En este caso el campo magnético se puede escribir como  $\vec{B} = -B\hat{j}$ . El vector de área es perpendicular al plano inclinado de la cuña (paralelo a la fuerza normal que se esquematiza en la figura 10.26<sup>1</sup>), y forma un ángulo  $\theta$  respecto al semi eje positivo del eje  $y$ , por lo cual se puede escribir como:

$$d\vec{A} = dA \sin\theta \hat{k} + dA \cos\theta \hat{j}. \quad (10.59)$$

<sup>1</sup> Respetando la orientación de la figura 3D 10.25, en la figura 10.26 el semi-eje positivo del eje  $z$  va de derecha a izquierda.

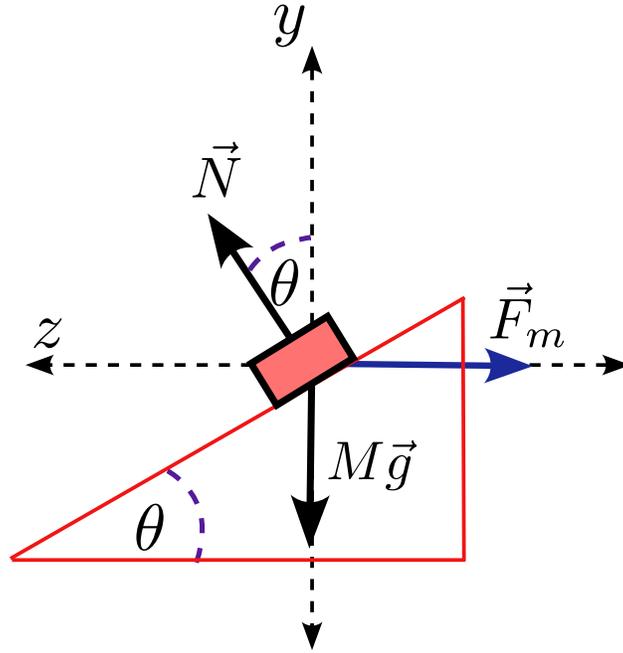


Figura 10.26: Ejemplo (10.12). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

A partir de lo anterior, el flujo magnético, vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int (-B\hat{j}) \cdot (dA \sin\theta\hat{k} + dA \cos\theta\hat{j}) \\ &= - \int B(dA) \cos\theta = -B \cos\theta \oint (dA) = -B \cos\theta A,\end{aligned}\quad (10.60)$$

donde  $A$  representa el área limitada por el circuito (rieles y barra) a un cierto tiempo. Dado que la longitud de la barra es  $L$  y que la distancia del centro de la barra a el punto más bajo de la cuña a un tiempo  $t$  se denota como  $s$ , el área  $A$  se puede escribir como:  $A = Ls$ , por lo tanto

$$\phi_B = -BLs \cos\theta. \quad (10.61)$$

Ahora, la fem vendrá dada por:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(BLs \cos\theta)}{dt} = BL \cos\theta \frac{ds}{dt} = -BL \cos\theta v, \quad (10.62)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $v = -ds/dt$  representa la velocidad a la cual desciende la barra (el signo menos, se debe a que  $s$  disminuye conforme  $t$  aumenta). A partir del resultado anterior, la corriente sobre el circuito (y sobre la barra), será

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{BLv \cos\theta}{R}. \quad (10.63)$$

El signo menos en (10.63) implica que el flujo de corriente circula en el sentido de las manecillas del reloj. Por otra parte, la interacción entre la corriente inducida y el campo magnético externo, genera una fuerza magnética sobre la barra. Dicha fuerza vendrá dada por la expresión:

$$\vec{F}_m = \int I_i d\vec{r}' \times \vec{B}. \quad (10.64)$$

Ya que  $d\vec{r}' = dx \hat{i}$  (siguiendo la dirección del flujo de corriente sobre la barra), se tiene que:

$$d\vec{r}' \times \vec{B} = -Bdx (\hat{i} \times \hat{j}) = -Bdx \hat{k}, \quad (10.65)$$

por tanto

$$\vec{F}_m = -|I_i|B \left( \int_0^L dx \right) \hat{k} = -|I_i|BL\hat{k} = -\frac{B^2 L^2 v \cos \theta}{R} \hat{k}, \quad (10.66)$$

donde se ha reemplazado el valor de  $|I_i|$  obtenido en (10.63) (el signo para  $I_i$  ya se tuvo en cuenta en la definición de  $d\vec{r}'$ ). Con lo anterior, las fuerzas aplicadas sobre la barra son: El peso de la barra  $M\vec{g}$ , la fuerza normal ejercida por los rieles  $\vec{N}$  y la fuerza magnética  $\vec{F}_m$ . Las tres fuerzas se indican en el diagrama de cuerpo libre en la figura 10.26, con una vista transversal del plano  $yz$ . Considerando que la barra ha llegado a su velocidad máxima (aceleración cero), la sumatoria de fuerzas para el diagrama de fuerzas indicado en la figura 10.26, será:

$$\begin{aligned} F_y &= N \cos \theta - Mg = 0, \\ F_x &= N \sin \theta - F_m = 0. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Despejando la fuerza normal  $N$  de la expresión para  $F_y$  y reemplazando el resultado en la expresión para  $F_x$  se obtiene:

$$F_m = Mg \tan \theta. \quad (10.68)$$

Teniendo en cuenta (10.66) y tomando  $v \rightarrow v_{max}$ , se tiene que

$$\frac{B^2 L^2 v_{max} \cos \theta}{R} = Mg \tan \theta, \quad (10.69)$$

por lo tanto,

$$v_{max} = \frac{MgR \tan \theta}{B^2 L^2 \cos \theta}. \quad (10.70)$$

En resumen, la barra desciende partiendo del reposo debido a su peso y se genera una corriente inducida sobre la barra (por la presencia del campo magnético), la cual a su vez interactúa con el campo magnético externo y por lo tanto, se aplica una fuerza magnética sobre la barra. Cuando la barra alcanza su velocidad máxima, la fuerza total es cero y, bajo dicha consideración, se encuentra finalmente la velocidad máxima que alcanzaría la barra.

**Ejemplo 10.13.** Se tiene una espira cuadrada de lado  $L$  que es atravesada perpendicularmente por un campo magnético dependiente del tiempo definido por:  $\vec{B}(t) = Ct^3x^2y\hat{k}$  (ver figura 10.14), donde  $C$  es una constante que se mide en  $\frac{T}{s\ m^3}$ ,  $t$  se mide en segundo y  $\{x, y\}$  se miden en metros. Para la situación planteada se calculará la magnitud y dirección de la fem inducida en la espira.

**Solución:** El flujo magnético a través de la superficie generada por la espira se encuentra a partir de:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (10.71)$$

donde (ver Figura 10.14):

$$\vec{B} = Ct^3x^2y\hat{k}, \quad d\vec{a} = dxdy\hat{k}, \quad (10.72)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_S (Ct^3x^2y\hat{k}) \cdot (dxdy\hat{k}) = Ct^3 \underbrace{\int_0^L x^2 dx}_{\frac{1}{3}L^3} \underbrace{\int_0^L y dy}_{\frac{1}{2}L^2} \\ &= \frac{1}{6}CL^5t^3. \end{aligned} \quad (10.73)$$

La relación anterior establece que para  $t > 0$ , el flujo magnético se incrementa con el tiempo. Por tanto, para mantener el flujo magnético constante a través de la espira, el campo magnético debido a la corriente inducida deberá orientarse en dirección  $-\hat{k}$ . Entonces, la corriente inducida deberá circular en sentido horario. La magnitud de la fem inducida es:

$$|\varepsilon| = \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{6}CL^5t^3 \right) = \frac{1}{2}CL^5t^2. \quad (10.74)$$

**Ejemplo 10.14.** Un solenoide con  $n$  vueltas por unidad de longitud transporta una corriente dada por  $I(t) = I_0(1 - e^{-at})$ , donde  $I_0$  se mide en amperios y  $a$  es una constante positiva con unidades de  $t^{-1}$ . Dentro del solenoide y coaxial con este se localiza una bobina que tiene radio  $R$  con  $N$  vueltas. Para la situación planteada se determinará la fem inducida en la bobina (ver Figura 10.27).

