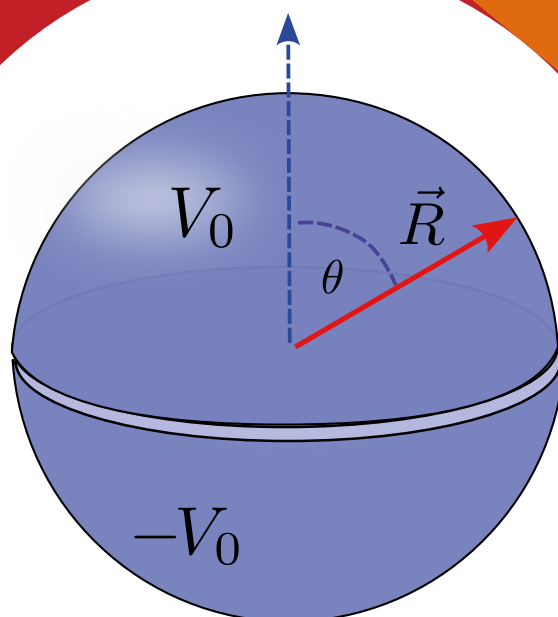


FÍSICA TEÓRICA

Notas de clase

Vol. 1



Juan Carlos Salazar Montenegro
Ángela Viviana Gómez Azuero
Eduardo Rojas Peña

èditorial

Universidad de **Nariño**

FÍSICA TEÓRICA

Vol. 1

Notas de clase

FÍSICA TEÓRICA

Vol. 1

Notas de clase

Juan Carlos Salazar Montenegro
Ángela Viviana Gómez Azuero
Eduardo Rojas Peña

Salazar Montenegro, Juan Carlos

Física teórica. Notas de clase / Juan Carlos Salazar Montenegro, Ángela Viviana Gómez Azuero, Eduardo Rojas Peña—1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026

V. 1 : ilustraciones, gráficas.

Contenido : Distribución delta de Dirac, Series de Fourier, Funciones especiales, Ecuación de Laplace, Operaciones y operadores vectoriales.

Incluye referencias bibliográficas p. 211 y reseña de los autores p. 212

ISBN: 978-628-7864-33-7 Impreso

ISBN: 978-628-7864-34-4 Digital

1. Física matemática 2. Física teórica y aplicada 3. Física teórica—Ejercicios 4. Ecuación de Laplace 5. Función Gamma 6. Función Beta. I. Gómez Azuero, Ángela Viviana II. Rojas Peña, Eduardo

530.1 S161f – SCDD-Ed. 22



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1994



Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 00022 - ENERO 11 DE 2023

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Física teórica. Vol. 1. Notas de clase

© Editorial Universidad de Nariño

© Juan Carlos Salazar Montenegro

Ángela Viviana Gómez Azuero

Eduardo Rojas Peña

ISBN impreso: 978-628-7864-33-7

ISBN digital: 978-628-7864-34-4

DOI: <https://doi.org/10.22267/lib.udn.049>

Primera edición

Corrección de estilo: German Chaves Jurado

Diseño de cubiertas: Nathaly Johana Rivadeneira

Diagramación: Juan Carlos Salazar Montenegro y Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Marzo de 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

Índice general

Introducción	9
1. Distribución delta de Dirac	11
1.1. Propiedades de la delta de Dirac	14
1.2. Representación <i>exponencial</i> de la distribución delta de Dirac	20
1.3. Distribución de Dirac en dos y tres dimensiones	23
1.4. Delta de Dirac como densidad de carga	25
2. Series de Fourier	31
2.1. Propiedad de ortogonalidad de las funciones Seno y Coseno	31
2.2. Determinación de los coeficientes asociados a la expansión de Fourier	33
2.3. Serie de Fourier en términos de funciones exponenciales.	41
2.4. Transformada de Fourier	47
2.4.1. Propiedades de la Transformada de Fourier	49
3. Funciones especiales	55
3.1. Función Gamma	55
3.2. Función Beta	62
3.3. La Función de Error	64
3.3.1. Conexión con la distribución normal	64
3.4. Funciones elípticas	66
3.5. Funciones hipergeométricas	77
3.5.1. Funciones Hipergeométricas Confluentes	80
4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas	83

4.1. Método de separación de variables	83
4.2. Separación de variables en coordenadas cartesianas	85
5. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas	113
5.1. Separación de variables	113
5.2. Solución de la ecuación de Laplace con simetría azimutal	114
5.3. Método de Frobenius	116
5.4. Solución a la ecuación diferencial de Legendre: Polinomios de Legendre	117
5.5. Solución a la ecuación diferencial ordinaria para la variable radial	125
5.5.1. Solución a la ecuación de Laplace con simetría azimutal	127
5.6. Polinomios de Legendre	128
5.6.1. Función generatriz	128
5.6.2. Propiedades de los Polinomios de Legendre	130
5.6.3. Fórmula de Rodrigues	134
5.7. Solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas	138
5.7.1. Solución para a la ecuación diferencial para la coordenada ϕ	138
5.7.2. Solución a la ecuación diferencial asociada a la coordenada θ : Polinomios asociados de Legendre.	139
5.7.3. Armónicos esféricos	142
5.7.4. Solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas . .	143
5.8. Aplicaciones físicas	143
6. Ecuación de Laplace en coordenadas Cilíndricas	156
6.1. Solución a la ecuación diferencial de Bessel	164
6.2. Propiedades de las funciones de Bessel y Newmann	168
6.2.1. Comportamiento asintótico y raíces para las funciones de Bessel y Neumann	168
6.2.2. Relaciones de recurrencia	170
6.2.3. Relación de ortonormalización para las funciones de Bessel	172
6.2.4. Función generatriz	176
6.2.5. Forma integral de la función de Bessel	180
6.2.6. Expansión en términos de funciones de Bessel	181

A. Operaciones y operadores vectoriales	200
A. Coordenadas curvilíneas	200
B. Gradiente en coordenadas curvilíneas	200
C. Divergencia en coordenadas curvilíneas	202
D. Rotacional en coordenadas curvilíneas	203
E. Laplaciano en coordenadas curvilíneas	204
F. Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas	205
F.1. Gradiente en coordenadas cilíndricas	205
F.2. Divergencia en coordenadas cilíndricas	205
F.3. Rotacional en coordenadas cilíndricas	206
F.4. Laplaciano en coordenadas cilíndricas	206
G. Operadores diferenciales en coordenadas esféricas	206
G.1. Gradiente en coordenadas esféricas	206
G.2. Divergencia en coordenadas esféricas	207
G.3. Rotacional en coordenadas esféricas	207
G.4. Laplaciano en coordenadas esféricas	207

Introducción

La Física matemática constituye una disciplina esencial para la modelación y comprensión de los fenómenos naturales, al proporcionar el formalismo matemático necesario para la formulación rigurosa de las leyes físicas y el análisis de sus soluciones. Desde los trabajos pioneros de **Joseph Fourier** en el siglo XIX [1], hasta el desarrollo de la mecánica cuántica y la teoría de distribuciones por **Paul Dirac** [2] y **Laurent Schwartz** [3], el uso de herramientas matemáticas avanzadas se ha consolidado como una base indispensable en la física teórica y aplicada.

El presente texto tiene por finalidad ofrecer al estudiante de nivel intermedio de pregrado una exposición sistemática y detallada de diversos métodos de análisis matemático con amplia aplicabilidad en física. En el primer capítulo se aborda la **distribución delta de Dirac**, concepto formalizado en el marco de la teoría de distribuciones [3], y cuya utilidad se manifiesta en la descripción de fenómenos puntuales y condiciones iniciales o de contorno idealizadas o aproximadas.

Posteriormente, se introducen las **series de Fourier** y la **transformada de Fourier**, técnicas que permiten descomponer funciones en modos armónicos y analizar el comportamiento de sistemas lineales, siendo fundamentales en mecánica, acústica, electromagnetismo y teoría de señales.

Una parte significativa del texto está dedicada al estudio de **funciones especiales** de gran relevancia en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Entre ellas se incluyen la función error (Erf), la función gamma (Γ), la función beta (B) y las **funciones elípticas** de Jacobi y Weierstrass, fundamentales en problemas de oscilaciones no lineales, potenciales periódicos y geometría de superficies [4], [5]. Estas funciones, aunque menos conocidas que las funciones elementales, constituyen un repertorio imprescindible en física matemática avanzada.

El libro también dedica una sección central a la **ecuación de Laplace**, cuya importancia es transversal a múltiples áreas de la física clásica, incluyendo la electrostática, la conducción de calor y la mecánica de fluidos. Se presenta su resolución en sistemas de coordenadas **cartesianas, cilíndricas y esféricas**, destacando el método de separación de variables y el papel determinante de las condiciones de contorno en la selección de soluciones físicamente significativas [6].

Cada capítulo incluye **ejemplos desarrollados paso a paso**, con el objetivo de vincular el

formalismo teórico con aplicaciones concretas, así como **ejercicios propuestos** que permitirán al lector consolidar los conceptos abordados y adquirir destreza en la manipulación de estas herramientas.

En suma, este texto busca constituir un **vínculo formativo entre los cursos básicos de cálculo y ecuaciones diferenciales** y las asignaturas avanzadas de física teórica o ingeniería. La comprensión de los métodos aquí presentados permitirá al estudiante abordar con mayor solvencia áreas como el electromagnetismo, la mecánica cuántica, la teoría de campos y la física estadística.

1– Distribución delta de Dirac

La delta de Dirac, o *función* delta de Dirac, es estrictamente una función generalizada que se define a partir de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \quad (1.1)$$

Las funciones $f(x)$ sobre las cuales se define la delta de Dirac ($\delta(x - x_0)$) son funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto. Dentro de este conjunto de funciones se encuentran las funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido; es decir, que tienden a cero más rápido que el inverso de cualquier función polinomial. Adicionalmente se encuentran las funciones que toman valor solo en una región limitada del espacio de configuraciones y se anulan fuera de dicha región. Las funciones antes mencionadas son las que en general se trabajan en física. Ahora, si se elige una función $f(x)$, tal que $f(x) = 1$ para todo valor de x en una región limitada del espacio que contenga el punto x_0 (y que sea cero fuera de dicha región), entonces a partir de (1.1) se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot 1 dx = 1, \quad (1.2)$$

o simplemente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (1.3)$$

Debido a la propiedad descrita en la ecuación (1.3) (propiedad que cumplen las densidades de carga o masa), la distribución delta de Dirac se utiliza en física para describir densidades para partículas puntuales (en una próxima sección se explicará su utilidad en la descripción de densidad de carga para partículas). La delta de Dirac no es estrictamente una función; sin embargo, se suele aproximar como el límite de una sucesión de funciones que tienden a cero en todo punto del espacio, excepto en un punto donde el término de la sucesión correspondiente diverge. Por ejemplo, se define una sucesión de funciones donde el término n -ésimo está dado por:

$$D_n(x - x_0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-x_0)^2}, \quad (1.4)$$

La función $D_n(x - x_0)$ representa una función que para $n \gg 1$ decrece rápidamente conforme x toma valores distintos de x_0 y adquiere su máximo valor para $x = x_0$. La máxima amplitud de la función $D_n(x - x_0)$ se encuentra en $x = x_0$ y es $n/\sqrt{\pi}$. Por lo tanto, la amplitud tiende a infinito conforme $n \rightarrow \infty$ si $x = x_0$ (si $x \neq x_0$ la exponencial decae mucho mas rápido a cero en relación al aumento en la amplitud, ver figura 1.1). Adicionalmente, se puede comprobar la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x - x_0) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(x-x_0)^2} dx = 1. \quad (1.5)$$

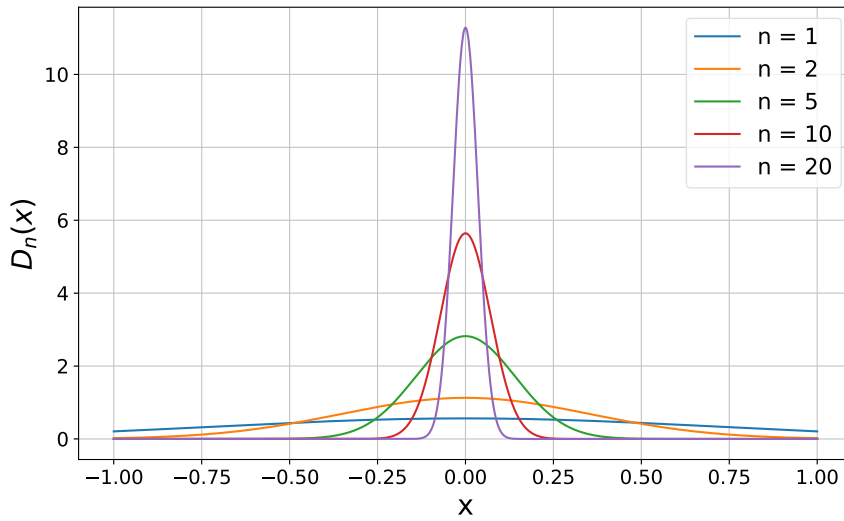


Figura 1.1: Función $D_n(x - x_0)$ para diferentes valores de n con $x_0 = 0$.

