

Serie ALCANZAR
Volumen I - Tomo I

Infinito, diagnóstico en MLGM y propiedad de continuación única

Óscar Fernando Soto Agreda
Sergio Alexander Gómez Noguera
Ricardo Córdoba Gómez

êditorial

Universidad de **Nariño**

Infinito, diagnóstico en MLGM y propiedad de continuación única

Serie ALCANZAR. Volumen I - Tomo I



Centro de Asesoría y Producción en Diseño e Innovación

Infinito, diagnóstico en MLGM y propiedad de continuación única

Serie ALCANZAR. Volumen I - Tomo I

Óscar Fernando Soto Ágreda
Sergio Alexander Gómez Noguera
Ricardo Córdoba Gómez

êditorial
Universidad de **Nariño**

Soto Ágreda, Óscar Fernando

Infinito, diagnóstico en MLGM y propiedad de continuación única / Óscar Fernando Soto Ágreda, Sergio Alexander Gómez Noguera, Ricardo Córdoba Gómez—1^a. ed. – San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

124 páginas : gráficas, tablas

Incluye referencias bibliográficas p. 114 - 119

ISBN: 978-628-7864-10-8 Impreso

ISBN: 978-628-7864-11-5 Digital

1. Serie armónica 2. Infinito—Conceptos 3. Modelos lineales 4. Ecuaciones no lineales 5. Continuación única 6. Fracciones continuas 7. Análisis matemático. I. Gómez Noguera, Sergio Alexander II. Córdoba Gómez, Ricardo

515.2 S718in – SCDD-Ed. 22



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1994



Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEC 009/2022 - ENERO 11 DE 2023

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Infinito, diagnóstico en MLGM y propiedad de continuación única

© Editorial Universidad de Nariño

© Óscar Fernando Soto Ágreda

Sergio Alexander Gómez Noguera

Ricardo Córdoba Gómez

ISBN impreso: 978-628-7864-10-8

ISBN digital: 978-628-7864-11-5

Primera edición

Corrección de estilo: Ricardo Erazo Melo

Diseño de portada: Lizeth Tiraca

Correo: lizethtiracadg@hotmail.com

Diagramación: Sergio Alexander Gómez y Nathaly Rivadeneira

Fecha de publicación: Noviembre de 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o la Editorial de la Universidad de Nariño



Semblanza de
**Vicente Erdulfo
Ortega Patiño**

En una parcela del sur que Aurelio Arturo llamó *los países de Colombia*, donde el verde es de todos los colores, y que ahora se llama Guitarilla (Cesto de flores), nació Vicente Erdulfo el 17 de octubre de 1944. Realizó sus estudios primarios y secundarios en este municipio del departamento de Nariño. La Universidad de Nariño le confirió el título de Licenciado en Educación, con especialidad en Matemáticas y Física, el 17 de agosto de 1972.

Tan pronto obtuvo el título, inicia su labor docente en el INEM de Pasto, desde el 17 de noviembre de 1972 hasta el 26 de septiembre de 1973, y desde el 16 de noviembre de 1973 hasta el 31 de julio de 1974 en el colegio Policarpa Salavarrieta de Samaniego. Desde el 5 de agosto de 1974 hasta la fecha fungió como profesor de tiempo completo en la Universidad que lo formó. De espíritu comprometido y de avanzada en la formación de los profesionales profesantes de las matemáticas, se ha interesado en su formación académica y en elevar los estándares curriculares de la Licenciatura en Matemáticas, programa de formación profesional, que la Universidad de Nariño tiene como alternativa de oferta dignificante para los jóvenes de la región.

Erdulfo es reconocido como hombre de debate, preconizador de las ideas socialistas que emergen de las discusiones, en las que sus argumentos son claros e irrefutables. Hombre de gran energía que ha sorteado dificultades propias de la

existencia humana en las cuales, ha resultado victorioso e indemne. Su vida familiar, que conozco de forma ligera, se le acompaña con dos de los tres hijos: una de ellas persiste sus existencia en Argentina, y la otra, que lo convirtió en abuelo, ancló sus naves en la oficiosa y desordenada Bogotá, capital de nuestro país, y a quien acudió en la cercana etapa de la jubilación.

“Erdulfo es reconocido como hombre de debate”

Preocupado y ocupado en su formación académica, aduciendo que por respeto y compromiso en la dedicación que el ejercicio docente requiere en la formación de profesionales, ha participado en incontables eventos en los que se discute la ciencia matemática y sus formas de aprendizaje. Además, ha trasegado su rumbo por el país en coloquios, seminarios y encuentros. El último título académico que recibió, fue el de Magíster en Educación, conferido por la Universidad del Valle en abril de 2011; la tesis de grado se tituló *Formación de la Noción Abstracta de Estructura Algebraica a partir del Estudio Histórico-Epistemológico de los Aportes de Cantor y Dedekind*.

FORMACIÓN DE LA NOCIÓN ABSTRACTA
DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA
A partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de
Cantor y Dedekind

Vincent Erdulfo Ortega Patiño
Código: 8704891

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar al título de Magíster en Educación: Estudio en Educación Matemática

Director
Luis Carlos Arbelaez Aparicio

Mucho antes de estos estudios posgraduales referidos a la matemática, incursionó como estudiante de etapa cuateriana en la Universidad Nacional de Colombia en la que se interesó por la topología simpléctica, teoría basada en la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica. En sus etapas de formación posgrada tuvo que vencer las vicisitudes de actuar como estudiante y padre en el cuidado de un hijo que fue apagando la luz de su existencia, vencido por la enfermedad. Tal vez esta

circunstancia, le enseñó a Erdulfo a ver en cada chico que entra a su aula, en cada uno de sus estudiantes, la posible imagen portentosa de un gran académico y,

por ende, de un gran profesional. Más que un maestro, se ha convertido en guía y faro de todos los que han sido sus alumnos. Me encuentro entre ellos, y por estas y otras razones, admiro su memoria, su pasión por las matemáticas, de las que entiende a cabalidad las ramas que la componen, con su método propio y el alto significado de los objetos y lo que ellos representan.

“Más que un maestro, se ha convertido en guía y faro de todos los que han sido sus alumnos”

Lector consumado, interpreta como el más canon epistemológico de las teorías y esto lo ha convertido en un escritor perfeccionista. Sus escritos concienzudos, llenos de detalles, de datos, de buena información distan la impronta de la prosa por su entrega, pues justo, el sentido de no pasar por alto los detalles, sumergen sus escritos en el lastre de la revisión perpetua, a fin de que alcancen el grado de perfección que lo ameritan. Ha visto en cada libro un tesoro y tiene acuñados en su memoria, acaso en orden jerárquico, los títulos y autores de los mejores libros en cada una de las ramas de la matemática. Tuve la oportunidad de conocer su biblioteca personal, y en todos los rincones de los estantes sobresalían títulos apasionantes. En este sentido, cada uno de sus libros, es un amigo, al que asiste con frecuencia. Además, en este sentido y con diligencia a reconocer, de manera excepcional a autores colombianos, de quien recomienda su adquisición y uso.

La capacidad de entrega, su afán perfeccionista en las tareas, el compromiso social que ha acuñado en su espíritu se ha hecho evidente en varias etapas de la vida, y estos gestos se han hecho evidentes en su accionar; acaso por ello, la alta dirección de la universidad lo ha encargado de la administración en cargos importantes: el primero de junio de 1990 fue nombrado Vice-decano de la Facultad de Educación, Facultad que



por aquella época, casi constituía la mitad de la misma universidad, no solo por la oferta de programas, sino por la cobertura estudiantil que tenía. De hecho, por entonces, una misma carrera se ofrecía en jornadas diurna y nocturna. También, en abril de 1994, desempeñó el cargo director del Departamento de Matemáticas. Viene al caso, comentar estos cargos, para reafirmar la calidad de entrega y amor por la universidad. De modo que en su actuar, conjugaba su capacidad profesional, con la seriedad coyuntural por su profesión de maestro y los estándares de exigencia que imponía como el único vehículo disciplinar en el aprendizaje de la matemática.

Al mirar en retrospectiva la labor acometida en la última década, se vislumbra la coherencia de su interés con el quehacer docente puesto que se ha dedicado a las asignaturas cuyo contenido están profundamente enraizados en lo histórico y en lo epistemológico de las matemáticas, de las didácticas de las ciencias y de la pedagogía, imprimiendo en ellas el sello particular de la habilidad docente y su basta experiencia profesional. Bajo esta cohesión de formación adquirida y experiencia ejecutada, deja como legado una serie de guías que al ser colecciónadas, se convierten en excelentes mediadores bajo el estandarte de cosechar la formación de excelentes profesores de matemáticas.

No recuerdo caso similar en la Universidad de Nariño, de un profesor que haya cumplido a cabalidad y con decoro su ejercicio profesional docente hasta el último minuto posible, previo al retiro forzoso, por alcanzar la edad permitida por el Estado. "Soy capaz de pagar, para que me dejen seguir haciendo mi labor", aducía con frecuencia, si bien es justo que, a una determinada altura de la vida se entre a una etapa de sosiego y tranquilidad, que también se acompañe por beber a solas el aprendizaje de las altas matemáticas, hará falta su presencia magnífica en los pasillos y aulas, avivando los espíritus juveniles, suscitando el entusiasmo en sus colegas al alentar a estudiar matemáticas desde la comprensión misma del significado de sus objetos.

"Soy capaz de pagar, para que me dejen seguir haciendo mi labor"

Erdulfo deja el recuerdo de la lección magnífica de que el esfuerzo vale la pena y se ve al final recompensado. El empeño ejercido por él, en cada uno de los momentos de su vida, osa de mostrarse como ejemplo y se ha convertido en el fecundo camino seguido por varios de sus estudiantes, quienes disfrutando de su amistad han seguido el sinuoso camino de los estudios posgraduales. Grata circunstancia, si se tiene en cuenta, que en la vida se hace posible emular lo positivo.

Los rincones del campus universitario, guardarán el recuerdo imperecedero de sus pasos, las aulas de su sabiduría y buena voluntad y las mentes de sus pupilos, la inquietud de su espíritu. Tanto empeño impuesto en su ejercicio profesional se queda en los recuerdos como el signo inequívoco de no haber perdido la ilusión de labrar el destino de los jóvenes, subyugados por la esperanza de un país mejor y un territorio amigable.

“Gracias Erdulfo, avivaremos el fuego de tus enseñanzas siguiendo la traza del ejemplo brindado”.

Índice general



Introducción.....	13
-------------------	----

Capítulo 1. Breviario de ejemplos con el infinito

1.1	Introducción.....	17
1.2	Conceptos iniciales sobre el infinito.....	18
1.2.1	Distribución de puntos en el plano con distancias enteras	29
1.2.2	Un resultado contradictorio.....	31
1.2.3	La ventanería del hotel de Hilbert.....	32
1.2.4	La serie armónica y el primer transfinito	33
1.2.5	Las fracciones continuas constituyentes de irracionales	35
1.2.6	Un pequeño ejemplo sobre series	40
1.2.7	Paradigma perímetro-área	41
1.2.8	Un límite ejemplar	41
1.2.9	Más sobre fracciones continuas y algo de radicales	43
1.2.10	Otros argumentos que sostienen al infinito.....	47
1.2.11	Anotación a la distribución de puntos	48
1.2.12	Vestigios de la función z de Riemann	50
1.2.13	División de un segmento en partes iguales	53
1.2.14	Los racionales como adherencia de los irracionales.....	57

Capítulo 2.

Diagnóstico en modelos lineales generalizados mixtos (MLGM)

2.1	Introducción.....	61
2.1.1	Análisis de residuos	61
2.1.2	Análisis de sensibilidad	63
2.2	Modelos lineales generalizado mixtos	64
2.2.1	Definición del modelo.....	64
2.2.2	Estimación de vector de parámetros ψ	66
2.3	Influencia local.....	67
2.3.1	Influencia local: enfoque general	67
2.3.2	Influencia local en MLGM: Dificultades	69
2.3.3	Influencia local en MLGM: enfoque GAMLSS.....	70
	Esquema 1: ponderación de casos.....	71
	Esquema 2: perturbación en la variable respuesta	72
	Esquema 3: perturbación en la variable explicativa	73

Apéndice

2.A	Verosimilitud penalizada a partir de la aproximación de Laplace.....	75
2.B	Elementos necesarios para la curvatura $C_d(\beta)$ o $B_d(\beta)$	77
2.B.1	Escore y Fisher para β a partir de $L_p(\beta; b)$	77
2.B.2	Ponderación de casos.....	80
2.B.3	Perturbación aditiva sobre la variable respuesta	81
2.B.4	Perturbación sobre la variable explicativa	82
2.C	Curvaturas en R software.....	83

Capítulo 3.

Un resultado de continuación única para un sistema bidimensional de ecuaciones lineales para ondas superficiales

3.1	Introducción	90
3.2	Un estimativo tipo Carleman.....	94
3.3	Continuación única	105
	Bibliografía	114
	Índice de figuras y tablas.....	120
	Acerca de los autores	121

Introducción

Movidos por la iniciativa de hacer de los procesos de investigación que ejecutan los grupos constituidos para este fin y adscritos al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, un vórtice de visibilidad, se ha adoptado la pertinente decisión de establecer su producción científica y académica de una serie de textos, de la que este volumen es el primer tomo. La serie ALCANZAR: evidencia textual de investigación del Departamento de Matemáticas, se convertirá en ejemplo inspirador para las generaciones actuales y venideras, y para que los informes de los investigadores no se anclen en los anaqueles del olvido, haciéndose invisibles y nada asertivos para los interesados.

GESCAS, ALTENUA y GIBIMA, como grupos de investigación con diferentes afluentes y líneas consolidadas han celebrado, a través de algunos de sus integrantes, este compromiso que lleva la firma de la seriedad de sus productos y de la impronta del reconocimiento social que tiene nuestro departamento como administrador de dos programas de pregrado y tres de maestría. Gescas es un grupo dedicado a los asuntos educativos de matemática, geometría y estadística, Altenua dirige su accionar en temas que van a la vanguardia de los progresos del álgebra moderna y posee la cualidad de ser un grupo interinstitucional, y Gibima,

cubre los campos investigativos en el análisis y el ámbito de la aplicación de la matemática en el mundo de la vida.

Esta feliz idea surge desde la impropia e inveterada circunstancia de que los resultados de investigaciones no se apegan a las fuentes de información de las que se dispone, en consecuencia, sus resultados permanecen rodeados de oscuridad y desconocimiento. Al tiempo, la evidencia física de la existencia de la serie, se convierte desde ya en un dinamizador efectivo de los procesos de investigación y en un adalid de reconocimiento de sus investigadores y gestores.

Este primer volumen titulado **INFINITO, DIAGNÓSTICO EN MLGM y PROPIEDAD DE CONTINUACIÓN ÚNICA** mezcla los resultados de tres trabajos que se cohesionan en una interrelación que procura describir fenómenos naturales.

El infinito es uno de los objetos más extraños del mundo académico, de él, cada humano se hace una imagen inicial e incipiente que con frecuencia es defec-tuosa. Ya en los terrenos académicos asombra, por ejemplo, reconocer que existen infinitos tipos de infinito y que sin su verdadera comprensión e institucionalización como objeto matemático, muchas teorías se tornarían oscuras e incompletas. Es posible asegurar que solo pensando en la unidad, como gesto suspicaz, se percibe la gestación del infinito. Este concepto, por tanto, emerge y se hace necesario en cada una de las teorías matemáticas y, con ello, se cruza en la interpretación científica del universo, como en el cabal entendimiento de la teoría de la relatividad de Einstein. En el capítulo referido al infinito, se exponen catorce ejemplos en los que se entromete este concepto, algunos de ellos, sostenidos desde lo finito pero cada cual, interesante y hasta divertido. Son solo catorce de los muchos ejemplos que aparecieron como producto de la investigación titulada: *Serie Alcanzar. Textos para evidenciar los procesos de investigación.*

Los modelos de regresión son usados en una gran variedad de disciplinas científicas con el objetivo de explicar una variable respuesta en términos de otras variables de diferente naturaleza, denominadas variables predictoras o covariables. Teniendo esto en mente, a lo largo de los años han surgido diferentes tipos de modelos, comenzando con el modelo de regresión simple con respuesta gaussiana, pasando por los modelos lineales generalizados hasta modelos con características más complejas como los *GAMLSS* (Generalized additive models for location, scale and

shape). El uso de cada uno de estos tipos de modelos depende de las características inherentes a los datos, y una etapa importante en el análisis estadístico realizado a través de estos es la evaluación del uso adecuado de uno u otro modelo, tal evaluación se denomina diagnóstico y será tema central del segundo capítulo de este libro.

El área de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) congrega fuerzas de trabajo para el estudio de modelos teóricos y físicos gobernados por ecuaciones que contienen derivadas parciales en varias variables. Las EDP son modelos que intentan describir o generalizar fenómenos de la naturaleza en los que variaciones de tiempo, de espacio y de parámetros están involucradas. Los modelos de EDP pertenecen a diferentes especialidades o áreas científicas; como por ejemplo, modelos no lineales de ondas en aguas rasas en dinámica de fluidos, modelos magnetohidrodinámicos en física del plasma, óptica no lineal y mecánica cuántica, modelos integrodiferenciales en neurociencia y modelos elípticos en geometría y fenómenos estacionarios. En esta investigación se centra la atención en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describe la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud. Específicamente, se pretende analizar una propiedad de continuación única de las soluciones de este tipo de sistemas de ecuaciones.

Capítulo 1.

Breviario de ejemplos con el infinito

Resumen

El infinito es un objeto que reboza efectividad Matemática y lógica, vórtice de paradojas y dador de vida a otros objetos como series, límites, derivadas, integrales, (...) Emerge con la concepción de unidad y trasciende por cualquier temática. En este capítulo se esbozan temas consecuentes con el infinito desde la perspectiva de la idoneidad didáctica de un proyecto de investigación, que indaga por el conocimiento que poseen sobre el infinito los futuros educadores matemáticos. Con base en el hecho de que el conocimiento de los temas de un profesor, debe superar el conocimiento común, se proponen los siguientes ejemplos en el presente capítulo.

1.1 Introducción

El grupo GESCAS es una unidad docente adscrita al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Nariño con una misión académica fundamentada en la investigación del ingreso de mediadores en el aprendizaje de diversos objetos matemáticos y de indagar sobre el efecto que el diseño de estrategias metodológicas, causan dentro del progreso académico de las personas. La existencia de Gescas, como grupo de investigación en el ámbito de la educación matemática, se acerca a las cuatro décadas y ha resultado fundamental en el decurso y vida de la Universidad de Nariño. Una de sus más recientes investigaciones se realizó en torno al *Conocimiento matemático especializado sobre el infinito en educadores matemáticos en formación*. En ella participaron cincuenta estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas quienes establecieron secuencias didácticas para el aprendizaje del infinito como un objeto matemático de alta densidad en su uso.

Los investigadores, dentro de su compromiso de idoneidad investigativa, se comprometieron a proponer ejemplos de uso del concepto dentro de diferentes temáticas, en las cuales se sospecha poca injerencia del infinito. Ahondando en el concepto, es fácil determinar que el infinito es un concepto inherente a la matemática, vive en su esencia y aparece desde el mismo momento en que se vislumbra al 1 como representación de la unidad y, con ella, no solo se sitúa en el orbe académico la conceptualización de lo infinitamente grande, sino también de lo infinitamente pequeño. Esta argumentación asevera que al desarraigar el infinito de la matemática, ella se quedaría como una simple técnica de conteo, impidiendo a la humanidad adentrarse en el paraíso que deviene de su aprovechamiento mental; no emergería el concepto de límite, no podríamos alcanzar a dimensionar la cabalidad de lo eterno, ni siquiera a intentar explicar lo que sería imposible de explicar la cadena de demás conceptos como derivada, integral ni tampoco abordar el delicado, delicioso, pero fangoso terreno abonado por George F. Cantor con su teoría de transfinitos.

Al decidir de la alta necesidad del concepto de infinito dentro de todas las ramas de la matemática, se ha propuesto en este capítulo casi una docena de ejemplos

en los que aparece el concepto como un pensamiento de inevitable ocurrencia. Algunos de los ejemplos son propios de las elucubraciones del autor, y otros ya son de vasto conocimiento académico, los cuales se usan y aprovechan en sentido didáctico y divulgativo.

1.2 Conceptos iniciales sobre el infinito

El concepto de infinito es uno de los constructos más finos de la matemática, con gran historia, riqueza epistemológica y alta aplicabilidad en las áreas del análisis, álgebra y lógica; sin él, resulta imposible comprender las nociones de infinitésimo, infinitamente grande, infinito actual o infinito potencial, ni grandes teorías verificadas y establecidas como la teoría de la relatividad, la teoría del campo unificado, entre tantas.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918), matemático y lógico ruso, de ascendencia alemana y judía, fue quien más trabajó la noción del infinito actual, y por esta consideración es uno de los creadores de la teoría de conjuntos, base de las matemáticas modernas. Cantor lega toda una dinastía infinita de diversos infinitos, infinitos actuales (con todos sus elementos en acto, en totalidad), cada cual más grande que su predecesor. Esta dinastía fundamenta su existencia en que la suma (unión) de todos los subconjuntos de un conjunto, tiene una cardinalidad superior a la del conjunto original, es decir, no es posible establecer una función biyectiva entre un conjunto y sus partes y, en consecuencia, poseen cardinalidad diferente. La demostración elaborada por Cantor, en el caso en el que el conjunto inicial tiene cardinalidad infinita, utiliza el ingenioso argumento de la diagonal, mecanismo, que fundamenta los infinitos tipos de infinitos.

El hecho de que la cardinalidad del conjunto suma de las partes de otro, supera a la del conjunto inicial, se puede ver con un simple ejemplo; siendo $A = \{a, b, c\}$ el conjunto inicial o base, el conjunto suma de partes es

$$\rho(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

y puede verse que $\text{card}(A) = 3$, mientras que $\text{card}(\rho(A)) = 2^3 = 8$. En general, tiene ocurrencia que si $\text{card}(A) = n$, entonces $\text{card}(\rho(A)) = 2^n$.

La noción de infinito arraiga asuntos paradigmáticos, Laurence Sterne crea uno, por ejemplo, en su novela “Vida y opiniones del caballero Tristram Shandy” en el que da cuenta de la forma en que Tristram invierte dos años escribiendo los recuerdos de sus dos primeros días de vida y se pregunta si alcanza o no a escribir toda su biografía. La respuesta obvia es que no, pero si su vida es infinita, sin importar que se gaste un año escribiendo los recuerdos de tan solo un día, con seguridad, Tristram podrá escribir su autobiografía en totalidad. Esto se llama la paradoja de Tristram Shandy, y fue creada por Bertrand Russel. Como se explicará adelante, el infinito también compendia anomalías aritméticas de alto alcance.

El conjunto de los números naturales \mathbb{N} , tiene cardinalidad infinita, y es en la dinastía de los infinitos el más pequeño, su cardinalidad es Aleph cero, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ y tiene la gracia de tener infinitas partes con igual cardinalidad, por ejemplo, todos los múltiplos de 19 son en su totalidad \aleph_0 , puesto que se puede establecer la correspondencia biunívoca

$$1 \leftrightarrow 19, \quad 2 \leftrightarrow 38, \quad 3 \leftrightarrow 57, \quad \dots, \quad n \leftrightarrow 19n, \quad \dots$$

Desde esta perspectiva, se aprecia que el conjunto de los números naturales es infinito. Pero también el conjunto de los números naturales es equivalente o coordinable con el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} . Georg Cantor demostró la numerabilidad del conjunto de los racionales siguiendo el argumento de la diagonal en el que se evidencia una malversación de los naturales al rotular a los racionales positivos, lo cual da la sensación de que existen mucho más números naturales que racionales. La demostración de Cantor inicia con la disposición de los racionales positivos en una matriz infinita por dos costados, como se muestra en el Cuadro 1.1, y cuenta cada uno de ellos siguiendo el camino señalado en la Figura 1.1 lo cual garantiza que no se deje sin contar algún racional. Más aún, cada número racional positivo queda rotulado infinitas veces con sendos números naturales y la función construida $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

Por ejemplo, el racional 1 queda contado a lo largo de la diagonal principal de la tabla de la figura 1.1 con la secuencia de números naturales 1, 5, 13, 25, 41, 61, ...

que es la cola inicial de la sucesión de términos cuadráticos $(2n^2 - 2n + 1)$. Esta expresión genera una lista infinita de naturales que cuentan al mismo racional 1, con lo que se nota un despilfarro considerable de los naturales y hacen parecer que ellos abundan aún más que los mismos racionales. De hecho, no existe una expresión algebraica que permita rotular a los racionales, pero si existen infinitas funciones inyectivas de los racionales en los naturales; basta con asociar a cada racional ya simplificado $\frac{a}{b}$, al natural $2^a 3^b$ si es positivo o al natural $5^{-a} 7^b$ si es negativo y tomando el numerador a como tal. Con solo cambiar uno de los primos 2, 3, 5 o 7, ya estamos frente a una nueva función inyectiva.

La inyectividad de la función descrita arriba, $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ aparece heredada del teorema fundamental de la aritmética que explica que cada número natural se expresa de manera única como el producto de un conjunto finito de números primos.

El matemático Ernst Schöder (1841-1902) conjuntamente con Felix Bernstein (1878-1956) demuestran y sintetizan un teorema que explica el razonamiento de Cantor. Ellos aseguran que si A y B son dos conjuntos tales que se pueden configurar sendas biyecciones de A a B y también de B a A , entonces, entre A y B , existe una biyección. Y esto significa, que tienen el mismo número de elementos.

En el caso que nos ocupa $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $g(n) = n$ es inyectiva, y $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ de modo que $f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^a 3^b$ cuando $\frac{a}{b} > 0$ o $f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^{-a} 3^b$ en caso contrario también es inyectiva. Sin embargo, es imposible escribir una fórmula que se corresponda con una función biyectiva entre estos dos conjuntos.

Cuadro 1.1: Racionales positivos dispuestos en una matriz infinita, según la demostración de Cantor.

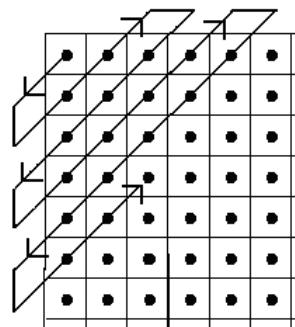


Figura 1.1: Camino indicado para contabilizar todos los racionales positivos del Cuadro 1.1.

Cabe resaltar que en el Cuadro y Gráfica anteriores, el racional 1 aparece en la diagonal principal infinitas veces, e igual ocurre con todos y cada uno de los racionales positivos.

El razonamiento elaborado por Cantor con su método de la diagonal es como sigue:

- a) Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ es indudable que $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{Q})$.
- b) El camino diagonal construye una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$, que demuestra que los racionales quedan cubiertos con los naturales y en consecuencia $card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{N})$.
- c) La consecuencia de las situaciones a) y b) es que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q})$. Este cardinal se denomina \aleph_0 , como se estableció antes.
- d) Todo conjunto S , tal que $\mathbb{N} \subseteq S \subseteq \mathbb{Q}$ tiene el mismo cardinal \aleph_0 de \mathbb{N} , en particular $card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, donde \mathbb{Z} representa el conjunto de los números enteros que comprendía a los naturales, sus opuestos y el cero.
- e) Existen conjuntos B contenidos propiamente en \mathbb{N} , \mathbb{Z} o en \mathbb{Q} con igual cardinal \aleph_0 , por ejemplo; el conjunto de los números primos, el de los cuadrados perfectos, la fracciones de numerador 1, llamadas fracciones egipcias, los en-

teros pares o como se mostró antes, el de los múltiplos de cualquier entero, en particular, los múltiplos de 19.

