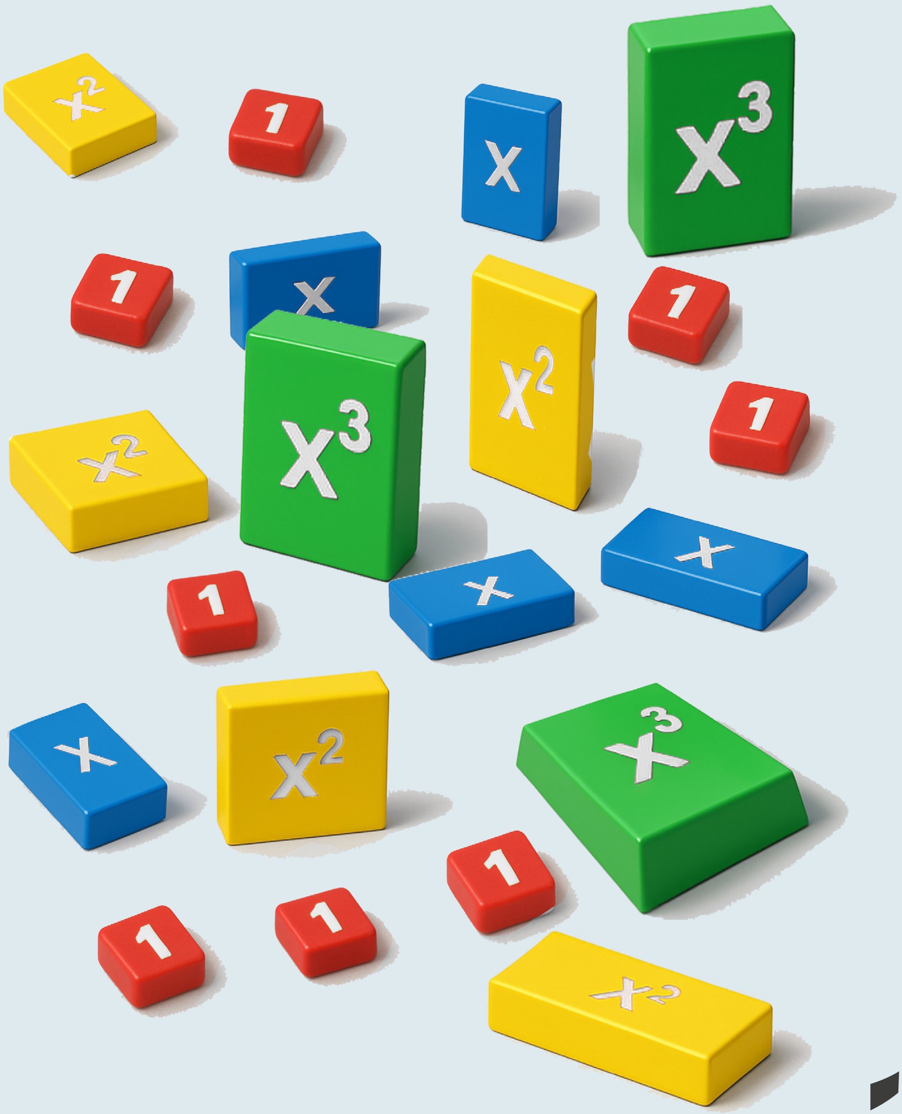
Artefacto digital algebraico:
Tránsito de lo tangible a lo simbólico



Edwin Insuasty Portilla
Óscar Fernando Soto Agreda
Jesús Insuasti

Editorial
Universidad de Nariño

êditorial
Universidad de **Nariño**

Artefacto digital algebraico: tránsito de lo tangible a lo simbólico

êditorial
Universidad de **Nariño**

Artefacto digital algebraico: tránsito de lo tangible a lo simbólico

Edwin Insuasty Portilla
Óscar Fernando Soto Agreda
Jesús Insuasti

êditorial
Universidad de **Nariño**

Insuasty Portilla, Edwin
Artefacto digital algebraico : tránsito de lo tangible a lo simbólico / Edwin Insuasty Portilla, Oscar Fernando Soto Ágreda, Jesús Insuasti – San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2025

212 páginas : ilustraciones, tablas

Incluye referencias bibliográficas p. 208 - 209
ISBN: 978-628-7864-14-6 Impreso
ISBN: 978-628-7864-15-3 Digital

1. Caja de polinomios—Software 2. Caja de polinomios—Aplicación educativa 3. Caja de polinomios—Herramienta pedagógica 4. Adición y sustracción de polinomios—Enseñanza, aprendizaje 5. Multiplicación de polinomios—Enseñanza 6. Polinomios—Enseñanza—Nivel preescolar, primaria, básica secundaria 7. Álgebra—Enseñanza, aprendizaje 8. Caja de polinomios—Herramienta tecnológica. I. Soto Ágreda, Oscar Fernando II. Insuasti, Jesús

004.0151 I599ar – SCDD-Ed. 22

Universidad de Nariño FUNDADA EN 1904
Universidad de Nariño ACREDITADA EN ALTA CALIDAD RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023
SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Artefacto digital algebraico: tránsito de lo tangible a lo simbólico

ISBN impreso: 978-628-7864-14-6
ISBN digital: 978-628-7864-15-3

Corrección de estilo: Manuel Enrique Martínez Riascos
Diseño y diagramación: David Sebastian Benavides

Fecha de publicación: Diciembre 2025

San Juan de Pasto -Nariño -Colombia

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN ____ 11

1. LA APLICACIÓN MULTIPLATAFORMA DE LA CAJA DE POLINOMIOS ____ 15

1.1 Desarrollo de la App Caja de Polinomios ____ 16
1.2 Algunas consideraciones técnicas ____ 18
1.3 Descarga de la aplicación ____ 25

2. PREÁMBULO ____ 26

2.1 Estándares curriculares ____ 28
2.1.1 Nivel Preescolar ____ 28
2.1.2 Niveles Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Vocacional ____ 29
2.1.3 El Significado Epistemológico y Didáctico de la Caja de Polinomios 34

3.ARTEFACTO DIGITAL PARA MANIPULACIÓN DE POLINOMIOS.
El juego operatorio algebraico de lo tangible a lo simbólico. ____ 39

3.1 GUÍA No. 1. Historia y Fundamentación Matemática de la Caja de Polinomios 39
3.1.1 ACTIVIDAD 1 ____ 42
3.1.2 ACTIVIDAD 2 ____ 43
3.1.3 ACTIVIDAD 3 ____ 43
3.1.4 ACTIVIDAD 4 ____ 48
3.1.5 ACTIVIDAD 5 ____ 50
3.1.6 ACTIVIDAD 6 ____ 52
3.1.7 PARA RECORDAR ____ 52

3.2 GUÍA N°2 ____ 54
3.2.1 ACTIVIDAD 1 ____ 56
3.2.2 ACTIVIDAD 6 ____ 56
3.2.3 ACTIVIDAD 3 ____ 57
3.2.4 ACTIVIDAD 4 ____ 57
3.2.5 ACTIVIDAD 5 ____ 57

3.3 GUÍA No.3. Lectura y Escritura de Polinomios ____ 58

3.3.1 ACTIVIDAD 1 ____ 60
3.3.2 ACTIVIDAD 2 ____ 60
3.3.3 ACTIVIDAD 3 ____ 61
3.3.4 ACTIVIDAD 4 ____ 62
3.3.5 ACTIVIDAD 5 ____ 62
3.3.6 ACTIVIDAD 6 ____ 63
3.3.7 ACTIVIDAD 7 ____ 63
3.3.8 ACTIVIDAD 8 ____ 64
3.3.9 ACTIVIDAD 9 ____ 64
3.3.10 PARA RECORDAR ____ 64

3.4 GUÍA No. 4. Adición y Sustracción de Polinomios Cuadráticos ____ 67
3.4.1 ACTIVIDAD 1 ____ 67
3.4.1.1 ACTIVIDAD 1 ____ *70*
3.4.1.2 ACTIVIDAD 2 ____ *71*
3.4.2 INVERSO ADITIVO ____ 71
3.4.2.1 ACTIVIDAD 3 ____ *73*
3.4.2.2 ACTIVIDAD 4 ____ *74*
3.4.3 MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR ____ 74
3.4.3.1 ACTIVIDAD 1 ____ 74
3.4.4 SUSTRACCIÓN ____ 75
3.4.4.1 ACTIVIDAD 6 ____ *78*
3.4.4.2 ACTIVIDAD 7 ____ *79*
3.4.4.3 ACTIVIDAD 8 ____ *79*
3.4.5 PARA RECORDAR ____ 79

3.5 GUÍA No. 5. Optimización del uso del plano cartesiano ____ 82
3.5.1 ACTIVIDAD 1 ____ 83
3.5.2 ACTIVIDAD 2 ____ 84
3.5.3 ACTIVIDAD 3 ____ 85
3.5.4 PARA RECORDAR ____ 86

3.6 GUÍA No. 6. Multiplicación de polinomios de la forma (ax+b)·(cx+d) ____ 87
3.6.1 ACTIVIDAD 1 ____ 92
3.6.2 ACTIVIDAD 2 ____ 93

3.6.3 ACTIVIDAD 3 ____ 94
3.6.4 ACTIVIDAD 4 ____ 96
3.6.5 PARA RECORDAR ____ 96

3.7 GUÍA No. 7. División de polinomios ____ 98
3.7.1 ACTIVIDAD 1 ____ 104
3.7.2 ACTIVIDAD 2 ____ 106
3.7.3 PARA RECORDAR ____ 106

3.8 GUÍA No. 8. Factorización de polinomios de grado 2 ____ 108
3.8.1 ACTIVIDAD 1 ____ 111
3.8.2 ACTIVIDAD 2 ____ 112
3.8.3 ACTIVIDAD 3 ____ 112
3.8.4 ACTIVIDAD 4 ____ 115
3.8.5 ACTIVIDAD 5 ____ 115
3.8.6 ACTIVIDAD 6 ____ 116
3.8.7 PARA RECORDAR ____ 116

3.9 GUÍA No. 9. Polinomios de grado 3 ____ 119
3.9.1 ACTIVIDAD 1 ____ 120
3.9.2 ACTIVIDAD 2 ____ 121
3.9.3 PARA RECORDAR ____ 122

3.10 GUÍA No. 10. Adición y Sustracción de Polinomios de Grado 3 ____ 123
3.10.1 ACTIVIDAD 1 ____ 125
3.10.2 ACTIVIDAD 2 ____ 126
3.10.3 ACTIVIDAD 3 ____ 129
3.10.4 ACTIVIDAD 4 ____ 130
3.10.5 ACTIVIDAD 5 ____ 130
3.10.6 PARA RECORDAR ____ 130

3.11 GUÍA No. 11. Cálculo de Productos de Grado Tres ____ 131
3.11.1 ACTIVIDAD 1 ____ 135
3.11.2 ACTIVIDAD 2 ____ 136
3.11.3 ACTIVIDAD 3 ____ 137
3.11.4 PARA RECORDAR ____ 137

3.12 GUÍA No. 12. División de Polinomios de Grado 3 ____ 139
3.12.1 ACTIVIDAD 1 ____ 141
3.12.2 ACTIVIDAD 2 ____ 141
3.12.3 ACTIVIDAD 3 ____ 142
3.12.4 ACTIVIDAD 4 ____ 145
3.12.5 ACTIVIDAD 5 ____ 145
3.12.6 PARA RECORDAR ____ 146

3.13 GUÍA No. 13. Factorización de Polinomios de Grado 3 ____ 147
3.13.1 ACTIVIDAD 1 ____ 154
3.13.2 ACTIVIDAD 2 ____ 155
3.13.3 ACTIVIDAD 3 ____ 155
3.13.4 ACTIVIDAD 4 ____ 157
3.13.5 ACTIVIDAD 5 ____ 157
3.13.6 ACTIVIDAD 6 ____ 158
3.13.7 PARA RECORDAR ____ 158

3.14 GUÍA No. 14. División con Polinomios de Grado 3 ____ 160
3.14.1 ACTIVIDAD 1 ____ 164
3.14.2 ACTIVIDAD 2 ____ 165
3.14.3 ACTIVIDAD 3 ____ 168
3.14.4 ACTIVIDAD 4 ____ 169
3.14.5 PARA RECORDAR ____ 170

3.15 GUÍA No. 15. Polinomios de Grado 4 ____ 171
3.15.1 ACTIVIDAD 1 ____ 174
3.15.2 ACTIVIDAD 2 ____ 174
3.15.3 ACTIVIDAD 3 ____ 178
3.15.4 ACTIVIDAD 4 ____ 179
3.15.5 ACTIVIDAD 5 ____ 182
3.15.6 PARA RECORDAR ____ 183

3.16 GUÍA No. 16. Relación Entre Perímetros y Áreas ____ 184
3.16.1 ACTIVIDAD 1 ____ 185
3.16.2 ACTIVIDAD 2 ____ 189
3.16.3 ACTIVIDAD 3 ____ 191

ÁREAS IGUALES CON PERÍMETROSDIFERENTES ______ **191**
3.16.4 ACTIVIDAD 4 ______ **195**

EL CASO DE LOS DESENCUADRES ______ **196**
3.16.5 ACTIVIDAD 5 ______ **200**

3.17 GUÍA No. 17: Algunos hechos Adicionales ______ **201**
3.17.1 ACTIVIDAD 1 ______ **203**
3.17.2 ACTIVIDAD 2 ______ **205**
3.17.3 PARA RECORDAR ______ **206**

BIBLIOGRAFÍA ______ **208**
ACERCA DE LOS AUTORES ______ **210**

INTRODUCCIÓN

En los albores del siglo XXI, durante el encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, (creación del maestro Jairo Varela), celebrado en la ardiente y romántica ciudad de Neiva, el emérito profesor de la Universidad Nacional de Colombia, Yu Takeuchi, tuvo la oportunidad de preguntar si la Caja de Polinomios era un instrumento que permitía meter la mano y sacar polinomios. La respuesta que recibió lo dejó asombrado y confundido: "sí, y no solo eso, permite todo el juego operatorio: sumar, restar, multiplicar, dividir y hasta factorizar." Takeuchi, debió tener compromisos que le impidieron asistir a la demostración de que, en efecto, todo lo dicho y mucho más, es posible con la Caja de Polinomios y dado su carácter de didacta consumado, hubiese aprovechado mejor ese instrumento, inventando estrategias.

De verdad, resulta increíble que un elemento que tiene un sustrato de altísima abstracción, como es el concepto de polinomio, descienda su carácter al mundo perceptible de lo tangible; es decir, el juego operatorio se celebra con las manos y claro, con la razón. La Caja de Polinomios se convierte en un mediador lúdico que permite que lo simbólico emerja de lo tangible permitiendo una comunión entre el mundo de las realidades y el mundo de los ideales.

Sumar y restar polinomios con coeficientes enteros, son actividades que pueden dominar aprendices de escolaridad primaria. Tomando en cuenta esto, hace falta que un investigador o un profesor, diseñe una indagación de aprendizajes en álgebra temprana. Existen experiencias de escolares menores a los siete años cronológicos, quienes en menos de una hora han aprendido a escribir, leer, sumar, restar y hasta multiplicar polinomios de grado dos y es que estas operaciones desvelan algoritmos sencillos de repetir en lo simbólico, que al final es lo que importa.

En la división y factorización, la Caja de Polinomios se convierte en un rompecabezas auténtico y racional. Interviene en esta operación y procedimiento la razón con un alto sentido lúdico, de diversión y, por ello, de pasión y entusiasmo. El ensayo y el error muestran su cara y al final aparece la satisfacción de la operación cumplida, del resultado alcanzado con eficiencia y exactitud. Es de destacar que el algoritmo tradicional de la división que se aprende con regularidad en la escuela es pesado y complejo, no deja comprender el porqué de su significado, en cambio acá, es admisible y comprensible, la razón y la mente lo acata al igual que ocurre con el procedimiento de la factorización.

Pero el instrumento va más allá de lo que a primera vista es posible con él, y en este libro de investigación, las últimas guían muestran ejemplos de un trabajo matemático laborioso en torno a otros objetos que aparecen en su anatomía. Por ejemplo, al pensar en trabajar con polinomios de grados superiores, las clases de fichas que se hacen necesarias para el juego operatorio, tienen íntima relación con los números triangulares. También se muestra la forma de atacar el problema paradigmático que expone que el perímetro no es prueba o examen para el área y se estudia este problema desde el germen mismo del principio fundamental del conteo.

Es sano advertir, que, desde este este punto de vista, el sacar provecho del recurso, obedece a la impronta creativa del maestro, que es el aula de clase debería ser inagotable.

Este libro es el resquicio de una ventana de oportunidades que puede adoptarse como guía y que se recomienda abordar en el orden en que se han establecido sus partes componentes, para apropiarse de la cualidad eminentemente didáctica de este recurso.

Mas aún, los profesores, deberían liderar procesos de investigación alrededor del uso de este libro, que en realidad es una herramienta pedagógica. La Caja de Polinomios, media entre lo tangible y lo abstracto en un mundo necesario para la ciencia y la tecnología, considerando que todo el conocimiento matemático está algebrado. Todo momento es propicio, para cambiar el rumbo de nuestro quehacer docente, utilizar al máximo los recursos y tener la satisfacción de ser reconocido como un profesor diferente. Bajo esta perspectiva, la Caja de Polinomios es una excusa para mejorar sus clases, una excusa que merece ser atendida con igual o mejor ímpetu laborioso, del que le han prodigado sus creadores.

En comparación con creaciones parecidas, vale recordar que la Caja de Polinomios, requiere el empleo de tan solo tres reglas en su juego operatorio. A diferencia de instrumentos que, teniendo el mismo objetivo, contienen un número excesivo de reglas, lo que impide que su utilización sea práctica y atractiva.

Los fundamentos matemáticos desempeñan un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento computacional, ya que proporcionan un marco estructurado para la resolución de problemas y el diseño de algoritmos.

Conceptos clave como la lógica, la teoría de conjuntos, la combinatoria y la teoría de números constituyen la base de los modelos computacionales, lo que permite la formulación de procesos claros y sistemáticos para el análisis y la resolución de problemas complejos. La lógica facilita el razonamiento y la toma de decisiones, mientras que, la teoría de conjuntos y la combinatoria ayudan a organizar datos y explorar posibles resultados. La teoría de números, centrada en las propiedades de los números enteros, desempeña un papel crucial en el cifrado y la seguridad computacional. Al comprender estos principios matemáticos fundamentales, las personas pueden comprender conceptos computacionales como algoritmos, complejidad y estructuras de datos, lo que les permite comprender mejor cómo desglosar problemas, automatizar soluciones y crear sistemas eficientes en el mundo digital.

Esta obra es uno de los resultados de la investigación “Cultura educativa sobre Pensamiento Computacional aplicado a Industria 4.0 en educación básica y media del municipio de Pasto” que forma parte de la Convocatoria de Investigación Docente 2022 financiada por la Vicerrectoría de Investigación y Proyección Social de la Universidad de Nariño, ya que contempla la elaboración de material educativo para apoyo en la formación matemática como instrumento potenciador del pensamiento computacional en diferentes escenarios académicos.

CAPÍTULO 01

LA APLICACIÓN MULTIPLATAFORMA DE LA CAJA DE POLINOMIOS

La visualización y experimentación con imágenes interactivas en el ámbito de las matemáticas es una estrategia clave para facilitar la comprensión de procesos abstractos, como las operaciones con polinomios. Estas herramientas permiten que los estudiantes no solo resuelvan problemas, sino que puedan observar cómo cambian los resultados al modificar las variables en tiempo real, lo cual facilita el entendimiento profundo de los conceptos.

Diversos estudios destacan que las tecnologías interactivas favorecen la experimentación en un entorno seguro, donde los estudiantes pueden explorar y manipular conceptos sin temor a equivocarse, lo que promueve un aprendizaje significativo. Por ejemplo, Salvador-García (2021) señala que este tipo de herramientas incrementa la motivación y la participación de los alumnos, ayudándolos a visualizar conceptos que de otro modo serían más difíciles de entender. Además, la gamificación y el uso de elementos interactivos pueden mejorar las competencias matemáticas y motivar a los estudiantes a involucrarse más activamente en su aprendizaje (Prieto-Andreu, 2022).

En particular, las imágenes interactivas y dinámicas permiten que los estudiantes internalicen conceptos complejos como los relacionados con polinomios. Estas herramientas ofrecen una representación visual de las operaciones, lo que ayuda a los estudiantes a observar el impacto inmediato de las modificaciones en las ecuaciones o gráficos. Esto no solo facilita la comprensión de las operaciones algebraicas, sino que también promueve una reflexión más profunda sobre los métodos utilizados (Holguín et al., 2020).

El uso de imágenes dinámicas y manipulables promueve una **participación del estudiante**, permitiendo que interactúe con los conceptos, los maneje y observe los resultados en tiempo real. Según estudios, la combinación de interactividad con modelos visuales contribuye significativamente a que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas de mayor nivel y puedan internalizar conceptos abstractos que de otra forma serían difíciles de entender (Olmedo et al., 2024)

En la educación matemática, el uso de herramientas interactivas se ha vinculado con un aumento en la **motivación y el compromiso** del alumnado, ya que estas plataformas permiten adaptar los contenidos a las necesidades individuales de cada estudiante (Olmedo et al., 2024). Además, la experimentación visual facilita la exploración de las relaciones matemáticas, como la factorización de polinomios o las gráficas de funciones, proporcionando una comprensión más intuitiva de los conceptos subyacentes (Gómez-Blancarte & Valles-Pérez, 2016).

1.1 Desarrollo de la App Caja de Polinomios

Adobe Animate es una de las mejores plataformas para el desarrollo de aplicaciones gráficas que utilizan gráficos vectoriales. Esta herramienta destaca por su capacidad de crear animaciones 2D interactivas, tanto para la Web como para aplicaciones de escritorio. Gracias a su integración con estándares como HTML5, Canvas y WebGL, Animate, permite desarrollar experiencias multiplataforma y exportarlas a diferentes entornos, incluyendo aplicaciones Web y paquetes para escritorio mediante la tecnología Adobe AIR.

El enfoque de Adobe Animate combina la manipulación de gráficos vectoriales con potentes herramientas de animación y control de línea de tiempo, lo que facilita el desarrollo de animaciones precisas y dinámicas. Además, su capacidad de exportar en múltiples formatos hace que sea una opción ideal para diseñadores y desarrolladores que buscan crear desde juegos y vídeos hasta presentaciones multimedia y aplicaciones interactivas (Adobe Inc., 2024; Wikipedia, 2024).

Para nuestra propuesta, se seleccionó Adobo Animate por las características descritas y como metodología de construcción se adoptó la metodología RUP (Rational Unified Process) que organiza el desarrollo de software en fases iterativas: **Inicio, Elaboración, Construcción** y **Transición**, cada una con ciclos que permiten mejorar continuamente el producto. Esta metodología se centra en la gestión de requisitos, el modelado basado en UML (Unified Modeling Language) y la integración de las mejores prácticas en ingeniería de software. Uno de sus objetivos es asegurar la calidad desde etapas tempranas, permitiendo una entrega incremental de valor y un control riguroso de los cambios (Medrano & Ñaupari, 2019; Wikipedia, 2024).

El enfoque iterativo de RUP facilita manejar los riesgos y cambios de manera continua, ya que cada fase genera artefactos clave como el documento de visión, los diagramas de casos de uso y la especificación de arquitectura. Además, promueve la colaboración entre equipos y la adaptación a las necesidades específicas del cliente para asegurar que el producto final cumpla con los requisitos establecidos (Medrano & Ñaupari, 2019; Wikipedia, 2024).

1.2 Algunas consideraciones técnicas

El software **La Caja de Polinomios** fue desarrollado para ser compatible con los sistemas operativos **Windows**, **Android** y **Linux**, ofreciendo versiones optimizadas para cada plataforma.

En la versión para **Windows**, se proporciona un archivo comprimido (CajaDePolinomiosWindows.zip) que contiene el instalador ejecutable (CajaDePolinomios.exe). Este archivo guía al usuario paso a paso durante el proceso de configuración para asegurar una instalación sin complicaciones. Además, es indispensable tener instalada la tecnología **Adobe AIR** en el equipo. Para facilitar este requisito, se incluye el instalador correspondiente (AdobeAIR_v51.1.1.5.exe).

Esta integración garantiza que el software funcione correctamente y proporcione al usuario la experiencia completa sin necesidad de configuraciones adicionales complicadas.

Para dispositivos **Android**, se proporciona el archivo comprimido CajaDePolinomiosAndroid.zip, que contiene dos paquetes APK:

- CajaDePolinomios32.apk: Diseñado para tabletas Android más antiguas con arquitectura de 32 bits.
- CajaDePolinomios64.apk: Optimizado para tabletas Android con arquitectura de 64 bits.

Si bien, la aplicación puede instalarse en teléfonos celulares, no se recomienda su uso en pantallas pequeñas, ya que la interfaz puede volverse difícil de manejar. En particular, algunos botones de la aplicación podrían ser complicados de presionar sin un lápiz electrónico o stylus.

Estos archivos APK están listos para ser instalados en dispositivos móviles. Sin embargo, la instalación de aplicaciones de fuentes externas requiere la activación de la opción **“Permitir instalación de aplicaciones de orígenes desconocidos”**. El procedimiento para habilitar esta opción varía según la versión de Android:

- **Android 7 y versiones anteriores:** En estas versiones, la activación de la opción “**Permitir instalación de aplicaciones de orígenes desconocidos**” se realiza desde **Ajustes del dispositivo** > **Seguridad**. A continuación, se presentan algunas capturas de pantalla que ilustran el proceso en estos sistemas Android, mostrando los pasos necesarios para habilitar esta configuración.

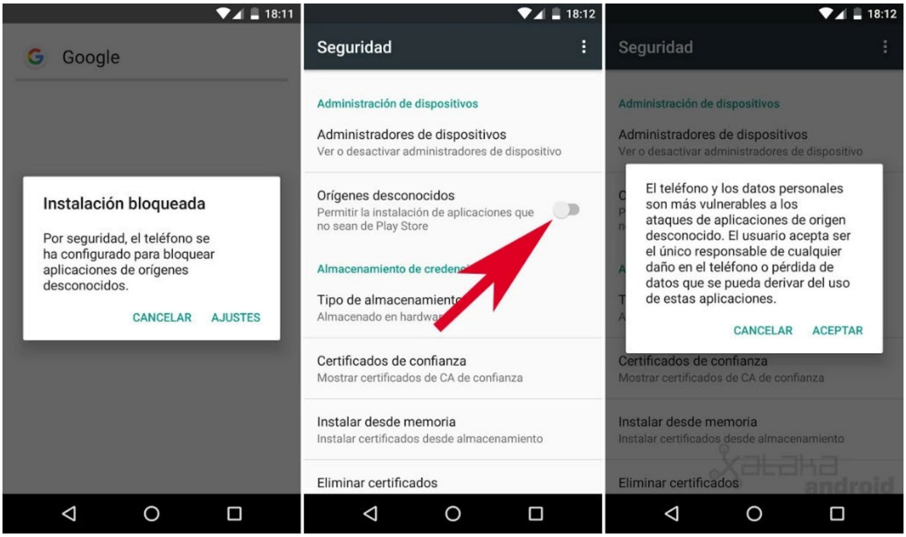


Figura 1 Activación de Orígenes desconocidos. Fuente (Xataka Android, octubre 13 de 2024)

- **Android 8 y versiones posteriores:** En estas versiones, la opción de instalar aplicaciones desde fuentes desconocidas ya no se encuentra en los ajustes generales del sistema. En su lugar, el permiso se concede por aplicación individual (por ejemplo, Chrome o un administrador de archivos). Para habilitar esta opción, el usuario debe acceder a **Ajustes** > **Aplicaciones** > **[Aplicación que descarga el APK]** > **Instalar aplicaciones desconocidas** y activar el permiso para cada aplicación que se utilizará para la instalación.

Por ejemplo, si el archivo APK se descarga desde un navegador como Chrome, el dispositivo mostrará pantallas similares a las ilustradas en la Figura 2. Este enfoque garantiza un control más granular sobre las fuentes externas, mejorando la seguridad del dispositivo al limitar los permisos solo a las aplicaciones necesarias para cada instalación.

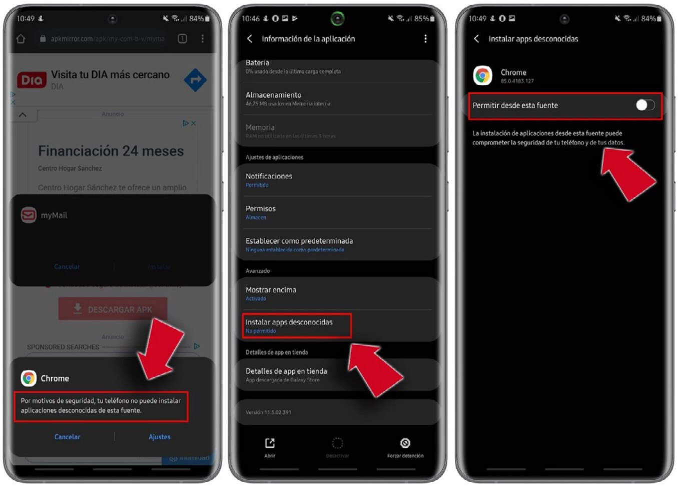


Figura 2 Pantallas en sistemas Android 8 o superiores. Fuente (Xataka Android, octubre 13 de 2024)

Si el archivo APK se transfiere al dispositivo mediante **cable USB, memoria externa** o **Bluetooth**, la instalación se realizará a través de un **administrador o gestor de archivos**, como la aplicación **Mis Archivos**. En este caso, el usuario debe otorgar los permisos necesarios para permitir la instalación desde esta fuente específica. Para hacerlo, debe acceder a **Ajustes** > **Aplicaciones** > **[Administrador de archivos utilizado]** > **Instalar aplicaciones desconocidas** y habilitar el permiso correspondiente para **Mis Archivos** o cualquier otro gestor utilizado.

La **Figura 3** muestra las pantallas típicas que aparecen durante este proceso, ilustrando los pasos necesarios para completar la instalación correctamente. Este método permite instalar aplicaciones desde medios externos de manera controlada, garantizando la seguridad del dispositivo.

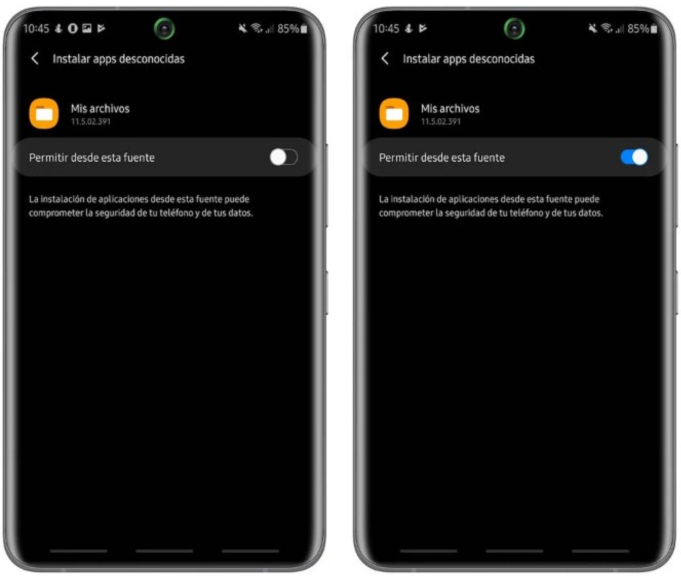


Figura 3 Activar la opción para Mis Archivos. Fuente (Xataka Android, octubre 13 de 2024)

- **Android 14:** Esta versión introduce una capa adicional de seguridad al requerir una verificación mediante **Google Play Protect** antes de permitir la instalación de aplicaciones de fuentes externas. Estas medidas garantizan que el usuario sea consciente de los riesgos potenciales asociados con la instalación de aplicaciones no oficiales y refuerzan la protección del sistema operativo contra software malicioso.

Si la aplicación no supera la verificación, el sistema emite una alerta sobre los riesgos detectados y recomienda precaución al usuario. Además, Android 14 ha incrementado las restricciones, evitando la instalación de aplicaciones que utilicen APIs obsoletas, lo que garantiza que el software instalado cumpla con los estándares actuales de seguridad y rendimiento.

La **Figura 4** muestra cómo se presenta la interfaz en un dispositivo con **Android 14** durante el proceso de instalación, incluyendo las opciones de verificación y las alertas correspondientes. Es importante mencionar que la Caja de Polinomios es una aplicación completamente segura, libre de virus y malware que puedan comprometer su dispositivo. Por lo tanto, no es necesario utilizar la opción **"Analizar app"** que aparece en la pantalla ilustrada.

Para proceder con la instalación sin realizar el análisis, despliegue la opción **"Más detalles"** y seleccione **"Instalar sin analizar"**. Esto permitirá completar la instalación de manera rápida y segura, sin que se active el análisis adicional de Google Play Protect.

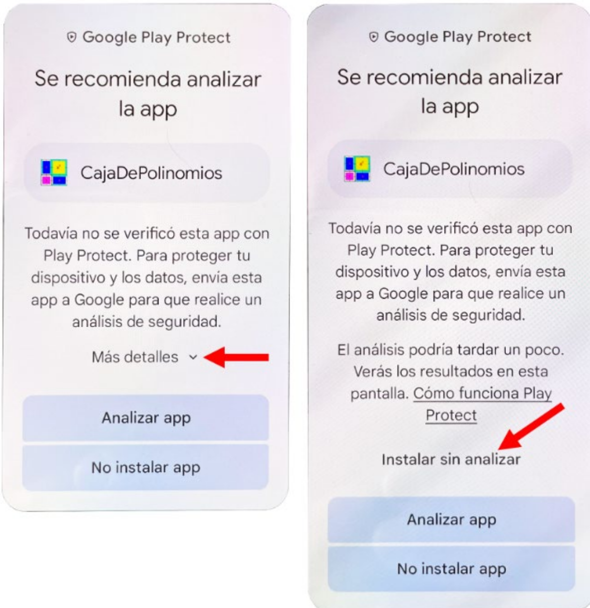


Figura 4 En Android 14. Fuente propia.

Para **Linux**, la aplicación se distribuye en un archivo comprimido, CajaDePolinomiosLinux.zip, que contiene la carpeta con todos los recursos necesarios para su correcta ejecución. Es imprescindible instalar previamente **Wine**, una aplicación que proporciona un entorno de compatibilidad en sistemas Linux, permitiendo ejecutar software diseñado para Windows sin complicaciones.

La Figura 5 ilustra este proceso: a la izquierda, se muestra la carpeta de la Caja de Polinomios en un sistema **Linux Ubuntu**; y a la derecha, se observa el ícono característico de las aplicaciones Windows listo para ser ejecutado mediante **Wine**. La ejecución es sencilla, basta con hacer **doble clic** en el archivo **.exe** incluido para iniciar la aplicación.

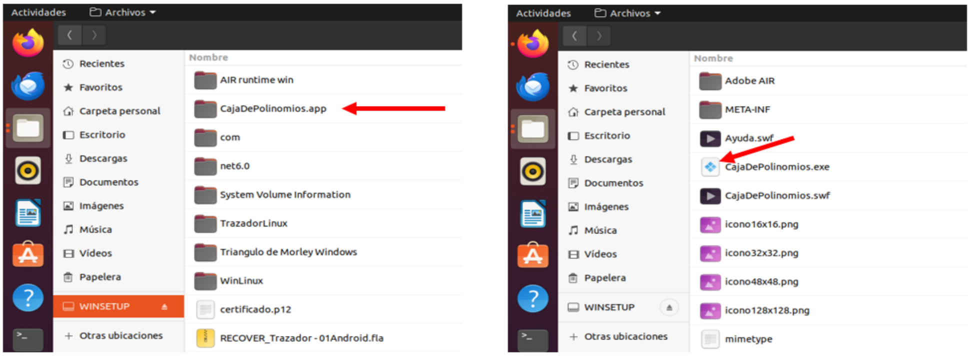


Figura 5 Carpeta y ejecutable en Linux Ubuntu. Fuente propia.

La **Figura 6** muestra la ejecución del software la Caja de Polinomios en **Linux Ubuntu** utilizando **Wine** como entorno de compatibilidad. Esta ilustración destaca de qué forma la aplicación se integra y funciona sin problemas en un entorno Linux, permitiendo a los usuarios acceder a todas sus funcionalidades como si se tratara de un sistema Windows.

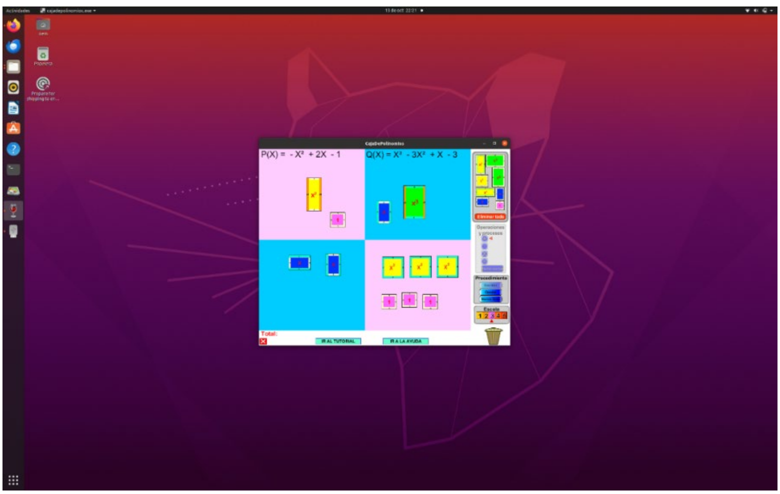


Figura 6 La Caja de Polinomios en Linux Ubuntu. Fuente propia.

1.3 Descarga de la aplicación

A continuación, se presentan los enlaces de descarga para las distintas versiones de la aplicación la Caja de Polinomios, asegurando compatibilidad con múltiples plataformas:

- Instalador para Windows: https://drive.google.com/file/d/1nabKqMPnhJE9dSH66h4CuoLVRSpWxpZX/view?usp=sharing
- Carpeta para ejecución en Linux bajo Wine: https://drive.google.com/file/d/19skqw4znKjpoSNOmDLYWvI0sBGMvuM7v/view?usp=sharing
- APK de 32 y 64 bits para Android: https://drive.google.com/file/d/1aHKzOX84A62IDjPclfSXK6ET9t1vfeyS/view?usp=sharing

CAPÍTULO 02
PREÁMBULO

La Caja de Polinomios es una herramienta pedagógica, resultado del trabajo colectivo de profesores de la Universidad de Nariño. Sus orígenes se remontan a los trabajos de Euclides, del matemático árabe Thábit ibn Qurra y de Pierre de Fermat y Renato Descartes. Conjuga conceptos como el de homogeneización que se utiliza en la construcción de las tarjetas del juego para polinomios de grado superior a dos.

La Caja de Polinomios se traduce como un elemento que resume el carácter epistemológico del concepto de polinomio y su esencia operativa y lúdica que estimula varias esferas de la inteligencia, en particular la lógico-matemática al igual que la corporal-cinestésica y la lingüística. Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar y resolver ecuaciones de una variable con respuesta entera, se convierten en procesos algorítmicos divertidos que plasman el conocimiento en saberes significativos y derivan de procedimientos de mayor riqueza que al tratarlos en forma tradicional.

El uso de las tabletas enriquece cálculos como el del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos polinomios, puesto que todos los rectángulos que se construyen con las tarjetas sobre una misma base se corresponden en su área total, referida al polinomio que cada uno representa, en un conjunto de polinomios que tiene a tal base como su máximo común divisor. Todo esto, amén de traer contenida toda la aritmética de números enteros, de la cual se rescatan algoritmos fáciles para ser comprendidos por estudiantes cuya edad cronológica no se corresponda con el estudio de estas temáticas según la malla curricular del sistema educativo colombiano.

Lo presentado en estas guías no contiene todo lo que se puede hacer con este material didáctico, ni siquiera en un uno por ciento de todos los cálculos que se ejecutan con este mediador y de los cuales aparecen algunos como ejemplos y otros pocos como ejercicios. En consecuencia, su correcta utilización depende de la creatividad individual y de otras cosas producto del ingenio personal del usuario. Como ejemplo adicional, en las últimas guías se estudia la relación entre áreas de figuras y sus perímetros, aspecto que subyace en el campo de los paradigmas.

Desde este punto de vista, el lector debe hacer una contextualización histórica y epistemológica de este instrumento mediador didáctico. Los trabajos de Thábit ibn Qurra, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi y Omar Khayyam se encuentran inscritos en el álgebra retórica puesto que el álgebra simbólica es posterior al renacimiento e introducida por Françoise Viète, pero sin consistencia en su utilización. Este proceso llega a su madurez con René Descartes en 1637 cuando es editada su *Geometría* en Leiden en la que se propone utilizar las primeras letras del alfabeto a, b. c, … para los datos conocidos y las últimas x, y, z,… para las incógnitas o valores desconocidos. De hecho, media entre estos dos períodos el desarrollo del álgebra sintáctica de amplio uso en la Italia del renacimiento.

