# ESTUDIO DEI MECANISMO KOZAI EN ASTEROIDES PRÓXIMOS A LA TIERRA (NEO's)

LAINER ALBERTO ERASO RUIZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES PROGRAMA DE FÍSICA SAN JUÁN DE PASTO 2012

# ESTUDIO DEL MECANISMO KOZAI EN ASTEROIDES PRÓXIMOS A LA TIERRA (NEO's)

## LAINER ALBERTO ERASO RUIZ

# TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE FÍSICO

# DIRECTOR: MSc EN FISICA PURA. ALBERTO QUIJANO VODNIZA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUÁN DE PASTO
2012

Nota de aceptación
Msc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA
Esp. LUIS AFRANIO PORTILLA
Msc. JAIME BETANCOURT MINGANQUER

"Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores"

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

"Todos somos ignorantes, lo que sucede es que no todos ignoramos las mismas cosas".

# ALBERT EINSTEIN

## AGRADECIMIENTOS

A mi madre y mis hermanas por apoyarme en cada momento de mi vida.

A Angela Muñoz y la familia Casanova Muñoz por aceptarme en sus vidas desde hace ya muchos años.

Al profesor Alberto Quijano por darme la oportunidad de pertenecer al grupo de investigación de astrofísica de la Universidad de Nariño y enseñarme a ver el cielo con la pasión que él lo hace.

A mis compañeros del grupo en especial a mi amiga Karla Patricia Reyes por todo ese apoyo y amistad incondiciónal.

A la Universidad de Nariño por ser la sede de muchos de mis éxitos y trabajos.

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	17
1.1. Objetivo general	20
1.2. Objetivos específicos	20
2. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	21
2.1. Ecuaciones de movimiento	21
2.2. Las leyes de Kepler	22
2.2.1. Ley de las secciones cónicas	22
2.2.2. La ecuación de Kepler	25
2.2.3. Relación geométrica para la formulación elíptica	25
2.3. Órbita y geometría	26
2.3.1. Tres vectores fundamentales	27
2.3.2. Orientación de los ángulos	28
2.4. Posición y velocidad de los elementos	29
3. EL PROBLEMA DE N CUERPOS	31
3.1. Aplicacón al sistema solar	33
3.1.1. Movimiento del centro de masas para tres cuerpos	34
3.1.2. Ecuaciones de movimiento relativo	36
3.9 Partubaciones	38

3.2.1. El efecto de pequeños impulsos	39
3.2.2. Mecanismo Kozai	42
4. MÉTODOS NUMÉRICOS	43
4.1. Método de Newton-Rapson	43
4.1.1. Aplicación a la ecuación de Kepler	44
4.2. Método RUNGE-KUTTA (RK)	45
5. APLICACIÓN AL CALCULO DE LA ÓRBITA	47
5.1. Método RK4 para las ecuaciones de movimiento	47
5.2. Descripción del codigo Perturba.c	48
5.2.1. Entrada de condiciones iníciales	48
5.2.2. Transformación de elementos orbitales a coordenadas cartesianas	49
5.2.3. Desarrollo de las ecuaciones de movimiento	50
5.2.4. Conversion de coordenadas cartesianas a elementos orbitales	50
6 RESULTADOS	51
CONCLUCIONES	56
RECOMENDACIONES	57
BIBLIOGRAFIA	58
ANEXOS	60

# LISTA DE CUADROS

2.1.	Determinación de las secciones conicas	25
6.1.	Datos de asteorides de prueba	53
6.2.	Condiciones iniciales asteorides NEO's	72

# LISTA DE FIGURAS

2.1.	Elementos de la elipse	24
2.2.	Esquema de los elementos orbitales	27
2.3.	Vectores fundamentales	28
2.4.	Vectores $\mathbf{P}$ , $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{W}$	30
3.1.	Esquema vectorial para tres cuerpos centrados en un centro dinámico inercial	35
3.2.	Esquema vectorial para cuerpo centrado en $m_1$	37
4.1.	Esquema del Método de Newton-Rapson	44
5.1.	Interfaz del programa	49
6.1.	Pertubación secular para cuerpo a 3 UA con alta inclinación	51
6.2.	Pertubación secular para cuerpo a 3 UA con baja inclinación	52
6.3.	Pertubación secular para el asteroide MIDAS	52
6.4.	Acoplamiento de inclinación y excentricidad para asteroide MIDAS $$	53
6.5.	Pertubación para el asteroide TOUTATIS	54
6.6.	Asteroides cercanos a la tierra NEO's	70
6.7.	Evolución temporal de la excentricidad de Ubasti	72
6.8.	Evolución temporal de la inclinación de Ubasti	73
6.9.	Acoplamiento excentricidad-inclinación Ubasti	73
6.10.	Evolución temporal de la excentricidad de 1999DK3	73

6.11. Evolución temporal de la inclinación de 1999DK3	74
6.12. Acoplamiento excentricidad-inclinación 1999DK3	74
6.13. Evolución temporal de la excentricidad de 2001RM	74
6.14. Evolución temporal de la inclinación de 2001RM	75
6.15. Acoplamiento excentricidad-inclinación 2001RM	75
6.16. Evolución temporal de la excentricidad de 2011BZ18	75
6.17. Evolución temporal de la inclinación de 2011BZ18	76
6.18. Acoplamiento excentricidad-inclinación 2001RM	76

## ANEXOS

ANEXO A. Trasnformación de coordenadas desde los vectores fundamentales.	17
ANEXO B. Código del programa pertuba.c	20
ANEXO C. Asteroides cercanos a la tierra NEO's	20
ANEXO D. Aplicación del código pertuba.c a asteroides tipo NEO's	21

#### **GLOSARIO**

ANOMALÍA EXCÉNTRICA: Es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal y el eje de la elipse. Se designa por E. La relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica es la llamada Ecuación de Kepler.

ANOMALÍA MEDIA: es la fracción de un período orbital que ha transcurrido, expresada como ángulo; también es el ángulo que forma con el eje de la elipse un planeta ficticio que gira con movimiento uniforme sobre una circunferencia cuyo diámetro coincide con el eje principal de la elipse y llamada circunferencia principal Se designa por la letra M.

ANOMALÍA VERDADERA: Es el ángulo que forma el planeta medido desde el foco de una órbita elíptica con el perihelio del planeta.

**ASTEROIDES:** Es un cuerpo rocoso, carbonícelo o metálico más pequeño que un planeta y mayor que un meteoroide que orbita alrededor del Sol en una órbita interior a la de Neptuno.

EFECTO KOZAI: Tipo particular de resonancia orbital descubierta en 1962 por el astrónomo japonés Yoshihide Kozai. Consiste en un acoplamiento entre la inclinación y la excentricidad orbital de un cuerpo; si una disminuye la otra aumenta, y viceversa, variando ambos parámetros de forma cíclica y encadenada.

**EXCENTRICIDAD:** Cociente entre los dos semiejes de una elipse. Una excentricidad cero corresponde a una circunferencia, y una excentricidad uno sería el límite de una elipse estirada hasta el infinito. Puesto que las órbitas de todos los cuerpos del Sistema Solar son elipses, la excentricidad corresponde al achatamiento (o estiramiento) de las órbitas.

INCLINACIÓN: Ángulo que forma el plano de la órbita de un astro con el plano de la eclíptica si éste gira en torno al Sol (planeta, asteroide o cometa), o con el plano ecuatorial del planeta central en el caso de un satélite.

ÓRBITA: Es la trayectoria que describe un cuerpo alrededor del objeto celeste que lo

tiene atrapado en su campo gravitatorio. Las órbitas siempre se ciñen en su forma a una de las cuatro curvas denominadas cónicas, es decir, que pueden ser una circunferencia -en la práctica esto no ocurre-, una elipse, una parábola o una hipérbola.

**PERTURBACIONES SECULARES:** Son procesos perturbativos que se deben a ciclos muy lentos (de hasta millones de años) que pueden afectar al valor del eje mayor y de la excentricidad, a la inclinación del plano de la órbita y a la orientación de ésta en el espacio.

**SEMIEJE MAYOR:** Desde el punto de vista matemático el semieje mayor es, como su nombre indica, la mitad del eje mayor de una elipse, pero en astronomía se considera como tal a la distancia media que separa a un cuerpo del astro principal en torno al cual describe una órbita.

#### RESUMEN

En el siguiente trabajo se estudió de la perturbación secular causada por el planeta Júpiter a la órbita de algunos asteroides con semiejes menores a 2 UA denominados NEO's (asteroides cercanos a la Tierra), con altas inclinaciones y altas excentricidades con el fin de observar si en ellos ocurre el fenómeno denominado efecto Kozai. Para ello se usaron herramientas teóricas tales como el problema de los dos cuerpos, el problema de los tres cuerpos, perturbaciones, desarrollo de ecuaciones diferenciales por medio de métodos numéricos y algoritmos computacionales. Se diseño programa en c++, que resuelve las ecuaciones de movimiento por el método Rungue-Kutta y se aplicó a los asteroides mencionados, usando los elementos orbitales clásicos como condiciones iníciales para desarrollar las ecuaciones de movimiento, observando la evolución temporal de los elementos orbitales como la inclinación y la excentricidad para un millón de años, determinando el proceso de libración de estos elementos.

## ABSTRACT

In this paper, we studied the secular disturbance caused by the planet Jupiter over the orbit of some asteroids with semi-axes smaller than 2 AU called NEO's (Near Earth Asteroids), with high inclinations and high eccentricities in order to see if the phenomenon Kozai effect affects them. These theoretical tools such as the two-body problem, the problem of the three bodies, disturbances, development of differential equations using numerical methods and computational algorithms were used. A C ++ program was designed, which solves the equations of motion by the method Rungue-Kutta and applied to the asteroids mentioned, using the orbital classics elements as initial conditions to solve the equations of motion, observing the temporal evolution of the orbital elements such as inclination and eccentricity for a million years, determining the libration process of these elements.

#### INTRODUCCION

Desde épocas antiguas los humanos y en especial los astrónomos se han fascinado con todos aquellos elementos que se observan en nuestro firmamento y la forma como estos se encuentran organizados en él. Los planetas llamados por los griegos, partículas errantes, causaron mucho impacto a los matemáticos y físicos de la época; debido a que estos tenían un movimiento extraño que no podía ser explicado, por lo cual se les atribuyó poderes divinos para poder determinar su existencia en el universo conocido hasta aquellos momentos. Pensadores como Aristarco arguyeron que esos movimientos tenían esa forma errática debido a que los planetas como la tierra giraban alrededor del sol y no como se creía todos estos elementos giraban alrededor de la tierra. La geometría de estos movimientos erráticos fue estudiada a fondo, con una muy buena aproximación, en el año 1609 por Johannes Kepler quien formuló unas leyes matemáticas en las cuales se propone el cálculo de la posición, forma y velocidad de los cuerpos celestes, estas leyes dieron inicio al desarrollo de la mecánica celeste conocida hasta este momento.

Con los trabajos de Galileo Galilei y René Descartes se dejo la puerta abierta para que las condiciones iníciales de los cuerpos celestes fueran determinadas por medio de las leyes de movimiento y de atracción gravitacional universal propuesta por Isaac Newton, donde se puede describir y predecir el movimiento de cuerpos celestes como planetas, cometas, satélites etc. Dando razón de la órbita de la tierra alrededor del sol o la trayectoria de la luna alrededor de está o mejor aun describiendo cualquiera de las órbitas de los planetas de nuestro sistema solar. Lastimosamente hasta ese momento no se podían explicar el porqué algunas órbitas planetarias eran inestables y porque la atracción gravitatoria entre los cuerpos celestes producían en sus órbitas ligeras perturbaciones que crecían con el tiempo, dando un resultado catastrófico a los cálculos; los planetas o bien caerían al sol o bien serian expulsados del sistema solar. Pero esto no sucedía, la explicación a este acontecimiento fue dada por Pierre Simon, Marquez de Laplace, quien determino que las perturbaciones deberían ser periódicas, es decir, marcadas por ciclos repetidos, en lugar de ser acumulativas. El sistema solar por la tanto se estabilizaría a sí mismo, y no habría necesidad de intervención divina para explicar porque

ha sobrevivido hasta el día de hoy. Dejando con ello una herramienta poderosa para el estudio de la dinámica y estructura del sistema solar, iniciando una carrera teórica con avances cada vez más complejos que describen la forma y evolución de los sistemas planetarios.

El estudio realizado al problema de N cuerpos ha arrojado datos relevantes y de mucha importancia en el funcionamiento de nuestro sistema solar, matemáticos como Euler y Lagrange han hecho un aporte profundo al desarrollo teórico de este problema ,otorgando soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales, dejando ver que los elementos keplerianos clásicos sufren cambios trascendentales a medida que el tiempo transcurre a causa de las perturbaciones causadas por diferentes interacciones de los cuerpos en nuestro sistema solar, en especial las perturbaciones que son realizadas por las masas de Júpiter o Saturno.

El avance de la tecnología en estas últimas décadas, sobre todo en los computadores, han permitido desarrollar de manera adecuada y casi que precisa, por medio de métodos numéricos, las ecuaciones diferenciales que describen la interacción de los cuerpos en sistemas tales como el de los satélites que el hombre envía la órbita terrestre, deserrendar y entender un poco más el funcionamiento de nuestro sistema solar, o ir más lejos, crear predicciones en sistemas planetarios de algunas estrellas posibles portadoras de planetas. Proporcionado información precisa de como los cuerpos describen su órbita sin dejar de lado todas aquellas posibles perturbaciones que sobre estos se produzcan, dejando observar los mecanismos, dinámica, estructura y formación de nuestro sistema solar solucionando problemas matemáticos de manera casi exacta sin omitir ciertos valores que en la teoría se dejan de lado a causa de la dificultad matemática que estos presentan en su desarrollo.

El Observatorio Astronómico de la Universidad de Nariño con su grupo de investigación es uno de los pioneros en Colombia en realizar estudios sobre los planetas y asteroides de nuestro sistema solar. Trabajos como "OBTENCIÓN DE LA CURVA LUMINOSA DEL ASTEROIDE 4179 TOUTATIS" dieron pie a para un sin número de trabajos y publicaciones por parte de este grupo, siendo calificado con el máximo por parte de

Colciencias dejando la puerta abierta para que su director fuera nombrado miembro desde 2007 de la AMERICAN ASTRONOMICAL SOCIETY-AAS

En el siguiente trabajo se sigue por la misma línea desarrollando las ecuaciones de movimiento para el problema de los tres cuerpos por medio del método Rungue-Kutta de orden 4, aplicándolo a asteroides cercanos a la tierra (NEO's) perturbados por la fuerza gravitacional del planeta Júpiter, observando con ello la perturbación causada a la órbita en largos periodos de tiempo para los elementos orbitales determinando la libración ocasionada por el mecanismo Kozai.