Ejercicio 1.1. Demostrar la relación (1.5).

Por lo anterior, se puede establecer que

$$\delta(x - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x - x_0). \quad (1.6)$$

Es posible encontrar diferentes funciones que se comporten como $D_n(x - x_0)$, para las cuales la relación (1.6) es válida como aproximación.

Ejercicio 1.2. *Demostrar que las funciones:*

$$f_n(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{n}{n^2(x - x_0)^2 + 1} \right), \quad (1.7)$$

$$g_n(x - x_0) = \frac{\text{sen } n(x - x_0)}{\pi(x - x_0)}, \quad (1.8)$$

cumplen la propiedad (1.3) y la equivalencia (1.6).

La aproximación (1.6) permite visualizar intuitivamente a la delta de Dirac como una función que vale cero para todo valor x distinto a x_0 y que tiende a infinito para $x = x_0$; es decir,

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = x_0, \\ 0, & \text{si } x \neq x_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Las definiciones (1.6) o (1.9), permiten realizar la integral presentada en (1.1), restringiendo su evaluación a un intervalo que contenga a x_0 , es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0), \quad (1.10)$$

si $a < x_0 < b$. Si el intervalo de integración no contiene x_0 , entonces se tendría que:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = 0. \quad (1.11)$$

Resumiendo los resultados anteriores, se tiene que:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{si } a < x_0 < b \\ 0, & \text{si } x_0 < a \text{ ó } x_0 > b \end{cases}. \quad (1.12)$$

En (1.12) se ha asumido que $b > a$. En el caso que $a > b$, se tendría que:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = - \int_b^a \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} -f(x_0), & \text{si } b < x_0 < a \\ 0, & \text{si } x_0 < b \text{ ó } x_0 > a \end{cases}. \quad (1.13)$$

La distribución delta de Dirac se puede relacionar con la función de paso $\theta(x)$ dada por:

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > x_0 \\ 0, & \text{si } x < x_0 \end{cases}. \quad (1.14)$$

La relación se da, ya que la derivada de la función $\theta(x - x_0)$ es cero en todo punto donde $x \neq x_0$, y diverge para $x = x_0$, es decir,

$$\frac{d\theta(x - x_0)}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq x_0 \\ \infty, & \text{si } x = x_0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Al comparar (1.9) con (1.15), se puede establecer la equivalencia

$$\delta(x - x_0) \equiv \frac{d\theta(x - x_0)}{dx}. \quad (1.16)$$

1.1. Propiedades de la delta de Dirac

Para describir las principales propiedades de la delta de Dirac, por facilidad en los cálculos se tomará $x_0 = 0$, por lo tanto la definición (1.1) se escribe como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (1.17)$$

Las principales propiedades de la distribución delta de Dirac son:

1. **Paridad:** La distribución delta de Dirac es par, es decir:

$$\delta(-x) \equiv \delta(x). \quad (1.18)$$

Demostración: Reemplazando $\delta(x) \rightarrow \delta(-x)$ en (1.17), se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) f(x) dx &\stackrel{x \rightarrow -x}{=} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(x) f(-x) (-dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(-x) dx = f(-0) = f(0). \end{aligned} \quad (1.19)$$

2. **Derivada:** Si $\delta'(x)$ corresponde a la derivada de la distribución $\delta(x)$ respecto a x , entonces se establece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x) dx. \quad (1.20)$$

Demostración: Aplicando derivación por partes a la parte izquierda de (1.20) con $u = f(x)$ y $\delta(x) = v$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx. \quad (1.21)$$

Ya que las funciones $f(x)$ se anulan en $x \rightarrow \pm\infty$, el primer término al lado derecho de (1.21) se anula, y por lo tanto se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx. \quad (1.22)$$

La anterior propiedad se puede generalizar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta(x)dx, \quad (1.23)$$

donde el superíndice (n) representa la derivada n -ésima.

3. El argumento de la distribución delta de Dirac puede ser una función, en tal caso se tiene que:

$$\delta(g(x)) = \sum_n |g'(x_n)|^{-1} \delta(x - x_n), \quad \text{con } g(x_n) = 0 \text{ y } g'(x_n) \neq 0 \quad (1.24)$$

Demostración: Para $\delta(g(x))$, la integral (1.1) se escribe como:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))f(x)dx. \quad (1.25)$$

Por propiedades de la distribución delta de Dirac, la integral anterior solo toma valores diferentes de cero para puntos en los cuales el argumento de la distribución delta de Dirac sea igual a cero, que en este caso, corresponde a puntos para los cuales $g(x) = 0$. Al ser $g(x)$ una función en la variable x , pueden existir varios puntos que satisfagan la condición $g(x) = 0$; es decir, las raíces de la función $g(x)$, que se denominarán x_n , tal que: $g(x_n) = 0$. Si la función $g(x)$ tiene más de una raíz, será conveniente separar la integral (1.25) sobre contornos alrededor de cada una de las raíces, es decir:

$$I = \sum_{n=1}^N \int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon} \delta(g(x))f(x)dx. \quad (1.26)$$

En (1.26) se ha utilizado el hecho que

$$\int_a^b \delta(g(x))f(x)dx = 0, \quad (1.27)$$

si la región definida entre los límites a y b no contiene puntos para los cuales $g(x_n) = 0$. Por lo tanto, en la expresión (1.26) solo se tienen en cuenta intervalos de integración que contengan una raíz de la función $g(x)$. Cada término en la suma expresada en (1.26) representa la integral sobre una sola raíz de la función $g(x)$ y N representa el número de raíces de la función $g(x)$. El n -ésimo término en la ecuación (1.26) se puede escribir como:

$$I_n = \int_{x_n - \epsilon}^{x_n + \epsilon} \delta(g(x)) f(x) dx. \quad (1.28)$$

Para realizar la integral en (1.28); siguiendo la definición de la delta de Dirac, se aplica un cambio de variable, dado por:

$$y = g(x), \quad (1.29)$$

$$dy = g'(x) dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)}. \quad (1.30)$$

Adicionalmente, ante el cambio de variable propuesto, se tiene que:

$$f(x) \rightarrow f(g^{-1}(y)), \quad (1.31)$$

donde $g^{-1}(y)$ representa la función inversa asociada a $g(x)$. Asumiendo que la relación $y = g(x)$ es invertible, la función $g^{-1}(y)$ representa una función en la variable y . A su vez, la función $f(g^{-1}(y))$ también es una función en la variable y , que se denominará simplemente como $h(y)$. Con lo anterior la integral (1.28) toma la forma:

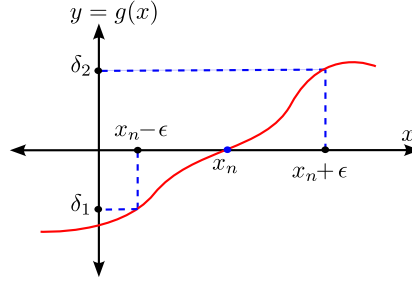
$$I_n = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta(y) \frac{h(y)}{g'(x)} dy. \quad (1.32)$$

donde los límites de integración se han definido, estableciendo la relación

$$\begin{aligned} x_n + \epsilon &\rightarrow g^{-1}(x_n + \epsilon) \equiv \delta_2, \\ x_n - \epsilon &\rightarrow g^{-1}(x_n - \epsilon) \equiv \delta_1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

La figura 1.2, indica gráficamente lo establecido en (1.33) para una función creciente en $x = x_n$. Se debe observar que $g^{-1}(x_n) = y_n = 0$, para todo n . Por otra parte $g'(x)$ en términos de la variable y se escribiría como: $g'(x) \rightarrow g'(g^{-1}(y))$. Entendiendo que $g'(g^{-1}(y))$ es una función de la variable y , se denominará simplemente como $k(y)$ ($g'(g^{-1}(y)) \equiv k(y)$). Bajo las consideraciones anteriores, la integral expresada en la ecuación (1.32) toma la forma:

$$I_n = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta(y) \frac{h(y)}{k(y)} dy, \quad (1.34)$$

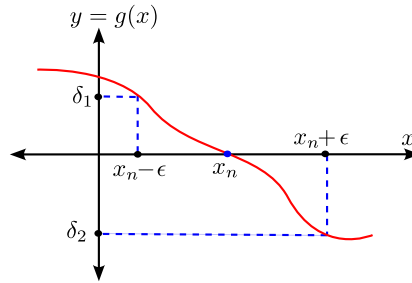
Figura 1.2: Función creciente alrededor de x_n .

la cual, aplicando las propiedades de la distribución delta, resulta:

$$I_n = \frac{h(0)}{k(0)}, \quad (1.35)$$

que en términos de la variable x y las raíces x_n , toma la forma:

$$I_n = \frac{h(0)}{k(0)} = \frac{f(g^{-1}(0))}{g'(x)|_{x=x_n}} = \frac{f(x_n)}{g'(x)|_{x=x_n}}. \quad (1.36)$$

Figura 1.3: Función decreciente alrededor de x_n .

El resultado expresado en (1.36) es correcto solo si $g'(x_n) \neq 0$ y si, ante el cambio de variable, los límites de integración mantienen su jerarquía; es decir, si:

$$x_n + \epsilon > x_n - \epsilon \Rightarrow \delta_2 > \delta_1, \quad (1.37)$$

osea, para el caso en el cual $y = g(x)$ corresponda a una función en $x = x_n$ ó $g'(x_n) > 0$ (como el caso indicado en la figura 1.2). Sin embargo, si la función $y = g(x)$ representará una función decreciente alrededor del punto $x = x_n$ (ver figura 1.3), entonces:

$$\delta_2 < \delta_1, \quad (1.38)$$

adicionalmente, $k(y) = g'(x) < 0$, por lo tanto

$$k(y) = -|k(y)|, \quad \text{para } \delta_2 < y < \delta_1, \quad (1.39)$$

y la integral I_n toma la forma:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta(y) \frac{h(y)}{(-|k(y)|)} dy = - \int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta(y) \frac{h(y)}{|k(y)|} dy \\ &= \int_{\delta_2}^{\delta_1} \delta(y) \frac{h(y)}{|k(y)|} dy = \frac{h(0)}{|k(0)|}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

que en términos de la variable x y las raíces x_n , se escribe como:

$$I_n = \frac{f(x_n)}{|g'(x)|_{x=x_n}}. \quad (1.41)$$

El resultado final expresado en (1.41) es válido tanto para una función $g(x)$ creciente o decreciente en x_n . Por otra parte, el resultado descrito en la ecuación (1.41) es equivalente al que se obtiene a partir de la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_n) \left(\frac{f(x)}{|g'(x_n)|} \right) dx = \left(\frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \right). \quad (1.42)$$

Por lo tanto, se puede establecer que

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_n) \left(\frac{f(x)}{|g'(x_n)|} \right) dx, \quad (1.43)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N I_n = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_n) \left(\frac{f(x)}{|g'(x_n)|} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \right) f(x) dx. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Al comparar (1.26) con (1.44), se concluye que:

$$\delta(g(x)) \equiv \left(\sum_{n=1}^N \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \right). \quad (1.45)$$

En física, en general, las funciones $f(x)$ son infinitamente diferenciables y acotadas, por lo cual se puede aplicar la distribución delta de Dirac. Sin embargo, muchas veces se trabaja con funciones que aparentemente no son acotadas, como $f(x) = x$. Lo que sucede en realidad es que el espacio de estudio está acotado, por ejemplo, $f(x)$ puede ser igual a la función x en una cierta región del espacio, y fuera de dicha región la función se anula. Esto ocurre en muchos problemas, donde no se especifica que el espacio de trabajo está acotado, pero aún así se trabaja con funciones que no lo están (lo cual también se usa en este texto).

Ejercicio 1.3. Demostrar la relación (1.23).