La mayor limitación que tiene la Caja de Polinomios radica en que es imposible utilizarla para desarrollar de manera satisfactoria el concepto de variable, que está en el corazón del álgebra. Pero, por el contrario, es un rico instrumento para aprender toda la operatoria algebraica de polinomios estableciendo un vínculo entre lo tangible y lo puramente abstracto con novedosos mecanismos algorítmicos que se trasladas de manera inmediata al terreno simbólico.

La Caja de Polinomios es una herramienta que contribuye al desarrollo cognitivo, dinamizando los procesos de aprendizaje de las Matemáticas en diferentes grados y niveles de la Educación Formal. De hecho, la aplicación de este novedoso material didáctico depende de la creatividad docente, el grado de interés y motivación en la planeación y desarrollo de estrategias y, en consecuencia, es posible utilizarla desde el preescolar hasta el grado undécimo, sirviendo de mediador de los conceptos desde lo concreto a lo simbólico y hasta lo estrictamente abstracto y formal, tal como se observa en las demostraciones de irreductibilidad de polinomios a través del conteo de la cantidad de fichas que representan el polinomio y de las cuales se presentan en las guías, algunos ejemplos.

2.1 Estándares curriculares

A continuación, se presentan los estándares curriculares que pueden generar un desarrollo eficiente y una captación mental correcta cuando se utiliza como mediador la Caja de Polinomios, estándares que fueron determinados por docentes que conocieron del diseño de este instrumento.

2.1.1 Nivel Preescolar

1. Reconocer algunas figuras geométricas como cuadrados y rectángulos.
2. Agrupar objetos de acuerdo con diferentes atributos, tales como el color, la forma, ..., y armar figuras grandes y pequeñas
3. Señalar entre dos grupos o colecciones de objetos semejantes, el que contiene más elementos, el que contiene menos, o establecer si en ambos existe la misma cantidad.

2.1.2 Niveles Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Vocacional

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos

1. Clasificar conjuntos de acuerdo con el número de fichas que se encuentren en ellos.
2. Reconocer el significado de número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización en zonas).
3. Reconocer el efecto que tienen las operaciones básicas (sumas según las zonas, restas retirando una o varias fichas según las zonas, la multiplicación formando cuadrados o rectángulos con fichas iguales).
4. Resolver y formular problemas aditivos de composición y transformación, comparación e igualación y problemas de multiplicación.
5. Identificar en el contexto de la Caja de Polinomios, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
6. Comprender y ubicar los números negativos en el plano cartesiano y realizar sumas y restas con ellos.

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

1. Describir y argumentar matemáticamente acerca de figuras, formas y patrones que pueden ser vistos o visualizados.
2. Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y características (cuadrados y rectángulos).
3. Reconocer y aplicar traslaciones y giros de una figura en el plano.

4. Reconocer y justificar congruencias y semejanzas entre figuras (ampliar y reducir).
5. Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas.
6. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas

1. Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie) en diferentes situaciones.
2. Comparar y ordenar objetos respecto a atributos mensurables.
3. Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto.
4. Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
5. Reconocer el uso de las magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.
6. Calcular perímetros y áreas de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.
7. Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras geométricas, cuando es constante una de las dimensiones.

Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos

1. Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos.
2. Representar datos relativos a un entorno usando objetos concretos, usar diagramas de barras.
3. Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
4. Interpretar información presentada en el gráfico de barras.
5. Usar e interpretar la mediana (promedio), la media y la moda en un gráfico para describir el comportamiento de un conjunto de datos.
6. Reconocer la relación entre un conjunto de datos y su representación.
7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas o diagramas de barras.
8. Predecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística.

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos

1. Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico y geométrico entre otros).
2. Utilizar letras, figuras u otros símbolos para representar un objeto (fichas).
3. Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
4. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.

5. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).
6. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
7. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
8. Desarrollar la operatoria algebraica como adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios de una variable de grado dos y hasta cuarto grado.
9. Desarrollar técnicas para factorizar polinomios, en particular, la diferencia de cuadrados, la suma y diferencia de potencias impares, los trinomios cuadrados perfectos y otros trinomios factorizables de una variable.
10. Demostrar la reductibilidad e irreductibilidad de polinomios.
11. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos polinomios.
12. Aplicar los productos y cocientes notables.

Procesos Matemáticos

1. Planteamiento y resolución de Problemas.
    - Traducir problemas del lenguaje común al algebraico y resolverlos satisfactoriamente.
    - Idear un plan para resolver un problema y lo lleva a cabo con éxito.

2. Razonamiento Matemático
    - Presentar demostraciones directas o indirectas de proposiciones matemáticas significativas.
3. Comunicación Matemática
    - Utilizar lenguaje, notación y símbolos matemáticos para presentar, modelar y analizar alguna situación problemática.
    - Exponer ante una audiencia, de manera convincente y completa una temática inherente a polinomios con argumentos matemáticos eficientes.

Este material didáctico permite desarrollar toda la operatoria algebraica con polinomios de una variable hasta de grado cuarto. Los algoritmos disponibles en la Caja de polinomios son los que se enlistan a continuación, tomando en cuenta que se puede escribir más de millón y medio de polinomios de una vez con la cantidad de fichas disponibles en cada caja.

- Sumar polinomios de una variable
- Restar polinomios de una variable
- Multiplicar polinomios de una variable
- Factorizar polinomios de una variable
- Sustituir variables
- Ejecutar la geometría transformacional
- Dividir polinomios
- Resolver problemas de construcción de rectángulos referentes a perímetros y áreas, cuando uno de los dos parámetros es constante.
- Cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre polinomios

- Demostración de la reductibilidad o irreductibilidad de polinomios.
- Diversas competencias relacionadas con los estándares de matemáticas desde el nivel preescolar hasta el de formación media y en concordancia con tipos de pensamiento, que se describieron antes
- Resolución de ecuaciones lineales de una variable con solución entera.

2.1.3 El Significado Epistemológico y Didáctico de la Caja de Polinomios

Tradicionalmente, el conocimiento matemático escolar, desde los niveles iniciales, se ha rodeado de conceptos desafortunados a su propia naturaleza, como un conocimiento excluyente e intimidatorio que solo está al alcance de unos pocos privilegiados y en cambio para muchos significa fracaso, frustración y ansiedad.

Frente a este estado de cosas, los recursos para el trabajo en el aula de clase de matemáticas juegan un papel esencial para despertar sentimientos y actitudes positivas hacia las matemáticas, para desmitificarlas, y propiciar la participación y la integración y vencer los obstáculos emocionales responsables del aburrimiento, permitiendo ver que las matemáticas son una materia viva, llena de interés y útil dentro y fuera del aula.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que las dimensiones del desarrollo humano (corporal, cognitivo, comunicativo, socioafectivo, estética, espiritual, ...) no son independientes, sino que se presentan en forma simultánea y complementaria, permitiendo, cada una, el desarrollo del "archivo de habilidades" específicas de las distintas inteligencias del niño y del ser humano en general. De esta manera, acciones y actividades como la manipulación juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas. Teniendo en cuenta que lo que "se hace se aprende", es fundamental para la enseñanza de las matemáticas, el presentar inicialmente los conceptos a través de la manipulación de materiales, tanto por parte del estudiante en actividades debidamente orientadas, como por parte del profesor en demostraciones prácticas. La manipulación de objetos y de manera especial las figuras que conforman la Caja de Polinomios, guiada de manera inteligente por el profesor, conduce al estudiante al descubrimiento de muchos conceptos y relaciones, procesos y patrones de acción correspondientes a diversas situaciones matemáticas que pertenecen a la parte constitutiva de la estructura propiamente dicha de estas ciencias y en consecuencia llevan a dominar leyes y principios matemáticos generales.

Así mismo la visualización o experimentación de imágenes visuales en secuencia llevan al estudiante a una comprensión más profunda de los procesos matemáticos involucrados en una operación.

Aquí resulta conveniente precisar que las operaciones constituyen un aspecto fundamental en la construcción y desarrollo de los conceptos matemáticos, y en esta toma de conciencia de la posibilidad de realizar operaciones el sujeto desempeña un papel activo. Este hecho se constata en muchos episodios de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, la creación de los primeros sistemas de numeración marcó los inicios de la aritmética y de esta manera, no solo fue posible satisfacer las necesidades fundamentales del recuento, la simbolización de cantidades y acciones, de relaciones y transformaciones cuantitativas que se podrían realizar con los objetos, sino que además fue posible establecer las operaciones.

La toma de conciencia de la operatividad constituye un proceso gradual que cubre un largo período de la historia de las matemáticas y que apenas en el siglo XVI empezó a ponerse en evidencia, principalmente, con la obra de Simón Stevin. El atractivo y la utilidad del número, radican en que se trata de un concepto operatorio. Son precisamente las operaciones las que otorgan potencialidad al número.

El trabajo de Nicole Oresme hizo el más efectivo uso de diagramas geométricos, de intuición y de un sistema de coordenadas, para dar a sus demostraciones una convincente simplicidad lo cual marcó una etapa significativa hacia el desarrollo del cálculo, que es el ejemplo clásico de operatividad. En su modelo geométrico el campo operatorio lo constituye la teoría de las proporciones expuesta en los Elementos de Euclides. Dicho modelo al permitir la interpretación por medio de áreas, de ciertos problemas cinemáticos, hace posible el desprenderse de las formulaciones retóricas de los problemas y de esta manera beneficiar el surgimiento de un lenguaje con rasgos simbólicos que llevaría al Álgebra de Vièta. Así mismo Oresme suministró las técnicas por medio de las cuales Galileo demostró que "la distancia es proporcional al cuadrado del tiempo durante la caída libre de un cuerpo." El hecho de que la distancia recorrida pueda representarse mediante un área tiene un significado importante porque éste puede ser considerado como un "germen de la des-dimensionalización de las variables, lo cual constituye un paso necesario para la creación del lenguaje algebraico."

Esta sucinta y quizá fragmentada reflexión acerca de los distintos temas y aspectos de las matemáticas escolares permite poner en evidencia el fundamento epistemológico de la Caja de Polinomios y su valor como recurso didáctico para el aula.

El mundo moderno se ha tornado acucioso por la constante invención de artefactos de los que la escuela debe permitirse el lujo de su primigenia utilización como único recurso para ampliar el conocimiento. Y siempre ha sido así, los más remotos artefactos son signos y señales pictóricos de origen rupestre que datan de miles de años y que evolucionaron hasta convertirse en alfabetos, sistemas de numeración y sonidos. En estas representaciones pictóricas existe evidencia de la existencia de artefactos que lograron la sobrevivencia de la especie humana como las lanzas, los cuchillos, las flechas y el arado por mencionar algunos. Pero ninguno de ellos con tanto valor para sobrevivir como los alfabetos. Los alfabetos como los sistemas de numeración son alta tecnología, la más elevada y encumbrada entre todas, pues permiten compartir y procesar información y también compartirla, además, a través de ellos los objetos de las realidades se conviertan en instrumentos de las idealidades. Los dos mundos son diversos y al tiempo cercanos, por ejemplo, en el mundo de las realidades existen las mesas y las que vemos a nuestro alcance son limitadas y perceptibles; mientras que, en el mundo de las ideas, el concepto de mesa se torna ilimitado y accesible a la imaginación y por ello, en este mundo ideal emergen las mesas redondas, triangulares, pentagonales, de trípode o de múltiples patas y se va más allá confluyendo hacia conceptos más finos como el de la redondez.

Se observa a través del ejemplo expuesto que, la innovación y la creatividad jamás se detienen, se convierten en un mundo inacabado y aprovechable, más aún en este momento de gran auge de las llamadas tecnologías simbólicas. En el texto *Educación matemática: del signo al píxel*, el académico colombiano Luis Moreno

Armella (2014) explica la importancia de la escritura y del sistema decimal como elementos que permitieron mejorar la inteligencia de los seres humanos.

Ahora bien, en este contexto aparece la Caja de Polinomios que permite ejecutar toda la operatoria algebraica en $\mathbb{Z}[x]$. Como se explicará en la primera guía, este recurso resulta de la acumulación de las ideas de célebres pensadores como Euclides, Thábit ibn Qurra, Fermat y Descartes, sumadas a la visión creativa de los autores de este texto. Sumar, restar, multiplicar, dividir y factorizar polinomios se convierten en acciones tipo rompecabezas que recurren a pocas reglas de juego entre las que se cuentan las tres reglas básicas de la matemática en general: 1) el principio de identidad que asegura que todo objeto es idéntico consigo mismo, 2) La ley del tercio excluido que afirma que una cosa es una cosa o su contraria pero no nada intermedio y 3) la ley de no contradicción que impide que un objeto sea él y su contrario al mismo tiempo. Estas reglas se dinamizan, cobran vida en este recurso digital, tal y como lo hacen también cada una de las propiedades de las operaciones donde cobra valor el gran significado del cero como comodín en los procesos operatorios.

CAPÍTULO 03

ARTEFACTO DIGITAL PARA MANIPULACIÓN DE POLINOMIOS.

El juego operatorio algebraico de lo tangible a lo simbólico.

3.1 GUÍA No. 1. Historia y Fundamentación Matemática de la Caja de Polinomios

La Caja de Polinomios conjuga los aportes de cuatro matemáticos famosos: Euclides, siglo III a.C. quien con su libro *Los Elementos* entrega a la humanidad el primer texto científico perfectamente sistematizado; de este libro se extracta el teorema 43 del Libro I que permite la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones pero de igual área y que se apoya en la proposición 34 del mismo texto en la que demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales; así mismo se utiliza el tercer axioma o noción común en el cual Euclides asevera "*Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales*;" estos conceptos se revisarán más adelante. El segundo matemático es Thábit ibn Qurra, siglo X d.C. dedicado a la contemplación de las cantidades y quien de manera generosa presenta el concepto de homogeneización, el cual permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura. Por último, el juego extiende su aplicación a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del *plano cartesiano,* cuya creación se indilga a Pierre de Fermat y Renato Descartes, siglo XVII d.C. El plano cartesiano ideado por estos franceses conjuga sobre una misma representación la posición de un objeto en el tiempo, logrando describir de manera lógica y evidente una trayectoria.

Esta guía utiliza algunas de las concepciones de estos prohombres, que permitieron la existencia de un mediador del conocimiento algebraico que se ha llamado la Caja de Polinomios, como también algunos fundamentos matemáticos que encierra el juego.

1) La construcción de fichas de igual área, que se utilizan con el principio de sustitución en la Caja de Polinomios, se fundamenta en el teorema 43 de los elementos de Euclides y del que se dispone a continuación su enunciado y demostración, por ser importante para la discusión sobre el soporte matemático del material didáctico que acompaña a este libro de investigación.

Proposición 43. En cada paralelogramo los complementos de dos cualesquiera paralelogramos construidos alrededor de una diagonal del primer paralelogramo son iguales (equiextensos).

Demostración. Sea el paralelogramo $ABCD$ y AC una diagonal; y alrededor de ACsean EH y FG paralelogramos y BK, KD paralelogramos llamados complementos; se trata de demostrar que BK es igual al complemento KD.

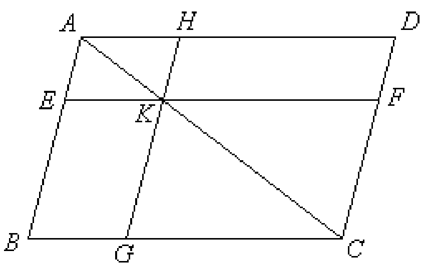


Figura 7 Fuente propia.

Como $ABCD$ es un paralelogramo y AC es una de sus diagonales los triángulos ABC y ACD son iguales. Nuevamente y como EH es un paralelogramo y AK es su diámetro, los triángulos AEK y AHK son iguales.

Por la misma razón, los triángulos KFC y KGC también son iguales. Ahora, como el triángulo AEK es igual al triángulo AHK y KFC igual a KGC, el triángulo AEK junto con KGC es igual al triángulo AHK junto con KFC.

El triángulo total ABC también es igual al triángulo total ADC; en consecuencia, los complementos BK y KD que son las partes restantes también son iguales. Y con esto termina la prueba.

La demostración presentada por Euclides se apoya en la proposición 34, "*En las áreas de los paralelogramos, los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales*." Y también utiliza la tercera noción común o axioma que explicitó en el libro I de los Elementos "*Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales*." Estas dos conclusiones permiten evidenciar la siguiente demostración sin palabras.

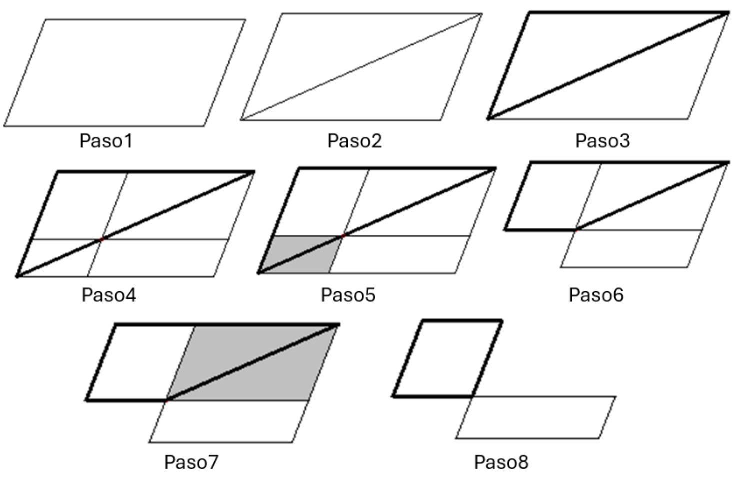


Figura 8 Fuente propia.

Con este recurso es factible construir una ficha equivalente en área a otra de diferentes dimensiones; en particular se puede replicar una ficha rectangular equivalente con una cuadrada cuando se da uno de sus lados con sólo repetir la construcción de la proposición 43 tal y como de manera gráfica se explica en la siguiente secuencia y que parte del cuadrado dado y de un lado del futuro rectángulo como se indica en la gráfica que aparece a la derecha.

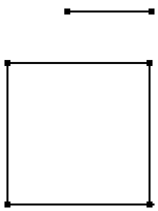


Figura 9 Fuente propia.

La construcción, parte de la prolongación del lado izquierdo del cuadrado en una longitud igual a la del lado del rectángulo. La secuencia gráfica que sigue, indica el procedimiento a seguir.

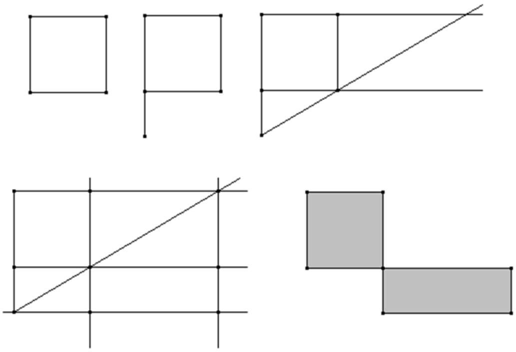


Figura 10 Fuente propia.

Y con esto, se tiene dos fichas de diferentes dimensiones, pero con igual área.

3.1.1 ACTIVIDAD 1

Subrayar los nombres de los matemáticos que han aportado conceptos en la existencia de la Caja de Polinomios.

1. Isaac Newton	2. Arquímedes	3. Euclides
4. Thábit ibn Qurra	5. Eratóstenes	6. Pierre Fermat
7. Luis Cauchy	8. Renato Descartes	9. Pitágoras

Definir brevemente cada uno de los siguientes conceptos:

Caja de Polinomios.

Homogeneización.

Plano Cartesiano.

Rectángulo.

3.1.2 ACTIVIDAD 2

Construir un rectángulo cuya área sea igual a la de un cuadrado b^2 si uno de sus lados es $\frac{b}{2}$. Estudiar la relación existente entre los lados del rectángulo.

Construir un rectángulo cuya área sea igual a la de un cuadrado b^2 si uno de sus lados es $2b$. Estudiar la relación existente entre los lados del rectángulo.

3.1.3 ACTIVIDAD 3

Siguiendo el proceso de construcción indicado en el teorema 43 del libro I de *Los Elementos* de Euclides, construir rectángulos de igual área que los cuadrados dados b^2 si uno de los lados del rectángulo es el segmento a.

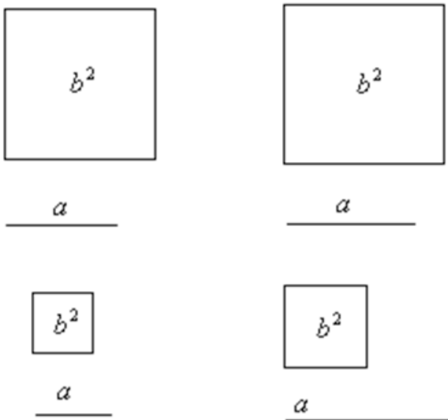


Figura 11 Fuente propia.

2) Este método de anexión de áreas permite resolver problemas que conducen a ecuaciones lineales y a ecuaciones cuadráticas y es un avance de corte algebraico conocido y desarrollado por los griegos 300 años antes de nuestra era. De aquí, debe saltarse al siglo X para inspirarse en el *criterio de homogeneización* de Thábit a fin de consolidar el proyecto que ha culminado en convertir a los polinomios en objetos tangibles siempre que sus coeficientes sean números enteros o también racionales.

En la página 57 del libro *Recorriendo el Álgebra* editado por Colciencias y escrito por Myriam Acevedo de Manrique y Mary Falk de Losada, se expone brevemente sobre el uso de unas tarjetas rectangulares que posibilitan la representación de polinomios de grado dos en una variable y con coeficientes enteros positivos. Se otorga el crédito de la idea central a Thábit ibn Qurra, algebrista árabe que murió en el año 901.

Thábit ibn Qurra es el matemático árabe, segundo en importancia después de Muhammad ben Musa al-Khwarizmi y antes de Omar Khayyam. Thábit murió en el año 901 de nuestra era y su nacimiento se ubica entre los años 824 al 836. Thábit es uno de los primeros en identificar una dificultad relacionada con la interacción entre las soluciones algebraica y geométrica de una ecuación cuadrática, dificultad que determina no sólo los orígenes del Álgebra, sino que también alumbra el camino de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática.

Al intentar solucionar problemas que ahora se representarían de la forma $x^2 + mx = n$, Thábit ibn Qurra evidencia que no se puede igualar área con longitud, ni áreas y longitudes con números (objetos adimensionales) e introduce una unidad de medida (e) que le permite escribir la ecuación anterior como.

$$x^2 + m(e)x = n(e)^2.$$

El mecanismo de introducir (e) se conoce como proceso de homogeneización y ha permitido elaborar una representación geométrica que se usa para factorizar, multiplicar, dividir, sumar y restar expresiones cuadráticas de manera tangible mediante la utilización de fichas que se consiguen en sitios especializados o se elaboran en las instituciones escolares, como las que se representan a continuación. Estas fichas con la incorporación de la unidad de medida se representan mediante rectángulos que concretizan ciertas medidas de áreas.

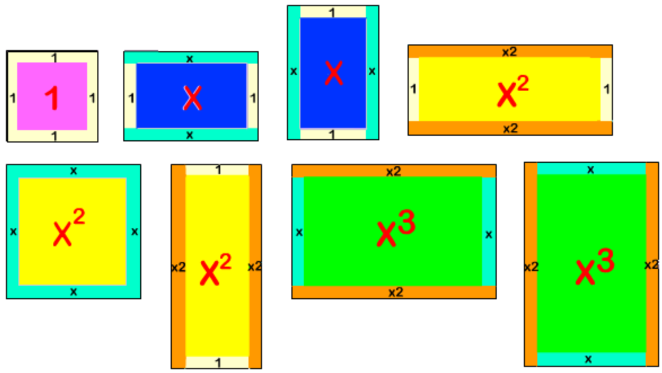


Figura 12 Fichas del software. Fuente propia.

La interpretación geométrica de Thábit ibn Qurra permite adoptar x^2 como un cuadrado de lado x, la variable x está representada por un rectángulo de lados x y 1 y el 1 es un cuadrado de lado 1. Así las cosas, la factorización de $x^2 + 4x + 4$, por ejemplo, se realiza tomando un cuadrado x^2, cuatro rectángulos x y cuatro cuadrados 1, para proceder con ellos a configurar un rectángulo en el que las figuras vecinas tienen coincidencia en la longitud de sus lados.

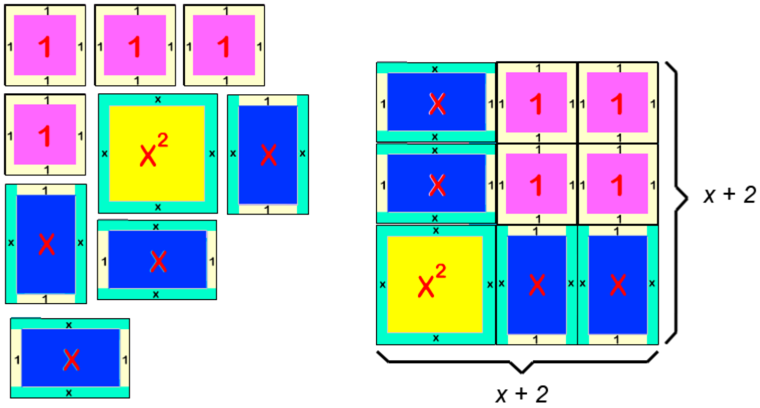


Figura 13 Fuente propia.

El gráfico anterior decide de manera evidente que $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ como se ve al igualar la suma de las áreas de todas las fichas con el área del cuadrado que se puede configurar con ellas, al multiplicar sus lados.

El trabajo de homogeneización de una ecuación introduciendo una unidad de medida (e) permitió convertir expresiones unidimensionales y adimensionales en áreas rectangulares y al dividir objetos de dimensiones superiores por potencias adecuadas de (e), se consigue representar cualquier polinomio en enteros como una suma de áreas; así, $\frac{x^3}{e}, \frac{x^3}{e^2}, \ldots$ son expresiones algebraicas que se pueden concretizar como rectángulos. En estas guías, se hace un estudio sobre este tipo de trabajo con polinomios de grado superior a 2 introduciendo de manera tangible el recurso matemático del cambio de variable de uso frecuente en el estudio del Álgebra y del Cálculo. El cambio de variable se posibilita por el concepto de homogeneización de expresiones permitiendo tratar exclusivamente con rectángulos y es el fundamento central de estas guías y de la construcción del material didáctico que la acompaña.

Los griegos hicieron esfuerzos sobresalientes por representar de manera geométrica ciertas entidades algebraicas; fruto de estos esfuerzos es la aparición de un cálculo denominado Álgebra Geométrica cuyos elementos primarios son los segmentos de recta. En este sentido, la representación de números mediante segmentos es más amplia puesto que números de la forma $\sqrt{n}$ son construibles con regla y compás. Estos números, si no son cuadrados perfectos, son números irracionales que por aquella época eran desconocidos.

Con los segmentos, como una forma de representación más amplia, fueron definidas todas las operaciones básicas elementales; la suma consistía en anexar un segmento a continuación de otro, la sustracción era la eliminación de una parte de un segmento, la multiplicación condujo a la construcción bidimensional de un rectángulo y si el producto era de tres factores, este se leía con la construcción de un paralelepípedo; el producto de un número mayor de tres factores no podía considerarse; y por último, la división se podía efectuar siempre que la dimensión del dividendo no fuese menor que la del divisor. En resumen, el concepto de homogeneización permite representar cualquier potencia de x en los mundos unidimensional, bidimensional o tridimensional, según se requiera como se indica en los siguientes gráficos:

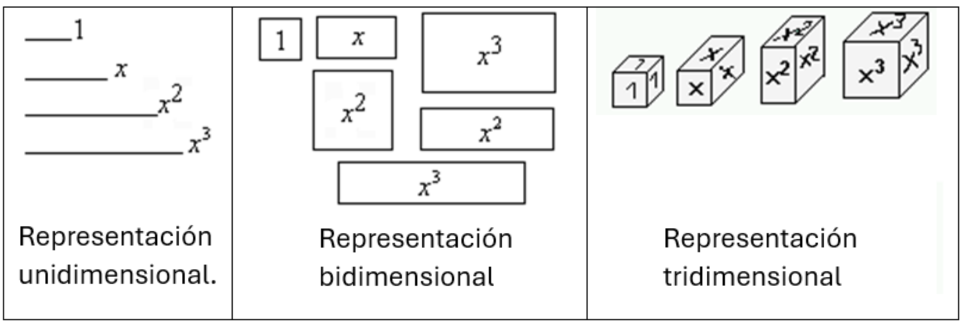


Figura 14 Representación en dimensiones. Fuente propia.

3.1.4 ACTIVIDAD 4

Señalar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos (V) y cuáles falsos (F). Utilice los paréntesis ubicados al comienzo de cada proposición.

() Todo polinomio de grado 2 en una variable se puede representar como una figura rectangular.

() Todo polinomio de grado 2 en una variable se puede representar como una figura poligonal.

() Toda figura poligonal conformada con fichas de la Caja de Polinomios representa a un polinomio.

() Thábit ibn Qurra, es el primer matemático del que se tiene noticia logra representar cualquier polinomio de una variable de una manera sucinta, representación basada en el concepto de área.

() La idea original de Thábit, permite la representación de polinomios siempre que sus coeficientes sean positivos.

3) El trabajo de representar en un solo elemento la posición de un objeto en un tiempo determinado hizo concebir a Renato Descartes el plano cartesiano, que en nuestros días ha tomado la apariencia que se muestra a continuación en la figura 4.

Este plano cartesiano, permite el desarrollo operatorio algebraico con polinomios de coeficientes enteros siendo que en el primer y tercer cuadrantes se disponen los términos con coeficientes positivos y en el segundo y cuarto los de coeficientes negativos.

Como todo el juego operatorio, se fundamenta en la construcción de rectángulos alrededor del origen, los ejes coordenados son fundamentales para determinar las dimensiones de los rectángulos que se construyen; tal y como se mostrará en las guías subsiguientes:

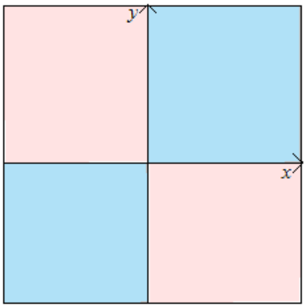


Figura 15 Plano cartesiano de la Caja de Polinomios. Fuente propia.

3.1.5 ACTIVIDAD 5

Discutir las razones por las cuales las fichas ubicadas en los cuadrantes PRIMERO y TERCERO son positivas y si se ubican en los cuadrantes SEGUNDO y CUARTO son negativas.

Sobare el plano de la Figura 4, señalar las partes positiva y negativa de cada uno de los ejes coordenados.

4) La Caja de Polinomios contiene 11 clases de fichas; con ocho de estas clases se puede realizar todo el juego operatorio con polinomios de cuarto grado en una variable; pero en teoría el grado es ilimitado, sólo que la cantidad de clases de fichas aumentaría de forma polinómica, lo que la haría inmanejable.

El número de clases de fichas para trabajar con polinomios de grado n está dado por la expresión

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 4n}{4} & si\ n\ es\ par \\ \dfrac{n^2 + 4n - 1}{4} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Por ejemplo, las fichas básicas para trabajar con polinomios de grado 2 son 3 y se muestran a continuación con sus dimensiones.

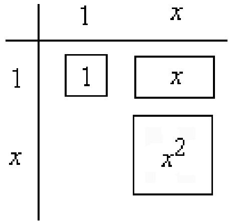


Figura 16 Fuente propia.

Las fichas básicas para acceder al trabajo con polinomios de grado 3 son 5 y se han representado en la Figura 6.

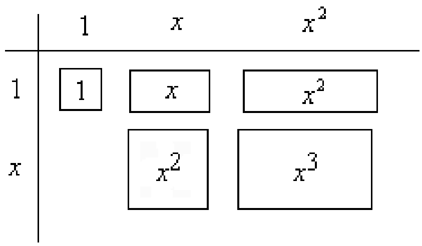


Figura 17 Fuente propia.

En la Figura 7 se ha dispuesto la cantidad de fichas requeridas para el desarrollo operatorio con polinomios de grado 4.

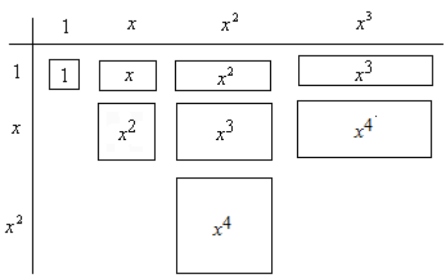


Figura 18 Fuente propia.

En la siguiente tabla se disponen algunos valores sobre la cantidad de fichas requeridas para representar polinomios de acuerdo con un grado determinado.

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Clases de Fichas	1	3	5	8	11	15	19	24	29	35	41	48	55	63

Como puede verse, acceder con el rompecabezas a grados altos significa producir demasiadas clases de fichas lo que tornaría al instrumento en un recurso inmanejable.

3.1.6 ACTIVIDAD 6

Discutir y diseñar las clases de fichas que se requieren para desarrollar la operatoria algebraica con polinomios de grado 5 y 6 en una variable.

Discutir y diseñar las clases de fichas que se requieren para desarrollar la operatoria algebraica con polinomios de grado 3 en dos y tres variables.

3.1.7 PARA RECORDAR

La existencia de la Caja de Polinomios como instrumento mediador del conocimiento algebraico y particularmente de su desarrollo operatorio se fundamenta en los tres siguientes conceptos.

Concepto de sustitución de variables, que tiene su raíz en el Teorema 43 del Libro I de los *Elementos* de Euclides, el cual permite la construcción de fichas rectangulares de diferentes dimensiones, pero con igual área.

Concepto de Homogeneización, originado en la preocupación de representar de manera coherente un polinomio, como la anexión de áreas rectangulares; problema que discute y soluciona el matemático árabe Thábit ibn Qurra.

Concepto de Plano Cartesiano, cimentado en las ideas de los franceses Pierre Fermat y Renato Descartes. La idea de situar un objeto de acuerdo con un sistema coordenado brinda el contexto adecuado para representar polinomios de una o más variables de manera tangible, sin importar que algunos o todos los coeficientes sean enteros negativos.

Sir Isaac Newton legó a la humanidad su visión del mundo amparado en las ideas de Apolonio, Kepler, Copérnico, Galileo, Eratóstenes, ..., y dijo que no hubiese podido hablar sobre la gravedad "sin estar parado en hombros de gigantes." Igual, la Caja de Polinomios se traduce en un elemento que no existiera sin las ideas de Euclides, Thábit ibn Qurra, Fermat y Descartes. Claro, y sin nuestra preocupación docente.

De esta manera, la Caja de Polinomios se convierte en un instrumento mediador del conocimiento que presenta una nueva forma de representar las expresiones algebraicas, representaciones que, a su vez en el desarrollo operatorio construyen algoritmos y procedimientos novedosos que se ejecutan a modo de un rompecabezas. *La Caja de Polinomios,* incorpora lo lúdico a la aprehensión del conocimiento y es una de las razones por las que ese conocimiento es significativo y perdurable.

3.2 GUÍA N°2

La Caja de Polinomios es un proyecto de la Universidad de Nariño cuyo origen se establece en el siglo III con el gran Euclides, continúa en el siglo X con los trabajos del árabe Thábit ibn Qurra, luego en el siglo XVII con Pierre de Fermat y Renato Descartes y finaliza en el siglo XX con la utilización de los recursos dados en los pasos anteriores y el trabajo de docentes del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Nariño ubicada en la Ciudad de San Juan de Pasto, Colombia.

La Caja de Polinomios es un rompecabezas que permite estudiar el desarrollo operatorio de polinomios de manera recreativa, hace una mediación tangible del conocimiento y logra instalarlo de manera simbólica de una manera significativa.
Objetivo: medir el perímetro de figuras poligonales armadas con las fichas de la Caja de Polinomios siguiendo las reglas establecidas para la anexión de fichas vecinas.

1) El rompecabezas en su versión tangible contiene 80 fichas divididas en 8 clases; las del primer tipo, y que se muestran a continuación permiten desarrollar toda la operatoria con polinomios en una variable, hasta de grado cuatro. La versión virtual de la Caja de Polinomios permite el estudio de polinomios de hasta grado 3 en una sola variable. Ver Figura 2.

Las fichas rotuladas con 1 son cuadrados de lado 1 y por tanto su perímetro (longitud del contorno) es igual a 4; las fichas rotuladas como x son rectángulos de lados x y 1, lo que hace que su perímetro sea de $2x + x$ unidades de longitud; las fichas rotuladas con x son cuadrados de lado x y por ello su perímetro es $4x$.

2) Por anexión, con varias de estas fichas se pueden configuras variadas formas poligonales; particularmente se pueden formar rectángulos. Para realizar esta tarea se debe tener presente una única regla: *fichas vecinas deben coincidir en su lado de vecindad*. Cuando no es posible que esto ocurra, el contacto de vecindad se obliga a ser un vértice. Las siguientes figuras poligonales se han formado respetando la regla y por tanto son disposiciones correctas.

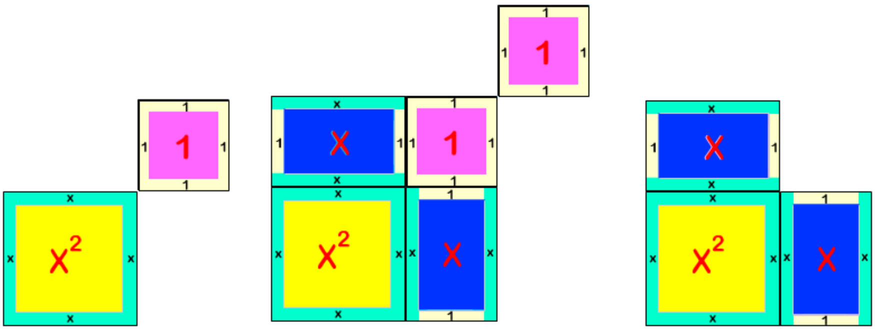


Figura 19 Fichas por anexión. Fuente propia.

A continuación, se disponen algunas figuras que no respetan la regla y por lo tanto son incorrectas.

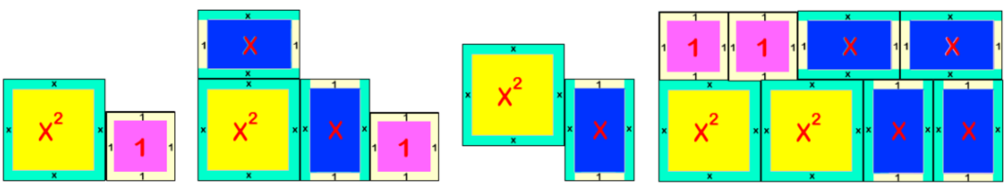


Figura 20 Fichas mal anexadas. Fuente propia.

3.2.1 ACTIVIDAD 1

Con las fichas de la Caja de Polinomios; presentar al profesor o guía tres disposiciones correctas y tres incorrectas; señalar la razón o razones del porqué de aquellas que son incorrectas.

2) Sobre disposiciones poligonales correctas, es de interés el cálculo de su perímetro que es la longitud del contorno. Debajo de cada una de las siguientes figuras poligonales se ha calculado y escrito su perímetro.

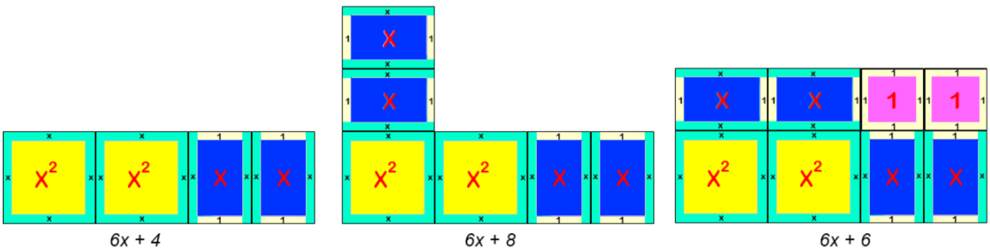


Figura 21 Perímetro de polígonos. Fuente propia.

3.2.2 ACTIVIDAD 2

Armar las siguientes figuras poligonales y calcular su perímetro.

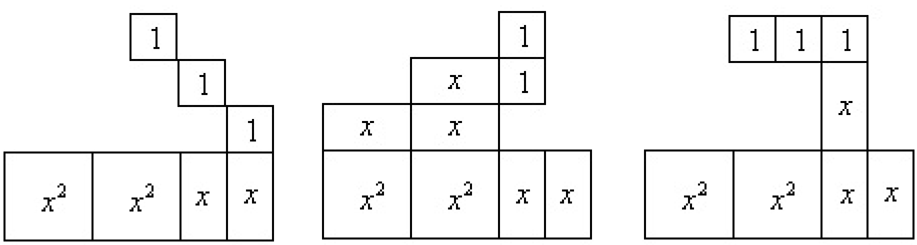


Figura 22 Fuente propia.

3.2.3 ACTIVIDAD 3

Armar figuras poligonales a voluntad y calcular su perímetro.

3.2.4 ACTIVIDAD 4

Determinar que las tres siguientes figuras poligonales siendo diferentes, poseen el mismo perímetro y calcularlo.