Los capítulos 1, 2, 3, se recolectan el fundamento teórico necesario para este trabajo, los temas estudiados son: el problema de los dos cuerpos, el problema de los tres cuerpos y perturbaciones, mecanismo Kozai y métodos numéricos. En el capítulo 4 se mira la aplicación de los métodos numéricos y el desarrollo del código de programación y en el capítulo 5 se miran los resultados de la aplicación del programa PERTURBA a diferentes asteroides del sistema solar en especial los asteroides cercanos a la tierra.

#### 1 OBJETIVOS

## 1.1. Objetivo general

Examinar el mecanismo Kozai por medio del estudio de la evolución temporal de los elementos clásicos de algunos asteroides del grupo próximo a la Tierra (NEO's) a causa de las perturbaciones causadas por la masa del planeta Júpiter.

## 1.2. Objetivos específicos

- Estudiar el problema de los dos cuerpos.
- Estudiar el problema de N cuerpos y el desarrollo de la función perturbadora para el problema de los tres cuerpos.
- Estudiar la teoría de perturbaciones seculares y la resonancia kozai producida para asteroides con altas inclinaciones.
- Estudiar el desarrollo de los métodos numéricos para solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Desarrollar un software que permita ver la evolución temporal de los elementos orbitales por medio de la solución del problema de N cuerpos para asteroides cercanos a la Tierra con altas inclinaciones o excentricidades.

#### 2 EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

Se debe considerar dos masas puntuales bajo la interacción gravitacional mutua, el movimiento de estos cuerpos puede ser fácilmente predicho usando un modelo matemático simple que ignora todas aquellas perturbaciones que afectan al sistema. La solución de este problema ayuda a el entendimiento de como es la órbita de un cuerpo en el espacio preliminarmente y los elementos geométricos que esta contiene.

#### 2.1. Ecuaciones de movimiento

El modelo de los dos cuerpos describe un movimiento de dos masas puntuales aisladas del universo, considerando la acción de la fuerza gravitacional Newtoniana entre sí, pero la solución de este problema puede conducir al estudio del movimiento de los planetas alrededor del Sol, de un satélite alrededor de planeta Tierra etc.

La ecuación que rigen el movimiento está dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r} + \sum_i \vec{\nabla} \mathcal{R}_i \tag{2.1}$$

Usando un modelo simple que ignore todas las influencias gravitacionales externas y todas aquellas perturbaciones diferentes a la interacción gravitacional donde se considera solo la atracción de dos masas, se proporciona una solución no tan compleja con una ecuación de movimiento dada para el problema:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r} \tag{2.2}$$

Donde  $\mathcal{M} = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$  el parámetro  $\mathcal{G}$  está dado por el sistema internacional de medidas.

El estudio del movimiento de los cuerpos del sistema solar puede tomar varios sistemas de referencia, por conveniencia y facilidad del problema se puede escoger un sistema con coordenadas rectangulares centrado en el Sol el cual es llamado sistema heliocéntrico. La constante fundamental llamada constante gravitacional gaussiana dada por k=0.01720209895, la longitud, la masa y el tiempo están expresados en unidades

astronómicas (AU), masas solares 1 y días respectivamente.

El tiempo usado para las coordenadas heliocéntricas es llamado tiempo modificado expresado por:

$$\tau = k(t - t_0) \tag{2.3}$$

Donde t es un instante de tiempo cualquiera, y  $t_o$  es un tiempo inicial escogido para una época dada.<sup>1</sup>

## 2.2. Las leyes de Kepler

Cuando las técnicas de cálculo integral son usadas para resolver la ecuación diferencial de movimiento, el resultado confirma las leyes que derivó empíricamente Johannes Kepler en el siglo XVII:

- 1. Las orbitas de los planetas son elípticas con el Sol en uno de sus focos.
- 2. La línea que une un planeta con el sol barre aéreas iguales en tiempos iguales.
- 3. El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.<sup>2</sup>
- **2.2.1.** Ley de las secciones cónicas Sea la ecuación fundamental del movimiento de los dos cuerpos escrita de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathcal{M}}{r^2}\mathbf{u} \tag{2.4}$$

Donde:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2.5}$$

Vector unitario señalando la dirección del radio vector. Realizando el producto cruz entre la ecuación (2.4) con  $\mathbf{r}$  se tiene:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathcal{M}}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{U})$$
 (2.6)

 $<sup>^1\</sup>mathrm{BOULET}$  D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 1.4

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>BOULET D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. pag 85

Tal que:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

Ya que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{U}$  son paralelos, se tendrá que su producto cruz es el vector nulo. Ahora si se considera la siguiente diferenciación con respecto al tiempo modificado:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$$
(2.8)

Que se puede escribir como:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{2.9}$$

Por propiedades de las derivadas podemos decir que el elemento  $(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$  de la ecuación (2.9) es una constante:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \tag{2.10}$$

Donde **h** es el vector constante de integración llamado el momento angular por unidad de masa del problema de los dos cuerpos.

La ecuación general de la sección cónica escrita en coordenadas polares tiene la forma:

$$r = \frac{\mathcal{P}}{1 + e\cos f} \tag{2.11}$$

Donde el origen está en uno de los focos y el ángulo polar f es el ángulo entre el radio vector y el origen de coordenadas que pasa por el foco, este ángulo es conocido como la anomalía verdadera y al cantidad p es el semiparametro denotado por:  $\mathcal{P} = \frac{h^2}{M}$ .

La cantidad e es conocida como la excentricidad la cual determina el tipo especifico de sección cónica que tiene la órbita.

Los elementos usados para el caso de una elipse se pueden observar en la figura 2.2.1. Donde  $\mathbf{r}$  es el radio vector  $\mathbf{y}$  el vector  $\mathbf{e}$  define la dirección del perifoco. Se denotan también anomalía verdadera f y el semiparametro  $\mathcal{P}$ , la longitud q es la distancia perifocal  $\mathbf{y}$  a es le semieje mayor, estos elementos se ven relacionados en las siguientes ecuaciones:

$$P = q(1+e)$$

$$q = a(1-e)$$

$$P = a(1-e^{2})$$

$$b = a\sqrt{1-e^{2}}$$

$$P = \sqrt{Pa}$$

$$(2.12)$$

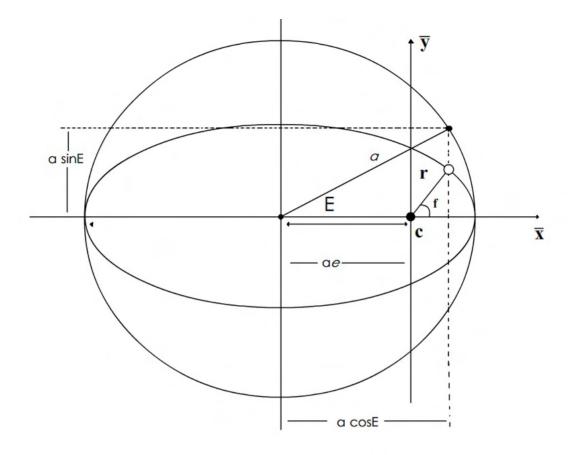


Figura 2.1: Elementos para una sección conica elipitica

En el cuadro 2.1 se observa la sección cónica correspondiente al valor de la excentricidad y la relación del semiparametro con los elementos de cada una de estas secciones.

La ley de las áreas determina la segunda ley de Kepler:

$$\frac{dA}{dT} = \frac{h}{2} \tag{2.13}$$

Y la ley armónica determina el periodo orbital que se convierte en la forma generalizada de la tercera ley de Kepler.

$$P^2 = \left[ \frac{1}{\mathcal{M}} \left( \frac{2\pi}{k} \right)^2 \right] \tag{2.14}$$

La velocidad del movimiento puede ser determinada por la ley de VIS-VIVA la cual relaciona la velocidad del cuerpo con respecto a su posición.

$$v^2 = \mathcal{M}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{2.15}$$

Cuadro 2.1: Determinación de las secciones conicas

	circulo	e = 0	p = a
uso poekoros: orrow	elipse	0 < e < 1	$p = a(1 - e^2)$
use packages: array	parabola	e = 1	p = q = 2a(1 - e)
	hiperbola	e > 1	$p = a(e^2 - 1)$

Estas relaciones cobran verdadera importancia al momento de determinar la órbita de un cuerpo celeste.  $^3$ 

## 2.2.2. La ecuación de Kepler La anomalía media está definida por:

$$M = n(t - \tau) \tag{2.16}$$

Donde la constante  $\tau$  es el tiempo del pasaje por el perifoco y n es conocido como el movimiento medio  $n = \frac{2\pi}{T}$ . M tiene dimensiones angulares y se incrementa linealmente con el tiempo lo cual no nos da una interpretación geométrica sencilla.

La anomalía excéntrica está definida como el ángulo entre el semieje de la elipse y el radio desde el centro al punto del círculo circunscrito. Estas dos medidas están relacionadas mediante la ecuación de Kepler:

$$M = E - e\sin E \tag{2.17}$$

La cual es fundamental para encontrar la posición de un cuerpo en un tiempo determinado.<sup>4</sup>

2.2.3. Relación geométrica para la formulación elíptica En la construcción geométrica de la figura 2.4 se puede observar que la coordenada  $\overline{x}$  del cuerpo celeste está relacionada con la anomalía excéntrica por:

$$\overline{x} = a(\cos E - \mathbf{e}) \tag{2.18}$$

y la coordenada  $\overline{y}$  es:

$$\overline{y} = a\sqrt{1 - \mathbf{e}^2} \sin E \tag{2.19}$$

 $<sup>^3 \</sup>rm BOULET$  D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 3.4

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics Ed Cambridge University Press. Cambridge 1999. pág. 34

Las componentes de la velocidad se obtienen diferenciando las componentes de la posición $\overline{x}$  y  $\overline{y}$  obteniendo:

$$\dot{\overline{x}} = -\frac{na\sin E}{1 - \mathbf{e} - \cos E}$$

$$\dot{\overline{y}} = \frac{na\sqrt{1 - \mathbf{e}^2}\cos E}{1 - \mathbf{e} - \cos E}$$
(2.20)

La ecuación que preserva la energía del sistema está dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} - \frac{\mathcal{M}}{r}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{M}}{2a}$$
(2.21)

Que es considerado el hamiltoniano del sistema. La proyección y la norma del momento angular en el eje z está determinado por:

$$h = \sqrt{\mathcal{M}a(1 - \mathbf{e}^2)} \tag{2.22}$$

Estas relaciones se hacen importantes en el desarrollo de las transformaciones canónicas que puede tener el hamiltoniano del sistema que pueden aportar soluciones aproximadas a la teoría de perturbaciones. <sup>5</sup>

## 2.3. Órbita y geometría

El problema de los dos cuerpos puede ser caracterizado por seis (6) cantidades numéricas que son relacionadas a las constantes arbitrarias resultantes de la integración de la ecuación (2.2), estos parámetros son llamados elementos orbitales y cuando estos son conocidos, el movimiento orbital de los cuerpos puede ser determinado.

El vector posición y el vector velocidad pueden hacer una descripción general del movimiento orbital de los cuerpos, pero estos no muestran en forma detallada del tamaño, forma y orientación de la órbita en el espacio; por ello se hacen necesarios este conjunto de elementos. En la figura 2.3 podemos observar la geometría de estos elementos en el espacio donde se pueden observar el semieje mayor a, inclinación i, la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , argumento del perifoco  $\omega$ , además de la excentricidad e y la anomalía media M que son los seis elementos clásicos que se deben tener en cuenta en este trabajo para la descripción de detallada de la órbita de los cuerpos.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> BOULET D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer section. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 4.3.1, MODERN CELESTIAL MECHANICS Aspects of Solar dynamics pag 15

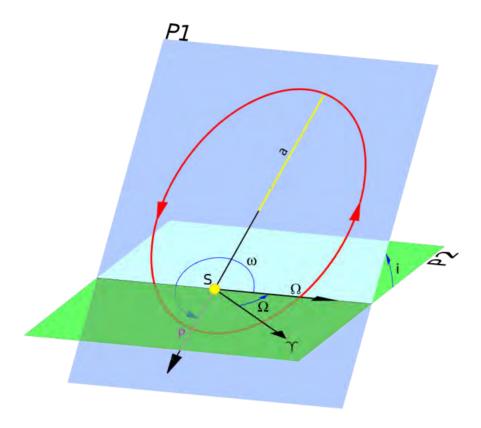


Figura 2.2: Los 6 elementos orbitales determinados desde el plano de la eclíptica

**2.3.1.** Tres vectores fundamentales Los elementos clásicos deben ser determinados por los vectores  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{N}$  ilustrados en la figura 2.3.1, donde el origen de coordenadas es el centro dinámico C, los vectores  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{N}$  son vectores al paralelos a las coordenadas x, y y z respectivamente. El sistema de coordenadas está alineado de tal manera que la eje +x coincide con la dirección del equinoccio vernal y el plano xy corresponde al plano de la órbita.

El vector excentricidad e está definido por:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\mathbf{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\mathbf{v} \tag{2.23}$$

Como la vector posición y el vector velocidad están definidos en el sistema coordenadas x, y y z lo mismo sucede con el vector de excentricidad.

El vector momento angular está determinado por el producto cruz entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{2.24}$$

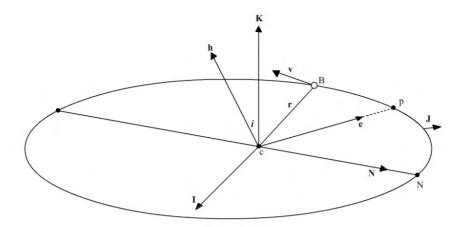


Figura 2.3: Vectores fundamentales determinados desde el plano de la órbita

. El vector nodo ascendente se está definido por el producto cruz entre  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{N} = \mathbf{k} \times \mathbf{h} \tag{2.25}$$

2.3.2. Orientación de los ángulos Los vectores mencionados en la secciona anterior, ayudan a determinar los ángulos como la inclinación, el argumento del perifoco y el nodo ascendente.