Ejemplo 1.1. Se tienen las siguientes funciones:

$$g(x) = e^{-(x-a)^2+1}, \quad (1.46)$$

$$h(x) = \cos(ax), \quad (1.47)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. A partir de las funciones planteadas se encontrará:

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-2a)g(x)dx.$

b) $I = \int_{-2\pi}^{2\pi} \delta'(h(x))f(x)dx.$

Solución:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de la distribución delta de Dirac, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-2a)g(x)dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2a)g'(x)dx \\ &= 2ae^{-(a^2-1)}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

b) En primer lugar se aplica la propiedad de la derivada para la función delta de Dirac, tal que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \delta'(h(x))f(x)dx = - \int_{-2\pi}^{2\pi} \delta(h(x))f'(x)dx.$$

Ahora, las raíces de la función $h(x)$ son: $\cos(ax_n) = 0 \rightarrow x_n = \pm \frac{(2n-1)\pi}{2a}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Las raíces que se encuentran dentro del intervalo de integración $(-2\pi, 2\pi)$ son: $x = \left\{-\frac{\pi}{2a}, -\frac{3\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}\right\}$ (asumiendo $a > 1$). Adicionalmente, $h'(x) = -a \sin(ax)$ y por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta(h(x)) &\equiv \sum_{n=1}^4 \frac{\delta(x-x_n)}{|h'(x_n)|} = \sum_{n=1}^4 \frac{\delta(x-x_n)}{a|\sin(ax_n)|} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \delta\left(x + \frac{\pi}{2a}\right) + \delta\left(x + \frac{3\pi}{2a}\right) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2a}\right) + \delta\left(x - \frac{3\pi}{2a}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{j=0}^3 \delta\left(x + \frac{(2j-3)\pi}{2a}\right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Por otra parte, $f'(x) = 4x^3 - 2x$, y se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{2\pi} \delta(h(x))f(x)dx &= - \sum_{j=0}^3 \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\delta\left(x + \frac{(2j-3)\pi}{2a}\right) \right) (4x^3 - 2x) \\ &= \sum_{j=0}^3 \left(4 \left(\frac{(2j-3)\pi}{2a} \right)^3 - 2 \left(\frac{(2j-3)\pi}{2a} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ejercicio 1.4. Se tienen las siguientes funciones:

$$f(x) = 3e^{-x^2}, \quad (1.51)$$

$$g(x) = \frac{1}{-(x-a)^2 + 1}, \quad (1.52)$$

$$h(x) = x^2 - 1, \quad (1.53)$$

$$k(x) = (x-2)(x^2 + 4x - 2). \quad (1.54)$$

Para las funciones planteadas encuentre:

$$a) I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-3)f(x)dx.$$

$$b) I = \int_0^2 \delta(h(x))f(x)dx.$$

$$c) I = \int_{-5}^8 \delta(h(x))k(x)dx.$$

$$d) I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)h(x)dx.$$

$$e) I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'''(x)f(x)dx.$$

$$f) I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(-x)g(x)dx.$$

$$g) I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)g(x)dx.$$

1.2. Representación exponencial de la distribución delta de Dirac

En esta sección, se define una representación de la distribución delta de Dirac, especialmente útil en física, que se presenta como una integral de la función exponencial con argumento complejo. Para lograr dicho objetivo, inicialmente, se considera la función $F_T(x-x_0)$ definida a través de la expresión:

$$F_T(x-x_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{i(x-x_0)t} dt.$$

La integral anterior se resuelve fácilmente por integración directa, obteniendo:

$$F_T(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(x-x_0)t}}{i(x-x_0)} \right]_{-T}^T \quad (1.55)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(T(x-x_0))}{(x-x_0)}. \quad (1.56)$$

La función $F_T(x)$ tiene un máximo global en $x = x_0$, el cual depende directamente del valor de T : a mayor T , mayor máximo global. Además, para valores grandes de x , la función $F_T(x)$

tiende a cero. Específicamente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_T(x - x_0) \rightarrow 0, \quad (1.57)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_T(x - x_0) \rightarrow \infty. \quad (1.58)$$

La Figura 1.4 muestra una representación gráfica de F_T para distintos valores de T , centrada en $x_0 = 0$.

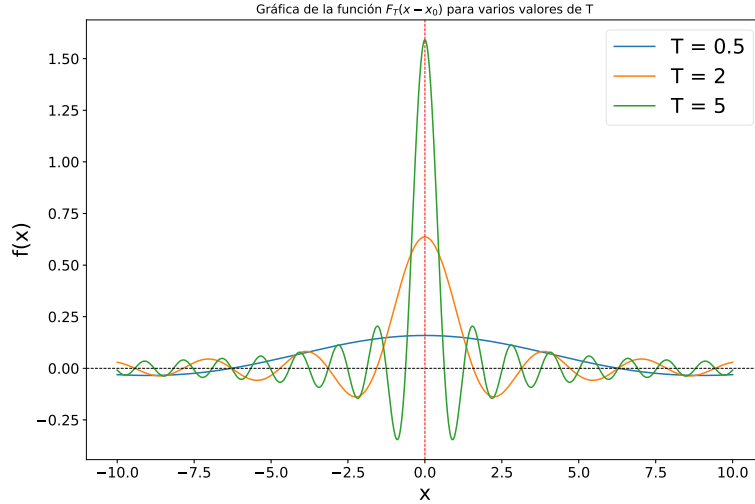


Figura 1.4: Función $F_T(x - x_0)$ centrada en $x_0 = 0$.

Por otro lado, para la función F_T se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_T(x - x_0) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(T(x - x_0))}{x - x_0} dx. \quad (1.59)$$

La integral anterior se resuelve realizando el cambio de variable: $y = T(x - x_0) \Rightarrow dx = \frac{dy}{T}$, por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_T(x - x_0) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy.$$

Ahora, expresando la función seno en su forma exponencial, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_T(x - x_0) dx = \frac{1}{\pi 2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dy - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right),$$

donde, al cambiar $x \rightarrow -x$ en la segunda integral, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(x - x_0) dx &= \frac{1}{\pi 2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right). \end{aligned} \quad (1.60)$$

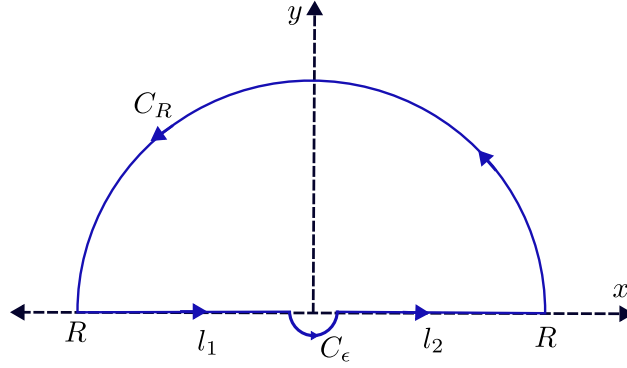


Figura 1.5: Contorno de integración.

La integral en (1.60) se puede resolver empleando integración compleja. Para ello se considera una integral completa sobre un contorno C (ver Figura 1.5), dada por:

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{l_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{l_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (1.61)$$

En la Figura 1.5, se observa que sobre las trayectorias l_1 y l_2 , el argumento z es real ($z = x$). Las trayectorias C_ϵ y C_R corresponden a semicircunferencias de radios ϵ y R , respectivamente. Así, en las trayectorias semicirculares es conveniente expresar z en su forma polar: $z = \epsilon e^{i\theta}$ para C_ϵ y $z = R e^{i\theta}$ para C_R . Con esto, la integral (1.61) se expresa como:

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{-R}^{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dz + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &\quad + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dz + \int_{\pi}^0 \frac{e^{iR e^{i\theta}}}{R e^{i\theta}} iR e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-R}^{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &\quad + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^0 e^{iR e^{i\theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Al tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^0 e^{iR e^{i\theta}} d\theta \right) \\ &= \int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \\ &\quad + \int_0^R \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^0 e^{iR \cos \theta} e^{-R \sin \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Si se toma el límite $R \rightarrow \infty$, la última integral se anula debido a la presencia del término $e^{-R \sin \theta}$, y la expresión se simplifica a:

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^R \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^0 e^{iR \cos \theta} e^{-R \sin \theta} d\theta \right) \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dz + i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dz + i\pi.
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dz &= \oint \frac{e^{iz}}{z} dz - i\pi \\
 &= 2\pi i \text{Res} f(z) - i\pi = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} - i\pi \\
 &= 2\pi i - i\pi = i\pi.
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Finalmente, al sustituir (1.65) en (1.60), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_T(x - x_0) dx = \frac{1}{\pi i} \pi i = 1. \tag{1.66}$$

A partir de las propiedades expresadas en (1.58) y (1.66), es posible establecer que:

$$\delta(x - x_0) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} F_T(x - x_0), \tag{1.67}$$

es decir:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x_0)t} dt. \tag{1.68}$$

1.3. Distribución de Dirac en dos y tres dimensiones

La distribución delta de Dirac en tres dimensiones se define por medio de:

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \text{si } \vec{r}_0 \in V, \\ 0, & \text{si } \vec{r}_0 \notin V. \end{cases} \tag{1.69}$$

Y adicionalmente, debe cumplirse que:

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = 1, \tag{1.70}$$

donde la integral se extiende a todo el espacio. La forma explícita de la distribución $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ dependerá del sistema coordenado en el cual se este trabajando.

Coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas, la delta de Dirac en tres dimensiones, en términos de delta de Dirac definida en una dimensión, se expresa como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \quad (1.71)$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas del vector $\vec{r}$ y x_0, y_0, z_0 son las coordenadas cartesianas del vector $\vec{r}_0$. Considerando que el diferencial de volumen en coordenadas cartesianas se escribe como $dV = dxdydz$, entonces la propiedad (1.70) toma la forma:

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx}_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) dy}_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0) dz}_1 = 1. \quad (1.72)$$

En caso que el volumen de integración sea finito, el resultado de la integral (1.70) será diferente de cero (concretamente igual a uno), solo si el punto (x_0, y_0, z_0) este dentro del volumen de integración. De igual forma, la distribución delta de Dirac para el caso bidimensional en coordenadas cartesianas se define como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (1.73)$$

y se cumple que:

$$\int_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dA = 1, \quad (1.74)$$

donde $dA = dxdy$, y la integral se realiza en un región de área A que contenga el punto (x_0, y_0) (en caso contrario la integral será cero).

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se definen con las variables (ρ, ϕ, z) . El diferencial de volumen en estas coordenadas, se expresa como $dV = \rho^2 d\rho d\theta dz$, y por lo tanto, la integral (1.70) se puede escribir como:

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \rho^2 d\rho d\theta dz = 1. \quad (1.75)$$

La relación (1.75) se obtiene si se define

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho^2} \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0), \quad (1.76)$$

ya que, en este caso, la expresión (1.75) toma la forma:

$$\begin{aligned} \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV &= \int_0^{\infty} \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho^2} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_0) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0) dz \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(\rho - \rho_0) d\rho}_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_0) d\theta}_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0) dz}_1 = 1. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Nuevamente, si el volumen de integración en (1.77) es finito, el punto descrito por (ρ_0, θ_0, Z_0) debe estar dentro de dicho volumen para que la integración dé como resultado el valor de uno; de lo contrario, el resultado será cero.

Coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , la delta de Dirac también debe cumplir la propiedad (1.70). Considerando que el diferencial de volumen en coordenadas esféricas se escribe como $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$, se tiene:

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 1. \quad (1.78)$$

Por ello, se puede establecer que:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{\sin \theta} \delta(\phi - \phi_0), \quad (1.79)$$

ya que así, la expresión (1.75) toma la forma:

$$\begin{aligned} \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV &= \int_0^\infty \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} r^2 dr \int_0^\pi \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0) d\phi \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \delta(r - r_0) dr}_1 \underbrace{\int_0^\pi \delta(\theta - \theta_0) d\theta}_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0) d\phi}_1 = 1. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Al igual que en los casos anteriores, y por las propiedades de la delta de Dirac, si el volumen de integración en (1.77) es finito, el punto descrito por (r_0, θ_0, ϕ_0) debe estar dentro del volumen de integración para que el resultado de la integral (1.77) sea uno; de lo contrario, el resultado será cero.

1.4. Delta de Dirac como densidad de carga

En física, una de las aplicaciones importantes de la delta de Dirac es su utilidad en la representación de cargas puntuales en términos de densidad de carga. Se puede intuir que una partícula es como un cuerpo cuyo volumen tiende a cero, por lo que es posible definir una densidad de carga para dicha partícula, que es cero en todo punto excepto en aquel donde está localizada la carga, en cuyo caso la densidad tiende a infinito. Así, para una partícula ubicada en la posición $\vec{r}_0$, se tiene:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq \vec{r}_0, \\ \infty & \text{si } \vec{r} = \vec{r}_0. \end{cases} \quad (1.81)$$

La representación anterior se asemeja a la manera intuitiva de entender la delta de Dirac presentada en (1.9); además, cumple que:

$$\frac{1}{Q_T} \int_V \rho(\vec{r}) dV = 1, \quad (1.82)$$

si la densidad corresponde a una densidad de carga y donde Q_T , representa la carga total en el volumen V . Por lo tanto, la densidad de carga para una partícula con carga q se puede expresar en términos de la delta de Dirac como:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.83)$$

La relación (1.83) requiere que la distribución de Dirac posea dimensiones, de tal manera que se cumpla:

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = q \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q, \quad \text{si } \vec{r}_0 \in V. \quad (1.84)$$

Dado que el volumen tiene dimensiones de longitud al cubo, la delta de Dirac debe tener unidades de L^{-3} . Sin embargo, si se trabaja en un espacio de dos dimensiones, la integral (1.84) se reemplaza por:

$$\int_A \sigma(\vec{r}) dA = q \int_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dA = q, \quad \text{si } \vec{r}_0 \in A, \quad (1.85)$$

donde σ representa la densidad superficial de carga y, por lo tanto, la delta de Dirac definida en dos dimensiones tendrá unidades de $1/L^2$. En una dimensión, la integral se formula como:

$$\int_a^b \lambda(x) dx = q \int_a^b \delta(x - x_0) dx = q, \quad \text{si } a < x_0 < b. \quad (1.86)$$

Aquí, λ representa la densidad lineal de carga y la delta de Dirac tendrá unidades de $1/L$.