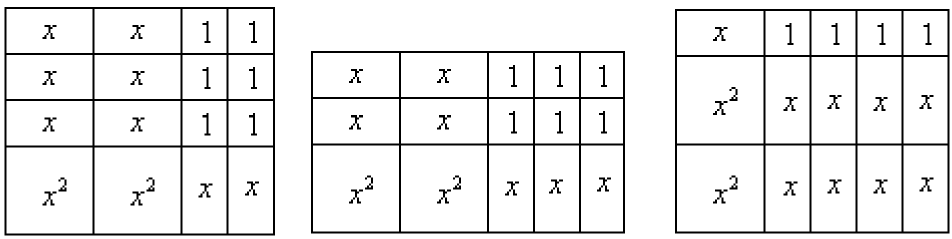


Figura 23 Fuente Propia.

Se observa que las tres figuras anteriores son rectángulos.

3.2.5 ACTIVIDAD 5

3) Diseñar parejas de rectángulos que, siendo diferentes, tengan el mismo perímetro.

Se percibe imposible la existencia del álgebra sin el puente aritmético, lo contrario es posible, esto dignifica que todo lo del ambiente numérico se sumerge en lo algebraico y con ello, el álgebra exhibe procesos mentales más abstractos que la propia aritmética. Esto sucede porque el hombre moderno ha sufrido tres transiciones importantes en el área cognitiva de la matemática: la mimética que permitió el empleo del cuerpo como sistema de representación, la fase de la oralidad (Acevedo y Falk, 2004) que se vehiculiza con los alfabetos en la configuración de las palabras y que dinamiza lo pensado, es decir, el lenguaje permite intervenir en el mundo de las ideas. Solo esto justifica que este paso sea superior al anterior y que aparezcan vinculados, como se ve en la gesticulación y uso de las manos, en los discursos de los oradores. El tercer momento de transición cognitiva aparece con la invención y producción de memoria externa que ha evolucionado desde los huesos que permitieron señalar cantidades con marcas hechas por herramientas afiladas, hasta los actuales sistemas de cómputo que son la manifestación de la complejidad de los actos humanos y la necesidad de conservar y procesar la información (Fiallo y Parada, 2018). De este modo, el instrumento tecnológico que se presenta en este libro aparece como respuesta a la necesidad escolar de enseñar los algoritmos algebraicos teniendo en cuenta el álgebra en la ciencia de las identidades.

3.3 GUÍA No.3. Lectura y Escritura de Polinomios

La Caja de Polinomios permite estudiar polinomios de coeficientes enteros. Para ello se requiere de la utilización del plano cartesiano incorporado en el rompecabezas.

Objetivo: leer y escribir polinomios de una variable y de grado dos usando de manera adecuada el plano cartesiano.

Un contexto fundamental para utilizar la Caja de Polinomios es el plano cartesiano, pieza del rompecabezas. Sus cuadrantes permiten escribir cualquier polinomio, para ello, recordemos que el plano está dividido en cuatro cuadrantes.

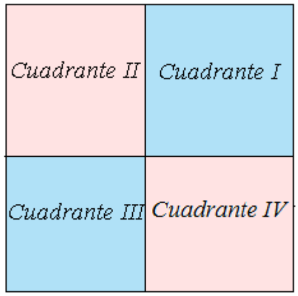


Figura 24 Cuadrantes del tablero de la Caja de Polinomios. Fuente propia.

En el primer cuadrante las coordenadas (x, y) de cada punto son positivas y en el tercer cuadrante las coordenadas son negativas, por tanto, las fichas de la Caja de polinomios que se ubiquen en estos cuadrantes corresponden a términos positivos del polinomio. En el segundo cuadrante, las coordenadas de un punto (x, y) muestran que su abscisa x es negativa y su ordenada y positiva, mientras que, en el cuarto cuadrante, la abscisa es positiva y la ordenada es negativa, de donde se deduce que las fichas ubicadas en estos cuadrantes representen términos negativos del polinomio. De acuerdo con lo anterior, las fichas se ubican en concordancia con el valor algebraico que poseen como se muestra en la siguiente gráfica.

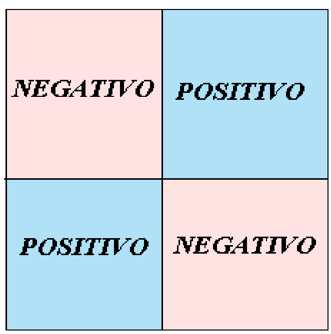


Figura 25 Signos de los cuadrantes. Fuente propia.

Algunas de las representaciones posibles del polinomio $x^2 + x - 1$ se muestran enseguida.

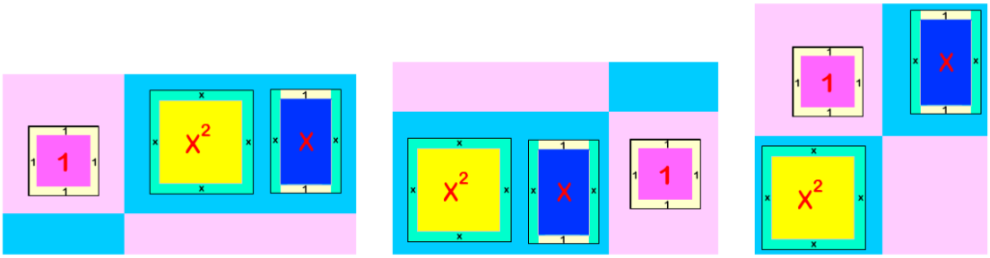


Figura 26 Representaciones posibles del polinomio x^2+x-1. Fuente propia

3.3.1 ACTIVIDAD 1

Unir con una línea la representación gráfica que corresponde a cada uno de los siguientes polinomios.

a) $2x^2 + 2x + 2$ b) $2x^2 + x - 4$ c)$x^2 + 5x - 4$

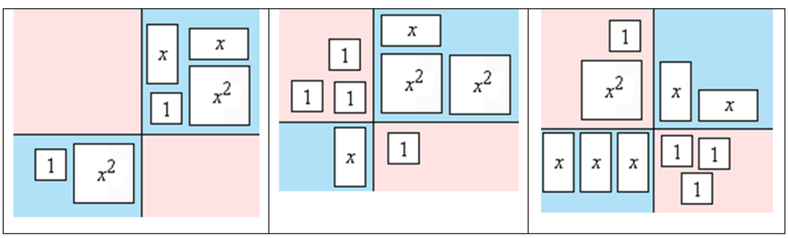


Figura 27 Fuente propia.

3.3.2 ACTIVIDAD 2

Representar cada uno de los siguientes polinomios que se han escrito sobre diferentes planos cartesianos, de una manera diferente.

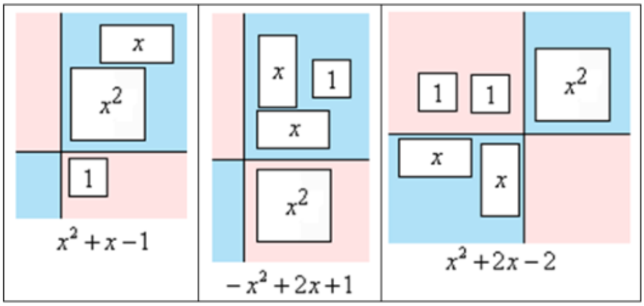


Figura 28 Fuente propia.

3.3.3 ACTIVIDAD 3

Leer cada uno de los polinomios que se han escrito en los siguientes planos cartesianos.

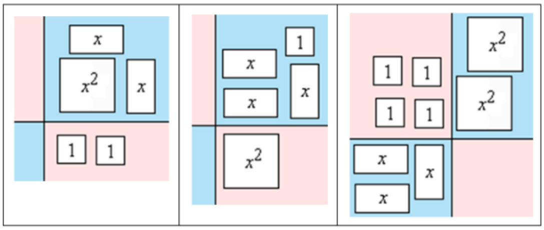


Figura 29 Fuente propia.

Observación. Las siguientes gráficas representan al polinomio cuadrático $\boldsymbol{p(x) = x^2 + 2x - 1}$.

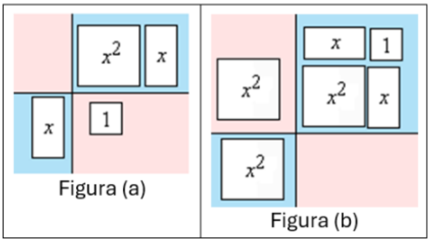


Figura 30 polinomio cuadrático $\boldsymbol{p(x) = x^2 + 2x - 1}$. Fuente propia.

La Figura (a) utiliza la menor cantidad de fichas posibles para la representación del polinomio $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, la Figura (b) representa al mismo polinomio $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ pero posee cuatro fichas (número par), más que la figura (a), dado que en el segundo cuadrante (negativo) y en el tercer cuadrante (positivo), las fichas $\boldsymbol{x}^{2}$ que se han ubicado, tienen signo contrario y equivalen algebraicamente a 0 (cero); lo mismo sucede con un par de fichas $\mathbf{1}$ ubicadas una en el primer cuadrante y otra en el cuarto.

3.3.4 ACTIVIDAD 4

Leer los polinomios que se han representado en los siguientes planos cartesianos y reescribirlos utilizando la menor cantidad de fichas posibles.

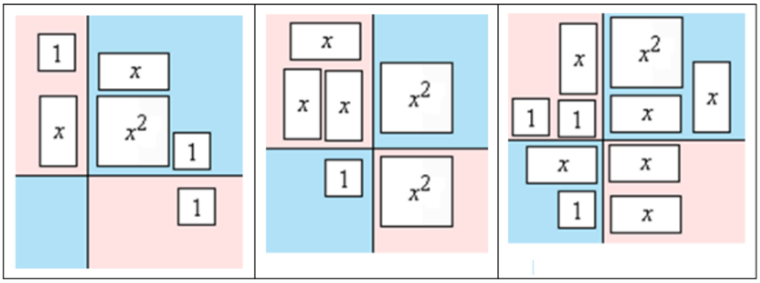


Figura 31 Fuente propia.

Para leer un polinomio, es conveniente retirar los pares de fichas que equivalen algebraicamente a cero.

3.3.5 ACTIVIDAD 5

Escribir en su cuaderno de trabajo los polinomios representados en los siguientes planos cartesianos.

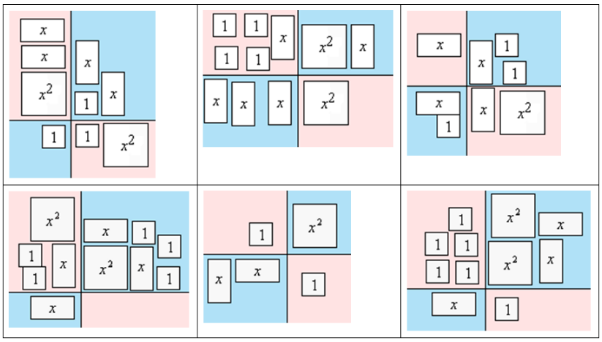


Figura 32 Fuente propia.

3.3.6 ACTIVIDAD 6

Representar de tres formas distintas en los planos de abajo, el polinomio $\boldsymbol{p(x) = 2x^2 - 3x + 2}$ utilizando parejas de fichas que equivalgan algebraicamente a cero.

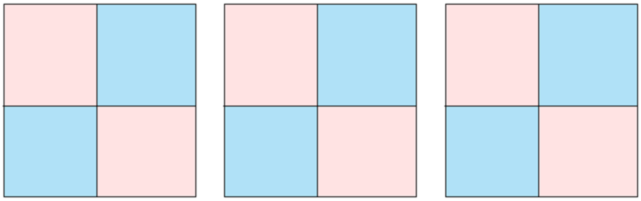


Figura 33 Fuente propia.

3.3.7 ACTIVIDAD 7

Por agregación de ceros, representar en la Caja de Polinomios las siguientes expresiones, al menos de dos maneras diferentes.

$\boldsymbol{p(x) = x^2 - 3x + 1}$	$\boldsymbol{q(x) = x^2 - 3x - 2}$	$\boldsymbol{s(x) = 1 - x^2}$
$\boldsymbol{r(x) = x^2 - 2x}$	$\boldsymbol{p(x) = 2x^2 - x + 1}$	$\boldsymbol{u(x) = x^2 + 4x - 3}$
$\boldsymbol{p(x) = -x^2 - 2x + 1}$	$\boldsymbol{v(x) = -2x^2 + x - 1}$	$\boldsymbol{w(x) = x^2 + 3x - 4}$

3.3.8 ACTIVIDAD 8

Repetir en el plano cartesiano de la Caja de polinomios las siguientes disposiciones de fichas, a continuación, retirar los pares de fichas que representen un CERO (0) y por último leer y escribir debajo de cada figura el polinomio que representan.

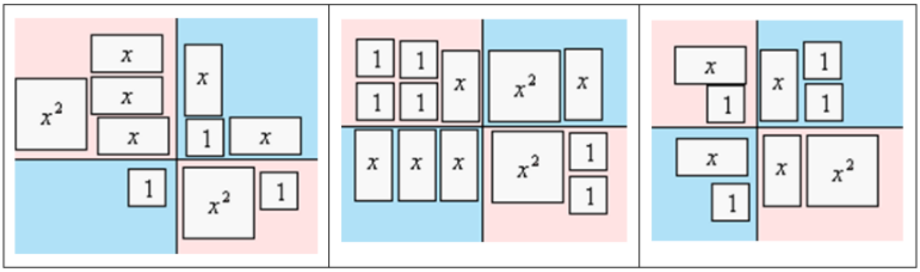


Figura 34 Fuente propia.

3.3.9 ACTIVIDAD 9

Representar, en el cuaderno de trabajo, utilizando el plano cartesiano y la menor cantidad de fichas posible, los siguientes polinomios:

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1 \qquad q(x) = x^2 - x + 2 \qquad r(x) = 1 - 2x^2$$
$$s(x) = 2x^2 - 3x \qquad t(x) = 2x^2 - x + 1 \qquad u(x) = x^2 + x - 4$$
$$v(x) = -2x^2 - x + 1 \qquad w(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad h(x) = -2x^2 - 5x - 4$$

3.3.10 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite representar polinomios de tal manera que

1) las fichas tienen unas dimensiones particulares; la longitud de sus lados es una característica importante.

2) el valor algebraico de cada ficha corresponde con el rótulo que contiene y que la identifica.

3) la ubicación de cada ficha en el plano cartesiano establece para ella un valor relativo que puede ser positivo o negativo.

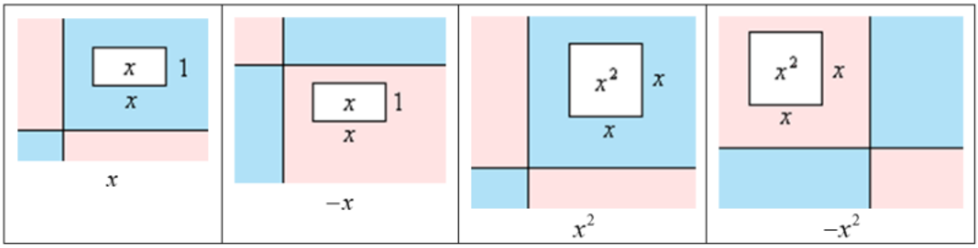


Figura 35 Valor relativo de una ficha. Fuente propia.

La gráfica anterior refuerza las características descritas en los párrafos precedentes y que son fundamentales para el desarrollo del juego operatorio algebraico.

4) Para hacer una adecuada lectura de los polinomios que se representan en el tablero en aconsejable y conveniente retirar los pares de ceros que se presenten. Sin embargo, es necesario advertir que en el desarrollo operatorio (adición, sustracción, multiplicación, división, factorización, resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y respuesta entera), se pueden agregar parejas de ceros con el fin de completar rectángulos que representen a determinado polinomio.

Este artefacto digital disminuye la tensión existente entre lo intuitivo e inductivo y lo estrictamente formal puesto que permite el paso a la consecución de resultados formalmente deductivos desde la manipulación y observación hasta la inmersión mental de los polinomios. Es decir, del momento de observar polinomios en el artefacto, ellos se convierten de inmediato en ideas o sujetos mentales, habitan la idea. Y solo con precipitar en la mente la concepción de un polinomio ya se está posibilitando el chance de intervenir en él a través de la dinámica del juego operatorio.

No se puede olvidar que el álgebra es el recurso más valioso de la matemática, en sí mismo es un artefacto de acciona su progreso, sin él, la matemática sería tan solo un instrumento defectuoso y no el gigante que alarga sus brazos con la intención de hacer una descripción completa del universo y permitir al hombre habitar el paraíso de las ideas y de los conceptos.

René Thom asevera que “el verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza de la matemática no es el del rigor sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos...” He aquí, un instrumento, un artefacto, que disminuye tal dificultad (Thom, 1973).

3.4 GUÍA No. 4. Adición y Sustracción de Polinomios Cuadráticos

La Caja de Polinomios es una herramienta pedagógica que posibilita el aprendizaje del Álgebra de polinomios, en cuanto a la operatoria del llamado pensamiento variacional. En particular, permite realizar adición y sustracción de polinomios.

Objetivo: calcular la suma y la diferencia de polinomios de grado dos en una variable, utilizando la Caja de Polinomios como herramienta de cálculo.

3.4.1 ADICIÓN

Para calcular la suma de $p(x)$ y $q(x)$ es conveniente escribir el primer sumando $p(x)$ utilizando únicamente los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO; el sumando $q(x)$ se escribe, en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.

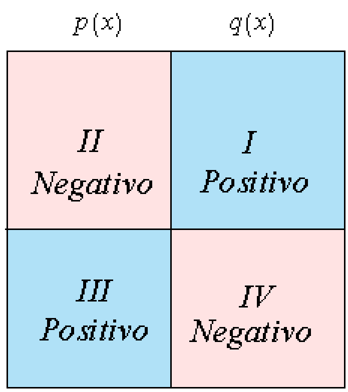


Figura 36 Cuadrantes para p(x) y q(x). Fuente propia.

Sumar es sinónimo de AGREGAR, de modo que la suma se calcula leyendo el polinomio que queda escrito en TODO EL TABLERO (Plano Cartesiano).

Recuerde que para leer un polinomio es aconsejable retirar del plano todos los CEROS que se produzcan.

Ejemplo. Para efectuar la adición del polinomio

$p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ con $q(x) = -x^2 + x - 2$

se realizan los siguientes pasos:

1. Escribir el polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ en los cuadrantes segundo y tercero.

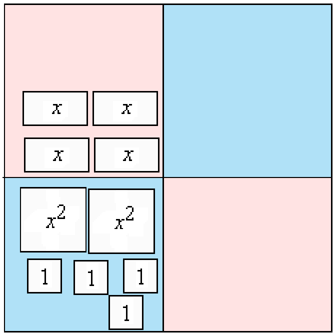


Figura 37 Escritura del polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Fuente propia.

2. Escribir el polinomio $q(x) = -x^2 + x - 2$ en los cuadrantes primero y cuarto.

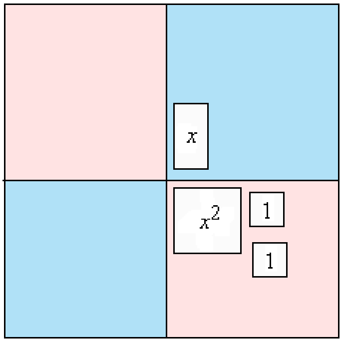


Figura 38 Escritura del polinomio $q(x) = -x^2 + x - 2$. Fuente propia.

Al ejecutar los dos pasos anteriores el tablero toma la siguiente apariencia.

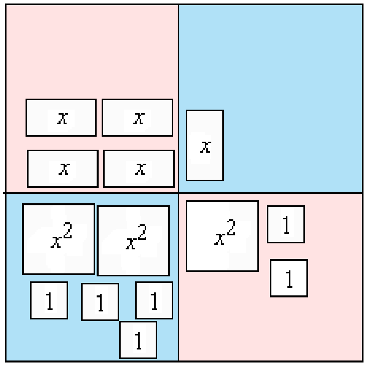


Figura 39 Polinomios p(x) y q(x) en el tablero. Fuente propia.

3. Retirar del plano, si las hubiere, los pares de fichas que equivalgan algebraicamente a cero; con lo que se obtiene lo que sigue.

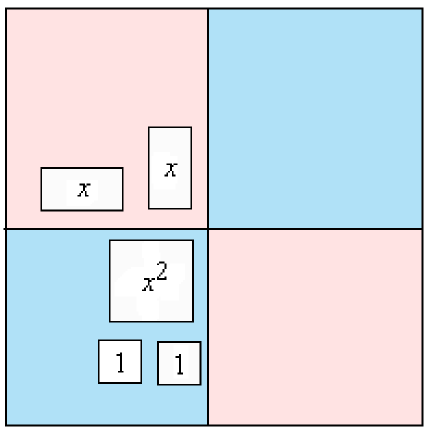


Figura 40 Retiro de fichas que suman cero. Fuente propia.

4. Leer el polinomio que queda escrito en TODO el tablero, tal y como se ve en el plano anterior; es decir, $x^2 - 2x + 2$. De esta forma se obtiene que $(2x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 2) = x^2 - 2x + 2$

Debido a que el Álgebra es un juego operatorio simbólico es necesario indicar mediante símbolos lo que de manera concreta se ha realizado en el tablero. De lo anterior se deduce que la suma de $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ con

$q(x) = -x^2 + x - 2$ es $x^2 - 2x + 2$, lo que simbólicamente se representa como

$$(2x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 2) = 2x^2 - 3x + 4 - x^2 + x - 2$$

Cuando en la Caja se ejecuta la suma, eliminando los pares de fichas equivalentes a 0, se está realizando la tarea simbólica de agrupar los términos de la siguiente forma

$$p(x) + q(x) = x^2 + (x^2 - x^2) - 2x + (x - x) + 2 + (2 - 2)$$

Puesto que cada expresión entre paréntesis igual a cero se obtiene que

$$p(x) + q(x) = x^2 - 2x + 2$$

3.4.1.1 ACTIVIDAD 1

Efectuar la adición de $p(x) = -2x^2 + x - 3$ y $q(x) = x^2 - 4x + 5$ realizando los siguientes pasos:

1. Ubicar $p(x) = -2x^2 + x - 3$ en el segundo y tercer cuadrantes.
2. Ubicar $q(x) = x^2 - 4x + 5$ en el primero y cuarto cuadrantes.
3. Retirar los pares de fichas que equivalgan algebraicamente a cero.
4. Leer el polinomio resultante.
5. Escribir en el cuaderno de trabajo la expresión obtenida.
6. Representar simbólicamente el procedimiento descrito en los pasos 1 a 4.

3.4.1.2 ACTIVIDAD 2

Calcular, utilizando la Caja de Polinomios, las sumas de los siguientes pares de polinomios $\boldsymbol{p(x)}$ y $\boldsymbol{q(x)}$, realizando los pasos de la actividad 1.

$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

$$p(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } q(x) = -2x^2 - 2x + 3$$

$$p(x) = x^2 - x + 3 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } q(x) = -2x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = -x^2 - x + 3 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$p(x) = -3x^2 - 2x + 2 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x$$

$$p(x) = -x^2 - x + 3 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

$$p(x) = x^2 + 4x - 5 \text{ y } q(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

Además, calcular cada una de las sumas de manera simbólica, siguiendo el patrón suscitado en la Caja de Polinomios.

3.4.2 INVERSO ADITIVO

Dado el polinomio $p(x)$, su inverso aditivo $-p(x)$ es aquel que tiene todos los signos de sus coeficientes contrarios al original; de este modo, el opuesto de $p(x) = -2x^2 + 3x - 5$ $p(x) = -2x^2 + 3x - 5$ es $-p(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Para hallar, con la Caja de Polinomios el opuesto de un polinomio se trasladan todas las fichas que se encuentran en un cuadrante de determinado color a uno de color diferente. Con esto se consigue, por ejemplo, que el inverso aditivo u opuesto de x^2 x^2 sea $-x^2$ y viceversa, lo que en la caja se puede representar de las siguientes formas:

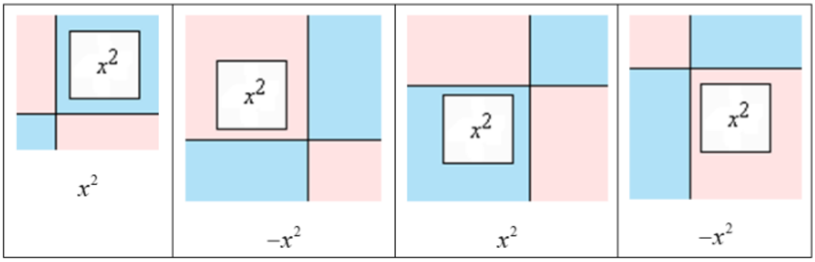


Figura 41 Inverso aditivo. Fuente propia.

Así, por ejemplo, la representación con la caja de $p(x) = -2x^2 + 3x - 5$ es

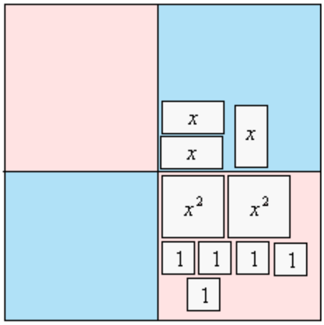


Figura 42 Representación del polinomio $p(x) = -2x^2 + 3x - 5$.Fuente propia.

Una de las representaciones de su inverso aditivo es

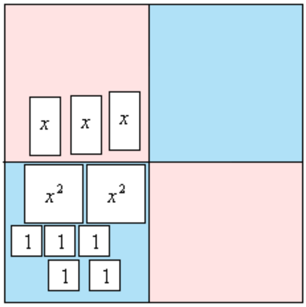
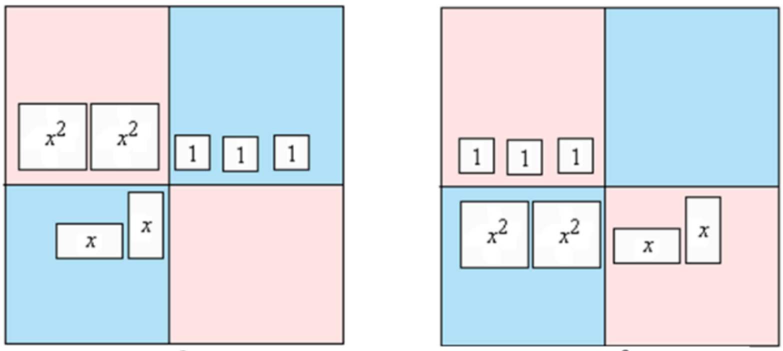


Figura 43 $-p(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Fuente propia.

Como puede observarse, el inverso aditivo del inverso aditivo de un polinomio es él mismo, esto es, $-\left(-p(x)\right) = p(x)$ lo que con uso del tablero es equivalente a retornar todas las fichas que representan al polinomio $p(x)$ a un cuadrante de color igual que el original.

En los siguientes pares de planos se representa un polinomio y a su derecha su respectivo inverso.



$p(x) = -2x^2 + 2x + 3$ $\qquad$ $-p(x) = 2x^2 - 2x - 3$

Figura 44 Un polinomio y su inverso aditivo. Fuente propia.

3.4.2.1 ACTIVIDAD 3

Para cada uno de los siguientes polinomios $p(x)$, calcular su inverso aditivo $-p(x)$ utilizando la Caja de Polinomios.

$p(x) = 2x^2 + x - 3$	$p(x) = -2x^2 + x - 2$	$p(x) = x^2 + x - 5$
$p(x) = -4x^2 + 3x - 2$	$p(x) = -x^2 + 3x - 2$	$p(x) = 3x^2 + 4x - 5$
$p(x) = 3x^2 + 3x - 2$	$p(x) = 3x^2 + 3x + 2$	$p(x) = -2x^2 - 4x - 1$

3.4.2.2 ACTIVIDAD 4

Calcular de manera simbólica y en su cuaderno de trabajo, el inverso aditivo de los polinomios que aparecen en la tabla de la Actividad 3.

3.4.3 MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Dado un polinomio $p(x)$, es factible sumarlo consigo mismo la cantidad de veces que se desee; dos, tres o más veces. En realidad, esto constituye, dentro del espacio vectorial de los polinomios, la operación externa denominada, multiplicación por un escalar.

Los gráficos siguientes se corresponden con la multiplicación del polinomio $p(x) = x^2 - 2x - 1$ dos y tres veces.

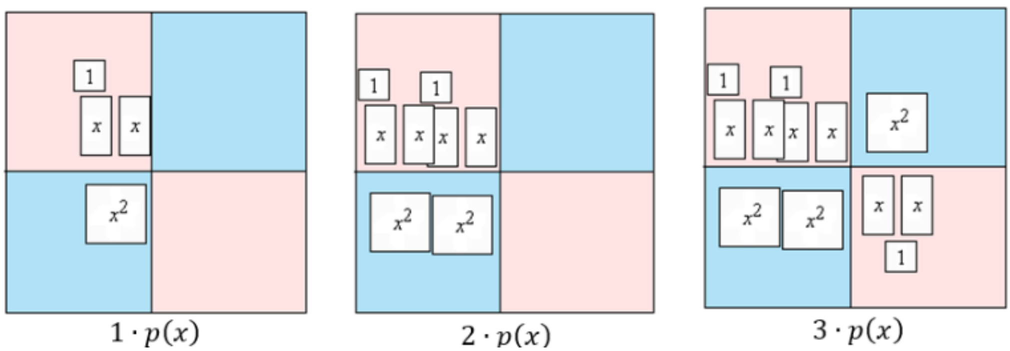


Figura 45 Multiplicación de un polinomio por 1, 2 y 3. Fuente propia.

3.4.3.1 ACTIVIDAD 1

Dados los polinomios $p(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x^2 + x - 2$ y $s(x) = -x^2 + 2x - 3$ calcular utilizando la Caja de Polinomios las sumas $2p(x)$, $2p(x) + q(x)$, $2p(x) + 3q(x)$, $s(x) + 3q(x)$, $p(x) + q(x) + 2s(x)$, $3q(x)$ y $p(x) + 3q(x) + s(x)$.

3.4.4 SUSTRACCIÓN

Para calcular la diferencia entre $p(x)$, y $-p(x)$, $p(x) - q(x)$, se procede de manera similar al cálculo de sumas y de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Escribir el minuendo $p(x)$, en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO.
2. Escribir el sustraendo $q(x)$, en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.
3. Dado que *restar* es sinónimo de *quitar*, las fichas ubicadas en el primer cuadrante correspondientes a $q(x)$, deben cambiarse de signo, lo que equivale a trasladarlas al segundo cuadrante. De igual forma se procede con las fichas ubicadas en el cuarto cuadrante que deben trasladarse al tercer cuadrante.
4. Retirar del tablero, los ceros que se hayan configurado.
5. La diferencia está constituida por las fichas que finalmente quedan en el tablero.

Ejemplo. Para calcular la diferencia entre $p(x) = x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$, $p(x) - q(x)$, se realizan los siguientes pasos:

1. Escribir el polinomio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ (minuendo) en los cuadrantes segundo y tercero.

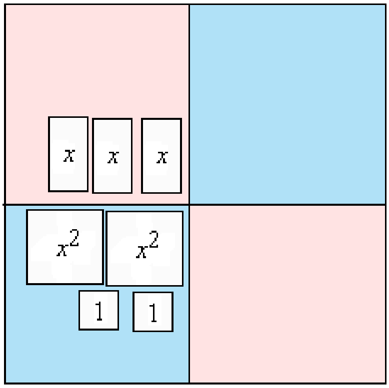


Figura 46 Polinomio minuendo p(x). Fuente propia.

$$p(x)$$

2. Escribir el polinomio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ (sustraendo) en los cuadrantes primero y cuarto.

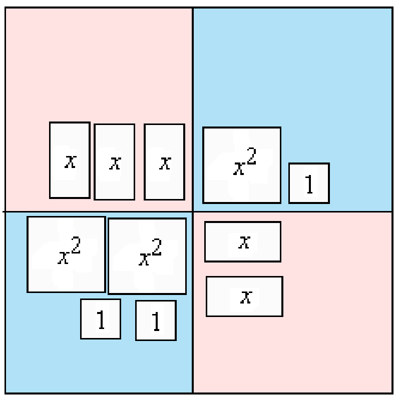


Figura 47 Polinomio sustraendo q(x). Fuente propia.

3. Trasladar las fichas del sustraendo; las del primer cuadrante al segundo y las del cuarto cuadrante al tercero.

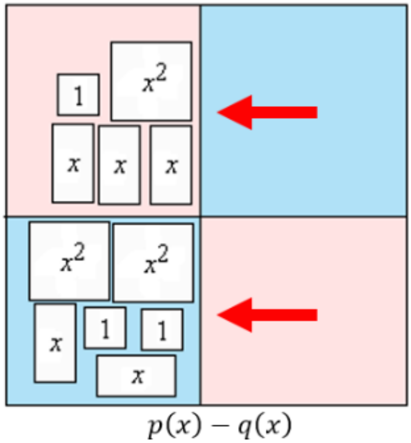


Figura 48 Traslado de fichas. Fuente propia.

4. Retirar del plano las fichas que representen ceros.

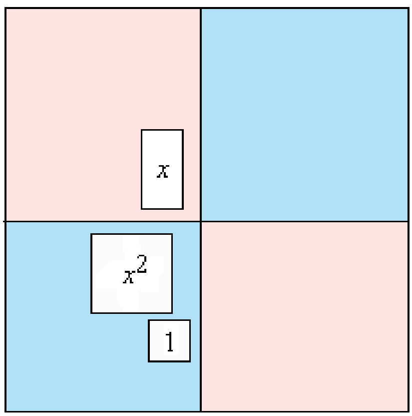


Figura 49 Retiro de fichas cero. Fuente propia.

$$p(x) - q(x)$$

5. Leer el polinomio resultante, en este caso $p(x) - q(x) = x^2 - x + 1$.

De lo anterior se deduce que la diferencia entre $p(x) = x^2 - 3x + 2$ y

$q(x) = x^2 - 2x + 1$ es $p(x) - q(x) = x^2 - x + 1$; al revisar lo ejecutado concretamente, y escribirlo de manera simbólica, lo ejecutado se puede representar como

$$\boxed{\begin{array}{c} p(x) - q(x) = (x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2x + 1) = \\ x^2 - 3x + 2 - x^2 + 2x - 1 = x^2 - x + 1 \end{array}}$$

Si, en la Caja de Polinomios la diferencia de polinomios obliga a eliminar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero; simbólicamente se agrupan los términos, de acuerdo con el ejemplo, de la siguiente forma

$$x^2 + (x^2 - x^2) - x + (1 - 1) + (2x - 2x) = x^2 - x + 1$$

Puesto que cada expresión entre paréntesis es igual a cero, se obtiene que

$$p(x) - q(x) = x^2 - x + 1$$

3.4.4.1 ACTIVIDAD 6

Para los polinomios $p(x) = -2x^2 + x - 3$ y $q(x) = x^2 - 4x - 5$ efectuar las diferencias $p(x) - q(x)$ y $q(x) - p(x)$ realizando los siguientes pasos:

1. Ubicar el minuendo $p(x)$ (o $q(x)$) en los primer y tercer cuadrantes.
2. Ubicar el sustraendo $q(x)$ (o $p(x)$) en los cuadrantes primero y cuarto.
3. Trasladar las fichas del primer cuadrante al segundo.
4. Trasladar las fichas del cuarto cuadrante al tercero.
5. Retirar los pares de fichas que equivalen a cero.
6. Leer el polinomio resultante.
7. Escribir en el cuaderno la expresión obtenida.
8. Representar simbólicamente el procedimiento descrito en lo pasos 1 a 6.

3.4.4.2 ACTIVIDAD 7

Calcular, utilizando la Caja de Polinomios, para los siguientes pares de polinomios $p(x)$ y $q(x)$ las diferencias $p(x) - q(x)$ y $q(x) - p(x)$.

$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } q(x) = 2x^2 - 2x + 3$$
$$p(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ y } q(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$p(x) = x^2 - x - 2 \text{ y } q(x) = -2x^2 - 2x + 3$$
$$p(x) = x^2 - x + 2 \text{ y } q(x) = -2x^2 + 2x + 1$$
$$p(x) = -x^2 - x + \text{ y } q(x) = -2x^2 + 3x + 1$$
$$p(x) = -3x^2 - 2x + 2 \text{ y } q(x) = -2x^2 + 2x - 3$$
$$p(x) = -x^2 - x + 3 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 2x + 5$$
$$p(x) = x^2 + 4x - 5 \text{ y } q(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

Realizar el cálculo de las diferencias anteriores recurriendo a la escritura simbólica usual.

3.4.4.3 ACTIVIDAD 8

Siendo

$p(x) = x^2 - 1,\quad q(x) = -x^2 + x - 2,\quad r(x) = x + 2$ y $t(x) = 1 - x + x^2$, calcular $2p(x) - q(x) - r(x)$, $p(x) - 2q(x)$, $2q(x) - 3r(x)$, $3r(x) - t(x)$ y $-2q(x) - 2r(x) + t(x)$.

3.4.5 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite calcular la suma y la diferencia de dos polinomios.

1. Pasos para calcular la suma $p(x) + q(x)$
   - Escribir $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero.
   - Escribir $q(x)$, en los cuadrantes primero y cuarto.
   - Retirar los pares de fichas que equivalen a 0.
   - Leer el polinomio resultante $p(x) + q(x)$.
2. Pasos para calcular el inverso aditivo de $p(x)$, es decir $-p(x)$:
   - Escribir $p(x)$ en el plano cartesiano.
   - Trasladar cada una de las fichas a cuadrante de diferente color.
   - Leer el polinomio resultante $-p(x)$.
3. Pasos para calcular para $p(x)$ y $q(x)$ la diferencia $p(x) - q(x)$
   - Escribir $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero.

II. Escribir $q(x)$ en los cuadrantes primero y cuarto.

III. Trasladar las fichas del primer cuadrante al segundo.

IV. Trasladar las fichas del cuarto cuadrante al tercero.

V. Retirar las parejas de fichas que algebraicamente equivalen a 0.

Leer el polinomio resultante $p(x) - q(x)$.

Es simple avizorar que el plano cartesiano se convierte en otro artefacto de alta tecnología que le otorga vida a este instrumento digital y que aviva el principio llamado la ley del tercio excluido. Es justo asegurar que las matemáticas emergen de las experiencias y también del pensamiento de los humanos, experiencias e intuiciones que se obligan a re-escribirse en lenguajes simbólicos. El lenguaje simbólico que posee la matemática, en consecuencia, es considerable y por tanto apreciado en el mundo académico y científico y este instrumento es un puente entre lo tangible y lo simbólico, que al final, en matemáticas, es lo que importa. Fourier sostenía, por ejemplo, que “el estudio de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos” (Bottazzini, 1986). Sin duda, el aporte didáctico que hace este artefacto digital moviliza un aprendizaje que emerge de lo real, pero que así mismo se ve atravesado por los sentidos y las ideas.

3.5 GUÍA No. 5. Optimización del uso del plano cartesiano

En la Caja de Polinomios el tablero brinda el contexto para establecer el valor algebraico relativo de cada una de las fichas, valor que también les corresponde cuando se ubican alrededor del origen de coordenadas.

Objetivo: utilizar el plano cartesiano y en particular las direcciones de los ejes coordenados como elementos fundamentales para establecer el valor algebraico relativo de las fichas y de los rectángulos que se construyen alrededor del origen de coordenadas.

3) El plano cartesiano está configurado a partir de dos ejes perpendiculares que se cortan en el <u>origen de coordenadas</u>; cada uno de los ejes contiene dos direcciones opuestas, positiva y negativa como se muestra a continuación.

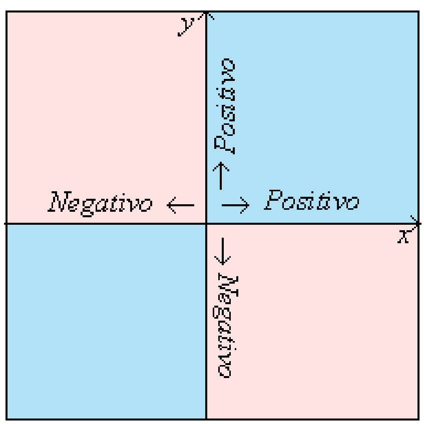


Figura 50 Plano cartesiano. Fuente propia.

Para cada rectángulo que se construya, de aquí en adelante, las dimensiones se leerán como base y altura en su orden, siendo que la base corresponde al lado paralelo al eje x y la altura, el lado paralelo al eje y y en concordancia con la orientación de los ejes. De esta manera, la ubicación de una ficha o de un rectángulo a partir del origen y haciendo uso de los ejes coordenados establece unas dimensiones distintas, como se muestra con las siguientes disposiciones de la ficha x.