Las ecuaciones que relacionan estos elementos con los tres vectores fundamentales son:

1. Para el cálculo de la inclinación se hace uso del producto punto entre K y h:

$$\mathbf{k.h} = |\mathbf{k}||\mathbf{h}|\cos i \tag{2.26}$$

Por tanto la inclinación quedara determinada por:

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \tag{2.27}$$

2. En el caso del nodo ascendente se tiene:

$$\mathbf{I.N} = |\mathbf{I}||\mathbf{N}|\cos\Omega \tag{2.28}$$

Por la tanto el nodo queda determinado por:

$$\cos \Omega = \frac{N_x}{N} \tag{2.29}$$

3. El argumento del perifoco se obtiene del producto punto:

$$\mathbf{N.e} = |\mathbf{N}||\mathbf{e}|\cos\omega \tag{2.30}$$

El argumento queda definido por:

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{N.e}}{Ne} \tag{2.31}$$

El vector  $\mathbf{N}$  tiene componentes en todos los ejes al igual que el vector  $\mathbf{e}$  por lo tanto los cálculos son mas engorrosos.<sup>6</sup>

#### 2.4. Posición y velocidad de los elementos clásicos

Para determinar la órbita de un cuerpo es necesario convertir los elementos orbitales en elementos de posición y velocidad para una época determinada. Esta transformación se puede definir determinado un conjunto de vectores unitarios **P**, **Q** y **W** que se encuentran en el plano de la órbita como se muestran en la figura 2.4, donde se observar que:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{2.32}$$

Como el cuerpo celeste  $\bf B$  orbita el centro dinámico  $\bf C$  la posición y la velocidad quedan descritas en términos de los vectores:

$$\mathbf{r} = \overline{x}\mathbf{P} + \overline{y}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\overline{x}}\mathbf{P} + \dot{\overline{y}}\mathbf{Q}$$
(2.33)

Si se expresan las cantidades del lado derecho de las ecuaciones (2.33) en términos de los elementos orbitales los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  pueden ser calculados. La matriz de rotación  $\mathcal{R}_{\overline{xy}}$  de los vectores  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$  que permite la transformación de los elementos orbitales en términos de la posición y la velocidad está dada por:<sup>7</sup>

$$\begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

 $<sup>^6\</sup>mathrm{BOULET}$  D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 4.4

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> BOULET D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 4.5, MORBIDELLI ALESSANDRO . MODERN CELESTIAL MECHANICS Aspects of Solar dynamics 2010. pag 16

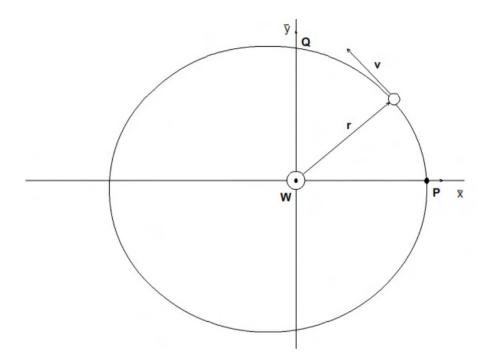


Figura 2.4: Vectores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{W}$ . Estos vectores determínan la trasnformación de los elementos órbitales en coordenadas cartesianas heliocentricas

#### 3 EL PROBLEMA DE N CUERPOS

Se asume que los cuerpos son esféricos y que poseen masas distribuidas homogéneamente de modo tal que es equivalente a considerar cuerpos puntuales. Para hacer una descripción analítica de la interacción de un sistema de n partículas con masas  $m_1$ ,  $m_2, m_3...m_n$  se debe tener en cuenta la posición y velocidades de cada una de estas:

$$\mathbf{r}_{i} = x_{i}\mathbf{i}_{x} + i_{i}\mathbf{i}_{y} + z_{i}\mathbf{i}_{z}$$

$$\mathbf{v}_{i} = \frac{dx_{i}}{dt}\mathbf{i}_{x} + \frac{dy_{i}}{dt}\mathbf{i}_{y} + \frac{dz_{i}}{dt}\mathbf{i}_{z}$$
(3.1)

Donde la posición y la velocidad de los vectores  $\mathbf{i}$  de cada una de las partículas se han tomado con respecto a un eje de coordenadas que se asume no acelerado. La norma que denota las distancias entre las partículas  $m_i$  y  $m_j$  está determinada por:

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i).(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}$$
(3.2)

La magnitud que denota la fuerza de atracción de las partículas  $i^{th}$  y  $j^{th}$  está dada por:

$$f = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \tag{3.3}$$

La dirección de las fuerzas están expresadas en términos de los vectores unitarios, tal que la fuerza actuando en  $m_i$  debido a  $m_j$  tiene la dirección de  $\frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}}$ , mientras que la fuerza en  $m_i$  debido a  $m_i$  tiene dirección opuesta.

Por lo tanto las fuerza total  $\mathbf{f}_i$  que afecta a  $m_i$  debido a la presencia de n-1 masas es:

$$\mathbf{f}_i = \mathcal{G} \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$
(3.4)

En esta sumatoria los términos i = j se omiten.

De acuerdo a la segunda ley de movimiento de Newton se tiene:

$$\mathbf{f}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \equiv m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{3.5}$$

Tal que las n ecuaciones diferenciales están dadas por:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathcal{G}\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$
(3.6)

Con las condiciones iníciales apropiadas se construye una descripción matemática completa el movimiento de n partículas. Cuando no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, tanto el momento lineal como el momento angular además de la energía se conservan.

De la ecuación (3.1) se observa que la suma de los vectores tiene un resultado igual a cero por lo cual:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3...m_n\mathbf{r}_n) = \mathbf{0}$$
(3.7)

Se observa que el centro de masa  $\mathbf{r}_{cm}$  de un sistema de partículas está desacelerado, por consiguiente el momento lineal se conserva y al realizar la segunda derivada de (3.7) se tiene:

$$\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \tag{3.8}$$

Al realizar la sumatoria del producto cruz entre los vectores posición y los vectores fuerzas  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$ , dados para cada una de las partículas que actúan en el sistema, se tiene como resultado el vector nulo:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{f}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times m_{i} \ddot{\mathbf{r}}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{p}}_{i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i} = \mathbf{0}$$
(3.9)

Y al realizar su integración el resultado es:

$$m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n = \mathbf{c}_3 \tag{3.10}$$

El vector momento angular es una constante en magnitud y dirección y el plano invariable del sistema es el plano que contiene el centro de masa.

El potencial gravitatorio  $V_i$  en un punto  $(x_i, y_i, z_i)$  está definido como:

$$V_i = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}}$$
 (3.11)

La función potencial depende solamente de las distancias que existe entre las partículas, independientemente estas, del eje de coordenadas que se tenga. La importancia de este potencial deriva de la propiedad de que el gradiente de  $V_i$  nos proporciona la fuerza de atracción en una partícula por unidad de masa en un punto  $(x_i, y_i, z_i)$  por lo tanto:

$$\mathbf{f}_{i}^{T} = m_{i} \frac{\partial V_{i}}{\partial r_{i}} \tag{3.12}$$

Donde

$$\frac{\partial V_i}{\partial r_i} = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \right] \tag{3.13}$$

Definido como un vector fila. El exponente T indica la matriz transpuesta necesaria para la transformación de  $\mathbf{f}_i^T$  en una matriz fila.

La función U está definida por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i \tag{3.14}$$

Esta expresión es llamada la función fuerza, y es igual al trabajo total hecho por la fuerza gravitacional en un sistema ensamblado de n masa puntuales de un estado de dispersión infinita en una configuración dada. En términos de U el vector fuerza  $\mathbf{f}_i$  queda determinado por:

$$\mathbf{f}_{i}^{T} = \frac{\partial U}{\partial r_{i}} \tag{3.15}$$

El propósito de expresar el vector mediante el gradiente de la función fuerza en lugar del potencial gravitacional es debido a la conveniencia del sistema ya que, como se dijo anteriormente, U es independiente de las coordenadas de cualquier punto en particular.

La función fuerza U es una función de componentes  $x_1, y_1, z_1, x_2, .... y_n, z_n$  de los vectores posición, y cada componente es a su vez, una función de t, la derivada total de U es:

$$\frac{dU}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2}\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_n}\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$
(3.16)

Por lo tanto de la ecuación numero (3.12) proporciona el valor de la derivadade U con respecto al tiempo:

$$\frac{dU}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} \cdot \mathbf{v}_n = \frac{dT}{dt}$$
(3.17)

Donde:

$$T = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + \dots + m_nv_n^2)$$
(3.18)

El problema de n cuerpos no tiene solución analítica por lo cual no es posible predecir el movimiento bajo los efectos gravitatorios mutuos para cualquier instante partiendo de sus posiciones y velocidades iníciales.<sup>1</sup>

#### 3.1. Aplicación al sistema solar

El Sistema Solar es un ejemplo clásico de un problema de n cuerpos donde el cambio de la posición de los planetas al moverse alrededor del Sol resulta en una variación de

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>RICHARD H. BATIIN. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. American Institute of Aereonautics and Astronautics. ed AIAAA Educations series. 1999. section 2,4

la fuerza ejercida sobre alguno de sus miembros. En el caso del Sistema Solar el centro de fuerza dominante es el Sol, los movimientos planetarios se aproximan bastante a un movimiento producido por un sistema de dos cuerpos puro pero perturbado, ya que existen desviaciones de la órbita debida a la acción de otros planetas o fuerzas externas como la fuerza ejercida por el planeta Júpiter o Saturno a las órbitas de todos los demás miembros del sistema.

Las perturbaciones deforman la órbita de la configuración cónica que se espera en un sistema de dos cuerpos, por ello los elementos orbitales que se calculan a partir de la posición y velocidad son válidos en la mayoría de los casos solamente para un corto lapso de tiempo.

A pesar de esto, con el uso de teorías matemáticas para la solución de ecuaciones diferenciales y con condiciones iníciales adecuadas se puede aproximar el curso y el comportamiento de la órbita de los cuerpos celestes para una cantidad considerable de tiempo. En las siguientes secciones se observa las ecuaciones diferenciales de un sistema de tres cuerpos centrados en un origen de sistema inercial y un sistema centrado en una de sus masas, que para el caso del sistema solar, el centro dinámico es el Sol y el mayor elemento perturbador para cualquier cuerpo interno de sistema es el planeta Júpiter.

3.1.1. Movimiento del centro de masas para tres cuerpos Sean tres cuerpos de masas puntuales  $m_c$ ,  $m_i$  y  $m_j$  con sus respectivos vectores posición  $\mathbf{R}_c$ ,  $\mathbf{R}_i$  y  $\mathbf{R}_j$  referidos a un punto O cualquiera de un sistema de coordenadas inercial. Sean también  $\mathbf{r}_j$  el vector relativo del cuerpo de masa  $m_j$  con respecto a  $m_c$ ,  $\mathbf{r}_i$  el vector relativo del cuerpo de masa  $m_i$  con respecto a  $m_c$  y  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  el vector relativo del cuerpo de masa  $m_j$  con respecto a  $m_i$  como se muestra en la figura (3.1.1)

Si se considera que las únicas fuerzas actuantes son las fuerzas gravitatorias entre los cuerpos las ecuaciones de movimiento referidas al origen son:

$$m_{c}\ddot{\mathbf{R}}_{c} = \mathcal{G}m_{c}m_{i}\frac{\mathbf{r}_{i}}{r_{i}^{3}} + Gm_{c}m_{j}\frac{\mathbf{r}_{j}}{r_{j}^{3}}$$

$$m_{i}\ddot{\mathbf{R}}_{i} = \mathcal{G}m_{i}m_{j}\frac{(\mathbf{r}_{j} - \mathbf{r}_{i})}{|\mathbf{r}_{j} - \mathbf{r}_{i}|^{3}} + Gm_{i}m_{c}\frac{\mathbf{r}_{i}}{r_{i}^{3}}$$

$$m_{j}\ddot{\mathbf{R}}_{j} = \mathcal{G}m_{j}m_{i}\frac{(\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{j})}{|\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{j}|^{3}} + Gm_{j}m_{c}\frac{\mathbf{r}_{j}}{r_{i}^{3}}$$

$$(3.19)$$

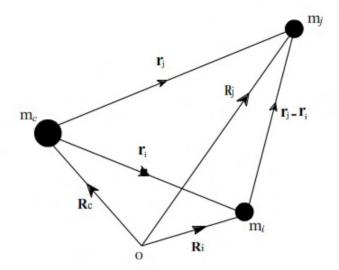


Figura 3.1: Esquema vectorial para tres cuerpos centrados en un centro dinámico inercial

Haciendo uso de las ecuaciones (3.7) y (3.8) se puede observar:

$$\mathbf{R}_{cm} = \mathbf{c}_1' t + \mathbf{c}_2' \tag{3.20}$$

Lo que pone en evidencia que el centro de masas del sistema se desplaza en el espacio en línea recta y con movimiento uniforme:.

$$m_c \mathbf{R}_c \times \dot{\mathbf{v}}_c + m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i + m_j \mathbf{R}_j \times \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}$$
 (3.21)

Haciendo uso de la ecuación (3.9):

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$
(3.22)

Al integrar se obtiene:

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \tag{3.23}$$

El vector constante **h** representa la conservación del momentum angular. Se tienen ya tres constantes escalares en el espacio. A medida que estos cuerpos se desplazan

en el espacio, sus vectores posición y velocidad son tales que el vector  $\mathbf{h}$  conserva una magnitud constante y una dirección fija en el espacio. La línea a lo largo de la cual se dirige  $\mathbf{h}$  se llama línea invariable. Asociada a esta línea se encuentra un plano perpendicular a ella y que contiene el centro de masas que es llamado plano invariable.

La energía cinetica T y la energía potencial V tomando las ecuaciones (3.14) y (3.18) son respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i v^2 \tag{3.24}$$

$$V = -\mathcal{G}\left[\frac{m_c m_i}{r_i} + \frac{m_c m_j}{r_j} + \frac{m_j m_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}\right]$$
(3.25)

**3.1.2.** Ecuaciones de movimiento relativo El problema de n cuerpos puede ser solucionado estableciendo un origen de coordenadas fijas en un sistema ideal, propuesto para tres partículas donde el origen de coordenadas x, y, z puede ser considerando el movimiento de n-1 cuerpos con respecto al restante. Para el caso del sistema solar se puede considerar al Sol como cuerpo central y se refiere el movimiento de los restantes objetos a su posición en el espacio.

Si se toma como origen de coordenadas la posición de  $m_1$  las ecuaciones de movimiento estarán dadas por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathcal{G}(m_1 + m)\mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{G}m' \left[ \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right]$$

$$\ddot{\mathbf{r}'} = -\frac{\mathcal{G}(m_1 + m')\mathbf{r}'}{r'^3} + \mathcal{G}m \left[ \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]$$
(3.26)

El primer término de la derecha corresponde a la aceleración del cuerpo debido a  $m_1$ , el segundo termino a la aceleración del tercero actuante, y el tercer término a la acción del tercer cuerpo sobre  $m_1$ .