En el caso de tener N cargas en el espacio ubicadas en las posiciones $\vec{r}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), la relación (1.83) se generaliza en la forma:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1.87)$$

Si se trabaja en dos dimensiones, la densidad de carga será superficial y, por lo tanto, la relación (1.87) se convierte en:

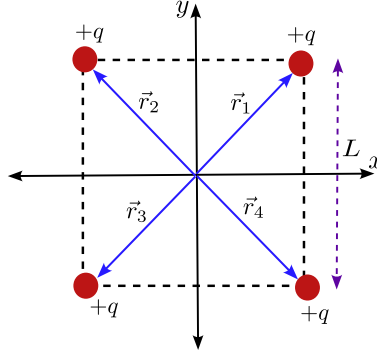


Figura 1.6: Ejemplo (1.2). Cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado.

$$\sigma(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1.88)$$

Para una dimensión, se tendría:

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(x - x_j). \quad (1.89)$$

Ejemplo 1.2. A lo largo de un cuadrado de lado L se colocan 4 cargas de igual valor: $q_i = q$, donde $i = 1, 2, 3, 4$. El origen del sistema coordenado se encuentra en el centro del cuadrado (ver figura 1.6). Para el arreglo planteado se encontrará la densidad de carga en: a) Coordenadas cartesianas, b) coordenadas cilíndricas, c) coordenadas esféricas.

Solución:

a) **Coordenadas cartesianas:** Ubicando el origen del sistema en el centro del cuadrado, las posiciones de las cuatro partículas se definen por:

$$q_1 = q \rightarrow \vec{r}_1 = L/2\hat{i} + L/2\hat{j}, \quad (1.90)$$

$$q_2 = q \rightarrow \vec{r}_2 = -L/2\hat{i} + L/2\hat{j}, \quad (1.91)$$

$$q_3 = q \rightarrow \vec{r}_3 = -L/2\hat{i} - L/2\hat{j}, \quad (1.92)$$

$$q_4 = q \rightarrow \vec{r}_4 = L/2\hat{i} - L/2\hat{j}. \quad (1.93)$$

En tres dimensiones, la componente z para cada partícula es cero, resultando en una densidad de carga de la forma:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= q \left[\sum_{j=1}^4 \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right] = q \left[\sum_{j=1}^4 \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \delta(z - z_j) \right] \\ &= q \delta(x - L/2) \delta(y - L/2) \delta(z) + q \delta(x + L/2) \delta(y - L/2) \delta(z) \\ &\quad + q \delta(x + L/2) \delta(y + L/2) \delta(z) + q \delta(x - L/2) \delta(y + L/2) \delta(z). \end{aligned} \quad (1.94)$$

En dos dimensiones, para expresar la densidad superficial σ , se elimina el factor $\delta(z)$, resultando en:

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{r}) = & q\delta(x - L/2)\delta(y - L/2) + q\delta(x + L/2)\delta(y - L/2) \\ & + q\delta(x + L/2)\delta(y + L/2) + q\delta(x - L/2)\delta(y + L/2).\end{aligned}\quad (1.95)$$

b) **Coordenadas cilíndricas:** En coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$ (donde se utiliza r en lugar de ρ para evitar confusión con la densidad volumétrica de carga), las posiciones de las partículas son:

$$q_1 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, \pi/4, 0), \quad (1.96)$$

$$q_2 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, 3\pi/4, 0), \quad (1.97)$$

$$q_3 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, 5\pi/4, 0), \quad (1.98)$$

$$q_4 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, 7\pi/4, 0). \quad (1.99)$$

La densidad de carga en este caso se expresa como:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) = & q \left[\sum_{j=1}^4 \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right] = q \left[\sum_{j=1}^4 \frac{\delta(r - r_j)}{r} \delta(\theta - \theta_j) \delta(z - z_j) \right] \\ = & q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - \pi/4) \delta(z) + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 3\pi/4) \delta(z) \\ & + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 5\pi/4) \delta(z) + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 7\pi/4) \delta(z).\end{aligned}\quad (1.100)$$

En dos dimensiones (coordenadas polares), la densidad superficial de carga σ es:

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{r}) = & q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - \pi/4) \delta(z) + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 3\pi/4) \\ & + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 5\pi/4) + q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L/\sqrt{2}} \delta(\theta - 7\pi/4).\end{aligned}\quad (1.101)$$

c) **Coordenadas esféricas:** En coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$, las posiciones de las partículas se definen como:

$$q_1 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4), \quad (1.102)$$

$$q_2 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, \pi/2, 3\pi/4), \quad (1.103)$$

$$q_3 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4), \quad (1.104)$$

$$q_4 = q \rightarrow (L/\sqrt{2}, \pi/2, 7\pi/4). \quad (1.105)$$

La densidad de carga se determina a partir de:

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= q \left[\sum_{j=1}^4 \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right] = q \left[\sum_{j=1}^4 \frac{\delta(r - r_j)}{r^2 \sin \theta_j} \delta(\theta - \theta_j) \delta(\phi - \phi_0) \right] \\
 &= 2q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L^2 \sin(\pi/4)} \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \pi/4) + 2q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L^2 \sin(3\pi/4)} \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - 3\pi/4) \\
 &\quad + 2q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L^2 \sin(5\pi/4)} \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - 5\pi/4) + 2q \frac{\delta(r - L/\sqrt{2})}{L^2 \sin(7\pi/4)} \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - 7\pi/4).
 \end{aligned}
 \tag{1.106}$$

Ejercicio 1.5. Se tiene una pirámide con base cuadrada de lado L y altura H . En los vértices de la base se ubican 4 cargas de igual valor $q_i = q$ ($i = 1, 2, 3, 4$), y en el vértice superior hay una quinta carga con valor $q_5 = -2q$. Para esta configuración, determine la densidad de carga en: a) Coordenadas cartesianas, b) coordenadas cilíndricas, c) coordenadas esféricas. Considere que el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la base de la pirámide.

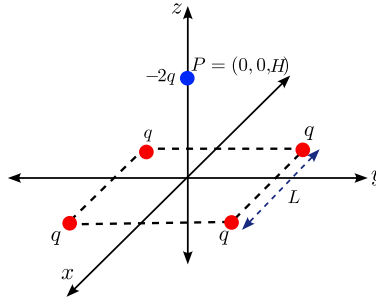


Figura 1.7: Ejercicio (1.5). Cinco cargas ubicadas en los vértices de una pirámide.

Ejercicio 1.6. Se tienen ocho partículas cargadas ubicadas en los vértices de un cubo de lado a . El origen del sistema coordenado se ubica en el centro del cubo (ver figura 1.8). Para el sistema planteado, encuentre la densidad de carga en: a) coordenadas cartesianas, b) coordenadas cilíndricas, c) coordenadas esféricas.

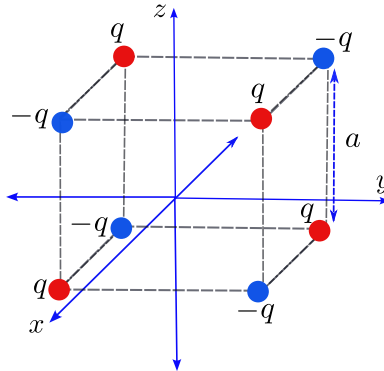


Figura 1.8: Ejercicio (1.6). Ocho cargas ubicadas en los vértices de un cubo.

Ejercicio 1.7. Encuentre la densidad de carga superficial en coordenadas cartesianas y polares, para la configuración de cargas indicada en la figura 1.9.

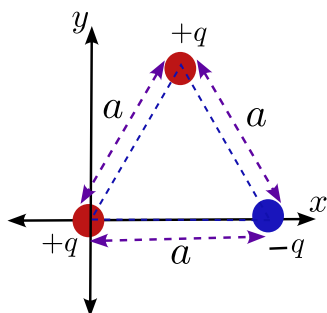


Figura 1.9: Ejercicio (1.7). Cargas ubicadas en los vértices de un triángulo.

2– Series de Fourier

Las series de Fourier representan una de las herramientas matemáticas más poderosas en el estudio de funciones periódicas. Su desarrollo, iniciado por el matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier a principios del siglo XIX, ha transformado nuestra comprensión de la periodicidad y la descomposición de funciones complejas en sumas de funciones sinusoidales más simples. Las series de Fourier tienen múltiples aplicaciones, se utilizan para descomponer señales en sus componentes de frecuencia, lo que es fundamental en el diseño de filtros y modulaciones, análisis de audio, telecomunicaciones, procesamiento de imágenes, análisis de circuitos eléctricos y en la representación de ondas electromagnéticas, mecánica y vibraciones, entre otras. La versatilidad de las series de Fourier las convierte en una herramienta invaluable en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. Concretamente, una función $f(x)$ periódica con periodo L se puede representar como una serie de Fourier de la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \right). \quad (2.1)$$

La expansión en series de Fourier para una función periodica es posible por la propiedad de ortonormalización de las funciones senos y coseno que se estudiará a continuación:

2.1. Propiedad de ortogonalidad de las funciones Seno y Coseno

La propiedad de ortogonalidad para las funciones seno y coseno, se define por las siguientes integrales:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}, \quad (2.3)$$

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) dx = 0 \quad \forall n, m. \quad (2.4)$$

La demostración de los resultados expresados en (2.2) a (2.4), se puede hacer teniendo en cuenta que todas las integrales tienen productos de funciones senoidales y cosenoidales, y es posible hacer uso de las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)), \quad (2.5)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A + B) + \cos(A - B)), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)). \quad (2.7)$$

A continuación se demostrará la condición de ortonormalidad (2.2) dejando como ejercicio al lector la demostración de las relaciones (2.3) y (2.4). Haciendo uso de (2.5), la expresión (2.2) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{L+x_0} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2(n-m)\pi x}{L}\right) \\ &\quad - \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2(n+m)\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned} \quad (2.8)$$

dado que $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n - m = l \in \mathbb{Z}$ y $n + m = k \in \mathbb{Z}$. En términos de los índices k y l , se tiene que:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{L+x_0} \left(\cos\left(\frac{2l\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) \right) dx. \quad (2.9)$$

Las integrales involucradas en la parte derecha de la expresión (2.9) están dadas por:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{2k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) \Big|_{x_0}^{L+x_0} \\ &= \frac{L}{2k\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi(L+x_0)}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x_0}{L}\right) \right) \\ &= \frac{L}{2k\pi} \left(\operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{2k\pi x_0}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x_0}{L}\right) \right) \\ &= \frac{L}{2k\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x_0}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x_0}{L}\right) \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

y de igual forma

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2l\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (2.11)$$

donde se ha tenido en cuenta la periodicidad de la función seno ($\sin(2k\pi - \alpha) = \sin \alpha$). Al reemplazar los resultados establecidos por (2.10) y (2.11) en la ecuación (2.9), se determina que para $n \neq m$, la integral en estudio se anula; es decir:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (2.12)$$

Ahora, para $n = m$, la integral en estudio toma la forma:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{L+x_0} \left(1 - \cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right) dx \quad (2.13)$$

Por el mismo procedimiento realizado para llegar al resultado expresado en (2.10) y (2.11), se puede establecer que

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (2.14)$$

por lo tanto se tiene que:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{L+x_0} dx = \frac{L}{2}. \quad (2.15)$$

Los resultados expresados en las ecuaciones (2.12) y (2.15) demuestran la propiedad de ortogonalidad establecida en la ecuación (2.2).

Ejercicio 2.1. Demostrar las relaciones (2.3) y (2.4).

2.2. Determinación de los coeficientes asociados a la expansión de Fourier

Para determinar unívocamente una expansión de Fourier para una función dada, es necesario determinar los coeficientes a_0 , a_n y b_n asociados a la función correspondiente $f(x)$. Para determinarlos se hace uso de las propiedades ortonormalización de las funciones seno y coseno, teniendo en cuenta el siguiente procedimiento:

- Para encontrar la expresión para a_0 se integra (2.1) en la variable x para un periodo L , con lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx &= \int_{x_0}^{L+x_0} a_0 dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_n \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_0 + \underbrace{b_n \int_{x_0}^{L+x_0} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_0 \right) \\
&= a_0 \int_{x_0}^{L+x_0} dx = \frac{L}{2} a_0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

entonces, se tiene que

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx. \tag{2.17}$$

- Para determinar el coeficiente a_n se multiplica la expresión (2.1) por $\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)$ y el resultado se integra sobre un periodo L en la variable x , tal que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx &= \underbrace{a_0 \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_0 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_{\frac{L}{2} \delta_{mn}} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n \int_{x_0}^{L+x_0} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_0 \tag{2.19}$$

$$= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{mn} = \frac{L}{2} a_m, \tag{2.20}$$

donde se ha tenido en cuenta las propiedades de ortonormalización de las funciones seno y coseno. Con lo anterior se tiene que:

$$a_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx. \tag{2.21}$$

- Ahora, para encontrar el coeficiente b_n se procede a multiplicar la expresión (2.1) por $\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)$ y se integra en un periodo L en la variable x , tal que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi mx}{L} \right) dx &= a_0 \underbrace{\int_{x_0}^{L+x_0} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi mx}{L} \right) dx}_0 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{x_0}^{L+x_0} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi mx}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx}_0 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{x_0}^{L+x_0} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi mx}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx}_{\frac{L}{2} \delta_{mn}} \\
&= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{mn} = \frac{L}{2} b_m.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

por lo tanto se tiene que:

$$b_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi mx}{L} \right) dx. \tag{2.23}$$

En resumen los coeficientes que definen la expansión de Fourier de la función $f(x)$, con periodo L son:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx \tag{2.24}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx \tag{2.25}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) dx \tag{2.26}$$

Ejemplo 2.1. Se tiene la siguiente función periodica:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < L/2, \\ 0 & \text{para } L/2 < x < L. \end{cases} \tag{2.27}$$

Para la función planteada se requiere encontrar los coeficientes a_0 , a_n y b_n que definen la expansión de Fourier asociada.