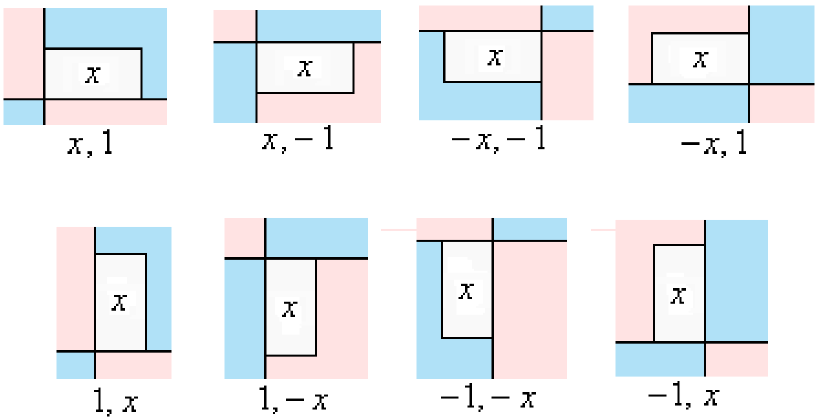


Figura 51 Dimensiones de la Ficha X. Fuente propia.

3.5.1 ACTIVIDAD 1

Enlazar con un trazo continuo las siguientes disposiciones de la ficha x^2 en correspondencia con las dimensiones de la base y de la altura.

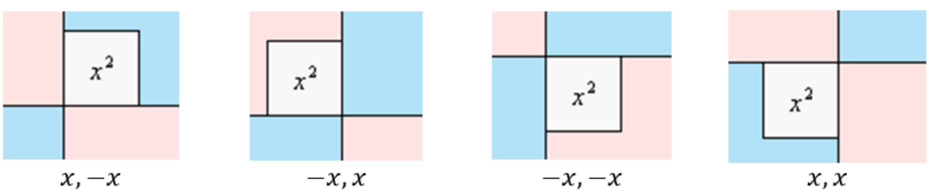


Figura 52 Dimensiones de la Ficha x^2. Fuente propia.

4) Si esto ocurre con los rectángulos elementales que están constituidos por una sola ficha, ocurre igual con rectángulos conformados por varias fichas como los que se muestran a continuación.

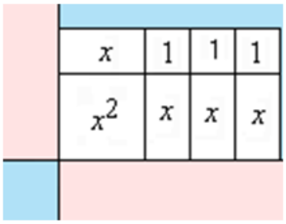
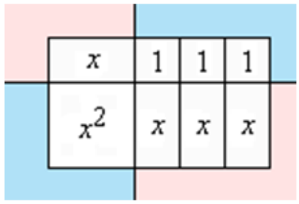
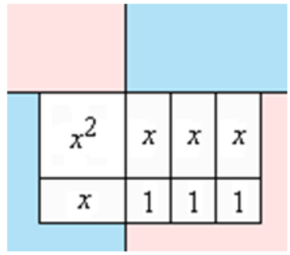
		
Base $x + 3$ Altura $x + 1$	Base $-x + 3$ Altura $1 - x$	Base $-x + 3$ Altura $-x - 1$

Figura 53 Dimensiones de rectángulos. Fuente propia.

Desde el lenguaje popular, por ejemplo, adoptando el último rectángulo se dice que sus dimensiones son $-x + 3$ por $-x - 1$ y es fácil ver que en el plano cartesiano se está representando al polinomio $x^2 - 2x - 3$.

3.5.2 ACTIVIDAD 2

Representar en el plano cartesiano incluido en la Caja de Polinomios los siguientes rectángulos y escribir debajo de cada uno sus dimensiones teniendo en cuenta que se debe leer primero la dimensión de la base que es paralela al eje x y luego el de la altura paralela al eje y.

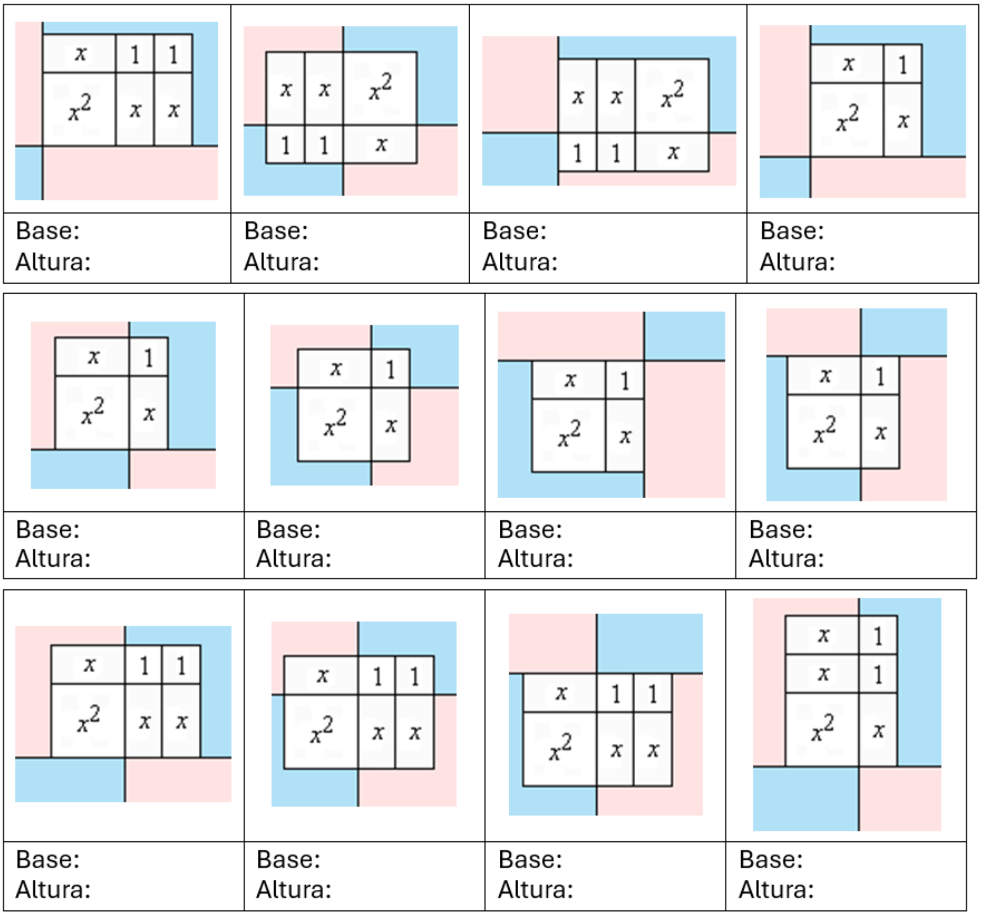


Figura 54 Fuente propia.

3.5.3 ACTIVIDAD 3

Construir al menos diez rectángulos utilizando la Caja de Polinomios y determinar para cada uno las dimensiones de sus lados, luego escribirlos en el cuaderno de trabajo.

3.5.4 PARA RECORDAR

Cada rectángulo dispuesto en el plano cartesiano, alrededor del origen de coordenadas, representa a un polinomio cuyas dimensiones son relativas a las posiciones de las fichas respecto a los ejes coordenados. En los tres gráficos siguientes se hace la lectura de los polinomios que representan.

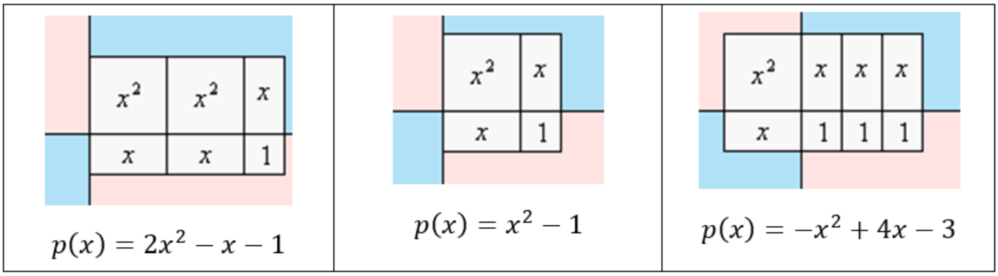


Figura 55 Rectángulos y su lectura. Fuente propia.

La lectura de los polinomios representados se hace al quitar los ceros que aparecen formados por pares de fichas del mismo peso algebraico ubicados en cuadrantes de diferente color.

En esta configuración de rectángulos, es natural que el número de fichas utilizado antes de deshacerse de ceros siempre es un número compuesto. Por ejemplo, en la gráfica anterior las cantidades de fichas utilizadas para representar los rectángulos son 6, 4 y 8. A continuación se representan otros polinomios donde se verifica idéntica situación.

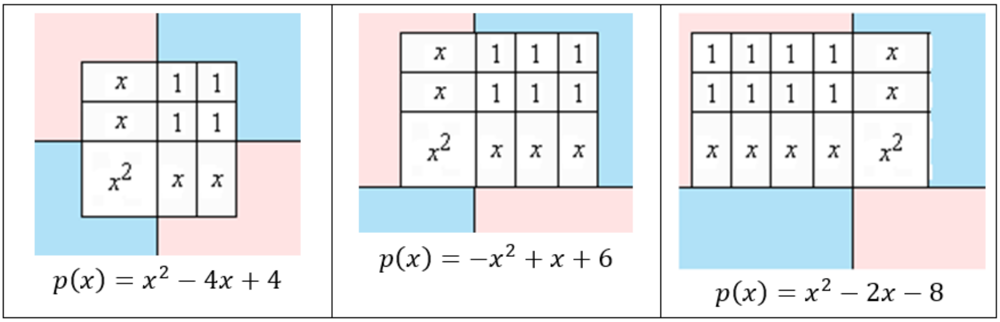


Figura 56 Rectángulos y su lectura. Fuente propia.

Una particularidad, ya anotada, es la multiplicidad de representaciones de un mismo polinomio. En el ejemplo que sigue se ha representado a $p(x) = x^2 - 4x + 4$ como dos cuadrados cuyos lados miden $x - 2$ y $x - 2$ en el primer caso y $2 - x$ y $2 - x$ en el segundo.

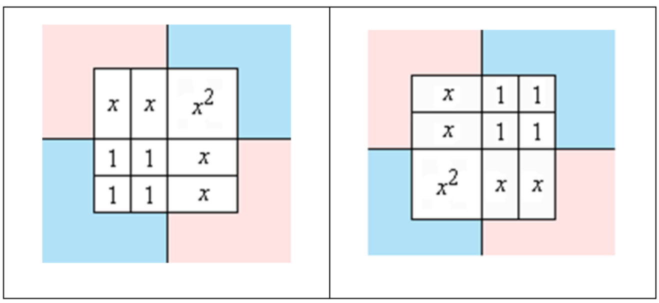


Figura 57 Multiplicidad de representaciones. Fuente propia.

3.6 GUÍA No. 6. Multiplicación de polinomios de la forma (ax+b)·(cx+d)

El plano cartesiano incorporado en la Caja de Polinomios permite establecer el valor relativo de cada una de las fichas y de los rectángulos construidos alrededor del origen de coordenadas.

Objetivo: calcular el producto de dos polinomios lineales de una variable.

El plano cartesiano con sus ejes coordenados se constituye en un elemento esencial para el cálculo de productos. El producto $p(x) \cdot q(x)$ corresponde al valor algebraico relativo de las fichas que configuran un rectángulo de base $p(x)$ y de altura $q(x)$ o viceversa. La lectura del producto se realiza, después de retirar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero y que se ubican, para recordarlo, en cuadrantes de colores distintos, si es que los hubiere.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para calcular productos de la forma $(ax + b) \cdot (cx + d)$ puesto que estudia el cálculo de $(2x - 1) \cdot (x + 2)$ indicando dos caminos.

Primer camino: se toma como base el polinomio $p(x) = 2x - 1$, ubicando dicho polinomio a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados, como se muestra en la siguiente figura.

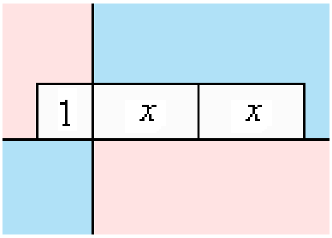


Figura 58 Polinomio base. Fuente propia.

Una vez hecho eso y tomando en cuenta que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común, se configura la altura del rectángulo cuya dimensión está dada por el factor $q(x) = x + 2$; este paso se señala en la siguiente figura.

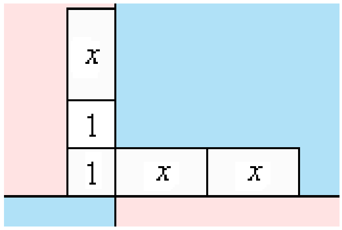


Figura 59 Polinomio altura. Fuente propia.

Ahora, se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario. El rectángulo completo se dispone en la siguiente gráfica.

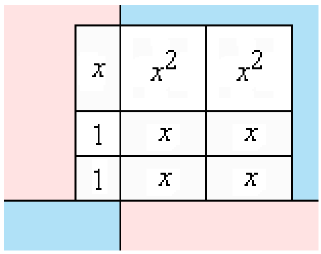


Figura 60 Rectángulo completo. Fuente propia.

Finalmente, se procede a retirar fichas que algebraicamente equivalen a cero; en este caso, un par de fichas rotuladas con x y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes; el tablero se observa así:

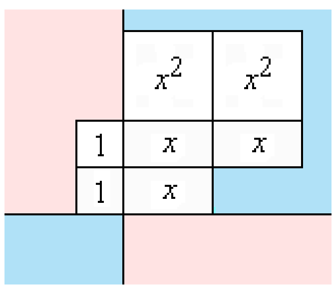


Figura 61Polinomio Producto. Fuente propia.

Y en consecuencia se tiene que $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 3x - 2.$

En el juego operatorio simbólico, el procedimiento efectuado se explica mediante la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la adición. Para el ejemplo que se ha mostrado, se escribe de manera condensada

$(2x-1)(x+2) = (2x-1)\cdot(x) + (2x-1)\cdot(2)$ y por tanto

$(2x-1)(x+2) = 2x^2 - x + 4x - 2 = 2x^2 - x + 3x + (x-x) - 2 = 2x^2 + 3x - 2.$

La propiedad distributiva, se puede determinar de mejor forma al desagregar las fichas del rectángulo producto por grupos en forma horizontal o vertical, como se muestra en las siguientes gráficas:

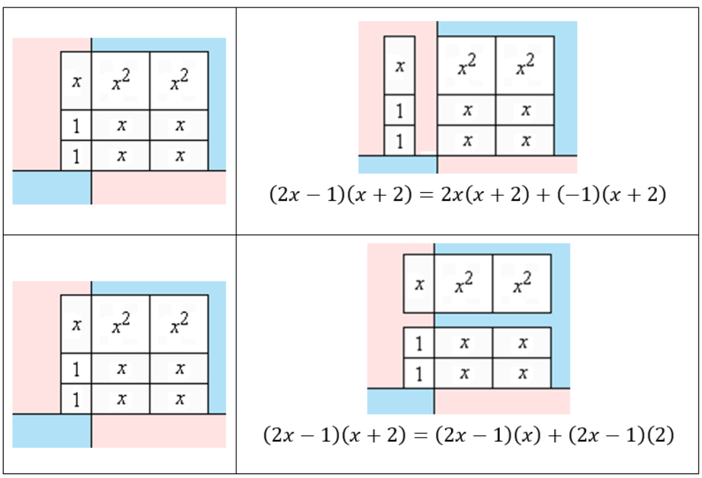


Figura 62 Propiedad distributiva. Fuente propia.

En el segundo camino: se establece como base el polinomio $p(x) = 2x - 1$ pero en este caso, como se muestra en la siguiente figura, se tiene el sumando x de la altura $q(x) = x + 2$; a partir de allí, se completa el rectángulo teniendo en cuenta el criterio de que fichas adyacentes deben coincidir en la dimensión de su frontera común. Esto obedece a un hecho simple, en la multiplicación, cualquiera de los factores tiene la misma importancia. De este modo, en la construcción del rectángulo, al tiempo que se establece el primer factor se le da la misma relevancia al segundo factor. Esta disposición permite apreciar de mejor forma la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

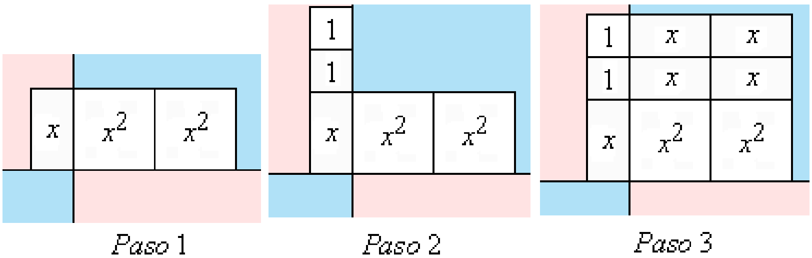


Figura 63 Segundo camino. Fuente propia.

Después de completado el rectángulo se procede a retirar las parejas de fichas que algebraicamente equivalen a cero lo que permite leer el producto de manera simple.

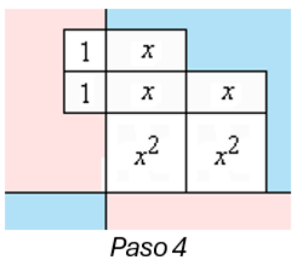


Figura 64 Retiro de ceros. Fuente propia.

Así, $p(x) \cdot q(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.

Este camino alternativo para calcular el producto tiene en cuenta desde un comienzo la composición del otro factor y es que se debe recordar que en las operaciones binarias cada uno de los dos operandos tienen igual importancia.

Además, se percibe la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición al desagregar el rectángulo final por las clases o grupos de fichas que se consolidan en la formación del rectángulo.

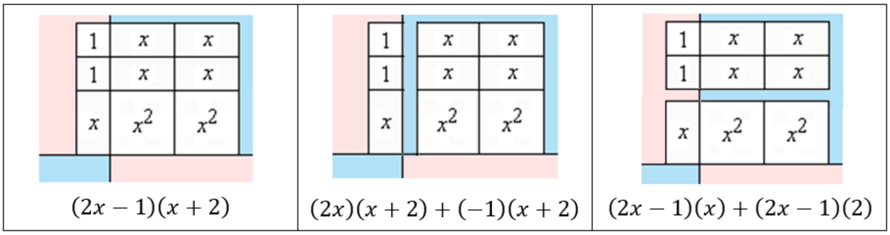


Figura 65 Desagregar un rectángulo. Fuente propia.

3.6.1 ACTIVIDAD 1

Repetir en la Caja de Polinomios el cálculo de los siguientes productos en los cuales se ha seguido uno de los dos caminos presentados en esta guía, a continuación, debe realizar el cálculo por un camino alternativo.

El cálculo de $(x+1)(x-2)$ se presenta a continuación:

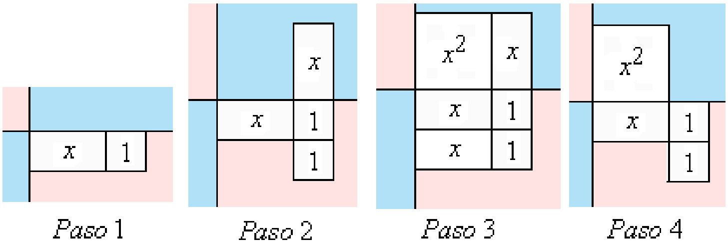


Figura 66 Cálculo del producto $(x+1)(x-2)$. Fuente propia.

Y esto significa que $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$. La disposición en el paso 1 del factor $(x+1)$ debajo del eje* x obedece a que el segundo factor es $(x-2)$.

- El cálculo de $(2x+1)(1-x)$ se presenta en el siguiente esquema.

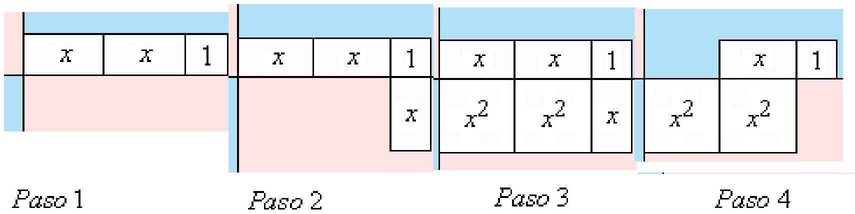


Figura 67 Cálculo del producto $(2x+1)(1-x)$. Fuente propia.

De modo que $(2x+1)(1-x) = -2x^2 + x + 1$

3.6.2 ACTIVIDAD 2

Las siguientes gráficas corresponden a la multiplicación de algunos polinomios. Indicar para cada una, los factores que se multiplican, el producto encontrado y las distribuciones a izquierda y derecha de los factores empleados.

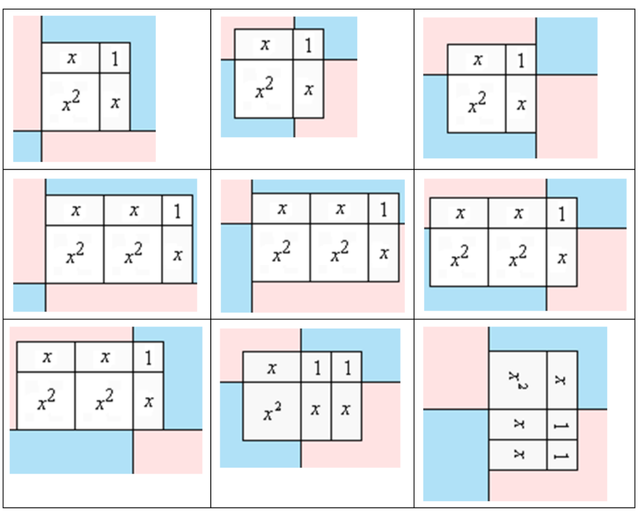


Figura 68 Fuente propia.

3.6.3 ACTIVIDAD 3

Escoja al menos diez parejas entre las expresiones que presenta la siguiente tabla y calcule su producto; puede escoger una misma expresión como la segunda componente de la pareja.

$2x-1$	$2-x$	$3x-2$	$x+2$	$3-2x$
$3x-2$	$x-1$	$x-2$	$2-3x$	$2+x$
$x-3$	$2x$	x	$3x-1$	$1-x$

Además, calcular cada uno de los productos sin utilizar la Caja de Polinomios.

Por otra parte, es importante recalcar que el plano cartesiano permite evidenciar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la adición; para aclarar este concepto se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Calcular el producto de los polinomios $p(x)=2x+1$ y $q(x)=x-2$.

Para ello es suficiente con separar un poco los grupos de fichas de acuerdo con la clase a la que pertenecen respecto de cualquiera de los ejes, sin retirar las parejas de fichas que equivalen a cero. En el gráfico siguiente, por ejemplo, se evidencia en las partes $a)$ y $b)$ el producto $(2x+1)(x-2)$; en la parte $b)$ se ha separado por el eje y, las filas de acuerdo con la clase a la que pertenecen las fichas y por ello resulta claro que $(2x+1)(x-2)$ es igual que $(2x+1)(x)+(2x+1)(-2)$.

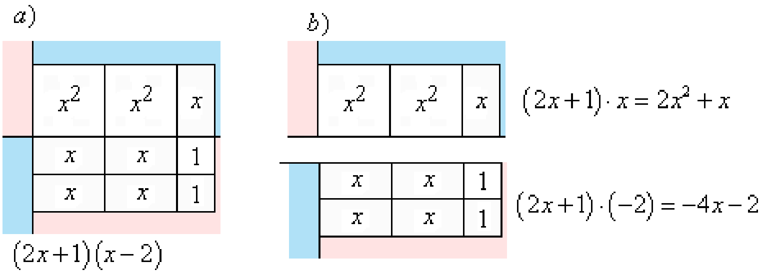


Figura 69 Fuente propia.

Buen asunto este de que sobre una construcción se pueda dar evidencia de propiedades como la distributiva. Es un asunto sobre el que se puede recalcar y que prueba la utilidad de un recurso como el de la Caja de Polinomios que sirve de mediador entre lo tangible y lo abstracto, entre lo tangible y lo puramente simbólico.

En el gráfico que sigue se da evidencia de la distributividad del factor que entra por izquierda.

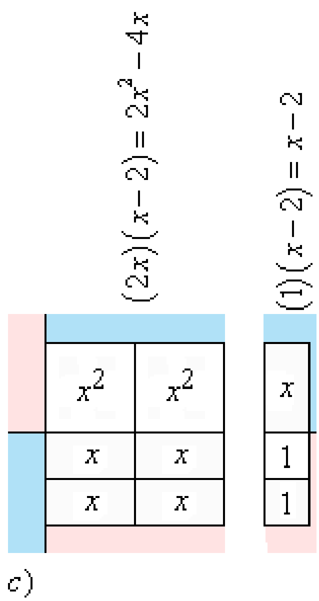


Figura 70 Fuente propia.

En la gráfica $c)$ se ha hecho la división por el eje x y sobre ella se observa la distribución izquierda $(2x+1)(x-2)=(2x)(x-2)+(1)(x-2)$

3.6.4 ACTIVIDAD 4

Para al menos cinco parejas seleccionadas entre los binomios de la siguiente tabla, calcule su producto y con el rectángulo completo, evidencie la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición a derecha e izquierda, separando los grupos de fichas de acuerdo con sus clases y tomando como guías los ejes coordenados.

$2x-1$	$2-x$	$3x-2$	$x+2$	$3-2x$
$3x-2$	$x-1$	$x-2$	$2-3x$	$2+x$
$x-3$	$2x$	x	$3x-1$	$1-x$

3.6.5 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite calcular el producto de dos polinomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$ y para ello

1. Se construye un rectángulo cuya base es uno de los dos polinomios que se ubica a partir del origen de coordenadas y haciendo uso adecuado de los dos sentidos que a partir de este origen tiene el eje x.

2. La altura del rectángulo la establece el otro factor y la correcta ubicación que se hace del mismo, de acuerdo con los sentidos que a partir del origen tiene el eje y. Además, se debe respetar la siguiente

regla: *fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.*

3. Se completa el rectángulo utilizando tantas fichas como sean necesarias.
4. Se retiran las fichas que algebraicamente equivalen a cero y que se corresponden con parejas de igual rotulación, pero ubicadas en cuadrantes de diferente signo; finalmente se procede a leer el producto constituido por el polinomio que queda escrito en el plano cartesiano.
5. Además, la Caja de Polinomios permite evidenciar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y la propiedad conmutativa como en el caso que sigue en el que se multiplica $(2-x)(2x-1)$ y $(2x-1)(2-x)$.

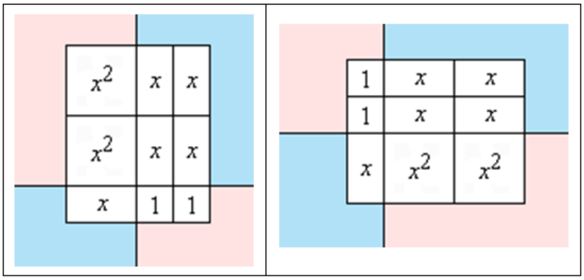


Figura 71 Fuente propia.

En ambos casos, el polinomio resultante es $p(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

Se ha dispuesto algunos mensajes de carácter operativo didácticos al final de algunas de estas primeras guías, para que los profesores estén conscientes de la importancia y la responsabilidad que tienen en sus manos. Por un lado, ellos han adquirido el compromiso de que los amantes y arquitectos de la matemática persistan y, por ello, se ven empujados a hacer que sus estudiantes aprendan una buena álgebra, asignatura que, en los planes de estudio de las escuelas, se suele convertir en escollo y en el primer eslabón hacia la frustración. En cambio, se verá en las siguientes guías cómo los algoritmos operatorios se tornan divertidos y susceptibles de ser narrados con símbolos universalmente aceptados.

Es importante señalar que cada profesor debería alimentar en sus estudiantes el pensamiento intuitivo, puesto que la escuela intenta exagerar en la rigurosidad y formalidad a la hora de enseñar matemática. El matemático norteamericano formado en Alemania, James Pierpont (1899) asegura que:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo de los números, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. El precio que se debe pagar para entender esto, es la total separación del mundo de los sentidos. (p. 406)

Este aporte digital, permite que este precio no sea terrible, puesto que permite un tránsito elemental y suave, del aprendizaje del álgebra, desde lo tangible, pasando por la razón, hasta lo absolutamente simbólico.

3.7 GUÍA No. 7. División de polinomios

La Caja de Polinomios permite elaborar cálculos utilizando procesos propios; es decir, se corresponde con el establecimiento de algoritmos alternativos de los tradicionales, como se evidencia en el cálculo de la división.

Objetivo: calcular cocientes de la forma $(ax^2 + bx + c) \div (dx + e)$ donde cada uno de los coeficientes a, b, c, d y e son números enteros.

Uno de los algoritmos operativos que causan sorpresa por la sencillez de aplicación con el uso de la Caja de Polinomios es el de la división. La división es sinónimo de repartir o de distribuir y efectivamente es lo que se hace cuando se trata de calcular el cociente $p(x) \div q(x)$; en este caso se debe construir con el dividendo $p(x)$ un rectángulo de base $q(x)$ teniendo como recurso la agregación de pares de fichas que equivalen a cero (Comodín). El cociente de la división es la altura de dicho rectángulo, mientras que el residuo, si existe, está constituido por fichas 1 ya que se efectuarán divisiones del tipo

$(ax^2 + bx + c) \div (dx + e)$.

El siguiente ejemplo ayuda a comprender mejor la división de polinomios. Calcular el cociente $(x^2 - 3x + 4) \div (x - 1)$.

Paso 1. Escribir el polinomio dividendo $(x^2 - 3x + 4)$ en el plano de la Caja de Polinomios y establecer sobre el plano unas guías imaginarias de anchura equivalente al divisor $(x - 1)$ como se indica a continuación:

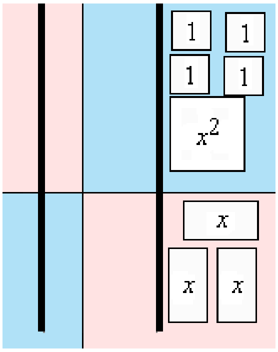


Figura 72 Líneas imaginarias para la división. Fuente propia.

Paso 2. Ubicar las fichas que representan al polinomio sobre la banda imaginaria, conformando un rectángulo alrededor del origen de coordenadas, teniendo en cuenta que se debe utilizar el menor número posible de pares de fichas que representen cero y respetando el color del cuadrante que les corresponde, es decir, el polinomio que se debe leer en el tablero, una vez efectuado el paso 2 se obliga a ser el dividendo $p(x)$, como se muestra a continuación:

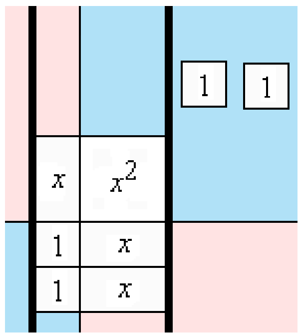


Figura 73 Ubicación de fichas. Fuente propia.

En este ejemplo no hubo necesidad de agregar ceros, y es claro que el cociente es $x - 2$ y el residuo es 2.

En el juego operatorio simbólico, el cálculo del cociente anterior se escribe en concordancia con el algoritmo de la división de Euclides como $x^2 - 3x + 4 = (x^2 - x) - x + 1 - x + 1 + 2$ o lo que es lo mismo por asociación $x(x-1) - (x-1) - (x-1) + 2$ o mejor $(x-1)(x-1-1) + 2$ y si se quiere, en definitiva $x^2 - 3x + 4 = (x^2 - x) = (x-1)(x-2) + 2$, expresión que señala que el cociente pedido es $x - 2$ y el residuo es 2.

Ejemplo 2. A continuación, se calcula paso a paso el cociente $(x^2 - 3x + 4) \div (x - 3)$.

Paso 1. Escribir el dividendo $x^2 - 3x + 4$ en el plano cartesiano contenido en la Caja de Polinomios y establecer unas líneas imaginarias, si se requieren que determinen la base del rectángulo a construir e igual al divisor $x - 3$.

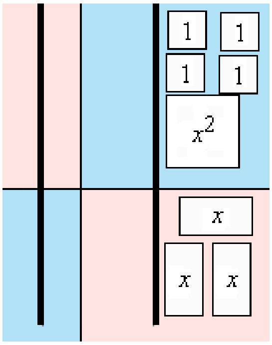


Figura 74 Fuente propia.

Paso 2. Se organiza el rectángulo alrededor del origen, teniendo en cuenta que se debe utilizar el menor número de pares de fichas que representen algebraicamente ceros. En este caso no se requiere anexar fichas pues el rectángulo se configura de manera inmediata.

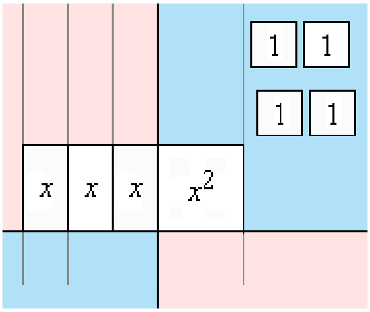


Figura 75 Fuente propia.

Como puede verse, en este caso el cociente es x y el residuo es 4.

De manera simbólica es suficiente mostrar que

$x^2 - 3x + 4 = (x^2 - 3x) + 4 = x(x - 3) + 4$

Así, que el cociente es x y el residuo es 4.

Ejemplo 3. En este ejemplo, se presenta el cálculo del cociente

$$(2x^2 - 3x + 1) \div (x - 2).$$

Paso 1. Se escribe el polinomio dividendo $2x^2 - 3x + 1$ en el plano de la Caja de Polinomios, polinomio que se organizará en el siguiente paso alrededor del origen de coordenadas como un rectángulo y para ello se establece la franja de anchura $x - 2$ que es el divisor.

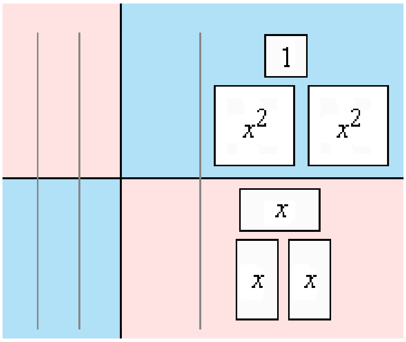


Figura 76 Fuente propia.

Paso 2. Se organizan las fichas alrededor del origen preservando el signo que les corresponde en concordancia con el color del cuadrante y buscando que para completar el rectángulo falten, la menor cantidad de pares de fichas equivalentes algebraicamente a cero.

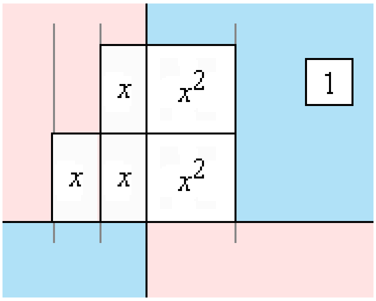


Figura 77 Fuente propia.

Paso 3. Se completa el rectángulo con los dos siguientes movimientos, sobre los cuales se hace evidente que toca agregar tres parejas de ceros.

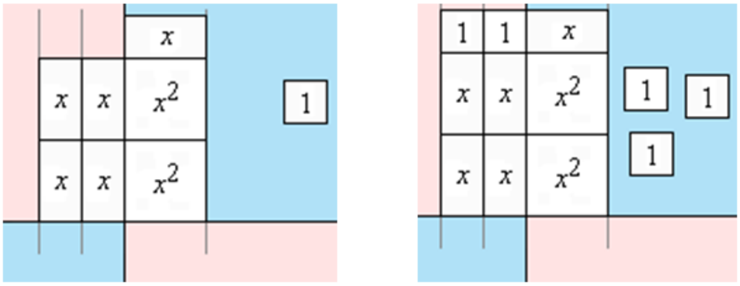


Figura 78 Fuente propia.

De este modo, el cociente es $2x + 1$ y el residuo es 3 y en concordancia con el algoritmo de la división se escribe $2x^2 - 3x + 1 = (x - 2)(2x + 1) + 3$.

Reconstruyendo de manera simbólica el cálculo de este cociente se expresa así:

$2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 4x + x - 2 + 3 = (2x^2 - 4x) + (x - 2) + 3 =$

$2x(x - 2) + (x - 2) + 3 = (x - 2)(2x + 1) + 3;$

lo cual indica que el cociente es $2x + 1$ y el residuo es 3.

Ejemplo 4. En infinitas ocasiones como la de este ejemplo, la división carece de residuo, entonces se trata de una división exacta.

Dividir $(2x^2 + 2x - 4) \div (2x - 2)$.

La solución se presenta resumida en los dos siguientes recuadros en los que se alcanza a ver la forma en que

$$2x^2 + 2x - 4 = 2x^2 - 2x + 4x - 4$$
$$= x(2x - 2) + 2(2x - 2) = (2x - 2)(x + 2).$$

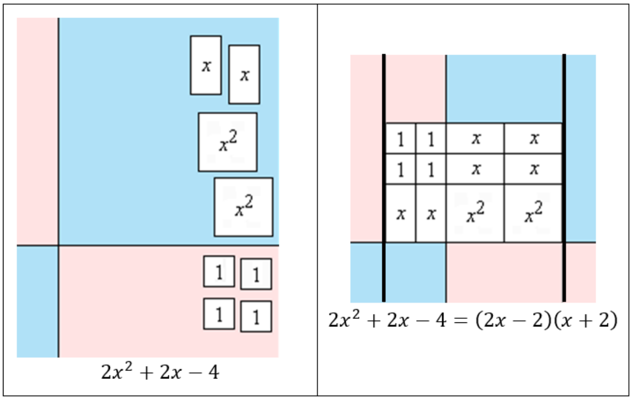


Figura 79 Fuente propia.

3.7.1 ACTIVIDAD 1

Calcular los cocientes que se indican a continuación:

$$2x^2 - 3x + 2 \div \begin{cases} x - 1 \\ x + 1 \\ x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 2 \div \begin{cases} x + 2 \\ x + 1 \\ x - 2 \end{cases}$$

$$3x^2 + x + 2 \div \begin{cases} x - 1 \\ x + 1 \\ x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 3 \div \begin{cases} x - 1 \\ x + 1 \\ x + 2 \end{cases}$$

Realizar los cálculos de estos cocientes representado de manera simbólica lo efectuado con la Caja de Polinomios.

3.7.2 ACTIVIDAD 2

Unir mediante un trazo continuo las divisiones que se indican a continuación con su respectivo cociente y residuo.

	Cociente	Residuo
$(2x^2 - 3x + 2) \div (x - 1)$	x	1
$(2x^2 - 3x + 2) \div (x - 2)$	$2x - 1$	-4
$(2x^2 + 2x - 3) \div (x + 1)$	$2x + 1$	-3
$(2x^2 + 2x - 3) \div (x + 2)$	$x + 1$	4

3.7.3 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite realizar divisiones de polinomios de la forma $(ax^2 + bx + c) \div (dx + e)$ siguiendo los siguientes pasos:

Escribir el polinomio dividendo $ax^2 + bx + c$ en el plano cartesiano de la Caja de Polinomios y establecer unas guías imaginarias que determinen en su anchura conjunta al polinomio divisor $dx + e$.

Formar sobre la banda imaginaria y alrededor del origen de coordenadas, un rectángulo con las fichas que conforman al polinomio dividendo; para ello se tiene como comodín, la utilización de parejas de fichas algebraicamente equivalentes a cero.

Finalmente, se procede a leer la respuesta, tomando como cociente de la división la altura del rectángulo construido y como residuo, las fichas 1 que no forman parte del rectángulo.

Nota: el residuo está constituido con fichas del tipo 1 ya que se están efectuando divisiones entre polinomios de la forma
$(ax^2 + bx + c) \div (dx + e)$.

Es interesante ver que, en todo momento, en el plano queda representado, en totalidad el polinomio dividendo $D(x) = ax^2 + bx + c$. Las siguientes figuras indican la división de $D(x) = 2x^2 - 3x + 4$ entre los divisores $x - 1$ y $x - 2$ que presentan la evidencia de representar al mismo $D(x)$.

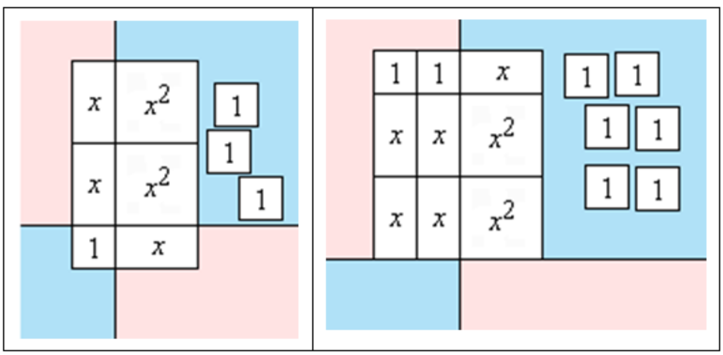


Figura 80 Fuente propia.

De este modo
$2x^2 - 3x + 4 = (x - 1)(2x - 1) + 3$ y
$2x^2 - 3x + 4 = (x - 2)(2x + 1) + 6$ y de aquí resulta que
$(x - 1)(2x - 1) + 3 = (x - 2)(2x + 1) + 6$

de acuerdo con el legado aristotélico que, si dos cosas son iguales con una tercera, ellas son iguales entre sí.

En adición a esto, es útil recordar que el objetivo del álgebra es transformar las expresiones, pero dejándolas idénticas. Los viejos profesores de esta rama de la matemática aseguran que el álgebra es, finalmente, la ciencia de las identidades.