**Solución:** La magnitud de campo magnético al interior de un solenoide se expresa como:

$$B = \mu_0 In. \quad (10.75)$$

Si se considera el eje de simetría del solenoide a lo largo del eje  $z$  y que la corriente fluye en sentido antihorario (desde la perspectiva del semieje  $z$  positivo), el vector de campo magnético

dentro del solenoide se puede escribir como:

$$\vec{B} = \mu_0 I n \hat{k}. \quad (10.76)$$

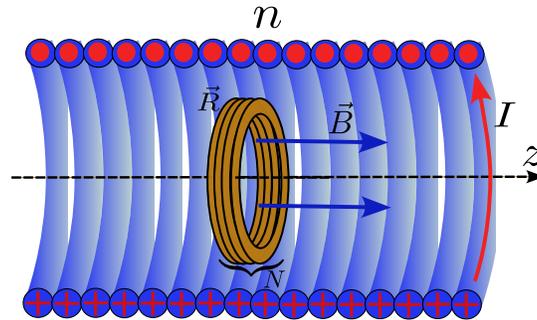


Figura 10.27: Ejemplo 10.14. fem inducida sobre una bobina ubicada al interior de un solenoide que conduce una corriente  $I$ .

Así, el flujo magnético a través de la bobina con  $N$  espiras es:

$$\Phi_B = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = N \int_S (\mu_0 I n \hat{k}) \cdot (da \hat{k}) = N \mu_0 I n \underbrace{\int_S da}_{\pi R^2} = N \mu_0 I n \pi R^2. \quad (10.77)$$

Entonces, la fem inducida en la bobina es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -N \mu_0 n \pi R^2 \frac{dI}{dt} = -N \mu_0 n \pi R^2 \frac{d}{dt} [I_0 (1 - e^{-at})] \\ &= -N \mu_0 n \pi R^2 I_0 a e^{-at}. \end{aligned} \quad (10.78)$$

**Ejemplo 10.15.** Se tiene toroide que tiene una sección transversal rectangular de lados  $a$  y  $b$ , con un radio interior  $R$ , con  $N$  espiras y que transporta una corriente sinusoidal  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Una bobina que posee  $N'$  vueltas se enrolla alrededor del toroide como se muestra en la figura 10.28. Para tal sistema se encontrará la fem inducida en la bobina.

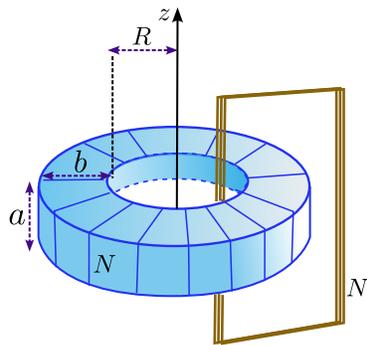


Figura 10.28: Ejemplo 10.15. fem inducida sobre una espira rectangular externa a un toroide de corriente  $I$ .

**Solución:** La disposición del sistema sugiere el uso de coordenadas cilíndricas para resolver el problema. A partir de la figura 10.28 se puede observar que el campo magnético asociado al toroide se expresa como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \hat{\phi}. \quad (10.79)$$

Ahora, si los planos de las espiras que componen la bobina se orientan de manera que sean perpendiculares a la dirección del campo, resulta que:

$$d\vec{a} = d\rho dz \hat{\phi}, \quad (10.80)$$

con lo cual el flujo magnético a través de las  $N'$  vueltas de la bobina es:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= N' \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = N' \int_R^{R+b} \int_0^a \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \right) \cdot (d\rho dz \hat{\phi}) \\ &= \frac{\mu_0 N N' I}{2\pi} \underbrace{\int_R^{R+b} \frac{d\rho}{\rho}}_{\ln\left(\frac{R+b}{R}\right)} \underbrace{\int_0^a dz}_a = \frac{\mu_0 N N' I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right). \end{aligned} \quad (10.81)$$

Por tanto, la fem inducida en la bobina es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{\mu_0 N N' I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \right] \\ &= -\frac{\mu_0 N N' a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \frac{dI}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 N N' a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \frac{d}{dt} [I_0 \text{sen}(\omega t)] \\ &= -\frac{\mu_0 N N' a \omega I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (10.82)$$

**Ejercicio 10.9.** Para la configuración planteada en el ejemplo (10.7), calcular la fem sobre la espira rectangular, en el caso que la espira no se mueva (velocidad  $v = 0$ ) y que la corriente sobre el cable infinito esté dada por la expresión:  $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , siendo  $\tau = \text{cte}$  e  $I_0$  la corriente al tiempo cero.

**Ejercicio 10.10.** Una espira rectangular de ancho  $w$  y largo  $L$  se encuentra próxima a un alambre largo y recto por el cual circula una corriente  $I$ , dispuestos como se observa en la figura 10.29. Suponer que la corriente está cambiando con el tiempo de acuerdo a la relación  $I(t) = at + bt^2$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes con unidades de amperios sobre segundo y amperios sobre segundos al cuadrado, respectivamente. Determinar la fem inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida.

**Ejercicio 10.11.** Una bobina circular con 45 vueltas, de radio 8.00 cm y una resistencia de 2.500  $\Omega$ , está localizada en una región donde está presente un campo magnético orientado perpendicularmente al plano de la bobina. La magnitud del campo magnético varía de acuerdo a  $B(t) = 0.01 - .05t^2$ , donde  $t$  se mide en segundos y  $B$  en teslas. Calcular la fem inducida en la bobina a  $t = 10.0$  s.

**Ejercicio 10.12.** Una espira circular de alambre de radio  $a$  se ubica en una región donde existe un campo magnético uniforme. El plano de la espira es perpendicular a la dirección del campo magnético (ver Figura 10.30). La magnitud del campo varía con el tiempo por medio de la siguiente relación  $B(t) = a - bt^3$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes con unidades de teslas y teslas sobre segundo al cubo, respectivamente. Calcular la fem inducida en la espira. Si la espira posee una resistencia  $R$ , determinar el valor de la corriente inducida.

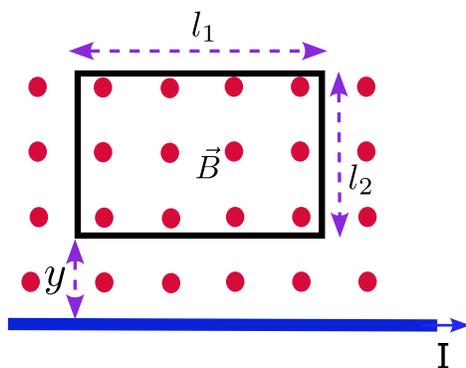


Figura 10.29: Ejercicio 10.10. Fem inducida sobre una espira rectangular debida a un campo magnético externo variable.

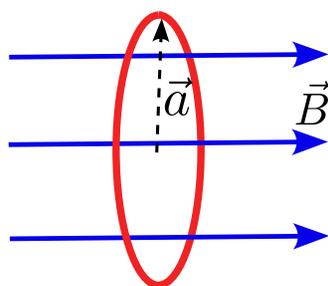


Figura 10.30: Ejercicio 10.12. Fem inducida sobre una espira circular de radio  $r$  debida a un campo magnético externo variable.

### 10.1.2. Campos no electrostáticos

En las secciones anteriores se ha establecido que la presencia de cargas en el espacio, genera campos electrostáticos. Sin embargo, la fem inducida puede ser relacionada con un campo eléctrico, pero en dicho caso el campo se conoce como campo no electrostático. Las líneas de campo de un *campo no electrostático*, no parten de cargas positivas ni llegan a cargas negativas, ya que las cargas no son las fuentes de dichos campos, sino que son generadas por flujo magnético variable sobre una espira. Considerando la trayectoria generada por una espira, el campo eléctrico es tangencial a dicha espira y por tanto la curva dada por la espira representa también una línea de campo no electrostático.