Solución: La función en estudio presenta un periodo L y los coeficientes a_0 , a_n y b_n , vendrán dados por:

- Para calcular el coeficiente a_0 se utiliza la relación (2.24) y se tiene que:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L} \left(\int_0^{L/2} 1 dx + \int_{L/2}^L 0 dx \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

- Teniendo en cuenta la relación (2.25), el coeficiente a_n vendrá dado por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L 0 \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \left[\frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_0^{L/2} \\ &= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2\pi n} (\sin(\pi n) - \sin(0)) \\ &= \frac{1}{\pi n} \cdot 0 = 0 \quad \text{para } n \neq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

- Teniendo en cuenta la ecuación (2.26), el coeficiente b_n vendrá dado por:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_0^{L/2} \\ &= -\frac{2}{2\pi n} (\cos(\pi n) - \cos(0)) \\ &= -\frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = \text{par}, \\ \frac{2}{\pi n} & \text{para } n = \text{impar}. \end{cases} \quad (2.32)$$

A partir de los resultados anteriores se tiene que:

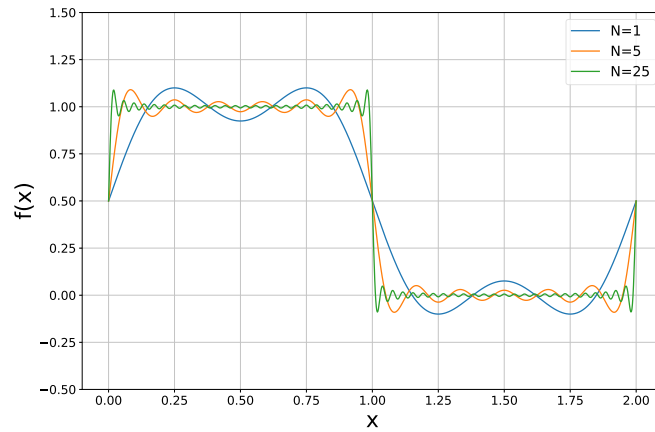


Figura 2.1: Ejemplo (2.1). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.33) con $L = 2$, para diferentes valores de N (cota sumatoria)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi (2n+1)} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi (2n+1) x}{L} \right) \right). \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

El resultado expresado en (2.33) se gráfica en la figura 2.1, para un periodo $L = 2$, acotando la sumatoria con un número finito de términos (N).

Ejemplo 2.2. Se tiene la siguiente función periódica $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{L}{3} < x < \frac{L}{6}, \\ 0, & \frac{L}{6} < x < \frac{2L}{3}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Para la función planteada se encontrará los coeficientes asociados a la expansión de Fourier.

Solución: El periodo de la función se determina a partir de:

$$\text{Periodo} = \frac{2L}{3} - \left(-\frac{L}{3} \right) = L, \quad (2.35)$$

por lo tanto el periodo es L y el coeficiente a_0 vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L/3}^{L/6} (1) dx + \frac{1}{L} \int_{L/6}^{2L/3} 0 dx = \frac{1}{L} \int_{-L/3}^{L/6} (1) dx \\
&= \frac{1}{L} [x]_{-L/3}^{L/6} = \frac{1}{L} \left(\frac{L}{6} + \frac{L}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Para el coeficiente a_n , se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/3}^{L/6} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/6}^{2L/3} 0 \times \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\
&= \frac{2}{L} \left[\frac{L}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_{-L/3}^{L/6} \\
&= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2\pi n} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi n} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Ahora, el coeficiente b_n se determina a partir de:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/3}^{L/6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/6}^{2L/3} 0 \times \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\
&= \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_{-L/3}^{L/6} \\
&= -\frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2\pi n} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \\
&= -\frac{1}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Por lo tanto, la expansión en serie de Fourier para la función en estudio, será:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi n} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right\} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\pi n} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

El resultado expresado en (2.39) se gráfica en la figura 2.2, para un periodo $L = 2$, acotando la sumatoria con un número finito de términos (N).

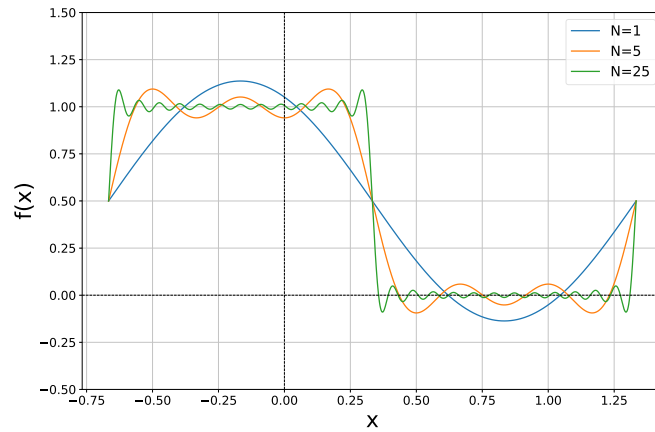


Figura 2.2: Ejemplo (2.2). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.39) con $L = 2$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).

Ejemplo 2.3. Para la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{L}{2} < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (2.40)$$

se encontrará los coeficientes a_0 , a_n y b_n asociados a su expansión de Fourier.

Solución: El periodo de la función planteada es L y por lo tanto el coeficiente a_0 vendrá dado por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx = \frac{1}{L} \left(\int_{-L/2}^0 x dx + \int_0^{L/2} 0 dx \right) \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^0 = \frac{1}{L} \left(0 - \left(\frac{L^2}{8} \right) \right) \\ &= -\frac{L}{8}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para el coeficiente a_n se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\int_{-L/2}^0 x \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx + \int_0^{L/2} 0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 x \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ahora, aplicando integración por partes en la integral de (2.42), tomando $u = x$ y $dv = \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$, se tiene que:

$$du = dx, \quad v = \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad (2.43)$$

con lo cual la integral (2.42) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \left[x \cdot \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_{-L/2}^0 - \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \cdot \left[0 - \left(-\frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2\pi n} \cdot \sin(-\pi n) \right) \right] - \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2\pi n} \left[-\frac{L}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_{-L/2}^0 \\ &= \frac{L}{2\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para el coeficiente b_n se tiene que:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 x \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nuevamente, usando integración por partes, con $u = x$ y $dv = \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$, se tiene

$$du = dx, \quad v = -\frac{L}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad (2.46)$$

con lo cual la integral (2.45) se resulta en:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \left[x \cdot \left(-\frac{L}{2\pi n} \right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]_{-L/2}^0 + \frac{2}{L} \int_{-L/2}^0 \left(\frac{L}{2\pi n} \right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ &= -\frac{L(-1)^n}{2\pi n} + \left[\frac{2}{L} \frac{L^2}{(2\pi n)^2} \sin\frac{2\pi nx}{L} \right]_{-L/2}^0 \\ &= -\frac{L(-1)^n}{2\pi n}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Los resultados anteriores se resumen en:

$$a_0 = -\frac{L}{8} \quad (2.48)$$

$$a_n = \frac{L}{2\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \quad (2.49)$$

$$b_n = -\frac{L(-1)^n}{2\pi n}. \quad (2.50)$$

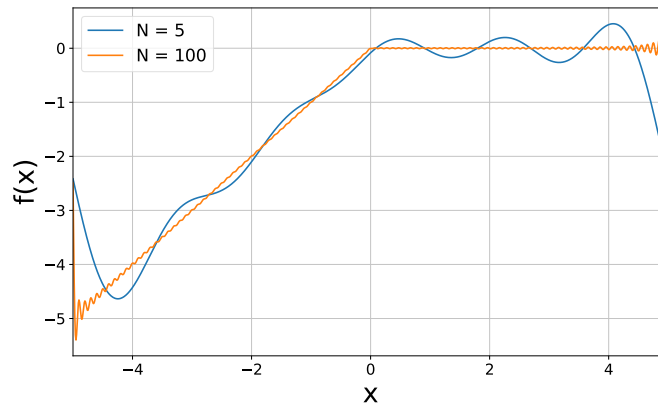


Figura 2.3: Ejemplo (2.3). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.51) con $L = 10$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).

Por lo tanto, la solución en serie de Fourier para la función en estudio, es:

$$f(x) = -\frac{L}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \left(\cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right) - \frac{L(-1)^n}{2\pi n} \left(\text{sen} \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right) \right) \quad (2.51)$$

El resultado expresado en (2.51) se gráfica en la figura 2.3, para un periodo $L = 10$, acotando la sumatoria infinita con un número finito de términos (N).

2.3. Serie de Fourier en términos de funciones exponenciales.

Una forma alternativa de la serie de Fourier se obtiene reemplazando las funciones seno y coseno por su equivalencia exponencial, es decir:

$$\cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}, \quad (2.52)$$

$$\text{sen}(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}. \quad (2.53)$$

Reemplazando las anteriores expresiones en (2.1), se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{2\pi n x}{L}} - e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}}{2i} \right) \right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left(e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + e^{-i\frac{2\pi n x}{L}} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{i\frac{2\pi n x}{L}} - e^{-i\frac{2\pi n x}{L}} \right) \right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right)}_{A_n} e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right)}_{A_n^*} e^{-i\frac{2\pi n x}{L}} \right) \tag{2.54}
\end{aligned}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + A_n^* e^{-i\frac{2\pi n x}{L}} \right), \tag{2.55}$$

separando las sumatorias se tiene que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}, \tag{2.56}$$

al realizar el reemplazo $n \rightarrow -n$ en la segunda sumatoria en (2.56), se puede establecer que:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{-n}^* e^{i\frac{2\pi n x}{L}}, \tag{2.57}$$

redefiniendo las constantes A_n , A_n^* y a_0 por:

$$C_n = \begin{cases} A_n & \text{para } n > 0, \\ A_{-n}^* & \text{para } n < 0, \\ a_0 & \text{para } n = 0, \end{cases} \tag{2.58}$$

la ecuación (2.57) toma la forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}. \tag{2.59}$$

La expresión (2.59) representa la expansión en serie de Fourier en forma exponencial. Los coeficientes C_n determinan completamente la expansión de Fourier. Para encontrar los coeficientes C_n en la expansión de $f(x)$, es conveniente extraer el término $n = 0$ de la sumatoria, tal que:

$$f(x) = C_0 + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty}} C_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}. \tag{2.60}$$

En este caso las constantes C_0 y C_n son valores complejos que definen unívocamente una función $f(x)$ dada. Se procede ahora a encontrar las expresiones para el coeficiente C_0 y los coeficientes C_n .

- Para encontrar el coeficiente C_0 se integra la expresión (2.60) en un periodo, tal que:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx &= C_0 \int_{x_0}^{L+x_0} dx + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}_{n \neq 0}} C_n \int_{x_0}^{L+x_0} e^{i \frac{2\pi n x}{L}} dx \\
 &= C_0 L + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(i \frac{2\pi n}{L}\right)} C_n \left(e^{i \frac{2\pi n x}{L}} \Big|_{x_0}^{L+x_0} \right) \\
 &= C_0 L + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(i \frac{2\pi n}{L}\right)} C_n \underbrace{\left(\underbrace{e^{i 2\pi n}}_1 e^{i \frac{2\pi n x_0}{L}} - e^{i \frac{2\pi n x_0}{L}} \right)}_0 \\
 &= C_0 L
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

por lo tanto:

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) dx, \tag{2.62}$$

- Para encontrar los coeficientes C_n ($n \neq 0$) se multiplica ambos lados de (2.60) por $e^{-i \frac{2\pi m x}{L}}$ y se integra en un periodo, tal que:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) e^{-i \frac{2\pi m x}{L}} dx &= \int_{x_0}^{L+x_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n x}{L}} \right) e^{-i \frac{2\pi m x}{L}} dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{x_0}^{L+x_0} e^{i \frac{2\pi (n-m) x}{L}} dx.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ahora, para la integral expresada en (2.63), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{L+x_0} e^{i\frac{2\pi(n-m)x}{L}} dx &= \frac{L}{2i\pi(n-m)} e^{i\frac{2\pi(n-m)x}{L}} \Big|_{x_0}^{L+x_0} \\
&= \frac{L}{2i\pi(n-m)} \left[e^{i\frac{2\pi(n-m)(L+x_0)}{L}} - e^{i\frac{2\pi(n-m)x_0}{L}} \right] \\
&= \frac{L}{2i\pi(n-m)} \left[\underbrace{e^{i2\pi(n-m)}}_1 e^{i\frac{2\pi(n-m)x_0}{L}} - e^{i\frac{2\pi(n-m)x_0}{L}} \right] \\
&= 0, \text{ si } n \neq m.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

En el caso $n = m$, se tiene

$$\int_{x_0}^{L+x_0} e^{i\frac{2\pi(n-n)x}{L}} dx = \int_{x_0}^{L+x_0} (1) dx = L. \tag{2.65}$$

Los anteriores resultados se resumen en:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} e^{i\frac{2\pi(n-m)x}{L}} dx = L\delta_{nm}. \tag{2.66}$$

Reemplazando el resultado expresado en (2.66) en la ecuación (2.63) se obtiene:

$$\int_{x_0}^{L+x_0} f(x) e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} dx = C_m L, \tag{2.67}$$

y por lo tanto:

$$C_m = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} dx. \tag{2.68}$$

Se puede observar que la expresión (2.62) corresponde al caso particular de (2.68) cuando $m = 0$, por lo tanto la expresión (2.68), determina completamente todos los coeficientes de la expansión (2.59) (solo que para obtener el valor de C_0 usando la expresión (2.68), antes de integrar se debe tomar $m = 0$).