Para los números reales, que son aquellos que se pueden escribir con cifras decimales con o sin periodicidad y mediante el argumento de la diagonal, Cantor demostró que su cardinalidad es mayor que \aleph_0 , $\text{card}(R) = \aleph_1$ y, se atrevió a pensar que posiblemente, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ si se sigue el modelo constructivo de Gödel. De hecho, demostrar tal circunstancia llevó a Cantor a gastar los últimos años de su vida sin resultados positivos. Este problema se conoce como la hipótesis del continuo que asegura que no existe un conjunto cuyo tamaño o cardinalidad sea estrictamente mayor que la de los naturales y al tiempo, estrictamente menor que la de los números reales. (Al seguir el modelo expansionista de Cohen se ve que $2^{\aleph_1} = \aleph'_1$; Recalde (2018)). Cantor se preguntó si existe un infinito que se ubique entre \aleph_0 y \aleph_1 , es decir, si existe un subconjunto infinito de números reales cuya cardinalidad esté entre estos dos Alephs. Cantor conjeturó que la respuesta a esta inquietud era negativa y a la pregunta se le llamó hipótesis del continuo, a la cual después Kurt Gödel demostraría que es una conjetura indecidible, es decir, que no se puede demostrar si es cierta o falsa, a través del conjunto de cualquier número de axiomas de la teoría de conjuntos, en los que esté comprometido el conjunto de los números naturales.

La diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual es análoga con la diferencia entre el devenir y el ser o estar, entre lo que puede llegar a ser y jamás lo es y lo que siempre es, el infinito potencial se obtiene por procesos que no enfrentan en ningún momento con el infinito en su totalidad, sino con un infinito que aparece como posibilidad (en potencia) y que se va realizando progresivamente. Por ejemplo, al considerar la sucesión de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ es claro que ninguno de estos elementos es el infinito, pues la naturaleza de los números es diferente a la naturaleza del infinito: con solo sumar 1 a cualquier número se le cambia su esencia, en cambio al sumar uno al infinito no se consigue nada, sigue siendo infinito, es decir, no cambia su naturaleza, su esencia.

En consecuencia pensar en \mathbb{N} como un todo se está trabajando con el infinito actual, en el mismo sentido como lo estudió Cantor; es lo que está allí, lo que

se tiene, es lo actual con todo el sentido de facto. En cambio, si se piensa en un número grande, como Gúgol (10^{100}), es fácil decidir que con solo sumar 1 ya se sobrepasa este valor, y así puede de manera progresiva sobrepasar cualquier número, por grande que se disponga. El infinito actual está, aparece, se dispone de él de manera completa, entera, el infinito potencial no aparece sino que se va desarrollando; con la potencia de ir más allá y tiene carácter sumativo y particionante. El carácter sumativo le imprime la oportunidad de general el concepto de continuidad y el particionante o divisible, da chance a generar los conceptos de límite, vecindad y punto de acumulación.

La diferencia entre el infinito potencial y actual se puede evidenciar en la siguiente secuencia, que cuenta los términos de una progresión geométrica:

1	2	3	4	5	6	...	n	...	\mathbb{N}
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9^2}$	$\frac{4}{9^3}$	$\frac{4}{9^4}$	$\frac{4}{9^5}$	$\frac{4}{9^6}$...	$\frac{4}{9^n}$...	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{9^i} = \frac{1}{2}$

Cuadro 1.2: Secuencia que contabiliza los términos de una progresión geométrica.

El primer renglón presenta la secuencia de los números naturales, de modo que en la última columna, en un carácter sumativo o de agregación, se debe entender que ya se tiene en acto todo el conjunto de los números naturales; el segundo renglón define la función biyectiva $f(n) = \frac{4}{9^n}$ y, con idéntico proceso sumativo, es claro que las sumas parciales tienen la potencia de crecer paso a paso acercándose de manera paulatina a $\frac{1}{2}$; sin embargo, por más cerca que una suma parcial se encuentre de este valor, jamás será igual, porque además quedan infinitos términos por ser agregados. Solo cuando ya se tienen todos los términos en acto, en el momento, se puede escribir que $4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i} = \frac{1}{2}$.

Sin duda, la integración del infinito potencial y el infinito actual, ha permitido el progreso de las matemáticas y la constitución de más y nuevos conceptos. El infinito potencial se ilustra en la novela de Laurence Sterne titulada “Vida y opiniones del caballero Tristram Shandy”, en la que el protagonista expone que se gasta un año para escribir los recuerdos de uno solo día de su existencia, de este

modo se gastaría cinco años en escribir los recuerdos de sus primeros cinco días de vida, pero debido a que tiene vida eterna, no existe el peligro de que nunca termine de escribir los recuerdos de todos los días de su vida, al contrario, en algún momento de su existencia terminará la obra.

Por infinito actual se entiende el compendio del todo, cuando se describe al conjunto de los números naturales. Queda desprovisto de todo, de orden, de sentido operativo, sus elementos no devienen el uno del otro por el hecho de sumar uno con otro, o por relacionarlos de acuerdo con determinada regla, están todos allí con un sentido de acto, de ser y no con sentido temporal; al contrario, su existencia por ser ideal, es atemporal. Desde este punto de vista, todos los conjuntos numéricos tienen sentido actual: los reales entre cero y uno, por ejemplo y cada elemento, no le debe su existencia a una fórmula que le procura su devenir, su existencia es un hecho, es un acto.

De modo que cada uno de los Aleph (\aleph) producidos desde el pensamiento de George Cantor es la materialización del infinito actual; un punto del espacio, un punto dentro de la niebla como lo mencionó Jorge Luis Borges y, sin embargo, estando en un punto \aleph_i , con un solo movimiento, te mueves a otro, a otro aleph $2^{\aleph'}$, de naturaleza diferente al infinito anterior y esta recurrencia genera una forma sucesiva de pasar de un punto a otro, de un infinito a otro y allí, de repente, aparece el infinito potencial, así, lo sucesivo genera al infinito potencial.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), en tres décadas deja formulada, una teoría matemática del infinito actual, introduce una nueva visión: hasta Cantor, la forma de concebir el infinito en matemática era la de infinito potencial que emerge desde las paradojas de Zenón con el problema de Aquiles y la tortuga.

Cantor establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y un subconjunto propio formado por los cuadrados de dichos números naturales. Determina que estos conjuntos, ambos infinitos, tienen el mismo cardinal designado como \aleph_0 (Aleph cero. Aleph, primera letra del alfabeto hebreo). Todo conjunto infinito que se pueda poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales se dice que tiene *potencia* \aleph_0 , y se denomina *numerable*. A \aleph_0 se lo llama número transfinito y, además, en conjuntos de po-

tencia \aleph_0 es posible encontrar infinitos de orden superior. Por ejemplo, la sucesión de los cuadrados tienen un orden superior al de la sucesión natural en virtud de que ellos crecen de manera vertiginosa, y aún más rápido lo hacen los cubos o la sucesión de los quínticos.

Cantor determina que es posible comparar los cardinales de conjuntos infinitos, y prueba que el cardinal del conjunto de los números reales es distinto del cardinal del conjunto de los números naturales, la demostración se cimienta en que el intervalo de reales $(0, 1)$ no es numerable y, en consideración a ello, su potencia debe rebasar a \aleph_0 .

La demostración se hace por reducción al absurdo; parte del supuesto que se puede hacer una lista ordenada de los reales, es decir, construir una biyección entre el intervalo $(0, 1)$ y el conjunto de los números naturales. Al suponer que la biyección del conjunto de los naturales con el de los reales del intervalo antedicho se presenta en la lista:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots a_{2n} \dots \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots a_{3n} \dots \\ x_4 &= 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots a_{4n} \dots \\ &\vdots = \vdots \\ x_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} a_{n4} \dots a_{nn} \dots \end{aligned}$$

el número real $y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ en el intervalo $(0, 1)$, tal que $b_i = a_{ii} + 1$ si $a_{ii} < 9$ y $b_i = 0$ cuando $a_{ii} = 9$ es diferente a todos los de la lista ordenada, pues difiere de cada uno de ellos al menos en una cifra y , por ello, no queda contado.

En consecuencia no existe una biyección entre \mathbb{N} y el intervalo $(0, 1)$, y por esto su potencia es superior a \aleph_0 y se denomina C , del que posiblemente es $C = \aleph_1$ y del que no se ha demostrado que es $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, o posiblemente $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$, en la secuencia ordenada de transfinitos $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$

Como ya se explicó, sumar 1 al transfinito \aleph no cambia su naturaleza, es decir $\aleph + 1 = \aleph$, y siendo que esto se puede hacer de manera repetida, se encuentra

que $\aleph + n = \aleph$ por grande que se tome a n . Este tipo de aritmética de transfinitos guarda aún más sorpresas: $\aleph + \aleph = \aleph$ y, en general, es el caso que $n\aleph = \aleph$, por grande que se pueda imaginar a n , y más aún, $\aleph \times \aleph = \aleph^2 = \aleph$, como se puede ver, por ejemplo, con los números racionales que tienen cardinalidad \aleph_0 y siendo que entre dos enteros existen \aleph_0 números racionales, en todo el conjunto de números reales hay $\aleph_0 \times \aleph_0$ racionales, que como se sabe es \aleph_0 . Aplicando esto, de manera reiterada, también se encuentra que $\aleph'^n = \aleph'$. En esta fina aritmética con el infinito también se determina que $\aleph_m + \aleph_n = \aleph_n$ siempre que $m \leq n$.

De las series de números surgen anomalías numéricas significativas cuando interviene el infinito, el infinito potencial; anomalías que derivan desde el incumplimiento de algunas propiedades, en especial, la propiedad conmutativa de la adición. Es decir, el orden en que aparecen los sumandos, cobra importancia. Piénsese por ejemplo en la suma de infinitos unos

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots,$$

con claridad, esta suma diverge, es decir, puede sobrepasar cualquier cota por grande que se disponga, va más allá del gúgol o del gúgol-plex, avanzando, lenta, sosegada, sostenida pero enérgicamente. En cambio la serie alterna

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

puede entenderse como una suma infinita de ceros

$$\sum_{i=1}^{\infty} 0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$$

que es cero u organizada de otra forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) + (1 - 1) \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

o podemos organizar unos primeros n unos, y dejar los n unos negativos al final

de la cola, en el infinito, para que operen

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = n + (1-1) + (1-1) + \dots = n + 0 + 0 + 0 + \dots = n,$$

siendo que la suma, sea entonces, cualquier número entero.

Pensar en esta serie alternada de unos, se puede inferir desde la igualdad

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-r)^i$$

que haciendo $r = 1$, también se encuentra que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{2}.$$

Desde la suma de infinitos reales aparecen asombrosas anomalías:

- La serie armónica por ejemplo $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, diverge, esto es, es tan grande que rebasa cualquier tope, crece con lentitud al punto que solo para sobrepasar al 5 hacen falta cientos de términos,
- La serie alterna $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ tiene asombroso comportamiento, las sumas parciales

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \quad \dots$$

que en aproximaciones decimales son $0,5, 0,83333, 0,583333, \dots$, se acercan de manera oscilante y de forma inexorable al valor $0,693147$ que coincide con el número real trascendente $\ln(2)$.

Causa asombro la ocurrencia de que la suma infinita de números racionales no sea siempre un racional, contrario a cuando los sumandos resultan ser una cantidad finita de ellos. Pero no solo eso, si atendemos a la oportunidad brindada por la

paradoja de Tristram Shandy, y como ocurre en la escritura de autobiografías en las que el autor puede saltar días y regresar a estos en cualquier momento, podemos ordenar los sumandos, por ejemplo como

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \dots$$

u otros órdenes, y hacer que las sumas parciales converjan a cualquier número real.

El infinito se puede utilizar como criterio de abundancia, así, a sabiendas de que la serie armónica diverge y, sin embargo, partes de ella divergen o convergen, por ejemplo, la serie de los inversos de los cuadrados perfectos converge, pero la de los inversos de los primos

$$\sum_{p \text{ primo}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

diverge, se puede hacer tan grande como se quiera y esto significa, de hecho, que hay más números primos que cuadrados perfectos, hecho misterioso e insondable por la irregularidad de la distribución de los números primos, frente a la de los cuadrados perfectos en las que la distancia entre ellos configura la secuencia de los números impares.

Nicole Oresme (1323-1382), fue el primero en demostrar que la serie armónica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

diverge, también demostró que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = 2$$

y además que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i}{4^i} = \frac{3}{4} + \frac{6}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \dots = \frac{4}{3}$.

Jacob Bernoulli (1654-1705) probó que la serie de los inversos de los cuadrados

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ convergía, y fue Leonard Euler el que demostró que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, mediante el uso de las funciones trigonométricas. También encontró que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

dando paso a que la suma de los inversos de los cuadrados de los pares sea

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8}.$$

Euler también encontró la suma de la serie alternante

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Estos resultados son importantes, en cuanto determinan que sumas infinitas de números racionales producen irracionales, en este caso trascendentales, pues vinculan de manera misteriosa y asombrosa al trascendente π , es decir, a la circunferencia.

El infinito es una noción importante, es un concepto que atraviesa diversos campos del conocimiento y resulta vital su comprensión y utilización en los engranajes de otros conceptos. En las series de Cauchy, de Riemann para el cálculo integral, series de Taylor, entre tantas, es claro que no importa la cercanía a cero de sus sumados, ya que se convierte en una condición necesaria pero no suficiente. El juego visual logra ejercer influencia en la comprensión de este concepto como se señala en el siguiente breviario de ejemplos:

1.2.1 Distribución de puntos en el plano con distancias enteras

Lo finito y lo infinito no se comportan de igual modo, técnicas de lo finito pueden lograr cosechas maravillosas en lo infinito, pero también permiten alcanzar grandes absurdos. Paul Erdős, por proponer un ejemplo, demostró por el método de reducción al absurdo que para que infinitos puntos tuviesen distancia entera dos a dos, los mismos deberían ubicarse a lo largo de una misma recta, y con ello

ya se tiene un infinito innumerable de posibilidades, puesto que el plano contiene infinitas rectas. Sin embargo, si el número de puntos es finito, diga n , por grande que fuese, no todos los puntos están sobre una misma recta. En efecto, se pueden tomar $n-2$ triadas pitagóricas simples $(a_i, b_i, c_i)_{i=1}^{n-2}$, tales que $\text{mcd}(a_i, b_i, c_i) = 1$ y llamar $P = \prod_{i=1}^{n-2} a_i$, y de este modo los n puntos

$$(0, 0), \quad (0, P), \quad \text{y} \quad \left(\frac{b_i}{a_i} P, 0 \right)_{i=1}^{n-2} \quad (\text{la mayoría en el eje } x)$$

tienen distancia entera, claro, cada $\frac{b_i}{a_i} P$ es un número entero, y es suficiente con el simple cálculo de la distancia

$$d \left((0, P), \left(\frac{b_i}{a_i} P, 0 \right)_{i=1}^{n-2} \right) = \sqrt{P^2 + \frac{b_i^2}{a_i^2} P^2} = \frac{c_i}{a_i} P,$$

que es un número entero positivo debido a que cada a_i es un divisor de P . De manera implícita se hace uso de la igualdad $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$, en la expresión anterior. Existe una demostración constructiva más sofisticada de ubicar cualquier número finito de puntos sin que al mismo tiempo, tres de ellos sean colineales.

La demostración explicada, al mismo tiempo, se basa en la existencia de infinitas triadas pitagóricas simples. Los babilonios, siglos antes de Pitágoras, las construían tomando enteros x, y tales que $x > y$; la triada $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ es pitagórica y para que sea simple es suficiente con tomar uno de los bastiones, x par y el otro impar; así por ejemplo, la sucesión infinita de triadas $((2n)^2 - 1, 4n, (2n)^2 + 1)$ contiene solo triadas pitagóricas simples. Y siendo una sucesión, tiene la potencia de cambiar n por $n + 1$ cada vez para agregar una nueva triada pitagórica simple a la colección y así ir avanzando paso a paso por ellas.

Sin embargo, cuando se piensa tal conjunto de triadas como la imagen total, y por ello actual del conjunto de los números naturales, se obtiene a la mano toda la sucesión y no hay necesidad de avanzar paso a paso para obtener o sacar la triada que se desee en el instante que se precisa. Dicho de otro modo, para tener todas las triadas pitagóricas, es suficiente con dejar de pensar en que cambia su

naturaleza al convertirse en $n + 1$ con un pequeño paso, y pensar de una buena vez en \mathbb{N} , donde *ipso facto* están todos los n y de inmediato se puede escoger a Gúgol o dar un salto mayor y escoger a Gúgol-plex, si fuere el caso y saber que con ello queda una posibilidad potencialmente infinita de escogencias en los que estos dos números mencionados se tornan excesivamente pequeños (Guénard and Lelievre, 1999).

1.2.2 Un resultado contradictorio

Adoptar el comportamiento del infinito como un número (algo finito) resulta nefasto. Por ejemplo, si se quiere calcular la suma infinita $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots$, que de hecho diverge, y para inyectarle alma finita se le llama $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 3^i$, pequeños malabares algebraicos consiguen ver que

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots = 1 + 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots) = 1 + 3S$$

y así $S = -\frac{1}{2}$. Gran fiasco, ¿cómo así que la suma de enteros positivos que a todas luces diverge resulta igual a un racional puro y además negativo? De hecho, esta suma infinita también se puede escribir como

$$S = 1 + 3 + 3^2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots) = 4 + 9S,$$

con lo que se llega al mismo resultado de que $S = -\frac{1}{2}$.

Esto ocurre con las infinitas progresiones geométricas de razón n ,

$$S = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

sobre las que con el mismo malabar algebraico se evidencia que en la medida en que se avanza potencialmente hacia el infinito por ellas, su suma (siendo divergente) se aproxima a cero, puesto que $S = -\frac{1}{n-1}$ y por valores negativos. Bueno, también ocurre lo contrario, sumas infinitas que al cumplir ciertos requisitos resultan convergentes, como por ejemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

que converge, un poco en virtud a que sus sumas parciales crecen con lentitud extrema, aunque esta razón se quede corta, puesto que existen sumas infinitas que crecen con extrema lentitud y no son convergentes, como la serie armónica.

1.2.3 La ventanería del hotel de Hilbert

Puede ser el caso de rescatar algunos detalles subyacentes al famoso cuento del hotel infinito de Hilbert, que permite explicar que si un pájaro se lleva un grano de arena de la playa cada cien años, si tiene vida infinita, en algún momento, terminará por llevárselos todos.

Si cada una de las infinitas habitaciones del Hotel de Hilbert tuviera a su vez, una infinitud numerable de ventanas, se tendría en total $\infty \times \infty$ ventanas, es decir ∞ ventanas, en suma, una infinitud numerable de ventanas, y en consecuencia, no se tendría más ventanas que habitaciones, a pesar de la aparente densidad de las mismas. (Es bueno pensar aquí en la forma de enumerar a los racionales). Al suponer que las ventanas se han enumerado y que son las 11:59 del 31 de diciembre del presente año y que unos niños traviesos rompen las primeras 100 ventanas y que al mismo tiempo solo es reparada la ventana 1, pero, medio minuto después, los mismos niños traviesos rompen las ventanas numeradas de la 101 a la 200 y al tiempo solo la ventana 2 es reparada, y un cuarto de minuto más tarde, los mismos niños traviesos rompen las ventanas de la 201 a la 300 y, a su vez, la ventana 3 es reparada, y un octavo de minuto más tarde (Aquí ya se provee de un sistema inductivo que predice la suma infinita de los inversos de las potencias enteras de dos). Y al fin (por fin aparece el problema), se pregunta, ¿cuántas ventanas han roto estos niños maliciosos y cuántas se han reparado hasta las doce de la noche, hora de darse el feliz año nuevo? Sí, la respuesta es simple y maravilla, los niños maliciosos, han roto todas las ventanas, pero al tiempo, la diligente administración del hotel (Hilbert al mando), las han reparado todas. La explicación se sustenta en el infinito potencial, al dar un paso cada vez, se agrega un sumando y quedan infinitos pasos por darse, siendo cada paso temporal la mitad del anterior, lo que produce la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Solo si se han dado todos los pasos, ya no hay otro por darse, esto es, situados en el infinito actual, se habrá completado el 1. Es hora de volver a casa.

1.2.4 La serie armónica y el primer transfinito

De manera tácita se ha explicado que el infinito ∞ , tiene una naturaleza diferente a la de cualquier número, es el único objeto matemático que al agregarle o quitarle uno, mantiene su esencia, o incluso al dividirlo por dos o por tres, o por diez o por, ... queda inalterado, como puede evidenciarse al particionar el conjunto de los números naturales en pares e impares, o en particionar al mismo conjunto en correspondencia con el residuo de dividir cada natural por un n fijo; cada parte tiene cardinal infinito, es decir, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre cada uno de sus elementos y el conjunto total de números naturales (Esta es la definición sucinta de conjunto infinito, aquel que puede corresponderse de manera biunívoca con una de sus partes). Con esto se tiene que $\frac{\infty}{2} = \infty$, igual $\frac{\infty}{n} = \infty$, y por ello $n\infty$, y también $\infty^2 = \infty$.

Pero, es útil detenerse a repetir que el único objeto S , tal que $S+1 = S = S-1$ es el infinito. Esto, ligado a que $n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ para cualquier n , fueron de utilidad para que Jakob Bernoulli ofrezca una demostración de la divergencia de la serie armónica $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, sustentada en la propiedad asociativa de la adición. En efecto,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 1$$

(por una simple destrucción de paréntesis) y siendo que en los puntos suspensivos ... se entromete el infinito potencial, mientras que en el $= 1$ ya se cuenta con todos los sumandos, con todos los términos; así, ya se han dado todos los pasos, y por ello, se está en el infinito actual. Vale escribir, en consecuencia, que también es cierto que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{2}$$

y también que

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots = \frac{1}{3}$$

y así de manera sucesiva; igualdades que se disponen en una tabla con infinitos renglones en la que se hace evidente la “agrupación de términos semejantes”; para ello, llámese de manera previa a S como la suma de los inversos de la secuencia de los números naturales. Amster (2019, 2008, 2013, 2010)

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = 1 \\
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{2} \\
 & \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{3} \\
 & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{4} \\
 & \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{5} \\
 & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \dots = \frac{1}{6} \\
 & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 & = \vdots
 \end{aligned}$$

Con todo esto, basta aplicar el principio aristotélico de que si a cosas iguales se les agrega cosas iguales se siguen cosas iguales, con las que de un lado se tiene

$$\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots$$

y del otro lado

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

y como estas cosas son iguales, es claro que $S - 1 = S$, o lo que es lo mismo $S = S + 1$ (S no cambia su naturaleza al sumarle 1). De modo que S no tiene otra alternativa que la de ser el infinito, o dicho de otro modo, la serie armónica diverge al infinito, puede hacerse tan grande como se desee, y así su crecimiento sea en exceso lento y puede hacerse, en algún momento, más grande de un Gúgol, o mil Gúgol o un Gúgol-plex, quedando estos números tan pequeños en la distancia.

Cantor llamó a este S , del ejemplo, como w . Con w se respeta la definición de Cantor, adoptando a w como el menor entre todos los números mayores que se encuentran cuando se tiene la lista completa de la sucesión de naturales. De este modo, w es el primer transinfinito en su respectiva lista indeterminable.

Nicolás Oresme, por allá en 1350, surtiéndose de la asociatividad y de propiedades evidentes de las desigualdades, regaló al mundo una demostración rayana en la belleza de este mismo hecho. Su demostración se inspira en que la suma de un conjunto finito de fracciones heterogéneas con igual numerador y positivas $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \dots, \frac{1}{n_m}$ siempre es mayor que m veces la fracción más pequeña (que tiene mayor denominador), es decir

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \dots, \frac{1}{n_m} \geq \frac{m}{\max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}}.$$

Oresme, toma la serie armónica $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ y hace asociaciones de 2^n términos, así, $S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \dots$ que resulta mayor que $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \dots$ (hay que regresar a lo expuesto). Esta última expresión es igual a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots < S$, que es la serie armónica.

Aquí otro hecho evidente, infinitos unos, como infinitos medios, o infinitos centésimos, o infinitos gugolésimos, es también el infinito, y por ello, no tiene otra alternativa que crecer de manera desmesurada, a pesar de que lo haga con lentitud; por tanto, S es el infinito.

1.2.5 Las fracciones continuas constituyentes de irracionales

Las fracciones continuas periódicas resultan ser un buen ejemplo para comprender el comportamiento del infinito actual y del infinito potencial. Con una maroma algebraica elemental se hace evidente que $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \bar{2}]$. Al detenerse en un piso se alcanza una aproximación racional para $\sqrt{2}$. Si el número de pisos que se desciende o toma es par, tales aproximaciones son mejores y mayores que $\sqrt{2}$, y si el número de pisos que se toma es impar, las aproximaciones racionales a $\sqrt{2}$, siendo menores son cada vez más finas. Si se llama a_i a las menores y b_i a la sucesión de las mayores, con lo que se ve por ejemplo que $a_1 < \sqrt{2} < b_1$, es decir

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad a_2 < \sqrt{2} < b_2$$

que es lo mismo que

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} < \sqrt{2} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

en realidad se ha construido una colección infinita y numerable de intervalos $[a_n, b_n]$ cada uno de ellos con infinitos racionales en su interior, debido a la densidad de \mathbb{Q} , cada vez más estrechos (con buena métrica $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$), pero tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$. Es decir, con el infinito actual, cuando se tiene a todos, la intersección de tales intervalos de extremos racionales es un conjunto unitario conformado por el irracional $\sqrt{2}$. Y así, se tiene una construcción visual de aproximación a los infinitos irracionales algebraicos por medio de fracciones continuas simples, que permiten un descenso por pisos de profundidad infinita.

Las fracciones continuas simples infinitas y periódicas se convierten en el mejor pretexto para la constitución de los números irracionales, en el fondo, en la constitución de los reales, a través del límite de sucesiones de racionales. En efecto, sea a un número natural diferente a cero y con este número se configura la fracción continua simple y periódica, y además infinita $x = [0; \bar{a}, \dots]$, esto es

$$x + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

aumentando cada vez, un piso, a partir de la primera fracción finita, y por esto racional $\frac{1}{a}$. La sucesión se avizora enseguida con sus primeros términos como

$$\left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{a + \frac{1}{a}}, \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}, 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}}, 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}}}, \dots \right\}$$

que con algunos malabares algebraicos se convierte en

$$\left\{ \frac{1}{a}, \frac{a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 + 1}{a(a^2 + 2)}, \frac{a(a^2 + 2)}{a^4 + 3a^2 + 1}, \frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a(a^4 + 4a^2 + 3)}, \frac{a(a^4 + 4a^2 + 3)}{a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1}, \dots \right\};$$

sucesión que advierte una regla de formación. Tal ley de formación establece la secuencia de números racionales, tales que $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ donde $\alpha_1 = 1$ y $\beta_1 = a$, y de allí en adelante, un poco parecido a la configuración de la serie de Fibonacci, se encuentra que $\alpha_n = \beta_{n-1}$ mientras que $\beta_n = \alpha_{n-1} + a\beta_{n-1}$.

Esta regla de configuración de cada término de la sucesión si se tiene el término anterior, permite los cálculos de los ejemplos numéricos. Póngase por ejemplo que a sea 2; en este caso la sucesión queda como sigue:

$$\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}, \dots \right\}$$

Para examinar el comportamiento de esta sucesión, se hace preferible escribirla en aproximaciones de su expansión decimal infinita

$$[0.5, 0.4, 0.416666666, 0.4137931034, 0.4142857142, 0.4142011834, 0.4142156862, \dots]$$

en la que se percibe, un poco por la asociación de la memoria, o por simple recuerdo, que de manera oscilante se acerca a la parte decimal del irracional $\sqrt{2}$.