Un campo no electrostático, que en este caso se denomina como  $\vec{E}_{NE}$ , no es conservativo, o lo que es lo mismo, no se puede determinar a partir del gradiente de una función escalar. Por lo anterior, sobre un camino cerrado la integral de línea dada por:

$$\oint \vec{E}_{NE} \cdot d\vec{r}, \quad (10.83)$$

no es cero (como si ocurre en el caso de campos electrostáticos). Para campos no electrostáticos se cumple que la fem inducida es igual a la integral cerrada descrita por (10.83), tal que:

$$\oint \vec{E}_{NE} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (10.84)$$

Si en una región existen campos electrostáticos (que para esta explicación se denotan como  $\vec{E}_E$ ) y campos no electrostáticos, entonces el campo total  $\vec{E}$  está dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_E + \vec{E}_{NE}. \quad (10.85)$$

Ahora, para el campo  $\vec{E}$  se cumple que:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \oint (\vec{E}_E + \vec{E}_{NE}) \cdot d\vec{r} \\ &= \oint \vec{E}_E \cdot d\vec{r} + \oint \vec{E}_{NE} \cdot d\vec{r} \\ &= -\frac{d\phi_B}{dt}. \end{aligned} \quad (10.86)$$

En conclusión, si en una región existe campo electrostático  $\vec{E}_E$ , no electrostático  $\vec{E}_{NE}$  o si existen simultáneamente los dos tipos de campo eléctrico, en cualquier caso se aplica que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (10.87)$$

En el caso particular que el campo eléctrico total sea exclusivamente electrostático ( $\vec{E} = \vec{E}_E$ ), no existe un flujo variable de campo magnético (o no existe flujo magnético) y por tanto  $\frac{d\phi_B}{dt} = 0$ , con lo cual se cumple la relación de la integral cerrada para un campo electrostático.

## 10.2. Ecuaciones de Maxwell

Los fenómenos de interacción electromagnética pueden ser estudiados a partir de cuatro ecuaciones fundamentales conocidas como las ecuaciones de Maxwell, que recopilan las leyes que se han estudiado en este texto y son:

1. Ley de Gauss (ver capítulo (4)): La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por dicha superficie y matemáticamente está dada por (ecuación (4.47)):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (10.88)$$

2. Para el campo magnético lo establecido por la ley de Gauss se aplica, salvo que al no existir fuentes aisladas de campo magnético, la integral por una trayectoria cerrada del flujo magnético es siempre cero (ecuación (10.3)), es decir:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (10.89)$$

3. Ley de inducción de Faraday (ver sección (10.1)): La ley de inducción de Faraday establece que la integral de línea del campo eléctrico a través de una trayectoria cerrada es igual a menos el cambio respecto al tiempo del flujo magnético. Matemáticamente se expresa como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (10.90)$$

4. Ley de Ampère (ver sección (9.2)): la ley de Ampère establece que la integral de línea del campo magnético a través de una trayectoria cerrada, es proporcional a la corriente de conducción  $I_c$  que atraviesa el área limitada por la trayectoria establecida en la integración (cualquiera de las áreas posibles) o es proporcional a la corriente de desplazamiento  $I_D$  que atraviesa dicha superficie (o cualquiera de las superficies posibles). La corriente de desplazamiento  $I_D$  es proporcional al cambio en el tiempo del flujo eléctrico. Matemáticamente la ley de Ampère se expresa como (ver ecuación (9.146)):

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (10.91)$$

**Pregunta 10.1.** *Un cable delgado infinito se extiende a lo largo del eje  $y$ , el cual lleva una corriente  $I$  (el cable se mantiene fijo). Una espira rectangular ubicada a la derecha del cable se mueve a un tiempo  $t$  hacia la derecha (alejándose del cable infinito) a una velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$ . Respecto a la situación descrita anteriormente, respecto a la densidad de corriente inducida sobre la espira rectangular, se puede decir que:*

- La densidad de corriente fluye en sentido contrario de las manecillas del reloj.*
- La densidad de corriente fluye a favor de las manecillas del reloj.*
- No existe densidad de corriente inducida.*

**Pregunta 10.2.** *Se tiene un alambre delgado infinito que lleva una corriente  $I$  en dirección  $\hat{j}$ . A una distancia  $r$  a la derecha del eje del alambre se ubica el lado izquierdo de una espira cuadrada de lado  $L$ . Si la espira cuadrada se mueve con velocidad  $\vec{v} = -v\hat{j}$ , respecto a la corriente inducida sobre la espira se puede decir que:*

- Es  $I$  y fluye en dirección  $\hat{j}$ .*

- b) Es  $I$  y fluye en dirección  $-\hat{j}$
- c) Es cero.
- d) Faltan datos para determinar su valor.

**Pregunta 10.3.** *Una anillo metálico de radio  $R$  se ubica en una región donde existe un campo magnético que atraviesa el anillo perpendicularmente. El plano del anillo se ubica en el plano  $xy$  y el campo magnético se dirige en dirección  $\hat{k}$ . Si la magnitud del campo aumenta, la dirección del flujo de corriente eléctrica es:*

- a) En sentido de las manecillas del reloj.
- b) En sentido contrario a las manecillas del reloj.
- c) Es cero.
- d) Faltan datos para determinar la dirección del flujo de corriente.

**Pregunta 10.4.** *Un aro de cobre se sostiene en posición vertical en un plano este-oeste, dentro de un campo magnético uniforme cuyas líneas de campo se orientan en la dirección norte-sur. La mayor fuerza electromotriz ( $fem$ ) inducida se produce cuando el aro:*

- a) gira alrededor de un eje norte-sur.
- b) gira alrededor de un eje este-oeste.
- c) se mueve rápidamente, sin girar, hacia el sur.
- d) se mueve rápidamente, sin girar, hacia el noroeste.

# Índice de figuras

---

1.1. Vectores unitarios base en un plano cartesiano 3D . . . . .	11
1.2. Componentes cartesianas de un vector en tres dimensiones. . . . .	11
1.3. Vector en dos dimensiones. . . . .	13
1.4. Vectores en coordenadas polares. . . . .	14
1.5. Ejemplo (1.2). Representación gráfica de cuatro vectores en un plano. . . . .	17
1.6. Vector en coordenadas cilíndricas. . . . .	18
1.7. Vector en coordenadas esféricas. . . . .	19
1.8. Ejemplo (1.4). Se representa tres vectores cuya suma es igual a cero . . . . .	22
1.9. Suma de vectores. . . . .	25
1.10. Método del polígono. . . . .	25
1.11. Método del paralelogramo. . . . .	26
1.12. Ejemplo (1.5). Suma de vectores en representación gráfica. . . . .	26
1.13. Resta de vectores $\vec{A} + (-\vec{B})$ . . . . .	29
1.14. Ejemplo (1.7). Desplazamientos parciales y total para la situación descrita en el enunciado del ejemplo (1.7). . . . .	30
1.15. Ejemplo (1.7). Desplazamiento total aplicando el método del paralelogramo. . . . .	30
1.16. Ángulo entre dos vectores utilizados en la definición del producto punto. . . . .	32
1.17. Proyecciones asociadas al producto punto. . . . .	33
1.18. Ejemplo (1.8). Representación gráfica de los vectores descritos en el enunciado del ejemplo (1.8). . . . .	34
1.19. Ejemplo (1.9). Representación gráfica del vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$ , asociados al ejemplo (1.9) en tres dimensiones. . . . .	35
1.20. Ejemplo (1.9). Ángulo entre los vectores asociados al ejemplo (1.9) en dos dimensiones. . . . .	35

1.21. Ángulos asociados a la definición de la magnitud del producto cruz entre dos vectores. . . . .	42
1.22. Proyección del vector $\vec{A}$ sobre un eje perpendicular al vector $\vec{B}$ . . . . .	42
1.23. Regla de la mano derecha. . . . .	43
1.24. Ejemplo del uso de la regla de la mano derecha. . . . .	44
1.25. Otra perspectiva en la determinación de la dirección del producto cruz. . . . .	45
1.26. Ejercicio (1.3). Tres vectores formando un triángulo rectángulo . . . . .	51
2.1. Dos cargas puntuales $q_1$ y $q_2$ , separadas una distancia $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , ejercen una fuerza entre sí, que está dada por la Ley de Coulomb $\vec{F}_{21}$ . . . . .	54
2.2. Invarianza del vector $\vec{r}_{ij}$ . . . . .	56
2.3. Ejemplo (2.1). Ley de Coulomb aplicada a la interacción de dos partículas. . . . .	56
2.4. Ejemplo (2.3). Seis cargas ubicadas simétricamente sobre un círculo. . . . .	59
2.5. Ejemplo (2.4). Partícula de carga $q$ bajo la influencia de interacción eléctrica y su peso. . . . .	60
2.6. Ejemplo (2.5). Dos cargas con igual carga se encuentran en equilibrio, suspendidas por cuerdas de longitud $L$ . . . . .	63
2.7. Ejemplo (2.6). Movimiento oscilatorio para una carga puntual debido a interacción eléctrica. . . . .	64
2.8. Ejemplo (2.7). Vara rígida en equilibrio por la interacción de dos cargas eléctricas, un pivote y una masa $m$ . . . . .	66
2.9. Ejercicio (2.2). Tres partículas en interacción eléctrica. . . . .	67
2.10. Ejercicio (2.3). Cargas puntuales $-q$ ubicadas en un cuadrado de lado $a$ , interactuando con una carga $Q$ a lo largo del eje $z$ . . . . .	67
2.11. Ejercicio (2.5). Configuración de cargas puntuales ubicadas en los vértices de un cubo, interactuando con una carga en un punto $P$ ubicado en uno de los lados del cubo. . . . .	67
2.12. Ejercicio (2.6). Configuración de cargas puntuales en un hexágono, interactuando con una carga $Q$ en el centro del hexágono. . . . .	68
2.13. Ejercicio (2.7). Configuración de cargas en triángulo equilátero. . . . .	68
2.14. Ejercicio (2.8). Cargas puntuales en extremos de barra horizontal. . . . .	68
2.15. Ejemplo (2.9). Distribución de carga lineal sobre un semicírculo de radio $R$ . . . . .	71
2.16. Ejemplo (2.10). Carga total de un plano con carga eléctrica no uniforme. . . . .	71
2.17. Ejemplo (2.11). Carga total en un cascarón esférico con densidad de carga no uniforme. . . . .	72
2.18. Ley de coulomb en una distribución continua de carga. . . . .	74