Ejemplo 2.4. *Determinación de los coeficientes de Fourier C_m para $f(x) = |x|$ sobre el intervalo $-a < x < a$.*

Solución: *El periodo del problema planteado es igual a $2a$ y por lo tanto el coeficiente C_0 se determina a partir de:*

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |x| dx \\
&= -\frac{1}{2a} \int_{-a}^0 x dx + \frac{1}{2a} \int_0^a x dx \\
&= \frac{1}{2a} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2a} \frac{a^2}{2} \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Los coeficientes C_m se encuentran a partir de:

$$C_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |x| e^{-i \frac{2\pi m x}{2a}} dx \tag{2.70}$$

$$= \frac{1}{2a} \left(- \int_{-a}^0 x e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx + \int_0^a x e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx \right). \tag{2.71}$$

Al cambiar $x \rightarrow -x$ en la primera integral en (2.71), se puede deducir que:

$$C_m = \frac{1}{2a} \left(\int_0^a x e^{i \frac{\pi m x}{a}} dx + \int_0^a x e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx \right). \tag{2.72}$$

Las integrales presentes en (2.72) se pueden resolver por partes tomando:

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = e^{-i \frac{2\pi m x}{L}} dx \Rightarrow v = \frac{L}{-i 2\pi m} e^{-i \frac{2\pi m x}{L}}, \tag{2.73}$$

a partir de lo cual, la segunda integral en (2.72) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\int_0^a x e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx &= x \frac{a}{-i \pi m} e^{-i \frac{\pi m x}{a}} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{a}{-i \pi m} e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx \\
&= x \frac{a}{-i \pi m} e^{-i \frac{\pi m x}{a}} \Big|_0^a + \frac{a}{i \pi m} \int_0^a e^{-i \frac{\pi m x}{a}} dx.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\frac{ax}{-i \pi m} e^{-i \frac{\pi m x}{a}} \Big|_0^a &= \frac{a^2}{-i \pi m} (e^{-i \pi m}) \\
&= \frac{ia^2}{\pi m} (-1)^m,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

y adicionalmente,

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{i\pi m} \int_0^a e^{-i\frac{\pi m x}{a}} dx &= -\left(\frac{a}{i\pi m}\right)^2 e^{-i\frac{\pi m x}{a}} \Big|_0^a \\
 &= \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 (e^{-i\pi m} - 1) \\
 &= \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 ((-1)^m - 1),
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

se puede establecer que:

$$\int_0^a x e^{-i\frac{\pi m x}{a}} dx = \frac{ia^2}{\pi m} (-1)^m + \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 ((-1)^m - 1). \tag{2.77}$$

Si en (2.77) se reemplaza $m \rightarrow -m$, se obtiene la primera integral en (2.72), tal que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a x e^{i\frac{\pi m x}{a}} dx &= \frac{ia^2}{\pi(-m)} (-1)^{-m} + \left(\frac{a}{\pi(-m)}\right)^2 ((-1)^{-m} - 1) \\
 &= \frac{-ia^2}{\pi(m)} (-1)^m + \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 ((-1)^m - 1).
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Reemplazando los resultados expresados en (2.77) y (2.78) en (2.72), se determina que los coeficientes de Fourier C_m son:

$$\begin{aligned}
 C_m &= \left(-\frac{ia}{2(\pi m)} (-1)^m + \frac{a}{2(\pi m)^2} ((-1)^m - 1) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{ia}{2\pi m} (-1)^m + \frac{a}{2(\pi m)^2} ((-1)^m - 1) \right) \\
 &= \frac{a}{(\pi m)^2} ((-1)^m - 1),
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

por lo tanto:

$$C_m = \begin{cases} -\frac{2a}{(\pi m)^2} & \text{para } m = \text{impar}, \\ 0 & \text{para } m = \text{par}. \end{cases} \tag{2.80}$$

En conclusión se puede establecer que la serie de Fourier para la función en estudio, será:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a}{2} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{(\pi n)^2} e^{i\frac{\pi n x}{a}}}_{\text{impar}} \\
 &= \frac{a}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{(\pi(2n+1))^2} e^{i\frac{\pi(2n+1)x}{a}}.
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

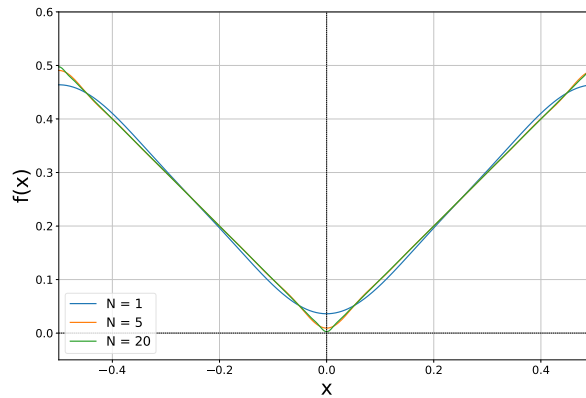


Figura 2.4: Ejemplo (2.4). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.81) con $L = 1$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).

El resultado expresado en (2.81) se gráfica en la figura 2.4, para un periodo $L = 1$, acotando la sumatoria con un número finito de términos (N).

Ejercicio 2.2. Determinar el periodo y encontrar los coeficientes a_0 , a_n y b_n asociada a la serie de Fourier correspondiente a las siguientes funciones:

a) $f(t) = 3t^2 + 9t$ para $-T/2 < t < T/2$.

b) $g(y) = \sin(3y)^2$, definida en el intervalo $c/3 < y < 2c/3$.

c)

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 < x < L/2, \\ 0 & \text{para } L/2 < x < L. \end{cases} \quad (2.82)$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 0.5 & \text{para } \ln 0.5 < x < 0, \\ e^{-x} - 0.5 & \text{para } 0 < x < -\ln 0.5. \end{cases}$$

Ejercicio 2.3. Para las funciones establecidas en el ejercicio (2.2), encontrar los coeficientes C_n asociados a la expansión de Fourier en su forma exponencial.

Ejercicio 2.4. Para las funciones establecidas en el ejercicio (2.2), graficar las funciones de Fourier respectivas, acotando la sumatoria infinita a un número N de términos finitos. Realizar las gráficas por lo menos para tres valores de N distintos.

2.4. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una generalización de la serie de Fourier, que permite el estudio de funciones no periódicas. En el caso de tener una función no periódica, dicha función se

puede entender como una función cuyo periodo tiende a infinito. Si se usa la expansión en serie de Fourier (2.1), los coeficientes C_m que definen (2.59) tenderían a cero para un periodo infinito, ya que:

$$C_m = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{x_0}^{L+x_0} f(x) e^{-i \frac{2\pi m x}{L}} dx = 0, \quad (2.83)$$

Para determinar la transformada de Fourier, se define: $\hat{f}(\nu_m) = LC_m$ y $\nu_m = \frac{m}{L}$, con lo cual a partir de la expresión (2.68) se tiene que:

$$\hat{f}(\nu_m) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i2\pi\nu_m x} dx, \quad (2.84)$$

donde se ha tomado en (2.68), $x_0 = -L/2$. Al pasar al límite de $L \rightarrow \infty$, la variable ν_m se convierte en una variable continua, entonces

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx, \quad (2.85)$$

y por lo tanto la función $f(x)$ definida en (2.59) toma la forma:

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\nu_m)}{L} e^{i2\pi\nu_m x} \right\}. \quad (2.86)$$

La expresión entre llaves en (2.86) corresponde a una suma de Rimman de paso $1/L$ que en límite $L \rightarrow \infty$ corresponde a una integral, tal que:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu. \quad (2.87)$$

La expresión (2.85) representa la transformada de Fourier de la función $f(x)$, que en términos de su transformada se relaciona a partir de la ecuación (2.87). En señales electromagnéticas, es usual que las funciones sean dependientes del tiempo, y en tal caso la transformada de Fourier se puede escribir convenientemente en términos de la frecuencia angular: $\omega = 2\pi\nu$, con lo cual las relaciones (2.87) y (2.85) se pueden escribir como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.88)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.89)$$

2.4.1. Propiedades de la Transformada de Fourier

En esta sección se denotará la transformada de Fourier de una función $f(x)$ como $(\mathcal{F}f)(\nu)$ y consideraremos las transformadas de Fourier para funciones de modulo integrables, es decir $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$. Las principales propiedades de la transformada de Fourier son:

1. La transformada de Fourier de una función $f(x)$ está acotada, dado que:

$$|(\mathcal{F}f)(\nu)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i2\pi\nu x}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \leq \infty. \quad (2.90)$$

2. Linealidad: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones y a y b son constantes ($a, b \in \mathbb{C}$), entonces:

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a(\mathcal{F}f)(\nu) + b(\mathcal{F}g)(\omega). \quad (2.91)$$

3. Si $f(x)$ se desplaza en una cantidad a , es decir: $f(x) \rightarrow f(x+a)$, entonces su Transformada de Fourier se modifica de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}[f(x+a)] = e^{i2\pi a}(\mathcal{F}f)(\nu). \quad (2.92)$$

4. Convolución: La convolución de dos funciones, corresponde a la multiplicación de sus Transformadas de Fourier, tal que:

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \{(\mathcal{F}f)(\nu)\} \{(\mathcal{F}g)(\nu)\}, \quad (2.93)$$

donde $*$ representa la operación de convolución.

Ejercicio 2.5. A partir de la definición establecida para la transformada de Fourier (2.89), demostrar las propiedades de linealidad (ecuación (2.91)) y traslación (ecuación (2.92)).

Ejemplo 2.5. Se considera en este ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{para } t \geq 0, \\ 0 & \text{para } t < 0, \end{cases} \quad (2.94)$$

donde $a > 0$, para la cual se calculará su respectiva transformada de Fourier (ver figura 2.5).

Solución: La Transformada de Fourier de una función $f(t)$ está dada por la fórmula:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad (2.95)$$

que para el caso en estudio toma la forma:

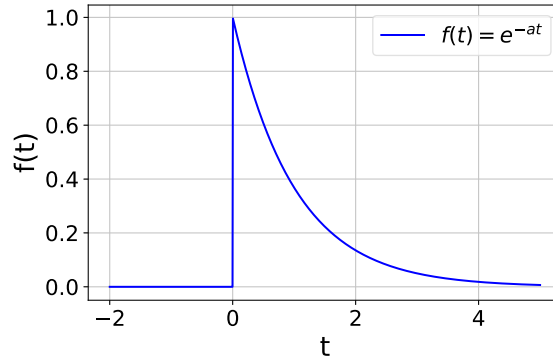


Figura 2.5: Ejemplo (2.5). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.94), con $a = 1$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt\end{aligned}\tag{2.96}$$

$$= \left. \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right|_0^{\infty}\tag{2.97}$$

$$= \frac{1}{a+i\omega}.\tag{2.98}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-at}$ es:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}, \quad a > 0.\tag{2.99}$$

En la figura 2.6 se muestra gráficamente el modulo de la solución expresada en (2.99), con $a = 1$.

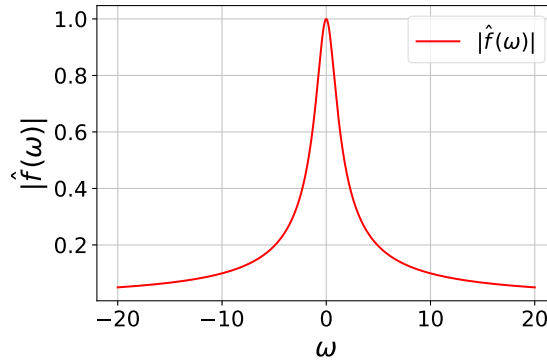


Figura 2.6: Ejemplo (2.5). Representación gráfica del modulo de la transformada de Fourier expresada en la ecuación (2.99).