Si la masa  $m_1$  se centra en el sistema de coordenadas cartesianas como masa dominante, y se denomina a m como masa de estudio en posición  $\mathbf{r} = (x.y, z)$ , y como m' la masa que perturba el movimiento de m alrededor de  $m_1$  con posición  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  como se observa en la figura (3.1.2), las ecuaciones de movimiento para m son:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r} + k^2 m' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right)$$
(3.27)

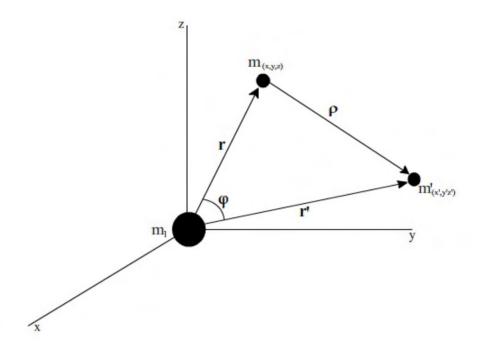


Figura 3.2: Esquema vectorial para cuerpo centrado en  $m_1$ 

Donde  $\mathcal{M} = (m_1 + m)$  y  $\rho = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ . como  $\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$  se tiene que:

$$\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\rho^3} = \vec{\nabla}\rho^{-1} \tag{3.28}$$

Como  $\mathbf{r}$  es independiente de  $\mathbf{r}'$  se puede escribir:

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right) = \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \tag{3.29}$$

Reemplazando en la ecuación (3.27) se tiene:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r} + \vec{\nabla} \mathcal{R} \tag{3.30}$$

Donde  $\mathcal{R}$  es conocida como la función perturbadora. Si existe más de una masa perturbado el movimiento de un cuerpo, la función perturbadora total sobre la masa m es la suma de las funciones perturbadoras de cada masa perturbadora individual, sus ecuaciones están determinadas por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r} + \sum_i \vec{\nabla} \mathcal{R}_i \tag{3.31}$$

Las ecuaciones de movimiento de  $\mathbf{r}'$  son:

$$\ddot{\mathbf{r}}' + k^2(m_1 + m')\frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = k^2 m \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$$
(3.32)

Las ecuaciones de movimiento bajo ciertas condiciones iníciales tienen ahora un desarrollo teórico complejo debido a las funciones perturbadores de las ecuaciones (3.27) y (3.32). En este trabajo el desarrollo de estas funciones se hace por medio de métodos numéricos que se explican en el siguiente capítulo, pero antes de su desarrollo se tendrá en cuenta el significado físico que ofrece la teoría de perturbaciones para pequeños impulsos y el efecto Kozai como consecuencia del estudio de esta teoría aplicado al dinámica de nuestro sistema solar.<sup>2</sup>

#### 3.2. Perturbaciones

La teoría de perturbaciones, es una técnica que descansa en la solución analítica del problema de los dos cuerpos. La idea es describir el movimiento de un cuerpo (que se mueve en una trayectoria que no es una elipse) mediante una ecuación del tipo (3.31) y obligarlo a cada momento, en cada punto de su trayectoria, a que describa una elipse, lo que resulta, en que a través de la trayectoria se ha de definir una elipse instantánea, válida sólo en dicho punto de la trayectoria y que en el siguiente punto se hace necesario definir una elipse con parámetros orbitales algo distintos a los que se definieron en la primera y así sucesivamente. Si de alguna manera se logra describir cómo están cambiando en el tiempo los parámetros que definen la geometría y la orientación de la órbita en el espacio (los elementos orbitales) entonces el problema se resuelve hallando, para cada tiempo, los valores de dichos parámetros. Habiendo hallado la dependencia temporal de cada elemento en el tiempo que interesa, se utiliza la solución del problema de los dos cuerpos que es válida en ese punto de la trayectoria.

Como se vio en la sección anterior es posible referir el movimiento de los cuerpos a un sistema relativo de ecuaciones donde la los cuerpos se encuentran en órbita alrededor de una masa central. En este nuevo sistema toda desviación respecto del movimiento kepleriano de un objeto se denomina perturbaciones y la función que caracteriza la perturbación se denomina función perturbadora.

 $<sup>^2 \</sup>mathrm{MURRAY.C,y}$  DERMOTT.S. Solar System Dinamics, Ed Cambridge University Press. Cambridge 1999. section 7

**3.2.1.** El efecto de pequeños impulsos Un caso simple de perturbación se produce cuando un objeto moviéndose en una órbita kepleriana se ve afectado por una fuerza perturbadora por unidad de masa  $\mathbf{F}$  durante un cierto tiempo dt, la ecuación de movimiento del objeto es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 M}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F} \tag{3.33}$$

Este impulso afectará su movimiento alrededor de la masa central y modificando los elementos en su órbita.

Si se descompone **F** en direcciones radial al objeto, normal al plano orbital y perpendicular a estos dos, se puede escribir:

$$\mathbf{F} = R\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + N\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} + B\hat{\mathbf{u}}_{\theta} \tag{3.34}$$

Donde  $\hat{\mathbf{u}}_{\theta} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ . La acción de esta fuerza produce una variación del momento angular debido al momento de fuerza:

$$\frac{d\mathbf{L}}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}dt = (rBdt)\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} - (rNdt)\hat{\mathbf{u}}_{\theta}$$
(3.35)

Como  $\frac{\mathbf{L}}{m} = h\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ , entonces:

$$\frac{d\mathbf{L}}{m} = d(h\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}) = hd\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}dh$$
(3.36)

Ya que  $d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$  es perpendicular a  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ , tenemos que dh = rBdt Y:

$$d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = -\frac{rNdt}{h}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} \tag{3.37}$$

Descomponiendo el vector  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$  de acuerdo al sistema eclíptico de coordenadas  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = sin(i)sin(\Omega)\hat{\mathbf{x}} - sin(i)cos(\Omega)\hat{\mathbf{y}} + cos(i)\hat{\mathbf{z}}$ , las componentes dependen exclusivamente de  $i, \Omega$ , que segun la ecuación (3.37) se ven afectadas solo por la componente N de  $\mathbf{F}$ . Al multiplicar la ecuación (3.37) por  $\hat{\mathbf{z}}$  se tiene:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = -\frac{rNdt}{h} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\theta} \tag{3.38}$$

Escrita de otra manera:

$$-\sin(i)di = -\frac{rNdt}{h}\hat{\mathbf{z}}\cdot(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}\times\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}) = -\frac{rNdt}{h}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}\cdot(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}})$$
(3.39)

Dado que  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$  tienen magnitud sin(i) en dirección del nodo ascendente y el vector  $\hat{\mathbf{r}}$  forma un ángulo con  $\bar{f}$  con la dirección al nodo ascendente, se tiene:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{N}{h}rcos(\bar{f})\tag{3.40}$$

Al multiplicar la ecuación (3.37) por  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{z}}$  se obtiene:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} \times d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}) = -\frac{Nrdt}{h} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$$
(3.41)

Diferenciando  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ :

$$d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = (\cos i \sin \Omega di + \sin i \cos \Omega d\Omega)\hat{\mathbf{x}} + (-\cos i \cos \Omega di + \sin i \sin \Omega d\Omega)\hat{\mathbf{y}} + (-\sin i di)\hat{\mathbf{z}}$$
(3.42)

Como  $\sin \beta = \sin \bar{f} \sin i$  entonces se escribe:

$$\sin^2 i d\Omega = \frac{rNdt}{h} \sin \bar{f} \sin i$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{N}{h} r \sin \bar{f} \sin i$$
(3.43)

Teniendo en cuenta la ecuación de la órbita del capítulo 1 tenemos que:

$$e\cos f = \frac{P}{r} - 1 = \frac{h^2}{GMr} - 1\tag{3.44}$$

Derivando la anterior ecuación:

$$e\sin f = \frac{h}{GM}\frac{dr}{dt} - 1\tag{3.45}$$

Como el valor de r no se amplia instantáneamente con el impulso, los cambios del movimiento deben cumplir:

$$d(e\cos f) = \frac{2hdh}{Gmr}$$

$$d(e\sin f) = \frac{dh}{GM}\frac{dr}{dt} + \frac{h}{GM}\frac{d^2r}{dt^2}$$
(3.46)

Como  $f = \bar{f} - \omega$ , ninguna de las componentes de R o B afectan la longitud del nodo, f' no cambia instantáneamente y  $df = -d\omega$ , si se aplica esta condición y la ecuación (3.37) en la ecuación (3.46), y se considera que  $\frac{dr}{dt} = R$ , se tiene:

$$de \cos f + d\omega \sin f = \frac{2hB}{GM}dt$$

$$de \sin f - d\omega e \cos f = \frac{dr}{dt}\frac{rB}{GM}dt + \frac{hR}{GM}dt$$
(3.47)

Resolviendo para de y  $d\omega$  se obtiene:

$$de = \frac{h}{GM}Rdt\sin f + \left(\frac{2h}{GM}\cos f + \frac{r\frac{dr}{dt}}{GM}\sin f\right)Bdt$$

$$ed\omega = -\frac{h}{GM}Rdt\cos f + \left(\frac{2h}{GM}\cos f - \frac{r\frac{dr}{dt}}{GM}\sin f\right)Bdt$$
(3.48)

Al hacer el reemplazo del los valores de h y  $\frac{dr}{dt}$  por sus correspondientes valores para el movimiento kepleriano se puede obtener:

$$\frac{de}{dt} = \frac{na^2}{GM}\sqrt{1 - e^2}[R\cos f + B(\cos f + \cos E)]$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{na^2}{GMe}\sqrt{1 - e^2}\left[-R\cos f + B\left(1 - \frac{r}{P}\right)\sin f\right]$$
(3.49)

En el caso de  $d\omega$  se debe considerar ademas que se ve afectado por cualquier variación de la longitud del nodo en una cantidad  $-\cos id\Omega$ , por lo tanto la expresión final es:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{na^2}{GMe}\sqrt{1 - e^2} \left[ -R\cos f + B\left(1 - \frac{r}{P}\right)\sin f \right] - \cos(i)\frac{d\Omega}{dt}$$
 (3.50)

Para encontrar una expresión que determine el diferencial da, se parte de la expresión:

$$a(1 - e^2) = \frac{h^2}{GM} \tag{3.51}$$

Diferenciando se obtiene:

$$da(1 - e^2) = 2aede + \frac{2h}{GM}dh \tag{3.52}$$

Al reemplazar de y dh por sus expresiones obtenemos:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2na}{GM} \left[ R_a - e\sqrt{1 - e^2} \sin f + B \frac{a^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \right]$$
 (3.53)

La variación de los elementos orbitales debido a la acción de una fuerza externa se expresa mediante las ecuaciones (3.40), (3.43),(3.46), (3.49), (3.50),(3.53) que constituyen una de las formas de las ecuaciones de Lagrange escritas de una forma propuesta originalmente por Gauss.<sup>3</sup>

Los matemáticos y fisicos, Leonhard Euler y Joseph Louis LaGrange, mediante el método de variación de parámetros, desarrollarón una solución aproximada de la función perturbadora de estas ecuaciones encontrando la variación temporal de los elementos orbitales de los cuerpos para largos periodos de tiempo.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>(Las ecuaciones planetarias de Lagrange fueron extraidas de MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics Ed Cambridge University Press. Cambridge 1999. pág. 251, 252)

3.2.2. Mecanismo kozai Mediante la ayuda de expansiones elípticas se pueden desarrollar las ecuaciones de Lagrange para la función perturbadora de la ecuación (3.31) y obtener una solución aproximada para el problema de los tres cuerpos. Pero en 1962 el físico y astrónomo Yoshihide Kozai considero a un asteroide moviéndose bajo la acción gravitacional del Sol y de Júpiter donde la masa del asteroide era despreciable comparada con la masa solar y la masa de Júpiter determinado las ecuaciones diferenciales de movimiento desde la teoría hamiltoniana y teniendo en cuenta las variables canonícas de Delanuy: <sup>4</sup>

$$L = ka^{\frac{1}{2}} \qquad l = M$$

$$G = L(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \quad g = \omega$$

$$H = G\cos i \qquad h = \Omega$$
(3.54)

Donde  $k^2$  es la constante de de gravitación de Gauss y G corresponde a la componente z del momento angular vista en el capitulo uno ecuación (2.22).

$$k^{2} = k^{2}m^{-2}m^{2}\mu^{2}(1+m^{\prime}) \tag{3.55}$$

Donde  $\mu'$  es la masa reducida de Júpiter. El hamiltoniano para el sistema es:

$$F = \frac{k^4}{2L^2} + m\mu'^{-1}\frac{k'^4}{2L'^2} + k^2\mu' \left[ \left[ r^2 - 2rr'\frac{s}{1+m'} + \left(\frac{r'}{1+m'}\right)^2 \right] - \frac{r}{r'^2}\frac{s}{1+m'} \right]$$
(3.56)

Donde s es:

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$
 (3.57)

Tomando condiciones iníciales tales como la excentricidad de Júpiter igual a cero y desarrollando función perturbadora por medio de polinomios de Legendre. Encontró que cuerpos con altas excentricidades y altas inclinaciones libraban bajo la acción perturbadora de Júpiter, causado un cambio periódico de la inclinación y excentricidad para largos periodos de tiempo<sup>5</sup>. El proposito de este trabajo no es solucionar analíticamente el hamiltoniano Kozai, ya que la solución particular de la función perturbadora se hará por medio de los métodos numéricos que se muestran en el siguiente capitulo

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>El desarrollo de las variable de Delanauy puede verse en: MORBIDELLI ALESSANDRO. MODERN CELESTIAL MECHANICS, Aspect of Solar System Dinamics, 2010 section 1.9.1

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Yosihihide. Kozai, Secular pertubations Of Asteroids Whit High Inclinations And Eccentricity, Astronomical Journal Vol 67, pag 591. ADS. (Articulo original del autor)

## 4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos son técnicas mediante los cuales algunos problemas matemáticos pueden ser resueltos con operaciones aritméticas sencillas. Aunque existen muchos métodos numéricos ellos tienen una característica en común; involucran un gran número de tediosas operaciones aritméticas, por lo cual se hace necesario el uso de programas de computador que faciliten el desarrollo de estas operaciones.

Como se vio en los capítulos anteriores, para determinar la órbita de un cuerpo en el espacio implica desarrollar ecuaciones trascendentales como la ecuación de Kepler y ecuaciones diferenciales como las ecuaciones de movimiento relativas, por lo cual antes de pasar al desarrollo de estas, se hace una breve descripción de los métodos numéricos a usar en este trabajo.

### 4.1. Método de Newton-Rapson

Si el valor inicial de una raíz es  $x_i$ , una recta tangente puede ser extendida por el punto  $[x_i, f(x_i)]$ , el punto donde esta recta tangente corta al eje x usualmente representa un probable valor estimado para una raíz. Este método, es un método alternativo de la serie de Taylor, como se observa en la figura 4.1, la primera derivada a x es equivalente a la pendiente:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1s}} \tag{4.1}$$

Que se rescribe de la forma:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{4.2}$$

Conocida como la formula de Newton-Rapson. La efectividad de este método depende estrictamente del número de interacciones que se usen y cuanto mayor sean estas, mayor será la efectividad y la exactitud del valor buscado.<sup>1</sup>

 $<sup>^1\</sup>mathrm{ATEVEN}$ C.CHAPRA. Y RAYMOND P. CANALE. Numerical Metohods for Engenieers. Fifth Edition. ed Mc Graw Hill 2006. section 6.2

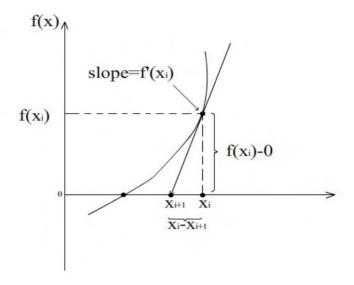


Figura 4.1: Esquema del Método de Newton-Rapson para encontrar una raíz de una función cualquiera

4.1.1. Aplicación a la ecuación de Kepler Se debe recordar que esta ecuación hace parte de las denominadas ecuaciones trascendentales, por lo cual no se tiene una solución analítica posible para el valor de la anomalía excéntrica. Así que aplicando el método de Newton-Rapson se tiene un valor inicial para E que depende de las condiciones iníciales de un cuerpo celeste que se desea estudiar; retomando la ecuación (2.17); se puede determinar una función que depende de E de la forma:

$$f(E) = M - E + e\sin E \tag{4.3}$$

Donde E es la anomalía excéntrica y M anomalía media. De acuerdo al método de Newton-Rapson y usando la ecuación (4.2) los valores para cada una de las iteraciones E son:

$$E_{i} = E_{i+1} - \frac{f(E_{i})}{f'(E_{i})}$$

$$E_{i+1} = -\frac{M - E_{i} + e \sin E_{i}}{-1 + e \cos E_{i}}$$
(4.4)

i = 1, 2, 3...n. Donde n corresponde al número de iteraciones que se den para la solución de la ecuación. El valor de  $E_1$  está determinado por el valor de la anomalía media M.