2.19. Ejemplo (2.13). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea infinita de carga. . . . .	75
2.20. Ejemplo (2.14). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea finita de carga. . . . .	78
2.21. Ejemplo (2.15). Fuerza sobre una carga puntual $q$ , debida a una línea de carga finita . . . . .	79
2.22. Ejemplo (2.16). Fuerza eléctrica entre dos barras cargadas. . . . .	81
2.23. Ejemplo (2.17). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y una línea asimétrica finita con densidad de carga uniforme. . . . .	83
2.24. Ejemplo (2.18). Fuerza eléctrica entre una partícula cargada y un anillo cargado eléctricamente. . . . .	85
2.25. Ejemplo (2.18). Descomposición vectorial de la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a un aro cargado. . . . .	86
2.26. Ejemplo (2.19). Fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a un disco cargado. . . . .	88
2.27. Ejemplo (2.20). Fuerza eléctrica sobre una partícula cargada debido a plano infinito cargado. . . . .	89
2.28. Ejemplo (2.21). Fuerza eléctrica sobre una carga $q$ debido a un cilindro cargado. . . . .	90
2.29. Ejercicio (2.18). Interacción entre una carga puntual y una distribución lineal de carga . . . . .	92
2.30. Ejercicio (2.19). Partícula de carga $q$ interactuando con un alambre infinito cargado . . . . .	92
2.31. Ejercicio (2.20). Fuerza sobre una carga puntual $Q$ ejercida por tres densidades lineales infinitas de carga . . . . .	93
2.32. Pregunta (2.1). Dirección de la fuerza eléctrica sobre dos electrones y un protón. . . . .	93
2.33. Pregunta (2.2). Fuerza eléctrica sobre una partícula de carga $-Q$ . . . . .	93
3.1. Campo eléctrico para cargas puntuales. . . . .	97
3.2. Campo eléctrico generado por dos cargas de signo opuesto. . . . .	99
3.3. Campo eléctrico generado por dos cargas positivas. . . . .	99
3.4. Ejemplo 3.1. Campo eléctrico debido a cuatro cargas puntuales . . . . .	100
3.5. Ejemplo 3.2. Campo eléctrico debido a ocho cargas puntuales ubicadas sobre los vértices de un cubo de lado $a$ . . . . .	102
3.6. Ejemplo 3.2. Campo eléctrico asociado a un dipolo eléctrico. . . . .	104
3.7. Ejercicio (3.1). Campo eléctrico debido a una configuración de tres cargas puntuales ubicadas en puntos sobre un cuadrado. . . . .	108

3.8. Ejercicio 3.2. Campo eléctrico debido a seis cargas puntuales en un hexágono.	108
3.9. Ejercicio 3.5. Campo eléctrico debido a tres cargas puntuales . . . . .	109
3.10. Ejercicio 3.6. Campo eléctrico debido a cuatro cargas eléctricas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado $L$ . . . . .	109
3.11. Ejercicio 3.7. Campo eléctrico asociado a cinco cargas puntuales distribuidas a lo largo de un semicírculo de radio $r$ . . . . .	109
3.12. Ejercicio 3.8. Campo eléctrico asociado a cuatro cargas puntuales . . . . .	110
3.13. Ejercicio 3.9. Campo eléctrico generado por dos dipolos eléctricos. . . . .	110
3.14. Ejercicio 3.10. Campo eléctrico debido a seis cargas puntuales. . . . .	110
3.15. Ejercicio 3.11. Fuerza eléctrica sobre una carga puntual $-Q$ , debido a cuatro cargas puntuales. . . . .	111
3.16. Ejemplo (3.4). Campo eléctrico generado por una barra cargada de longitud $L$ .	114
3.17. Ejemplo (3.5). Campo eléctrico generado por dos planos infinitos cargados. .	116
3.18. Ejemplo (3.6). Campo eléctrico debido a dos líneas de carga infinitas. . . . .	118
3.19. Ejemplo (3.7). Electrón en presencia de un campo eléctrico uniforme. . . . .	121
3.20. Ejemplo 3.8. Campo eléctrico debido a una barra infinita cargada con densidad de carga no uniforme extendida sobre el eje $x$ . . . . .	123
3.21. Ejemplo 3.9. Campo eléctrico generado por carga distribuida uniformemente sobre un semicírculo. . . . .	124
3.22. Ejemplo 3.10. Campo eléctrico debido a dos anillos cargados. . . . .	125
3.23. Ejercicio 3.14. Campo eléctrico debido a una línea finita cargada uniformemente.	127
3.24. Ejercicio (3.15). Campo eléctrico sobre un eje perpendicular a dos barras cargadas. . . . .	127
3.25. Ejercicio 3.16. Campo eléctrico generado por un anillo cargado no uniformemente	128
3.26. Ejercicio 3.17. Campo eléctrico debido a una carga distribuida uniformemente sobre una longitud finita extendida sobre el eje $x$ . . . . .	128
3.27. Ejemplo 3.18. Campo eléctrico generado por dos semicírculos cargados . . . .	128
3.28. Ejercicio 3.19. Campo eléctrico generado por dos líneas de longitud infinita con densidad de carga uniforme. . . . .	129
3.29. Ejercicio 3.20. Campo eléctrico generado por una varilla en forma de arco, con densidad de carga uniforme. . . . .	129
3.30. Ejemplo 3.11. Campo eléctrico generado por un plano infinito cargado, con un hueco circular en su centro. . . . .	129
3.31. Ejemplo 3.12. Campo eléctrico debido a una arandela cargada. . . . .	131
3.32. Ejercicio 3.22. Campo eléctrico generado por dos planos cargados. . . . .	134

3.33. Ejercicio 3.23. Campo eléctrico generado por dos planos cargados. . . . .	134
3.34. Pregunta 3.1. Interacción eléctrica de un protón y dos planos cargados. . . .	135
3.35. Pregunta 3.2. Campo eléctrico debido a cuatro cargas puntuales. . . . .	135
3.36. Pregunta 3.3. Campo eléctrico en el punto $O$ debido a dos barras curvadas. .	136
4.1. Flujo de un fluido incomprensible a través de un anillo. . . . .	138
4.2. Flujo de campo eléctrico uniforme. . . . .	139
4.3. Vector de área $d\vec{A}$ . . . . .	140
4.4. Flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada. . . . .	140
4.5. Ejemplo (4.2). Flujo eléctrico a través de tres superficies cuadradas. . . . .	142
4.6. Ejemplo (4.3). Flujo eléctrico a través de una de las caras de un cubo de lado $a$ , debido a un campo eléctrico $\vec{E}$ . . . . .	143
4.7. Ejemplo (4.4). Flujo eléctrico a través de una superficie circular debido a una carga puntual . . . . .	144
4.8. Ejemplo (4.5). Flujo eléctrico a través de un paraboloide. . . . .	145
4.9. Ejemplo (4.6). Flujo eléctrico debido a una carga puntual y un anillo uniformemente cargado. . . . .	146
4.10. Ejercicio (4.3). Flujo eléctrico a través de una superficie rectangular, debido a una carga puntual . . . . .	147
4.11. Ejercicio (4.4). Flujo eléctrico a través de una de las caras de un cubo de lado $a$	147
4.12. Diferentes superficies que encierran una carga. . . . .	149
4.13. Flujo eléctrico debido a una carga puntual externa a una superficie cerrada. .	149
4.14. Ejemplo (4.8). Flujo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales. . . .	150
4.15. Ejemplo (4.9). Flujo eléctrico a través de 4 superficies cerradas y 3 cargas puntuales . . . . .	151
4.16. Ejemplo (4.10). Ley de Gauss aplicada a una esfera cargada de radio $R$ para $r > R$ . . . . .	152
4.17. Ejemplo (4.10). Ley de Gauss aplicada a un esfera cargada en el caso $r < R$ .	154
4.18. Ejemplo (4.10). Campo eléctrico generado por una esfera de radio 1 uniformemente cargada . . . . .	155
4.19. Ejemplo (4.11). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera aislante y una carga puntual. a) región $r < a$ , b) región $a < r < b$ , c) región $r > b$ . . . . .	155
4.20. Ejemplo (4.12). Campo eléctrico al interior de una esfera con distribución de carga no uniforme. . . . .	158