Al tomar $a = 17$, la sucesión es

$$\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{17}, \frac{17}{290}, \frac{290}{4947}, \frac{4947}{84389}, \frac{84389}{1439560}, \frac{1439560}{24556009}, \frac{24556009}{418907013}, \dots \right\}$$

y cuya expansión decimal es

$$[0.05882352941, 0.05862068965, 0.05862138669, 0.05862138430, 0.05862138431, \dots]$$

y de la que también de manera oscilante debe acercarse a la parte decimal de un irracional.

Para develar el irracional $x = [0; \bar{a}, \dots]$, se hace suficiente ver que en cada piso se vuelve a reproducir x , esto significa que es factible escribir $x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{a + x}$ esto

es $a = \frac{1}{a + x}$ que termina en la ecuación de segundo grado $x^2 + ax - 1 = 0$, cuya solución positiva es $x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}$. Hace falta probar que en ningún caso $\sqrt{a^2 + 4}$ es un número natural, y en consecuencia, $x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}$ es un irracional algebraico siempre. En otras palabras, se está frente a una fábrica de números irracionales: infinitas sucesiones que de manera oscilante convergen al irracional $x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}$, y que se consiguen al ir cambiando el valor de a .

Y en efecto, al suponer que $\sqrt{a^2 + 4} = b$, siendo b un natural mayor que a se obtiene que $(b+a)(b-a) = 4$, y con esta consideración, las únicas posibilidades son que $b+a = 4$ y $b-a = 1$, o que $b+a = 2$ y $b-a = 2$. Si se supone el primer caso, se llega a $b = \frac{5}{2}$ y $a = \frac{3}{2}$ que no son números naturales, y al suponer lo segundo, necesariamente $b = 2$ y $a = 0$, pero con $a = 0$ las fracciones continuas se tornan indefinibles. La conclusión es simple; para cualquier número natural a , la expresión $x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}$ representa a un irracional algebraico.

Gran dato, pues en las siguientes ecuaciones, el miembro a izquierda representa una sucesión que tiene la potencia de crecer en la forma explicada, y a la derecha se obtiene el último término de la sucesión, como si ya se hubieran efectuado los infinitos pasos, es decir, se tiene un límite en acto.

$$\begin{aligned}[0; \bar{15}, \dots] &= \frac{\sqrt{229} - 15}{2} \\ [0; \bar{13}, \dots] &= \frac{\sqrt{173} - 13}{2} \\ [0; \bar{27}, \dots] &= \frac{\sqrt{773} - 27}{2} \\ [0; \bar{153}, \dots] &= \frac{\sqrt{23413} - 153}{2} \\ [0; \bar{1}, \dots] &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\end{aligned}$$

Y claro, con cada uno de ellos, al agregar una parte entera diferente, es posible de nuevo encontrar una familia infinita de irracionales cuya familiaridad está constituida por tener la misma parte decimal en su expansión infinita. Así, por ejemplo, la sucesión $\{[n; \bar{1}, \dots]\}$ de números racionales tiene como primer elemento a la razón dorada $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Esto significa que se ha construido una tabla de doble entrada que se extiende por dos lados al infinito

$[0; \bar{1}, \dots]$	$[1; \bar{1}, \dots]$	$[2; \bar{1}, \dots]$	\dots	$[m; \bar{1}, \dots]$	\dots
$[0; \bar{2}, \dots]$	$[1; \bar{2}, \dots]$	$[2; \bar{2}, \dots]$	\dots	$[m; \bar{2}, \dots]$	\dots
$[0; \bar{3}, \dots]$	$[1; \bar{3}, \dots]$	$[2; \bar{3}, \dots]$	\dots	$[m; \bar{3}, \dots]$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	
$[0; \bar{n}, \dots]$	$[1; \bar{n}, \dots]$	$[2; \bar{n}, \dots]$	\dots	$[m; \bar{n}, \dots]$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	

que es numerable, hecho que se demuestre con el mecanismo del camino de la diagonal de Cantor.

Con idéntico criterio es posible construir otros irracionales algebraicos que obedecen a diversas estructuras. Por ejemplo, con solo variar la longitud del periodo de las fracciones continuas simples infinitas

$$[0; \overline{a, b} \dots], \quad [1; \overline{a, b, c} \dots]$$

con a, b, c, \dots naturales.

Y así, se tiene una nueva matriz de irracionales algebraicos que resulta numerable. En el trasfondo de esta forma de construcción subsiste la idea formal de que el conjunto de los irracionales algebraicos es numerable. Al llamar \mathbb{A} al conjunto de los números irracionales algebraicos y \mathbb{T} al de los irracionales trascendentes, se obtiene que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, de los que se sabe que \mathbb{R} es innumerable, \mathbb{Q} es numerable y \mathbb{A} es numerable; resultando como conclusión que el carácter innumerable de los reales obedece al hecho de que los irracionales no algebraicos, llamados trascendentes, es innumerables y discreto (Clawson, 1999).

Un conjunto extraño, misterioso, poco conocido y de gran utilidad.

1.2.6 Un pequeño ejemplo sobre series

Las series de Taylor y Maclaurin, que aproximan por polinomios a funciones trascendentes que satisfagan algunos requisitos, se convierten en un ejemplo sencillo y evidente para distinguir los infinitos potencial y actual. Por ejemplo, aproximaciones sucesivas para la función

$y = \frac{\sin(x)}{x}$ son las funciones $y_1 = 1$, $y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!}$, $y_3 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$, $y_4 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$, debido a que el desarrollo de Taylor es $\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{2i} \frac{x^{2i}}{(2i+1)!}$.

Las aproximaciones se ven en la siguiente gráfica.

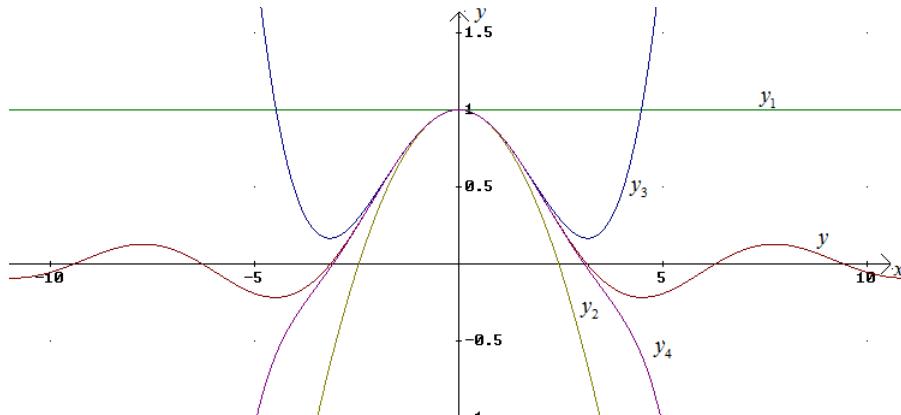


Figura 1.2: Aproximaciones de la función $y = \frac{\sin(x)}{x}$.

De hecho, $\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i+1)!}$ y es claro que se tiene la potencia de aumentar i

en 1 para aumentar el grado del polinomio y con ello mejorar la aproximación a $\frac{\sin(x)}{x}$, que solo se obtiene cuando de manera total, en un acto, ya se tengan todos los términos del polinomio. Es de anotar que al obtener cualquier aproximación por fina que sea, para tener la totalidad, aún hacen falta infinitos términos, hacen falta todos aquellos que de manera potencial pueden alcanzarse, paso a paso y que, un poco por descomendimiento, son infinitos.

Es buena evidencia de comparación asumir aproximaciones por series de Taylor o de Maclaurin para otras funciones como xe^x , $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $x + \sin(x^2)$, entre otras.

1.2.7. Paradigma perímetro-área

Los dos tipos de infinito sometidos a estudio comparativo, el potencial que era conocido por los griegos y el actual que tiene simientes con Galileo y que emerge con Cantor, se comprometen a veces en los objetos menos sospechados, en los momentos menos esperados, como repitiendo el adagio de que en cualquier momento salta la liebre. Por ejemplo, la proposición 37 del libro I de los *Elementos de Euclides* asegura que “los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí”. Esta proposición que modifica el paradigma de que a mayor perímetro, mayor área, tal como se creía en algunos círculos navieros que comparaban las áreas de las islas por el tiempo empleado en bordearlas, deriva en la fórmula $A = \frac{bh}{2}$, donde h es la distancia entre las paralelas. De este modo al tomar la base fija $b = AB$ en la recta l_2 y el tercer vértice C sobre l_1 , se tiene una posibilidad potencialmente innumerable de ubicarse, reproduciendo una secuencia infinita e innumerable de triángulos, todos con área constante. Este es un conjunto infinito de objetos diferentes de una misma clase con la impronta de tener algo en común, la medida de su área. Euclides lo dice claro: “Los triángulos que (...)”, aludiendo a todos los triángulos, que ya se ha dicho, son infinitos.

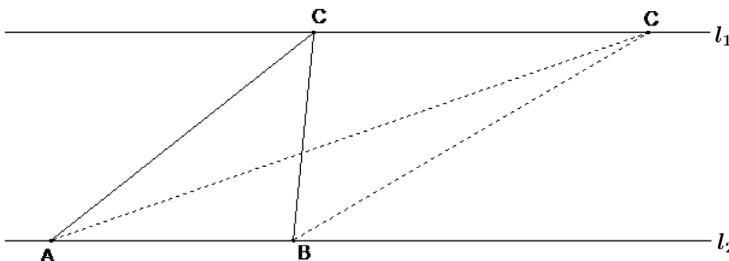


Figura 1.3: Secuencia infinita e innumerable de triángulos con área constante.

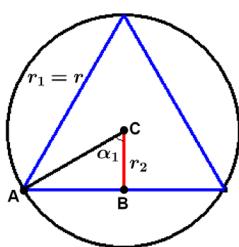
1.2.8. Un límite ejemplar

En el concepto de límite de una sucesión, figura de manera implícita el infinito potencial. Se dice que el límite de a_n cuando n tiende a infinito es un real L si dado un valor positivo ε por pequeño que se tome, es posible encontrar un natural N , tal que de allí en adelante, las distancias entre los restante infinitos términos de la sucesión y el real L son más pequeñas que el ε escogido y para siempre. Por ejemplo, si en una circunferencia de radio $r_1 = r$ se inscribe un triángulo equilátero, en él se inscribe una circunferencia de radio r_2 , en ella se inscribe un cuadrado y en él se inscribe una circunferencia de radio r_3 , en esta circunferencia se inscribe un pentágono regular y, así consecutivamente, se genera

una sucesión de radios. Se pide calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, pensando en que la intuición asevera que tal sucesión de radios debe converger a cero.

En principio este problema parece imposible de resolver, ya que esta construcción tropieza con el impedimento de que algunos polígonos regulares no son construibles; dicha construcción se podría realizar hasta el hexágono regular y pare de contar, pero es ideal suponer que la construcción se puede realizar y es factible ir rehaciendo la solución en concordancia con los siguientes pasos:

- Paso 1:



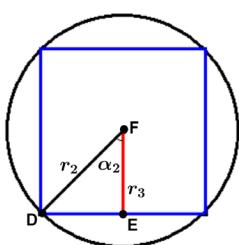
$$\cos(\alpha_1) = \frac{r_2}{r_1}, \text{ de donde } r_2 = r_1 \cos(\alpha_1)$$

y siendo $\alpha_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, se tiene

$$r_2 = r \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Figura 1.4: *Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.*

- Paso 2:



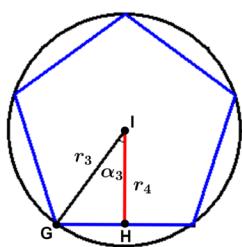
$$\cos(\alpha_2) = \frac{r_3}{r_2}, \text{ así } r_3 = r_2 \cos(\alpha_2)$$

con $\alpha_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ de donde

$$r_3 = r \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Figura 1.5: *Cuadrado inscrito en una circunferencia.*

- Paso 3:



$$\cos(\alpha_3) = \frac{r_4}{r_3}, \text{ por ello } r_4 = r_3 \cos(\alpha_3)$$

$$\text{con } \alpha_3 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ de la cual}$$

$$r_4 = r \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Figura 1.6: Pentágono regular inscrito en una circunferencia.

Y ya, el proceso inductivo asevera que los términos de la sucesión respetan la siguiente expresión

$$r_n = r \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = r \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$$

Realizando cálculos se obtiene para $n = 900002$, $r_{900002} \approx 0,1150044034r$, hecho que hace ver como la intuición a veces falla y que en el infinito, el radio del último polígono regular, que es nada más ni nada menos que una nueva circunferencia, es aproximadamente doce centésimas partes del radio de la circunferencia original.

En analogía con los ejemplos anteriores, en los cuales aparecen sumatorias, este ejemplo se distingue por la elegancia de un producto infinito en el cual los últimos factores, se aproximan a ser uno, en la medida en que el argumento de los cosenos se acercan, potencialmente a cero.

1.2.9. Más sobre fracciones continuas y algo de radicales anidados

Entonces, la diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual, por analogía, es similar a los que puede llegar a ser y lo que realmente es. Un ejemplo visual que permite distinguir esta situación y que de hecho, a la vez, integra a los dos tipos de infinitos es la fracción infinita

$$\frac{3}{1 + \frac{4}{2 + \frac{5}{3 + \frac{6}{4 + \frac{7}{5 + \dots}}}}} = \frac{4}{3},$$

fracción en la que los numeradores inician en 3 y aumentan de uno en uno y los denominadores inician en 4 y también aumentan de uno en uno, exhibiendo la secuencia de los números naturales en su integridad. Esta fracción infinita no es más que una hermosa forma de acercarse a un número racional por valores racionales. Es un hecho simple el argüir que existen infinitas formas de acercarse a un número racional o irracional, bien por valores racionales o valores irracionales.

Una forma de tener infinitos caminos discretos para aproximarse a un número real x es empezar por cualquier punto a_0 e ir tomando las mitades o terceras o décimas partes de la distancia faltante entre a_0 y x . Si se escoge la de los puntos medios, en el primer paso se tiene $a_1 = \frac{a_0 + x}{2}$ y en el paso siguiente $a_2 = \frac{a_1 + x}{2}$. Así, la sucesión de los a_n tiene la potencia infinita de aproximarse a x sin serlo y tan solo cuando se agoten todos los pasos se estará en x .

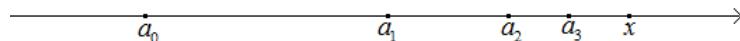


Figura 1.7: *Infinitos caminos discretos para aproximarse a un número real x a partir de a_0 .*

Para algunos puntos exclusivos, existen vías especiales de aproximación. Euler, por ejemplo, descubrió que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, es decir, existe un camino discreto, taponado de racionales que se acerca al irracional trascendente e , expresión que procura la sucesión de racionales

$$\left\{ 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots \right\}.$$

El excelsa hombre de los números, Srinivasa Ramanujan Alyengar, descubrió un abanico amplio de fracciones infinitas singulares, por ejemplo, encontró que

$$\cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{7}{5 + \dots}}}}},$$

que se escribió antes, en la que los numeradores y denominadores son la secuencia restringida de los números naturales, solo que en el caso de los numeradores faltan el uno y el dos. Esta fracción infinita, posee una espléndida belleza por la simplicidad de su definición y simetría, deja entrever la percepción visual de bajar por sus pisos con una potencia paso

a paso, de uno en uno, encontrando en este descenso, fracciones cada vez más próximas a $\frac{4}{3}$, ellas determinan la secuencia

$$\left\{ \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{21}{11}, \frac{33}{23}, \frac{69}{59}, \frac{21}{16}, \frac{399}{289}, \frac{119}{89}, \dots \right\}.$$

Jamás alcanzan a ser igual a $\frac{4}{3}$, excepto cuando por medio del infinito actual, se haya dado el último paso.

Ramanujan también descubrió que

$$\frac{5}{3} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{3 + \cfrac{8}{5 + \cfrac{10}{7 + \dots}}}},$$

fracción infinita que parte de los infinitos pares, exceptuando el 2, como numeradores y la secuencia infinita de los impares como denominadores (el infinito de los números naturales particionado entre pares e impares). Vaya forma de escribir al $\frac{5}{3}$ entre las infinitas formas que tiene de escribirse (como $\frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 + 4 + 4}$), pero entre todas, gana por su simplicidad la misma $\frac{5}{3}$. Huelga repetir que entre más se avance en la profundidad de los pisos, se encuentra una fracción tan próxima a $\frac{5}{3}$, como se establezca por margen.

Entre todas las expresiones descubiertas por Ramanujan gana por belleza, por la natural simpleza de repetir la secuencia natural en numeradores y denominadores, la fracción infinita

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \dots}}}} = \frac{1}{e - 1},$$

en la que como se ve (se visualiza), compromete al número e , base de los logaritmos neperianos. Ya entendido el camino en el que el infinito potencial permite avanzar sin detenerse y sin alcanzar a ser, vale la pena proponer un nuevo ejemplo; el de los radicales

infinitos, donde en particular, la expresión

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}}$$

permite alcanzar (lo hace en el infinito actual, es decir, cuando se tenga a mano todo el archivo de radicales) al número irracional $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ llamado número de oro, o razón dorada o divina proporción φ . Exceptuando el primer radical, primer paso, el acercamiento a este irracional se realiza por una secuencia infinita de números irracionales, todos algebraicos. En esta forma de escribir al número de oro se deja entrever la forma en que $\varphi = \sqrt{1 + \varphi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}} = \dots$

Con la insistencia propuesta de que el infinito se entromete en casi todos los objetos matemáticos, y habiendo estudiado el problema de la inscripción alternada de circunferencias y polígonos regulares donde apareció un producto infinito, resulta circunstancia insalvable presentar dos resultados desvelados por Ramanujan que son:

$$\prod_{p \text{ primo}}^{\infty} \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \right) = \left(\frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} \right) \left(\frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} \right) \left(\frac{5^2 + 1}{5^2 - 1} \right) \dots = \left(\frac{5}{3} \right) \left(\frac{10}{8} \right) \left(\frac{26}{24} \right) \dots = \frac{5}{2}$$

y

$$\prod_{p \text{ primo}}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p^4} \right) = \left(1 + \frac{1}{2^4} \right) \left(1 + \frac{1}{5^4} \right) \left(1 + \frac{1}{7^4} \right) \dots = \frac{105}{\pi^4}$$

expresiones que relacionan, la primera a todos los números primos con un racional y la segunda a todos los números primos con las circunferencias, es decir con π , con el trascendente π .

Estos dos resultados se basan en que el conjunto de los números primos contiene una infinitud numerable y equipotente con la de los números naturales, a pesar de que al ir avanzando sobre los primos y se tenga al primo más grande resulte difícil calcular al primo siguiente; entonces, resulta complicado avanzar sobre los primos, con la misma seguridad que se hace al caminar dentro del conjunto de los números naturales.

Nicole Oresme (1323-1382) quien demostró el carácter divergente de la serie armónica, también probó que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = 2$$

y que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i}{4^i} = \frac{3}{4} + \frac{6}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \frac{12}{4^4} + \dots = \frac{4}{3},$$

buenas disculpas visuales para revisar el infinito potencial y reconocer que solo en el último momento, cuando se tienen todos los términos se obtiene 2 o $\frac{4}{3}$, según una u otra sumatoria.

1.2.10. Otros argumentos que sostienen al infinito

Y, ¿en dónde más interviene el infinito? Es un hecho, de que en todos los procesos reiterativos es natural que intervenga, como en la construcción del triángulo de Pascal que a su vez contiene secuencias infinitas, como la de los números triangulares y los tetragonales, el infinito está en las sucesiones autodefinibles como la serie de Fibonacci, en el método de aproximación de Newton Raphson a raíces irracionales de funciones, en el concepto constructivo de límite que es el más fino del cálculo; por ende, en el concepto de infinitésimo, en la división inductiva de un segmento en partes iguales, en las fracciones continuas y periódicas, en las fracciones y radicales infinitos, por proponer una pequeña lista de ocurrencia.

Muchas de las expresiones contienen una belleza intrínseca y son ejemplos que arriesgan al infinito como un fenómeno visual, tal es el caso de la siguiente fracción infinita

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

que permite la dinámica de un descenso por pisos hasta profundidades insospechadas.

El infinito se compromete en muchos otros procesos y conceptos, como en los fractales y en cada una de las sucesiones. De hecho, el infinito no solo está en lo infinitamente grande, sino también en lo infinitamente pequeño. Y los ejemplos expuestos lo atestiguan, el infinito potencial persiste como pionero en el principio de inducción: “Si un principio inductivo lo cumple el 1; entonces lo cumple cualquier número natural”. Desde este principio y el concepto de sucesor $n + 1$, emerge toda la matemática.

Los resultados matemáticos sostienen en sus entrañas al infinito. Cuando se dice “Los triángulos del plano ... (y lo que se demuestre)”, se infiere de inmediato en todos los

triángulos del plano, es decir, en la totalidad que aparecen en el acto y que son un infinito innumerables, pues hay tantos triángulos como puntos contiene el plano. Y para cada uno resulta válida cada proposición demostrada como aquella que dice que las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro, y a su vez, cada uno de los infinitos puntos del plano tiene la capacidad de ser circuncentro, no de un triángulo, sino de infinitos triángulos.

Del mismo modo, siendo que el álgebra es la ciencia de las identidades, cada una de sus fórmulas como la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, resulta contener su validez para un tramo innumerables infinito de valores x y y ; por ello, no hay vida suficiente para verificar su veracidad, porque el infinito potencial es algo que no se alcanza. Sin embargo, en la fórmula $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ están todos los casos, están en el acto porque el infinito actual es algo que sí se alcanza. Guardando la analogía, es tanto como decir “estuve en un pedazo de barrio en San Juan de Pasto” o decir “estuve en San Juan de Pasto”.

1.2.11. Anotación a la distribución de puntos

Ya se indicó al menos una forma de ubicar n puntos en el plano, de modo que dos a dos tengan siempre como distancia un número entero. Basta con tomar $n - 2$ triadas pitagóricas simples $(a_i, b_i, c_i)_{i=1}^{n-2}$, llamar $P = \prod_{i=1}^{n-2} a_i$, y con ello se tienen los n puntos

$(0, 0)$, $(0, P)$ y $\left(\frac{b_i}{a_i}P, 0\right)_{i=1}^{n-2}$ con distancias enteras dos a dos. Cada uno de estos n grupos, que además pueden escogerse de infinitas maneras, puesto que dependen de las $n - 2$ triadas pitagóricas seleccionadas, se eleva a una infinitud innumerables de otros n puntos en el plano que satisfacen el requisito de la distancia entera exigida. Con solo aplicar un movimiento rígido, bien de traslación, rotación o reflexión por alguna recta o punto o por composición entre ellas, se tiene un nuevo conjunto de puntos del plano que resuelven el problema.

De este modo, los (α, β) , $(\alpha, \beta + P)$ y $\left(\alpha + \frac{b_i}{a_i}P, \beta\right)_{i=1}^{n-2}$ determinan infinitos conjuntos de puntos que satisfacen las condiciones del problema, y por rotación también lo satisfacen los puntos establecidos por las fórmulas $(0, 0)$, $(-P \operatorname{sen}(\theta), P \cos(\theta))$ y $\left(\frac{b_i}{a_i}P \cos(\theta), \frac{b_i}{a_i}P \operatorname{sen}(\theta)\right)_{i=1}^{n-2}$ que hacen una nueva clase infinita de posibilidades que resulta ser un infinito innumerables, y también cada reflexión de los puntos originales por cada una de las infinitas rectas $y = mx$, que determina los n puntos $(0, 0)$, $\left(\frac{2mP}{1+m^2}, \frac{(m^2-1)P}{1+m^2}\right)$

y $\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \frac{b_i}{a_i} P, \frac{2m}{1 + m^2} \frac{b_i}{a_i} P \right)_{i=1}^{n-2}$, entre las cuales se destaca la reflexión por la recta $y = x$, que determina los n puntos $(0, 0)$, $(P, 0)$ y $\left(0, \frac{b_i}{a_i} P \right)_{i=1}^{n-2}$.

Con esto se asevera que los movimientos rígidos son de gran sutileza y que sin el infinito no habría matemática.

Así, a través de los movimientos rígidos de traslación, rotación y reflexión axial, o por la composición entre ellos, cualquier conjunto de n puntos cuyas distancias dos a dos son enteras, sus imágenes por congruencias, siguen manteniendo el patrón de distancias enteras entre cualquier par de puntos del conjunto transformado. De este modo, dados n puntos con la singularidad de que las distancias entre dos puntos de tal conjunto sean enteras, se tiene a la mano una infinita e innumerable colección de conjuntos de n puntos que respetan esa característica.

Vale la pena en este punto, disponer un ejemplo. Al tomar las cuatro triadas pitagóricas simples $(3, 4, 5)$, $(15, 8, 17)$, $(5, 12, 13)$ y $(21, 20, 20)$ se encuentra que $P = 4725$, valor que de acuerdo con lo explicado, conforma un sexteto de puntos con distancias enteras entre cualquier par de entre ellos; estos puntos determinan el conjunto

$$\{(0, 0), (0, 4725), (6300, 0), (2520, 0), (11340, 0), (4500, 0)\}.$$

Al escoger como vector de traslación el vector (π, e) , se encuentra que las imágenes por traslación respecto de dicho vector determinan el nuevo conjunto de puntos,

$$\{(\pi, e), (\pi, e + 4725), (\pi + 6300, e), (\pi + 2520, e), (\pi + 11340, e), (\pi + 4500, e)\},$$

que mantiene la cualidad de que las distancias entre cualquier par de puntos de esta media docena, son enteras. Igual, si se escoge como ángulo de rotación a $\theta = \frac{\pi}{3}$, con la rotación escogida se hallan los seis puntos

$$\left\{ (0, 0), \left(-\frac{4725\sqrt{3}}{2}, \frac{4725}{2} \right), (3150, 3150\sqrt{3}), (1260, 1260\sqrt{3}), (5670, 5670\sqrt{3}), (2250, 2250\sqrt{3}) \right\}.$$

Y para cambiar un poco el rumbo, al adoptar como centro de reflexión axial a la recta $y = 2x$, el conjunto original, a través de la reflexión axial por la recta descrita se convierte en el conjunto

$$\{(0, 0), (3780, 2835), (-3780, 5040), (-1512, 2016), (-6804, 9072), (-2700, 3600)\}$$

que mantiene la especificidad de que la distancia entre dos cualquiera de sus elementos es un número entero, hecho que se evidencia al calcular cualquiera de las quince distancias que allí emergen.

En conclusión, dado un conjunto de n puntos del plano que mantienen la condición de que la distancia entre dos cualquiera de sus elementos es un valor entero, a través de los movimientos rígidos se tiene la posibilidad de construir una infinitud innumerable de conjuntos de n elementos que mantienen tal característica (Zalamea, 2019).

1.2.12. Vestigios de la función z de Riemann

El problema de Basilea (Bernoulli- Euler) consiste en calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales y hace apertura a la función z de Riemann que es, acaso, la función más importante en matemáticas. Se parte del hecho de que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ para todo número natural n , y en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

y siendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots = 1$$

se tiene que la suma de los inversos de los cuadrados es creciente y acotada, pero menor que la suma de los inversos de los números triangulares que converge a 2. Tal suma debe ser convergente y, en su momento, los esfuerzos de los expertos fueron infructuosos por demostrar este hecho.

Euler utilizó métodos finitos para hacer un cálculo infinito. Por ejemplo, parte de la aproximación potencialmente infinita (Taylor- Maclaurin)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

y por ello

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^{2(i-1)}}{(2i-1)!}$$

que tiene las mismas raíces que $\sin(x)$, exceptuando 0 (todas múltiplos enteros de π) y que en correspondencia con el teorema fundamental del álgebra, la función $p(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

se puede escribir con el producto infinito

$$(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \dots = p(x).$$

Al multiplicar por $\frac{p(0)}{p(0)}$, que es una de las infinitas formas de escribir 1, siendo

$$p(0) = (-1)^n \pi^2 (2\pi)^2 (3\pi)^2 \dots$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= p(0) \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \\ &= p(0) \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

y siendo $p(0) = 1$ (aquí hay que recordar el clásico límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, que sirve para definir la función $\frac{\sin(x)}{x}$, o simplemente reemplazar en $p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$).