Observación: cuando en el algoritmo tradicional, la división requiere de la aparición de coeficientes fraccionarios, la Caja de Polinomios se vuelve inocua e ineficaz, pues ella permite tan solo, la constitución de polinomios con coeficientes enteros. En casos como al dividir $p(x) = 4x^2 - 3x + 1$ entre $q(x) = 2x - 1$, el proceso se torna infinito por la aparición de fracciones de denominador dos en el cociente. Desde este ángulo, el profesor debe procurar seleccionar polinomios que calcen dentro de las posibilidades de la Caja de polinomios como los que se presentan a continuación:

Dividir los polinomios $6x^2 + x + 3$, $-6x^2 + 5x + 3$, $6x^2 - x - 10$, $6x^2 - 5x - 8$, $4x^2 - 4x - 8$, $4x^2 + 4x - 12$ $4x^2 + 4x - 12$ por el divisor $2x - 1$.
Dividir los polinomios $4x^2 - 4x - 12$, $4x^2 - 2x - 11$, $4x^2 - 4x - 12$, $6x^2 - x - 4$, $6x^2 - x - 7$, $6x^2 - x + 3$, $6x^2 + 7x + 7$ por el divisor $2x + 1$.

3.8 GUÍA No. 8. Factorización de polinomios de grado 2

La Caja de Polinomios originalmente se construyó para factorizar polinomios de grado dos en una variable y con coeficientes enteros positivos. Esta tarea derivó en un rompecabezas de mayores aplicaciones.

Objetivo: factorizar polinomios, mediante la construcción de rectángulos alrededor del origen y siguiendo la regla de vecindad establecida para la construcción de estos.

Factorizar un polinomio utilizando la Caja de Polinomios equivale a disponer una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible. Para realizar esta tarea a veces es necesario la agregación de ceros; es decir, de parejas de fichas del mismo rótulo que ubicadas en cuadrantes de distinto color equivalen algebraicamente a cero. Para este efecto, se requiere disponer el menor número de fichas que representan al polinomio en cuestión, en un encuadre minimal viable.

Un encuadre minimal, es aquella disposición de un polinomio $p(x)$ de forma que su completación a rectángulo requiere del menor número de fichas (Ceros). En la siguiente gráfica se representan tres encuadres del polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$; de los cuales el tercero corresponde a un encuadre minimal.

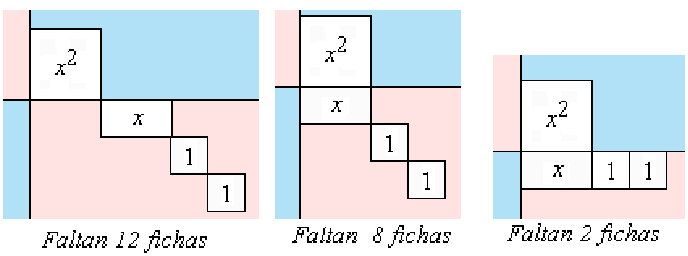


Figura 81 Fuente propia.

Un encuadre minimal *viable* es aquel que requiere de un número par de fichas que equivalen algebraicamente a cero y que completan el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$. En la siguiente gráfica se representan dos encuadres minimales de $p(x) = x^2 - x - 2$, el segundo de los cuales es viable, pues requiere de dos fichas x para completar el rectángulo, pero algebraicamente, la agregación de estas fichas equivale a sumar cero.

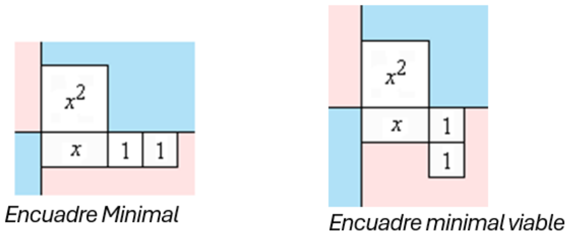


Figura 82 Encuadres. Fuente propia.

Al completar el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$ a partir de un encuadre minimal viable, se ha factorizado; su factorización es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo; por ejemplo, a partir de la disposición minimal viable que representa a $p(x) = x^2 - x - 2$ se consigue la siguiente figura

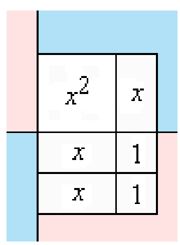


Figura 83 Fuente propia.

y siendo las dimensiones de dos lados consecutivos de este rectángulo $x + 1$ y $x - 2$ se tiene que $p(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

Es posible representar lo ejecutado con el rompecabezas de manera simbólica, observando que se ha adicionado un cero constituido por fichas x. Por esta razón se escribe

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 + (x - x) - x - 2 \\ &= x^2 + x - x - 1 - x - 1 \\ &= x(x+1) - (x+1) - (x+1) \\ &= (x+1)(x-2). \end{aligned}$$

3.8.1 ACTIVIDAD 1

Las siguientes representaciones corresponden a la factorización de algunos polinomios cuadráticos, escribir debajo de cada una de ellas, el polinomio que se ha factorizado y su respectiva factorización.

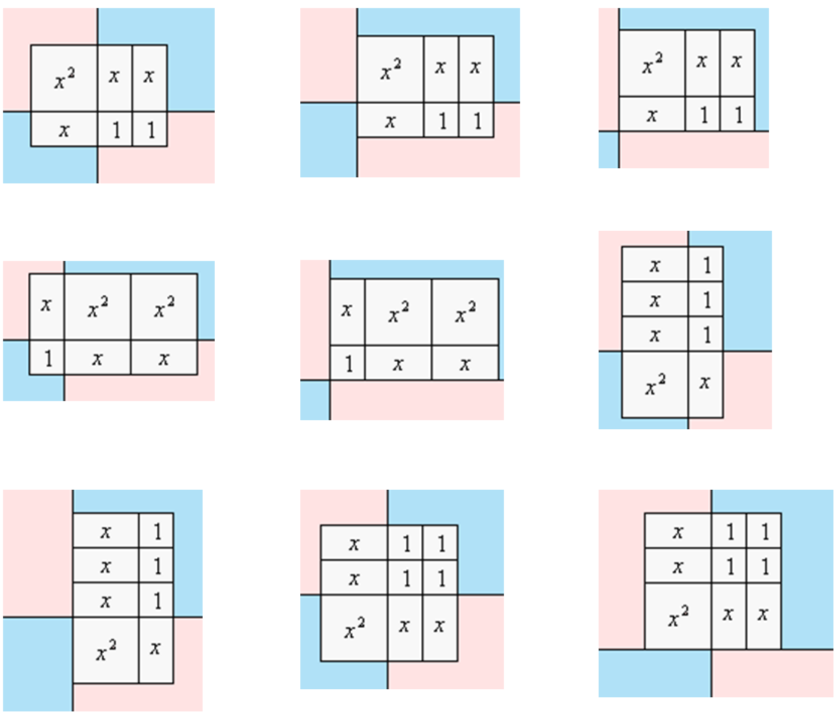


Figura 84 Fuente propia.

3.8.2 ACTIVIDAD 2

Factorizar los siguientes polinomios:

$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$q(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$r(x) = 4x^2 - 1$

$s(x) = x^2 - 1$

$t(x) = 6x^2 + x - 1$

$u(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$v(x) = x3^2 + 5x - 2$

$w(x) = 3x^2 - 7x + 2$

$z(x) = x^2 - 2x + 1$

$y(x) = x^2 - 4x - 5$

3.8.3 ACTIVIDAD 3

Factorizar cada uno de los polinomios de la tabla anterior sin recurrir al uso de la Caja de Polinomios sino a través de una representación simbólica.

Un polinomio $p(x)$ se denomina completo, cuando el proceso de factorización no requiere de la agregación de ceros; de hecho, existe una infinidad de polinomios completos como $p(x) = x^2 - 3x$+2 cuya representación rectangular se indica en la siguiente gráfica.

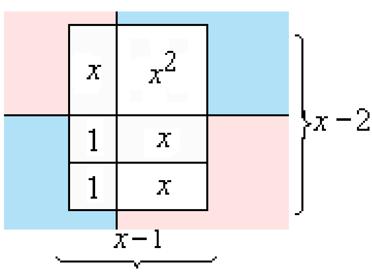


Figura 85 Fuente propia.

El dibujo indica claramente la factorización $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

La representación simbólica del proceso de factorización de este polinomio es

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = (x^2 - x) - (2x - 2) = x(x-1) - 2(x-1)$$
$$= (x-1)(x-2)$$

Una consecuencia directa del uso de la Caja de Polinomios y su algoritmo de factorización es la de reconocer que un polinomio es factorizable cuando se representa como un rectángulo y en consecuencia el número de fichas empleadas es compuesto, siendo esta, una condición necesaria pero no suficiente. Por ello, si el polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ es completo, la suma de los valores absolutos de sus coeficientes $s = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ es un número compuesto. Por ejemplo, $p(x) = x^2 - 3x + 2$ es completo y es claro que $s = |1| + |-3| + |2| = 6$ es un número compuesto.

Reconocer que un polinomio $p(x)$ es completo facilita su factorización ya que permite descomponer sus términos al considerar su coeficiente director (coeficiente no nulo del término que indica el grado) y la cantidad de fichas con la que se representa tal polinomio en la Caja de Polinomios. Por ejemplo, $p(x) = x^2 - 2x + 1$ es completo y se representa con 4 fichas, su coeficiente director es 1 y dado que $4 = 2 \times 2$, se busca su representación como un rectángulo dos por dos. Esto, ligado a la configuración del polinomio obliga a pensar que un factor es $(x-1)$ puesto que se representa con dos fichas. Así se hace una descomposición de $p(x)$ buscando arreglar el factor común $(x-1)$ que se obliga a ser base del rectángulo. De este modo $p(x) = x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - x + 1 = x(x-1) - (x-1) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$.

Su representación se dispone a continuación:

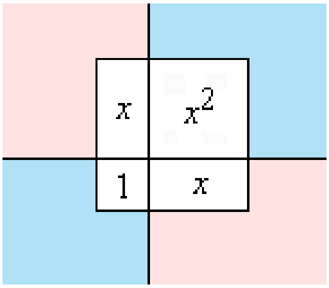


Figura 86 Fuente propia.

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 2x^2 - 7x + 3$ es completo y está constituido por 1212 fichas, así, se buscaría representar a este polinomio como un rectángulo 2×6 o 3×4. La configuración del polinomio y el coeficiente director hacen intuir que la segunda alternativa es mejor y en consecuencia es bueno ensayar con el factor $(2x - 1)$. Para ello se descompone el polinomio buscando tal factor de la siguiente manera.

$$p(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 2x^2 - x - 6x + 3 = x(2x - 1) - 3(2x - 1)$$
$$= (2x - 1)(x - 3)$$

y en efecto, su representación viene así

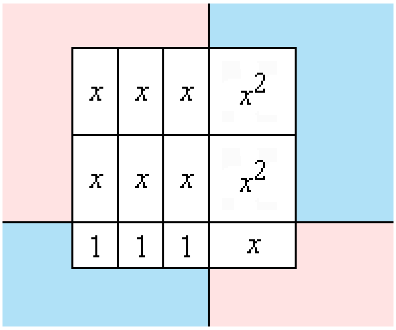


Figura 87 Fuente propia.

3.8.4 ACTIVIDAD 4

Factorizar los siguientes polinomios sin recurrir a su representación en la Caja de Polinomios y empleando una disgregación de los términos a sabiendas que son polinomios completos.

x^2+3x+2	x^2-4x+3	$2x^2-3x+1$
$3x^2-4x+1$	$3x^2-7x+2$	$-3x^2+8x-4$

3.8.5 ACTIVIDAD 5

Subrayar aquellos polinomios de la siguiente tabla que son completos.

$2x^2-3x+1$	$2x^2+3x+1$	$4x^2-1$
$3x^2+5x-2$	x^2-5x+6	$3x^2+2x-1$
$3x^2+5x-2$	$3x^2-7x+2$	x^2-2x+1
x^2+2x+1	$2x^2+3x-2$	$3x^2+5x-2$

Existen polinomios para los que es imposible elaborar un encuadre minimal viable; en este caso se asegura que el polinomio en cuestión no es factorizable en $\mathbb{Z}[x]$; tal es el caso del polinomio $2x^2+1$ cuyo encuadre minimal es como sigue:

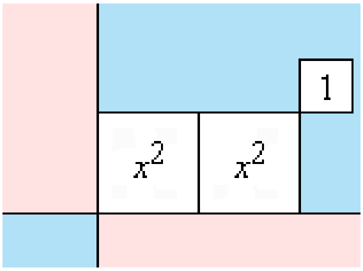


Figura 88 Fuente propia.

Pero de ninguna manera se puede representar este polinomio a través de un rectángulo. Lo mismo sucede con el polinomio $p(x) = 2x^2 + 2$ del que se presentan algunos encuadres de los cuales ninguno es minimal viable.

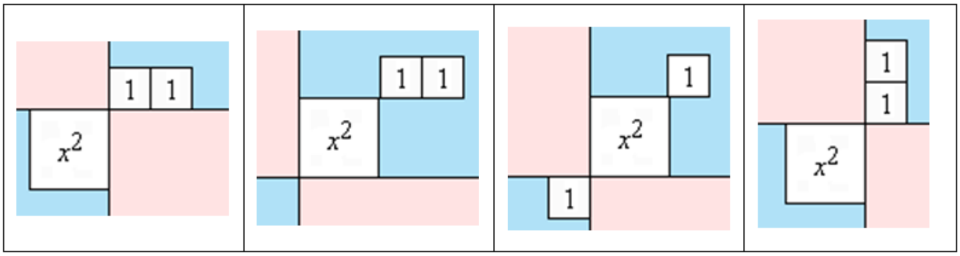


Figura 89 Encuadres minimales no viables. Fuente propia.

3.8.6 ACTIVIDAD 6

Demostrar, utilizando la Caja de Polinomios que los siguientes polinomios no se pueden factorizar.

$x^2 + 1$	$2x^2 + 7x + 1$	$x^2 - 3x + 7$
$x^2 + 3$	$3x^2 - 1$	$2x^2 - x - 2$

3.8.7 PARA RECORDAR

Un polinomio $p(x)$ es factorizable en los enteros si puede representarse como un rectángulo cuando se utiliza la Caja de Polinomios; en este caso, los factores son las dimensiones consecutivas de dos lados del rectángulo y el número de fichas que configuran tal rectángulo es un número compuesto.

Si α es el menor número de fichas utilizadas para escribir el polinomio $p(x)$ en el plano cartesiano; el número total de fichas a utilizar en su factorización es $\alpha + 2k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Es decir, es el menor número de fichas más un número par de ellas. Esta observación permite ejecutar el algoritmo de la factorización de manera eficiente pues lo que se debe buscar es que el número natural $\alpha + 2k$ resulte un número compuesto; y siendo así $\alpha + 2k = pq$, de modo que el rectángulo que factoriza a $p(x)$ es un rectángulo de p filas por q columnas.

Por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 7x + 1$ se escribe en el tablero con 4 fichas, como lo indica la gráfica que sigue; pero su factorización se realiza con $6 = 3 \times 2$ fichas y así se configura un rectángulo de 2 filas y 3 columnas.

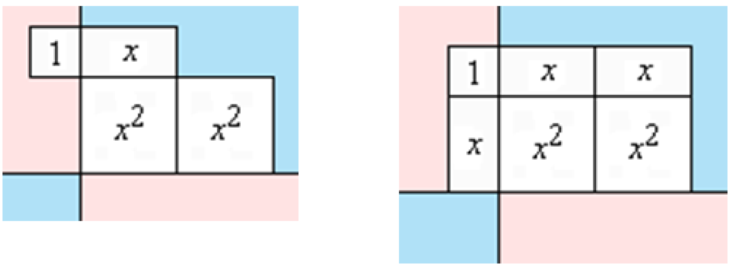


Figura 90 Factorización de $p(x) = 2x^2 + 7x + 1$. Fuente propia.

La representación simbólica de esta factorización se resume como:

$p(x) = 2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - 1 = (2x^2 + 2x) - (x + 1) =$
$2x(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(2x - 1)$

En el gráfico que sigue se muestra al polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 6$ que se representa con nueve fichas, nueve es compuesto y sin embargo su factorización $p(x) = 2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$ requiere de quince fichas.

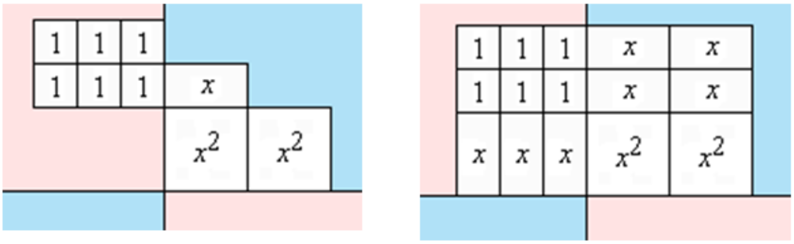


Figura 91 Factorización de $p(x) = 2x^2 + x - 6$. *Fuente propia.*

Un hecho claro que se establece con la Caja de Polinomios radica en que la factorización aplicable en ella se hace en el dominio de los polinomios con coeficientes enteros. De hecho, ya en el mundo abstracto, polinomios que no resultan factorizables allí, lo pueden ser al utilizar números racionales, irracionales o complejos.

3.9 GUÍA No. 9. Polinomios de grado 3

El trabajo de Thábit ibn Qurra, en el siglo X (Arabia) culminó con la idea de homogeneización de los polinomios de grado 2 que acabamos de estudiar. El trabajo realizado por docentes de la Universidad de Nariño derivó en la homogeneización de polinomios de cualquier grado en una o más variables. En esta sección se estudiarán los polinomios de grado 3 implementando el ardid matemático de sustitución de variables.

Objetivo: reconocer las partes constitutivas de las fichas que permiten la escritura, lectura y desarrollo operatorio algebraico con polinomios de grado 3

La forma generalizada y natural de representar geométricamente a x^3 es como un cubo de arista x; sin embargo, cualquier potencia de x puede representarse como objetos de dimensión 1 o 2 o 3. En el caso de la Caja de Polinomios se representan como objetos bidimensionales y más particularmente como rectángulos. Los rectángulos básicos para los polinomios de grado 3 son los siguientes y se presentan con sus dimensiones:

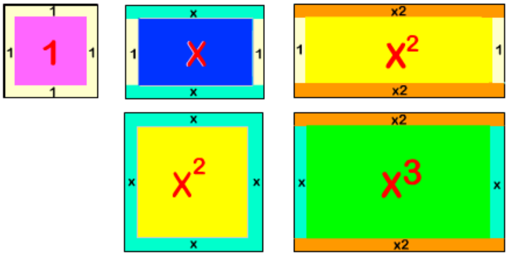


Figura 92 Fichas con sus dimensiones. Fuente propia.

Esto significa, que adicional a las tres clases de fichas que permiten la representación de polinomios de grado 2, aparecen dos nuevas que tienen un valor algebraico de x^2 y x^3 y cuyas medidas respectivamente son x^2, 1 y x^2, x.

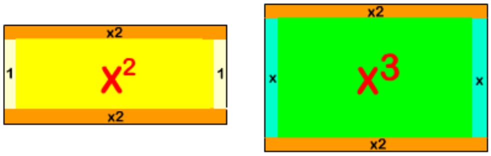


Figura 93 Nuevas fichas. Fuente propia.

El hecho que permite el desarrollo operatorio algebraico con polinomios de grado 3 se centra en que las fichas rotuladas con x^2, la cuadrada y la rectangular, poseen la misma área y por ello les corresponde el mismo valor algebraico y, en consecuencia, se pueden remplazar una a otra cuando se requiera.

Desde este punto de vista; las dos siguientes disposiciones rectangulares representan al mismo polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1$.

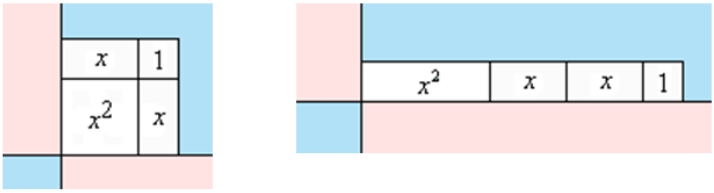


Figura 94 Dos disposiciones de $p(x) = x^2 + 2x + 1$. Fuente propia.

Como se ha dicho, los dos rectángulos poseen la misma área.

3.9.1 ACTIVIDAD 1

Representar de dos maneras diferentes y utilizando el principio de sustitución los siguientes polinomios.

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad r(x) = x^2 + 3x - 2$

$s(x) = 3x^2 - x + 1$ $\quad r(x) = x^2 + x - 3$ $\quad u(x) = x^2 + 5x - 4$

3.9.2 ACTIVIDAD 2

Escribir debajo de cada uno de los gráficos dispuestos a continuación, el polinomio que ellos representan.

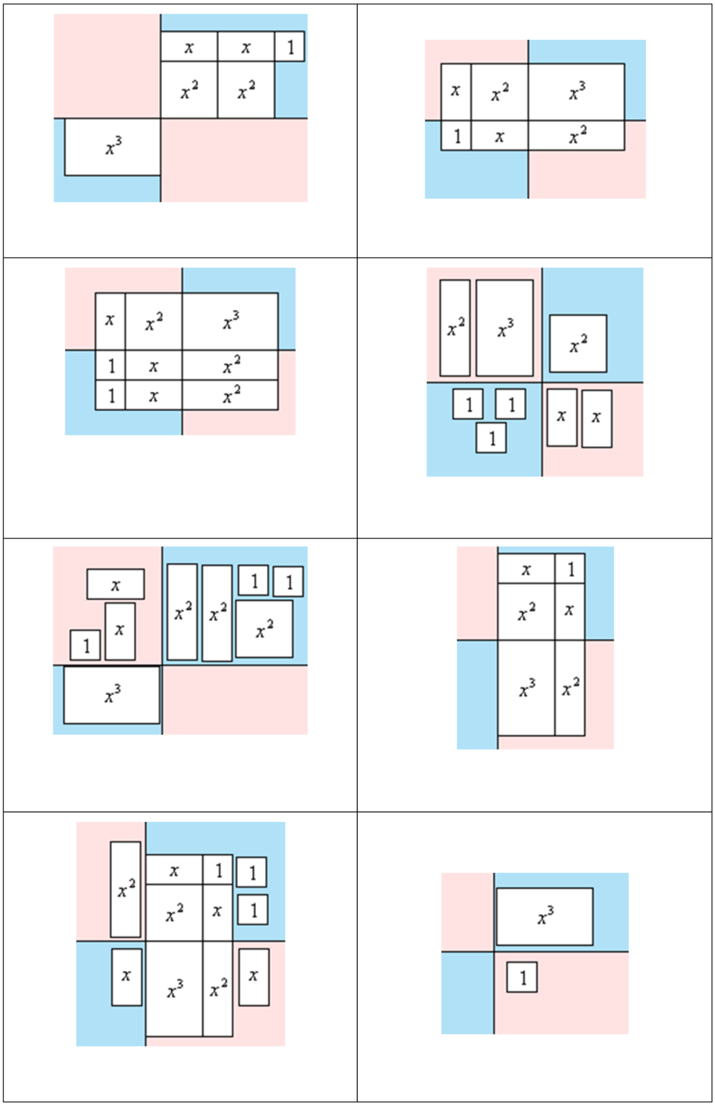


Figura 95 Fuente propia.

3.9.3 PARA RECORDAR

El principio de sustitución es importante en la conceptualización operativa y demostrativa de la matemática; en realidad, en casi todas las demostraciones matemáticas se va siguiendo una secuencia de sustituciones de unas expresiones por otras hasta llegar a la deseada. También en los cómputos se emplea este recurso particularmente en las técnicas de integración que se estudia en cursos avanzados de matemáticas.

3.10 GUÍA No. 10. Adición y Sustracción de Polinomios de Grado 3

El principio de sustitución explicado en la guía 8 se fundamenta en la igualdad entre áreas que poseen las fichas y que se traduce en una relación de equivalencia con su valor algebraico. En la operatoria algebraica se pueden remplazar unas por otras, con el fin de efectuar los cálculos recurriendo a la menor cantidad de fichas posible.

Objetivo: calcular la suma y la diferencia de dos polinomios de grado tres en una variable, utilizando la Caja de Polinomios como instrumento mediador del conocimiento algebraico que permite el paso de lo tangible a lo simbólico y abstracto.

Adición: recuerde que para calcular la suma de $p(x)$ y $q(x)$ es conveniente escribir el primer sumando $p(x)$ utilizando, únicamente los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO. El sumando $q(x)$ se escribe, en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO; esto permite leer los polinomios de izquierda a derecha.

Figura 96 Cuadrantes. Fuente propia.

Para calcular la suma de dos polinomios de grado 3 se procede de manera similar que para los de grado 2.

Ejemplo. Sumar $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ con $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, esta suma se calcula de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Escribir el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ en los cuadrantes segundo y tercero.

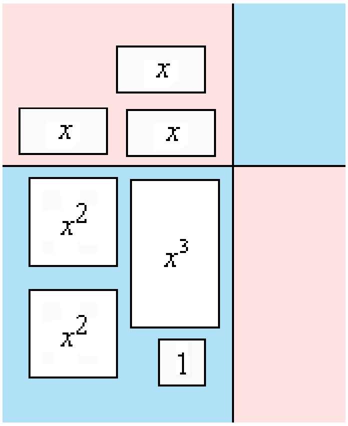


Figura 97 Fuente propia.

2. Escribir el polinomio $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ en los cuadrantes primero y cuarto. El tablero toma la siguiente apariencia.

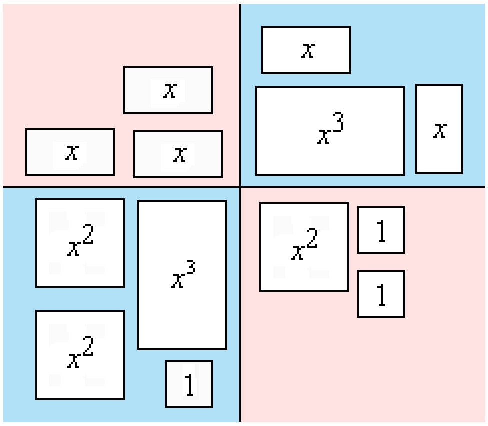


Figura 98 Fuente propia.

3. Retirar del plano las parejas de ceros que se producen, con lo que se obtiene

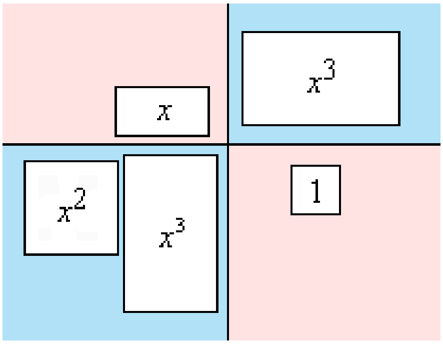


Figura 99 Fuente propia.

4. Leer el polinomio que queda escrito en todo el tablero y que asegura cómo: $p(x) + q(x) = 2x^3 + x^2 - x$-1.

Recordando que el Álgebra es un juego operatorio simbólico, esta suma se calcula de acuerdo con la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^3 + 2x^2 - 3x + 1) + (x^3 - x^2 + 2x - 2) \\ &= x^3 + 2x^2 - 3x + 1 + x^3 - x^2 + 2x - 2 \\ &= x^3 + x^3 + x^2 + x^2 - x^2 - 2x + 2x - x + 1 - 1 - 1 \\ &= 2x^3 + x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

3.10.1 ACTIVIDAD 1

Calcular utilizando la Caja de Polinomios, las sumas de los siguientes pares de polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 2 \qquad\qquad p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$
$$q(x) = -2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \qquad\qquad q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$$

$$p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$
$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$$

$$p(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$$
$$q(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 3$$
$$q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$
$$q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$
$$q(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 5$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$$
$$q(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

3.10.2 ACTIVIDAD 2

Calcular cada una de las sumas de la Actividad 1 de manera simbólica.

II. Para calcular la diferencia entre $p(x)$ y $q(x)$, $p(x) - q(x)$ se procede inicialmente como en el caso del cálculo de sumas.

1. Escribir el minuendo $p(x)$en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO.
2. Escribir el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.
3. Las fichas ubicadas en el PRIMER cuadrante y que corresponden al sustraendo $q(x)$ deben cambiar de signo y por ello se trasladan al SEGUNDO cuadrante. Del mismo modo, las fichas ubicadas en el CUARTO cuadrante se trasladan al TERCER cuadrante.
4. Hecho esto se retiran los *ceros* que hayan ocurrido.
5. La diferencia queda constituida por las fichas que reposen en el tablero.

Ejemplo. Siendo $p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y $q(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ calcular la diferencia $p(x) - q(x)$. Para realizar esta tarea, se realizan los pasos descritos.

1. Escribir el polinomio minuendo $p(x) = x^3 + x^2 - 2x +$ en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO

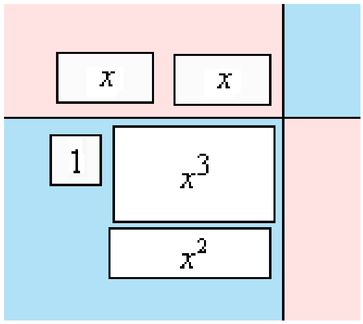


Figura 100 Fuente propia.

2. Escribir el polinomio sustraendo $q(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ en los cuadrantes PRIMERO Y CUARTO.

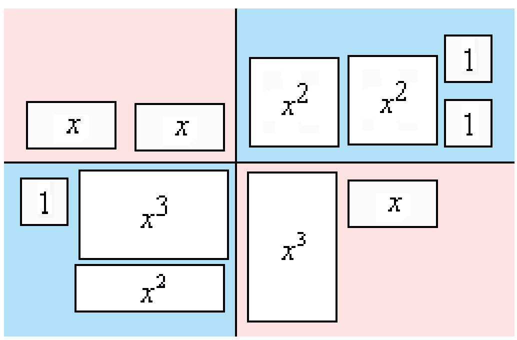


Figura 101 Fuente propia.

3. Trasladar las fichas del sustraendo; las del PRIMER cuadrante al SEGUNDO y las del CUARTO al TERCERO.

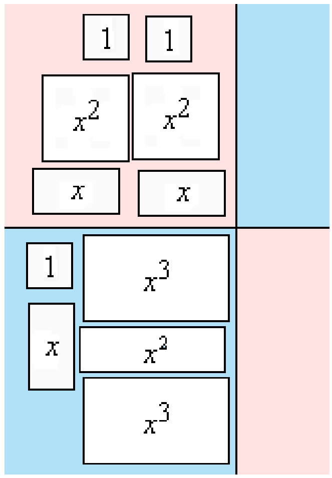


Figura 102 Fuente propia.

4. Retirar del plano las fichas que equivalen algebraicamente a cero.

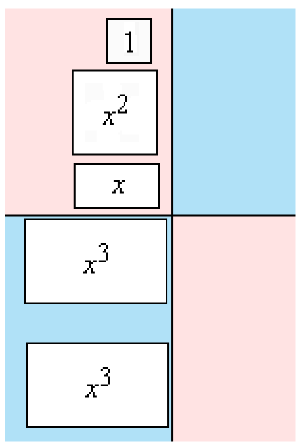


Figura 103 Fuente propia.

5. Leer el polinomio resultante que indica como $p(x) - q(x) = 2x^3 - x^2 - x - 1$

Al revisar de forma simbólica lo ejecutado de manera tangible con la Caja de Polinomios; se trata de calcular para $p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y $q(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ y la diferencia $p(x) - q(x)$. Se procede como sigue:

$$(x^3 + x^2 - 2x + 1) - (-x^3 + 2x^2 - x + 2)$$
$$= x^3 + x^2 - 2x + 1 + x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$= x^3 + x^3 + (x^2 - x^2) - x^2 - x + (x - x) + (1 - 1) - 1$$
$$= 2x^3 - x^2 - x - 1$$

El resultado final se encuentra quitando del cuaderno los ceros que equivalen a las expresiones entre paréntesis de la penúltima expresión en esta cadena de igualdades.

3.10.3 ACTIVIDAD 3

Para los siguientes pares de polinomios $p(x)$ $p(x)$ y $q(x)$ calcular las diferencias $p(x) - q(x)$ y $q(x) - p(x)$ utilizando como instrumento mediador la Caja de Polinomios.

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$
$$q(x) = -2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$$

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$
$$q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$$

$$p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$
$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$$

$$p(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$$
$$q(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 3$$
$$q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$
$$q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$
$$q(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 5$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$$
$$q(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

3.10.4 ACTIVIDAD 4

Realizar el cálculo de las diferencias anteriores recurriendo a la escritura simbólica usual.

3.10.5 ACTIVIDAD 5

Par cada uno de los siguientes polinomios $p(x)$, calcular su opuesto aditivo $-p(x)$.

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$
$$p(x) = -2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$$
$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$
$$p(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$$
$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 3$$
$$p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$
$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$
$$p(x) = -x^3 - 2x^2 - 2x + 5$$

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$
$$p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$$
$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$$
$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$
$$p(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$
$$p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$
$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x - 5$$
$$p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

3.10.6 PARA RECORDAR

La Caja de polinomios permite calcular las sumas y las diferencias de dos polinomios de grado 3.

1. Los pasos para calcular la suma $p(x) + q(x)$ son
   - Escribir el sumando $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero.

- Escribir el sumando $q(x)$ en los cuadrantes primero y cuarto.
- Retirar las fichas que algebraicamente equivalen a cero.
- Leer el polinomio resultante $p(x) + q(x)$.

2. Los pasos para calcular la diferencia $p(x) - q(x)$ son
   - Escribir el minuendo $p(x)$ en los cuadrantes segundo y tercero.
   - Escribir el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes primero y cuarto.
   - Trasladar las fichas del primer cuadrante al segundo.
   - Trasladar las fichas del cuarto cuadrante al tercero.
   - Retirar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero.
   - Leer el polinomio resultante $p(x) - q(x)$.

3.11 GUÍA No. 11. Cálculo de Productos de Grado Tres

El juego operatorio que se desarrolla en la Caja de Polinomios se fundamenta en la construcción de rectángulos alrededor del origen del plano cartesiano, este juego tiene como regla única la igualdad en los lados de contacto entre fichas vecinas. Este principio aplica de manera importante en las operaciones de multiplicación y división y en el proceso de factorización.

Objetivo: calcular el producto de tres factores lineales de la forma $(ax + b) \cdot (cx + d) \cdot (ex + f)$ y el producto de dos factores de los cuales uno es lineal $(ax + b)$ y el otro cuadrático de la forma $cx^2 + dx + e$.

5) Se ha visto cómo los ejes coordenados son la guía esencial para el cálculo de productos de la forma $p(x) \cdot q(x)$ que se corresponde con el valor algebraico de las fichas que configuran un rectángulo de base $p(x)$ y de altura $q(x)$ o viceversa. En el caso que atañe a esta guía, el producto de

tres factores lineales $(ax+b)\cdot(cx+d)\cdot(ex+f)$ se realiza aplicando de manera inicial la propiedad asociativa de la multiplicación agrupando cualquier par de factores; por ejemplo, si se agrupa los dos primeros se tiene $[(ax+b)\cdot(cx+d)](ex+f)$ lo que advierte que el producto original es el valor algebraico que corresponde al rectángulo de base $(ax+b)\cdot(cx+d)$ y de altura$(ex+f)$.

Para formar la base $(ax+b)\cdot(cx+d)$ se calcula de manera usual el producto y a continuación se remplazan las fichas cuadradas de valor x^2 por la de idéntico valor algebraico rectangulares; de esta manera, lo que es área, adopta una característica lineal. Como ejemplo, se calcula a continuación el producto $(x+1)(x-1)(2x-1)$, presentando en primer lugar, la siguiente asociación $[(x+1)(x-1)](2x-1)$, lo que indica que debe realizarse inicialmente el producto $(x+1)(x-1)$ que se indica en la siguiente gráfica:

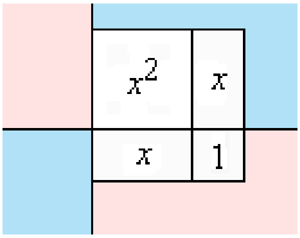


Figura 104 Fuente propia.

Así, $(x+1)(x-1)=x^2-1$; esto significa que el producto $(x+1)(x-1)(2x-1)$ es igual a $(x^2-1)(2x-1)$ que se consigue mediante la construcción de un rectángulo de base x^2-1 y de altura $(2x-1)$ cuyo bosquejo es

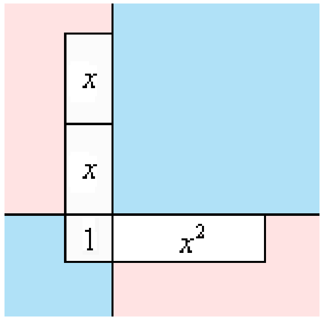


Figura 105 Fuente propia.

Para completar el rectángulo se requiere la utilización de fichas x^3 x^3 cuyos lados miden x^2 y x respectivamente.

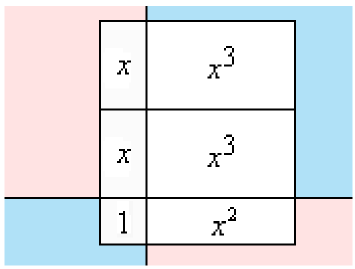


Figura 106 Fuente propia.

El valor algebraico del rectángulo es $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ y su constitución no produjo ceros; de esta forma

$(x+1)(x-1)(2x-1) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$

El cálculo del producto realizado con la Caja de Polinomios se retrata de manera simbólica de acuerdo con la siguiente cadena de igualdades.

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x-1)(2x-1) &= [(x+1)(x-1)](2x-1) \\
&= [x(x-1) + (x-1)](2x-1) = (x^2 - x + x - 1)(2x-1) \\
&= (x^2-1)(2x-1) = (x^2-1)(2x) + (-1)(x^2-1) \\
&= 2x^3 - 2x - x^2 + 1 = 2x^3 - x^2 - 2x + 1
\end{aligned}
$$

resultado que se consigue aplicando de manera reiterada la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la adición y las propiedades conmutativa y asociativa.

Como ejemplo adicional se presenta a continuación el cálculo del producto $[(x-3)(x+1)](1-2x)$ que asocia los dos primeros factores lineales y cuya disposición inicial, intermedia y final se dispone en la siguiente gráfica:

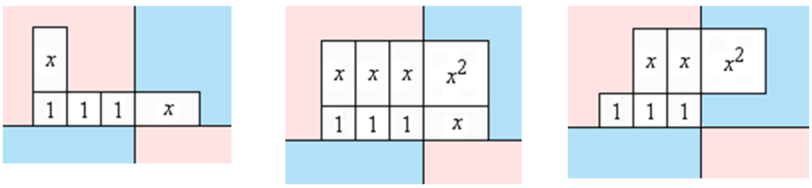


Figura 107 Fuente propia.

De manera que $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$ y entonces el producto pedido $[(x-3)(x+1)](1-2x)$ se calcula al construir un rectángulo cuya base se corresponde con el factor $x^2 - 2x - 3$ y de altura $1 - 2x$ como se presenta enseguida:

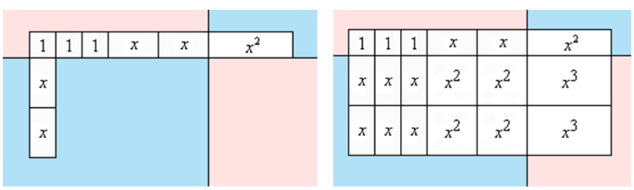


Figura 108 Fuente propia.

Hace falta, en este punto, retirar los pares de fichas que equivalen algebraicamente a cero y siendo así, el tablero adquiere la siguiente disposición.

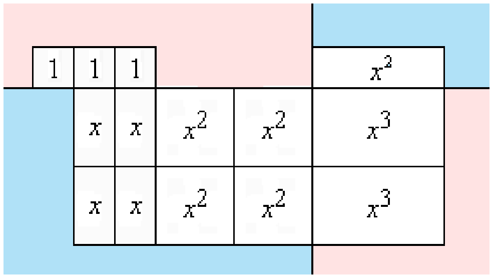


Figura 109 Fuente propia.

Este gráfico indica que $[(x-3)(x+1)](1-2x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$.

3.11.1 ACTIVIDAD 1

Escoger al menos diez ternas entre las expresiones que presenta la siguiente tabla y calcular su producto; puede escoger una misma expresión en las tres ocasiones.

$2x-1$	$2-x$	$3x-2$	$x+2$	$3-2x$
$3x-2$	$x-1$	$x-2$	$2-3x$	$1+x$
$x-3$	$1-2x$	x	$1-3x$	$1-x$

Representar cada uno de los cálculos de productos efectuados, de manera simbólica.

6) Como se explicó antes, el rompecabezas permite el cálculo del producto de dos factores siendo el uno cuadrático y el otro lineal. Como ejemplo se presenta el cálculo de $(x^2-x+1)(x-2)$ que se corresponde con un rectángulo de base (x^2-x+1) y de altura $(x-2)$ cuyo bosquejo inicial se presenta junto con el rectángulo final.