4.21. Ejemplo (4.12). Campo eléctrico al exterior de una esfera con distribución de carga no uniforme. . . . .	159
4.22. Ejemplo (4.13). Campo eléctrico debido a un cascarón esférico de radio interior $a$ y radio exterior $b$ con distribución de carga no uniforme. . . . .	160
4.23. Ejemplo (4.14). Ley de Gauss aplicada a un cilindro cargado en la región $r > R$ .	162
4.24. Ejemplo (4.14). Ley de Gauss aplicada a un cilindro cargado en la región $r < R$ .	164
4.25. Ejemplo (4.16). Ley de Gauss aplicada a un plano infinito cargado. . . . .	167
4.26. Ejemplo (4.17). Flujo eléctrico a través de un cubo. . . . .	168
4.27. Ejemplo (4.18). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera aislante y una carga puntual. a) región $r < a$ , b) región $a < r < b$ , c) región $r > b$ . . . . .	172
4.28. Ejemplo (4.19). Superficies de integración en el cálculo del campo eléctrico asociado a una esfera conductora cargada y una carga puntual. a) región $r < a$ , b) región $a < r < b$ , c) región $r > b$ . . . . .	173
4.29. Ejemplo (4.20). Plano infinito conductor neutro en un campo eléctrico externo.	175
4.30. Ejercicio (4.11). Campo eléctrico de una esfera dieléctrica y una esfera hueca metálica. . . . .	177
4.31. Ejercicio (4.13). Flujo eléctrico a través de 5 superficies cerrada, asociado a 4 cargas puntuales. . . . .	177
4.32. Ejercicio (4.15). Flujo eléctrico a través de una superficie esférica, debido a una línea infinita de carga. . . . .	178
5.1. Desplazamiento de una carga $q_i$ en presencia de fuerza eléctrica. . . . .	182
5.2. Ejemplo (5.4). Trabajo sobre una carga $q_i$ debido a una carga $q_j$ . . . . .	188
5.3. Ejemplo (5.6). Configuración de cinco cargas puntuales. . . . .	191
5.4. Tres cargas “ubicadas” en el infinito. . . . .	196
5.5. Ubicación de $q_1$ desde el infinito al punto $\vec{r}_1$ . . . . .	196
5.6. Ubicación de $q_1$ y $q_2$ desde el infinito a los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ . . . . .	197
5.7. Ubicación de $q_1$ , $q_2$ y $q_3$ desde el infinito a los puntos $\vec{r}_1$ , $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ . . . . .	197
5.8. Ejemplo 5.7. Energía potencial asociada a cuatro partículas cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado. . . . .	199
5.9. Ejercicio 5.3. Trabajo eléctrico establecido a partir de siete cargas puntuales.	200
5.10. Ejercicio 5.4. Energía potencial asociada a tres cargas puntuales. . . . .	201
5.11. Ejercicio 5.5. Trabajo necesario para conformar una configuración de cuatro cargas puntuales. . . . .	201

5.12. Ejemplo (5.14). Potencial eléctrico sobre el eje $z$ , debido a cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado $2a$ . . . . .	208
5.13. Ejemplo 5.15. Potencial eléctrico en el centro de un rectángulo debido a seis cargas puntuales. . . . .	209
5.14. Ejemplo 5.17. Estudio de la energía eléctrica de un protón dentro de un tubo cilíndrico cargado. . . . .	212
5.15. Ejercicio 5.6. Potencial eléctrico debido a cuatro cargas puntuales. . . . .	213
5.16. Ejercicio (5.9). Potencial eléctrico para diferentes arreglos de cargas puntuales. . . . .	214
5.17. Ejercicio 5.11. Potencial eléctrico debido a 4 cargas puntuales. . . . .	215
5.18. Ejercicio 5.14. Potencial eléctrico debido a un dipolo eléctrico. . . . .	215
5.19. Potencial eléctrico asociado a una distribución continua de carga. . . . .	216
5.20. Ejemplo (5.18). Potencial eléctrico asociado a un semicírculo de carga $Q$ . . . . .	217
5.21. Ejemplo 5.19. Potencial eléctrico de un círculo cargado dividido en dos secciones con carga $Q_1$ y $Q_2$ respectivamente. . . . .	218
5.22. Ejemplo (5.20). Potencial eléctrico sobre el eje $x$ asociado a un cable recto cargado con densidad de carga uniforme. . . . .	219
5.23. Ejemplo 5.21. Potencial asociado a un varilla cargada extendida sobre el eje $x$ . . . . .	220
5.24. Ejemplo 5.22. Potencial eléctrico de un alambre con dos secciones rectas y una sección circular. . . . .	222
5.25. Ejemplo (5.23). Potencial eléctrico asociado a un cable recto de densidad de carga uniforme. . . . .	224
5.26. Ejemplo (5.23). Potencial eléctrico sobre el eje $x$ asociado a un cable recto de densidad de carga uniforme. . . . .	227
5.27. Ejemplo (5.24). Potencial eléctrico sobre el eje $y$ asociado a un anillo cargado. . . . .	229
5.28. Ejemplo (5.26). Potencial eléctrico sobre el eje $x$ asociado a un disco cargado. . . . .	232
5.29. Ejemplo 5.27. Potencial eléctrico asociado a un disco cargado con densidad de carga superficial no uniforme. . . . .	234
5.30. Ejercicio 5.19. Potencial eléctrico debido a una varilla cargada. . . . .	237
5.31. Ejercicio 5.20. Potencial eléctrico debido a un arco circular cargado. . . . .	237
5.32. Ejercicio 5.21. Potencial eléctrico debido a tres arcos circulares cargados. . . . .	238
5.33. Ejercicio 5.22. Potencial eléctrico debido a un cuarto de disco cargado. . . . .	238
5.34. Ejercicio 5.23. Potencial eléctrico debido a tres arcos circulares cargados. . . . .	238
6.1. Capacitores de placas paralelas, esféricas y cilíndricas. . . . .	241
6.2. Capacitor de placas paralelas. . . . .	242