En definitiva se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{2(i-1)} \frac{x^{2(i-1)}}{(2i-1)!} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 i^2}\right).$$

Y ahora, es suficiente con aplicar el principio de identidad que señala que cada objeto es idéntico consigo mismo; así, en ambos miembros de la igualdad, los coeficientes de x^2 o de x^4 o ... deben ser los mismos. En el primer caso, el coeficiente de x^2 en el primer miembro es $\frac{(-1)^3}{6}$, y del otro lado hay que ir fijando en cada factor un término $\frac{x^2}{\pi^2 i^2}$ y tomar los 1 (infinitos) de los restantes factores, este hecho produce que $\frac{(-1)^3}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$, y de allí se deriva que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En el infinito potencial, con cada paso se obtiene un racional próximo a $\frac{\pi^2}{6}$, y al tener todos los sumandos en el infinito actual, se está encima del irracional $\frac{\pi^2}{6}$.

Con algunos malabares algebraicos, al comparar e igualar los coeficientes, en ambos

términos de x^4 se obtiene $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}$, y así se puede obtener más resultados.

Al pensar de un modo general en $\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$, como la suma de los inversos de las potencias de orden $k \geq 2$ de todos los números naturales, no solo resulta que siendo infinitas, todas son convergentes siendo claro en particular que $\varepsilon(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Riemann (1859) cambia k por s , adoptándolo como cualquier complejo con parte real mayor que 1, que es la condición de convergencia de esta función que se llama, función z de Riemann. No obstante, mucho antes Euler había encontrado una relación asombrosa entre esta función y los números primos que se escribe como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Huelga mencionar que si $s = 1$, $\varepsilon(1)$ se tiene la serie armónica, de la que ya se determinó su divergencia. La función z de Riemann ha ampliado su estudio a valores múltiples. La fórmula de Euler se explica porque

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

que converge si $|z| < 1$, y por ello si $z = \frac{1}{p^s}$, es claro que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots,$$

de donde resulta

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \dots\right)$$

Al ir desarrollando de manera potencial dados los productos, factor a factor, se van alcanzando todos los números naturales n elevados a la potencia s , sin que ninguno se repita, hecho que corresponde con el teorema fundamental de la aritmética.

Buen ejemplo, cada $\varepsilon(s)$ se fundamenta en el infinito y para infinitos valores de s , la función converge, se ha demostrado que si s es par, la serie converge (por ejemplo

$\varepsilon(2) = \frac{\pi^2}{6}$ y $\varepsilon(4) = \frac{\pi^4}{120}$) con lo cual, se tienen infinitas expresiones convergentes; en cambio, para los valores de s impar, no se ha establecido en varios casos su punto de convergencia, y por ejemplo $\varepsilon(1)$ es divergente.

1.2.13. División de un segmento en partes iguales

La proposición 1 del libro I de los *Elementos de Euclides* enseñan a “construir un triángulo equilátero sobre una recta fija dada” y la proposición 10 enseña a “dividir en dos partes iguales una recta finita dada”, entendiendo como recta finita el concepto de segmento. Estos dos resultados configuran un principio inductivo que permite dividir una “recta finita” en cualquier número n de partes iguales. El proceso inductivo emerge connatural con la construcción de triángulos equiláteros, y se explica enseguida.

Los cuatro pasos que se muestran a continuación resultan el vestigio claro de la división de un segmento en dos partes iguales y que se afina en la solución que presenta Euclides; tal construcción se constituye en el paso 1 del método de inducción matemática.

- Paso 1:

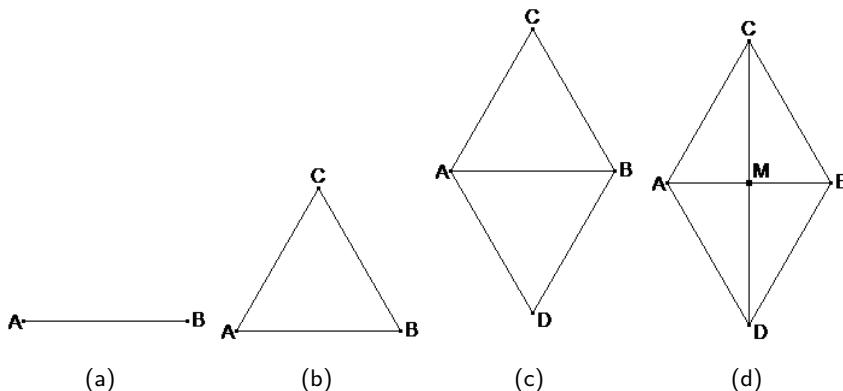


Figura 1.8: Construcción para la división de un segmento en 2 partes iguales.

- Paso 2: Dado que ya es posible dividir un segmento en dos partes iguales se utiliza tal posibilidad para construir de un lado, un triángulo equilátero, siendo uno de los lados el segmento \overline{AB} , y en el otro semiplano que determina la recta \overleftrightarrow{AB} , dos triángulos equiláteros de lados \overline{AM} y \overline{MB} . Estas ilustraciones se muestran en las dos siguientes gráficas.

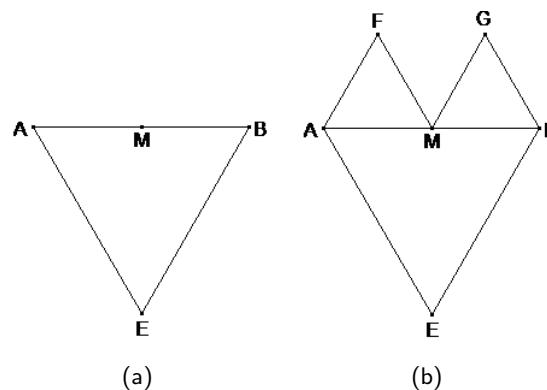


Figura 1.9: Construcción de triángulos equiláteros.

En este punto es suficiente con trazar los segmentos \overline{EF} y \overline{EG} y definir los puntos de intersección de los mismos con el segmento \overline{AB} ; de ese modo se determinan los puntos H e I , lo cual se establece en la siguiente gráfica:

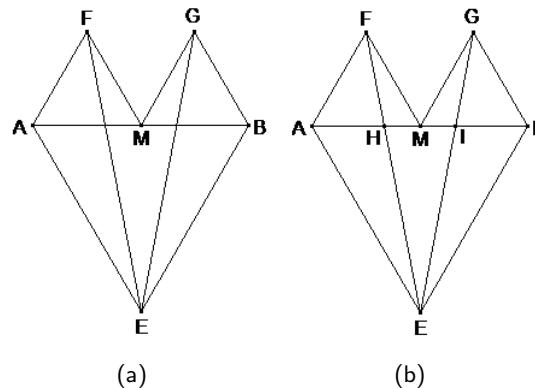


Figura 1.10: Construcción para la división de un segmento en tres partes iguales.

Los puntos H e I trisecan el segmento \overline{AB} debido a que $\overline{AH} = 2\overline{HM}$, ya que por simetría de la construcción $\overline{AH} = \overline{IB}$. La primera aseveración se deduce por semejanza entre los triángulos $\triangle FHM \cong \triangle EHA$, dado que los ángulos en H son iguales por opuestos por el vértice, $m(\angle A) = m(\angle M) = 60^\circ$, y en consecuencia, los ángulos en E y F de los triángulos respectivos también son iguales. Al tener los triángulos semejantes, sus lados son proporcionales, y sabiendo que $\overline{AE} = 2\overline{FM}$, se infiere que $\overline{AH} = 2\overline{HM}$ o también que $\overline{HM} = \frac{1}{3}\overline{AM}$, y mejor aún $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Con esto se asegura que al tener la competencia de partir un segmento en dos partes iguales se posibilita partir, mediante un proceso iterativo, un segmento en tres partes iguales. Se deja evidencia de este hecho en la construcción de la Figura 1.11, en la cual a partir de la trisección, por iteración, parte un segmento en cuatro secciones iguales.

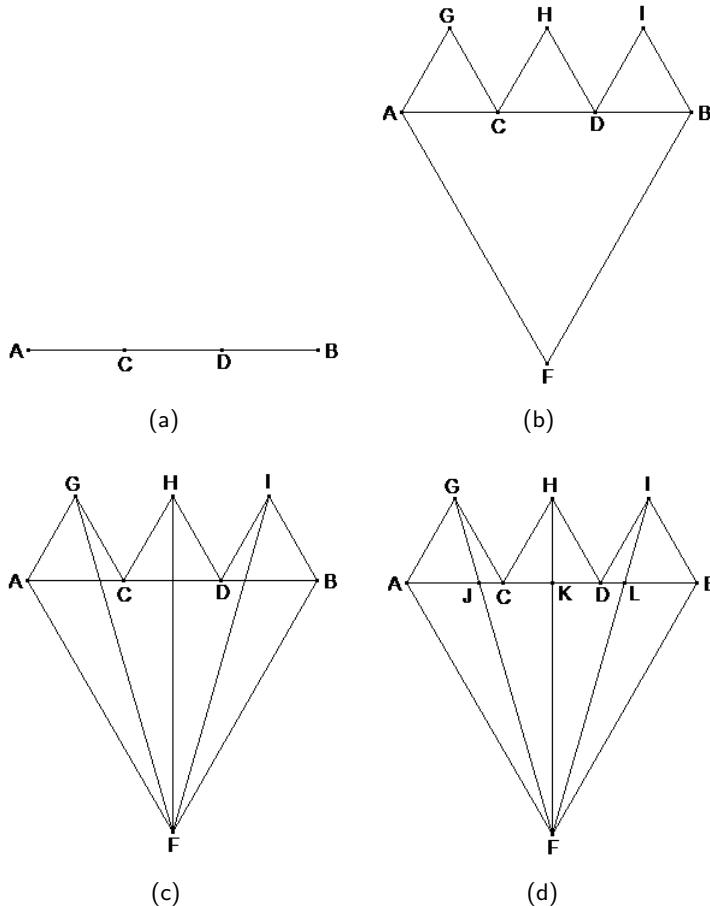


Figura 1.11: Construcción para la división de un segmento en cuatro partes iguales.

Los puntos J , K y L dividen en cuatro partes iguales al segmento \overline{AB} , debido a que $\triangle GJC \cong \triangle FJA$, y porque $\overline{AF} = 3\overline{GC}$ se tiene también que $\overline{AJ} = 3\overline{JC}$, y en consecuencia, $\overline{AJ} = \frac{1}{4}\overline{AB}$. También es claro que $\overline{AJ} = \overline{JK}$ en razón a que

$$\overline{JK} = \overline{JC} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AC} = \overline{AJ}.$$

- Paso 3: En este paso, que es el de generalización, puede verse que teniendo el segmento \overline{AB} dividido en n partes iguales, la reproducción iterativa de la construcción queda como en la Figura 1.12.

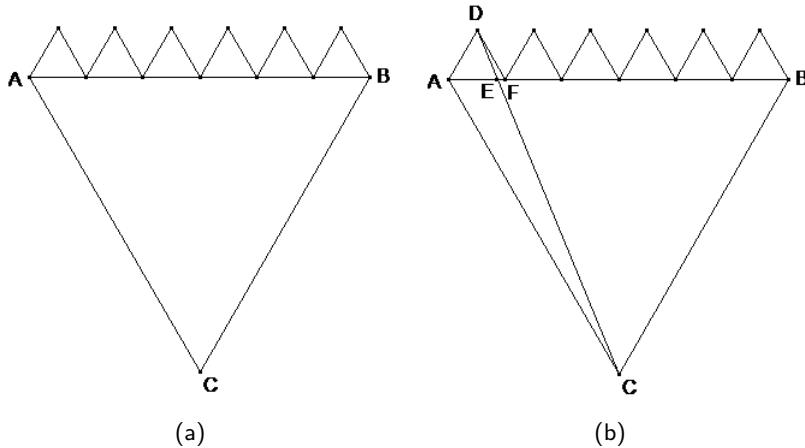


Figura 1.12: *Construcción para la división de un segmento en seis partes iguales.*

De la semejanza de triángulos $\triangle DEF \cong \triangle CEA$, Figura 1.12, y habida cuenta, que $\overline{AC} = n\overline{DF}$, se tiene que $\overline{AE} = n\overline{EF}$, y en consecuencia, $\overline{AE} = \frac{1}{n+1}\overline{AB}$.

De allí ya es fácil probar que todos los segmentos de la división tienen igual longitud, y por ello, el método iterativo funciona para todo n en el conjunto de los naturales.

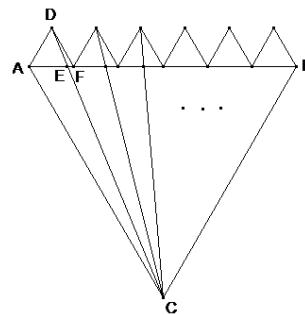


Figura 1.13: *Construcción para la división de un segmento en n partes iguales.*

Con esto, termina la prueba.

Este ejemplo permite establecer que en el que el infinito actúa potencialmente de dos maneras: en la cantidad inmensa de partes en que se divide el segmento original y en lo infinitamente pequeño que se vuelve cada una de esas partes.

1.2.14. Los racionales como adherencia de los irracionales

Los números, como objetos del mundo de los ideales, abarcan una amplia e infinita diversidad de representaciones. Cada número se escribe o dibuja de infinitas maneras y hasta pueden incluir en su representación conceptos finos y delicados como el del límite. En particular, todo natural mayor que 1 puede dibujarse como un radical anidado infinito. Y en efecto $\forall n \geq 2$,

$$\sqrt{n(n-1) + \sqrt{n(n-1) + \sqrt{\dots}}} = n$$

Este hecho se atestigua disponiendo como hacen los matemáticos para descubrir el valor de una expresión

$$x = \sqrt{n(n-1) + \sqrt{n(n-1) + \sqrt{\dots}}}$$

que conduce a la ecuación cuadrática $x^2 - x - n(n-1) = 0$, que a su vez se escribe como $(x - n)(x + (n-1)) = 0$, y dada la configuración positiva de dicho radical anidado, la única posibilidad para x es $x = n$.

Estas razones aducen que se está frente a la constelación infinita de los números naturales, pintados como

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}} \\ 3 &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{\dots}}}} \\ 4 &= \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{\dots}}}} \\ 5 &= \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{\dots}}}} \\ 6 &= \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{\dots}}}} \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

y cada una de estas representaciones acarrea en sus entrañas al infinito, junto a ellas y las operaciones, se tiene la patética forma de representar números bajo el esplendor acucioso del infinito. Así las cosas, con

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}} + \sqrt{90 + \sqrt{90 + \sqrt{90 + \sqrt{90 + \sqrt{\dots}}}}}$$

se tiene una representación del 12 y para no ir tan lejos, con

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}} + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{\dots}}}}}}{\sqrt{132 + \sqrt{132 + \sqrt{132 + \sqrt{132 + \sqrt{\dots}}}}} - \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{\dots}}}}}}$$

se ha representado a $\frac{5}{2}$.

De manera análoga, las fracciones impropias también se expresan como radicales anidados infinitos. Con solo disponer $\sqrt{u + \sqrt{u + \sqrt{u + \sqrt{\dots}}}} = r$, se tendrá que $u + r = r^2$, y así $u = r^2 - r$. Por ejemplo, si $r = \frac{3}{2}$,

$$u = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}$$

y con ellos se obtiene

$$\sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\dots}}}}} = \frac{3}{2};$$

también

$$\sqrt{\frac{14}{25} + \sqrt{\frac{14}{25} + \sqrt{\frac{14}{25} + \sqrt{\frac{14}{25} + \sqrt{\dots}}}}} = \frac{7}{5}.$$

De nuevo, el mítico misterio de la matemática sorprende al presentar la comunión dialéctica del infinito actual y del infinito potencial, al relacionar objetos conocidos como los números oblongos y las raíces cuadradas. La alta y connotada belleza de la matemática con frecuencia aparece en las cosas más simples.

El uso de CAS, *software* de asistencia matemática computacional, permite cobrar la evidencia del resultado expuesto. En DERIVE, por ejemplo, con la orden

`RADICALES_ANIDADOS(r,n):=ITERATES(SQRT((r·(r-1))+u),u,SQRT((r·(r-1)),n)`

se genera una función de n radicales que de manera creciente y acotada, genera una secuencia de irracionales que se aproximan a r , y que tienen como límite a ese valor en el infinito. De este modo, una aproximación de RADICALES_ANIDADOS(5,8) es el vector

[4.4721359549995793928, 4.9469319739611923829, 4.9946903781877403159,
4.9994690096236960588, 4.9999469006804158318, 4.9999946900652220424,
4.9999994690064940088, 4.9999999469006491189, 4.999999946900649090]

En el que se ve su crecimiento monótono con límite 5. La aproximación de RADICALES_ANIDADOS(19\5,8) es

[3.2619012860600180952, 3.7285253500626783448, 3.7905837743100571585,
3.7987608208875242582, 3.7998369466185682976, 3.7999785455471414144,
3.7999971770446279391, 3.7999996285584855224, 3.7999999511261162018]

cuyos términos se acercan de modo inexorable a $\frac{19}{5}$.

En los ejemplos descritos se ha dispuesto la aproximación de número de dígitos en 20. Esta evidencia subraya la oportunidad de redescubrir el hecho significativo, que los números racionales son adherencias de sucesiones de irracionales, tal y como se ha demostrado en este capítulo (Fresán and Rué Perna, 2013).

Capítulo 2.

Diagnóstico en modelos lineales generalizados mixtos (MLGM)

Resumen

Los datos correlacionados no gaussianos son frecuentes en investigaciones biológicas, médicas y agrícolas. Los modelos lineales generalizados mixtos (MLGM) son una poderosa herramienta para el análisis y tratamiento de este tipo de datos. El análisis residual y de sensibilidad son procedimientos de diagnóstico útiles para verificar las suposiciones hechas sobre estos modelos y la idoneidad de los datos. Entre las técnicas incluidas en el análisis de sensibilidad está la influencia local, que permite discriminar observaciones con un peso indebido en las estimaciones de parámetros de cualquier modelo estadístico. En este capítulo se pretende encontrar estructuras analíticas aproximadas para las medidas de influencia local en MLGM.

2.1 Introducción

Es común en la práctica estadística el uso de modelos de regresión con características diferentes, dependiendo de la naturaleza de los datos que se deseé analizar. El objetivo de un modelo de regresión es explicar las posibles relaciones de una variable, denominada respuesta, con otras variables, denominadas explicativas. Algunas de las características más relevantes en los datos que recaen en nuestro interés son la unidimensionalidad de la variable respuesta y la correlación entre respuestas de individuos diferentes. Datos de esta naturaleza son comunes en estudios longitudinales y con medidas repetidas.

Algunos de los modelos más comunes para el trabajo con este tipo de datos son los modelos de seudoverosimilitud (Liang and Zeger, 1986, Zeger et al., 1988) y los modelos de efecto aleatorio. Casos especiales de estos últimos, son los modelos lineales mixtos de respuesta gaussiana (Verbeke and Molenberghs, 2009) y no gaussiana (Demidenko, 2013, Breslow and Clayton, 1993). Los dos constituyen los modelos lineales generalizados mixtos (MLGM), modelos que son objetivo central de este trabajo.

Al margen del tipo de modelo de regresión que se use en la investigación estadística, existen algunas etapas de carácter trascendental, que permiten evaluar la idoneidad de un modelo supuesto para la descripción de los datos, denominado modelo postulado. Entre estas etapas están el análisis de residuos y de sensibilidad y serán descritas en secciones subsiguientes.

Las etapas ya mencionadas son posteriores a la estimación de los parámetros del modelo, tópico que no es de interés en este capítulo y por tanto, no se ahondará en los métodos de estimación para modelos de regresión. Sin embargo, una breve descripción de algunos procesos de estimación pueden ser encontrados en la sección 2.2.2. El lector interesado en la profundización de este tópico puede remitirse a algunas referencias como: McCulloch and Searle (2000), Stasinopoulos and Rigby (2007) o Montgomery et al. (2021).

2.1.1. Análisis de residuos

Existen diversos trabajos que realizan estudios en profundidad acerca de residuales para diferentes tipos de modelos (McCullagh and Nelder, 1989). Por ejemplo, residuos de Pearson, componentes de desvío o residuos de Anscombe son definidos para modelos lineales generalizados que podrían considerarse como casos particulares de los modelos de nuestro interés. Lo ideal en los residuos es que tengan un comportamiento asociado a alguna distribución probabilística, generalmente, la distribución normal. En este sentido

do, para modelos lineales generalizados los residuos previamente mencionados presentan desvíos importantes a distribuciones conocidas que impiden hacer una evaluación del modelo postulado de una forma adecuada (Williams, 1984). Esta situación se presenta en diversos tipos de modelos y los MLGM no son la excepción.

Una alternativa de residuos importantes que tienen la virtud de preservar su comportamiento distribucional en una gran variedad de modelos de regresión, son los residuos cuantílicos y residuos cuantílicos aleatorizados (Dunn and Smyth, 1996). Un resultado importante, cuya prueba sale del alcance de este texto, es que estos residuos son independientes y siguen una distribución normal estándar siempre que un modelo postulado sea adecuado (Rigby and Stasinopoulos, 2005). Lo anterior, hace que estos residuos sean de gran utilidad en la práctica estadística. De hecho, los residuos cuantílicos son la base del paquete *gamlss* del *software R* para la evaluación de supuestos distribucionales en modelos de regresión. Este paquete día a día cobra más importancia, pues permite trabajar con un tipo de modelos más generales denominados *GAMLSS* por sus siglas en inglés **Generalized additive model for location, scale and shape**.

Los *GAMLSS* generalizan gran cantidad de modelos como por ejemplo: modelos lineales normales (ML) (Montgomery et al., 2021), modelos lineales generalizados (MLG) (McCullagh and Nelder, 1989), modelos lineales mixtos (Lesaffre and Verbeke, 1998), modelos lineales generalizados mixtos (Breslow and Clayton, 1993), modelos duplos (Paula, 2013), modelos ajustados en cero (Mullahy, 1997), entre otros. El paquete *gamlss* por su parte permite el análisis de datos, vía modelos de regresión, con cada uno de los modelos mencionados a lo largo de este capítulo, usando como herramienta fundamental las propiedades de los residuos cuantílicos. En este sentido, el paquete *gamlss* provee importantes instrumentos de visualización, basados en los residuos cuantílicos, como son el *worm plot* (gráfico de gusano) y el *qqplot* (gráfico cuantil cuantil), disponibles mediante la función *texttplot()* y *wp()*, respectivamente. Estos gráficos son esenciales, puesto que facilitan estudiar el comportamiento de los residuos y, por tanto, establecer si el modelo postulado es adecuado para explicar las relaciones entre las variables o no. En caso de no serlo, los residuales mostrarán un comportamiento alejado del que deberían tener teóricamente, es decir, acorde con una distribución normal estándar. Para más referencias alrededor de *gamlss*, el lector puede remitirse al Capítulo 2 de Stasinopoulos et al. (2017).

Vale la pena mencionar que previo a la existencia de *gamlss* se construyeron paquetes para el estudio de distintos tipos de modelos como se muestra en la tabla 2.1. Sin embargo, estos paquetes permiten la estimación de los parámetros de un modelo postulado y no la validación del mismo, lo que implica riesgos graves en los aspectos inferenciales.

Función	Paquete	Referencias
<code>lmer()</code>	<code>lme4</code>	Bates et al. (2015)
<code>glmer()</code>	<code>lme4</code>	Bates et al. (2015)
<code>glmer.nb()</code>	<code>lme4</code>	Bates et al. (2015)
<code>glmmPQL()</code>	<code>MASS</code>	Breslow and Clayton (1993), Venables and Ripley (2002)

Cuadro 2.1: Modelos y paquetes

El paquete *gamlss* (Stasinopoulos et al., 2017) soluciona esta dificultad mediante sus diversas funciones relacionadas con los residuos cuantílicos. De hecho, este problema es resuelto para gran cantidad de modelos mencionados a lo largo de este texto. Los tipos de variables respuestas que pueden ser considerados en los modelos de regresión disponibles en *gamlss* se pueden encontrar en Rigby et al. (2019).

Si bien *gamlss* resuelve la dificultad asociada a la validación de un modelo de regresión, hasta donde se conoce no presenta herramientas para detectar observaciones o individuos con peso desmedido en las estimaciones de los parámetros de interés. La detección de estos es vital, puesto que permite evitar errores inferenciales. Las técnicas para la identificación de tales observaciones se enmarcan dentro del análisis de sensibilidad para un modelo de regresión. Dichas técnicas son tópico central de la siguiente sección.

2.1.2. Análisis de sensibilidad

Como se ha mencionado de forma extensa, el paquete *gamlss* facilita la evaluación de un modelo postulado al tener un entorno completo para el estudio de los residuales cuantílicos; sin embargo, tiene limitaciones en cuanto al análisis de sensibilidad. Esto abre un enorme campo de investigación en el área de modelos de regresión.

En la teoría estadística existen diversas formas de realizar análisis de sensibilidad, es decir, existen diferentes formas de medir el impacto excesivo de observaciones en las estimaciones de los parámetros asociados a un modelo. Una gran parte de ellos se denominan diagnósticos de eliminación; entre ellos, especial relevancia tienen DFFITS (Walker and Birch, 1988) y la distancia de Cook. Esta última propuesta por Cook (1977) para modelos de regresión lineal simple y extendida para diferentes modelos a través de los años. Por ejemplo, para regresión logística, que es un caso particular de los MLG, la distancia de Cook se encuentra en Cook and Weisberg (1982) y, su extensión para modelos lineales generalizados en Williams (1987). Para MLGM un primer intento de distancia de Cook fue propuesto por Xiang et al. (2002) y refinando recientemente por Pinho et al. (2015).

Una estrategia diferente a los diagnósticos de eliminación se denomina influencia local, propuesta originalmente por Cook (1986) y refinada más adelante por Poon and Poon (1999) para modelos lineales con respuesta gaussiana. Esta técnica ha sido extendida para diversos tipos de modelos de regresión en los últimos años. Un primer intento para el análisis de sensibilidad, a través de la influencia local, para datos longitudinales con respuesta gaussiana se llevó a cabo por Lesaffre and Verbeke (1998). Aunque este trabajo permite la detección de individuos influyentes en modelos lineales mixtos normales, no admite una extensión directa para los modelos lineales generalizados mixtos (MLGM) (Breslow and Clayton, 1993) y esto abre una posibilidad enorme de investigaciones sobre estos últimos. De esta manera, la siguiente sección tiene como objetivo definir de forma detallada los MLGM.

2.2 Modelos lineales generalizado mixtos

En esta sección definimos los MLGM y algunas de sus propiedades. Además, aspectos básicos de la estimación de los parámetros asociados al modelo son abordados al final de esta sección.

2.2.1. Definición del modelo

El modelo específico de esta investigación, siguiendo a Pinho et al. (2015), se puede definir como sigue:

Sea Y_{ij} la j -ésima observación del i -ésimo sujeto, donde $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq N$ y $N_T = \sum_{i=1}^N n_i$. Se supone que la función de probabilidad de Y_{ij} depende de un vector q -dimensional b_i de efectos aleatorios, a través del parámetro $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$. También se supone que dado b_i , Y_{ij} sigue una distribución en la familia exponencial, dada por

$$f_{y_{ij}|b_i}(y_{ij}; \theta_{ij}, \phi) = \exp \left[\phi \{ y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij}) \} + c(y_{ij}; \phi) \right], \quad (2.1)$$

donde $a(\cdot)$ y $c(\cdot; \cdot)$ son funciones conocidas y ϕ denota el parámetro de precisión. A partir de ciertas condiciones de regularidad (McCulloch and Searle, 2000), se sigue que $\mu_{ij} = E(Y_{ij} | b_i) = \frac{d a(\theta_{ij})}{d \theta_{ij}}$ y $\text{Var}(Y_{ij} | b_i) = \phi^{-1} V_{ij}$, donde $V_{ij} = V(\mu_{ij}) = \frac{d^2 a(\theta_{ij})}{d \theta_{ij}^2}$ es llamada la función varianza.