 $<sup>^2\</sup>mathrm{BOULET}$  D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 4

## 4.2. Método RUNGUE-KUTTA (RK)

Método genérico que se usa para solucionar ecuaciones diferenciales con mucha exactitud aprovechando las series de Taylor sin necesidad de calcular derivadas de elevados ordenes. La forma generalizada del método está dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{4.5}$$

Donde  $\phi(x_i, y_i, h)$  se conoce como función de incremento que puede ser interpretada como la pendiente en un intervalo. La forma general de esta función está definida por:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + ankn \tag{4.6}$$

Las  $a_s$  son constantes y los  $k_s$  se definen como:

$$k_{1} = f(x_{i}, y_{i})$$

$$k_{2} = f(x_{i} + p_{1}h, y_{i} + q_{11}k_{1}h)$$

$$k_{3} = f(x_{i} + p_{2}h, y_{i} + q_{21}k_{1}h + q_{22}k_{2}h +)$$

$$. (4.7)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Los  $p_s$  y los  $q_s$  son constantes que dependen del orden RK que se escoja; las  $k_s$  sirven como funciones de evaluación, haciendo el método RK eficiente para el cálculo computacional. Varios métodos pueden ser estudiados usando diferentes números de términos en la función de incremento. Para obtener una precisión aceptable en los resultados solamente se estudiará el método de RUNGUE-KUTTA de orden 4 (RK4) donde la ecuación (4.6) tiene la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2F_3 + F_4 +]h$$
(4.8)

Las funciones  $k_s$  están dadas por:

$$k_{1} = f(x_{i}, y_{i})$$

$$k_{2} = f(x_{i} + \frac{1}{2}h, y_{i} + \frac{1}{2}k_{1}h)$$

$$k_{3} = f(x_{i} + \frac{1}{2}h, y_{i} + \frac{1}{2}k_{2}h)$$

$$k_{4} = f(x_{i} + h, y_{i} + k_{3}h)$$

$$(4.9)$$

Más allá de los métodos de cuarto orden, los métodos RKn se escojan proporcionan una mayor ganancia en precisión de los resultados esperados, pero esto se ve compensado, con esfuerzo y complejidad al realizar el algoritmo del cómputo deseado.

Para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales, los métodos RK toman la forma:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2...y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2...y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2...y_n)$$
(4.10)

La solución de estos sistemas requieren de n condiciones iníciales para conocer el valor de x deseado.<sup>3</sup>

 $<sup>^3</sup>$ ATEVEN C.CHAPRA. Y RAYMOND P. CANALE. Numerical Metohods for Engenieers. Fifth Edition. ed Mc Graw Hill 2006. Section 25.3, 25,4; CURTIS HOWARD D. Orbital Mechanics for Engineering Students. ELSEVIER 2010. section 1,8.1

## 5 APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS AL CÁLCULO DE LA ÓRBITA DE LOS CUERPOS CELESTES

En este capítulo se hace una descripción del uso de los métodos numéricos para el cálculo de la órbita por medio de algoritmos computacionales usando lenguaje de programación en c++. Cuando los elementos orbitales clásicos son conocidos para una época dada de un cuerpo cualquiera del sistema solar, las condiciones iníciales quedan determinadas y por lo tanto sus ecuaciones de movimiento también; cada solución en un intervalo de tiempo muestra el desarrollo y la evolución temporal de estos elementos. Observando cambios en la forma y geometría de la órbita ayudan a comprender la evolución y estructura de nuestro sistema solar.

Antes de hacer una breve descripción del código usado en lenguaje c++, se muestra como es la aplicación del método RK4 en la solución de las ecuaciones de movimiento relativo.

#### 5.1. Métodos RK4 para ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones diferenciales de movimiento relativo para dos cuerpos, están acopladas de tal manera que estas dependen de la posición y la velocidad en cada instante de tiempo. Por ello es necesario hacer uso de las ecuaciones (4.10) que proporcionan la solución numérica a un sistema de ecuaciones diferenciales cualquiera. Al aplicar el método de RK4 a la ecuación (3.26) se pueden expresar las ecuaciones diferenciales de segundo orden en términos de ecuaciones de primer orden acopladas así:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = f(\mathbf{v})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = g(m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathcal{R})$$
(5.1)

De tal manera que la función f depende únicamente de la velocidad mientras que la función g depende de las masas, velocidad y las posiciones de los cuerpos, en cada instante de tiempo. Es necesario que en la rutina del programa la parte correspondiente al método Runge-Kutta tenga los acoples de las funciones vectoriales de movimiento

para cada uno de las componentes de la masa perturbada y de las masas perturbadoras.

$$F_{ij} = hf(\mathbf{v})$$

$$G_{ij} = hg(m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathcal{R})$$
(5.2)

Donde h es el intervalo de tiempo modificado y cada una de las funciones  $F_{ij}$ ,  $G_{ij}$  corresponden a las ecuaciones  $k_s$  del método RK4 que determinan la posición y la velocidad de cuerpo celeste.<sup>1</sup>

## 5.2. Descripción del código Perturba.c

El código de programación que permite ver la evolución temporal de los elementos orbitales de un cuerpo perturbado por una fuerza gravitatoria, es realizado en lenguaje c++ donde se pueden observar cuatro partes fundamentales que son:

- Entrada de condiciones iníciales del cuerpo perturbado y del cuerpo perturbador.
- Transformación de elementos orbitales clásicos a coordenadas cartesianas heliocéntricas de los cuerpos celestes tanto perturbado como perturbador.
- Desarrollo de las ecuaciones de movimiento relativo para cada componente cartesiana de los cuerpos celestes por medio del método RK4.
- Conversión de coordenadas cartesianas heliocéntricas a elementos orbitales clásicos y salida de datos.

5.2.1. Entrada de condiciones iníciales. Al correr el programa la pantalla pide entrar las condiciones iníciales de cada cuerpo, tanto el cuerpo perturbado como el cuerpo perturbador. Primero se introducen los elementos orbitales de los asteroides que se desea trabajar, que para el caso de este trabajo, son los asteroides tipo NEO's por sus siglas en ingles (la descripción de este tipo de asteroides puede verse en el anexo D). Luego se digitan las condiciones iníciales del cuerpo que perturba la órbita del asteroide; para este trabajo se toman los elementos orbitales del planeta Júpiter.

Es necesario también digitar las masas de cada uno de los cuerpos, teniendo en cuenta

 $<sup>^1\</sup>mathrm{BOULET}$  D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991. section 6.3

que estas se toman en términos de masas solares, los valores del semieje mayor se encuentran en unidades astronómicas AU, además de estos datos, el programa pide el tiempo en el cual se hacen las iteraciones del método numérico. En la figura (5.2.1)se puede observar la interfaz grafica del programa que por motivos prácticos no es muy compleja ya que los datos de salida no se grafican en la misma interfaz, debido a la enorme cantidad de datos que el programa arroja.

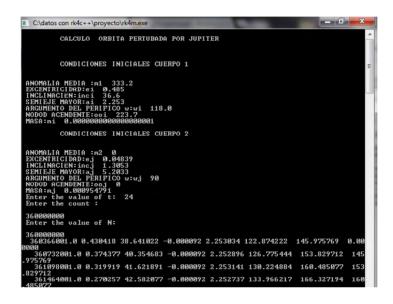


Figura 5.1: Interfaz grafica de entrada de condiciones iníciales presentada por el compilador de  $\mathrm{C}++$ 

#### 5.2.2. Transformación de elementos orbitales clásicos a coordenadas carte-

sianas. Para hacer la transformación de elementos orbitales a coordenadas cartesianas, es necesario resolver la ecuación de Kepler, para determinar el valor de la anomalía excéntrica de cada uno de los cuerpos celestes. Para ello el programa usa el método de Newton-Rapson aplicado a la ecuación de Kepler visto en la sección 3.1.1, tomando como valor inicial para la anomalía excéntrica el valor que toma la anomalía media M, introducido como condición inicial. El código de programación usa 100 iteraciones para lograr un valor aproximado de la anomalía excéntrica para una época dada.

Al finalizar la totalidad de las iteraciones se usan en el código, las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20) para determinar las coordenadas cartesianas de la posición y velocidad se usan las ecuaciones (2.33) donde se hace uso de los vectores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{W}$  y la matriz de

transformación  $\mathcal{R}_{\overline{xy}}$  descrita en la sección 1.3 donde se da uso de las condiciones iníciales de cada cuerpo celeste; estas ecuaciones se usan tanto para el cuerpo perturbado como para el perturbador.

5.2.3. Desarrollo de las ecuaciones movimiento. Después de obtener las coordenadas cartesianas de cada cuerpo, se puede determinar el radio vector y la velocidad para las funciones  $F_{ij}$  Y  $G_{ij}$  propuestas en la sección anterior (ecuaciones (5.2)). El método Rungue-Kutta debe desarrollarse para cada una de las componentes cartesianas de los cuerpos celestes, donde se hace uso de las ecuaciones (3.30) y (3.32). Debido a que los componentes de la velocidad y la posición de cada uno de los cuerpos están acoplados, la escritura del código debe ser muy cuidadoso y no omitir ninguna componente. El paso h del método RK4 está determinado por h = (0.017202099/24) \* t que determina el tiempo en días o en horas para cada una de las iteraciones que realice el programa.

#### 5.2.4. Conversión de coordenadas cartesianas a elementos orbitales clásicos.

Para cada iteración del método RK4, se transforman las coordenadas cartesianas en elementos orbitales de cada cuerpo que entra al programa, ya que es necesario observar la evolución temporal de estos, en especial la inclinación y la excentricidad. Para ellos se hace uso de las ecuaciones (2.15) (2.23),(2.24), (2.25), (2.27), (2.29),(2.31). Cada uno de estos datos es guardado por el programa en un archivo de texto llamado ("orbitalelements.txt","w"). Se hace necesario aclarar que en este trabajo se quiere observar perturbaciones seculares, las cuales se dan en largos periodos de tiempo, por tanto se toman como mínimo 1 millón de años. El código del programa toma cada dato como si este correspondiese a un día, así que para 1 millón de años se reproducen 366 millones de datos, por lo cual el programa solamente guarda en archivo las iteraciones correspondientes a 1000 años. Estos datos son graficados después en gnuplot, donde se puede ver la variación temporal de cada uno de los elementos orbitales o la forma de la órbita en coordenadas cartesianas tridimensionales.

El código Perturba se mira en su totalidad en el ANEXO C.

#### 6 RESULTADOS

Haciendo uso del código perturba y tomando como cuerpo perturbador el planeta Júpiter, se puede observar la evolución temporal de los elementos orbitales de cuerpos con masas despreciables (asteroides). Con los datos obtenidos del programa, se realiza un grafico en el plano de la inclinación contra tiempo y de la excentricidad contra tiempo (el tiempo está tomado en años). Si las variaciones en la órbita corresponden a perturbaciones seculares como la propuesta por Yhosihide Kozai, se observan los cambios en la órbita de los asteroides estudiados de manera cíclica ocasionados por la masa perturbadora.

Las siguientes figuras muestran la evolución de la inclinación y al excentricidad de las condiciones iníciales de los cuerpos que se observan en el cuadro 6.1.

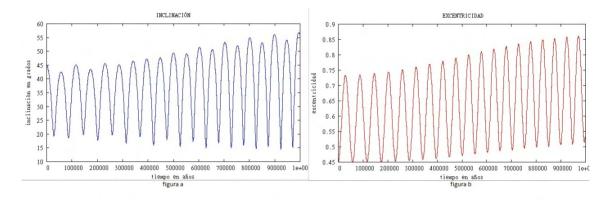


Figura 6.1: Pertubación secular para cuerpo a 3 UA con alta inclinación correspondiente a la investigación

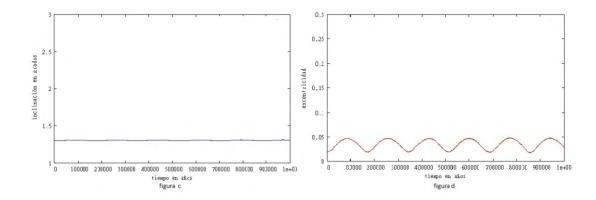


Figura 6.2: Pertubación secular para cuerpo a 3 UA con baja inclinación correspondiente a la investigación

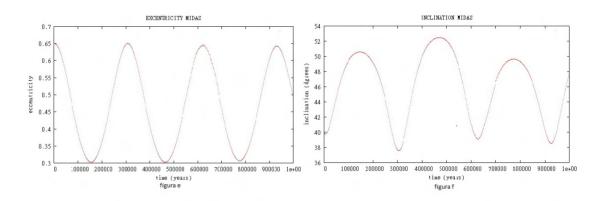


Figura 6.3: Pertubación secular para el asteroide MIDAS, aplicación de un asteroide real

#### Figura 6,1

En esta figura se observa la inclinación y excentricidad de un asteroide ubicado a 3 UA con una inclinación inicial de  $45^{0}$  y una alta excentricidad. Se puede ver en la figura a como a medida que pasa el tiempo la inclinación decae hasta un mínimo de  $20^{o}$  mientras que en la figura b se observa que la excentricidad tiene un máximo de 0,45 para este mismo tiempo. La perturbación secular que determina la libración entre la inclinación y la excentricidad que se observan en las figuras a y b, está de acuerdo la teoría propuesta por yosihide kozai en su artículo de 1969 para cuerpos a distancias de 3 UA y con altas inclinaciones, perturbados únicamente por la masa del planeta Júpiter.