---

6.3. Campo eléctrico dentro de un capacitor de placas paralelas. . . . .	244
6.4. Campo eléctrico dentro de un capacitor de placas cilíndricas. . . . .	247
6.5. Representación esquemática de un capacitor. . . . .	253
6.6. Dos capacitores en serie. . . . .	253
6.7. Configuración de dos capacitores en serie. . . . .	254
6.8. Arreglo de $N$ capacitores en serie . . . . .	256
6.9. Dos capacitores en paralelo. . . . .	257
6.10. Configuración de dos capacitores en paralelo. . . . .	258
6.11. Ejemplo (6.6). Arreglo de cinco capacitores en configuración mixta. . . . .	261
6.12. Ejemplo (6.6). Reducción asociado al arreglo de cinco capacitores en configuración mixta. . . . .	262
6.13. Ejemplo 6.7. Capacitancia equivalente para un arreglo de seis capacitores. . . . .	263
6.14. Ejemplo 6.7. Circuito equivalente asociado al circuito descrito en la figura 6.13. . . . .	264
6.15. Ejemplo 6.8. Arreglo de siete capacitores en un arreglo mixto. . . . .	264
6.16. Ejemplo 6.8. Simplificación parcial de el circuito descrito en la figura 6.15. . . . .	265
6.17. Ejemplo 6.8. Simplificación del circuito indicado en la figura 6.16. . . . .	265
6.18. Ejemplo 6.8. Circuito equivalente al indicado en la figura 6.17. . . . .	265
6.19. Ejemplo 6.9. Arreglo de cuatro capacitores en configuración mixta. . . . .	266
6.20. Ejemplo 6.9. Circuito simplificado asociado al circuito descrito en la figura 6.19. . . . .	266
6.21. Ejemplo 6.9. Circuito simplificado asociado al circuito descrito en la figura 6.20. . . . .	267
6.22. Ejercicios 6.4 y 6.5. Arreglo de tres capacitores en configuración mixta. . . . .	268
6.23. Ejercicio 6.7. Arreglo de nueve capacitores en configuración mixta. . . . .	269
6.24. Ejercicio 6.8. Arreglo de cinco capacitores en configuración mixta. . . . .	269
6.25. Ejercicio 6.9. Arreglo de siete capacitores en configuración mixta. . . . .	269
6.26. Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores. . . . .	271
6.27. Configuración equivalente de dos capacitores en serie asociado al capacitor de la figura 6.26. . . . .	271
6.28. Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores. . . . .	272
6.29. Configuración equivalente de dos capacitores en paralelo asociado al capacitor de la figura 6.28. . . . .	272
6.30. Capacitor con dos dieléctricos en la separación entre sus conductores. . . . .	272
6.31. Configuración equivalente de tres capacitores asociado al capacitor de la figura 6.30. . . . .	273

6.32. Ejemplo 6.12. Capacitor con dos medios dieléctricos en “serie” . . . . .	273
6.33. Ejemplo 6.12. Configuración equivalente del capacitor indicado en la figura 6.32.	274
6.34. Ejemplo 6.13. Capacitor con dos medios dieléctricos en “paralelo” . . . . .	274
6.35. Ejemplo 6.13. Configuración equivalente al capacitor indicado en la figura 6.13.	275
6.36. Ejemplo 6.14. Dos capacitores parcialmente llenos de un material con constante dieléctrica $\kappa$ . . . . .	275
6.37. Ejemplo 6.14. Configuración equivalente asociada al capacitor indicado en la figura 6.36a. . . . .	276
6.38. Ejemplo 6.14. Configuración equivalente asociada al capacitor indicado en la figura 6.36b. . . . .	276
6.39. Ejercicio 6.11. Capacitor de placas paralelas lleno con tres dieléctricos. . . . .	277
6.40. Ejercicio 6.12. Carga en un capacitor lleno con dos materiales dieléctricos en “serie” . . . . .	278
6.41. Ejemplo 6.16. Energía potencial eléctrica en un arreglo de cinco capacitores en configuración en mixta (serie y paralelo). . . . .	279
6.42. Ejemplo 6.16. Primera simplificación del circuito indicado en la figura 6.41. . . . .	280
6.43. Ejemplo 6.16. Segunda simplificación del circuito indicado en la figura 6.42. . . . .	280
6.44. Ejemplo 6.17. Energía almacenada en un arreglo de seis capacitores en configuración mixta. . . . .	281
6.45. Ejemplo 6.17. Primera simplificación al arreglo de capacitores indicado en la figura 6.44. . . . .	281
6.46. Ejemplo 6.17. Segunda simplificación al arreglo de capacitores indicado en la figura 6.44. . . . .	281
6.47. Ejercicio 6.16. Energía almacenada en cuatro capacitores en arreglo mixto. . . . .	282
6.48. Ejercicio 6.17. Energía almacenada en cinco capacitores en arreglo mixto. . . . .	282
6.49. Ejercicio 6.18. Energía potencial de cuatro capacitores con configuraciones: con interruptor cerrado e interruptor abierto. . . . .	282
6.50. Ejercicio 6.20. Capacitor parcialmente lleno de material dieléctrico. . . . .	283
6.51. Ejercicio 6.21. Energía almacenada en condensadores en paralelo. . . . .	283
7.1. Interpretación de la corriente eléctrica con portadores de carga negativa. . . . .	287
7.2. Movimiento de portadores de carga en un conductor lineal . . . . .	288
7.3. Ejercicio 7.5. Cálculo de corriente eléctrica por una cara de un cubo. . . . .	294
7.4. Resistencia eléctrica a lo largo del eje “radial” para un conductor cilíndrico. . . . .	297
7.5. Ejemplo 7.6. Resistencia eléctrica entre cascarones esféricos concéntricos. . . . .	298

7.6. Ejemplo 7.7. Resistencia eléctrica asociada a un material en forma de cuña. . . . .	299
7.7. Ejercicio 7.6. Resistencia eléctrica de un objeto cilíndrico hueco. . . . .	301
7.8. Símbolo de resistencia eléctrica. . . . .	302
7.9. Símbolo de fuente eléctrica constante ideal (sin resistencia interna). . . . .	303
7.10. Circuito básico con resistencia Óhmica. . . . .	303
7.11. Dos resistencias en serie. . . . .	304
7.12. Circuito con dos resistencias en serie. . . . .	305
7.13. Circuito equivalente asociado a dos resistencias en serie. . . . .	306
7.14. $N$ resistencias en serie. . . . .	306
7.15. Configuración de dos resistencias en paralelo. . . . .	307
7.16. Circuito con dos resistencias en paralelo. . . . .	308
7.17. Circuito equivalente asociado a dos resistencias en paralelo. . . . .	309
7.18. $N$ resistencias en paralelo. . . . .	309
7.19. Ejemplo de un circuito con resistencias en configuración mixta. . . . .	310
7.20. Simplificación para el circuito descrito en la figura 7.19. . . . .	311
7.21. Simplificación circuito mixto ejemplo (7.10). . . . .	315
7.22. Ejemplo 7.11. Arreglo de cinco resistencia con igual valor $R$ . . . . .	316
7.23. Ejemplo 7.11. Primera y segunda simplificación del circuito descrito en la figura 7.22. . . . .	316
7.24. Ejemplo 7.12. Primera simplificación del circuito descrito en la figura 7.22, en el cálculo de la resistencia equivalente entre el punto $F$ y $G$ . . . . .	317
7.25. Ejemplo 7.12. Segunda y tercera simplificación del circuito descrito en la figura 7.22, en el cálculo de la resistencia equivalente entre el punto $F$ y $G$ . . . . .	317
7.26. Ejemplo 7.14. Arreglo mixto de cuatro resistencias. . . . .	318
7.27. Ejemplo 7.14. Primera y segunda simplificación del circuito indicado en la figura 7.26. . . . .	319
7.28. Ejemplo 7.15. Circuito con seis resistencias en configuración mixta. . . . .	320
7.29. Ejemplo 7.14. Primera y segunda simplificación del arreglo indicado en la figura 7.26. . . . .	321
7.30. Ejercicio 7.7. Arreglo de seis resistencias en configuración mixta. . . . .	321
7.31. Ejercicio 7.9. Corriente en cada resistencia con interruptor abierto e interruptor cerrado. . . . .	322
7.32. Ejercicio 7.10. Arreglo de tres resistencias en configuración mixta. . . . .	322
7.33. Ejercicio 7.11. Circuito con cuatro resistencias, una fuerte y un interruptor. . . . .	322