El parámetro θ_{ij} relaciona μ_{ij} al predictor lineal $\eta_{ij} = x_{ij}^\top \beta + z_{ij}^\top b_i$ mediante la relación

$$g(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = x_{ij}^\top \beta + z_{ij}^\top b_i, \quad (2.2)$$

donde x_{ij} es un vector $(p+1) \times 1$ de valores de la variable explicativa, β es un vector $(p+1) \times 1$ de parámetros desconocidos, z_{ij} es un vector $q \times 1$ de variables no estocásticas y $g(\cdot)$ es una función diferenciable y monótona. Además, se asume que $b_i \sim N_q(\mathbf{0}, \Xi)$, donde Ξ es una matriz de varianza-covarianza simétrica y definida positiva, la cual depende de un vector ξ $(q+1)/2 \times 1$ de parámetros ξ . Los modelos lineales generalizados mixtos son especificados conjuntamente por (2.1), (2.2) y la suposición distribucional sobre b_i previamente mencionada.

En particular, en este trabajo, se considera el MLGM especificado como sigue:

$$\begin{aligned} Y_{ij} | b_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{FE}(\mu_{ij}; \phi), \\ g(\mu_{ij}) &= x_{ij}^\top \beta + z_{ij}^\top b_i \quad \text{y} \\ b_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} N_q(\mathbf{0}; \Xi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $j = 1, \dots, n_i$ y $i = 1, \dots, N$. La notación $\text{FE}(\cdot; \cdot)$ hace referencia a la familia exponencial. Esto implica asumir que dado b_i , Y_{ij} sigue una distribución de la forma (2.1).

Además, considerando $\eta_i = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{in_i})^\top$, $\mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{in_i})^\top$ y $g(\mu_i) = (g(\mu_{i1}), \dots, g(\mu_{in_i}))^\top$, se obtiene

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}_i \beta + \mathbf{Z}_i b_i, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})^\top$ y $\mathbf{Z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{in_i})^\top$.

Finalmente, al escribir $\mu = (\mu_1^\top, \dots, \mu_N^\top)^\top$, $\eta = (\eta_1^\top, \dots, \eta_N^\top)^\top$, $b = (b_1^\top, \dots, b_N^\top)^\top$ y $g(\mu) = (g(\mu_1)^\top, \dots, g(\mu_N)^\top)^\top$ es posible expresar la relación (2.4) como

$$g(\mu) = \eta = \mathbf{X} \beta + \mathbf{Z} b, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_N^\top)^\top$ y $\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i$, con \bigoplus denotando la suma directa de matrices.

2.2.2. Estimación de vector de parámetros ψ

El modelo previamente definido permite el tratamiento de datos correlacionados y la estimación de los parámetros en cuestión $\psi = (\beta^\top, \xi^\top, \phi)^\top$ puede ser realizada a partir estructuras aproximadas o relacionadas con la siguiente función de log-verosimilitud:

$$L(\psi; y_i) = \log \left[\int_{\mathbb{R}^q} \exp \{L(\psi; y_i, b_i)\} d b_i \right] \quad (2.6)$$

y

$$L(\psi; y) = \sum_{i=1}^N L(\psi; y_i). \quad (2.7)$$

donde

$$L(\psi; y_i, b_i) = -\frac{q}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Xi| + \sum_{j=1}^{n_i} [\phi \{y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij})\} + c(y_{ij}; \phi)] - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i. \quad (2.8)$$

es la función de verosimilitud conjunta entre y_i y b_i , para $i = 1, 2, \dots, N$.

Una situación ideal, para algunos procedimientos de estimación y para desarrollar análisis de sensibilidad, sea vía eliminación o mediante influencia local, sería que la expresión en (2.6) tuviese una forma cerrada; sin embargo, esto en general no ocurre (McCulloch and Searle, 2000). Existen algunos casos especiales en los cuales la distribución asociada a la variable respuesta y_{ij} y a los efectos aleatorios b_i son conjugadas, en ese caso la expresión (2.6) tendrá una forma cerrada (Fabio et al., 2012). No obstante, los modelos de efecto aleatorio en los que eso ocurre no son de interés para la presente investigación.

Vale la pena mencionar que la log-verosimilitud marginal (2.6) no siempre dependerá de una integral multivariada, puesto que no todos los modelos tienen un efecto aleatorio y en esos casos la función de verosimilitud marginal tendrá una forma cerrada. Estas situaciones ocurren con los MLG y los modelos con exceso de ceros. Estos últimos son útiles en la práctica estadística y vale la pena un estudio más profundo, que no recae en el interés de este capítulo.

Existen diversas metodologías numéricas para llevar a cabo la integración multidimensional, como por ejemplo la cuadratura de Gauss Hermite o la aproximación de Laplace. El uso de esta última (ver apéndice, 2.A) genera la función de log-verosimilitud penalizada, usada por el paquete `gamlss` (Stasinopoulos et al., 2017)

$$L_P(\beta, b) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i}(y_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i^\top \Xi^{-1} b_i. \quad (2.9)$$

Esta expresión es base fundamental para el análisis de sensibilidad desarrollado en este capítulo. La técnica a usar para dicho análisis se describe en la siguiente sección.

2.3 Influencia local

Enseguida, se explora la influencia local como herramienta para evaluar el impacto de observaciones particulares en los valores estimados del parámetro β , denominado vector de parámetros de efectos fijos. En principio, se describe la técnica general estudiada, para modelos de regresión simple, en el trabajo de Cook (1986). Este trabajo es de suma importancia porque permite establecer, entre otros aspectos, la conexión entre la influencia local y el concepto de curvatura normal. Después se enunciarán las dificultades en un intento de extensión de esta técnica a MLGM. Por último, será expuesta una alternativa de solución a las dificultades planteadas, con ayuda del enfoque GAMLSS. Puntualmente, serán calculadas las medidas de influencia o las curvaturas en la dirección de un vector unitario d .

2.3.1. Influencia local: enfoque general

Con el objetivo de investigar la sensibilidad de los valores estimados de un vector de parámetros desconocidos (β) bajo pequeñas perturbaciones o cambios en algunos componentes del modelo o los datos, Cook (1986) propuso el concepto de influencia local. En esencia, la propuesta está basada en medir tal sensibilidad a través del comportamiento del desplazamiento de la verosimilitud $LD_\omega = 2 \left\{ L(\hat{\beta}; y) - L(\hat{\beta}_\omega; y) \right\}$, donde $\hat{\beta}_\omega$ denota la estimativa de máxima verosimilitud bajo $L(\beta; y | \omega)$, la cual denota la forma adoptada por la función de log-verosimilitud del modelo postulado $L(\beta; y)$ cuando modificaciones menores son introducidas en el modelo o los datos mediante el vector de perturbación $\omega \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^l$ (l no necesariamente representa el tamaño muestral). La forma de introducir pequeñas modificaciones no es única y depende del objetivo de investigación. Las diferentes posibilidades para perturbar un modelo son llamadas esquemas de perturbación. Sin embargo, investigar las características de LD_ω para todo $\omega \in \Theta$ podría ser inviable. Así, Cook (1986) propuso estudiar el comportamiento de LD_ω en una vecindad del vector de no perturbación ω_0 , eso es, ω_0 es tal que $L(\beta; y | \omega_0) = L(\beta; y)$. De acuerdo con Cook (1986) este estudio debe ser hecho por medio del cálculo de la curvatura

normal $C_d(\beta)$, en la dirección de algún vector unitario d , de la gráfica $LD_{\omega_0+a d}$ versus a , donde $a \in \mathbb{R}$. Cook (1986) mostró que C_d podría ser expresado como

$$C_d(\beta) = 2 \left| d^\top \Delta^\top L_{\beta\beta}^{-1} \Delta d \right|, \quad (2.10)$$

en el que

$$L_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 L(\beta; y)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \quad y \quad \Delta = \frac{\partial^2 L(\beta; y | \omega)}{\partial \beta \partial \omega^\top},$$

y estas cantidades son evaluadas en $\omega = \omega_0$ y $\beta = \hat{\beta}$.

Además si el vector de parámetros es particionado en $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$ y el foco de interés, por ejemplo, es la influencia local sobre el vector β_1 de dimensión $r \times 1$, entonces la curvatura normal $C_d(\beta_1)$ en la dirección unitaria d toma la forma

$$C_d(\beta_1) = \left| d^\top \Delta^\top (L_{\beta\beta}^{-1} - L_{22}) \Delta d \right|, \quad (2.11)$$

en el que

$$L_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (s-r)} \\ \mathbf{0}_{(s-r) \times r} & L_{\beta_2 \beta_2}^{-1} \end{bmatrix} \quad y \quad L_{\beta_2 \beta_2} = \frac{\partial^2 L(\beta; y)}{\partial \beta_2 \partial \beta_2^\top}.$$

Aunque la curvatura normal (Cook, 1986) ha sido ampliamente usada, no es invariante bajo un cambio uniforme de escala y podría tomar cualquier valor. Así, es difícil juzgar su tamaño de forma objetiva. Para reducir estas complejidades, Poon and Poon (1999) propuso la curvatura normal conformal, la cual tiene una correspondencia uno a uno con la curvatura normal C_d y toma valores en $[0, 1]$. Considerando las ecuaciones (2.10) y (2.11) las curvaturas normales conformales (Poon and Poon, 1999) son definidas, respectivamente, por

$$B_d(\beta) = \frac{-\left\{ d^\top \Delta^\top (L_{\beta\beta})^{-1} \Delta d \right\}}{\sqrt{\text{tr} \left\{ (\Delta^\top L_{\beta\beta}^{-1} \Delta)^2 \right\}}} \quad (2.12)$$

y

$$B_d(\beta_1) = \frac{-\left\{ d^\top \Delta^\top (L_{\beta\beta}^{-1} - L_{22}) \Delta d \right\}}{\sqrt{\text{tr} \left[\left\{ \Delta^\top (L_{\beta\beta}^{-1} - L_{22}) \Delta \right\}^2 \right]}}. \quad (2.13)$$

Esto implica que $0 \leq B_d(\beta) \leq 1$ y $0 \leq B_d(\beta_1) \leq 1$. Todas las cantidades son evaluadas en $\omega = \omega_0$ y $\beta = \hat{\beta}$.

Aún cuando la curvatura normal B_d podría ser calculada en cualquier dirección d , se puede tener interés particular en algunas de ellas. Para ello se usará la curvatura normal conformal como una herramienta para evaluar la influencia de observaciones en los valores estimados de los parámetros. Así, se encaminan los esfuerzos para calcular tal curvatura en los MLGM.

2.3.2. Influencia local en MLGM: Dificultades

En los modelos lineales generalizados mixtos (MLGM), a diferencia de los modelos lineales mixtos (MLM), la variable respuesta no necesariamente debe aproximarse a una distribución normal (ver sección, 2.2); por el contrario, la gama de posibilidades se amplía a las distribuciones que pertenecen a la familia exponencial (McCulloch and Searle, 2000), como es común en los modelos lineales generalizados (MLG) (McCullagh and Nelder, 1989). Estos últimos con la restricción de independencia sobre las observaciones. En realidad, los MLGM pueden ser considerados como una generalización de los MLM y los MLG que permiten ser ajustados a datos con características de naturaleza más compleja.

Una dificultad que surge en el manejo de los MLGM, complejidad que es manifiesta en los métodos de estimación para los parámetros asociados a este modelo (Breslow and Clayton, 1993, McGilchrist, 1994), es la forma no cerrada de su función de verosimilitud marginal (2.6). Dificultad que es abordada, por Breslow and Clayton (1993) a través de aproximaciones de la función de verosimilitud marginal. Autores como McGilchrist (1994), Pawitan (2001) y Nelder et al. (2006) realizan el proceso de estimación basados en la función de verosimilitud conjunta entre la variable respuesta y los efectos aleatorios. De esta forma evitan problemas de integración multidimensional en (2.6). Una alternativa adicional es usada por Zhao et al. (2006), quien hace un análisis completo de los MLGM vía herramientas bayesianas. Esta dificultad se extiende para el desarrollo del análisis de residuos y de sensibilidad, como es posible deducir en Xiang et al. (2003) y Pinho et al. (2015). En realidad este es un problema presente en la mayoría de modelos de regresión con efecto aleatorio (ver, por ejemplo Tang et al., 2006).

Las complejidades en la estimación de parámetros para estos modelos y muchos otros, en general los modelos GAMLSS, es solventada al considerar una función de verosimilitud penalizada (2.9) (Rigby and Stasinopoulos, 2005, Stasinopoulos and Rigby, 2008), que produce valores estimados de los parámetros de interés denominados valores estimados penalizados, muy próximos a los valores estimados de máxima verosimilitud como para ser útiles en la práctica. Los algoritmos usados para la estimación de los parámetros de

interés y la predicción de los efectos aleatorios, implementados en el paquete *gamlss* son los algoritmos CG (Cole and Green, 1992) y RS (Rigby and Stasinopoulos, 1996b,a).

Vale la pena mencionar que los MLGM pueden ser considerados como un caso particular de los *GAMLSS* de efecto aleatorio (Stasinopoulos et al., 2017), y la función de verosimilitud penalizada abordada en (Rigby and Stasinopoulos, 2005) coincide con la verosimilitud penalizada para los MLGM (2.9). En el apéndice 2.A se describe el procedimiento para obtener esta última mediante la aproximación de Laplace multivariada estudiada en Tuerlinckx et al. (2006) o Demidenko (2013). De esta manera, estudiar los MLGM como un caso particular de los *GAMLSS*, es decir estudiar los MLGM desde un enfoque *GAMLSS* puede solucionar las complejidades ya mencionadas y permitir un desarrollo completo del análisis de sensibilidad para estos modelos. Tópicos que se abordan en la siguiente sección.

2.3.3. Influencia local en MLGM: enfoque *GAMLSS*

La técnica descrita en la sección 2.3.1 no puede ser aplicada de forma directa para MLGM por razones ya expuestas en la sección anterior. Algunos enfoques encaminados a abordar esta dificultad, en lo que a análisis de sensibilidad se refiere, están en Ouwens et al. (2001) en el cual se usa herramientas bayesianas, o en Tapia et al. (2019b) y Tapia et al. (2019a) que realiza análisis de sensibilidad en casos particulares de los MLGM, a través de una medida análoga a la influencia local propuesta por Zhu and Lee (2003). Una limitación de los trabajos mencionados líneas atrás es el poco uso práctico que tienen, puesto que su implementación en algún *software* estadístico podría ser una tarea tediosa y con alto costo computacional. Una alternativa diferente para el análisis de sensibilidad de MLGM surge al estudiar estos modelos como un caso especial de los *GAMLSS* de efectos aleatorios (Stasinopoulos et al., 2017), esto es, al estudiar los MLGM con un enfoque *GAMLSS*, tal y como fueron abordadas las complejidades de estimación por el paquete *gamlss*. Dado que este paquete usa la verosimilitud penalizada (2.9) para estimar algunos de los parámetros de interés en los MLGM, tiene sentido calcular las medidas de curvatura a partir de esta función de verosimilitud apoyado en las ideas de Tang et al. (2006).

En lo que sigue, se determinan los componentes de las medidas de curvatura, Δ y $\mathbf{L}_{\beta\beta}$ dadas en las expresiones (2.10) y (2.12), para el vector de parámetros de efectos fijos β , desde diferentes esquemas de perturbación. Vale la pena notar que la estructura de $\mathbf{L}_{\beta\beta}$ no depende del esquema de perturbación usado y su estructura, como se devela en el apéndice 2.B.1, viene dada por:

$$\begin{aligned} L_{\beta \beta}^i &= \frac{\partial L_P(\beta, b_i)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \Bigg|_{\beta=\hat{\beta}} = \hat{\phi} \mathbf{X}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \left\{ \hat{\mathbf{P}}_i^{-1} - \phi \mathbf{Z}_i \left(\phi \mathbf{Z}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{Z}_i - \hat{\Xi}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{X}_i \\ &= \hat{\phi} \mathbf{X}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \left\{ \hat{\mathbf{P}}_i^{-1} - \hat{\phi} \mathbf{Z}_i \hat{\Lambda}_i^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{X}_i. \end{aligned}$$

Luego,

$$L_{\beta \beta} = \frac{\partial L_P(\beta, b | \omega)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \Bigg|_{\beta=\hat{\beta}} = \hat{\phi} \mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{P}} \left\{ \hat{\mathbf{P}}^{-1} - \hat{\phi} \mathbf{Z} \hat{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}^\top \right\} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{X} \quad (2.14)$$

donde

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_N^\top \right)^\top, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{P} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i$$

y

$$\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i \quad \text{y} \quad \Lambda_i = \phi \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1}.$$

De esta manera, uno de los elementos de (2.10) o (2.12) está totalmente determinado mediante una estructura cerrada. Por otro lado, como ya se mencionó previamente, la estructura para Δ depende de la forma en la que se deseé perturbar el modelo, que en la práctica permitirán detectar diferentes componentes con peso desproporcional en los valores estimados del vector de parámetros β en el predictor lineal (2.5). Estructuras cerradas para la matriz Δ , siguiendo esquemas de perturbación planteados por Lesaffre and Verbeke (1998), Zhu and Lee (2003) y Tang et al. (2006), son tópicos de interés de las siguientes secciones.

Esquema 1: ponderación de casos

Sea $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^\top$ un vector de perturbación de dimensión $(N \times 1)$. Con el objetivo de determinar individuos potencialmente influyentes sobre β , consideremos la log-verosimilitud perturbada dada por:

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N \left[\omega_i \sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i} (y_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i \right].$$

De esta manera, el vector $(N \times 1)$ de no perturbación es $\omega_0 = \mathbf{1}_N$. Mediante algunos cálculos expuestos en el apéndice 2.B.2 es posible obtener

$$\Delta = \frac{\partial L_P(\beta, b | \omega)}{\partial \beta \partial \omega^\top} \Bigg|_{\omega=\omega_0, \beta=\hat{\beta}} = \phi \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}^{1/2} \widehat{\mathbf{V}}^{-1/2} \mathbf{D} - \phi \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{Z} \widehat{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}^\top \widehat{\mathbf{W}}^{1/2} \widehat{\mathbf{V}}^{-1/2} \mathbf{D} \quad (2.15)$$

donde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top)^\top, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{P} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i$$

y

$$\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i \quad \text{y} \quad \Lambda_i = \phi \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1}.$$

Además, al sustituir (2.15) y (2.14) en (2.10) o (2.12), se obtienen las medidas de curvatura en la dirección de un vector \mathbf{d} de interés. Por ejemplo, vectores de la forma $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, cuyos componentes son ceros excepto por la i -ésima posición cuyo valor es 1, permiten identificar individuos potencialmente influyentes.

Esquema 2: perturbación en la variable respuesta

Considérese el vector de perturbación $\omega = (\omega_1^\top, \omega_2^\top, \dots, \omega_N^\top)^\top$, donde $\omega_i^\top = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in_i})$. Además, asuma la perturbación sobre la variable respuesta dada por $y_i^{\omega_i} = y_i + \omega_i$, que podría ser útil para determinar observaciones potencialmente influyentes. Con estas condiciones, la función de verosimilitud penalizada, asume la forma:

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i} (y_{ij} + \omega_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i \right].$$

De esta manera, el vector de no perturbación es $\omega_0 = \mathbf{1}_{N_T}$. Luego, al usar algunos herramientas algebraicas dadas explicitamente en el apéndice 2.B.3 se obtiene:

$$\Delta = \frac{\partial^2 L_P(\beta, b | \omega)}{\partial \beta \partial \omega^\top} \bigg|_{\omega=\omega_0, \beta=\beta} = \phi \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}^{1/2} \widehat{\mathbf{V}}^{-1/2} - \phi^2 \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{Z} \widehat{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}^\top \widehat{\mathbf{W}}^{1/2} \widehat{\mathbf{V}}^{-1/2}. \quad (2.16)$$

donde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top)^\top, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{P} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i$$

y

$$\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i \quad \text{y} \quad \Lambda_i = \phi \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1}.$$

Las curvaturas o medidas de influencia en alguna dirección $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{N_T}$ de interés, bajo este esquema de perturbación, es obtenida al sustituir (2.16) y (2.14) en (2.10) o (2.12). Esta forma de perturbación permite detectar observaciones potencialmente influyentes al considerar vectores directores en \mathbb{R}^{N_T} de la forma $\mathbf{u}_{ij}^\top = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)$, donde $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ para $i = 1, \dots, N$. Basta considerar el vector \mathbf{u}_{ij} con uno en la j -ésima posición del vector \mathbf{u}_i y ceros en el resto de entradas para $j = 1, 2, \dots, n_i$.

Esquema 3: perturbación en la variable explicativa

Considere ahora $\omega^\top = (\omega_1^\top, \omega_2^\top, \dots, \omega_N^\top)$ con $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in_i})^\top$ y ω_{ij} es un vector $(p+1 \times 1)$. La matriz Δ será calculada con el esquema de perturbación $x_{ij}^{\omega_{ij}} = x_{ij} + \omega_{ij}$. Este último produce la función de verosimilitud penalizada perturbada, dada por:

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N L_P(\beta, b_i | \omega_i)$$

donde

$$L_P(\beta, b_i | 1\omega_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij}^{\omega_{ij}} - b \left(\theta_{ij}^{\omega_{ij}} \right) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i$$

y

$$\theta_{ij}^{\omega_{ij}} = \theta \left(\mu_{ij}^{\omega_{ij}} \right), \quad \mu_{ij}^{\omega_{ij}} = \mu_{ij} \left(\eta_{ij}^{\omega_{ij}} \right), \quad y \quad \eta_{ij}^{\omega_{ij}} = \left(x_{ij}^\top + \omega_{ij}^\top \right) \beta + z_i^\top b_i.$$

El vector de no perturbación, con este esquema, es $\omega_0 = 1_{N_T(p+1)}$. Ahora bien, mediante algunas manipulaciones algebraicas, expresadas en detalle en el apéndice 2.B.4, obtenemos la matriz $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ de dimensión $(p+1, N_T)$, donde

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\partial L_P(\beta, b_i | \omega_i)}{\partial \beta \partial \omega_i^\top} \Bigg|_{\omega=\omega_0, \beta=\hat{\beta}} \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \left\{ -\widehat{\mathbf{W}}_i + \mathbf{D}_{y_i - \widehat{\mu}_i} \widehat{\mathbf{M}}_i \right\} \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) + \phi \left. \frac{\partial b_i^\top}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}} \mathbf{Z}_i^\top \left\{ -\widehat{\mathbf{W}}_i + \mathbf{D}_{y_i - \widehat{\mu}_i} \widehat{\mathbf{M}}_i \right\} \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) + \phi \left. \frac{\partial b_i^\top}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}} \mathbf{Z}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) - \phi^2 \mathbf{X}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{Z}_i \left\{ \phi \mathbf{Z}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{Z}_i - \widehat{\Xi}^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \widehat{\mathbf{P}}_i \left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. La última expresión para Δ_i fue obtenida usando la ecuación (2.B.2). En consecuencia, es posible deducir una estructura cerrada para Δ , dada por:

$$\Delta = \widehat{\phi} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{P}} \left(\mathbf{I}_{N_T} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) - \widehat{\phi}^2 \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{Z} \widehat{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}^\top \widehat{\mathbf{P}} \left(\mathbf{I}_{N_T} \otimes \widehat{\beta}^\top \right) \quad (2.17)$$

donde

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_N^\top \right)^\top, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{P} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i$$

y

$$\mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i \quad \text{y} \quad \Lambda_i = \phi \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1}.$$

También, al sustituir (2.17) y (2.14) en (2.10) o (2.12), las medidas de curvatura en forma cerrada son obtenidas.

Apéndice



2.A Verosimilitud penalizada a partir de la aproximación de Laplace

De Demidenko (2013), se sabe que para una función $h : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^q} \exp \{h(x)\} dx \approx (2\pi)^{q/2} \exp \{h(\tilde{x})\} \left| -\frac{\partial h}{\partial x \partial x^\top} \right|_{x=\tilde{x}}$$

donde \tilde{x} es el máximo de la función h , en particular es solución de la ecuación $\frac{\partial h}{\partial x} = \mathbf{0}$.

Ahora bien, para $i = 1, 2, \dots, N$, se tiene que

$$\begin{aligned} \exp \{L(\psi; y_i)\} &= \int_{\mathbb{R}^q} \exp \{L(\psi; y_i, b_i)\} \, d b_i \\ &\approx (2\pi)^{q/2} \exp \{L(\psi; y_i, b_i)\} \left| E \left(-\frac{\partial^2 L(\psi; y_i, b_i)}{\partial b_i \partial b_i^\top} \right) \right|_{b_i=\tilde{b}_i(\psi)}^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.A.1)$$

para ψ fijo y siendo \tilde{b}_i raíz de la ecuación $\frac{\partial L(\psi; y_i, b_i)}{\partial b_i} = 0$. Es decir, \tilde{b}_i satisface la ecuación

$$\phi \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} z_{ij} \right\} - \Xi^{-1} \tilde{b}_i = 0 \quad (2.A.2)$$

o de forma equivalente

$$\phi \mathbf{Z}_i^\top \tilde{\mathbf{W}}_i^{1/2} \tilde{\mathbf{V}}_i^{-1/2} (y_i - \tilde{\mu}_i) - \Xi^{-1} \tilde{b}_i = 0.$$

Luego, regresando a (2.A.1) se obtiene

$$\begin{aligned} L(\psi; y_i) &\approx -\frac{1}{2} \log |\Xi| + \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Xi^{-1} \tilde{b}_i \\ &\quad - \frac{1}{2} \log |\mathbf{Z}_i^\top \tilde{\mathbf{W}}_i \mathbf{Z}_i + \Xi^{-1}| \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Xi^{-1} \tilde{b}_i \\ &\quad - \frac{1}{2} \log |\mathbf{Z}_i^\top \tilde{\mathbf{W}}_i \mathbf{Z}_i \Xi + \mathbf{I}_q|. \end{aligned}$$

Finalmente, usando argumentos de Breslow and Clayton (1993), es posible ignorar el último término para obtener

$$L_P(\beta; b_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Xi^{-1} \tilde{b}_i.$$

o en general,

$$L_P(\beta; b) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij} - a(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Xi^{-1} \tilde{b}_i \right).$$

La expresión anterior es la base de estimación de los modelos *GAMLSS* dada de forma explícita por Rigby and Stasinopoulos (2005) y su implementación respectiva en R-software (R Core Team, 2021) realizada por Stasinopoulos and Rigby (2008).

2.B Elementos necesarios para la curvatura $C_d(\beta)$ o $B_d(\beta)$

En esta sección se presentan los cálculos detallados de los componentes de la curvatura (2.10) y (2.12). Puntualmente, se construyen Δ y $L_{\beta\beta} = \partial L_P(\beta, b) / \beta\beta^\top$.