Ejemplo 2.6. En este ejemplo se demostrará que la transformada de Fourier de la función $f(t) = \text{sen}(2\pi at)$, donde $a \in \mathbb{R}$, se puede escribir en términos de la distribución delta de Dirac.

Solución: Para la transformada de Fourier, por definición, se tiene que:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (2.100)$$

entonces, para $f(t) = \text{sen}(2\pi at)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}(2\pi at) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{2i\pi at} - e^{-2i\pi at}}{2i} \right) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(a-\nu)t} dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(-a-\nu)t} dt. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Al tener en cuenta la definición de la distribución delta de Dirac, establecida en (1.68), se tiene que

$$\hat{f}(\nu) = -i\pi \left(\delta(a - \nu) - \underbrace{\delta(-a - \nu)}_{\equiv \delta(a+\nu)} \right) \quad (2.102)$$

Ejemplo 2.7. En este ejemplo se considera la función gaussiana (ver figura 2.7):

$$f(t) = e^{-at^2}, \quad \text{con } a > 0, \quad (2.103)$$

para la cual se encontrará su respectiva transformada de Fourier.

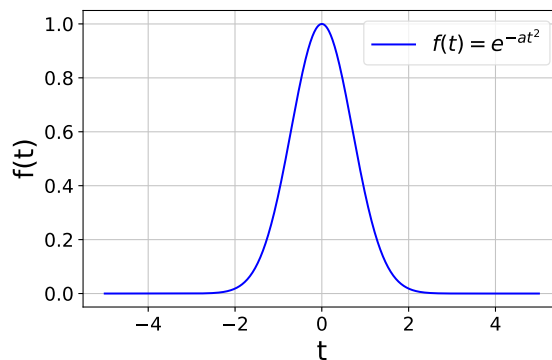


Figura 2.7: Ejemplo (2.7). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.103), con $a = 2$.

Solución: La transformada de Fourier viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - i\omega t} dt.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Para resolver la integral presente en (2.104), se escribe el exponente en la forma:

$$\begin{aligned}
-at^2 - i\omega t &= -a \left(t^2 + \frac{i\omega}{a} t \right) \\
&= -a \left(t + \frac{i\omega}{2a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4a},
\end{aligned} \tag{2.105}$$

a partir de lo cual, la integral se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + \frac{i\omega}{2a})^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + \frac{i\omega}{2a})^2} dt.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Ahora, bajo el cambio de variable $u = t + \frac{i\omega}{2a}$ (y $du \rightarrow dt$), se tiene:

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du}_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}. \tag{2.107}$$

Por tanto, la transformada de Fourier queda:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \tag{2.108}$$

En la figura 2.8 se muestra gráficamente la transformada de Fourier expresada en la ecuación (2.108).

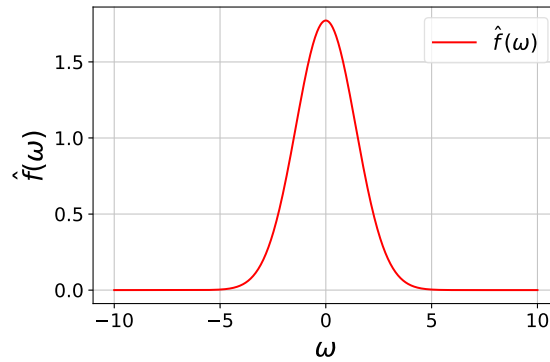


Figura 2.8: Ejemplo (2.7). Representación gráfica de la transformada de Fourier definida en (2.108).

Ejemplo 2.8. En este ejemplo se encontrará la transformada de la función rectangular centrada en cero, definida como (ver figura 2.9):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.109)$$

Solución: La transformada de Fourier de $\text{rect}(t)$ se define como:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.110)$$

Dado que $f(t) = 0$ fuera del intervalo $[-T/2, T/2]$, la integral se restringe a ese dominio, con lo cual

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt. \quad (2.111)$$

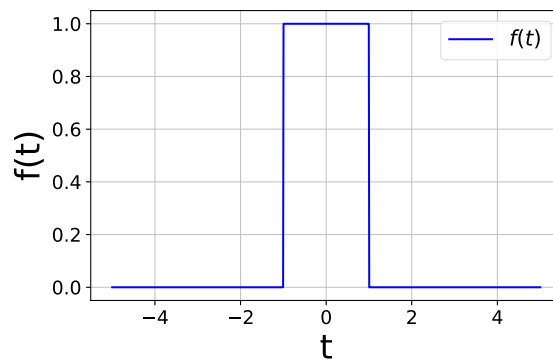


Figura 2.9: Ejemplo (2.8). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.109), con $T=2$.

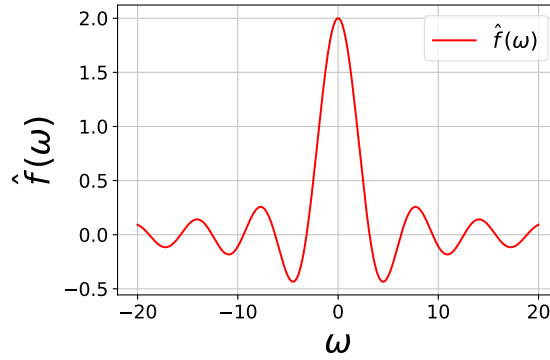


Figura 2.10: Ejemplo (2.8). Representación gráfica de la transformada de Fourier establecida en la ecuación (2.112).

Esta es una integral elemental. Al evaluarla, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}) \\
 &= \frac{1}{-i\omega} \left(-2i \operatorname{sen} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega T}{2} \right)}{\omega}.
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

La transformada de Fourier establecida en la ecuación (2.112) se muestra gráficamente en la figura 2.10.

Ejercicio 2.6. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

- a) $f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$
- b) $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}.$
- c) $f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-a|t|}.$
- d) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t},$ definida para $t > 0.$
- e) $f(t) = \frac{d}{dt} e^{-a|t|}.$
- f) $f(t) = \delta(t - a) + \delta(t + a).$

3– Funciones especiales

En el análisis matemático, hay funciones que se definen y adquieren significado a través de las integrales, proporcionando herramientas poderosas para diversas aplicaciones científicas y matemáticas. Este capítulo se centra en explorar dichas funciones, comenzando con la función gamma, una extensión continua del factorial, conocida por su amplia utilidad en resolver problemas complejos en matemáticas y ciencias aplicadas.

Además de la función gamma, se estudiará otras funciones integrales esenciales, como la función beta, o la función error, que aparece en cálculos relacionados con probabilidades y distribuciones. Se abordará sus propiedades fundamentales y sus representaciones integrales.

3.1. Función Gamma

La función gamma es una extensión del concepto de factorial a los números complejos. Mientras que el factorial se define únicamente para los enteros no negativos, la función gamma generaliza esta idea para todos los números complejos excepto los enteros negativos (donde la función gamma diverge). Introducida por el matemático suizo Leonhard Euler, la función se denota comúnmente como $\Gamma(x)$ y para números enteros positivos es equivalente a: $\Gamma(n) = (n-1)!$. Su importancia radica no solo en su presencia en el análisis matemático puro, sino también en sus aplicaciones en campos como la estadística, la física y la ingeniería, donde se utiliza para describir distribuciones de probabilidad y resolver ecuaciones diferenciales, entre otros problemas. A continuación se exploran sus propiedades fundamentales y su representación integral.

Se conoce que el factorial de un número entero viene dada por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1. \quad (3.1)$$

La definición anterior no aplica para números que no sean enteros, ni para números negativos. Como ya se mencionó la función gamma $\Gamma(x)$ representa una generalización del factorial para un valor $x \in \mathbb{R}$ y se define como:

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (3.2)$$

Una propiedad importante de la función $\Gamma(x)$ se obtiene al integrar por partes repetidamente la expresión (3.2). Para la primera integración se realiza el cambio de variable $u = t^{x-1}$ y $dv = e^{-t} dt$, a partir de lo cual la expresión (3.2) toma la forma:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= [t^{x-1}(-e^{-t})]_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt. \\ &= 0 + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt,\end{aligned}\tag{3.3}$$

por tanto,

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).\tag{3.4}$$

Ahora, reemplazando $x \rightarrow x-1$ en (3.4), se tiene que

$$\Gamma(x-1) = (x-2)\Gamma(x-2),\tag{3.5}$$

con lo cual

$$\Gamma(x) = (x-2)(x-1)\Gamma(x-2).\tag{3.6}$$

Si se aplica m veces la relación (3.4), se obtiene

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)(x-m)\Gamma(x-m),\tag{3.7}$$

y para $x = n \in \mathbb{N}$, resulta en

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\Gamma(n-m).\tag{3.8}$$

Ahora, si se toma $n = m+1$, la expresión anterior se convierte en:

$$\Gamma(m+1) = (m) \cdot (m-1) \cdots (2) \cdot (1)\Gamma(1).\tag{3.9}$$

Por otra parte, de la definición de la función gamma, se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty \\ &= -e^{-\infty} + e^0 = 1,\end{aligned}\tag{3.10}$$

a partir de lo cual, la función $\Gamma(m+1)$ toma la forma

$$\Gamma(m+1) = (1)(2)\cdots(m-1)(m) \equiv m!.\tag{3.11}$$

La última relación, establece la relación entre el factorial definido para números enteros y la función gamma; es decir:

$$m! = \Gamma(m + 1). \quad (3.12)$$

Otra propiedad importante asociada a la función gamma, se da cuando el argumento x toma valores enteros negativos, en tal situación la función gamma tiende a infinito, lo cual se puede demostrar partiendo de la relación (3.4), que se puede escribir como:

$$\Gamma(x - 1) = \frac{\Gamma(x)}{x - 1}, \quad (3.13)$$

entonces, para $x \rightarrow 1$, se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Gamma(x - 1) = \Gamma(0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Gamma(x)}{(x - 1)} \rightarrow \infty, \quad (3.14)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\Gamma(1) = 1$, por lo tanto:

$$\Gamma(0) \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

de igual forma, para un valor entero m , se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x - m) = \Gamma(-m) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x)}{x - m} \rightarrow \Gamma(0)/(-m) \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

con lo cual se ha demostrado que para todo valor entero negativo ($m < 0$), $\Gamma(m) \rightarrow \infty$.

Dado la equivalencia de la función gamma con el factorial para números enteros, la función gamma se interpreta como la generalización del factorial para cualquier número real.

Ejemplo 3.1. *A partir de la definición de la función Gamma, determinar el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Solución: *Para encontrar el valor de $\Gamma(1/2)$, se parte de la definición (3.2), con lo cual se tiene que:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt. \quad (3.17)$$

Para resolver la integral anterior, se aplica el cambio de variable $u = t^{1/2}$, con lo cual $du = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$, y al reemplazar en (3.17) se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du. \quad (3.18)$$

La integral expresada en (3.18), se resuelve teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2 &= \int_0^\infty e^{-u^2} du \times \int_0^\infty e^{-v^2} dv \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dudv \\
 &= \int_A e^{-(u^2+v^2)} dA,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde en la última igualdad, se ha establecido que la integral es equivalente a integrar sobre un área A que representa la superficie del primer cuadrante en un sistema coordenada generado por las coordenadas u y v , tal que dA corresponde al diferencial de área correspondiente. Entonces, al pasar a coordenadas polares, con la transformación $u = s \cos(\alpha)$ y $v = s \sin(\alpha)$, y con $dA = s ds d\alpha$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2 &= \int_A e^{-(u^2+v^2)} dA \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-s^2} s ds d\alpha \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-s^2} s ds = -\frac{\pi}{4} e^{-s^2} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\pi}{4},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{3.21}$$

y finalmente,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{3.22}$$

Ejemplo 3.2. En este ejemplo se demostrará la relación para el factorial asociado a números semi enteros dada por:

$$\left(\frac{n}{2} \right)! = \frac{(n)!!}{2^{n/2+1/2}} \sqrt{\pi}, \text{ para } n = \text{impar}, \tag{3.23}$$

donde $n!!$ representa el doble factorial que se define como

$$n!! = n(n-2)(n-4)\dots(n_f), \tag{3.24}$$

donde $(n_f) = 2$ si n es par y $(n_f) = 1$ si n es impar.