7.34. Ejercicio 7.12. Determinación de la corriente por las resistencias $R_3$ y $R_4$ . . .	323
7.35. Ejercicio 7.13 . Resistencia equivalente para una arreglo de cinco resistencias en configuración mixta. . . . .	323
7.36. Mallas y nodos en un circuito eléctrico. . . . .	324
7.37. Mallas asociadas al circuito de la figura 7.36 . . . . .	324
7.38. Malla asociada al circuito de la figura 7.36. . . . .	325
7.39. Nodo con dos corrientes entrantes y dos corrientes salientes. . . . .	327
7.40. Circuito mixto ejemplo (7.16). . . . .	328
7.41. Mallas para el circuito descrito en 7.40. . . . .	329
7.42. Ejemplo 7.17. Aplicación de las leyes de Kirchhoff. . . . .	330
7.43. Ejemplo 7.17. Mallas asociadas al circuito indicado en la figura 7.42. . . . .	330
7.44. Ejemplo 7.18. Aplicación de las leyes de Kirchhoff, tomando tres mallas. . . .	332
7.45. Ejemplo 7.17. Mallas (7.44). . . . .	332
7.46. Ejercicio 7.14. Circuito con dos fuentes y cuatro resistencias. . . . .	333
7.47. Ejercicio 7.15. Potencia disipada en la resistencia $R_2$ . . . . .	334
7.48. Ejercicio 7.16. Determinación del voltaje suministrado por la fuente de voltaje $V_2$ . . . . .	334
7.49. Ejercicio 7.17. Potencia disipada por cada resistor en un circuito con seis resistencias y tres fuentes de voltaje. . . . .	334
7.50. Ejercicio 7.18. Corriente medida en el amperímetro ubicado entre $R_5$ y $R_6$ . .	335
7.51. Ejercicio 7.19. Determinación de las corrientes $I_1$ , $I_2$ e $I_3$ . . . . .	335
7.52. Carga de un capacitor. . . . .	336
7.53. $q_c$ vs $t$ en el proceso de carga de un capacitor. . . . .	338
7.54. $I$ vs $t$ en el proceso de carga de un capacitor. . . . .	339
7.55. Circuito asociado a descarga de un capacitor. . . . .	340
7.56. $q_c$ vs $t$ en el proceso de descarga de un capacitor. . . . .	341
7.57. corriente ( $I$ ) vs tiempo ( $t$ ) en el proceso de descarga de un capacitor. . . .	342
7.58. Ejemplo (7.19). Carga máxima en un capacitor. . . . .	342
7.59. Ejemplo (7.19).Malla a la izquierda del circuito indicado en la figura 7.58. . .	343
7.60. Ejemplo (7.19). Mallas del circuito indicado en la figura 7.58. . . . .	344
7.61. Ejemplo 7.20. Análisis de la descarga de dos capacitores en paralelo con dos resistencias en serie. . . . .	345
7.62. Ejemplo 7.21. Energía almacenada en tres capacitores en serie. . . . .	347

7.63. Ejemplo 7.22. Análisis del proceso de carga para dos capacitores en paralelo.	348
7.64. Ejemplo 7.23. Análisis del proceso de carga y descarga de un condensador en un dos configuraciones diferentes (interruptor abierto y cerrado).	350
7.65. Ejercicio 7.20. Proceso de carga de un capacitor.	351
7.66. Ejercicio 7.21. Análisis del proceso de carga y descarga de un capacitor en dos configuraciones diferentes (interruptor abierto y cerrado).	352
7.67. Ejercicio 7.22. Análisis de un circuito con un capacitor, cuatro resistencias y una fuente de voltaje.	352
8.1. Fuerza magnética entre dos cargas en movimiento.	354
8.2. Electrón en presencia de un campo magnético uniforme.	356
8.3. Electrón en presencia de un campo magnético y campo eléctrico uniformes.	358
8.4. Conductor lineal en medio de un campo magnético uniforme.	364
8.5. Conductor circular en medio de un campo magnético uniforme.	366
8.6. Conductor semicircular en medio de un campo magnético uniforme.	367
8.7. Conductor rectangular en medio de un campo magnético uniforme.	368
8.8. Varilla conductora en medio de un campo magnético uniforme.	369
8.9. Ejemplo 8.11. Equilibrio sobre una barra suspendida por dos resortes ideales.	371
8.10. Ejemplo 8.12. Torque sobre una barra pivoteada en uno de sus extremos, debido a la aplicación de una fuerza magnética y una fuerza elástica.	372
8.11. Ejemplo 8.13. Espira cuadrada con corriente $I$ en presencia de un campo magnético no uniforme.	374
8.12. Ejemplo 8.14. Barra de masa $m$ que reposa sobre dos rieles paralelos separados una distancia $d$ y de longitud $L$ .	375
8.13. Ejercicio 8.6. Espira rectangular en un campo magnético.	377
8.14. Ejercicio 8.7. Conductor en campo magnético en la dirección $z$ .	377
8.15. Ejercicio 8.8. Fuerza magnética sobre una espira, debida a un campo magnético uniforme.	378
8.16. Ejercicio 8.9. Elongación de dos resortes que mantienen en equilibrio una barra de masa $M$ con corriente $I$ .	378
8.17. Ejercicio 8.10. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente $I$ .	378
8.18. Torque ejercido por un campo magnético sobre un conductor rectangular.	379
8.19. Torque sobre una espira producido por un campo magnético uniforme.	382
8.20. Ejemplo (8.16). Torque sobre una varilla conductora de corriente $I$ .	383

8.21. Ejemplo (8.16). Diagrama de cuerpo libre, sobre una varilla conductora de corriente $I$ . . . . .	383
8.22. Ejemplo 8.17. Momento magnético dipolar de una espira. . . . .	386
8.23. Ejemplo 8.18. Momento dipolar, torque y energía magnética para una bobina rectangular. . . . .	387
8.24. Ejemplo 8.20. Momento dipolar magnético para una barra en rotación. . . .	389
8.25. Ejemplo 8.21. Torque aplicado sobre un disco cargado en rotación. . . . .	391
8.26. Ejercicio 8.12. Momento dipolar magnético para dos espiras con corriente $I$ . .	392
8.27. Ejercicio 8.13. Torque aplicado sobre una bobina de $N$ espiras. . . . .	392
8.28. Ejercicio 8.14. Torque y momento dipolar magnético sobre una bobina circular de $N$ espiras. . . . .	393
8.29. Ejercicio 8.15. Energía y torque sobre una espira. . . . .	393
9.1. Campo magnético ejercido por una carga puntual en movimiento. . . . .	395
9.2. Ejemplo (9.2): Campo magnético producido por una carga puntual. . . . .	396
9.3. Campo magnético debido a un conductor lineal con flujo de corriente $I$ . . . .	397
9.4. Campo magnético asociado a un conductor lineal recto e infinito. . . . .	398
9.5. Campo magnético alrededor de un conductor recto que lleva una densidad de corriente hacia afuera de la página. . . . .	401
9.6. Campo magnético asociado a una espira circular. . . . .	401
9.7. Campo magnético sobre el eje $z$ asociado a una espira circular ubicada en el plano $xy$ . . . . .	403
9.8. Ejemplo 9.6. Campo magnético en el centro de curvatura de una espira cerrada.405	
9.9. Ejemplo 9.6. Tramos $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ y $C_4$ asociados a la espira cerrada indicada en la figura 9.8. . . . .	405
9.10. Ejemplo 9.7. Campo magnético en el centro de curvatura de una espira cerrada.406	
9.11. Ejemplo 9.8. Campo magnético asociado a dos cables rectos conductores. . .	408
9.12. Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos. .	409
9.13. Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con $I_1$ , $I_2$ e $I_3$ entrando en la página. . . . .	410
9.14. Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con $I_1$ , $I_3$ entrando en la página e $I_2$ saliendo. . . . .	411
9.15. Ejemplo 9.9. Campo magnético debido a tres conductores rectos y paralelos, con $I_1$ , $I_2$ entrando en la página e $I_3$ saliendo. . . . .	412
9.16. Ejemplo 9.10. Interacción magnética entre un cable recto y una espira. . . .	413