2.B.1. Escore y Fisher para β a partir de $L_P(\beta; b)$

A partir de la expresión dada en (2.9) se tiene que

$$L_P(\beta, b) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i} (y_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i^\top \Xi^{-1} b_i,$$

y para cada individuo, usando (2.1), resulta

$$\begin{aligned} L_P(\beta, b_i) &= \sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i} (y_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij} - b(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i; \end{aligned} \quad (2.B.1)$$

En principio se desarrollará los cálculos sobre (2.B.1). Así podemos deducir, para $i = 1, 2, \dots, N$, que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_P(\beta, b_i)}{\partial \beta} &= \phi \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\beta} z_{ij} \right) - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} b_i \\ &= \phi \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{\frac{w_{ij}}{V_{ij}}} (y_{ij} - \mu_{ij}) \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\beta} z_{ij} \right) - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} b_i \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} (y_i - \mu_i) + \phi \frac{db_i^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} (y_i - \mu_i) - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} b_i \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} (y_i - \mu_i) + \frac{db_i^\top}{d\beta} \left\{ \phi \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} (y_i - \mu_i) - \Xi^{-1} b_i \right\} \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} (y_i - \mu_i) \end{aligned}$$

Más aún,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}_P(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}_i)}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left\{ \phi \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} x_{ij}^\top \right\} \\
&= \phi \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ -\frac{d\theta_{ij}}{\mu_{ij}} \left(\frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \right)^2 \frac{d\eta_{ij}}{d\boldsymbol{\beta}} x_{ij}^\top + (y_{ij} - \mu_{ij}) m_{ij} \frac{d\eta_{ij}}{d\boldsymbol{\beta}} x_{ij}^\top \right\} \\
&= \phi \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (y_{ij} - \mu_{ij}) m_{ij} \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\boldsymbol{\beta}} z_{ij} \right) x_{ij}^\top - \right. \\
&\quad \left. \frac{d\theta_{ij}}{\mu_{ij}} \left(\frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \right)^2 \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\boldsymbol{\beta}} z_{ij} \right) x_{ij}^\top \right\} \\
&= \phi \mathbf{X}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \boldsymbol{\mu}_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_i + \\
&\quad \phi \left(\frac{db_i}{d\boldsymbol{\beta}^\top} \right)^\top \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \boldsymbol{\mu}_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_i \\
&= \phi \left\{ \mathbf{X}_i^\top + \left(\frac{db_i}{d\boldsymbol{\beta}^\top} \right)^\top \mathbf{Z}_i^\top \right\} (\mathbf{D}_{y_i - \boldsymbol{\mu}_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_i
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la expresión (2.A.2), se tiene que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_P(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{b}_i)}{\partial b_i^\top} \right|_{b_i} = \phi \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} z_{ij}^\top - b_i^\top \boldsymbol{\Xi}^{-1} = \mathbf{0}_{1 \times q}$$

y por tanto

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{b}_i)}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial b_i^\top} = \mathbf{0}_{p \times q}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \phi \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} z_{ij}^\top - b_i^\top \Xi^{-1} \right\} &= \mathbf{0}_{p \times q} \\
 \phi \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (y_{ij} - \mu_{ij}) m_{ij} \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\beta} z_{ij} \right) z_{ij}^\top - \right. \\
 &\quad \left. \frac{d\theta_{ij}}{\mu_{ij}} \left(\frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \right)^2 \left(x_{ij} + \frac{db_i^\top}{d\beta} z_{ij} \right) z_{ij}^\top \right\} - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} &= \mathbf{0}_{p \times q} \\
 \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i \mathbf{Z}_i + \phi \frac{\partial b_i^\top}{\partial \beta} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i \mathbf{Z}_i - \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i \mathbf{Z}_i - \\
 \phi \frac{\partial b_i^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{W}_i \mathbf{Z}_i - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} &= \mathbf{0}_{p \times q} \\
 \phi \left(\mathbf{X}_i^\top + \frac{\partial b_i^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_i^\top \right) (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} &= \mathbf{0}_{p \times q}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, al definir $\mathbf{T}_i = \left(\mathbf{X}_i^\top + \frac{\partial b_i^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_i^\top \right) (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i)$, la última ecuación en la expresión arriba puede ser reescrita como

$$\phi \mathbf{T}_i \mathbf{Z}_i - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} = \mathbf{0}_{p \times q}.$$

Así, podemos considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \phi \mathbf{T}_i \mathbf{Z}_i - \frac{db_i^\top}{d\beta} \Xi^{-1} &= \mathbf{0}_{p \times q} \\
 \mathbf{T}_i - \left(\mathbf{X}_i^\top + \frac{\partial b_i^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_i^\top \right) (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) &= \mathbf{0}_{p \times q}.
 \end{aligned}$$

multiplicando de forma adecuada por $-\phi$ y \mathbf{Z}_i la primera ecuación en la expresión anterior y sumando a la segunda ecuación se logra:

$$\frac{\partial b_i^\top}{d\beta} = -\phi \mathbf{X}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i \left\{ \phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1} \right\}^{-1}. \quad (2.B.2)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la estructura resultante para $\frac{\partial L_P(\beta, b_i)}{\partial \beta \partial \beta^\top}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_P(\beta, b_i)}{\partial \beta \partial \beta^\top} &= \phi \left\{ \mathbf{X}_i^\top - \phi \mathbf{X}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i \left(\phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1} \right)^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \\
 &\quad \times (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_i \\
 &= \phi \mathbf{X}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \left\{ (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i)^{-1} - \phi \mathbf{Z}_i \left(\phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1} \right)^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \times \\
 &\quad \times (\mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_i \\
 &= \hat{\phi} \mathbf{X}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \left\{ \hat{\mathbf{P}}_i^{-1} - \phi \mathbf{Z}_i \left(\phi \mathbf{Z}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{Z}_i - \hat{\Xi}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{X}_i \\
 &= \hat{\phi} \mathbf{X}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_i \left\{ \hat{\mathbf{P}}_i^{-1} - \hat{\phi} \mathbf{Z}_i \hat{\Lambda}_i^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \right\} \hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{X}_i.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$L_{\beta\beta} = \frac{\partial L_P(\beta, b | \omega)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \Big|_{\beta=\hat{\beta}} = \hat{\phi} \mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{P}} \left\{ \hat{\mathbf{P}}^{-1} - \hat{\phi} \mathbf{Z} \hat{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}^\top \right\} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{X}$$

2.B.2. Ponderación de casos

Sea $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ y $b = (b_1^\top, b_2^\top, \dots, b_N^\top)^\top$. Ahora, se puede considerar la verosimilitud perturbada

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N \left[\omega_i \sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i}(y_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i \right]$$

de manera que

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \omega^\top} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{\partial L_P(\beta, b | \omega)}{\partial \omega^\top} \right\} \\
 &= \phi \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{j=1}^{n_1} \{ [y_{1j} \theta_{1j} - b(\theta_{1j})] + c(y_{1j}, \phi) \} \cdots \sum_{j=1}^{n_N} \{ [y_{Nj} \theta_{Nj} - b(\theta_{Nj})] + c(y_{Nj}, \phi) \} \right] \\
 &= \phi \left[\sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - \mu_{1j}) w_{1j}^{1/2} v_{1j}^{-1/2} \frac{d\eta_{1j}}{d\beta} \cdots \sum_{j=1}^{n_N} (y_{Nj} - \mu_{Nj}) w_{Nj}^{1/2} v_{Nj}^{-1/2} \frac{d\eta_{Nj}}{d\beta} \right] \\
 &= \phi \left[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{W}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^{1/2} (y_1 - \mu_1) + \frac{db_1^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_1^\top \mathbf{W}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^{-1/2} (y_1 - \mu_1) \cdots \right. \\
 &\quad \left. \mathbf{X}_N^\top \mathbf{W}_N^{1/2} \mathbf{V}_N^{1/2} (y_N - \mu_N) + \frac{db_N^\top}{d\beta} \mathbf{Z}_N^\top \mathbf{W}_N^{1/2} \mathbf{V}_N^{-1/2} (y_N - \mu_N) \right]
 \end{aligned}$$

y haciendo uso de la expresión obtenida en (2.B.2) para $\frac{db_i^\top}{\partial \beta}$, resulta

$$\Delta = \phi \mathbf{X}^\top \left\{ \mathbf{I}_{N_T} - (\mathbf{M} \mathbf{D}_{y-\mu} - \mathbf{W}) \mathbf{Z} \Lambda^{-1} \mathbf{Z}^\top \right\} \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{D}$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\top & \mathbf{X}_N^\top \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_i$$

y

$$\mathbf{M} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{D} = \bigoplus_{i=1}^N (y_i - \mu_i), \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \left\{ \phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{M}_i \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1} \right\}$$

2.B.3. Perturbación aditiva sobre la variable respuesta

Sea $\omega = (\omega_1^\top, \omega_2^\top, \dots, \omega_N^\top)^\top$, donde $\omega_i^\top = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in_i})$ y al considerar la función de verosimilitud perturbada

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^{n_i} \log \left\{ f_{y_{ij} | b_i} (y_{ij} + \omega_{ij}; \beta, \phi) \right\} - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i \right]$$

o lo que es equivalente

$$L_P(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N L_P(\beta, b_i | \omega_i)$$

donde

$$L_P(\beta, b_i | \omega_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ (y_{ij} + \omega_{ij}) \theta_{ij} - b(\theta_{ij}) \right\} + c(y_{ij} + \omega_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i.$$

Ahora bien, para $1 \leq i \leq N$ resulta

$$\frac{\partial L_P(\beta, b_i | \omega_i)}{\partial \omega_i^\top} = \begin{bmatrix} \phi \theta_{i1} + c'(y_{i1} + \omega_{i1}; \phi) & \dots & \phi \theta_{in_i} + c'(y_{in_i} + \omega_{in_i}; \phi) \end{bmatrix}.$$

Así, mediante algunos cálculos y fundamentalmente usando la expresión en (2.B.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{L}_P(\beta, b_i | \omega_i)}{\partial \beta \partial \omega_i^\top} &= \left[\phi \frac{d \theta_{i1}}{d \mu_{i1}} \frac{d \mu_{i1}}{d \eta_{i1}} \left(x_{i1} + \frac{d b_i^\top}{d \beta} z_{i1} \right) \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \phi \frac{d \theta_{in_i}}{d \mu_{in_i}} \frac{d \mu_{in_i}}{d \eta_{in_i}} \left(x_{in_i} + \frac{d b_i^\top}{d \beta} z_{in_i} \right) \right] \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} + \phi \frac{d b_i^\top}{d \beta} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} \\ &= \phi \mathbf{X}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2} - \phi^2 \mathbf{X}_i^\top \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i \Lambda_i^{-1} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{W}_i^{1/2} \mathbf{V}_i^{-1/2}. \end{aligned}$$

Además,

$$\Delta = \frac{\partial^2 \mathbb{L}_P(\beta, b | \omega)}{\partial \beta \partial \omega^\top} = \phi \mathbf{X}^\top \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{V}^{-1/2} - \phi^2 \mathbf{X}^\top \mathbf{P} \mathbf{Z} \Lambda^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{V}^{-1/2}.$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\top & \mathbf{X}_N^\top \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{Z} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_i$$

y

$$\Lambda_i = \phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{M}_i \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1}, \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \left\{ \phi \mathbf{Z}_i^\top (\mathbf{M}_i \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z}_i - \Xi^{-1} \right\}$$

2.B.4. Perturbación sobre la variable explicativa

Considere ahora $\omega^\top = (\omega_1^\top, \omega_2^\top, \dots, \omega_N^\top)$ con $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in_i})^\top$ y ω_{ij} es un vector $(p+1 \times 1)$. La matriz Δ será calculada con el esquema de perturbación $x_{ij}^{\omega_{ij}} = x_{ij} + \omega_{ij}$. Así, la función de verosimilitud perturbada viene dada por

$$\mathbb{L}(\beta, b | \omega) = \sum_{i=1}^N \mathbb{L}(\beta, b_i | \omega_i)$$

donde

$$\mathbb{L}(\beta, b_i | \omega_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\phi \left\{ y_{ij} \theta_{ij}^{\omega_{ij}} - b \left(\theta_{ij}^{\omega_{ij}} \right) \right\} + c(y_{ij}; \phi) \right] - \frac{1}{2} b_i^\top \Xi^{-1} b_i.$$

Así, tenemos

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\beta, \omega_i | \omega_i)}{\partial \omega_{ij}^\top} = \phi \left(y_{ij} - \mu_{ij}^{\omega_{ij}} \right) w_{ij}^{1/2} v_{ij}^{-1/2} \beta^\top$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\beta, \omega_i | \omega_{ij})}{\partial \beta \partial \omega_{ij}^\top} = \phi x_{ij} \left\{ -w_{ij}^{\omega_{ij}} + \left(y_{ij} - \mu_{ij}^{\omega_{ij}} \right) m_{ij}^{\omega_{ij}} \right\} \beta^\top + \phi \frac{d b_i^\top}{d \beta} z_{ij} \left\{ -w_{ij}^{\omega_{ij}} + \left(y_{ij} - \mu_{ij}^{\omega_{ij}} \right) m_{ij}^{\omega_{ij}} \right\} \beta^\top.$$

Más aún, para $1 \leq i \leq n$, se obtiene

$$\Delta_i = \frac{\partial \mathcal{L}(\beta, \omega_i | \omega_i)}{\partial \beta \partial \omega_i^\top} = \phi \mathbf{X}_i^\top \left\{ -\mathbf{W}_i + \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i \right\} \left(\mathbf{I}_{ni} \otimes \beta^\top \right) + \phi \frac{\partial b_i^\top}{\partial \beta^\top} \mathbf{Z}_i^\top \left\{ -\mathbf{W}_i + \mathbf{D}_{y_i - \mu_i} \mathbf{M}_i \right\} \left(\mathbf{I}_{ni} \otimes \beta^\top \right).$$

Ahora bien, usando la expresión en (2.B.2), es posible obtener una estructura cerrada para Δ ; y luego para $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N]$.

2.C Curvaturas en R software

Las medidas de influencia local establecidas hasta el momento para MLGM han sido implementados en el programa *R*. Dichos códigos se encuentran disponibles en <https://github.com/sdiagnostics/diagnostico.git>.

```

##Para usar esta función son necesarios los siguientes paquetes ##

require(gamlss)
require(cIRT)

##Descripción
##
##Esta función pretende detectar individuos con peso despropor-
##cional en los valores estimados de los efectos fijos. Esta
##función estará disponible para varias distribuciones de la
##familia exponencial con diferentes funciones de enlace.
##Argumentos
##
## model Un MLGM ajustado mediante la función gamlss() y re(). Por ejemplo, para un modelo de intercepto aleatorio, tenemos
## model<-gamlss(response ~ cov1 + cov2 + cov3 +
## re(random=~1| factor), data= ... , family= ...).
##
```

```

## data      Conjunto de datos usado para ajustar el modelo      ##
##                                                     ##
#####curvatura.mlgm.gamlss=function(model,data){
a<-model
dat<-data
diagi<-function(a){
  if (length(a)==1)
  {
    da<-as.matrix(a)
  }
  else{da<-diag(a)}
  return(da)
}
#####
##Esta función permite extraer la matriz de varianza - covariaza ##
## estimada para el modelo ajustado por medio de la función      ##
##                      gamlss()                                     ##
#####
getSigmab <- function(obj)
{
  vc <- VarCorr(obj)
  suppressWarnings(storage.mode(vc) <- "numeric")
  if (ncol(vc)>2){
    variances<-diag(vc[,"Variance"])[1:length(vc[,"Variance"])-1]
    covariance<-prod(vc[,"StdDev"])[1:length(vc[,"StdDev"])-1])*vc[,"Corr"][,!is.na(vc[,"Corr"])]
    variances[1,2]<-covariance
    variances[2,1]<-variances[1,2]
    covariancematrix<-variances
  } else {
    covariancematrix<-diagi(vc[,"Variance"])[1:length(vc[,"Variance"])-1]
  }
  return(covariancematrix)
}
#####
##Elementos del modelo
Y<-as.matrix(a$y)#Variable respuesta
del<-as.vector(which(is.na(coef(a))))
X<-model.matrix(a)[,-del]##Matriz de diseño
beta<-coef(a)[!is.na(coef(a))]##Efectos fijos
p<-length(beta)##Número de efectos fijos
d<-getSigmab(getSmo(a))##Matriz de varianza-covarianza
q<-ncol(d)##Dimensión efectos aleatorios

```

```

NT<-nrow(Y)##Número total de observaciones
pij<-fitted(a,"mu")## Mu ajustado
##Extracción de los efectos aleatorios predichos del modelo ajustado y construcción de la matriz de diseño Z ####
##if (ncol(ranef(getSmo(a)))>1)
{
  slopeglmm<-names(ranef(getSmo(a)))[2]
  interceptglmm<-names(a$mu.coefSmo[[1]]$coefficients$random)
  zetas<-cbind(rep(1,NT),dat[,colnames(dat)==slopeglmm])
} else {
  interceptglmm<-names(a$mu.coefSmo[[1]]$coefficients$random)
  zetas<-as.matrix(rep(1,NT))
}
dim(zetas)
cluster<-rle(as.vector(dat[,colnames(dat)==interceptglmm]))$lengths
k<-length(cluster)
u<-matrix(unlist(ranef(getSmo(a))),ncol=nrow(d))
u<-lapply(1:k,function(i){u[i,]})

##Función para obtener las observaciones de forma separada para cada individuo ####
##pos<-c(0,cumsum(cluster))
divisor<-function(A){
  if (ncol(A)!=1)
  {
    spt<-function(i,A){B<-A[(pos[i]+1):pos[i+1],]
    B<-as.matrix(B)
    if (ncol(B)==1){B<-t(B)}
    else {B<-B}
    return(as.matrix(B))}
    lis<-lapply(1:k,spt,A=A)
  } else {
    spt<-function(i,A){B<-A[(pos[i]+1):pos[i+1],]
    return(B)}
    lis<-lapply(1:k,spt,A=A)
  }
  return(lis)}
Zi<-divisor(zetas)
Zi<-lapply(Zi, as.matrix)

```

```

Z=direct.sum( Zi )
#####
##Componentes requerido para calcular la curvatura normal      ##
##                           conformal                                ##
#####
##  Poisson con diferentes enlaces                                ##
#####
if(a$family[1]=="PO"){
  phi<-1
  V=diagi( piij )
  D<-diagi(as.vector(Y)-piij)
  if(a$mu.link=="log"){
    W<-V
    M<-diagi(rep(0,length(Y)))
    P<-D%*%M%*%W
  }
  if(a$mu.link=="identity"){
    W<-diagi( piij ^(-1))
    M<-diagi(-piij ^(-2))
    P<-D%*%M%*%W
  }
  if(a$mu.link=="sqrt"){
    W<-4*diagi(rep(1,length(Y)))
    M<-diagi(-2*piij ^(-1))
    P<-D%*%M%*%W
  }
}
#####
##          Bernoulli con enlace canónico.      ##
#####
if(a$family[1]=="BI"){
  D<-diagi(as.vector(Y)-piij)
  phi<-1
  V<-diagi( piij*(1-piij) )
  if(a$mu.link=="logit"){
    {
      W<-V
      M<-diagi(rep(0,length(Y)))
      P<-D%*%M%*%W
    }
}
#####

```

```

##  Gama con diferentes enlaces ##

#####
if(a$family[1]=="GA")
{
  phi<-1/(coef(a,"sigma"))^2
  D<-diagi(as.vector(Y)-pij)
  V<-diagi(pij^2)
  if(a$mu.link=="log")
  {
    W<-diagi(rep(1,length(Y)))
    M<-diagi(-pij^(-1))
    P<-D%*%M%*%W
  }
  if(a$mu.link=="inverse")
  {
    W<-V
    M<-diagi(rep(0,length(Y)))
    P<-D%*%M%*%W
  }
  if(a$mu.link=="identity")
  {
    W<-diagi(pij^(-2))
    M<-diagi(-2*pij^(-3))
    P<-D%*%M%*%W
  }
}
#####Matriz Lambda
lambda=t(Z)%*%P%*%Z-as.double((d^(-1)))*diag(ncol(Z))
#####Hessiana para efectos fijos
Lbetabeta=phi*t(X)%*%P%*%Z%*%P^(-1)-phi*Z%*%solve(lambda)%*%t(Z)%*%P%*%X
#####Esquema 1 de perturbacion: Ponderacion de casos
yu<-divisor(Y-pij)
yu<-lapply(yu, as.matrix)
DD=direct.sum(yu)
Delta=phi*t(X)%*%W^(1/2)%*%A^(-1/2)%*%DD
-phi*t(X)%*%P%*%Z%*%solve(lambda)%*%t(Z)%*%
W^(1/2)%*%A^(-1/2)%*%DD
#####
#####CURVATURA Cook
Cdbeta=diag(t(Delta)%*%solve(Lbetabeta)%*%Delta)
Cdbeta
#####
#####CURVATURA Poon Poon
num=t(Delta)%*%solve(Lbetabeta)%*%Delta
Bdbeta=diag(num/sqrt(sum(diag(num%*%num))))

```

```

Bdbeta
#####
#Grafico para deteccion de individuos
#if(!(missing(type))){
  #if(type=="subjects"){
    par(mfrow=c(1,1))
    par(mar = c(5.1, 5.1, 4.1, 2.1))
    plot(1:k, Bdbeta, ylab=expression(B[i](beta)), xlab="Individuos",
          ylim=c(min(Bdbeta)-0.000001,1),
          cex=.60, cex.lab=1, cex.axis=0.8, cex.main=1.2, main="", pch=19 )
    #abline(cuttoflogconf,0, lty=2)
    identify(1:k, as.vector(ILTOTALconf), n=7, cex=0.7)
  }
  #
  #
}

```

Capítulo 3.

Un resultado de continuación única para un sistema bidimensional de ecuaciones no lineales para ondas superficiales

Resumen

Esta investigación establece un resultado de continuación única para un sistema no lineal bidimensional especial que modela la evolución de ondas de agua largas con pequeña amplitud en presencia de tensión superficial. Justo, se muestra que si $(\eta, \Phi) = (\eta(x, y, t), \Phi(x, y, t))$ es una solución del sistema no lineal, en un espacio funcional adecuado, y (η, Φ) se anula en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2 \times [-T, T]$, entonces $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de Ω . Para establecer dicha propiedad, se recurre a una estimación de tipo Carleman para un operador diferencial \mathcal{L} relacionado con el sistema. De esa manera, se prueba la estimación de Carleman mediante el uso de una versión particular de la conocida desigualdad de Treves.

3.1 Introducción

Esta investigación se centra la atención en el siguiente sistema bidimensional

$$\begin{cases} \eta_t + \Delta\phi - \frac{\mu}{6}\Delta^2\phi + \epsilon\nabla \cdot (\eta\nabla\phi) = 0, \\ \phi_t + \eta - \mu(\sigma - \frac{1}{2})\Delta\eta + \frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi|^2 = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

que describe la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud en presencia de tensión superficial (ver Quintero (2010)). En este modelo, ϵ es el parámetro de amplitud (coeficiente de no linealidad), μ es el parámetro de onda larga (coeficiente de dispersión), σ es el inverso del número de Bond (está asociado con la tensión superficial) y las funciones $\eta = \eta(x, y, t)$ y $\phi = \phi(x, y, t)$ denotan la elevación de la onda y la velocidad potencial en el fondo $z = 0$, respectivamente.

Como es usual, en los modelos de ondas de agua, existe una estructura de tipo Hamiltoniana que es fundamental para determinar el espacio adecuado para soluciones especiales (ondas solitarias por ejemplo), además proporciona información relevante para el estudio del problema de Cauchy. Para el sistema (3.1.1), el funcional Hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ se define como

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\eta^2 + \mu \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) |\nabla\eta|^2 + \epsilon |\nabla\phi|^2 + \frac{\mu}{6} |\Delta\phi|^2 + \epsilon\eta |\nabla\phi|^2 \right) dx dy,$$

y la estructura de tipo Hamiltoniana está dada por

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \phi_t \end{pmatrix} = \mathcal{J} \mathcal{H}' \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos directamente que el funcional \mathcal{H} está bien definido para $\eta, \nabla\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para t en algún intervalo. Estas condiciones caracterizan el espacio natural para el estudio de soluciones del sistema (3.1.1). Al respecto, Quintero (2010) mostró para el modelo (3.1.1) la existencia de soluciones de ondas solitarias que se propagan con velocidad de onda $\theta > 0$,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\epsilon} u \left(\frac{x - \theta t}{\sqrt{\mu}}, \frac{y}{\sqrt{\mu}} \right), \quad \phi(x, y, t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\epsilon} v \left(\frac{x - \theta t}{\sqrt{\mu}}, \frac{y}{\sqrt{\mu}} \right), \quad (3.1.2)$$

en el espacio de energía $H^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$, donde $H^1(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev usual

de orden 1, el espacio $\mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$ se define por la norma dada

$$\begin{aligned}\|w\|_{\mathcal{V}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla w|^2 + |\Delta w|^2 \right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(w_x^2 + w_y^2 + w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2 \right) dx dy.\end{aligned}$$

En el artículo Quintero (2011), se demostró el buen planteamiento del problema de Cauchy asociado con el sistema (3.1.1) en el espacio tipo Sobolev

$$(H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2)) \cap (H^{s-2}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s-1}(\mathbb{R}^2)), \quad s > 1,$$

donde $H^s(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev usual de orden s , definido como la completación de la clase de Schwartz con respecto a la norma

$$\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + |\xi|^2 \right)^s |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

y $\mathcal{V}^s(\mathbb{R}^2)$ denota la completación de la clase de Schwartz con respecto a la norma

$$\|w\|_{\mathcal{V}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + |\xi|^2 \right)^s |\xi|^2 |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi,$$

donde \widehat{w} es la transformada de Fourier de w definida sobre \mathbb{R}^2 por

$$\widehat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} w(x) dx.$$

En concreto, J. R. Quintero demostró el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sea $s > 1$. Si $(\eta_0, \phi_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $T_0 > 0$, que depende de $\|(\eta_0, \phi_0)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2)}$, y existe una única solución $(\eta, \phi) \in C([0, T_0] : H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, T_0] : H^{s-2}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ del problema de Cauchy asociado con el sistema tipo Boussinesq (3.1.1).

Además, para todo $0 < T_0 < T$ existe una vecindad \mathbb{V} de (η_0, ϕ_0) en $H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2)$, tal que la aplicación dato-solución es Lipschitz de \mathbb{V} en la clase $C([0, T_0] : H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{V}^{s+2}(\mathbb{R}^2))$.

La presente investigación demostrará un resultado de continuación única para el sistema (3.1.1). En particular, que si

$$(\eta, \phi) = (\eta(x, y, t), \phi(x, y, t))$$

es una solución del sistema (3.1.1) en un espacio de funciones adecuado, tal que

$$\eta \in L^2 \left([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \right), \quad \phi \in L^2 \left([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2) \right),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2 \left([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \right),$$

y $(\eta, \phi) \equiv 0$ en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2 \times [-T, T]$, entonces $(\eta, \phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de Ω . La componente horizontal Ω_1 de un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ es el conjunto definido por

$$\Omega_1 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [-T, T] : \exists (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1, t) \in \Omega\}.$$

La propiedad de continuación única ha sido ampliamente estudiada en las últimas décadas. Un trabajo importante del tema fue realizado por Saut and Scheurer (1987); ellos probaron un resultado de continuación única para una clase general de ecuaciones dispersivas, en la cual está incluida la ecuación KdV,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

y varias de sus generalizaciones. De manera similar, Shang (2007) mostró en un resultado de continuación única para la ecuación de onda larga regularizada simétrica,

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{1}{2} \left(u^2 \right)_{xt} - u_{xxtt} = 0.$$

En las ecuaciones anteriores se establece un estimativo de Carleman para demostrar que si una solución u es idéntica a cero en un subconjunto abierto Ω , entonces $u \equiv 0$ en la componente horizontal de Ω .