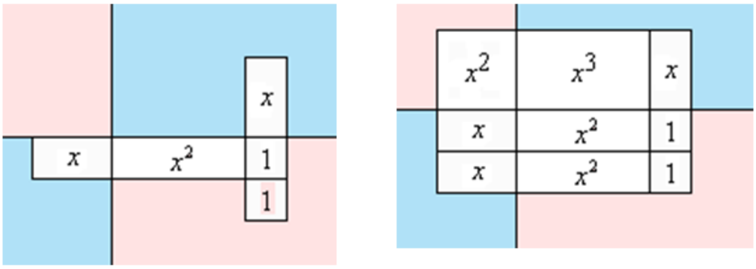


Figura 110 Fuente propia.

Como no aparecen ceros se tiene que el producto buscado se escribe así: $(x^2 - x + 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

De manera simbólica se puede calcular tal producto mediante la aplicación de la propiedad distributiva como sigue:

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 1)(x - 2) &= x^2(x - 2) - x(x - 2) + (x - 2)\\ &= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2\end{aligned}$$

3.11.2 ACTIVIDAD 2

Los siguientes gráficos corresponden a productos de dos factores uno de los cuales es cuadrático y el otro lineal, pero aparecen incompletos. Completar los rectángulos, en cada caso, escribir los factores que se multiplican y el producto.

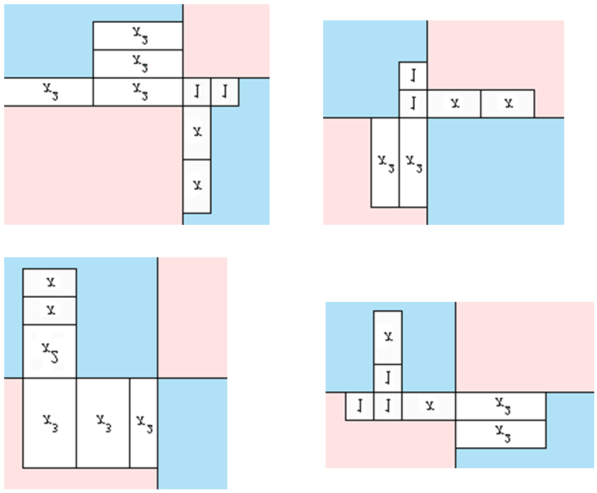


Figura 111 Fuente propia.

3.11.3 ACTIVIDAD 3

De la siguiente tabla escoja un factor cuadrático y otro lineal y calcular su producto. Inicialmente debe utilizar la Caja de Polinomios y a continuación traducir lo ejecutado de manera simbólica.

$x^2 + x - 2$	$2x^2 + x - 2$	$x^2 + 2x - 2$
$2x^2 + 3x - 1$	$1 - 2x$	$2 - x$
$2x - 1$	$2x - 3$	$2x + 3$

3.11.4 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios es un instrumento mediador de la operatoria algebraica que permite, de manera particular, el cálculo de productos de polinomios de grado superior a dos; para ello se requiere de *sustituir* o *remplazar* unas fichas por otras, siempre que tengan la misma área. Este principio de sustitución es un recurso frecuente en todos los procesos de cálculos matemáticos como los de integración y derivación, por ejemplo. En el caso particular de los polinomios de grado tres se hace necesaria la sustitución o reemplazo entre las fichas rotuladas como x^2 y de formas cuadrada y rectangular.

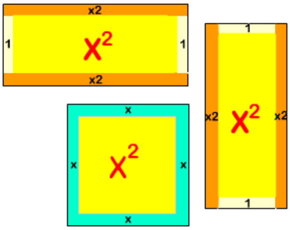


Figura 112 Fichas x^2. Fuente propia.

El recurso de la sustitución es fundamental para el juego con el rompecabezas, de igual manera que lo es la configuración de rectángulos pues todas las operaciones centran sus cálculos en ellos, a excepción de la adición y sustracción.

3.12 GUÍA No. 12. División de Polinomios de Grado 3

Las posibilidades para dividir polinomios de grado tres aumentan, pues el divisor puede escogerse de grados uno, dos y tres. Es atractivo aplicar el algoritmo de esta operación cuando el dividendo es de grado tres y el divisor de grados uno o dos.

Objetivo: calcular cocientes de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d \div x^2 + ex + f$ o de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d \div x + e$ donde cada uno de los coeficientes son números enteros.

7) El algoritmo de la división que se aplica con la Caja de Polinomios cautiva por su sencillez. Dividir es sinónimo de repartir o de distribuir y efectivamente es lo que se hace cuando se trata de calcular el cociente $p(x) \div q(x)$; en este caso se debe construir con el dividendo $p(x)$ un rectángulo de base $q(x)$ teniendo como recurso la agregación de pares de fichas que equivalen algebraicamente a <u>cero</u>; el cociente es la altura del rectángulo construido. Al efectuar divisiones del tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d \div x + e$, en concordancia con el algoritmo de la división, el residuo, si existe, está constituido por fichas 1.

Se propone como ejemplo el cálculo del cociente $(x^3 - x^2 + 3x - 2) \div (x - 1)$ que se realiza de acuerdo con los siguientes pasos:

Paso 1: escribir el polinomio dividendo $x^3 - x^2 + 3x - 2$ y establecer sobre el plano unas guías imaginarias de anchura equivalente al divisor $x - 1$ como se indica a continuación:

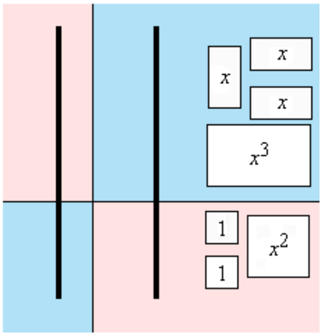


Figura 113 Fuente propia.

Paso 2: ubicar las fichas que representan al polinomio sobre la banda imaginaria, previendo la utilización del menor número de pares de ceros posible y respetando el color del cuadrante que les corresponde. El polinomio que se debe leer en total sobre el tablero es el dividendo $p(x)$. Ejecutado el paso, en el ejemplo, el tablero se vería como se indica enseguida:

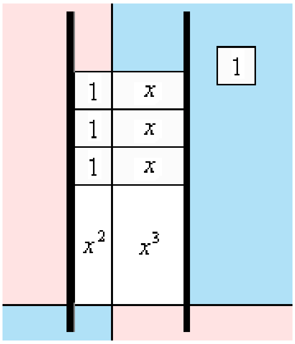


Figura 114 Fuente propia.

En el ejemplo, se tuvo la necesidad de agregar un cero constituido por una pareja de fichas 1 y así mismo, sustituir una ficha x^2 cuadrada por su equivalente rectangular. El cociente es $x^2 + 3$ y el residuo es 1.

En el juego operatorio simbólico, el cálculo del cociente anterior se escribe: $x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x^3 - x^2) + (3x - 3) + 1 = x^2(x-1) + 3(x-1) + 1 =$ $(x-1)(x^2+3)+1$, expresión que dice a las claras como el cociente es (x^2+3) y el residuo es 1

3.12.1 ACTIVIDAD 1

Cada una de las siguientes gráficas corresponde a una división particular; indicar en cada caso, el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo.

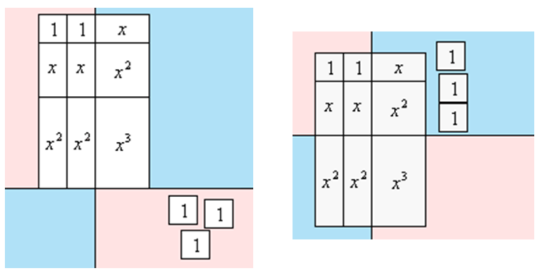


Figura 115 Fuente propia.

3.12.2 ACTIVIDAD 2

De la siguiente tabla, escoger al menos cinco dividendos entre los polinomios de grado 3 y cinco divisores entre las expresiones lineales y calcular su respectivo cociente utilizando la Caja de Polinomios como elemento auxiliar y transcribir lo realizado a la forma simbólica. $2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$

$2x^3 - 2x^2 + x - 2$	$x^3 - 2x^2 + x - 2$	$2x^3 + 2x^2 - x - 1$
$x^3 - x^2 + x - 2$	$x^3 - x^2 + x + 3$	$2x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
$x - 1$	$x + 2$	$x + 1$
$x - 2$	$x + 3$	$x - 3$
x	$x - 4$	$x + 4$

Indique aquellas divisiones que no se pueden efectuar haciendo uso del artefacto llamado la Caja de Polinomios.

3.12.3 ACTIVIDAD 3

Calcule los siguientes cocientes, haciendo uso de la Caja de Polinomios:

$$(.\ 2x^3 - 3x^2 - x - 2) \div (2x - 1)$$

$$(.\ 2x^3 - 3x^2 - x + 4) \div (2x - 1)$$

$$(. -2x^3 - 3x^2 - x + 2) \div (-2x - 1)$$

$$(\ 2x^3 - 3x^2 - x + 2) \div (2x - 1)$$

$$(-2x^3 + 3x^2 + x) \div (-2x + 1)$$

$$(-2x^3 + 3x^2 + x + 2) \div (-2x + 1)$$

$$(-2x^3 + 3x^2 + x - 4) \div (-2x + 1)$$

$$(2x^3 - 5x^2 + x) \div (2x - 3)$$

$$(2x^3 - 5x^2 + x + 6) \div (2x - 3)$$

$$(2x^3 - 5x^2 + x + 1) \div (2x - 3)$$

$$(2x^3 - 5x^2 + x + 7) \div (2x - 3)$$

Cuando el divisor tiene grado 2, el residuo, si existe, puede estar constituido por fichas 1 o fichas x, como se registra en el caso de dividir $x^3 - x^2 + 3x - 2$ por $x^2 - 1$ y cuya disposición inicial del dividendo y de la banda imaginaria aparece en la gráfica correspondiente al paso 1.

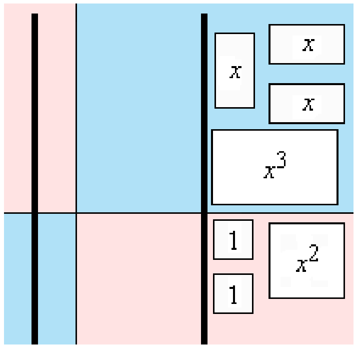


Figura 116 Fuente propia

Paso 2. Organizar el rectángulo alrededor del origen utilizando la menor cantidad de ceros para completarlo, el rectángulo, para este caso, se vería así:

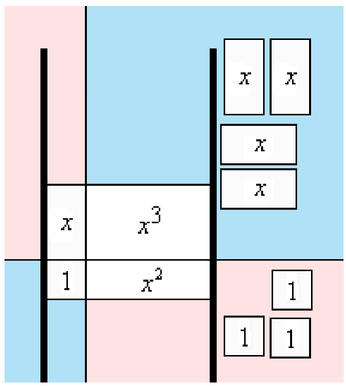


Figura 117 Fuente propia.

En este caso el cociente es $x - 1$ y el residuo es $4x - 3$.

De manera simbólica es suficiente mostrar que

$$x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x^3 - x) - (x^2 - 1) + 4x - 3$$
$$= x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) + 4x - 3 = (x^2 - 1)(x - 1) + 4x - 3$$

así que el cociente es $x - 1$ y el residuo es $4x - 3$.

A modo de ejemplo final se presenta el cálculo del cociente $(x^3 - x^2 + 3x - 2) \div (x^2 + x - 2)$.

Paso 1. Escribir el polinomio dividendo $x^3 - x^2 + 3x - 2$ que se organizará en el siguiente paso alrededor del origen de coordenadas y establecer la franja auxiliar de anchura $x^2 + x - 2$

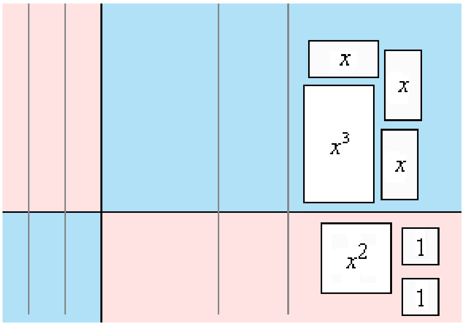


Figura 118 Fuente propia.

Paso 2. Organizar las fichas alrededor del origen preservando el signo que les corresponde en concordancia con el color del cuadrante y buscando, para completar el rectángulo, que hagan falta la menor cantidad de pares de ficha, equivalentes algebraicamente a cero.

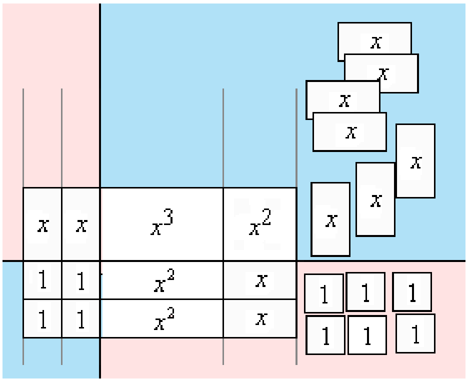


Figura 119 Fuente propia.

De este modo, el cociente es $x-2$ y el residuo es $7x-6$ y en concordancia con el algoritmo de la división se escribe

$$x^3-x^2+3x-2=(x^2+x-2\,)(x-2)+7x-6$$

De manera simbólica, el procedimiento elaborado en la Caja de Polinomios se expresa

$x^3-x^2+3x-2=(x^3+x^2-2x)-(2x^2+2x-4)+7x-6$

$=x(x^2+x-2)-2(x^2+x-2)+7x-6$

$=(x^2+x-2)(x-2)+7x-6$

y esto indica que el cociente es $x-2$ y el residuo es $7x-6$.

3.12.4 ACTIVIDAD 4

Cada una de las siguientes gráficas corresponde a una división particular; indicar para cada caso, el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo.

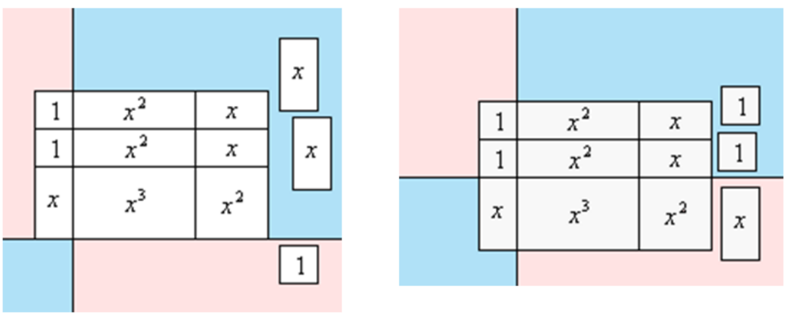


Figura 120 Fuente propia.

3.12.5 ACTIVIDAD 5

Calcular los cocientes que se indican a continuación, utilizando la Caja de Polinomios como elemento mediador de los cálculos y traducir lo realizado a la forma simbólica.

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \div \begin{cases} x^2 - 1 \\ x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 \end{cases}$$

$$2x^3 - x^2 + 3x - 2 \div \begin{cases} x^2 + 2 \\ x^2 + 1 \\ x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 \div \begin{cases} x^2 - 1 \\ x^2 + 1 \\ x^2 - x - 2 \end{cases}$$

$$x^3 + x^2 - x - 3 \div \begin{cases} x^2 - 1 \\ x^2 + 1 \\ x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

3.12.6 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite estudiar divisiones de polinomios de las formas $(ax^3 + bx^2 + cx + d) \div (ex + f)$ o $(ax^3 + bx^2 + cx + d) \div (ex^2 + fx + g)$ siguiendo los pasos descritos a continuación:

1. Escribir el polinomio dividendo $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ en el plano cartesiano de la Caja de Polinomios y establecer unas guías imaginarias que determinen en su anchura conjunta al polinomio divisor $(ex + f)$ o $ex^2 + fx + g$.

2. Formar sobre la banda imaginaria y alrededor del origen de coordenadas, un rectángulo con las fichas que conforman al polinomio

dividendo; para ello se tiene como comodín, la utilización de parejas de fichas algebraicamente equivalentes a cero.

3. Finalmente, se procede a leer la respuesta, tomando como cociente de la división la altura del rectángulo construido y como residuo, las fichas 1 o x que no forman parte del rectángulo.

4. Es útil recordar que, en todo momento, en el tablero debe verse representado el dividendo $D(x)$. En el siguiente ejemplo se presenta la división de $D(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ por $x - 2$ y $x^2 + 1$.

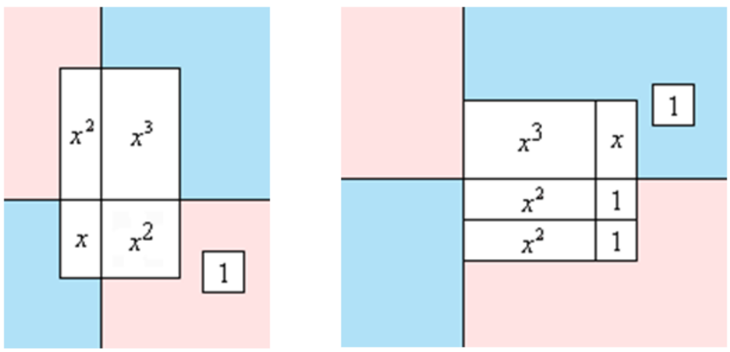


Figura 121 Fuente propia.

De aquí resulta que $(x-1)(x^2-x)-1 = (x^2+1)(x-2)+1$ a sabiendas que el álgebra es la ciencia de las identidades.

3.13 GUÍA No. 13. Factorización de Polinomios de Grado 3

La multiplicación, la división y la factorización se realizan utilizando la Caja de Polinomios centrando sus algoritmos en la construcción de rectángulos alrededor del origen.

Objetivo: factorizar polinomios, mediante la construcción de rectángulos alrededor del origen y siguiendo la regla de vecindad en las fichas establecida para la construcción de estos.

I. Factorizar un polinomio utilizando la Caja de Polinomios equivale a disponer una representación rectangular del mismo donde los factores son las longitudes de dos lados consecutivos del rectángulo. En esta tarea suele ser necesaria la agregación de ceros; es decir, de parejas de fichas que ubicadas en cuadrantes de distinto color equivalen algebraicamente a cero. Para este efecto, se requiere disponer el menor número de fichas que representan al polinomio en cuestión, en un encuadre minimal viable.

El siguiente ejemplo presenta la factorización del polinomio $p(x) = x^3 - 1$ cuya disposición minimal viable es la siguiente.

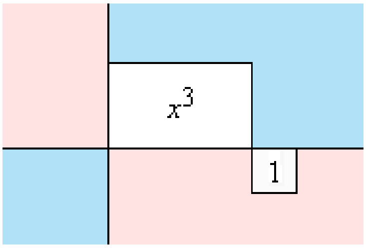


Figura 122 Fuente propia.

Sin embargo, no es evidente que corresponda a una disposición viable puesto que en apariencia se completa el rectángulo con el polinomio $x - x^2$ que no es igual a cero; pero si se agrega el cero $x^2 - x$ constituido por fichas de distinta forma, como se indica en la figura que sigue, se observa que el rectángulo se completa con el cero $x - x$.

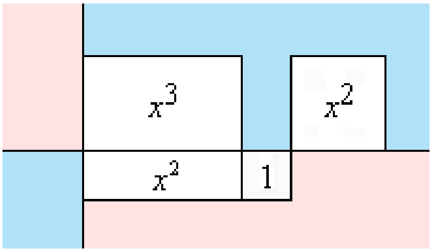


Figura 123 Fuente propia.

Al completar el rectángulo se ve así:

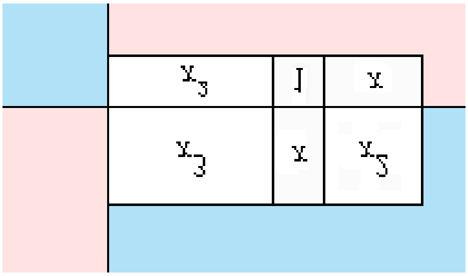


Figura 124 Fuente propia.

y esto indica que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

La siguiente cadena de igualdades explica simbólicamente lo realizado en la Caja de Polinomios.

$$x^3 - 1 = x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (x - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Queda el reto de factorizar, $x^2 + x + 1$ pero con la representación de este polinomio en la Caja de Polinomios no se consigue ningún encuadre minimal viable, tal y como se observa en las siguientes gráficas:

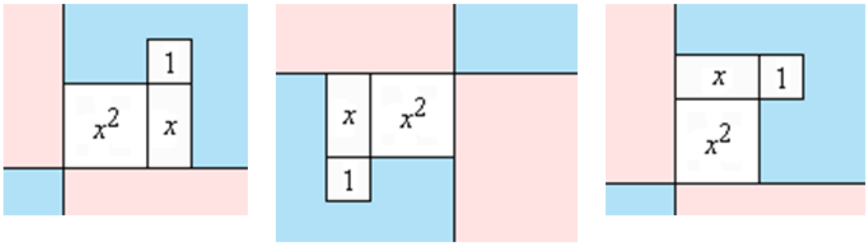


Figura 125 Fuente propia.

Esto indica que $x^2 + x + 1$ es irreducible.

La factorización de $x^3 + 1$ se presenta en los siguientes tres pasos:

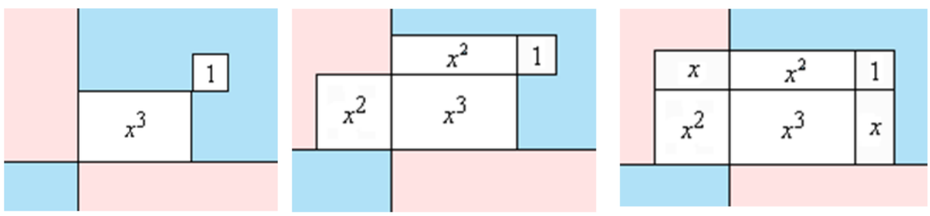


Figura 126 Fuente propia.

De modo que $x^3 - 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ y puede mostrarse como antes, que el segundo factor es irreducible en el domino de polinomios de una variable con coeficientes enteros.

Para factorizar $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ se establece su disposición inicial en el tablero como sigue:

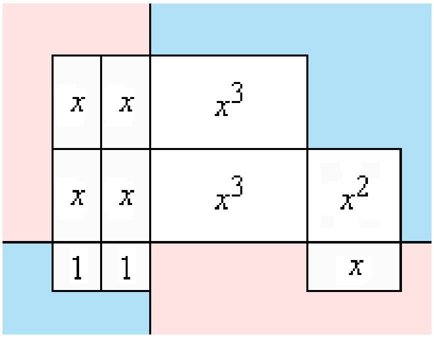


Figura 127 Fuente propia.

Adicionando el cero $x^2 - x^2$ conformado por fichas de diferente forma, pero igual valor algebraico se obtiene el rectángulo final.

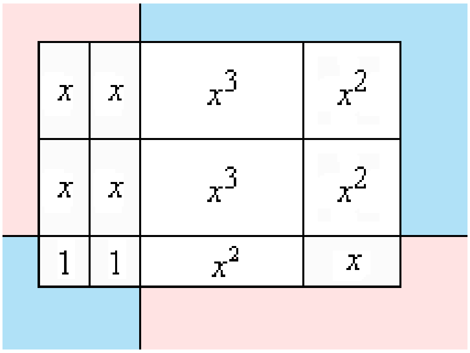
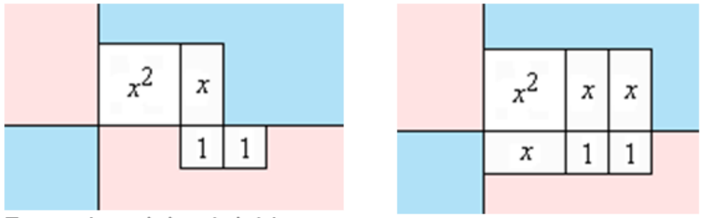


Figura 128 Fuente propia.

Y esto indica que $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x^2 + x - 2)$. Se debe ahora indagar sobre la factorización de $x^2 + x - 2$ que se presenta en el siguiente gráfico.



Encuadre minimal viable $(x+2)(x-1)$

Figura 129 Fuente propia.

Y por tanto $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x+2)(x-1)$

Sobre este ejemplo hay que anotar dos hechos; el primero está referido al número de fichas que representa inicialmente a $p(x)$ y que es igual a 10 y el número de fichas que logran su factorización a través de su representación rectangular y que es igual a $12 = 4 \times 3$. Esto significa, que inicialmente se buscaría organizar un rectángulo de 2×5 (filas-columnas) y si esto no es posible, se va agregando pares de fichas hasta llegar a un número compuesto con el que se logra la factorización; en este caso 12.

El segundo hecho, está referido al marco simbólico que se observa en el tablero con el que se logra la factorización y que se representa así

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 2x^3 + 2x^2 - 4x - x^2 - x + 2 \\ &= 2x(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2) = (2x-1)(x^2 + x - 2) \end{aligned}$$

y por su parte

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= x^2 - x + 2x - 2 = (x^2 - x) + (2x - 2) \\ &= x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x+2). \end{aligned}$$

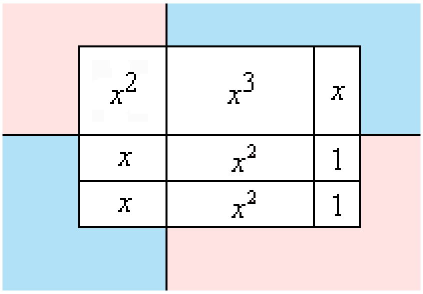


Figura 130 Fuente propia.

El polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ a izquierda es completo puesto que el rectángulo que se organiza con las fichas que lo representan no requiere adición de "ceros" aunque si del recambio de fichas cuadradas por rectangulares.

En el ejemplo, el polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ se representa con 9 fichas que es un número compuesto. En efecto, con ellas se organiza un rectángulo 3×3 que asegura cómo $x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 - x + 1)(x - 2)$.

Saber que un polinomio $p(x)$ es completo ayuda a su proceso de factorización puesto que su configuración y el coeficiente director dan pistas para establecer un factor. De allí, se utiliza una disgregación de los términos a fin de que al aplicar la propiedad asociativa aparezca de forma natural el factor. Por ejemplo, para factorizar el polinomio completo $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ que se representa con 15 fichas. Siendo $15 = 3 \times 5$ se busca un factor formado por 3 tabletas. Un buen candidato es el factor $(x - 2)$ que se arregla como sigue:

$$
\begin{aligned}
p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6 &= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 3x - 6 \\
&= x^2(x-2) - x(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2 - x + 3).
\end{aligned}
$$

En efecto, su representación gráfica es así:

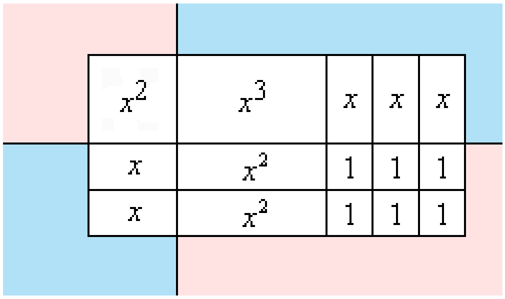


Figura 131 Fuente propia.

Lo mismo ocurre con el polinomio completo $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ que se representa con un rectángulo 3×3 dado que contiene 9 fichas. Un factor candidato es $(x - 2)$ que se arma con tres fichas y por ello se descompone $p(x)$ armando por asociación a tal factor del modo que sigue.

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = p(x) = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + x - 2$$
$$= x^2(x - 2) - x(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 - x + 1)$$

En efecto, la representación del polinomio es como sigue:

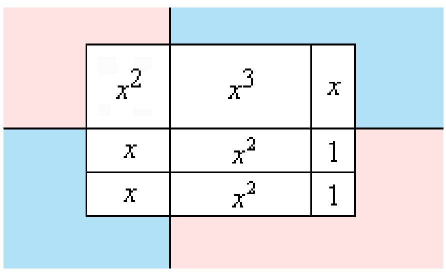


Figura 132 Fuente propia.

3.13.1 ACTIVIDAD 1

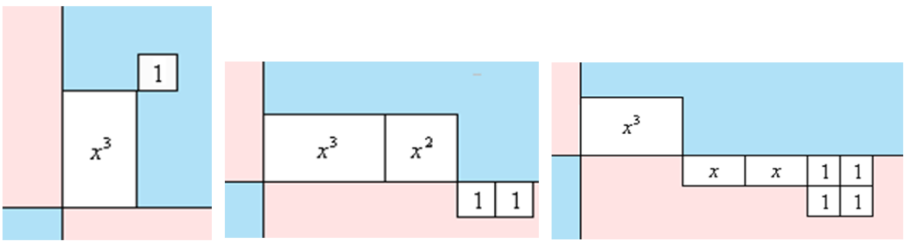
Factorizar los siguientes polinomios completos sin recurrir a la Caja de Polinomios y utilizando la descomposición y asociación de términos.

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ $\quad$ $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

$2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ $\quad$ $2x^3 - 4x^2 + 8x - 6$ $\quad$ $-x^3 + 2x^2 - 5x + 4$

3.13.2 ACTIVIDAD 2

A partir de las siguientes disposiciones minimales viables de los polinomios $p(x) = x^3 + 1$, $q(x) = x^3 + x^2 - 2$ y $r(x) = x^3 - 2x - 4$, completar su factorización y transcribir el proceso realizado de manera simbólica.



$p(x) = x^3 + 1$ $\quad$ $q(x) = x^3 + x^2 - 2$ $\quad$ $r(x) = x^3 - 2x - 4$

Figura 133 Fuente propia.

3.13.3 ACTIVIDAD 3

Factorizar los siguientes polinomios con ayuda de la Caja de Polinomios y transcribir el proceso de manera simbólica.

$p(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$ $\quad$ $q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$r(x) = x^3 + 1$ $\quad$ $s(x) = x^3 - 3x + 2$

$t(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ $\quad$ $u(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

$v(x) = 6x^3 + x^2 - 5x - 2$ $\quad$ $w(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

$z(x) = 6x^3 + x^2 - 2x$ $\quad$ $t(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 2$

$u(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 2$ $\quad$ $a(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

$b(x) = 6x^3 - x^2 - 4x + 4$ $\qquad$ $c(x) = 6x^3 - 7x^2 + 2x$

$d(x) = x^3 - x^2 - 4$ $\qquad$ $e(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ $\qquad$ $g(x) = -2x^3 + 4x + 2$

II. Un polinomio $p(x)$ de grado tres no siempre se factoriza en términos de factores lineales; tal es el caso de $p(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ cuyo encuadre minimal viable se muestra enseguida.

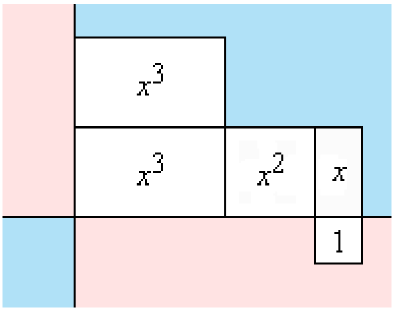


Figura 134 Fuente propia.

y cuya representación rectangular final es

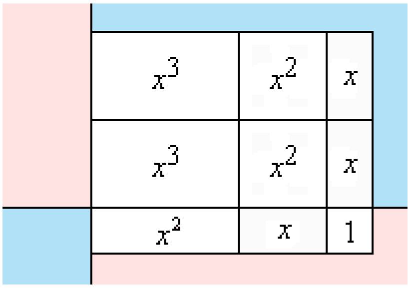


Figura 135 Fuente propia.

y por ello $p(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Con este ejemplo se observa que $p(x)$ se representa inicialmente con 5 fichas y se factoriza con $9 = 3 \times 3$ fichas. De otra parte, la representación simbólica de lo acontecido es

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 + x - 1 \quad &= 2x^3 + 2x^2 - x^2 + 2x - x - 1 \\ &= 2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) \\ &= (2x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

siendo el factor cuadrático $x^2 + x + 1$, un factor irreducible, tal y como se indicó antes.

3.13.4 ACTIVIDAD 4

Probar que los siguientes polinomios contienen un factor cuadrático irreducible.

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$	$q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$
$r(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	$s(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$
$t(x) = x^3 + x - 2$	$u(x) = x^3 - x^2 - 4$

3.13.5 ACTIVIDAD 5

Determinar cuáles de los siguientes polinomios son completos.

$x^3 + 4x^2 + x - 6$	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$	$2x^3 + 5x^2 - 4x - 12$
$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$	$x^3 - 3x^2 - x + 3$
$x^3 - 7x - 6$	$2x^3 - x^2 - 13x - 6$
$2x^3 - x^2 - 13x - 6$	$x^3 - 3x^2 + 4$
$x^3 - 3x^2 - x - 3$	$2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

3.13.6 ACTIVIDAD 6

Factorizar los polinomios que se muestran en la siguiente tabla.

$-x^3+2x+1$	$-x^3+2x^2-1$	x^3-2x^2+1
$2x^3-3x^2-x+1$	$-2x^3+3x^2-3x+1$	$2x^3-3x^2+3x-1$
x^3-2x^2+2x-1	x^3-2x^2+1	$-x^3+2x^2-1$
$-x^3+1$	x^3-1	$2x^3+x^2-3x+1$
x^3+3x^2+x-1	x^3-x^2-3x-1	$-x^3-3x^2-3x-1$
x^3+x^2-x-1	$-x^3+3x^2-2$	$-x^3+3x^2-4x+2$
$-2x^3+5x^2-6x+2$	$2x^3-5x^2+6x-2$	$2x^3-5x^2+4x-1$
$2x^3-5x^2+1$	$3x^3-7x^2-x+1$	x^3-5x^2+5x+3
x^3+x^2-7x-3	x^3+5x^2+5x-3	x^3-x^2-7x+3
$-x^3+x^2+7x-3$	x^3+2x^2-x-2	x^3+2x^2-x+2
$2x^3-3x^2-3x+2$	x^3+2x^2-x-2	$2x^3+3x^2-3x-2$
$-2x^3+5x^2-x-2$	$-x^3+x^2+x-1$	$-x^3+x^2+2x-2$
$-x^3+2x^2+x-2$	x^3+2x-1	x^3-2x^2-x+2

3.13.7 PARA RECORDAR

Un polinomio $p(x)$ es factorizable en los enteros si puede representarse como un rectángulo cuando se utiliza la Caja de Polinomios; en este caso, los factores son las dimensiones consecutivas de dos lados del rectángulo.

Si α es el menor número de fichas utilizadas para escribir el polinomio $p(x)$ en el plano cartesiano; el número total de fichas a utilizar en su factorización es $\alpha+2k$, donde $k\in\mathbb{N}$. Es decir, es el menor número de fichas más un número par de ellas. Esta observación permite ejecutar el algoritmo de la factorización de manera eficiente pues lo que se debe buscar es que el número natural $\alpha + 2k$ sea un número compuesto; y siendo así $\alpha + 2k = pq$, el rectángulo que factoriza a $p(x)$ es un rectángulo de p filas por q columnas.

El resumen de esta observación se explica arguyendo que el número de fichas que permiten la factorización de $p(x)$ es igual a $|p(x)| + 2k,\ k \in \mathbb{N}$ donde $|p(x)|$ es el menor número de fichas con el que se representa al polinomio $p(x)$.

3.14 GUÍA No. 14. División con Polinomios de Grado 3

La multiplicación, la división y la factorización realizadas por medio de la Caja de Polinomios fundamentan sus respectivos algoritmos en la construcción de rectángulos alrededor del origen, en la agregación de pares de fichas que equivalen algebraicamente a cero y en el principio de sustitución llevada a cabo entre fichas de diferente forma, pero de igual valor algebraico (Igual área). La construcción de tales rectángulos correspondientes con el dividendo $p(x)$ debe realizarse empleando la menor cantidad de fichas que representen a este polinomio sobre el plano cartesiano.

Objetivo: dividir polinomios de grado 3 entre polinomios lineales y cuadráticos, mediante la construcción de rectángulos alrededor del origen y siguiendo la norma de vecindad en las fichas establecida para la construcción de estos.

Todas las operaciones algebraicas de polinomios con coeficientes enteros siguen las reglas y procedimientos hasta ahora explicados y, por lo tanto, la presente guía dispone de unos pocos ejemplos en torno de la división de polinomios de grado 3.

Las posibilidades de división aumentan, de hecho, se debe tener conocimiento que el algoritmo de la división acude a tener en mente que la división de un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ entre uno lineal de la forma $q(x) = \alpha x + \beta$ puede dar constancia de residuos enteros constituidos por fichas 1, mientras si el divisor es cuadrático de la forma $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, el residuo puede conformarse con fichas x y 1.

Los pasos para dividir un polinomio de grado tres $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sintetizan en los siguientes.

Escribir el polinomio dividendo $p(x)$ en el tablero.

Divisor de la forma $q(x) = \alpha x + \beta$. Si el polinomio divisor es lineal de la forma $q(x) = \alpha x + \beta$ se establece una franja de ancho igual en dimensión que este divisor y con las fichas del dividendo se arma un rectángulo alrededor del origen haciendo que se respete el color (signo) de cada ficha. Se puede recurrir a la ubicación de ceros constituidos por fichas de igual valor algebraico, pero de diferente signo.

En este caso, tan solo pueden sobrar fichas 1 y el cociente es la altura del rectángulo.

En el caso en el que dividendo sea de la forma $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ se procede a construir el rectángulo teniendo en cuenta que pueden sobrar fichas 1 y x.

En todos los casos, la totalidad de las fichas ubicadas sobre el plano cartesiano representan al dividendo $p(x)$.

Ejemplo 1

Como ejemplo inicial se representa la división $(x^3 - x^2 + 2x - 4) \div (x - 1)$.

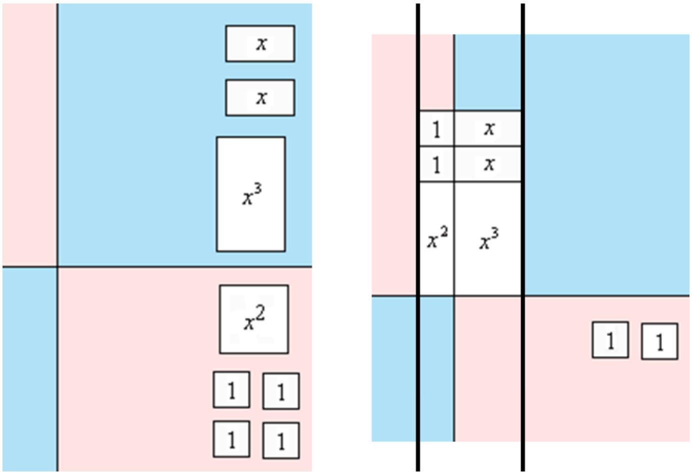


Figura 136 Fuente propia.

En este caso se requirió el recambio de una ficha x^2 cuadrada por una rectangular de igual valor y signo. El cociente es x^2+2 y el residuo -2.

En concordancia con el algoritmo de la división de Euclides, esto se escribe así:

$x^3-x^2+2x-4=(x-1)(x^2+2)-2.$

Lo que se ha hecho en este juego tangible se representa en el mundo simbólico de modo que

$$\begin{gathered} x^3-x^2+2x-4 \\ =x^3+2x-x^2-2-2 \\ =x(x^2+2)-(x^2+2)-2 \\ =(x-1)(x^2+2)-2. \end{gathered}$$

Ejemplo 2

La división $(x^3-x^2+2x-4)\div(x-2)$, requiere de los siguientes pasos.

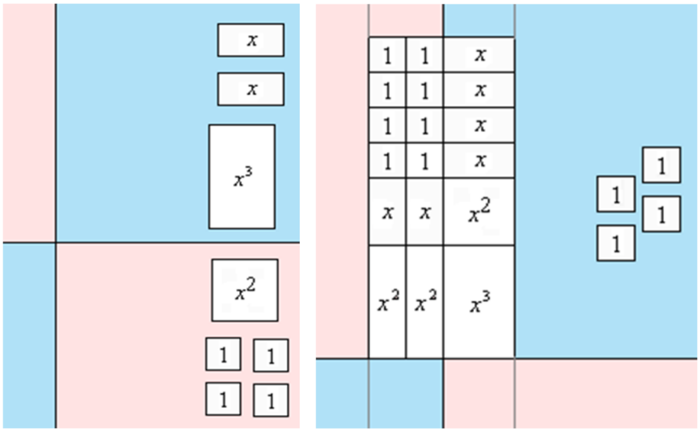


Figura 137 Fuente propia.

El cociente es $x^2 + x + 4$ y el residuo es 4. Aquí hubo que anexarse siete pares de ceros, pero la lectura final de todo el tablero es el dividendo inicial $x^3 - x^2 + 2x - 4$. Así $x^3 - x^2 + 2x - 4 = (x-2)(x^2 + x + 4) + 4$.