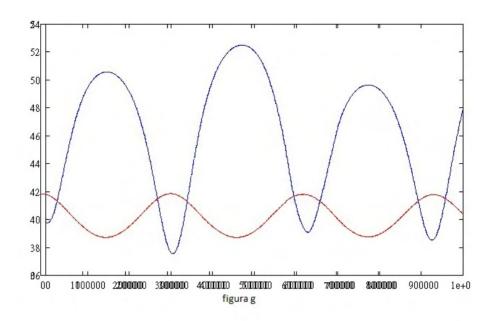


Figura 6.4: Acoplamiento de inclinación y excentricidad para asteroide MIDAS

Cuadro 6.1: Datos de asteorides de prueba

DESIGNACIÓN	EPOCA	ANOMALIA	ARGUMENTO	NODO	INCLINACIÓN	EXCENTRICIDAD	SEMIEJE MAYOR
Y NOMBRE		MEDIA	DEL PERIHELIO	ASCENDENTE			
FICTICIO 1	2012	0	0	0	45	0,45	3
FICTICIO 2	2012	0	0	0	1,2	0,02	3
(1981) MIDAS	20120314	143,5	267,8	357,0	39,8	0,650	1,776
(4179) TOUTATIS	20120314	299,6	278,6	124,5	0,4	0,629	2,529

Figura 6,2

Esta figura corresponde a un asteroide ubicado en a la misma distancia (3AU) pero con excentricidad e inclinación baja. En la figura c se observa la evolución temporal de la inclinación manteniéndose prácticamente constante con un valor inicial de  $1,2^o$ , mientras que en la figura d se mira la evolución de la excentricidad perturbada pero sin sobrepasar valores mayores a 0,05 empezando con una excentricidad de 0,02.

Figura 6,3

En esta figura se observa la evolución temporal del asteroides Midas, que corresponde a un asteroide tipo NEO's correspondiente a un objeto estelar tipo Apollo, tiene un semieje mayor promedio de 1,776 UA, en la figura e se observa el cambio de la ex-

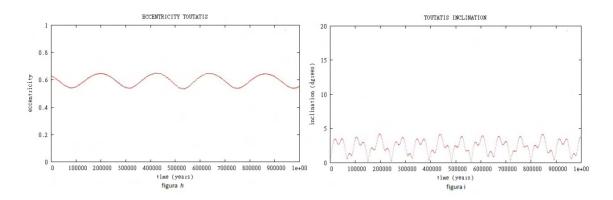


Figura 6.5: Pertubación para el asteroide TOUTATIS donde se observa que la perturbación no corresponde al mecanismo Kozai

centricidad en un periodo de 30 mil años con un máximo de 0,65 y un mínimo de 0,3 aproximadamente. En la figura f se muestra también este cambio pero en la inclinación con un periodo igual, mostrando un máximo que está entre 50 y 52 grados y un mínimo que oscila en 38 y 40 grados

#### Figura 6,4

En esta figura podemos ver el acoplamiento de la excentricidad y la inclinación del asteroide Midas, donde se observa la perturbación secular debido al mecanismo kozai. A máximos de inclinación se observa mínimos de excentricidad y viceversa. Esta grafica comprueba la dinámica de perturbaciones en la orbitas de los cuerpos celestes y deja la libración que sufren estos cuerpos con altas inclinaciones y altas excentricidades ubicados cerca de la órbita de nuestro planeta.

Se debe tener en cuenta que los datos de los elementos orbitales de los asteroides que el programa usa, solamente son perturbados por la masa de Júpiter. En el anexo B se muestran las graficas de otros asteroides tipo Apolo que tienen similares características al asteroide Midas.

#### Figura 6,5

En esta grafica se puede observar la evolución temporal de la excentricidad en la figura h, y la inclinación en la figura i del asteroide Toutatis. Este es uno de los asteroides más representativos de la zona de asteroides tipo NEO's. Que es considerado uno de los cuerpos potencialmente peligrosos, ya que en diciembre de 1992 paso a una distancia de  $0.02~\mathrm{UA}$ , este fue asteroide fue estudiado determinante por el Observatorio Astronómico

de la Universidad de Nariño.  $^1$  En la figura (i), se puede ver que existe una perturbación, ocasionando un cambio en la órbita del cuerpo, pero se mira que esta perturbación no es debida al efecto kozai, ya que no existe un acoplamiento entre los elementos orbitales de excentricidad e inclinación.

¹http://echo.jpl.nasa.gov/asteroids/4179- Quijano Vodniza, Alberto; Rojas Pereira, M.; Lopez, J. P.; Reyes S, K.; Narvaez S, J.; Eraso R, L. Toutatis. Study of the 4179 Toutatis Asteroid. Universidad de Nariño. American Astronomical Society, DPS meeting 39, 20.07; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 39, p.448

#### CONCLUSIONES

- Se ha calculado los elementos orbitas de los cuerpos celestes que rotan alrededor del Sol para largos periodos de tiempo, con ecuaciones de movimiento relativo para tres cuerpos, teniendo en cuenta la perturbación de la órbita causada por el planeta Júpiter; y se han observado perturbaciones seculares en la inclinación y la excentricidad.
- Se observa en los resultados el acoplamiento que existe entre la inclinación y la excentricidad debido a la libración producida por el mecanismo Kozai para objetos cercanos a la tierra; este efecto es producido por la perturbación de la masa de Júpiter a cuerpos del sistema solar con altas inclinaciones y altas excentricidades.
- El código de programación permitió observar sin problema la perturbación causada por el planeta Júpiter de algunos asteroides. Aquellos que corresponden a la teoría original de Kozai con semiejes iguales a tres AU (a=3 AU) mostraron los procesos de libración correspondientes a la excentricidad y la inclinación. En especial se trabajó con asteroides tipo Apolo con semiejes aproximados a una UA (a=1 AU), en ellos el programa no presento ninguna clase de anomalía, pero en los asteroides que tenían semiejes menores a 1 UA, el programa presento problemas, ya que el semieje mayor a decaía mostrando que la órbita del asteroide giraba en espiral hacia el Sol.
- El código de programación usado trabajó solamente con la perturbación causada por el planeta Júpiter, en las ecuaciones de movimiento solo se trabajó con el problema de los tres cuerpos, aunque que los asteroides están cercanos a la Tierra no se resuelve estas ecuaciones con más de una fuerza perturbadora, a pesar de esto los datos arrojados corresponden al fenómeno de libración de Kozai.
- Finalmente se puede concluir que el estudio de los asteroides próximos a la tierra NEO's, es de suma importancia, por lo cual la perturbación que ejerce el planeta Júpiter es significativa y determinante a la hora de observar la deformación y estructura de las órbitas de estos asteroides.

#### RECOMENDACIONES

Las siguientes recomendaciones son investigaciones adicionales que se pueden hacer con el fin de obtener una mejor idea de la forma, estructura y dinámica de las orbitas de los cuerpos cercanos a la tierra (NEO's).

- Solucionar por medio de métodos numéricos las ecuaciones relativas de movimiento para más de tres cuerpos, con el fin de aplicar éstas al sistema solar y obtener perturbaciones ocasionadas por más planetas como Júpiter, Saturno, Neptuno, Tierra etc.
- Permitir un código de programación del método Rungue- Kutta de altos órdenes, con el fin de observar con mucha mayor precisión las perturbaciones seculares de los asteroides tipo NEO's.
- Aumentar en el código de programación, efectos perturbativos distintos a la fuerza ocasionada por la acción gravitacional, se podría observar así la órbita debido a los efectos de la no esfericidad de los planetas, los efectos de radiación solar o la perturbación ocasionada por efectos relativistas.

## **BIBLIOGRAFÍA**

ALESSANDRO Morbidelli. MODERN CELESTIAL MECHANICS, Aspect of Solar System Dinamics, 2010

ATEVEN C.CHAPRA. Y RAYMOND P. CANALE. Numerical Metohods for Engenieers Fifth Edition. ed Mc Graw Hill 2006

BOULET D. Metohods of Orbit Determination For the Micro Computer. Willmann Bell, Inc. Virginia 1991.

GOLDSTEIN H. Mecánica Clásica. Ed Addison-wesley.

HOWARD D, CURTIS Orbital Mechanics for Engineering Students. ELSEVIER 2010

MURRAY.C,y DERMOTT.S. Solar System Dynamics. Ed Cambridge University Press. Cambridge 1999.

RICHARD H. BATIIN. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. American Institute of Aereonautics and Astronautics. ed AIAAA Educations series. 1999

Yosihihide. Kozai, Secular pertubations Of Asteroids Whit High Inclinations And Eccentricity, Astronomical Journal Vol 67, pag 591. ADS.

patrick Patrick Michel, Fabrice Thomas, The Resonance for Near-earth Asteroids With Semimajor Axes smaller Than 2 AU. Astronomy And Astrophysics 1996, vol 307, pag 310-318.

Alberto; Rojas Pereira, M.; Lopez, J. P.; Reyes S, K.; Narvaez S, J.; Eraso R, L.Study of the 4179 Toutatis Asteroid. Quijano Vodniza, Universidad de Nariño. American Astronomical Society, DPS meeting 39, 20.07; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 39, p.448

http://echo.jpl.nasa.gov/asteroids/4179-Toutatis/Toutais.html

http://www.minorplanetcenter.net.

http://neo.jpl.nasa.gov/neo/.

## ANEXO A. Trasnformación de coordenadas desde los vectores fundamentales

Es necesario desarrollar la transformación de las ecuaciones que determinan la posición y la velocidad en terminos de los elementos orbitales, por medio de los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  de la figura 2.3.1 y haciendo uso de las ecuaciones (2.33).

Deacuerdo a la relación geometrica descrita en la figura los vectores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{W}$  por sucesivas rotaciones se peuden transformar a lso vectores unicos  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  a través del sistema de angulos  $\Omega$ ,  $i \ \mathbf{y} \ \omega$ . Paso 1 se rota el sistema  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  alredero de  $\mathbf{K}$  a través del angulo  $\Omega$  obteniendo:

$$\mathbf{I}' = +\mathbf{I}\cos\Omega + \mathbf{J}\sin\Omega$$

$$\mathbf{J}' = -\mathbf{I}\sin\Omega + \mathbf{J}\cos\Omega$$

$$\mathbf{K}' = +\mathbf{K}$$
(6.1)

Paso 2 se rota el sistema I', J', K' alredero de I' a través del angulo i obteniendo:

$$\mathbf{I}'' = +\mathbf{I}'$$

$$\mathbf{J}'' = +\mathbf{J}'\cos i + \mathbf{K}'\sin i$$

$$\mathbf{K}' = +\mathbf{J}'\sin i + \mathbf{K}'\cos i$$
(6.2)

**Paso 3** se rota el sistema  $\mathbf{I}'', \mathbf{J}'', \mathbf{K}''$  alredero de  $\mathbf{K}'$  a través del angulo  $\omega$  obteniendo:

$$\mathbf{P} = +\mathbf{I}'' \cos \omega + \mathbf{J}'' \sin \omega$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{I}'' \sin \omega + \mathbf{J}'' \cos \omega$$

$$\mathbf{W} = +\mathbf{K}''$$
(6.3)

Paso 4 al sustituir con las ecuaciones (6.1) y las ecuaciones (6.2) se obtine:

$$\mathbf{I}'' = +\mathbf{I}\cos\Omega + \mathbf{J}\sin\Omega$$

$$\mathbf{J}'' = -\mathbf{I}\sin\Omega\cos i + \mathbf{J}\cos\omega\cos i + \mathbf{K}\sin i$$

$$\mathbf{K}'' = +\mathbf{I}\sin\Omega\sin i - \mathbf{J}\cos\omega\sin i + \mathbf{K}\cos i$$
(6.4)

Paso 5 al sustituir con las ecuaciones (6.3) y las ecuaciones (6.4) se obtine:

$$\mathbf{P} = +\mathbf{I}(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i)$$

$$+\mathbf{J}(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)$$

$$+\mathbf{k}(\sin\omega\sin i)$$
(6.5)

$$\mathbf{Q} = +\mathbf{I}(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i)$$

$$+\mathbf{J}(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)$$

$$+\mathbf{k}(\cos\omega\sin i)$$
(6.6)

$$\mathbf{W} = +\mathbf{I}(+\sin\Omega\sin i) + \mathbf{J}(-\cos\Omega\sin\sin i) + \mathbf{k}(+\cos i)$$
(6.7)