Utilizando la transformada de dispersión inversa y algunos resultados de la teoría de funciones de Hardy, Zhang (1992) demostró que si u es una solución de la ecuación KdV, entonces no puede tener soporte compacto en dos momentos diferentes, a menos que sea idéntica a cero. En el trabajo Bourgain (1997), se introdujo un enfoque diferente y se probó que si una solución u de la ecuación KdV tiene soporte compacto en un intervalo de tiempo no trivial $I = [t_1, t_2]$, entonces $u \equiv 0$. Su argumento se basa en una continuación analítica de la transformada de Fourier a través del Teorema de Paley-Wiener y la relación de dispersión de la parte lineal de la ecuación. También se aplica a modelos no lineales dispersivos de orden superior y a dimensiones espaciales superiores; en particular, Panthee (2005) demostró que si u es una solución suave de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP),

$$u_t + u_{xxx} + uu_x + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

tal que, para algún $B > 0$,

$$\text{supp } u(t) \subset [-B, B] \times [-B, B], \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

entonces $u \equiv 0$.

Hace poco, Kenig et al. (2002) propusieron un nuevo método y demostraron que si una solución suficientemente suave u para una ecuación KdV generalizada tiene soporte en una semirrecta en dos instantes de tiempo diferentes, entonces $u \equiv 0$. Además, Escauriaza et al. (2007) establecieron propiedades de unicidad de soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries k -generalizada,

$$u_t + u^k u_x + u_{xxx} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.1.3)$$

Ellos obtuvieron condiciones suficientes acerca del comportamiento de la diferencia $u_1 - u_2$ de dos soluciones u_1, u_2 del modelo (3.1.3) en dos tiempos diferentes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ que garantizan que $u_1 \equiv u_2$. Este tipo de unicidad se deduce desde el supuesto de que las soluciones coinciden en un subdominio de \mathbb{R} en dos tiempos diferentes. De manera similar, Bustamante et al. (2011) demostraron que si u es una solución suave de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov,

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0,$$

tal que, para algún $B > 0$,

$$\text{supp } u(t_2), \text{supp } u(t_1) \subset [-B, B] \times [-B, B],$$

entonces $u \equiv 0$. Además, en el artículo Bustamante et al. (2013) se demostró que si la diferencia de dos soluciones suficientemente suaves de la ecuación Zakharov-Kuznetsov decae como $e^{-a(x^2+y^2)^{3/4}}$ en dos tiempos diferentes, para algún $a > 0$ suficientemente grande, entonces estas soluciones coinciden. Otros resultados de continuación única se pueden ver por ejemplo en Carvajal and Panthee (2005), Carvajal and Panthee (2006), Jr. (2003), Iorio (2003), Kenig et al. (2003).

Siguiendo los trabajos de Saut and Scheurer (1987), primero se establecerá un estimativo tipo Carleman apropiado para el operador lineal \mathcal{L} , asociado al sistema (3.1.1). Para ello, se utiliza una versión particular de la conocida desigualdad de Treves. Luego, para demostrar el resultado de continuación única, se probará que si u es una solución de $\mathcal{L}u = 0$ y $u \equiv 0$ en una bola en el espacio xyt , que pasa por el origen, entonces $u \equiv 0$ en un entorno del origen. Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera. En la Sección 3.2, usando una versión particular de la desigualdad de Treves, se establece un estimativo de Carleman el operador diferencial \mathcal{L} que está estrechamente

relacionado con el problema planteado. En la Sección 3.3, primero se dan algunos resultados técnicos útiles. Luego, se muestra el resultado de continuación única para el sistema (3.1.1).

3.2 Un estimativo tipo Carleman

En esta sección se usará la notación $D = (\partial_x, \partial_y, \partial_t)$. Si $P = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ es un polinomio en tres variables, tiene coeficientes constantes y grado m , entonces se considera el operador diferencial de orden m asociado a P ,

$$P(D) = P(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

donde $D^\alpha = \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_t^{\alpha_3}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Por definición

$$P^{(\beta)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \partial_{\xi_2}^{\beta_2} \partial_{\xi_3}^{\beta_3} P(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3.$$

Usando una versión particular de la desigualdad de Treves, se establece una estimación de Carleman para el operador diferencial \mathcal{L} , definido como

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} P_1(\partial_x, \partial_y, \partial_t) + (f_1, f_2) \cdot \nabla & P_2(\partial_x, \partial_y, \partial_t) + f_3 \Delta \\ P_3(\partial_x, \partial_y, \partial_t) & P_4(\partial_x, \partial_y, \partial_t) + (f_4, f_5) \cdot \nabla \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

donde $f_j = f_j(x, y, t)$, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$, los operadores P_j , $j = 1, 2, 3, 4$ están definidos por

$$P_1(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = P_4(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = \partial_t$$

y

$$P_2(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = -a\Delta^2, \quad P_3(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = I - b\Delta.$$

Teorema 3.2. (Desigualdad de Treves). Sea $P(D) = P(\partial_x, \partial_y, \partial_t)$ un operador diferencial de orden m con coeficientes constantes. Entonces para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ y $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{2^{2|\alpha|}\xi^{2\alpha}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |P^{(\alpha)}(D)\psi|^2 e^{\psi((x,y,t),\xi)} dx dy dt \\ \leq C(m, \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} |P(D)\psi|^2 e^{\psi((x,y,t),\xi)} dx dy dt, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

donde

$$\psi((x, y, t), \xi) = x^2\xi_1^2 + y^2\xi_2^2 + t^2\xi_3^2, \quad \xi^{2\alpha} = \xi_1^{2\alpha_1} \xi_2^{2\alpha_2} \xi_3^{2\alpha_3},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!,$$

$$C(m, \alpha) = \begin{cases} \sup_{|r+\alpha| \leq m} \binom{r+\alpha}{\alpha}, & \text{si } |\alpha| \leq m, \\ 0, & \text{si } |\alpha| > m. \end{cases}$$

*Demuestra*cción. Ver Teorema 2.4 en Treves (1966). \square

Corolario 3.1. Sea $P(D) = P(\partial_x, \partial_y, \partial_t)$ un operador diferencial de orden m con coeficientes constantes. Entonces para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, $\delta > 0$, $\tau > 0$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ and $\psi(x, y, t) = (x - \delta)^2 + (y - \delta)^2 + \delta^2 t^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{2^{2|\alpha|}\tau^{|\alpha|}\delta^{2\alpha_3}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |P^{(\alpha)}(D)\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ \leq C(m, \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} |P(D)\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

con

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!,$$

$$C(m, \alpha) = \begin{cases} \sup_{|r+\alpha| \leq m} \binom{r+\alpha}{\alpha}, & \text{si } |\alpha| \leq m, \\ 0, & \text{si } |\alpha| > m. \end{cases}$$

*Demuestra*cción. Se usa el teorema anterior con el operador diferencial

$$Q(D) = P(D + a) = P(\partial_x + 2\tau\delta, \partial_y + 2\tau\delta, \partial_t),$$

donde

$$\tau > 0, \quad a = (2\tau\delta, 2\tau\delta, 0), \quad z = (x, y, t), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\sqrt{2\tau}, \sqrt{2\tau}, \sqrt{2\tau}\delta).$$

Entonces, usando la desigualdad (3.2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2|\alpha|}\xi^{2\alpha}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |P^{(\alpha)}(D+a)\psi|^2 e^{\psi(z,\xi)} dx dy dt \\ &= \frac{2^{2|\alpha|}\tau^{|\alpha|}\delta^{2\alpha_3}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |P^{(\alpha)}(D+a)\psi|^2 e^{2\tau(x^2+y^2+\delta^2 t^2)} dx dy dt \\ &\leq C(m, \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} |P(D+a)\psi|^2 e^{2\tau(x^2+y^2+\delta^2 t^2)} dx dy dt \end{aligned}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ y cualquier $\tau > 0$. Ahora multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $e^{4\tau\delta^2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2|\alpha|}\tau^{|\alpha|}\delta^{2\alpha_3}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |e^{2\tau\delta(x+y)} P^{(\alpha)}(D+a)\psi|^2 e^{2\tau\psi(x,y,t)} dx dy dt \\ &\leq C(m, \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} |e^{2\tau\delta(x+y)} P(D+a)\psi|^2 e^{2\tau\psi(x,y,t)} dx dy dt. \end{aligned}$$

En particular, se puede escoger $\psi = \tilde{\psi} e^{-2\tau\delta(x+y)}$, donde $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Observando que

$$P^{(\alpha)}(D)(\tilde{\psi}) = e^{2\tau\delta(x+y)} P^{(\alpha)}(D+a)(\tilde{\psi} e^{-2\tau\delta(x+y)})$$

y también que

$$P(D)(\tilde{\psi}) = e^{2\tau\delta(x+y)} P(D+a)(\tilde{\psi} e^{-2\tau\delta(x+y)})$$

resulta

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2|\alpha|}\tau^{|\alpha|}\delta^{2\alpha_3}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^3} |P^{(\alpha)}(D)\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C(m, \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} |P(D)\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned}$$

□

Enseguida se presenta el estimativo deseado para el operador diferencial \mathcal{L} .

Teorema 3.3. Sea \mathcal{L} el operador diferencial definido en (3.2.1), donde las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si se considera

$$B_\delta := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 < \delta^2\},$$

$$\psi(x, y, t) = (x - \delta)^2 + (y - \delta)^2 + \delta^2 t^2, \quad \delta > 0,$$

entonces existe una constante $C > 0$, tal que la desigualdad

$$\begin{aligned}
 & \tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau b^2 \int_{B_\delta} |\nabla \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\nabla \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2 \Psi_2 + 4\partial_y^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2 \Psi_2 + 4\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L} \Psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

se satisface para todo $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$ y cualquier $\tau > 0$ con

$$\begin{aligned}
 \frac{4(\|f_4\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_5\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau^3 a^2} & \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{4\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256\tau^2 a^2} \leq \frac{1}{8}, \\
 \frac{4(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau b^2} & \leq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$. Se considera el polinomio

$$P_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -a(\xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4),$$

y

$$P_2(D) = P_2(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = -a\Delta^2$$

el operador diferencial asociado a P_2 . Luego, si $\alpha = (4, 0, 0)$ se tiene que

$$P_2^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P_2^{(4,0,0)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -24a, \quad P_2^{(\alpha)}(D)\Psi_2 = -24a\Psi_2$$

y

$$C(4, (4, 0, 0)) = \sup_{|r+\alpha| \leq 4} \binom{r+\alpha}{\alpha} = 1.$$

Luego, al usar el Corolario 3.1,

$$\begin{aligned}
 \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq (24) 2^8 \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 &= \frac{2^{2|\alpha|} \tau^{|\alpha|} \delta^{2\alpha_3}}{\alpha!} \int_{B_\delta} |P_2^{(\alpha)}(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt.
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Similar,

$$P_2^{(3,0,0)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -24a\xi_1, \quad P_2^{(3,0,0)}(D) \psi_2 = -24a\partial_x \psi_2, \quad C(4, (3, 0, 0)) = 4.$$

Por consiguiente, al usar nuevamente el Corolario 3.1, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\partial_x \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq \frac{2^6 \tau^3}{24} \int_{B_\delta} |P_2^{(3,0,0)}(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt.
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De forma semejante

$$P_2^{(0,3,0)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -24a\xi_2, \quad P_2^{(0,3,0)}(D) \psi_2 = -24a\partial_y \psi_2, \quad C(4, (0, 3, 0)) = 4.$$

Por consiguiente, al usar nuevamente el Corolario 3.1, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\partial_y \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq \frac{2^6 \tau^3}{24} \int_{B_\delta} |P_2^{(0,3,0)}(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 &\leq \int_{B_\delta} |P_2(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt.
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

De similar forma,

$$P_2^{(2,0,0)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -a(12\xi_1^2 + 4\xi_2^2), \quad P_2^{(2,0,0)}(D) \psi_2 = -a(12\partial_x^2 \psi_2 + 4\partial_y^2 \psi_2),$$

$$C(4, (2, 0, 0)) = 6.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2 \psi_2 + 4\partial_y^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 \leq \frac{2^4 \tau^2}{12} \int_{B_\delta} |P_2^{(2,0,0)}(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 \leq \int_{B_\delta} |P_2(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

También en

$$P_2^{(0,2,0)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -a(12\xi_2^2 + 4\xi_1^2), \quad P_2^{(0,2,0)}(D) \psi_2 = -a(12\partial_y^2 \psi_2 + 4\partial_x^2 \psi_2),$$

$$C(4, (0, 2, 0)) = 6.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2 \psi_2 + 4\partial_x^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 \leq \frac{2^4 \tau^2}{12} \int_{B_\delta} |P_2^{(0,2,0)}(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 \leq \int_{B_\delta} |P_2(D) \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \tag{3.2.9}
 \end{aligned}$$

Ahora, al definir

$$P_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1 - b(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad P_3(D) = I - b\Delta,$$

se tiene que

$$P_3^{(2,0,0)}(\xi_1, \xi_2) = -2b, \quad P_3^{(2,0,0)}(D) \psi_1 = -2b \psi_1, \quad C(2, (2, 0, 0)) = 1,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
 \tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq \frac{2^4 \tau^2}{2} \int_{B_\delta} |P_3^{(2,0,0)}(D) \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 &\leq \int_{B_\delta} |P_3(D) \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \tag{3.2.10}
 \end{aligned}$$

Por analogía se tiene que

$$P_3^{(1,0,0)}(D)\psi_1 = -2b\partial_x\psi_1, \quad C(2, (1, 0, 0)) = 2,$$

y además

$$\begin{aligned} \tau b^2 \int_{B_\delta} |\partial_x \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq \frac{2^2 \tau}{2} \int_{B_\delta} |P_3^{(1,0,0)}(D)\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_3(D)\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Igual, se obtiene que

$$P_3^{(0,1,0)}(D)\psi_1 = -2b\partial_y\psi_1, \quad C(2, (0, 1, 0)) = 2,$$

y también

$$\begin{aligned} \tau b^2 \int_{B_\delta} |\partial_y \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt &\leq \frac{2^2 \tau}{2} \int_{B_\delta} |P_3^{(0,1,0)}(D)\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq \int_{B_\delta} |P_3(D)\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

De las desigualdades (3.2.5)-(3.2.12) se nota que existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau b^2 \int_{B_\delta} |\nabla \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &+ \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\nabla \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &+ \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2 \psi_2 + 4\partial_y^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &+ \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2 \psi_2 + 4\partial_x^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C \int_{B_\delta} (|P_2(D)\psi_2|^2 + |P_3(D)\psi_1|^2) e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Ahora, se aprecia que si $\mathcal{L}_2 = P_2(D) + f_3(x, y, t)\Delta$ entonces $P_2(D)\psi_2 = \mathcal{L}_2\psi_2$

$-f_3(x, y, t)\Delta\psi_2$. Por consiguiente, de las desigualdades (3.2.6)-(3.2.7) se logra

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_\delta} |(f_4(x, y, t), f_5(x, y, t)) \cdot \nabla \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq 2(\|f_4\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_5\|_{L^\infty(B_\delta)}^2) \int_{B_\delta} |\nabla \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{4(\|f_4\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_5\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau^3 a^2} \int_{B_\delta} |P_2(D)\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{4(\|f_4\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_5\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau^3 a^2} \int_{B_\delta} (|\mathcal{L}_2 \psi_2|^2 + |f_3 \Delta \psi_2|^2) e^{2\tau\psi} dx dy dt. \quad (3.2.14)
 \end{aligned}$$

Además, de las desigualdades (3.2.8)-(3.2.9),

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\delta} |f_3(x, y, t)\Delta\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt & \leq \|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 \int_{B_\delta} |\Delta\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & = \frac{\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256} \int_{B_\delta} |16\Delta\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & = \frac{\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256} \int_{B_\delta} |(4\partial_x^2 \psi_2 + 12\partial_y^2 \psi_2) + (4\partial_y^2 \psi_2 + 12\partial_x^2 \psi_2)|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{2\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256} \left(\int_{B_\delta} |4\partial_x^2 \psi_2 + 12\partial_y^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{B_\delta} |4\partial_y^2 \psi_2 + 12\partial_x^2 \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \right) \\
 & \leq \frac{4\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256\tau^2 a^2} \int_{B_\delta} |P_2(D)\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{4\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256\tau^2 a^2} \int_{B_\delta} (|\mathcal{L}_2 \psi_2|^2 + |f_3 \Delta \psi_2|^2) e^{2\tau\psi} dx dy dt. \quad (3.2.15)
 \end{aligned}$$

De forma similar, si $\mathcal{L}_3 = I - b\Delta = P_3(D)$, entonces $P_3(D)\psi_1 = \mathcal{L}_3\psi_1$. Luego, al usar

las desigualdades (3.2.11)-(3.2.12) se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_\delta} |(f_1(x, y, t), f_2(x, y, t)) \cdot \nabla \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq 2(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2) \int_{B_\delta} (|\partial_x \psi_1|^2 + |\partial_y \psi_1|^2) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & = 2(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2) \int_{B_\delta} |\nabla \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{4(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau b^2} \int_{B_\delta} |P_3(D) \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & = \frac{4(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau b^2} \int_{B_\delta} |\mathcal{L}_3 \psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \tag{3.2.16}
 \end{aligned}$$

Ahora, si se elige $\tau > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{4(\|f_4\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_5\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau^3 a^2} & \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{4\|f_3\|_{L^\infty(B_\delta)}^2}{256\tau^2 a^2} \leq \frac{1}{8}, \\
 \frac{4(\|f_1\|_{L^\infty(B_\delta)}^2 + \|f_2\|_{L^\infty(B_\delta)}^2)}{\tau b^2} & \leq \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

entonces de las desigualdades (3.2.14)-(3.2.16) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_\delta} \left(|(f_1, f_2) \cdot \nabla \psi_1|^2 + |f_3 \Delta \psi_2|^2 + |(f_4, f_5) \cdot \nabla \psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2 \psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3 \psi_1|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{B_\delta} |f_3 \Delta \psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt,
 \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_\delta} \left(|(f_1, f_2) \cdot \nabla \psi_1|^2 + |f_3 \Delta \psi_2|^2 + |(f_4, f_5) \cdot \nabla \psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_1 \psi_1|^2 + |\mathcal{L}_2 \psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3 \psi_1|^2 + |\mathcal{L}_4 \psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & = \int_{B_\delta} |\mathcal{L} \psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt,
 \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}_1 = \partial_t + (f_1, f_2) \cdot \nabla, \quad \mathcal{L}_4 = \partial_t + (f_4, f_5) \cdot \nabla$$

y

$$|\mathcal{L}\Psi| = \left(|\mathcal{L}_1\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 + |\mathcal{L}_4\Psi_2|^2 \right)^{1/2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \int_{B_\delta} \left(|P_2(D)\Psi_1|^2 + |P_3(D)\Psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \leq 2 \int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}_2\Psi_2|^2 + |f_3\Delta\Psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt + \int_{B_\delta} |\mathcal{L}_3\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \leq 2 \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \quad + 2 \int_{B_\delta} \left((f_1, f_2) \cdot \nabla\Psi_1|^2 + |f_3\Delta\Psi_2|^2 + (f_4, f_5) \cdot \nabla\Psi_2|^2 \right) e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \leq 4 \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned}$$

Por tanto, de la desigualdad (3.2.13) y la desigualdad anterior se obtiene el estimativo tipo Carleman (3.2.4). \square

Observación 3.1. El estimativo tipo Carleman (3.2.4) es invariante bajo cambios de signo en las componentes del operador diferencial \mathcal{L} .

Corolario 3.2. Sea $T > 0$. Si además de la hipótesis del Teorema 3.3 se tiene que

$$\eta \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))$$

y el soporte de η y el soporte de ϕ son conjuntos compactos contenidos en B_δ , entonces, la desigualdad (3.2.4) se cumple si se reemplaza $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ por $U = (\eta, \phi)$. Es decir,

$$\begin{aligned} & \tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\eta|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau b^2 \int_{B_\delta} |\nabla\eta|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \quad + \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\phi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\nabla\phi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \quad + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2\phi + 4\partial_y^2\phi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \quad + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2\phi + 4\partial_x^2\phi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}U|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Demostración. Sea $\{\rho_\alpha\}_{\alpha>0}$ una sucesión regularizante (en las variables x, y, t) y se considera

$$U_\alpha = (\rho_\alpha * \eta, \rho_\alpha * \Phi),$$

donde $*$ denota la convolución usual de funciones. Entonces $U_\alpha \in C_0^\infty(B_\delta) \times C_0^\infty(B_\delta)$ y la desigualdad (3.2.4) se verifica para U_α , esto es,

$$\begin{aligned} & \tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\rho_\alpha * \eta|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau b^2 \int_{B_\delta} |\nabla(\rho_\alpha * \eta)|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & + \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\rho_\alpha * \Phi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\nabla(\rho_\alpha * \Phi)|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2(\rho_\alpha * \Phi) + 4\partial_y^2(\rho_\alpha * \Phi)|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2(\rho_\alpha * \Phi) + 4\partial_x^2(\rho_\alpha * \Phi)|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ & \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}U_\alpha|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Ahora, para $n = 0, 1$ y $m = 0, 1, 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^n(\rho_\alpha * \eta) e^{\tau\psi} - \partial_x^n \eta e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} &= \|(\rho_\alpha * \partial_x^n \eta) e^{\tau\psi} - \partial_x^n \eta e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \\ &\leq C \|\partial_x^n(\rho_\alpha * \eta) - \partial_x^n \eta\|_{L^2(B_\delta)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\|\partial_y^n(\rho_\alpha * \eta) e^{\tau\psi} - \partial_y^n \eta e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \leq C \|\partial_y^n(\rho_\alpha * \eta) - \partial_y^n \eta\|_{L^2(B_\delta)} \rightarrow 0,$$

y además

$$\|\partial_x^m(\rho_\alpha * \Phi) e^{\tau\psi} - \partial_x^m \Phi e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \leq C \|\partial_x^m(\rho_\alpha * \Phi) - \partial_x^m \Phi\|_{L^2(B_\delta)} \rightarrow 0,$$

$$\|\partial_y^m(\rho_\alpha * \Phi) e^{\tau\psi} - \partial_y^m \Phi e^{\tau\psi}\|_{L^2(B_\delta)} \leq C \|\partial_y^m(\rho_\alpha * \Phi) - \partial_y^m \Phi\|_{L^2(B_\delta)} \rightarrow 0,$$

cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, donde C es una constante positiva que depende únicamente de τ y δ . De forma similar se obtiene que

$$\int_{B_\delta} \left(|\mathcal{L}U_\alpha|^2 e^{2\tau\psi} - |\mathcal{L}U|^2 e^{2\tau\psi} \right) dx dy dt \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+.$$

Por lo tanto, pasando al límite en (3.2.18) se logra el estimativo (3.2.17). \square

3.3 Continuación única

En esta sección se probará el resultado de continuación única para el sistema (3.1.1). Antes, se establecerán los siguientes resultados auxiliares.

Lema 3.1. Sean $T > 0$ y $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \phi)$ con

$$\eta \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))$$

una solución de $\mathcal{L}U = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times (-T, T)$ donde \mathcal{L} es el operador diferencial definido en (3.2.1). Sea

$$V = \begin{cases} U & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Si $V \equiv 0$ en la región $\{(x, y, t) : x < t, y < t\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$, entonces existe un entorno \mathcal{O}_1 de $(0, 0, 0)$ (en el espacio xyt), tal que $V \equiv 0$ en \mathcal{O}_1 .

*Demuestra*ión. Por hipótesis existe $0 < \delta < 1$, tal que $V \equiv 0$ en $R_\delta = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{(x, y, t) : x < t, y < t\} \cap B_\delta, \quad R_2 = \{(x, y, t) : t < 0\} \cap B_\delta,$$

$$B_\delta = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 + t^2 < \delta^2\}.$$

A continuación, se considera $\chi \in C_0^\infty(B_\delta)$, tal que $\chi = 1$ en un entorno \mathcal{O} de $(0, 0, 0)$ y definamos

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) = \chi V.$$

Entonces se tiene que

$$\psi_1 \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \psi_2 \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\partial_t \psi_1, \partial_t \psi_2 \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)),$$

y también que

$$\text{supp } \psi \subset B_\delta.$$

Por definición de χ , se observa que $\mathcal{L}\psi = 0$ en \mathcal{O} . Luego, al usar el corolario anterior, se

tiene para $\psi(x, y, t) = (x - \delta)^2 + (y - \delta)^2 + \delta^2 t^2$ y $\tau > 0$ suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
 & \tau^2 b^2 \int_{B_\delta} |\Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau b^2 \int_{B_\delta} |\nabla \Psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^4 a^2 \int_{B_\delta} |\Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt + \tau^3 a^2 \int_{B_\delta} |\nabla \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_x^2 \Psi_2 + 4\partial_y^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & + \tau^2 a^2 \int_{B_\delta} |12\partial_y^2 \Psi_2 + 4\partial_x^2 \Psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\
 & \leq C \int_{B_\delta} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt = C \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\Psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt. \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

Ahora, al usar de nuevo la definición de χ y el hecho de que $V \equiv 0$ en R_δ , se obtiene que

$$\text{supp } \Psi \subset D, \quad \text{supp } \mathcal{L}\Psi \subset D \cap (B_\delta \setminus \mathcal{O}),$$

$$D = \{(x, y, t) : 0 \leq t \leq x, y < \delta < 1\}.$$

De esto se deduce que si $(x, y, t) \neq (0, 0, 0)$ y $(x, y, t) \in D$, entonces

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y, t) &= (x - \delta)^2 + (y - \delta)^2 + \delta^2 t^2 \\
 &\leq (t - \delta)^2 + \delta^2 t^2 \\
 &= t^2(2 + \delta^2) - 4t\delta + \delta^2 < 2\delta^2.
 \end{aligned}$$

Así, existe $0 < \epsilon < \delta^2$, tal que

$$\psi(x, y, t) \leq 2\delta^2 - \epsilon, \quad (x, y, t) \in D \cap (B_\delta \setminus \mathcal{O}).$$

Además, dado que $\psi(0, 0, 0) = 2\delta^2$, se puede escoger un entorno \mathcal{O}_1 de $(0, 0, 0)$ contenido en \mathcal{O} , tal que

$$\psi(x, y, t) > 2\delta^2 - \epsilon, \quad (x, y, t) \in \mathcal{O}_1.$$

De la construcción anterior y la desigualdad (3.3.1), tenemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \tau^2 e^{2\tau(\delta^2 - \epsilon)} \int_{\mathcal{O}_1} |\psi_1|^2 dx dy dt &\leq \tau^2 \int_{\mathcal{O}_1} |\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq \tau^2 \int_{B_\delta} |\psi_1|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C_1 \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C_1 e^{2\tau(\delta^2 - \epsilon)} \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 dx dy dt, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \tau^4 e^{2\tau(\delta^2 - \epsilon)} \int_{\mathcal{O}_1} |\psi_2|^2 dx dy dt &\leq \tau^4 \int_{\mathcal{O}_1} |\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq \tau^4 \int_{B_\delta} |\psi_2|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C_1 \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 e^{2\tau\psi} dx dy dt \\ &\leq C_1 e^{2\tau(\delta^2 - \epsilon)} \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 dx dy dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{O}_1} |\psi_1|^2 dx dy dt \leq \frac{C_1}{\tau^2} \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 dx dy dt$$

y

$$\int_{\mathcal{O}_1} |\psi_2|^2 dx dy dt \leq \frac{C_1}{\tau^4} \int_{B_\delta \setminus \mathcal{O}} |\mathcal{L}\psi|^2 dx dy dt.$$

En consecuencia, pasando al límite cuando $\tau \rightarrow +\infty$, se tiene que $\psi \equiv 0$ en \mathcal{O}_1 . Dado que $V = \psi$ en \mathcal{O} y $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, se obtiene que $V \equiv 0$ en \mathcal{O}_1 . \square

Usando un argumento similar, es posible demostrar el siguiente resultado.