En forma simbólica, que es finalmente la que debe quedar incrustada en el quehacer matemático de los aprendices, se escribe

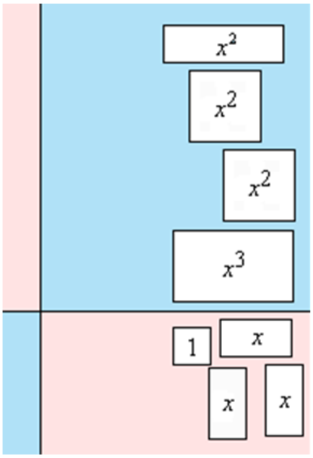
$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 2x - 4 &= x^3 + x^2 - x^2 + 4x - 4x - x^2 + 2x - 4 \\ &= x^3 + x^2 + 4x - x^2 - x^2 - 4x + 2x - 4 \\ &= x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 + 4 \\ &= x(x^2 + x + 4) - 2(x^2 + x + 4) = (x-2)(x^2 + x + 4) + 4 \end{aligned}$$

O también por un camino similar puede escribirse

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 2x - 4 &= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x + 2x - 4 - 4 + 4 \\ &= x^2(x-2) + x(x-2) + 4(x-2) + 4 \\ &= (x-2)(x^2 + x + 4) + 4 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

La división $(-x^3+3x^2-3x-1)\div(x-2)$ se presenta a continuación, pero puede verse de antemano que $-x^3+3x^2-3x-1=-x^3+2x^2+x^2-2x$- $x+2-3=-x^2(x-2)+x(x-2)-(x-2)-3=(x-2)(-x^2+x-1)-$ 3, como se aprecia en el gráfico a derecha.



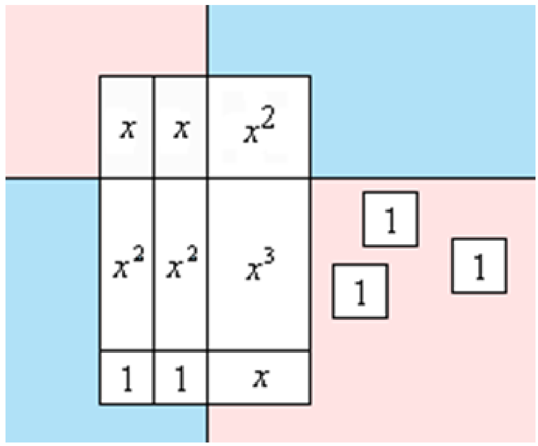


Figura 138 Fuente propia.

Resulta útil observar, al menos en el caso de la división, la constitución de un algoritmo simbólico regio que puede aprovechar el estudiante al hacer sus cálculos. Esta riqueza, resulta ser el ingrediente que hace de la Caja de Polinomios una herramienta útil, diferente y divertida.

3.14.1 ACTIVIDAD 1

Los siguientes gráficos representan unas divisiones de polinomios cúbicos entre polinomios lineales. Indique en cada caso el dividendo, el divisor y el residuo, y escriba simbólicamente en el contexto del algoritmo de la división.

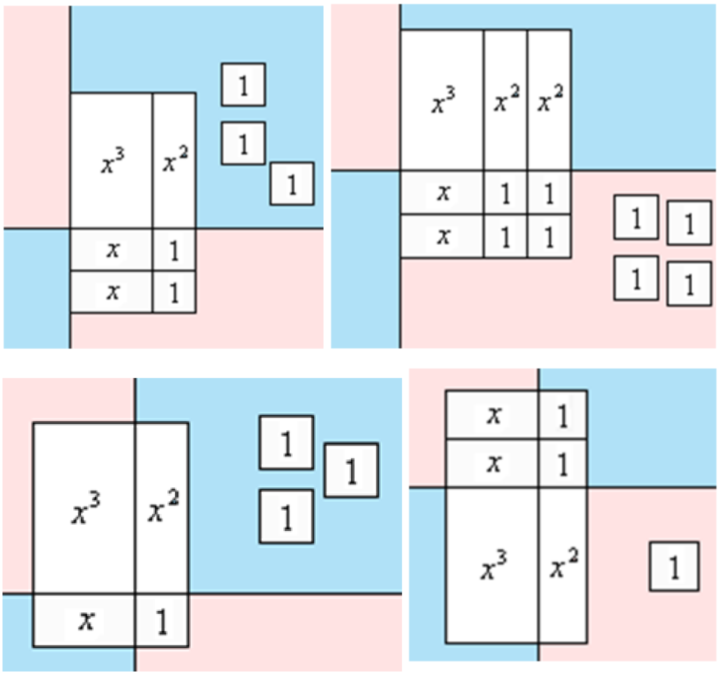


Figura 139 Fuente propia.

3.14.2 ACTIVIDAD 2

Calcular las siguientes divisiones empleando la Caja de Polinomios como mediador esencial.

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 4 \div \begin{cases} x - 1 \\ x - 2 \\ x + 1 \end{cases}$$

$$2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \div \begin{cases} x - 1 \\ x - 2 \\ x + 1 \end{cases}$$

$$2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \div \begin{cases} 2x - 1 \\ 2x - 2 \\ 1 - x \end{cases}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \div \begin{cases} x - 1 \\ x - 2 \\ 1 - x \end{cases}$$

Calcular las siguientes divisiones y escribir para ellas el dividendo en concordancia con el algoritmo de la división de Euclides:

$$(x^3 + 2x^2 - 3x - 3) \div (x + 1)$$
$$(2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x - 1)$$
$$(-2x^3 + 3x^2 + x - 3) \div (-2x + 1)$$
$$(x^3 + 3x^2 + 3x - 5) \div (x + 3)$$
$$(-2x^3 + 3x^2 + x - 3) \div (-2x + 1)$$
$$(-x^3 + 2x^2) \div (x - 1)$$
$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 3) \div (x + 1)$$
$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 3) \div (x + 2)$$

Divisor de la forma $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

En los siguientes gráficos se presenta la división de un polinomio cúbico entre uno cuadrático.

Ejemplo 1. Dividir $(x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \div (x^2 - x + 2)$.

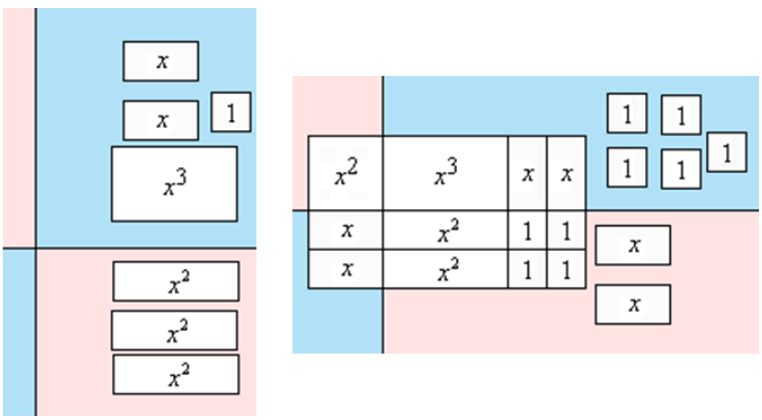


Figura 140 Fuente propia.

Así $$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^2 - x + 2)(x - 2) - 2x + 5$$
$$= x(x^2 - x + 2) - 2(x^2 - x + 2) - 2x + 5.$$

Ejemplo 2. Efectuar $(x^3 + 3x^2 + 4x) \div (-x^2 + x + 1)$.

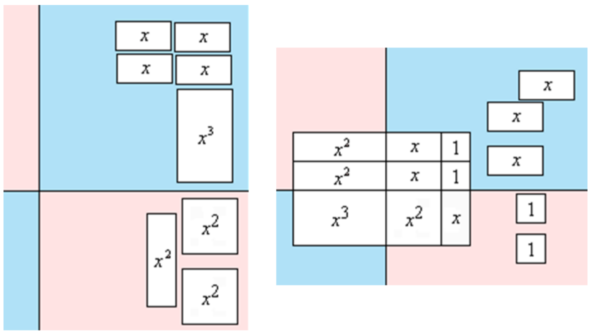


Figura 141 Fuente propia.

Es claro aquí que

$$x^3 + 3x^2 + 4x = x^3 - x^2 - x - 2x^2 + x + 2x + 2 + 3x - 2$$
$$= -x(-x^2 + x + 1) + 2(-x^2 + x + 1) + 3x - 2.$$

Ejemplo 3. He aquí dos divisiones exactas, representadas en los gráficos siguientes.

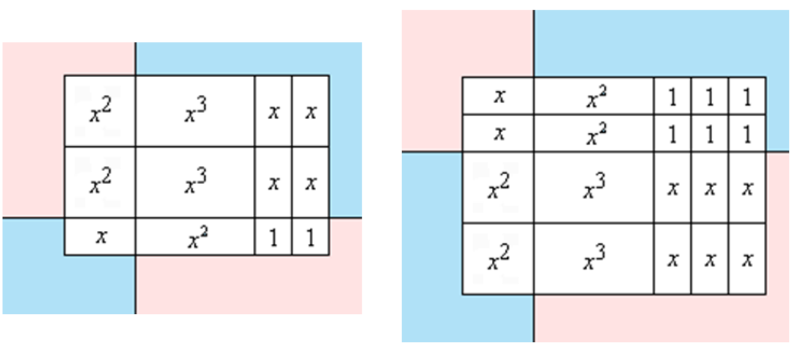


Figura 142 Fuente propia.

Como tarea adicional se propone señalar el dividendo, el divisor y el cociente en cada caso y expresarlos en concordancia con el algoritmo de la división.

3.14.3 ACTIVIDAD 3

Los siguientes gráficos representan unas divisiones de polinomios cúbicos entre polinomios cuadráticos. Indique en cada caso el dividendo, el divisor y el residuo, y escribir simbólicamente en el contexto del algoritmo de la división.

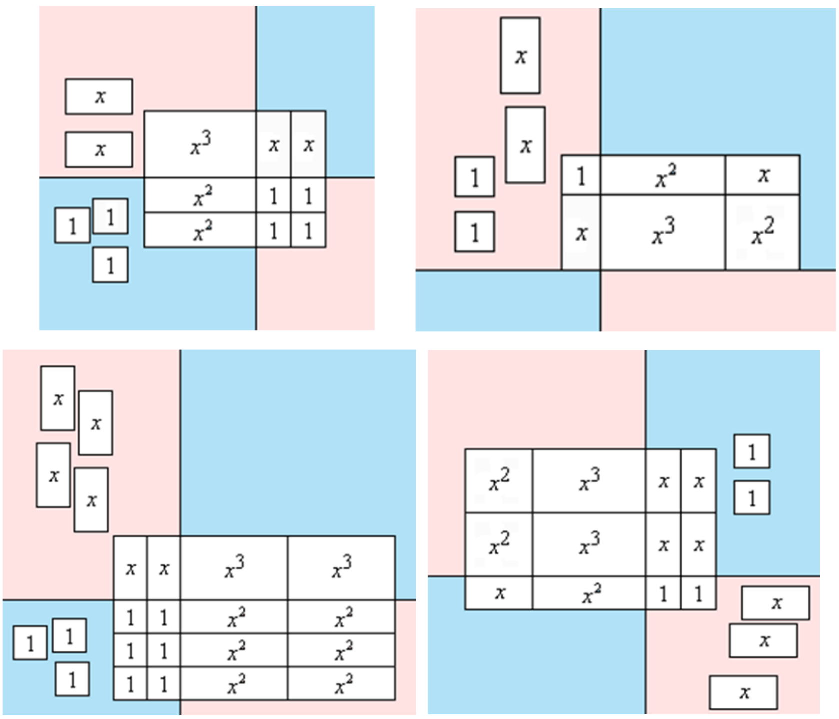


Figura 143 Fuente propia.

3.14.4 ACTIVIDAD 4

Calcular las siguientes divisiones utilizando como mediador la Caja de Polinomios, enseguida realice los cálculos de manera simbólica desde el algoritmo dado por este medio y escriba el dividendo en concordancia con el algoritmo de la división de Euclides.

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \div \begin{cases} x^2 + 1 \\ x^2 - x \\ x^2 + x - 1 \end{cases}$$

$$2x^3 - x^2 - 2x - 3 \div \begin{cases} 2x^2 + 1 \\ 2x^2 - x \\ x^2 + x - 1 \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 \div \begin{cases} x^2 + 1 \\ x^2 - x - 1 \\ x^2 + x - 1 \end{cases}$$

$$-x^3 - x^2 + 2x + 1 \div \begin{cases} -x^2 + 1 \\ -x^2 - x - 1 \\ x^2 + x - 1 \end{cases}$$

Calcular los cocientes de las siguientes divisiones con el empleo del mediador la Caja de polinomios y escribir el resultado en concordancia con el algoritmo de la división de Euclides.

$$(2x^3 + 3x^2 - x - 2) \div (2x^2 + x - 2)$$

$$(2x^3 + 2x^2) \div (x^2 + x - 1)$$

$$(x^3 - 3x^2 + 4x - 3) \div (-x^2 + x - 1)$$

$$(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) \div (x^2 + 1)$$

$$(2x^3 - x^2 - 3x + 1) \div (x^2 - 1)$$

$$(2x^3 - x^2 - 3x + 1) \div (1 - x^2)$$

3.14.5 PARA RECORDAR

La división es la más importante de las operaciones en el campo matemático, gracias a ella conocemos si un número es par o primo, o si un polinomio es irreductible o factorizable. Con el mediador la Caja de Polinomios, esta operación resulta divertida y congruente con los conceptos que se aprende de niño en la escuela, sintónicos con la idea de que dividir es sinónimo de repartir. En este caso, el instrumento cobra un valor de rompecabezas, pero las acciones de remplazar una ficha por otra de igual valor y la anexión de ceros conformados por fichas de igual área en cuadrantes de distinto valor son de alto valor pragmático dentro del trabajo matemático escolar y profesional. Todo esto, ligado a que, en esencia, este recurso didáctico se fundamental en la regla exclusiva de conformación de rectángulos alrededor del origen con fichas colindantes de igual longitud en su lado de vecindad, permite declarar que la Caja de Polinomios es un material de fácil empleo y con alto valor pedagógico, digno de utilizarse en todos los niveles de escolaridad, incluso desde el preescolar.

3.15 GUÍA No. 15. Polinomios de Grado 4

La multiplicación, la división y la factorización realizadas por medio de la Caja de Polinomios fundamentan sus respectivos algoritmos en la construcción de rectángulos alrededor del origen y en el principio de sustitución llevada a cabo entre fichas de diferente forma, pero de igual valor algebraico (Igual área). La construcción de tales rectángulos correspondientes con $p(x)$ debe realizarse empleando la menor cantidad de fichas que representen a este polinomio.

Objetivo: multiplicar, dividir y factorizar polinomios de grado 4, mediante la construcción de rectángulos alrededor del origen y siguiendo la norma de vecindad establecida para la construcción de estos.

Todas las operaciones algebraicas con polinomios en coeficientes enteros siguen las reglas y procedimientos hasta ahora explicados y, por lo tanto, la presente guía dispone de unos pocos ejemplos en torno de la multiplicación, la división y la factorización de polinomios de grado 4.

III. Las posibilidades de encontrar productos de grado 4 se enmarcan en los siguientes casos:

a. El producto de cuatro factores lineales de la forma $ax + b$ en cuyo caso se debe recurrir a la utilización de la propiedad asociativa de la multiplicación.

b. El producto de dos factores cuadráticos de la forma $ax^2 + bx + c$ que se calcula de manera directa por armado del rectángulo correspondiente.

c. El producto de dos factores lineales y otro cuadrático, en el cual se debe aplicar la propiedad asociativa de la multiplicación.

d. El producto de un factor lineal y otro cúbico de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ que se calcula de manera directa, por armado del rectángulo correspondiente.

Cualquiera que sea el caso, el cálculo del producto requiere del conocimiento de las dimensiones de las fichas. Las fichas y sus dimensiones pertenecen a las clases que se bosquejan enseguida; en la primera fila aparecen las dimensiones de la base y en la primera columna las de la altura de cada tarjeta o ficha.

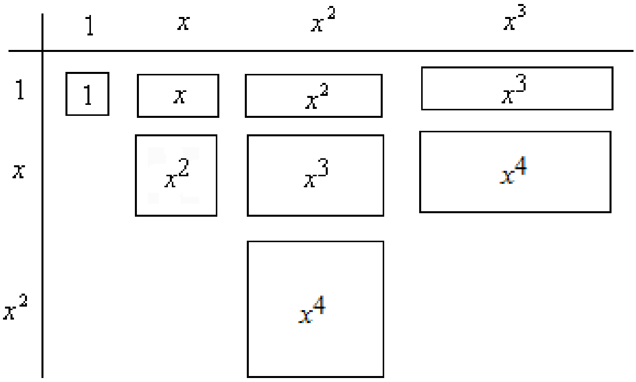


Figura 144 Fuente propia.

En los siguientes renglones se presenta el producto $(x+1)(x-2)(x^2+x+2)$ recurriendo a la asociación de los dos primeros factores lineales; así, inicialmente se calcula $(x+1)(x-2)$.

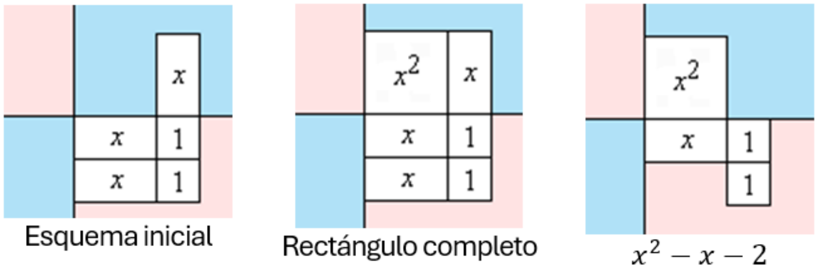


Figura 145 Fuente propia.

Dado que $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$, el producto pedido se calcula al multiplicar $(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 2)$ siguiendo el siguiente esquema:

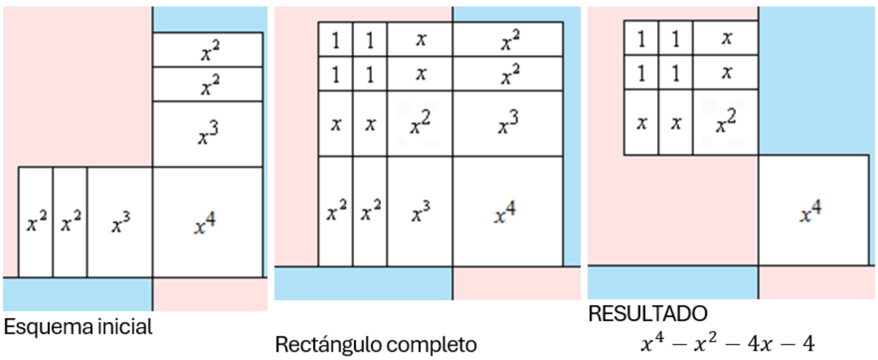


Figura 146 Fuente propia.

Todo esto asegura que $(x+1)(x-2)(x^2 + x + 2) = x^4 - x^2 - 4x - 4$

3.15.1 ACTIVIDAD 1

Los siguientes rectángulos corresponden al cálculo de tres productos particulares; indicar los factores que se operan y el resultado.

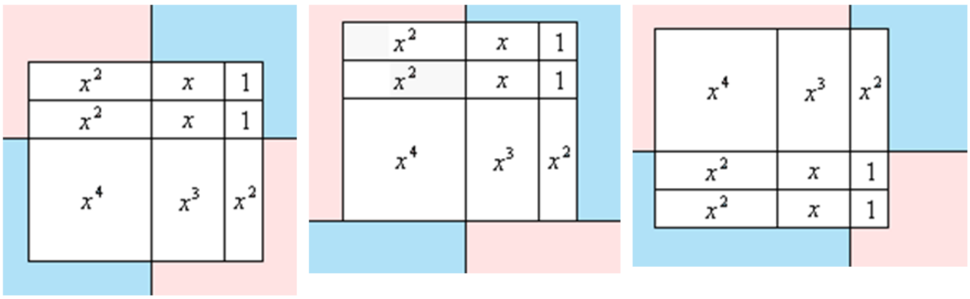


Figura 147 Fuente propia.

3.15.2 ACTIVIDAD 2

Calcular los siguientes productos utilizando la Caja de Polinomios y traducir el proceso de manera simbólica.

$(x+1)(x-2)(x+3)(x-1)$

$(2x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

$(x-2)(x^3+x+1)$

$(x^2+1)(x-1)^2$

$(2x+1)(x-2)(x^2+2)$

$(x+1)^2(x-2)^2$

$(x^2+3x-1)(x^2-x+2)$

$(x-1)(x^3-2)$

$(x-1)(x^3+x^2-x+1)$

$(1-2x)(2-x)(x^2+2)$

IV. La división también amplía su abanico de posibilidades cuando el dividendo es un polinomio de cuarto grado. El divisor se puede escoger de grados uno, dos, tres y hasta cuatro.

Cuando el divisor es de grado 1, o sea, de la forma $ax + b$, el residuo está constituido por fichas 1.

Cuando el divisor es de grado 2, de la forma $(ax^2 + bx + c)$, el resto puede estar conformado por fichas 1 y x.

Cuando el divisor es de grado 3, de la forma $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$, el residuo puede contener fichas 1, x y x^2.

A continuación, se presenta la división de un mismo dividendo entre tres distintos divisores. Dividir

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \div \begin{cases} x - 1 \\ x^2 - 1 \\ x^3 + x - 1 \end{cases}$$

La disposición inicial, al dividir $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ por $x - 1$, en un encuadre alrededor del origen, se presenta a continuación.

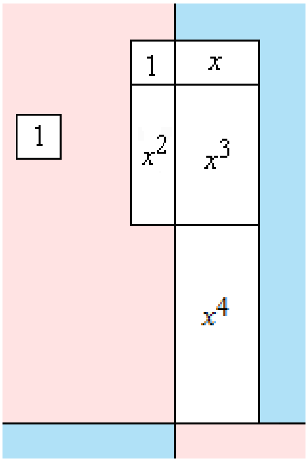


Figura 148 Fuente propia.

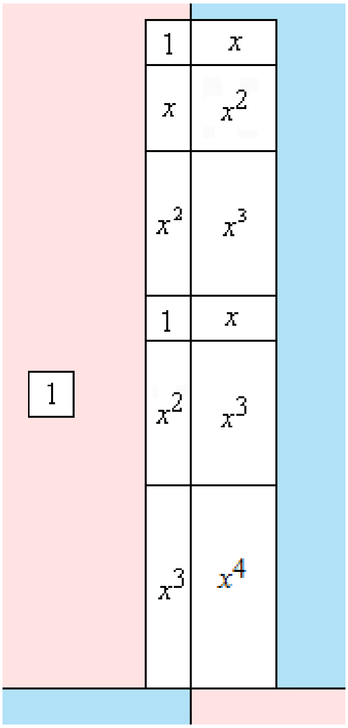


Figura 149 Fuente propia.

Como se ve, en la gráfica de la izquierda, sobre el que se ha completado el rectángulo, el cociente de la división es $x^3 + 2x^2 + x + 2$ y el residuo es 0. (Cero).

El gráfico, también nos acerca a la parte simbólica de acuerdo con la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned} &x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \\ &= x^4 - x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x + 2x - 2 \\ &= (x^4 - x^3) + (2x^3 - 2x^2) + (x^2 - x) + (2x - 2) \\ &= x^3(x-1) + 2x^2(x-1) + x(x-1) + 2(x-1) \\ &= (x-1) \\ &= (x-1)(x^3 + 2x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

En este ejemplo se ha requerido la utilización de la ficha de valor algebraico x^4 de dimensiones x y x^3, para efectuar la división.

A continuación, se efectúa la división $(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) \div (x^2 - 1)$ cuya disposición inicial del dividendo con las seis fichas que lo representan es la siguiente.

En esta disposición inicial, se resalta que la construcción se basa en la conformación de un rectángulo de base (x^2-1), cuyo ancho se establece de manera imaginaria.

En la configuración del rectángulo, se debe tener presente que el residuo puede estar configurado por fichas x y fichas 1.

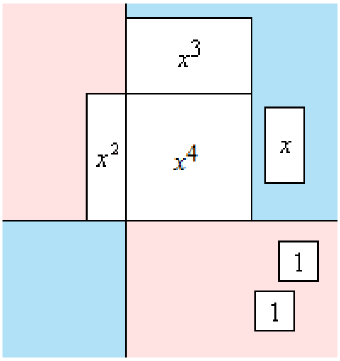


Figura 150 Fuente propia.

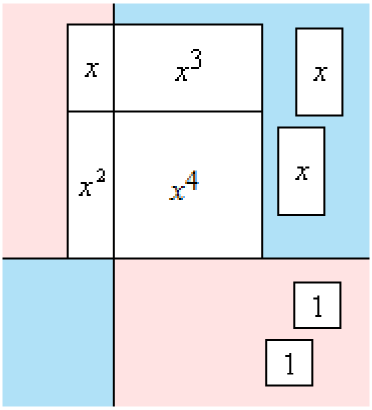


Figura 151 Fuente propia.

Al completar el rectángulo, la nueva disposición del dividendo asegura que el cociente es x^2+x y el residuo es $2x-2$ y en efecto, dando paso al proceso simbólico que se observa en la Caja de Polinomios, se observa que

$$\begin{aligned} x^4+x^3-x^2+x-2 &= x^4-x^2+x^3-x+2x-2 \\ &= x^2(x^2-1)+x(x^2-1)+(2x-2) \\ &= (x^2-1)(x^2+x)+(2x-2) \\ &= x(x+1)(x-1)+(2x-2) \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el cociente $(x^4+x^3-x^2+x-2)\div(x^3+x-1)$; para ello se dispone el dividendo sobre una franja de anchura x^3+x-1 tal y como se presenta en el siguiente esquema:

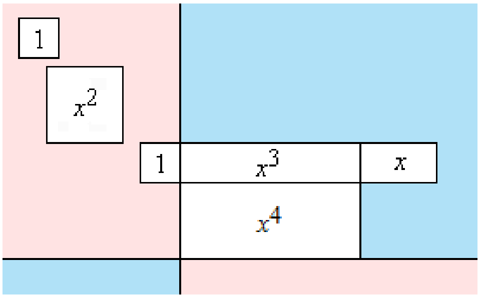


Figura 152 Fuente propia.

Sobre esta disposición cabe recordar que el residuo puede ser un polinomio cuadrático. Al completar el rectángulo empleando la agregación de ceros como comodín del rompecabezas, en el desarrollo operatorio, se observa lo siguiente:

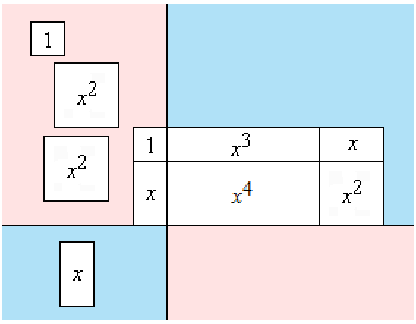


Figura 153 Fuente propia.

Las fichas que reposan en el tablero corresponden a la escritura del dividendo. En este caso, la parte simbólica que describe el proceso efectuado es el que sigue.

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$
$$= x^4 + x^2 - x + x^3 + x - 1 - 2x^2 + x - 1$$
$$= x(x^3 + x - 1) + (x^3 + x - 1) - 2x^2 + x - 1$$
$$= (x^3 + x - 1)(x + 1) - 2x^2 + x - 1$$

De modo que el cociente es $x + 1$ y el residuo $-2x^2 + x - 1$.

3.15.3 ACTIVIDAD 3

Cada uno de los siguientes tableros se corresponde con el cálculo de un cociente; señalar para cada uno, el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo y elaborar una representación simbólica de lo ejecutado.

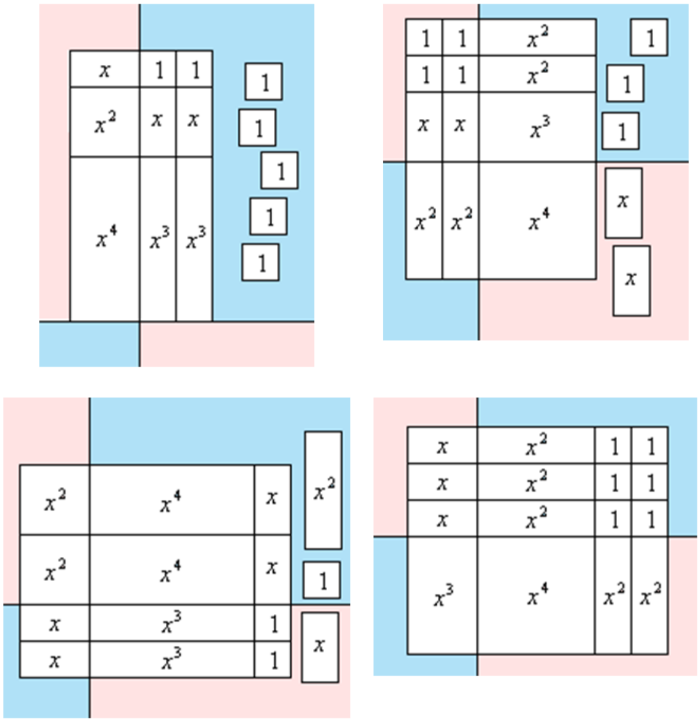


Figura 154 Fuente propia.

3.15.4 ACTIVIDAD 4

Calcular los siguientes cocientes apoyándose en el uso de la Caja de Polinomios y transcribir el proceso empleando la simbología algebraica.

$$x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 \div \begin{cases} x - 1 \\ x^2 + x - 1 \\ x^3 + x - 1 \end{cases}$$

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1 \div \begin{cases} x - 2 \\ x^2 - 2 \\ x^3 - x - 1 \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2 \div \begin{cases} x+1 \\ x^2 - x - 1 \\ x^3 + x - 1 \end{cases}$$

$$x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 \div \begin{cases} x-1 \\ x^2 + x - 2 \\ x^3 - x^2 + x - 1 \end{cases}$$

La factorización de un polinomio $p(x)$, se fundamenta en la rectangularización del conjunto de fichas que lo representan; para ello, si α es el menor número de fichas con las que se escribe al polinomio sobre el tablero puede ocurrir que α sea un número primo o compuesto; si es primo, la factorización de $p(x)$ se logra con un número de fichas $\alpha + 2k$, siendo k un número natural que hace que $\alpha + 2k$ sea compuesto. Si $\alpha = p \times q$, número compuesto y siendo esa una de las alternativas de su descomposición; el rectángulo que representa al polinomio está constituido de p filas y q columnas. Pero, es importante asegurar, que si $\alpha = p \times q$ es un entero compuesto, no se garantiza que $p(x)$ se represente como un rectángulo de p filas y q columnas de fichas.

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ se escribe sobre el tablero con 8 fichas y dado que $8 = 4 \times 2$ se busca escribirlo mediante un rectángulo de 4 filas y 2 columnas; de no ser esto posible se puede requerir de $10, 12, 14, \ldots$ fichas.

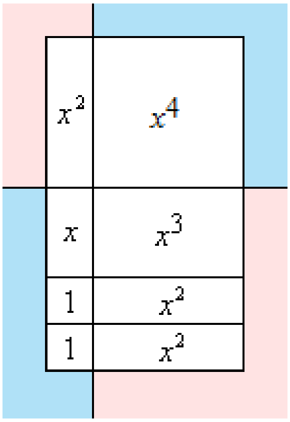


Figura 155 Fuente propia.

De manera simbólica, el gráfico indica que

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ &= x^4 - x^2 - x^3 + x - 2x^2 + 2 \\ &= (x^4 - x^2) - (x^3 - x) - (2x^2 - 2) \\ &= x^2(x^2 - 1) - x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

Como muestra la gráfica anterior, el polinomio es *completo*, es decir no requiere de la agregación de ceros para configurar el rectángulo y de hecho $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$ y ahora se factoriza cada uno de estos factores cuadráticos como se indica en la siguiente gráfica:

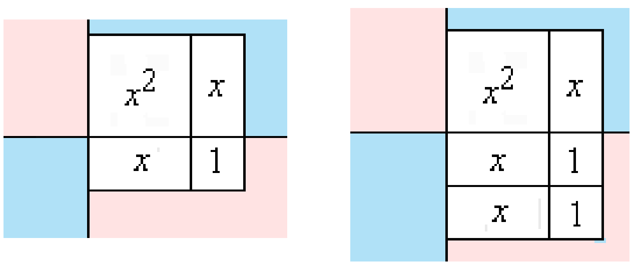


Figura 156 Fuente propia.

De modo que la factorización completa de $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ es $p(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x - 2)$.

La factorización de $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ inicia ensayando la construcción de un rectángulo 2×2, lo que es imposible, ya que, con las cuatro fichas, lo único que se logra en el encuadre minimal viable que se presenta a continuación:

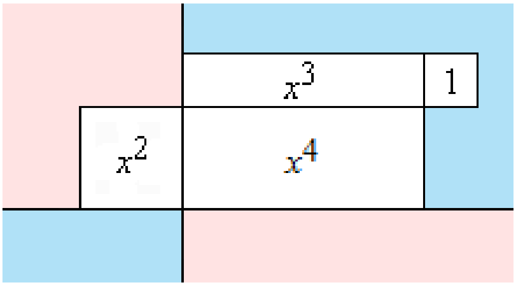


Figura 157 Fuente propia.

De hecho, el rectángulo se consigue al agregar el cero $x - x$ como se muestra enseguida; a la derecha aparece la traducción simbólica del proceso efectuado en el cálculo.

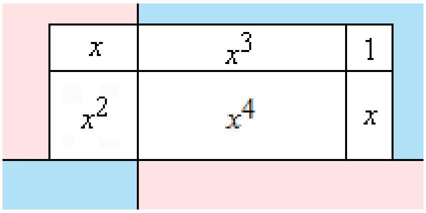


Figura 158 Fuente propia.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + x^3 - x^2 + 1 \\ &= x^4 - x^2 + x + x^3 - x + 1 \\ &= (x^4 - x^2 + x) + (x^3 - x + 1) \\ &= x(x^3 - x + 1) + (x^3 - x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 - x + 1) \; = \end{aligned}$$

De modo que $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 - x + 1)$ siendo que el polinomio $x^3 - x + 1$ no acepta factorización en los enteros.

3.15.5 ACTIVIDAD 5

Factorizar con del plano cartesiano contenido en el rompecabezas, los siguientes polinomios y transcribir el proceso de manera simbólica.

$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$

$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$ $\quad$ $p(x) = x^4 - x^2 - x + 1$

$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$

$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$ $\quad$ $p(x) = x^4 - x^2 - x + 1$

$p(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ $\quad$ $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

$p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$ $\quad$ $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

3.15.6 PARA RECORDAR

Existen infinitos polinomios que no aceptan factorización en números enteros, entre ellos, todos los de la forma $x^2 + n$, donde $n \in \mathbb{N}$; en particular $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, $x^2 + 3$,... son polinomios que no se pueden representar con un rectángulo alrededor del origen de coordenadas.

3.16 GUÍA No. 16. Relación Entre Perímetros y Áreas

El perímetro de rectángulos que se forman anexando fichas de manera que dos fichas vecinas coincidan en su lado de vecindad y, cuando esto no ocurra tan solo coincidan en un vértice; es una temática que permite dominar de manera adecuada las dimensiones de las fichas y esto a su vez, fundamenta la eficaz utilización de este mediador en el desarrollo operatorio algebraico.

El estudio de perímetros de figuras ha tenido obstáculos epistemológicos importantes; incluso, los griegos sostenían que el perímetro era un criterio para calcular o comparar áreas; es decir, que entre mayor perímetro tuviese una figura acotada, contenía mayor área que otra.

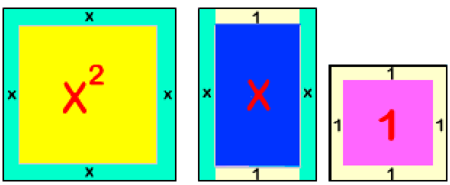


Figura 159 Fuente propia.

Por ejemplo, los rectángulos básicos para operar con polinomios de una variable de grado dos y que se presentan a la izquierda tienen perímetros de $4x$, $2x+2$ y 4 unidades respectivamente.

Con ellas podemos componer figuras poligonales, particularmente rectangulares, de diferentes perímetros como las que se muestran a continuación y que se han rotulado con el perímetro correspondiente.

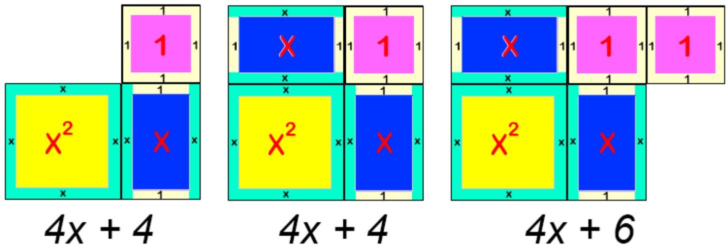


Figura 160 Fuente propia.

Las dos primeras figuras muestran polígonos con el mismo perímetro y diferente área. De hecho, una disposición de las fichas de forma que sólo coincidan en los vértices logra figuras poligonales de mayor perímetro, tal y como se muestra a continuación:

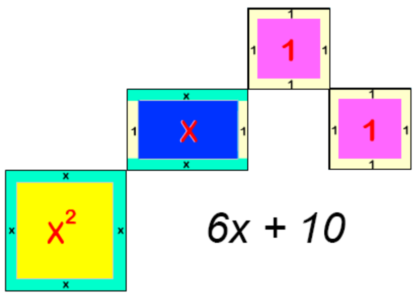


Figura 161 Fuente propia.

Un ejercicio que tiene como objetivo la familiarización con las dimensiones de las fichas está constituido por el diseño de formas poligonales rectilíneas y el cálculo de sus perímetros.

3.16.1 ACTIVIDAD 1

Determinar el perímetro de las siguientes figuras poligonales.

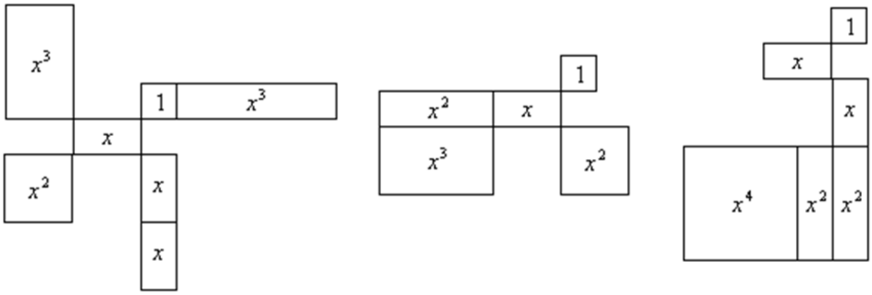


Figura 162 Fuente propia.

A continuación, se examina el problema de la construcción de rectángulos de igual perímetro con diferente área.

RECTÁNGULOS DE IGUAL PERÍMETRO Y DIFERENTE ÁREA

Sean los rectángulos de diferente área, pero igual perímetro cuyas dimensiones respectivamente son a, b y c, d.

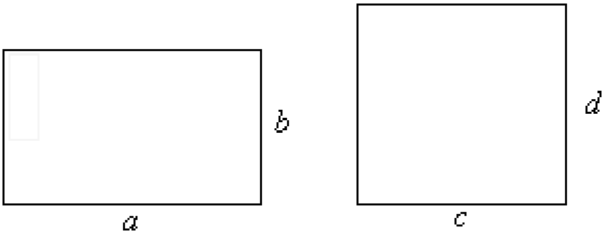


Figura 163 Fuente propia.

Como los perímetros son iguales se cumple que $2a + 2b = 2c + 2d$, es decir $a + b = c + d$.

Cuando se trata de rectángulos formados por fichas de la Caja de Polinomios la base y la altura son polinomios de grado m y n respectivamente con coeficientes enteros no negativos en principio, pues estamos midiendo distancias. Por ello y en forma similar, al tratarse de rectángulos con igual perímetro se debe cumplir que $p(x)+q(x)=r(x)+s(x)$.

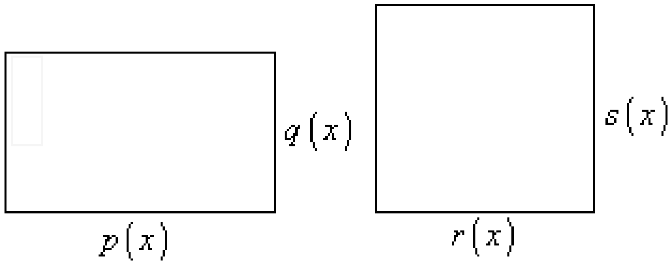


Figura 164 Fuente propia.

El problema consiste en determinar todos los rectángulos que tengan el mismo perímetro que uno dado y que sea construible con las fichas de la Caja de Polinomios.

Para que sea posible $p(x)+q(x)=r(x)+s(x)$ se sigue que

$grad\big(p(x)+q(x)\big)=grad\big(r(x)+s(x)\big)$

y al igualar los coeficientes correspondientes se resuelven las ecuaciones de los coeficientes de $r(x)+s(x)$ en $\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$.

Ejemplo 1. Hallar todos los rectángulos con perímetro igual al rectángulo de base $ax+b$ y altura $cx+d$.

Solución

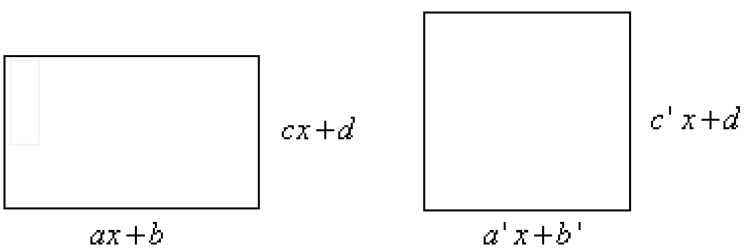


Figura 165 Fuente propia.