#### ANEXO B. Código del programa pertuba.c

```
; Este programa descompone los elementos orbitales de los cuerpos cuerpos celestes y los
; convierte; en corrdenadas cartesianas heliocentricas, mediante desarrollo de metodo de
; Newton-Rapson el programa resuelve la ecuación de Kepler para la variable E de la
; anomalia excentrica.
; con las variables x,y,z se desarrolan las ecuaciones de movimiento relativo para tres cuerpos,
; tomando al sol como origen de coordenas por medio del metodo Runge-Kutta cada iteracion de este
; metodo corresponde a un dia de tiempo para cada cuerpo.
; el codigo realiza nuevamente la transformación de corrdenadas cartesianas heliocentricas a
; elementos orbitales en cada una de las iteraciones.
; Cada dato arrojado por el programa es guardado en un archivo de texto para ser revisado y
: analizado al finalizar
                              PROYECTO DE GRADO
    \Pi
                                                                    11
    \Pi
          ESTUDIO DEL MECANISMO KOZAI EN ASTEROIDES PROXIMOS A LA TIERRA
                                                                    \Pi
    11
                                                                    - 1 1
                                                                    11
    1.1
                                                                    11
    \Pi
                           Lainer Alberto Eraso Ruiz
                                                                    \Pi
    \Pi
                             Programa de Fisica
                                                                    \Pi
                            Universidad de Nariño
    -11
                                                                    11
                                 2012
    _____
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdio.h>
#define PI 3.1415926
#define G 1
#define mc 1
int main()
FILE * pFile;
double p;
float f,m1,mi,ei,inci,ai,wi,ooi,m;
float m2,mj,ej,incj,aj,wj,ooj;
float mi1,incii,wii,ooii;
float mj2,incjj,wjj,oojj;
float xb1,yb1,xp1,yp1,d1,f1;
float xb2,yb2,xp2,yp2,d2,f2;
float px1,py1,pz1,px2,py2,pz2,qx1,qy1,qz1,qx2,qy2,qz2;
float ec1,ec2,r1,r2,b1,b2,ep1,ep2;
float xi,yi,zi,xj,yj,zj,t,h;
float vix,viy,viz,vjx,vjz,vjy;
float ri,rj,rij,vi,vj,ET;
float k1ix,k1iy,k1iz,l1ix,l1iy,l1iz;
float k1jx,k1jy,k1jz,l1jx,l1jy,l1jz;
```

```
float k2ix,k2iy,k2iz,12ix,12iy,12iz;
float k2jx,k2jy,k2jz,12jx,12jy,12jz;
float k3ix,k3iy,k3iz,l3ix,l3iy,l3iz;
float k3jx,k3jy,k3jz,l3jx,l3jy,l3jz;
float k4ix,k4iy,k4iz,14ix,14iy,14iz;
float k4jx,k4jy,k4jz,14jx,14jy,14jz;
float RVi,exi,eyi,ezi;
float RVj,exj,eyj,ezj;
float hx,hy,hz,hh,hx1,hy1,hz1,hh1;
float nxi,nyi,nxj,nyj,Ni,Nj;
float cosooi,cosooj,Nei,Nej;
float cosw1,cosw2,cosei,cosej,Exci,Excj;
int r, j, i, N, p1;
cout<<"\n
                 CALCULO ORBITA PERTUBADA POR JUPITER \n\n\n";
cout<<"\n
                 CONDICIONES INICIALES CUERPO 1 \n\n\n";
cout<<" ANOMALIA MEDIA :m1 ";</pre>
cin>> mi1:
cout<<" EXCENTRICIDAD:ei ";</pre>
cin>> ei;
cout<<" INCLINACIÓN:inci ";</pre>
cin>> incii;
cout<<" SEMIEJE MAYOR:ai ":</pre>
cin>> ai;
cout<<" ARGUMENTO DEL PERIFICO w:wi ":
cin>> wii;
cout<<" NODOD ACENDENTE:ooi ";
cin>> ooii;
cout<<" MASA:mi ";</pre>
cin>> mi;
                CONDICIONES INICIALES CUERPO 2 \n\n\n";
cout<<"\n
cout<<" ANOMALIA MEDIA :m2 ";</pre>
cin>> mj2;
cout<<" EXCENTRICIDAD:ej ";</pre>
cin>> ej;
cout<<" INCLINACIÓN:incj ";</pre>
cin>> incjj;
cout<<" SEMIEJE MAYOR:aj ";</pre>
cin>> aj;
cout<<" ARGUMENTO DEL PERIFICO w:wj ";
cin>> wjj;
cout<<" NODOD ACENDENTE:ooj ";</pre>
cin>> oojj;
cout<<" MASA:mi ";
cin>> mj;
cout<<" Enter the value of t: ";</pre>
cin>> t;
cout<<" Enter the count : \n\n ";</pre>
cin>> p;
cout<<" Enter the value of N: \n\";
cin>> N;
m1=mi1*PI/180;
inci=incii*PI/180;
wi=wii*PI/180:
ooi=ooii*PI/180;
m2=mj2*PI/180;
incj=incjj*PI/180;
```

```
wj=wjj*PI/180;
ooj=oojj*PI/180;
ec2 = m2;
for (j = 1; j \le 100; j++)
ec1 = ec1 - (ec1 - ei * sin(ec1) - m1) / (1 - ei * cos(ec1));
ec2 = ec2 - (ec2 - ej * sin(ec2) - m2) / (1 - ej * cos(ec2));
b1 = ai * sqrt(1 - ei*ei);
r1 = ai * (1 - ei * cos(ec1));
ep1 = (1 / r1) * sqrt((1 + mi) / ai);
xb1 = ai * (cos(ec1) - ei);
yb1 = b1 * sin(ec1);
xp1 = -ai * ep1 * sin(ec1);
yp1 = b1 * ep1 * cos(ec1);
b2 = aj * sqrt(1 - ej*ej);
r2 = aj * (1 - ej * cos(ec2));
ep2 = (1 / r2) * sqrt((1 + mj) / aj);
xb2 = aj * (cos(ec2) - ej);
yb2 = b2 * sin(ec2);
xp2 = -aj * ep2 * sin(ec2);
yp2 = b2 * ep2 * cos(ec2);
px1 = cos(wi) * cos(ooi) - sin(wi) * sin(ooi) * cos(inci);
py1 = cos(wi) * sin(ooi) + sin(wi) * cos(ooi) * cos(inci);
pz1 = sin(wi) * sin(inci);
qx1 = -sin(wi) * cos(ooi) - cos(wi) * sin(ooi) * cos(inci);
qy1 = -\sin(wi) * \sin(ooi) + \cos(wi) * \cos(ooi) * \cos(inci);
qz1 = cos(wi) * sin(inci);
px2 = cos(wj) * cos(ooj) - sin(wj) * sin(ooj) * cos(incj);
py2 = cos(wj) * sin(ooj) + sin(wj) * cos(ooj) * cos(incj);
pz2 = sin(wj) * sin(incj);
qx2 = -sin(wj) * cos(ooj) - cos(wj) * sin(ooj) * cos(incj);
qy2 = -sin(wj) * sin(ooj) + cos(wj) * cos(ooj) * cos(incj);
qz2 = cos(wj) * sin(incj);
xi=xb1*px1+yb1*qx1;
yi=xb1*py1+yb1*qy1;
zi=xb1*pz1+yb1*qz1;
vix = xp1 * px1 + yp1 * qx1;
viy = xp1 * py1 + yp1 * qy1;
viz = xp1 * pz1 + yp1 * qz1;
xj = xb2 * px2 + yb2 * qx2;
yj = xb2 * py2 + yb2 * qy2;
zj = xb2 * pz2 + yb2 * qz2;
vjx = xp2 * px2 + yp2 * qx2;
vjy = xp2 * py2 + yp2 * qy2;
vjz = xp2 * pz2 + yp2 * qz2;
```

```
ri = sqrt(xi * xi + yi * yi + zi * zi);
rj = sqrt(xj * xj + yj * yj + zj * zj);
rij = sqrt((xj - xi) * (xj - xi) + (yj - yi) * (yj - yi) + (zj - zi) * (zj - zi));
vi = sqrt(vix * vix + viy * viy + viz * viz);
vj = sqrt(vjx * vjx + vjy * vjy + vjz* vjz);
ET = (mi * vi * vi + mj * vj * vj) / 2 - (mi / ri + mj / rj + mi * mj / rij);
h = (0.017202099 / 24) * t; \función de paso
pFile = fopen ("orbitalelements.txt","w");
for (i=1; i<=N;i++)
\\xi
k1ix = h*vix;
llix = h*(-G*(mc+mi)*xi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)
+G*mj*((xj-xi)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-xj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)));
k1iy = h*viy;
lliy = h*(-G*(mc+mi)*yi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)
+G*mj*((yj-yi)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-yj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)));
k1iz = h*viz;
lliz = h*(-G*(mc+mi)*zi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)
+G*mj*((zj-zi)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-zj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)));
// xj
k1jx = h*vjx;
11jx = h*(-G*(mc+mj)*xj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)
+G*mi*((xi-xj)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-xi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)));
k1jy = h*vjy;
11jy = h*(-G*(mc+mj)*yj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)
+G*mi*((yi-yj)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-yi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)));
k1jz = h*vjz;
l1jz = h*(-G*(mc+mj)*zj/pow(sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj),3)
+G*mi*((zi-zj)/pow(sqrt((xj-xi)*(xj-xi)+(yj-yi)*(yj-yi)+(zj-zi)*(zj-zi)),3)
-zi/pow(sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi),3)));
//xi
k2ix = h*(vix+11ix/2);
12ix = h*(-G*(mc+mi)*(xi+k1ix/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2)))
+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2)
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)
+G*mj*((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)))\\
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/2-zi-k1iz/
k1iz/2),3)-(xj+k1jx/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2)+(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2)
+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)));
k2iy = h*(viy+11iy/2);
12iy = h*(-G*(mc+mi)*(yi+k1iy/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2))
+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2)
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)
+G*mj*((yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2))
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)), 3)
-(yj+k1jy/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2)+(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2)
+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)));
```

```
k2iz = h*(viz+11iz/2);
12iz = h*(-G*(mc+mi)*(zi+k1iz/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2)+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2))
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)
+ G*mj*((zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2))) \\
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)),3)-
(zj+k1jz/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2)+(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2)
+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)));
// xj
k2jx = h*(vjx+11jx/2);
12jx = h*(-G*(mc+mj)*(xj+k1jx/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2))
+(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2)+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)
+G*mi*((xi+k1ix/2-xj-k1jx/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)))\\
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)), 3)
-(xi+k1ix/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2)+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2))
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)));
k2jy = h*(vjy+l1jy/2);
12jy = h*(-G*(mc+mj)*(yj+k1jy/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2)+(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2))
+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)
+G*mi*((yi+k1iy/2-yj-k1jy/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)))\\
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)),3)
-(yi+k1iy/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2)+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2))
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)));
k2jz = h*(vjz+l1jz/2);
12jz = h*(-G*(mc+mj)*(zj+k1jz/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2)*(xj+k1jx/2)*(yj+k1jy/2)*(yj+k1jy/2))
+(zj+k1jz/2)*(zj+k1jz/2)),3)
+G*mi*((zi+k1iz/2-zj-k1jz/2)/pow(sqrt((xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)*(xj+k1jx/2-xi-k1ix/2)))\\
+(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)*(yj+k1jy/2-yi-k1iy/2)+(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)*(zj+k1jz/2-zi-k1iz/2)), 3)
-(zi+k1iz/2)/pow(sqrt((xi+k1ix/2)*(xi+k1ix/2)+(yi+k1iy/2)*(yi+k1iy/2))
+(zi+k1iz/2)*(zi+k1iz/2)),3)));
k3ix = h*(vix+12ix/2);
13ix = h*(-G*(mc+mi)*(xi+k2ix/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)))
+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2)
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)
+G*mj*((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)))\\
+ (\mathtt{yj+k2jy/2-yi-k2iy/2}) * (\mathtt{yj+k2jy/2-yi-k2iy/2}) + (\mathtt{zj+k2jz/2-zi-k2iz/2}) * (\mathtt{zj+k2jz/2-zi-k2iz/2})), 3)
-(xj+k2jx/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)
+(zj+k2jz/2)*(zj+k2jz/2)),3)));
k3iy = h*(viy+12iy/2);
13iy = h*(-G*(mc+mi)*(yi+k2iy/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2)))
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)
+G*mj*((yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)))\\
+(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)*(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)+(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)*(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)), 3)
-(yj+k2jy/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)
+(zj+k2jz/2)*(zj+k2jz/2)),3)));
k3iz = h*(viz+12iz/2);
13iz = h*(-G*(mc+mi)*(zi+k2iz/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2))) + (yi+k2iy/2) + (yi+
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)
+G*mj*((zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)))\\
+(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)*(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)+(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)*(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)), 3)
-(zj+k2jz/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)
+(zj+k2jz/2)*(zj+k2jz/2)),3)));
//xj
k3jx = h*(vjx+12jx/2);
13jx = h*(-G*(mc+mj)*(xj+k2jx/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2
+(z_1+k2_1z/2)*(z_1+k2_1z/2)),3)
+G*mi*((xi+k2ix/2-xj-k2jx/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2))
```

```
+(y_1+k_2)y_2-y_1-k_2iy_2+(y_1+k_2)y_2-y_1-k_2iy_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2-z_1-k_2iz_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_2+(z_1+k_2)z_
-(xi+k2ix/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2))
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)));
k3jy = h*(vjy+12jy/2);
13jy = h*(-G*(mc+mj)*(yj+k2jy/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2))
+(zj+k2jz/2)*(zj+k2jz/2)),3)
+G*mi*((yi+k2iy/2-yj-k2jy/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2))
+(y_j+k_2)y_2-y_i-k_2iy_2*(y_j+k_2)y_2-y_i-k_2iy_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_i-k_2iz_2*(z_j+k_2)z_2-z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2*(z_j+k_2)z_2-z_2-
-(yi+k2iy/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2))
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)));
k3jz = h*(vjz+12jz/2);
13jz = h*(-G*(mc+mj)*(zj+k2jz/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2)*(xj+k2jx/2)+(yj+k2jy/2)*(yj+k2jy/2))
+(zj+k2jz/2)*(zj+k2jz/2)),3)
+G*mi*((zi+k2iz/2-zj-k2jz/2)/pow(sqrt((xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)*(xj+k2jx/2-xi-k2ix/2)))
+(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)*(yj+k2jy/2-yi-k2iy/2)+(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)*(zj+k2jz/2-zi-k2iz/2)), 3)
-(zi+k2iz/2)/pow(sqrt((xi+k2ix/2)*(xi+k2ix/2)+(yi+k2iy/2)*(yi+k2iy/2))
+(zi+k2iz/2)*(zi+k2iz/2)),3)));
//xi
k4ix = h*(vix+13ix);
14ix = h*(-G*(mc+mi)*(xi+k3ix)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy))
+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)),3)
+G*mj*((xj+k3jx-xi-k3ix)/pow(sqrt((xj+k3jx-xi-k3ix)*(xj+k3jx-xi-k3ix))
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz)),3)
-(x_j+k3_{jx})/pow(sqrt((x_j+k3_{jx})*(x_j+k3_{jx})*(y_j+k3_{jy})*(y_j+k3_{jy})*(z_j+k3_{jz})*(z_j+k3_{jz}),3)));
k4iy = h*(viy+13iy);
14iy = h*(-G*(mc+mi)*(yi+k3iy)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy))
+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)),3)
+G*mj*((yj+k3jy-yi-k3iy)/pow(sqrt((xj+k3jx-xi-k3ix)*(xj+k3jx-xi-k3ix))
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz)),3)
-(yj+k3jy)/pow(sqrt((xj+k3jx)*(xj+k3jx)+(yj+k3jy)*(yj+k3jy)+(zj+k3jz)*(zj+k3jz)),3)));
k4iz = h*(viz+13iz);
14 \verb"iz" = \verb"h*(-G*(mc+mi)*(zi+k3iz)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy))) + (yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+k3iy)*(yi+
+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)),3)
+G*mj*((zj+k3jz-zi-k3iz)/pow(sqrt((xj+k3jx-xi-k3ix)*(xj+k3jx-xi-k3ix)
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz),3)
-(yj+k3jy)/pow(sqrt((xj+k3jx)*(xj+k3jx)+(yj+k3jy)*(yj+k3jy)+(zj+k3jz)*(zj+k3jz)),3)));\\
//xj
k4jx = h*(vjx+13jx);
14jx = h*(-G*(mc+mj)*(xj+k3jx)/pow(sqrt((xj+k3jx)*(xj+k3jx)+(yj+k3jy)*(yj+k3jy))
+(zj+k3jz)*(zj+k3jz)),3)
+G*mi*((xi+k3ix-xj-k3jx)/pow(sqrt((xj+k3jx-xi-k3ix)*(xj+k3jx-xi-k3ix)))
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz)),3)
-(xi+k3ix)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy)+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)););
k4jy = h*(vjy+13jy);
14jy = h*(-G*(mc+mj)*(yj+k3jy)/pow(sqrt((xj+k3jx)*(xj+k3jx)+(yj+k3jy)*(yj+k3jy))
+(zj+k3jz)*(zj+k3jz)),3)
+G*mi*((yi+k3iy-yj-k3jy)/pow(sqrt((xj+k3jx-xi-k3ix)*(xj+k3jx-xi-k3ix)
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz)),3)
-(xi+k3ix)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy)+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)),3)));
k4jz = h*(vjz+13jz);
14 jz = h*(-G*(mc+mj)*(zj+k3jz)/pow(sqrt((xj+k3jx)*(xj+k3jx)+(yj+k3jy)*(yj+k3jy))) + (yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)*(yj+k3jy)
+(z_j+k3_{jz})*(z_j+k3_{jz}),3)+G*mi*((z_i+k3_{iz}-z_j-k3_{jz})/pow(sqrt((x_j+k3_{jx}-x_i-k3_{ix})*(x_j+k3_{jx}-x_i-k3_{ix}))
+(yj+k3jy-yi-k3iy)*(yj+k3jy-yi-k3iy)+(zj+k3jz-zi-k3iz)*(zj+k3jz-zi-k3iz)),3)
-(xi+k3ix)/pow(sqrt((xi+k3ix)*(xi+k3ix)+(yi+k3iy)*(yi+k3iy)+(zi+k3iz)*(zi+k3iz)););
xi=xi+(k1ix+2*k2ix+2*k3ix+k4ix)/6;
xj=xj+(k1jx+2*k2jx+2*k3jx+k4jx)/6;
```

```
vix=vix+(11ix+2*12ix+2*13ix+14ix)/6;
vjx=vjx+(11jx+2*12jx+2*13jx+14jx)/6;
yi=yi+(k1iy+2*k2iy+2*k3iy+k4iy)/6;
yj=yj+(k1jy+2*k2jy+2*k3jy+k4jy)/6;
viv=viv+(11iv+2*12iv+2*13iv+14iv)/6;
vjy=vjy+(11jy+2*12jy+2*13jy+14jy)/6;
zi=zi+(k1iz+2*k2iz+2*k3iz+k4iz)/6;
z_{j=z_{j+(k1_{jz+2*k2_{jz+2*k3_{jz+k4_{jz}}})/6;}}
viz=viz+(11iz+2*12iz+2*13iz+14iz)/6,
vjz=vjz+(11jz+2*12jz+2*13jz+14jz)/6;
ri=sqrt(xi*xi+yi*yi+zi*zi);
rj=sqrt(xj*xj+yj*yj+zj*zj);
\label{eq:continuous} \footnotesize \texttt{rij} = \texttt{sqrt}((\texttt{xj}-\texttt{xi})*(\texttt{xj}-\texttt{xi})*(\texttt{yj}-\texttt{yi})*(\texttt{yj}-\texttt{yi})*(\texttt{zj}-\texttt{zi})*(\texttt{zj}-\texttt{zi}));
vi=sqrt(vix*vix+viy*viy+viz*viz);
vj=sqrt(vjx*vjx+vjy*vjy+vjz*vjz);
RVi=xi*vix+yi*viy+zi*viz;
; Calculo de excentricidad******
exi=(vi*vi/(1+mi)-1/ri)*xi-(RVi/(1+mi))*vix;
eyi=(vi*vi/(1+mi)-1/ri)*yi-(RVi/(1+mi))*viy;
ezi=(vi*vi/(1+mi)-1/ri)*zi-(RVi/(1+mi))*viz;
ei=sqrt(exi*exi+eyi*eyi+ezi*ezi);
RV_{j=x_{j}*v_{j}x+v_{j}*v_{j}v+z_{j}*v_{j}z};
exj=(vj*vj/(1+ mj)-1/rj)*xj-(RVj/(1+mj))*vjx;
eyj=(vj*vj/(1+ mj)-1/rj)*yj-(RVj/(1+mj))*vjy;
ezj=(vj*vj/(1+ mj)-1/rj)*zj-(RVj/(1+mj))*vjz;
ej=sqrt(exj*exj+eyj*eyj+ezj*ezj);
;Calculo de momento angular h*****
hx=yi*viz-zi*viy;
hy=zi*vix-xi*viz;
hz=xi*viy-yi*vix;
hx1=yj*vjz-zj*vjy;
hv1=zj*vjx-xj*vjz;
hz1=xj*vjy-yj*vjx;
hh=sqrt(hx*hx+hz*hz+hy*hy);
hh1=sqrt(hx1*hx1+hz1*hz1+hy1*hy1);
;calculo de inclinacion******
inci=(-atan((hz/hh)/(sqrt(1-(hz/hh)*(hz/hh))))+1.5707963263)*180/PI;
incj=(-atan((hz1/hh1)/(sqrt(1-(hz1/hh1)*(hz1/hh1))))+1.5707963263)*180/PI;
;calculo de semieje mayor*******
ai=(ri*(mc+mi))/(2*(mc+mi)-ri*vi*vi);
aj=(rj*(mc+mj))/(2*(mc+mj)-rj*vj*vj);
ET=(mi*vi*vi+mj*vj*vj)/2-(mi/ri+mj/rj+mi*mj/rij);
;calculo de Nodo ascendente*********
nxi = -hy;
nyi = hx;
nxj = -hy1;
nyj = hx1;
Ni = sqrt(nxi*nxi + nyi*nyi);
```

```
Nj = sqrt(nxj*nxj + nyj*nyj);
cosooi = nxi / Ni;
cosooj = nxj / Nj;
ooi = (-atan((cosooi) / (sqrt(1 - (cosooi)*(cosooi)))) + 1.5707963263) * 180 / PI;
ooj = (-atan((cosooj) / (sqrt(1 - (cosooj)*(cosooj)))) + 1.5707963263) * 180 / PI;
;calculo de argumento denl perihelio**********
Nei = (nxi * exi + nyi * eyi) / (Ni * ei);
Nej = (nxj * exj + nyj * eyj) / (Nj * ej);
cosw1 = Nei;
cosw2 = Nej;
wi = (-atan((Nei) / (sqrt(1 - (Nei)*(Nei)))) + 1.5707963263) * 180 / PI;
wj = (-atan((Nej) / (sqrt(1 - (Nej)*(Nej)))) + 1.5707963263) * 180 / PI;
;calculo de anomalia media***************
cosei = (1 / ei) - ri / ((ai * ei));
Exci = -atan((cosei) / (sqrt(1 - (cosei)*(cosei)))) + 1.5707963263;
cosej = (1 / ej) - (rj / (aj * ej));
Excj = -atan((cosej) / (sqrt(1 - (cosej)*(cosej)))) + 1.5707963263;
m1 = (Exci - ei * sin(Exci)) * 180 / PI;
m2 = (Excj - ej * sin(Excj)) * 180 / PI;
p=p+1;
if(i==1)
   {
   }
   else
   ۲.
   p1=i%366000;
   if(p1==1)
\\ salida de datos
       printf(" %.1f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f, n ",p,ei,inci,ET,ai,wi,ooi);
fprintf (pFile, " %d %.1f %f %f %f %f %f %f \n ",i,p,ei,inci,ET,ai,wi,ooi,xi,yi,zi);
   }
  }
printf(" %f \n ",m1,m2,ei,incj,aj,wj,ooj,nxi,nyi,nxj,nyj);
 fclose (pFile);
 cin>> m;
return(0);
getch();
```