Lema 3.2. Sean $T > 0$ y $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \phi)$ con

$$\eta \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))$$

una solución de $\mathcal{L}U = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times (-T, T)$, donde \mathcal{L} es el operador diferencial definido en

(3.2.1). Sea

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ U & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Si se supone que $V \equiv 0$ en la región $\{(x, y, t) : x < -t, y < -t\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$, entonces existe un entorno \mathcal{O}_2 de $(0, 0, 0)$ (en el espacio xyt), tal que $V \equiv 0$ en \mathcal{O}_2 .

Al usar los lemas anteriores se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3. Sean $T > 0$ y $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))$. Sea $U = (\eta, \phi)$ con

$$\eta \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))$$

una solución en $\mathbb{R}^2 \times (-T, T)$ del sistema

$$\begin{cases} \eta_t - a\Delta^2\phi + (F_1(x, y, t), F_2(x, y, t)) \cdot \nabla\eta + F_3(x, y, t)\Delta\phi = 0, \\ \phi_t + \eta - b\Delta\eta + (F_4(x, y, t), F_5(x, y, t)) \cdot \nabla\phi = 0. \end{cases}$$

Sea γ una esfera que pasa por el origen $(0, 0, 0)$. Si se supone que $U \equiv 0$ en el interior de γ en un entorno de $(0, 0, 0)$, entonces, existe un entorno de $(0, 0, 0)$ donde $U \equiv 0$.

Demuestra. Si se supone que la esfera (o una parte de ella) γ está dada por $(x, y) = (g_1(t), g_2(t))$, entonces, al usar la hipótesis se tiene que $U \equiv 0$ en la región $\{(x, y, t) : x < g_1(t), y < g_2(t)\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$. Luego, existen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tales que $U \equiv 0$ en un entorno de $(0, 0, 0)$ interceptado con la región $\{(x, y, t) : x < h_1(t), y < h_2(t)\}$, donde

$$h_j(t) = \begin{cases} \omega_j t & \text{si } t \geq 0, \quad j = 1, 2 \\ -\frac{1}{\omega_j} t & \text{si } t < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Ahora, se considera el siguiente cambio de variable $(x, y, t) \rightarrow (X, Y, T)$ con

$$X = x - h_1(t) + |t|$$

$$Y = y - h_2(t) + |t|$$

$$T = t.$$

Al notar que en las nuevas variables, si $T \geq 0$, entonces la función

$$U = U(X, Y, T) = (\eta(X, Y, T), \phi(X, Y, T))$$

es una solución del sistema

$$\begin{cases} \eta_T - a\Delta^2\phi + (1 - \omega_1 + F_1, 1 - \omega_1 + F_2) \cdot \nabla\eta + F_3\Delta\phi = 0, \\ \phi_T + \eta - b\Delta\eta + (1 - \omega_1 + F_4, 1 - \omega_2 + F_5) \cdot \nabla\phi = 0. \end{cases}$$

Además, $U \equiv 0$ en la región $\{(X, Y, T) : X < T, T < T, T \geq 0\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$ y satisface que

$$\mathcal{L}U = 0 \quad \text{si} \quad T \geq 0,$$

donde

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} P_1(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) + (f_1, f_2) \cdot \nabla & P_2(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) + f_3\Delta \\ P_3(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) & P_4(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) + (f_4, f_5) \cdot \nabla \end{pmatrix}$$

con

$$P_1(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) = P_4(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) = \partial_T,$$

$$P_2(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) = -a\Delta^2, \quad P_3(\partial_X, \partial_Y, \partial_T) = I - b\Delta$$

y también

$$f_1 = 1 - \omega_1 + F_1, \quad f_2 = 1 - \omega_2 + F_2, \quad f_3 = F_3, \quad f_4 = 1 - \omega_1 + F_4, \quad f_5 = 1 - \omega_2 + F_5.$$

Ahora, sea

$$V_1 = \begin{cases} U & \text{si} \quad T \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad T < 0. \end{cases}$$

Así, $V_1 \equiv 0$ en la región $\{(X, Y, T) : X < T, Y < T, T \geq 0\} \cup \{(X, Y, T) : T < 0\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$. Usando el Lema 3.1 con el operador diferencial anterior \mathcal{L} , se tiene que existe un entorno \mathcal{O}_1 de $(0, 0, 0)$ en el espacio XYT , donde $V_1 \equiv 0$. Por tanto, si $T \geq 0$ entonces $U \equiv 0$ en \mathcal{O}_1 .

Caso similar ocurre cuando $U \equiv 0$ en la región $\{(X, Y, T) : X < -T, Y < -T, T < 0\}$ interceptada con un entorno de $(0, 0, 0)$, satisface que

$$\mathcal{L}U = 0 \quad \text{si} \quad T < 0,$$

donde

$$f_1 = \frac{1}{\omega_1} - 1 + F_1, \quad f_2 = \frac{1}{\omega_1} - 1 + F_2, \quad f_3 = F_3, \quad f_4 = \frac{1}{\omega_1} - 1 + F_4, \quad f_5 = \frac{1}{\omega_2} - 1 + F_5.$$

En consecuencia, si

$$V_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } T \geq 0 \\ U & \text{si } T < 0, \end{cases}$$

entonces del Lema 3.2 se tiene que existe un entorno \mathcal{O}_2 de $(0, 0, 0)$ en el espacio XYT , donde $V_2 \equiv 0$. En conclusión, si $T < 0$, entonces $U \equiv 0$ en \mathcal{O}_2 . Por tanto $U \equiv 0$ en $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, y regresando a las variables originales (x, y, t) se obtiene el resultado. \square

Así se tiene el resultado principal de la propiedad de continuación única del sistema (3.1.1).

Teorema 3.4. Sean $T > 0$ y $(\eta, \phi) = (\eta(x, y, t), \phi(x, y, t))$ con

$$\eta \in L^2([-T, T]; H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^2([-T, T]; H_{loc}^4(\mathbb{R}^2)),$$

$$\eta_t, \phi_t \in L^2([-T, T]; L_{loc}^2(\mathbb{R}^2))$$

una solución en $\mathbb{R}^2 \times (-T, T)$ del sistema (3.1.1). Si $(\eta, \phi) \equiv 0$ en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2 \times (-T, T)$, entonces $(\eta, \phi) \equiv 0$ en la componente horizontal de Ω .

*Demuestra*cción. Al definir las funciones

$$F_1(x, y, t) = \epsilon \partial_x \phi, \quad F_2(x, y, t) = \epsilon \partial_y \phi, \quad F_3(x, y, t) = 1 + \epsilon \eta,$$

y

$$F_4(x, y, t) = \frac{\epsilon}{2} \partial_x \phi, \quad F_5(x, y, t) = \frac{\epsilon}{2} \partial_y \phi,$$

vemos que el sistema (3.1.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} \eta_t - a \Delta^2 \phi + (F_1, F_2) \cdot \nabla \eta + F_3 \Delta \phi = 0, \\ \phi_t + \eta - b \Delta \eta + (F_4, F_5) \cdot \nabla \phi = 0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

con $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))$ y $a = \frac{\mu}{6}$, $b = \mu(\sigma - \frac{1}{2})$. Al usar algunos resultados de inclusión conduce a que

$$\eta \in L^\infty(-T, T; H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)), \quad \phi \in L^\infty(-T, T; H_{loc}^3(\mathbb{R}^2)),$$

y así

$$\|F_3\|_{L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))} \leq 1 + C\|\eta\|_{L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))} \leq 1 + C \sup_{t \in (-T, T)} \|\eta(t)\|_{H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)},$$

y también, para $i = 1, 2, 4, 5$,

$$\begin{aligned} \|F_i\|_{L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))} &\leq C \sup_{t \in (-T, T)} \|F_i(t)\|_{H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \sup_{t \in (-T, T)} \|\phi(t)\|_{H_{loc}^3(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-T, T))$. Por consiguiente, se puede probar el Teorema 3.4 para el sistema (3.3.2).

Ahora, al denotar por Ω_1 la componente horizontal del conjunto Ω , sea

$$\Lambda = \{(x, y, t) \in \Omega_1 : (\eta, \phi) \equiv 0 \text{ en un entorno de } (x, y, t)\}.$$

Sea $Q \in \Omega_1$ arbitrario y se escoje $P \in \Lambda$. Además, sea Γ una curva continua contenida en Ω_1 que une P y Q , parametrizada por una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \Omega_1$ con $f(0) = P$ y $f(1) = Q$. Dado que $P \in \Lambda$, entonces existe $r > 0$, tal que

$$(\eta, \phi) \equiv 0 \text{ en } B_r(P), \quad (3.3.3)$$

donde $B_r(P)$ es la bola abierta centrada en P de radio r . Enseguida, sea $r_0 > 0$ con $r_0 < \min\{r, \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega_1)\}$. Se nota que de la elección de r_0 , $B_{r_0}(P) \subset B_r(P)$. En consecuencia, $B_{r_0}(P) \subset \Lambda$. Ahora, sea $r_1 < \frac{r_0}{4}$. Luego

$$B_{2r_1}(f(s)) \subset \Omega_1, \quad \text{para todo } s \in [0, 1], \quad (3.3.4)$$

ya que si $w \in B_{2r_1}(f(s))$ y $w \notin \Omega_1$ entonces

$$\|w - f(s)\| < 2r_1 < r_0 < \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega_1) \leq \|w - f(s)\|,$$

lo cual es una contradicción.

Ahora Al considerar el conjunto

$$\Lambda_1 = \{(x, y, t) \in \Lambda : (\eta, \phi) \equiv 0 \text{ en } B_{r_1}(x, y, t) \cap \Omega_1\},$$

y también

$$S = \{0 \leq \ell \leq 1 : f(s) \in \Lambda_1 \text{ siempre que } 0 \leq s \leq \ell\}, \quad \ell_0 = \sup S.$$

Se prueba que $f(\ell_0) \in \Lambda_1$. En efecto, si $w \in B_{r_1}(f(\ell_0))$ y $r_2 = \|w - f(\ell_0)\| \geq 0$, entonces usando la continuidad de f , se tiene que existe $0 < \delta < \ell_0$, tal que

$$\|f(\ell_0) - f(\ell_0 - \delta)\| < r_1 - r_2,$$

de modo que

$$\|w - f(\ell_0 - \delta)\| \leq \|w - f(\ell_0)\| + \|f(\ell_0) - f(\ell_0 - \delta)\| < r_1,$$

y además $w \in B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta))$. De la definición de ℓ_0 , existe $\ell_\delta \in S$, tal que $\ell_0 - \delta < \ell_\delta \leq \ell_0$, lo que implica que $f(\ell_0 - \delta) \in \Lambda_1$. Luego, al usar (3.3.4) se determina que

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta)) \cap \Omega_1 = B_{r_1}(f(\ell_0 - \delta)). \quad (3.3.5)$$

En consecuencia, $(\eta(w), \Phi(w)) = 0$, y por tanto

$$(\eta, \Phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1}(f(\ell_0)). \quad (3.3.6)$$

Por consiguiente, se demuestra que $f(\ell_0) \in \Lambda_1$.

Ahora, si $\ell_0 = 1$, entonces del razonamiento anterior se tiene que $Q = f(1) \in \Lambda_1 \subset \Lambda$. En consecuencia, dado que Q fue elegido arbitrariamente, se obtiene que $(\eta, \Phi) \equiv 0$ en Ω_1 ; lo cual demuestra el Teorema 3.4. Por tanto, para completar la demostración del Teorema 3.4 es preciso probar que $\ell_0 = 1$. En efecto, se supone que $\ell_0 < 1$ y sea G el conjunto dado por

$$G = \{Z \in \Omega_1 : \|Z - f(\ell_0)\| = r_1\}.$$

Para $w = (x_1, y_1, t_1) \in G$ fijo, se considera el cambio de variable $(x, y, t) \rightarrow (X, Y, T)$ donde

$$\begin{aligned} X &= x - x_1, \\ Y &= y - y_1, \\ T &= t - t_1. \end{aligned}$$

Notar que $(0, 0, 0) \in G^* = \{Z = (X, Y, T) : \|Z - (f(\ell_0) - w)\| = r_1\}$. Más aún, al usar (3.3.6) se nota que

$$(\eta(X, Y, T), \Phi(X, Y, T)) = 0, \quad (X, Y, T) \in B_{r_1}(f(\ell_0) - w).$$

Por lo tanto, por el Corolario 3.3 existe $r_w^* > 0$, tal que

$$(\eta(X, Y, T), \Phi(X, Y, T)) = 0, \quad (X, Y, T) \in B_{r_w^*}(0, 0, 0),$$

de lo cual volviendo a las variables originales, se tiene que para cada $w \in G$, existe $r_w^* > 0$, tal que

$$(\eta, \phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_w^*}(w).$$

Entonces, al usar (3.3.6) y la compacidad de G , se tiene que existe $\epsilon_1 > 0$, tal que

$$(\eta, \phi) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{r_1 + \epsilon_1}(f(\ell_0)). \quad (3.3.7)$$

Si se usa nuevamente la continuidad de f , se obtiene que existe $0 < \delta_1 < 1 - \ell_0$, tal que si $w \in B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1))$, entonces

$$\|w - f(\ell_0)\| \leq \|w - f(\ell_0 + \delta_1)\| + \|f(\ell_0 + \delta_1) - f(\ell_0)\| < r_1 + \epsilon_1.$$

Así, $w \in B_{r_1 + \epsilon_1}(f(\ell_0))$, por tanto, se tiene que $B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1)) \subset B_{r_1 + \epsilon_1}(f(\ell_0))$. En consecuencia, usando (3.3.7) se obtiene que $(\eta, \phi) \equiv 0$ en $B_{r_1}(f(\ell_0 + \delta_1))$, y también que $f(\ell_0 + \delta_1) \in \Lambda_1$, lo cual contradice la definición de ℓ_0 . Luego $\ell_0 = 1$ y la demostración está completa. \square

Bibliografía

Amster, P. (2008). *Fragmentos de un discurso matemático*. Fondo de Cultura Económica.

Amster, P. (2010). *¡Matemática maestro! Un concierto para números y orquesta*. Siglo XXI Editores.

Amster, P. (2013). *La matemática como una de las bellas artes*. Siglo XXI Editores.

Amster, P. (2019). *Del cero al infinito. Un recorrido por el universo matemático*. Fondo de Cultura Económica.

Bates, D., Mächler, M., Bolker, B., and Walker, S. (2015). Fitting linear mixed-effects models using lme4. *Journal of Statistical Software*, 67(1):1–48.

Bourgain, J. (1997). On the compactness of the support of solutions of dispersive equations. *International Mathematics Research Notices*, 1997(9):437–447.

Breslow, N. E. and Clayton, D. G. (1993). Approximate inference in generalized linear mixed models. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421):9–25.

Bustamante, E., Isaza, P., and Mejía, J. (2011). On the support of solutions to the zakharov–kuznetsov equation. *Journal of Differential Equations*, 251(10):2728–2736.

Bustamante, E., Isaza, P., and Mejía, J. (2013). On uniqueness properties of solutions of the zakharov–kuznetsov equation. *Journal of Functional Analysis*, 264(11):2529–2549.

Carvajal, X. and Panthee, M. (2005). Unique continuation property for a higher order nonlinear schrödinger equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 303(1):188–207.

Carvajal, X. and Panthee, M. (2006). On uniqueness of solution for a nonlinear schrödinger–airy equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 64(1):146–158.

Clawson, C. (1999). *Misterios Matemáticos. Magia y belleza de los números*. Planeta.

Cole, T. J. and Green, P. J. (1992). Smoothing reference centile curves: the lms method and penalized likelihood. *Statistics in medicine*, 11(10):1305–1319.

Cook, R. D. (1977). Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics*, 19(1):15–18.

Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 48(2):133–169.

Cook, R. D. and Weisberg, S. (1982). *Residuals and Influence in Regression*. New York: Chapman and Hall.

Demidenko, E. (2013). *Mixed models: theory and applications with R*. John Wiley & Sons.

Dunn, P. K. and Smyth, G. K. (1996). Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and graphical statistics*, 5(3):236–244.

Escauriaza, L., Kenig, C., Ponce, G., and Vega, L. (2007). On uniqueness properties of solutions of the k -generalized kdv equations. *Journal of Functional Analysis*, 244(2):504–535.

Fabio, L. C., Paula, G. A., and de Castro, M. (2012). A poisson mixed model with nonnormal random effect distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6):1499–1510.

Fresán, J. and Rué Perna, J. J. (2013). *Los números trascendentes*. Ediciones La Catarata.

Guénard, F. and Lelèvre, G. (1999). *Pensar la Matemática*. Tusquets Editores.

Iorio, R. J. (2003). Unique continuation principles for some equations of benjamin-ono type. In Lupo, D., Pagani, C. D., and Ruf, B., editors, *Nonlinear Equations: Methods, Models and Applications*, pages 163–179, Basel. Birkhäuser Basel.

Jr., R. J. I. (2003). Unique continuation principles for the Benjamin-Ono equation. *Differential and Integral Equations*, 16(11):1281 – 1291.

Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. (2002). On the support of solutions to the generalized KdV equation. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 19(2):191–208.

Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. (2003). On unique continuation for nonlinear schrödinger equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(9):1247–1262.

Lesaffre, E. and Verbeke, G. (1998). Local influence in linear mixed models. *Biometrics*, 54(2):570–582.

Liang, K.-Y. and Zeger, S. L. (1986). Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, 73(1):13–22.

McCullagh, P. and Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models, Second Edition*. Chapman & Hall, second edition.

McCulloch, C. E. and Searle, S. R. (2000). *Generalized, Linear and Mixed Models*. Wiley, New York.

McGilchrist, C. (1994). Estimation in generalized mixed models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 56(1):61–69.

Montgomery, D. C., Peck, E. A., and Vining, G. G. (2021). *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley & Sons.

Mullahy, J. (1997). Heterogeneity, excess zeros, and the structure of count data models. *Journal of applied econometrics*, 12(3):337–350.

Nelder, J. A., Pawitan, Y., and Lee, H. J. (2006). *Generalized Linear Models with Random Effects: Unified Analysis via H-likelihood*. Chapman and Hall/CRC.

Ouwens, M. J., Tan, F. E., and Berger, M. P. (2001). Local influence to detect influential data structures for generalized linear mixed models. *Biometrics*, 57(4):1166–1172.

Panthee, M. (2005). Unique continuation property for the kadomtsev-petviashvili (kp-ii) equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005(59):1–12.

Paula, G. A. (2013). On diagnostics in double generalized linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 68:44–51.

Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood: Statistical Modelling and Inference using Likelihood*. Oxford University Press.

Pinho, L. G. B., Nobre, J. S., and Singer, J. M. (2015). Cook's distance for generalized linear mixed models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 82:126–136.

Poon, W.-Y. and Poon, Y. S. (1999). Conformal normal curvature and assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 61(1):51–61.

Quintero, J. (2010). Solitary water waves for a 2d boussinesq type system. *J. Part. Diff. Eq*, 23(3):251–280.

Quintero, J. R. (2011). The Cauchy problem and stability of solitary waves for a 2D Boussinesq-KdV type system. *Differential and Integral Equations*, 24(3/4):325 – 360.

R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Recalde, L. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Programa Editorial Universidad del Valle, 1rd edition edition.

Rigby, R. A. and Stasinopoulos, D. (1996a). A semi-parametric additive model for variance heterogeneity. *Statistics and Computing*, 6:57–65.

Rigby, R. A. and Stasinopoulos, D. M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 54(3):507–554.

Rigby, R. A. and Stasinopoulos, M. D. (1996b). Mean and dispersion additive models. In *Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing: Proceedings of the COMPSTAT'94 Satellite Meeting held in Semmering, Austria, 27–28 August 1994*, pages 215–230. Springer.

Rigby, R. A., Stasinopoulos, M. D., Heller, G. Z., and De Bastiani, F. (2019). *Distributions for modeling location, scale, and shape: Using GAMLSS in R*. Chapman and Hall/CRC.

Saut, J.-C. and Scheurer, B. (1987). Unique continuation for some evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 66(1):118–139.

Shang, Y. (2007). Unique continuation for the symmetric regularized long wave equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30(4):375–388.

Stasinopoulos, D. M. and Rigby, R. A. (2007). Generalized additive models for location scale and shape (gamlss) in r. *Journal of Statistical Software*, 23(7):1–46.

Stasinopoulos, D. M. and Rigby, R. A. (2008). Generalized additive models for location scale and shape (gamlss) in r. *Journal of Statistical Software*, 23:1–46.

Stasinopoulos, M. D., Rigby, R. A., Heller, G. Z., Voudouris, V., and De Bastiani, F. (2017). *Flexible Regression and Smoothing: using GAMLSS in R*. Chapman and Hall/CRC.

Tang, N.-S., Wei, B.-C., and Zhang, W.-Z. (2006). Influence diagnostics in nonlinear reproductive dispersion mixed models. *Statistics*, 40(3):227–246.

Tapia, A., Leiva, V., del Pilar Diaz, M., and Giampaoli, V. (2019a). Influence diagnostics in mixed effects logistic regression models. *TEST*, pages 1–23.

Tapia, A., Leiva, V., del Pilar Diaz, M., and Giampaoli, V. (2019b). Sensitivity analysis of longitudinal count responses: a local influence approach and application to medical data. *Journal of Applied Statistics*, 46(6):1021–1042.

Treves, F. (1966). Linear partial differential equations with constant coefficients : existence, approximation, and regularity of solutions.

Tuerlinckx, F., Rijmen, F., Verbeke, G., and Boeck, P. D. (2006). Statistical inference in generalized linear mixed models: a review. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 59 Pt 2:225–255.

Venables, W. N. and Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*. Springer Science, fourth edition.

Verbeke, G. and Molenberghs, G. (2009). *Linear Mixed Models for Longitudinal Data*. Springer Series in Statistics. Springer New York.

Walker, E. and Birch, J. B. (1988). Influence measures in ridge regression. *Technometrics*, 30(2):221–227.

Williams, D. (1984). Generalized linear models.

Williams, D. (1987). Generalized linear model diagnostics using the deviance and single case deletions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 36(2):181–191.

Xiang, L., Lee, A. H., and Tse, S.-K. (2003). Assessing local cluster influence in generalized linear mixed models. *Journal of Applied Statistics*, 30(4):349–359.

Xiang, L., Tse, S.-K., and Lee, A. H. (2002). Influence diagnostics for generalized linear mixed models: applications to clustered data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 40(4):759–774.

Zalamea, F. (2019). *Fundamentos de Matemáticas*. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia.

Zeger, S. L., Liang, K.-Y., and Albert, P. S. (1988). Models for longitudinal data: a generalized estimating equation approach. *Biometrics*, pages 1049–1060.

Zhang, B. (1992). Unique continuation for the korteweg–de vries equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(1):55–71.

Zhao, Y., Staudenmayer, J., Coull, B. A., and Wand, M. P. (2006). General design Bayesian generalized linear mixed models. *Statistical Science*, pages 35–51.

Zhu, H.-T. and Lee, S.-Y. (2003). Local influence for generalized linear mixed models. *Canadian Journal of Statistics*, 31(3):293–309.

Índice de figuras y tablas

1.1	Camino indicado para contabilizar todos los racionales positivos del Cuadro	21
1.2	Aproximaciones de la función $y = \frac{\sin(x)}{x}$	40
1.3	Secuencia infinita e innumerable de triángulos con área constante.....	41
1.4	Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia	42
1.5	Cuadrado inscrito en una circunferencia.....	42
1.6	Pentágono regular inscrito en una circunferencia	43
1.7	Infinitos caminos discretos para aproximarse a un número real a partir de a_0	44
1.8	Construcción para la división de un segmento en 2 partes iguales	53
1.9	Construcción de triángulos equiláteros	54
1.10	Construcción para la división de un segmento en tres partes iguales.....	54
1.11	Construcción para la división de un segmento en cuatro partes iguales.....	55
1.12	Construcción para la división de un segmento en seis partes iguales.....	56
1.13	Construcción para la división de un segmento en n partes iguales.....	56

Acerca de los autores

Óscar Fernando Soto Ágreda

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño y Magister en modelos de enseñanza problemática de la Universidad INCCA de Colombia, se desempeña como profesor de tiempo completo en la Universidad de Nariño, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, desempeñando cargos administrativos de importancia. Como miembro activo del grupo de investigación GESCAS, ha mantenido su interés por divulgar los alcances didácticos del uso de las TIC en el aula y en especial el uso de Software de Geometría dinámica y el uso de asistentes computacionales en el área de análisis.

Sergio Gómez Noguera

Licenciado en matemáticas de la Universidad de Nariño. Magister en matemáticas de la Universidad de Antioquia y Doctor en estadística del Instituto de Matemáticas y Estadística (IME) de la Universidad de São Paulo. Actualmente desempeña como profesor asistente del departamento de matemáticas y estadística de la Universidad de Nariño.

Ricardo Córdoba Gómez

Matemático de la Universidad del Cauca. Realizó estudios de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Cauca, Colombia. Actualmente

es profesor asociado adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, prestando sus servicios principalmente en la Licenciatura en Matemáticas, y es miembro del Grupo de Investigación en Biología Matemática y Matemática Aplicada (GIBIMMA) de la Universidad de Nariño y el Grupo de Investigación Espacios funcionales de la Universidad del Cauca.

êditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2025

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Con el propósito de visibilizar la producción investigativa y académica de los grupos de investigación adscritos al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, se ha creado la serie de textos ALCANZAR, cuyo primer volumen es una evidencia tangible de este compromiso. Este proyecto científico busca evitar que los informes de investigación queden en el olvido y, en cambio, sirvan como referencia e inspiración para futuras generaciones de investigadores.

Los grupos de investigación GESCAS, ALTENUA y GIBIMA han respaldado esta iniciativa. GESCAS se enfoca en la educación matemática, geometría y estadística; ALTENUA se dedica a investigaciones en álgebra moderna y es interinstitucional; GIBIMA trabaja en el análisis matemático y su aplicación en diversos contextos. Estos grupos consolidan líneas de investigación que fortalecen el prestigio del departamento.

La motivación detrás de esta serie surge de la necesidad de dar mayor difusión a los resultados investigativos, que a menudo permanecen inaccesibles. Así, ALCANZAR no solo documenta estas investigaciones, sino que también fomenta su reconocimiento y el desarrollo de nuevos estudios.

El primer capítulo aborda el infinito, un concepto complejo y fundamental en matemáticas. Se explora su importancia en diversas teorías, incluyendo la relatividad de Einstein, y se presentan catorce ejemplos ilustrativos que muestran su omnipresencia en la ciencia. A través de esta investigación, se resalta cómo la comprensión del infinito es esencial para evitar interpretaciones erróneas y para el desarrollo de teorías matemáticas.

El segundo capítulo tiene como tema central el diagnóstico en modelos de regresión para el tratamiento de datos correlacionados no gaussianos. La idea central de este aparte del libro es considerar los modelos lineales generalizados mixtos como caso especial de los GAMLSS (Generalized additive models for location, scale and shape), con el objetivo de desenvolver herramientas adecuadas para realizar la validación, a través del análisis de sensibilidad, de los modelos de interés. Se pretende que estas herramientas complementen las técnicas de validación ya existentes y que se encuentran disponibles en diferentes softwares estadísticos.

Finalmente, el tercer capítulo se enfoca en las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), modelos matemáticos que describen fenómenos naturales con variaciones en el tiempo, el espacio y otros parámetros. Estos modelos tienen diversas aplicaciones, por ejemplo, en dinámica de fluidos, física del plasma, óptica, neurociencia. Esta investigación se centra en un sistema de ecuaciones que modela ondas de agua poco profundas, y el objetivo es establecer una propiedad de continuación única de sus soluciones.

ISBN: 978-628-7864-11-5



9 786287 864115



Universidad de Nariño
Universidad de Nariño



ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL



Universidad de Nariño



Universidad de Nariño