$(ax + b) + (cx + d) = (a'x + b') + (c'x + d)$, en consecuencia, se tiene:

$(a + c)x + (b + d) = (a' + c')x + (b' + d')$ y por ello: $a' + c' = a + c$ mientras $b' + d' = b + d$ que son las ecuaciones que se deben resolver en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

A continuación, se presenta el caso concreto de hallar todos los rectángulos con perímetro igual al rectángulo de base $2x + 3$ y altura $x + 2$.

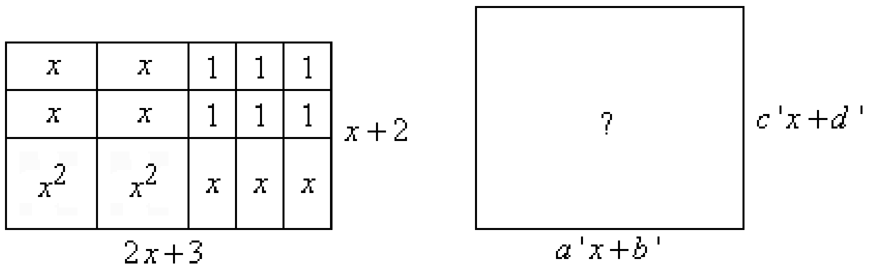


Figura 166 Fuente propia.

En este caso $a' + c' = a + c = 3$ y $b' + d' = b + d = 5$. En las siguientes tablas se presentan posibilidades enteras para estos valores.

a'	3	2	1	0
c'	0	1	2	3

b'	5	4	3	2	1	0
d'	0	1	2	3	4	5

Al combinar cada par de la primera tabla con cada par de la segunda se consiguen todas las soluciones, de las cuales se descartan las imposibles y las repetidas; entre estas están las siguientes.

$(3x+5)(0x+0)$ ¡Imposible!, $(3x+4)(1)$, $(3x+3)(2)$, $(3x+2)(3)$, $(3x+1)(4)$, $(3x+0)(5)$, $(2x+5)(x+0)$, $(2x+4)(x+1)$, $(2x+3)(x+2)$, $(2x+2)(x+3)$, $(2x+1)(x+4)$, $(2x+0)(x+5)$. Así, aparecen diez soluciones diferentes.

La gráfica que sigue muestra tres de las soluciones siendo que en todos los casos el perímetro es $p = 6x + 10$ para este caso.

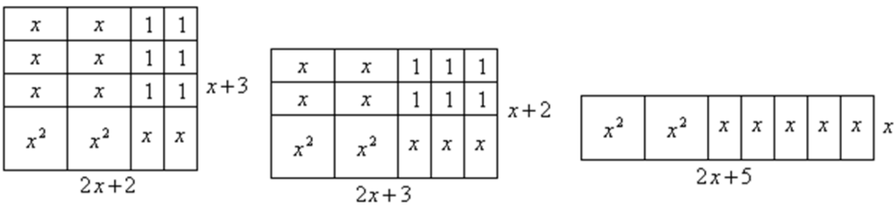


Figura 167 Fuente propia.

3.16.2 ACTIVIDAD 2

Hallar todos los rectángulos con perímetro igual al rectángulo de base $3x+3$ y altura $x+3$.

Ejemplo 2. Hallar todos los rectángulos con perímetro igual al del rectángulo de base ax^2+bx+c y de altura $dx+e$.

Solución

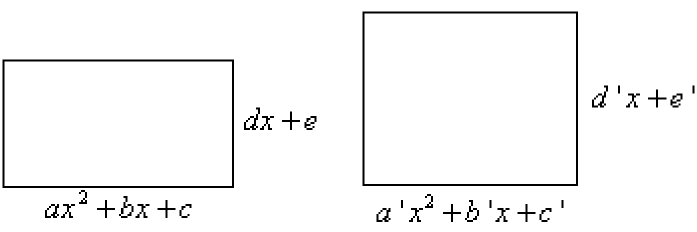


Figura 168 Fuente propia.

De hecho $(ax^2 + bx + c\ ) + (dx + e) = (a'x^2 + b'x + c'\ ) + (d'x + e')$.

Es decir,

$a' = a$, ecuación que queda resuelta.

$b' + d' = b + d$ que se resuelve en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

$c' + e' = c + e$ que se resuelve en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Veamos el siguiente caso concreto. Hallar todos los rectángulos con perímetro igual al rectángulo de base $x^2 + 3x + 2$ y altura $2x + 1$.

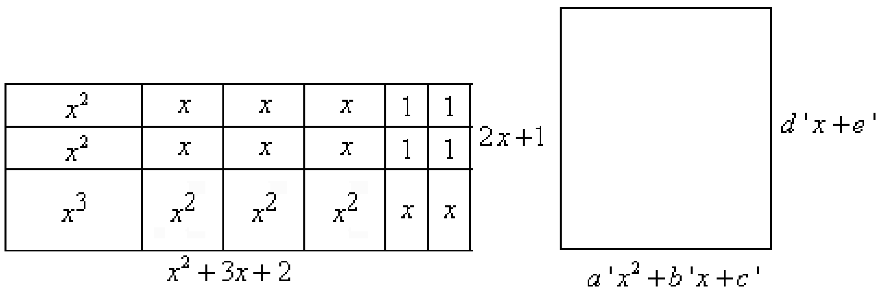


Figura 169 Fuente propia.

En este caso $a' = 1$; $b' + d' = 5$ y $c' + e' = 3$ lo que determina las siguientes tablas de posibilidades.

b'	5	4	3	2	1	0
d'	0	1	2	3	4	5

c'	3	2	1	0
e'	0	1	2	3

De modo que las posibles soluciones de la forma $(a'x^2 + b'x + c') \times (d'x + e')$ son $(x^2 + 5x + 3)(0x + 0)$, $(x^2 + 5x + 2)(1)$, $(x^2 + 5x + 1)(2)$, $(x^2 + 5x + 0)(3)$,

$(x^2+4x+3)(x)$, $(x^2+4x+2)(x+1)$, $(x^2+4x+1)(x+2)$, $(x^2+4x+0)(x+3)$, $(x^2+3x+3)(2x)$, $(x^2+3x+2)(2x+1)$, $(x^2+3x+1)(2x+2)$, $(x^2+3x+0)(2x+3)$, $(x^2+2x+3)(3x)$, $(x^2+2x+2)(3x+1)$, $(x^2+2x+1)(3x+2)$, $(x^2+2x+0)(3x+3)$, $(x^2+x+3)(4x)$, $(x^2+x+2)(4x+1)$, $(x^2+x+1)(4x+2)$, $(x^2+x+0)(4x+3)$, $(x^2+3)(5x)$, $(x^2+2)(5x+1)$, $(x^2+1)(5x+2)$, $(x^2+0)(5x+3)$.

Lo que determina 22 soluciones distintas, de las cuales dos se presentan en la siguiente figura:

x^2	x	x	1
x^2	x	x	1
x^3	x^2	x^2	x
x^3	x^2	x^2	x
x^3	x^2	x^2	x

x^2	x	x	x	x	1	1
x^3	x^2	x^2	x^2	x^2	x	x

Figura 170 Fuente propia.

3.16.3 ACTIVIDAD 3

Hallar todos los rectángulos con perímetro igual al rectángulo de base x^2+4x+3 y altura $3x+2$.

ÁREAS IGUALES CON PERÍMETROS DIFERENTES

Como el título lo indica, este parágrafo se refiere al estudio de rectángulos que tienen igual área, pero diferente perímetro y que puedan construirse con la Caja de Polinomios.

Sea un rectángulo de base a y de altura b con área $A = ab$ y perímetro $p = 2a + 2b$.

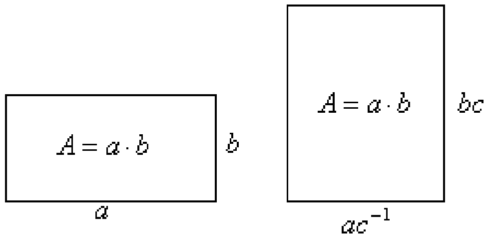


Figura 171 Fuente propia.

Sea $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $A = ab = (ac^{-1})(bc)$ y llamando $a' = ac^{-1}$ y $b' = bc$ se tiene un rectángulo de base a' y altura b' cuya área es A pero con perímetro que es igual a p'=$2ac^{-1} + 2bc$. Ahora queremos examinar cuándo ocurre la igualdad $p = p'$.

Así, $2a + 2b = 2ac^{-1} + 2bc$ entonces, $a + b = \frac{a}{c} + bc$; luego $c(a + b) = a + bc^2$ o lo que es lo mismo: $bc^2 - (a + b)c + a = 0$; ecuación que tiene como solución a la expresión:

$$c = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2b} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2b}$$

solución que se escribe como $c = \frac{(a+b)\pm|a-b|}{b}$.

Suponiendo que $a > b$ se consigue que $c_1 = \frac{a}{b}$ y $c_2 = 1$ que son las dos soluciones de la ecuación.

Todo esto significa que, para construir un rectángulo de área equivalente a uno dado, hay que multiplicar sus lados por un real positivo tal que $c \in \mathbb{R}^+ - \left\{1, \frac{a}{b}\right\}$, a fin de conseguir perímetros diferentes ya que, con estos dos valores, los perímetros son iguales.

Se observa que las soluciones son infinitas. Ahora bien, el caso que nos atañe e interesa ocurre cuando a y b son enteros positivos siendo $A = ab$, $p = 2a + 2b$ y además $a' \in \mathbb{Z}^+$, $b' \in \mathbb{Z}^+$, como se indica en la figura.

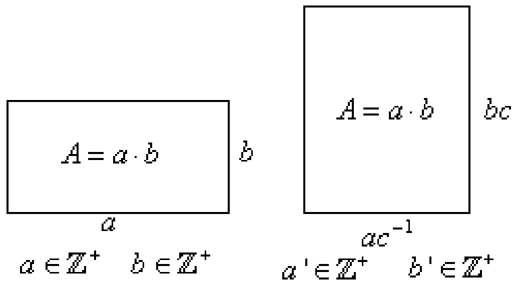


Figura 172 Fuente propia.

Para este efecto se aplica el teorema fundamental de la aritmética factorizando los enteros a y b; entonces $a = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}$, $b = b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m}$ donde los a_i, b_j son números primos diferentes entre sí y los exponentes p_i, q_j son enteros positivos. En consecuencia, el área es igual a $A = ab = \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}\right)\left(b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_m^{q_m}\right) = c_1^{r_1} c_2^{r_2} \ldots c_s^{r_s}$ donde cada pareja de c_i son primos distintos.

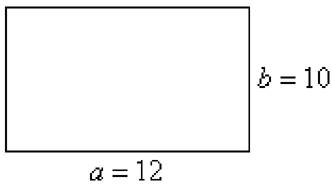
El método para encontrar los rectángulos de igual área es expresar el producto $A = ab$ como todos los posibles pares de factores, el primero de los cuales oficia como base y el otro como altura.

Se observa que ab tiene $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = r$ factores y, por lo tanto, si la base tiene k factores, la altura contiene $r - k$ factores, encontrando la siguiente disposición.

No. Factores de a'	1	2	3	…	$r-3$	$r-2$	$r-1$
No. Factores de b'	$r-1$	$r-2$	$r-3$	…	3	2	1

De hecho, siguiendo el esquema presentado en el cuadro anterior, se repiten varios rectángulos; particularmente, cuando r es impar, la mitad de los casos se repiten.

Como ejemplo, encontremos todos los rectángulos con dimensiones enteras que posean la misma área del rectángulo de base 12 y de altura 10 unidades de longitud, en cada caso se medirán sus perímetros.



$$p = 2(12+10) = 2(22) = 44$$

Figura 173 Fuente propia.

La descomposición en factores primos es $a = 12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ y $b = 10 = 2 \times 5$; en consecuencia $A = 2^3 3^1 5^1$; luego $A = ab$ tiene 5 factores. Así las soluciones posibles son: la trivial $a = 1$, $b = 2^3 \times 3 \times 5$ y el perímetro es $p' = 242$. Las demás soluciones se consiguen escogiendo los casos en los que tiene un factor, o dos factores o tres factores cuatro factores y se presentan en la siguiente tabla.

a'	b'	p'
2	60	124
3	40	86
5	24	58
4	30	68
6	20	52

3.16.4 ACTIVIDAD 4

Encontrar todos los rectángulos cuya área sea igual a la del rectángulo cuya base mide 18 unidades y de altura 21.

Para el caso de rectángulos formados por fichas de la Caja de Polinomios y que representan polinomios de grado uno o superior, se realiza un estudio similar al de aquellos con dimensiones enteras, como el ejemplo que se acaba de estudiar, suponiendo que se factoriza sobre $\mathbb{Z}[x]$.

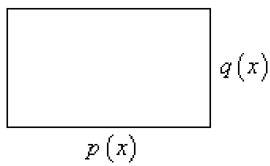


Figura 174 Fuente propia.

Suponemos, en este caso que, en definitiva, el área del rectángulo es

$$A = p(x) \cdot q(x) = t_1^{\alpha_1}(x) t_2^{\alpha_2}(x) \ldots t_j^{\alpha_j}(x)$$

Ejemplo. Encontrar todos los rectángulos con dimensiones polinomiales con coeficientes enteros no negativos que tengan la misma área del rectángulo de dimensiones $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$ como base y altura $q(x) = x^2 + 2x + 1$

x^2	x^2	x	x	x	1
x^3	x^3	x^2	x^2	x^2	x
x^3	x^3	x^2	x^2	x^2	x
x^4	x^4	x^3	x^3	x^3	x^2

Figura 175 Fuente propia.

En este caso, el perímetro es, esto es $p = 2(3x^2 + 5x + 2)$; esto es $p = 6x^2 + 10x + 4$.

Además, la factorización de los lados se presenta como sigue:

$p(x) = (2x + 1)(x + 1)$; $q(x) = (x + 1)^2$

y por lo tanto el área es

$A = (x + 1)^3(2x + 1)$

que evidencia la presencia de cuatro factores. De hecho, la solución trivial es la de lados 1 y $(x + 1)^3(2x + 1)$.

Las soluciones no triviales se presentan a continuación:

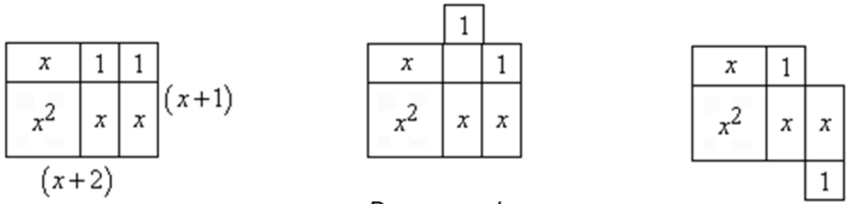
$p'(x)$	$q'(x)$	Perímetro
$x + 1$	$2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$	$2(2x^3 + 5x^2 + 5x + 2)$
$2x + 1$	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	$2(x^3 + 3x^2 + 5x + 2)$

EL CASO DE LOS DESENCUADRES

Si se tiene un rectángulo formado por fichas de la Caja de Polinomios, se pueden mover una o más fichas de manera que queden formando un solo cuerpo de acuerdo con las leyes de colocación de unas fichas junto con otras.

DESENCUADRE. Se dice que un rectángulo formado por fichas tiene un desencuadre cuando una o más fichas se han movido de acuerdo con las leyes de juntura con lo cual se pierde la figura del rectángulo original.

En el siguiente ejemplo se observan dos desencuadres de un rectángulo de lados $(x + 2)$ y $(x + 1)$.



Perímetro mínimo *Desencuadre* *Desencuadre*

Figura 176 Fuente propia.

Es fácil ver que cuando se produce un desencuadre se aumenta el perímetro de la figura.

DESENCUADRE TOTAL: un rectángulo formado por las fichas de la Caja de Polinomios cuando todas las fichas componentes se colocan una tras otra y tienen como único punto de contacto un vértice.

El desencuadre total produce el máximo perímetro posible para el conjunto de fichas que conforman un rectángulo. Para el rectángulo de la figura anterior, un desencuadre total es como sigue:

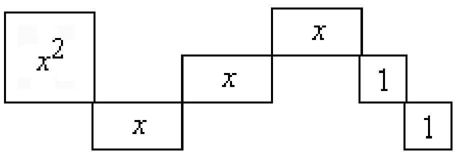


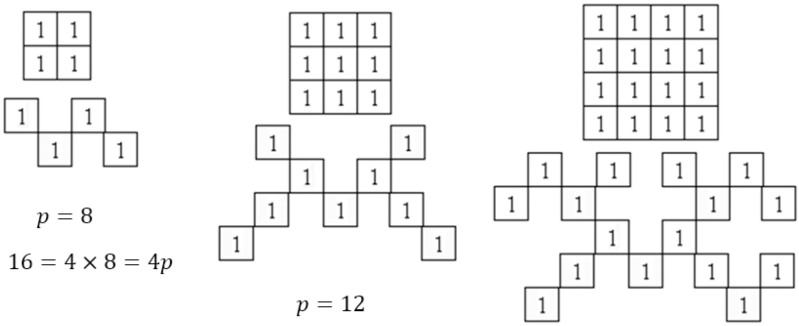
Figura 177 Fuente propia.

El análisis anterior permite establecer la siguiente desigualdad

Perí. rectángulo $<$ Perí. desencuadre $<$ Perí. desencuadre total.

En algunos casos es factible calcular el perímetro de un desencuadre total, por ejemplo, en el caso en que los rectángulos sean $n \times n$ de diferente arquitectura, el perímetro del desencuadre total es n veces el perímetro del rectángulo original. Este hecho se ve claro cuando la arquitectura de cuadrados se forma con tabletas “uno” y como consecuencia su perímetro es $p = 4n$ y al contar n^2 fichas, el desencuadre total necesariamente exhibe un perímetro $p' = 4n^2 = n(4n) = np$. Esto es, n veces el perímetro original.

Los siguientes recuadros presentan evidencias sucesivas de este hecho.



$p = 8$

$p' = 16 = 4 \times 8 = 4p$

$p = 12$

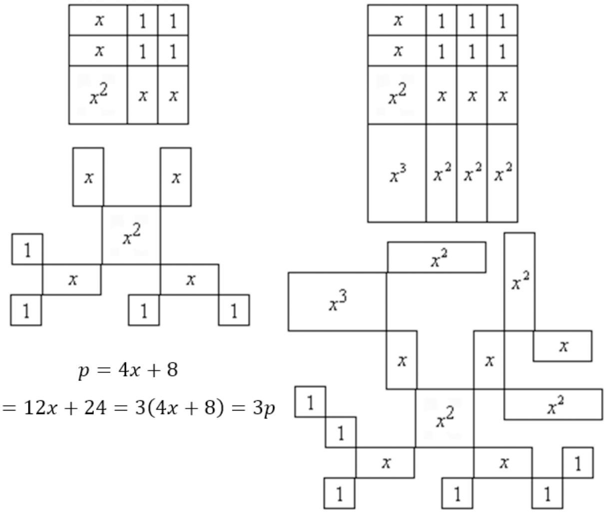
$p' = 36 = 4 \times 12 = 4p$

$p = 16$

$p' = 64 = 4 \times 16 = 4p$

Figura 178 Fuente propia.

Si la arquitectura del rectángulo $n \times n$ es diversa, ocurre igual como se aprecia en los dos siguientes casos:



$p = 4x + 8$

$p' = 12x + 24 = 3(4x + 8) = 3p$

$p = 2x^2 + 4x + 10$

$p' = 8x^2 + 16x + 40 = 4p$

Figura 179 Fuente propia.

Ejemplo. Hallar los perímetros de todos los desencuadres del rectángulo de base $(x + 1)$ y altura $(x + 1)$.

Solución. El perímetro mínimo es $2(2x + 2) = 4x + 4$ y que se consigue a partir del rectángulo. El perímetro máximo es $4x + (2x + 2) + (2x + 2) + 4 = 8x + 8 = 2(4x + 4)$ y que corresponde al desencuadre total. Luego para todo otro desencuadre $p(x)$ se tiene que $4x + 4 < p(x) < 8x + 8$.

A continuación, se disponen los desencuadres con sus respectivos perímetros.

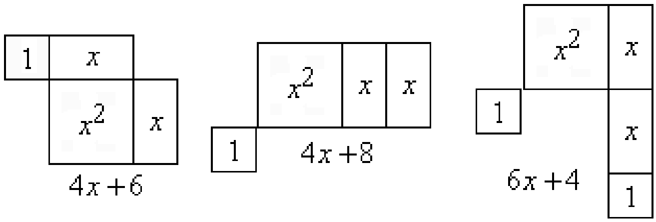


Figura 180 Fuente propia.

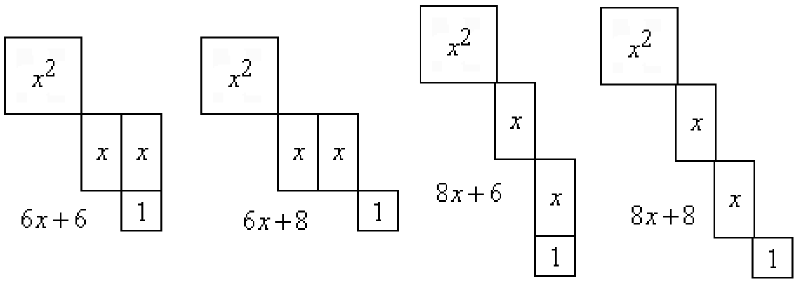


Figura 181 Fuente propia.

3.16.5 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite es estudio de problemas matemáticos particulares; en la presente guía, por ejemplo, se han estudiado dos problemas fundamentales. La construcción de rectángulos de igual perímetro y distinta área y la construcción de rectángulos de igual área y distinto perímetro; problemas que subyacen en los grandes obstáculos epistemológicos que ha tenido la ciencia y cuyos vestigios aún permanecen en algunas culturas que siguen creyendo que el perímetro es un criterio para determinar las áreas; o al contrario que las figuras cerradas de mayor área deben también poseer el mayor perímetro posible.

3.17 GUÍA No. 17: Algunos hechos Adicionales

La Caja de Polinomios es una herramienta pedagógica que posibilita el aprendizaje del Álgebra de polinomios, pero también resulta un material que, utilizado en grados de escolaridad inferior, permite el reconocimiento, la clasificación, la integración física de transformaciones de congruencia como la rotación y la traslación y puede advertir que el aprendizaje de la operatoria algebraica y de números enteros que están impresas en ella, se adelanta a los niveles citados. Insistimos, muy pronto, por ejemplo, con la ayuda de este material, un niño puede reconocer la existencia ideal de los números negativos y también de su operatoria.

En esta última guía, se ponen de relieve dos situaciones elementales que permiten determinar la riqueza inmersa en la Caja de Polinomios; la primera hace referencia al máximo común divisor de un conjunto de polinomios y la segunda a la relación que existe entre las cantidades de fichas requeridas en el juego para polinomios de grados altos y los números triangulares contemplados por los pitagóricos.

Objetivo: determinar que la Caja de Polinomios como herramienta de cálculo, puede explotarse en detalle en otras situaciones que requieren del espíritu creativo y recreativo de los docentes.

I. **Máximo Común divisor de polinomios**

El asunto en este caso es de fácil observación, todos los polinomios que en su forma estructural se pueden representar en la Caja de Polinomios como rectángulos de la misma base, tienen como Máximo común divisor, el polinomio que hace de base de tales rectángulos. Este resultado emerge con naturalidad de los procedimientos para factorizar y dividir que se han estudiado en guías anteriores. Los ejemplos que se muestran a continuación se han tomado desde la versión virtual de la Caja de Polinomios.

Ejemplo 1

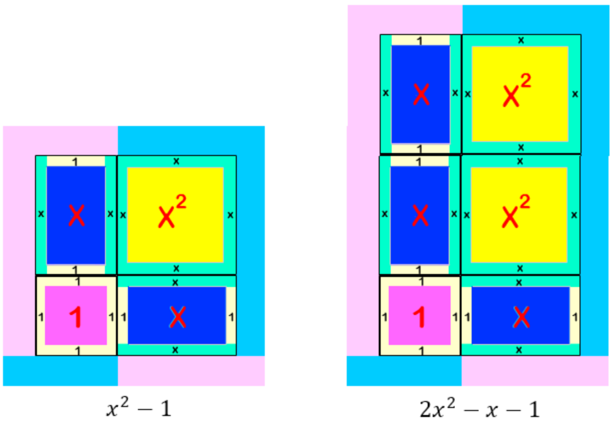


Figura 182 Fuente propia.

Los cuatro gráficos anteriores aseguran sin más ni más, que el Máximo común divisor de los polinomios representados en cada caso por las tabletas, en el plano cartesiano es el polinomio $p(x) = x - 1$.

Sumar es sinónimo de AGREGAR, de modo que la suma se calcula leyendo el polinomio que queda escrito en TODO EL TABLERO (Plano Cartesiano). Recuerde que para leer un polinomio es aconsejable retirar del plano todos los CEROS que se produzcan.

Ejemplo 2

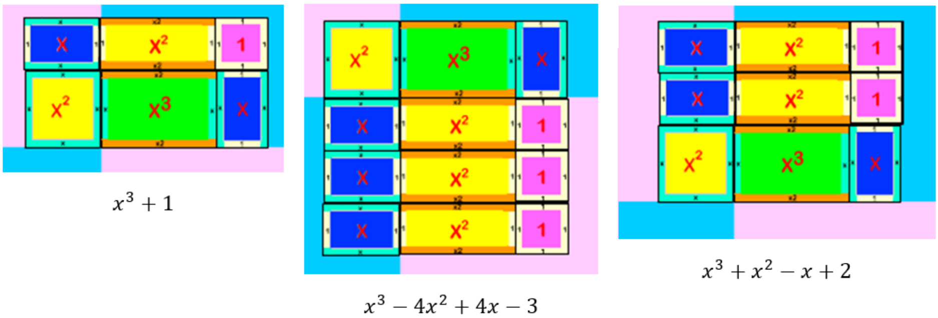


Figura 183 Fuente propia.

En este caso, los polinomios representados en las gráficas anteriores tienen como máximo común divisor a $p(x)=x^2-x+1$.

3.17.1 ACTIVIDAD 1

Empleando la Caja de Polinomios, construya rectángulos que representen un conjunto de al menos cuatro polinomios que tengan como Máximo común divisor los polinomios $p(x)=2x^2-3x+4$, $p(x)=-x^2+x-2$, $t(x)=2x-1$, $t(x)=2x-3$, $u(x)=3x+2$ y $w(x)=2-3x$.

Sobre los números triangulares y su relación con la Caja de Polinomios

Al emplear la Caja de Polinomios se advierte que, al operar con grados superiores, la cantidad de clases de fichas que se requiere va en aumento, esto es natural. En este acápite buscamos la relación que se establece con los números triangulares. Recuerde que un número triangular se corresponde con la suma parcial de la secuencia de los números naturales. De este modo $T_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, es el n-ésimo número triangular.

Los tres siguientes recuadros, indican las clases de fichas que deben utilizarse con polinomios desde el grado 1 hasta el grado 3.

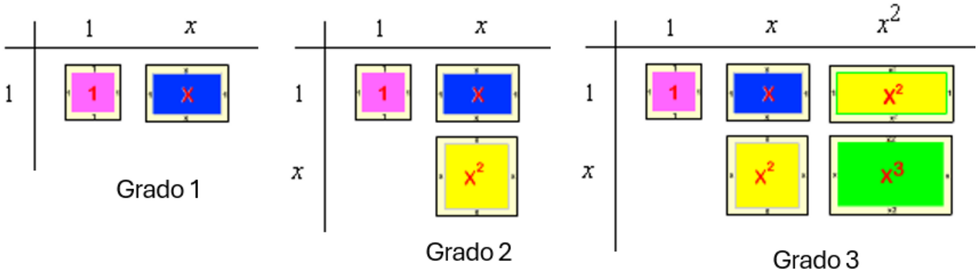


Figura 184 Fuente propia.

De aquí en adelante presentamos tan solo la simbología de las clases de fichas que se requiere para estudiar los polinomios de grado superior con algunas tablas.

	1	x	x^2	x^3
1	1	x	x^2	x^3
x		x^2	x^3	x^4
x^2			x^4	

Grado 4

	1	x	x^2	x^3	x^4
1	1	x	x^2	x^3	x^4
x		x^2	x^3	x^4	x^5
x^2			x^4	x^5	

Grado 5

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
x		x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^2			x^4	x^5	x^6	
x^3				x^6		

Grado 6

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x		x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^2			x^4	x^5	x^6	x^7	
x^3				x^6	x^7		

Grado 7

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x		x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^2			x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	
x^3				x^6	x^7	x^8		
x^4					x^8			

Grado 8

Figura 185 Fuente propia.

Se observa que el comportamiento del número de tabletas o fichas depende de si el grado n es par o impar.

En el caso de n impar se tiene que el número de fichas es $f(n) = 2T_{\frac{n+1}{2}} - 1$, siendo$T_{\frac{n+1}{2}}$ un número triangular. De este modo y aplicando la fórmula explicada para ellos, se tiene $f(n) = 2T_{\frac{n+1}{2}} - 1 = 2\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{2} - 1 = \frac{n^2+4n-1}{4}$.

Para n par se encuentra con rapidez que $f(n) = T_{\frac{n}{2}} + T_{\frac{n}{2}+1} - 1$, lo que al remplazar produce $f(n) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} + \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)}{2} - 1 = \frac{n(n+4)}{4}$.

Así, hemos encontrado una función bivaluada que cuenta el número de fichas que se requieren para representar un polinomio de grado n con tabletas en la Caja de Polinomios; tal función es

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n+4)}{4} & \text{para } n \text{ par} \\ \dfrac{n^2+4n-1}{4} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así, por ejemplo, para trabajar en la caja con polinomios de grado 10 se requiere de $f(10) = \frac{10(10+4)}{4} = 35$ clases de fichas.

Para trabajar con polinomios de grado 11, se requieren de $f(11) = \frac{11^2+4\times11-1}{4} = 41$ clases de fichas.

3.17.2 ACTIVIDAD 2

Calcular el número de fichas o tabletas que ser requiriera al desear trabajar con polinomios desde el grado 5 al grado 20 inclusive y elabore un ensayo que explique la dificultad que se presentaría para trabajar de manera tangible con estos polinomios.

3.17.3 PARA RECORDAR

La Caja de Polinomios permite relacionar diferentes tipos de conocimientos de carácter matemático y geométrico, algunas cosas que se escapan de la esfera netamente algebraica aparecen en la intervención explicada sobre la forma en que se liga con los números triangulares, otra está referida a las relaciones entre áreas y perímetros y de manera simpática, como se ha explicado en esta guía, la manera en que de modo anticipado se puede calcular el Máximo común divisor de un conjunto de polinomios con tan solo construir o representar polinomios como rectángulos de la misma base.

Se da espacio a los docentes, para ver, crear y recrear diversos tipos de actividades similares a estas propuestas, con el fin de hacer del conocimiento matemático una tarea apasionante y divertida.

Finalmente, todo polinomio se puede representar en la Caja de Polinomios de infinitas maneras por agregación de ceros formados por parejas de fichas con igual peso algebraico ubicados en cuadrantes de diferente color. En sí mismo, este instrumento es un recurso adicional de representar polinomios. Las siguientes gráficas son diversas representaciones del polinomio

$\boldsymbol{p(x) = 2x^2 - 3x + 2.}$

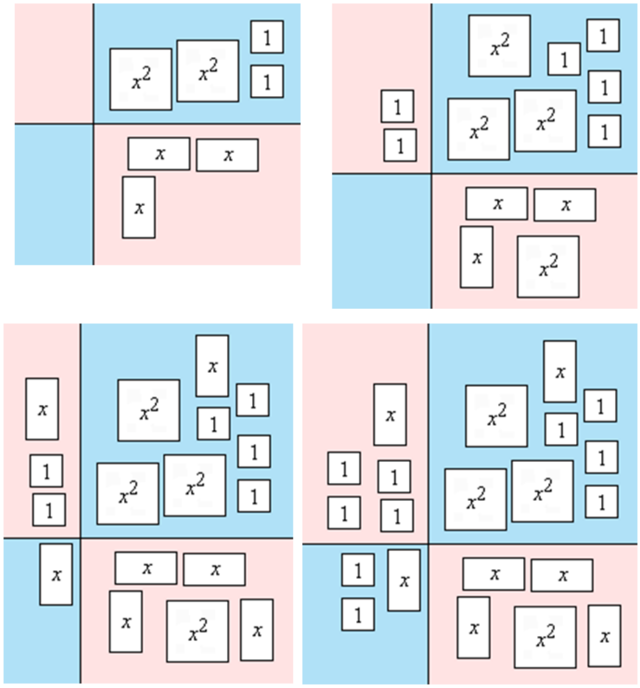


Figura 186 Fuente propia.

La agregación o disgregación de ceros es un recurso de gran utilidad en el trabajo matemático y va ligado a cada uno de los algoritmos operativos. En símbolos todo se traduce en expresiones como la siguiente:

$$\boldsymbol{p(x) = 2x^2 - 3x + 2 + \left(x^2 - x^2\right) + (2x - 2x) + (7 - 7)}$$

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, M., y Falk, M. (2004). *Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia / Colciencias.

Adobe Inc. (2024). *Adobe Animate CC*. Recuperado el 13 de octubre de 2024, de https://www.adobe.com

Armella, Luis. (2014). *Educación matemática: del signo al píxel*. Universidad Industrial de Santander.

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag.

Fiallo J. y Parada S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS. Universidad Industrial de Santander.

Gómez-Blancarte, A., & Valles-Pérez, J. R. (2016). La visualización en la enseñanza de las matemáticas: un acercamiento desde la geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19* (1), 27-48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1912

Holguin, C., Salvador-García, R., & Prieto-Andreu, C. (2020). Estrategias innovadoras para la enseñanza de matemáticas. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, 16(2), 209-221. https://doi.org/10.37843/rted.v16i2.397

Medrano, J. V., & Ñaupari, M. C. (2019). *RUP y sus ventajas en el proceso de desarrollo de software: Una revisión de la literatura científica de los años 2007 al 2018* [Trabajo de investigación, Universidad Privada del

Norte]. Repositorio de la Universidad Privada del Norte. https://hdl.handle.net/11537/29330

Olmedo Rodríguez, E. P.., Berrú Torres, C. P., Escaleras Encarnación, V. E., Angamarca Guamán, A. G., Banegas Ullauri, R. H., Gaona Torres, R. F., & Parra Cleri, L. E. (2024). Innovación en métodos de enseñanza: estrategias y desafíos para el compromiso y motivación estudiantil. *Revista InveCom*, 4(2), 1–16. https://doi.org/10.5281/zenodo.10655843

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 5*(9), 394-406.

Salvador-García, R. (2021). Gamificación en la educación matemática. *Revista de Innovación Educativa*, 22(3), 145-163.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? En A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* . Cambridge University Press. pp. 159-209.

Wikipedia. (2024). *Adobe Animate*. En Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado el 13 de octubre de 2024, de https://es.wikipedia.org/wiki/Adobe_Animate

Wikipedia. (2024). *Proceso Unificado de Rational*. En Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado el 13 de octubre de 2024, de https://es.wikipedia.org/wiki/Proceso_Unificado_de_Rational

Xataka Android. (2024, octubre 13). *Cómo instalar aplicaciones en APK en un móvil Android*. Xataka Android. https://www.xatakandroid.com/tutoriales/como-instalar-aplicaciones-en-apk-en-un-movil-android

ACERCA DE LOS AUTORES

Edwin Insuasty Portilla

Egresado de la Escuela Normal Nacional de Pasto, Licenciado en Matemáticas y Física (Área Mayor Matemáticas) de la Universidad de Nariño (Colombia). Realizó la Especialización en Computación para la Docencia de la Universidad Antonio Nariño (Colombia), y la Especialización en Docencia Universitaria de la Universidad de Nariño; además, es Magister en Modelos de Enseñanza Problémica, en la Universidad INCCA (Colombia), DEA en Procesos de Formación en Espacios Virtuales de la Universidad de Salamanca (España) y Doctor en Procesos de Formación en Espacios Virtuales de la Universidad de Salamanca (España) haciendo la pasantía de 9 meses en la Universidad de Padova (Italia). En su trayectoria como docente, ha tenido a su cargo asignaturas de matemáticas en los programas de Licenciatura en Matemáticas, Ingeniería Civil, Ingeniería de Sistemas, Economía e Ingeniería Agronómica. Actualmente, es Profesor Titular del programa de Licenciatura en Informática de la Universidad de Nariño, responsable de las asignaturas: Fundamentos de Lógica, Programación I, II y III, Software de Autoría y Programación de Videojuegos. Asimismo, es desarrollador de software para plataformas Windows, Linux, Android, IOs y aplicaciones MathLab, integrante de los grupos de investigación GESCAS de la Licenciatura en Matemáticas y GALERAS.NET, de Ingeniería de Sistemas.

Óscar Fernando Soto Agreda

Es maestro normalista, Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño, Especialista en Computación para la docencia de la

Universidad Mariana y Magister en educación en el área de enseñanza problémica de la Universidad INCCA de Colombia por convenio con la Universidad de Nariño. En la actualidad es Profesor Titular de la Universidad de Nariño, adscrito al departamento de Matemáticas y Estadística en el cual también trabaja como director. Ha dictado las asignaturas de álgebra y geometría, actuando en cursos electivos que se surten con aplicativos computacionales de geometría dinámica. Además, tiene experiencia administrativa porque fue director de la biblioteca Alberto Quijano Guerrero y del Liceo de bachillerato de la Universidad de Nariño.

Jesús Insuasti

Es Profesor Titular adscrito al Departamento de Sistemas de la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia) con treinta años al servicio de esta institución. En su labor se destacan dos grandes pasiones desde una mirada académico-científica: las Ciencias de la Educación y las Ciencias de la Computación. En este sentido, Jesús Insuasti proviene de una cuna de formación pedagógica en la Escuela Normal Nacional de Pasto (Colombia) —como se denominaba en aquel entonces—, es Especialista y Magister en Docencia Universitaria, además tiene el título de Doctor Cum Laude en Ciencias de la Educación; títulos otorgados por la Universidad de Nariño.

Por otra parte, Jesús Insuasti es Ingeniero de Sistemas de la Universidad de Nariño y Desarrollador 5 estrellas certificado por Microsoft Corporation (D.F., México). También, tiene certificación English Proficiency otorgada por San Jose State University (Silicon Valley, USA) como parte del programa de formación de Becas Fulbright. Además, posee el título de Master of Science —with distinction— in Internet Systems otorgado por

The University of Liverpool (Liverpool, UK), y Doctor en Ingeniería – Sistemas e Informática de la Universidad Nacional de Colombia (Medellín, Colombia). Sus estancias de investigación han sido realizadas en el Departamento de Informática de la Universidad de Cádiz (Cádiz, España) y en Computer Science Department en Technische Universiteit Eindhoven (Eindhoven, The Netherlands).

êditorial
Universidad de **Nariño**

Año de publicación : 2025
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El libro Artefacto digital Algebraico ofrece una propuesta innovadora y rigurosamente fundamentada para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar mediante el uso de una herramienta tecnológica: la Caja de Polinomios. Esta obra articula teoría, práctica pedagógica y desarrollo tecnológico, con el propósito de facilitar la comprensión de los polinomios desde una perspectiva manipulativa y visual, que va “de lo tangible a lo simbólico”.

La primera parte del libro presenta la aplicación multiplataforma desarrollada específicamente para trabajar con la Caja de Polinomios. El autor detalla el proceso de diseño y programación de esta app educativa, incluyendo consideraciones técnicas relevantes y orientaciones para su descarga y uso en diversos dispositivos, lo que garantiza su accesibilidad y adaptabilidad en contextos escolares diversos.

En el preámbulo, se establecen conexiones entre la propuesta y los estándares curriculares de diferentes niveles del sistema educativo: desde el preescolar hasta la media vocacional. Esta sección también incorpora una valiosa reflexión sobre el significado epistemológico y didáctico de la Caja, destacándola no solo como una herramienta tecnológica, sino como un verdadero artefacto pedagógico que potencia el pensamiento algebraico.

La tercera parte del libro explora el funcionamiento del artefacto digital en términos de juego operatorio, permitiendo que el estudiante manipule elementos representativos de los monomios y polinomios, y construya gradualmente el sentido de las operaciones algebraicas. A través de esta interacción, se favorece una comprensión más profunda del álgebra como sistema estructurado, evitando el mecanicismo y promoviendo la significación.

La obra incluye una serie de guías didácticas, iniciando por una guía histórica y matemática sobre la Caja de Polinomios, que contextualiza su desarrollo conceptual y su utilidad pedagógica. Estas guías ofrecen al docente propuestas de actividades estructuradas para implementar en el aula, aprovechando las potencialidades del entorno digital.

En conjunto, Artefacto digital Algebraico se consolida como un recurso valioso para la educación matemática contemporánea, integrando tecnología, didáctica y epistemología de forma coherente. Es una lectura imprescindible para educadores, formadores de docentes e investigadores interesados en nuevas formas de enseñar álgebra con sentido.

9 786287 864153

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de Nariño