#### ANEXO C. Asteroides cercanos a la tierra NEO's

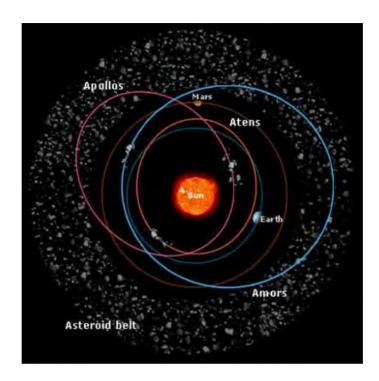


Figura 6.6: Ubicación Asteroides NEO's tomada de la pagina de nasa

La población de pequeños objetos asteroidales que vagan por el sistema solar, interno es interesante por muchos motivos. En primer lugar, los asteroides cercanos representan una posible fuente de meteoritos y de proyectiles capaces de generar los grandes cráteres y las estructuras de impacto que se observan en la Luna y en los cuatro planetas terrestres; conocer el número de los proyectiles en los distintos intervalos de dimensiones y la distribución de sus parámetros orbitales puede servir para determinar con mayor precisión la frecuencia de los impactos y contribuir, indirectamente a la elaboración de una cronología relativamente precisa de las superficies planetarias caracterizada.

Otro motivo de interés es de tipo marcadamente astronómico. A causa de las perturbaciones a que están sujetas sus órbitas -ya sea durante periodos breves, por encuentros cercanos con los planetas terrestres, o durante periodos largos, sobre todo por la influencia de Júpiter-, las direcciones de los asteroides cercanos cambian continuamente de forma caótica, lo cual determina que no puedan sobrevivir por término medio mucho más de 200 millones de años antes de chocar con un planeta.

Los asteroides cercanos se clasifican en tres categorías principales según sus parámetros

(o elementos) orbitales: objetos Amor, objetos Apolo y objetos Aten, por el nombre de los tres prototipos.

En el perihelio, las órbitas de los asteroides Amor alcanzan una distancia al Sol comprendida entre 1,017 y 1,3 unidades astronómicas (UA). puesto que la órbita de la Tierra se sitúa entre 0,983 y 1,017 UA del Sol, los objetos Amor llegan a atravesar la órbita de Marte, pero no la de la Tierra.

Los objetos Apolo, en cambio, tienen en el perihelio distancias inferiores a 1,017 UA y, por lo tanto, pueden atravesar la órbita de la Tierra; sin embargo, su semieje mayor supera 1 UA, lo cual significa que su periodo orbital dura más de un año.

Finalmente, los objetos Aten (desconocidos hasta 1976) tienen un semieje mayor inferior a 1 UA y, en consecuencia, pasan la mayor parte del tiempo en la zona de espacio interior a la órbita terrestre.<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Tomado de la pagina de nasa: http://neo.jpl.nasa.gov/neo/

Cuadro 6.2: Condiciones iniciales asteorides NEO's

DESIGANCION Y NOMBRE	EPOCA	ANOMALIA MEDIA	ARGUMENTO DEL PERIHELIO	NODO ASCENDENTE	INCLINACIÓN	EXCENTRICIDAD	SEMIEJE MAYOR
(4257) Ubasti	20120314	176,1	278,9	169,2	40,7	0,468	1,647
1999 DK3	20120314	48,7	103,0	149,8	43,1	0,444	2,11
2001 RM	20110208	292,4	118,0	223,7	36,6	0,485	2,253
2011 BZ18	20120314	67,5	253,6	298,3	13,8	0,705	3,027

# ANEXO D. Aplicación del codigo de programación pertuba.c a asteroides tipo NEO's

Se aplíca el codigo de programación a algunos asteroides cercanos a la tierra para observar la pertubación secular ocaciona por el mecanismo Kozai.Los datos de las condiciones inicales estan consigandos en el cuadro 6.2

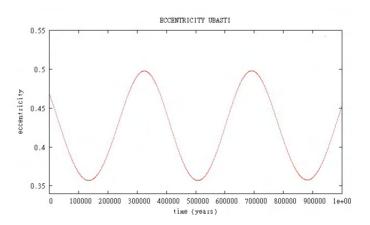


Figura 6.7: Evolución temporal de la excentricidad de Ubasti

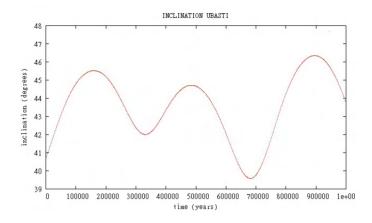


Figura 6.8: Evolución temporal de la inclinación de Ubasti

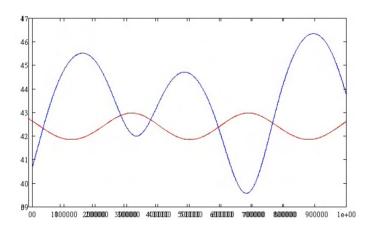


Figura 6.9: Acoplamiento excentricidad-inclinación Ubasti

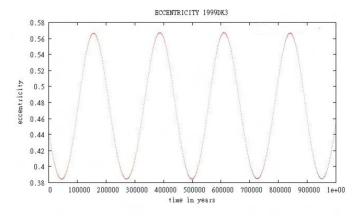


Figura 6.10: Evolución temporal de la excentricidad de 1999DK3

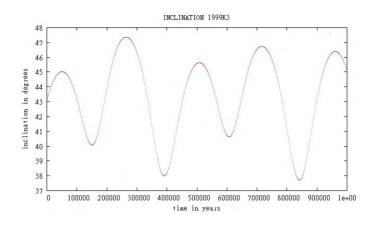


Figura 6.11: Evolución temporal de la inclinación de 1999DK3

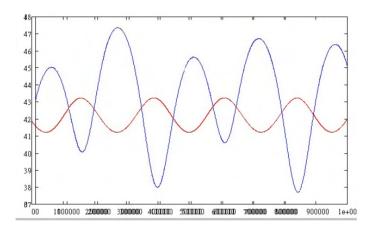


Figura 6.12: Acoplamiento excentricidad-inclinación 1999DK3

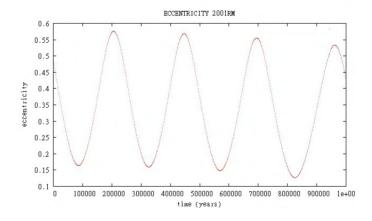


Figura 6.13: Evolución temporal de la excentricidad de 2001RM

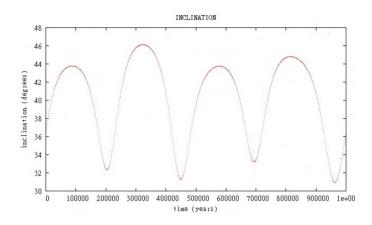


Figura 6.14: Evolución temporal de la inclinación de 2001RM

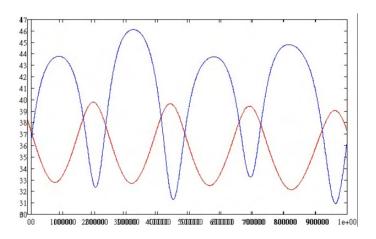


Figura 6.15: Acoplamiento excentricidad-inclinación 2001RM

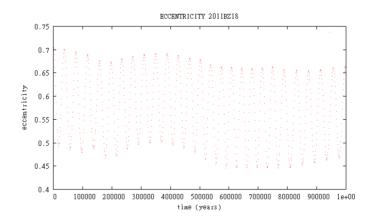


Figura 6.16: Evolución temporal de la excentricidad de 2011BZ18

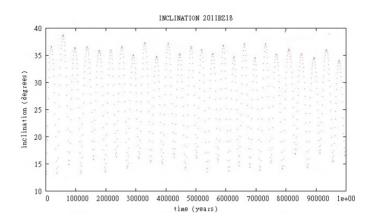


Figura 6.17: Evolución temporal de la inclinación de 2011BZ18

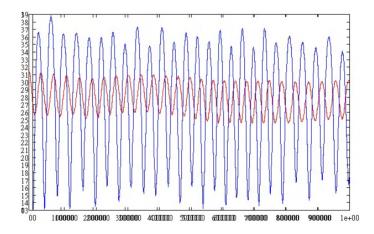


Figura 6.18: Acoplamiento excentricidad-inclinación 2001RM