9.17. Ejercicio 9.1. Campo magnético debido a un conductor con dos segmentos rectos y un segmento semicircular. . . . .	414
9.18. Ejercicio 9.2. Campo magnético debido a espira con dos segmentos rectos y dos arcos circulares. . . . .	415
9.19. Ejercicio 9.3. Campo magnético debido a dos conductores. . . . .	415
9.20. Ejercicio 9.4. Campo magnético debido a dos conductores con segmentos de arcos circulares. . . . .	416
9.21. Ejercicio 9.6. Campo magnético debido a tres conductores rectos ubicados en los vértices de un triángulo. . . . .	416
9.22. Ley de Ampère aplicada sobre cuatro trayectorias cerradas. . . . .	417
9.23. Campo magnético alrededor de un conductor recto e infinito. . . . .	418
9.24. Campo magnético dentro de un conductor cilíndrico. . . . .	419
9.25. Ejemplo (9.13). Campo magnético dentro de un toroide. . . . .	420
9.26. Ejemplo (9.13). Líneas de corriente que atraviesan un círculo de radio $r$ en un toroide. . . . .	421
9.27. Ejemplo (9.14). Campo magnético asociado a un solenoide. . . . .	421
9.28. Trayectoria cerrada para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide.	422
9.29. Ejemplo 9.15. Calculo de circulación de campo magnético a través de cuatro trayectorias. . . . .	423
9.30. Ejemplo 9.16. . . . .	424
9.31. Ejercicio 9.7. Circulación a través de tres espiras circulares. . . . .	426
9.32. Ejercicio 9.9. Cables coaxiales con corriente $I$ . . . . .	427
9.33. Dos posibles superficies limitadas por una circunferencia. . . . .	427
9.34. Corriente de conducción y corriente de desplazamiento. . . . .	428
10.1. Ejemplo 10.1. Flujo magnético sobre un disco de radio $R$ , debido a el campo magnético generado por un solenoide. . . . .	432
10.2. Ejemplo 10.1. Corte transversal para el sistema indicado en la figura 10.1. . . . .	432
10.3. Ejemplo 10.2. Flujo magnético a través de un cascarón semiesférico. . . . .	433
10.4. Ejemplo (10.3). Flujo magnético sobre una espira rectangular. . . . .	434
10.5. Ejercicio 10.2. Flujo magnético a través de la cara de un cubo, debido a un campo magnético externo no uniforme. . . . .	435
10.6. Espira cerrada en medio de un campo magnético en dirección $\hat{k}$ , con una corriente y fem inducida por un aumento en el tiempo en el flujo magnético. . . . .	436

10.7. Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo. . . . .	438
10.8. Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo. . . . .	438
10.9. Aplicación de la ley de Lenz al cambiar la magnitud en el campo magnético externo. . . . .	439
10.10Ejemplo (10.4). Ley de Lenz aplicada a una espira cuadrada. . . . .	439
10.11Ejemplo (10.4). Vector $d\vec{r}'$ y $\vec{r} - \vec{r}'$ , para tres puntos a lo largo del circuito. El producto $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$ tiene dirección $-\hat{k}$ . . . . .	440
10.12Ejemplo 10.5. Corriente inducida sobre una espira circular de radio $R$ debida a un campo magnético variable en el tiempo. . . . .	441
10.13Ejemplo 10.6. Corriente inducida sobre una espira circular debida a el campo magnético generado por un cable infinito de corriente $I$ . . . . .	442
10.14Ejercicio 10.4 y ejemplo (10.13). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular generadas por un campo magnético variable. . . . .	442
10.15Ejercicio 10.5. Corriente inducida sobre una barra que desliza sobre rieles paralelos, en presencia de un campo magnético uniforme. . . . .	443
10.16Ejercicio 10.6. Corriente inducida sobre la espira $B$ debida a la interacción con una espira $A$ con corriente eléctrica $I$ . . . . .	443
10.17Ejercicio (10.7). Sentido de la corriente inducida sobre una espira circular. . . . .	443
10.18Ejercicio (10.8). Sentido de la corriente inducida sobre una espira circular. . . . .	444
10.19Ejemplo (10.7). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular. . . . .	444
10.20Ejemplo (10.8). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular al ingresar en una región de campo magnético constante. . . . .	445
10.21Ejemplo (10.8). Corriente y fem inducida sobre una espira rectangular al salir de una región de campo magnético constante. . . . .	447
10.22Ejemplo (10.8). Corriente y fem en una espira circular que rota sobre su eje vertical de simetría. . . . .	448
10.23Ejemplo (10.10). Corriente y fem inducida en un circuito de área variable . . . . .	449
10.24Ejemplo (10.11). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente $I$ en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ . . . . .	452
10.25Ejemplo (10.12). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente $I$ en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ . . . . .	454
10.26Ejemplo (10.12). Velocidad máxima alcanzada por una barra con corriente $I$ en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ . . . . .	455

---

10.27Ejemplo 10.14. fem inducida sobre una bobina ubicada al interior de un solenoide que conduce una corriente $I$ . . . . .	458
10.28Ejemplo 10.15. fem inducida sobre una espira rectangular externa a un toroide de corriente $I$ . . . . .	458
10.29Ejercicio 10.10. Fem inducida sobre una espira rectangular debida a un campo magnético externo variable. . . . .	460
10.30Ejercicio 10.12. Fem inducida sobre una espira circular de radio $r$ debida a un campo magnético externo variable. . . . .	460

# Bibliografía

---

- [1] J. A. Edminister, *Theory and Problems of Electromagnetism*. McGraw-Hill, 1995.
- [2] *Física Para Ciencias E Ingeniería Vol Ii* (Física para ciencias e ingenierías v. 2). CENGAGE Learning, 2005, ISBN: 9789706864253.
- [3] W. Greiner, *Classical Electrodynamics*. Springer, 1991.
- [4] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, 2013.
- [5] A. F. Kip, *Fundamentals of electricity and magnetism*. McGraw-Hill, 1962.
- [6] D. A. Kraus J. D. y Fleish, *Electromagnetismo con Aplicaciones*. McGraw-Hill, 2000.
- [7] K. D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo, Vol. 1*. UEPG, 2000.
- [8] J. Reitz, F. Milford, R. Christy y C. Avila, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Pearson Educación, 1996.
- [9] P. Tipler y G. Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología. II* (Electricidad y magnetismo. Luz. Física moderna). Reverté, 2004, ISBN: 9788429144123.
- [10] H. Young, F. Sears, R. Freedman et al., *Física universitaria con física moderna 12ED. Volumen II* (Física universitaria v. 2). Pearson Educación, 2009, ISBN: 9786074423044.

## Juan Carlos Salazar Montenegro

Es físico egresado de la Universidad de Nariño, con una maestría en Física de la Universidad de Antioquia y doctorado en Ciencias Físicas de la Universidad de los Andes.

Actualmente es docente de tiempo completo en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño. Integra el grupo de Altas Energías y su investigación se centra en modelos más allá del Modelo Estándar en física de partículas y en didáctica de la enseñanza en física, enfocándose en el desarrollando de herramientas didácticas.

## Ángela Viviana Gómez Azuero

Es licenciada en Física, con maestría y doctorado en Ciencias-Física. Ha trabajado como docente en la Universidad de los Andes y en la Universidad Mariana, donde actualmente es la directora del programa de Ingeniería Civil. Ha participado en grupos de investigación enfocados en Física, Matemáticas, Materia Condensada y Ciencias Básicas aplicadas a la Ingeniería. Con amplia experiencia en programación, su especialización se centra en simulaciones complejas y en la analítica de datos. También investiga la didáctica de la enseñanza en Física, desarrollando metodologías innovadoras para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos físicos a nivel universitario.

## German Enrique Ramos Zambrano

Realizó sus estudios de maestría y doctorado en el Instituto de Física Teórica de la Universidad Estadual Paulista en Sao Paulo, Brasil. Actualmente es docente en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño y en el programa de Maestría en Física de la misma universidad. Forma parte del grupo de Altas Energías, y sus principales líneas de investigación incluyen la teoría clásica y cuántica de campos, así como en didáctica de la enseñanza de la física.

# èditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2025  
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Este libro sobre electromagnetismo para físicos e ingenieros es una síntesis meticulosa de los principios clave que definen el campo. Comenzando con la Ley de Coulomb, el libro explora la interacción entre partículas cargadas, tanto en configuraciones simples de dos cuerpos como en distribuciones complejas de carga, proporcionando una base sólida para entender fuerzas y campos eléctricos.

Posteriormente, el lector es introducido a la Ley de Gauss, facilitando una comprensión profunda de cómo el flujo del campo eléctrico se relaciona con la carga encerrada. La transición hacia el potencial eléctrico y los capacitores destaca la importancia de la energía almacenada, una noción que se expande al discutir la corriente, resistencia y la Ley de Ohm, temas fundamentales en el diseño de circuitos.

Las Leyes de Kirchhoff se abordan de manera que preparan a los futuros ingenieros y físicos para realizar análisis detallados de redes eléctricas, integrando conceptos de corriente y potencial.

La segunda parte del libro aborda los fenómenos magnéticos, desde la fuerza magnética y los campos magnéticos hasta las aplicaciones prácticas de la Ley de Ampère. La discusión culmina con un examen riguroso de las Leyes de Lenz y de Inducción de Faraday, que son cruciales para entender la generación de electricidad.

Con un enfoque accesible pero riguroso, este libro es una herramienta invaluable tanto para estudiantes como para profesionales que buscan consolidar su comprensión del electromagnetismo, preparándolos para innovar en campos que dependen de estos principios.



editorial  
Universidad de Nariño