Solución: Como punto de partida se tomará la relación establecida para el factorial de un número real x dada por:

$$x! = \Gamma(x + 1). \quad (3.25)$$

Si x es un número semientero, x se puede expresar como $x = n/2$, para $n = \text{impar}$, y se tiene que:

$$\left(\frac{n}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \quad (3.26)$$

Por otro lado, la función gamma cumple la propiedad dada por:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad (3.27)$$

que al aplicarla m veces se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{n}{2} + 2 - m\right) \left(\frac{n}{2} + 1 - m\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 - m\right). \quad (3.28)$$

Si se toma $m = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ en la expresión anterior, resulta en

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}_{m \text{ factores} = n/2 + 1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad (3.29)$$

lo cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) &= \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n-2}{2}\right) \dots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}_{m \text{ factores} = n/2 + 1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n/2+1/2}} \{(n)(n-2)\dots(3)(1)\} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n/2+1/2}} \{n\}!! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde se ha usado la definición del doble factorial $n!! = n(n-2)\dots 1$. Ahora, teniendo en cuenta el resultado expresado para $\Gamma(1/2)$ en (3.22), la ecuación (3.18), toma la forma:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n)!!}{2^{n/2+1/2}} \sqrt{\pi}, \text{ para } n = \text{impar}. \quad (3.31)$$

En conclusión

$$\left(\frac{n}{2}\right)! = \frac{(n)!!}{2^{n/2+1/2}} \sqrt{\pi}, \text{ para } n = \text{impar}. \quad (3.32)$$

La relación (3.31) permite dar una definición del doble factorial para números enteros impares en términos de la función gamma, mediante la relación

$$(n)!! = 2^{n/2+1/2} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \quad (3.33)$$

Para enfatizar que n es impar, se reemplaza $n \rightarrow 2n - 1$ en la ecuación (3.33), con lo cual se tiene que:

$$(2n - 1)!! = 2^n \pi^{-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (3.34)$$

Ejemplo 3.3. Encontrar una expresión para el doble factorial de números pares en términos de la función gamma.

Solución: El doble factorial de un número entero par, viene definido por:

$$n!! = n(n - 2)(n - 4) \cdot (2). \quad (3.35)$$

Para enfatizar que $n = \text{par}$, se expresa n como $2n$, tal que:

$$(2n)!! = \underbrace{2n(2n - 2)(2n - 4) \dots (2)}_{n \text{ términos}}. \quad (3.36)$$

Si se factoriza un ‘2’ por cada término en (3.36), se tiene que:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2^n (n(n - 1)(n - 2) \dots (1)) \\ &= 2^n n!, \end{aligned} \quad (3.37)$$

y dado que $n! = \Gamma(n + 1)$ se obtiene

$$(2n)!! = 2^n \Gamma(n + 1). \quad (3.38)$$

Ejemplo 3.4. Demostrar que

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (3.39)$$

Solución: Por definición se tiene que

$$(2n)! = 2n \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 2) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad (3.40)$$

el anterior producto se puede reagrupar en dos conjuntos, tomando el producto de términos pares en un grupo y términos impares en otro grupo, y se tiene que

$$(2n)! = \{2n \cdot (2n - 2) \cdot (2n - 4) \cdots 4 \cdot 2\} \{(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1\}, \quad (3.41)$$

y tomando la definición del doble factorial, se tiene que:

$$(2n)! = (2n)!! (2n-1)!!, \quad (3.42)$$

ahora reemplazando la relación para $(2n)!!$ encontrada en (3.37) en la ecuación (3.42) se obtiene el resultado dado por:

$$(2n)! = 2^n n! (2n-1)!! \rightarrow (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (3.43)$$

Ejemplo 3.5. Demostrar que:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)} (-1)^n x^n, \quad (3.44)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: A partir de las propiedades de la función gamma $\Gamma(\alpha)$, se establece que:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+n) &= (\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1) \\ &= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\Gamma(\alpha+n-2) \\ &= \underbrace{(\alpha+n-1) \cdot (\alpha+n-2) \cdots (\alpha+1) \cdot (\alpha)}_{n \text{ términos}} \Gamma(\alpha), \end{aligned} \quad (3.45)$$

y al reemplazar $\alpha \rightarrow -\alpha$, se obtiene

$$\Gamma(n-\alpha) = (-\alpha+n-1) \cdot (-\alpha+n-2) \cdots (-\alpha+1) \cdot (-\alpha)\Gamma(-\alpha). \quad (3.46)$$

Al factorizar un signo menos en cada término del producto anterior, se tiene que

$$\Gamma(n-\alpha) = (-1)^n (\alpha-n+1) \cdot (\alpha-n+2) \cdots (\alpha-1) \cdot (\alpha)\Gamma(-\alpha), \quad (3.47)$$

por lo tanto

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} (-1)^n = (\alpha)(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+2) \cdot (\alpha-n+1). \quad (3.48)$$

Por otro lado la expansión de Newton de la función $(1+x)^k$ con k entero, viene dada por

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} x^n. \quad (3.49)$$

La relación (3.49) se puede generalizar para $k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ usando la equivalencia del factorial con la función Γ , de tal manera que:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!(n)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} x^n, \end{aligned} \quad (3.50)$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1) \cdot \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{\Gamma(n+1)} x^n.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Al reemplazar (3.48) en (3.51), se tiene que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)} (-1)^n x^n, \quad (3.52)$$

con lo cual se llega al resultado buscado.

3.2. Función Beta

La función beta $B(x, y)$ en términos de la función gamma se define como:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (3.53)$$

Una representación integral de la función beta es conveniente en muchos análisis matemáticos, y para lograrlo se puede proceder utilizando la definición integral de la función gamma. El producto $\Gamma(x)\Gamma(y)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} ds \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} dt ds.\end{aligned}\quad (3.54)$$

La relación (3.54) se puede reescribir realizando un cambio de variable dado por: $u = t + s$ y se expresa la integral (3.54) en términos de u y t . Con este cambio de variable se debe establecer los nuevos límites de integración; dado que los límites inferiores de s y t son 0, el límite inferior de la integral en u también será 0. De manera similar, el límite superior de u será infinito. Sin embargo, dado que s y t son positivos y su suma es u , el límite superior de t no puede exceder el valor dado de u , por lo tanto,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du \int_0^u dt t^{x-1} (u-t)^{y-1} e^{-u}. \quad (3.55)$$

Ahora se considera un cambio de variable adicional definiendo $t = uw$, con lo cual la integral (3.55) se puede escribir en función de las variables u , w . Como en la integración respecto a t , se considera a u como constante, se tiene $dt = u dw$, y los límites de integración para w son 0 y 1 (si $t = u \rightarrow w = 1$ y si $t = 0 \rightarrow w = 0$). Con lo anterior se tiene que:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left\{ \int_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u} du \right\} \left\{ \int_0^1 dw w^{x-1} (1-w)^{y-1} \right\}. \quad (3.56)$$

La primera integral en la expresión anterior, corresponde a la función $\Gamma(x+y)$, es decir

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) \left\{ \int_0^1 dw w^{x-1} (1-w)^{y-1} \right\}. \quad (3.57)$$

Al reemplazar el resultado dado en (3.57) en la definición de la función Beta (ecuación (3.53)), se puede establecer que:

$$B(x, y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dw w^{x-1} (1-w)^{y-1}, \quad (3.58)$$

que corresponde a la representación integral de la función Beta. Otra forma que puede tomar la función Beta, se obtiene sustituyendo $w = \sin^2 \theta$ en (3.58). Para la sustitución planteada se tiene

$$dw = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad 1-w = \cos^2 \theta, \quad (3.59)$$

y para los límites de integración se establece:

$$\text{para } w = 1, \quad \theta = \pi/2, \quad (3.60)$$

$$\text{para } w = 0, \quad \theta = 0, \quad (3.61)$$

permitiendo expresar la función beta en la forma

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta. \quad (3.62)$$

Ejemplo 3.6. En este ejemplo se encontrará una expresión para la integral:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt, \quad (3.63)$$

en términos de la función Beta.

Solución: Para realizar la integral I_n , se escribe el integrando tomando $n = m-1/2$ y usando $\cos^0 t = 1$, con lo cual

$$I_{2m-1} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{(2m-1)} (\cos t)^0 dt \quad (3.64)$$

Al comparar la integral I_{2m-1} con la expresión (3.62) se puede establecer que: $I_{2m-1} = 2B(x, y)$, donde $2x - 1 = 2m - 1$ y $2y - 1 = 0$, con lo cual $x = m = n + 1/2$ y $y = 1/2$, por lo tanto:

$$I_n = \frac{B(n + 1/2, 1/2)}{2} = \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n + 1)}. \quad (3.65)$$

Ejercicio 3.1. Resolver la integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \quad (3.66)$$

3.3. La Función de Error

La función error, utilizada extensamente en estadística, se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (3.67)$$

y tiene la propiedad de que $\operatorname{erf}(x \rightarrow \infty) = 1$ (ecuación (3.21)). La función de error $\operatorname{erf}(x)$ da el área bajo la curva definida por la función de distribución de probabilidad normal entre $t = -x$ y $t = x$. Cerca de $x = 0$, la función error puede aproximarse por la serie de Maclaurin:

$$\operatorname{erf}(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right). \quad (3.68)$$

En forma explícita:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (3.69)$$

Ejercicio 3.2. Demostrar la relación (3.68).

3.3.1. Conexión con la distribución normal

La distribución normal para una variable t , tiene como densidad la función:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.70)$$

donde σ se conoce como la desviación estándar de la función y u representa la media. σ^2 se conoce como la varianza. La *distribución normal estándar* es un caso particular de la distribución normal, para la cual $u = 0$ y $\sigma = 1$, y por tanto:

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.71)$$

Para esta distribución, la probabilidad de obtener un valor menor a un valor x , viene dada por la integral:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (3.72)$$

expresión que se puede escribir en términos de la función error a partir de la relación:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (3.73)$$

Ejercicio 3.3. Demostrar la relación (3.73).

La expresión (3.73) también se conoce como *función de distribución acumulada*.

Ejemplo 3.7. En este ejemplo se encontrará la probabilidad de que una variable normal estándar esté a la izquierda de $z = 1.2$:

$$P(Z \leq 1.2) = \Phi(1.2) \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1.2}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(0.8485)] \quad (3.76)$$

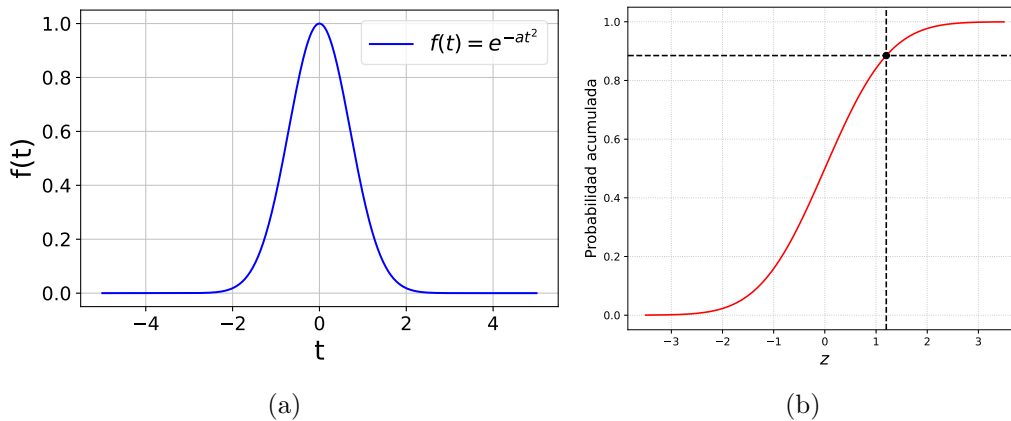


Figura 3.1: Ejemplo (3.7). a) Distribución normal, b) distribución acumulada.

En la actualidad, muchos programas matemáticos o paquetes de programación calculan directamente la función error. Para $z = 0.8485$ se tiene que: $\text{erf}(0.8485) \approx 0.7707$, por lo que:

$$P(Z \leq 1.2) \approx \frac{1}{2} [1 + 0.7707] \quad (3.77)$$

$$\approx 0.88535 \quad (3.78)$$

Por lo tanto, la probabilidad es aproximadamente 88.5 %. En la figura 3.1 se muestra gráficamente la distribución normal estándar y la función de distribución acumulada para el caso planteado y problema en estudio.

3.4. Funciones elípticas

Antes de definir la forma funcional de las funciones elípticas, se realizará un cálculo donde aparecen una de las denominadas funciones elípticas, que consiste en el desarrollo matemático necesario para encontrar la longitud entre dos puntos a lo largo de una trayectoria elíptica.

La longitud entre dos puntos separados infinitesimalmente a lo largo de una curva definida en tres dimensiones en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (3.79)$$

Si, la curva en consideración se define paramétricamente por: $x = f(s)$, $y = g(s)$ y $z = h(s)$, se tiene que la longitud de arco entre dos puntos s_1 y s_2 será:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{df(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dg(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dh(s)}{ds}\right)^2} ds. \quad (3.80)$$

La integral (3.80) no siempre tiene solución analítica, aún dicha situación se presenta para curvas que se podrían considerar triviales como lo es el caso de la longitud de una elipse, para la cual no es posible por ningún método de integración obtener una solución analítica. Para el caso de una elipse con semieje menor en el eje x con valor a y semieje mayor en el eje y con valor b , las funciones paramétricas se pueden escribir como:

$$x = a \cos(\theta), \quad y = b \sin(\theta), \quad z = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.81)$$

donde el parámetro θ resulta equivalente al ángulo para la posición definido en coordenadas polares (o cilíndricas en tres dimensiones). A partir de las funciones paramétricas, la longitud de arco para la elipse, vendrá dada por:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta \quad (3.82)$$

ahora, ya que $b > a$ (ver ejemplo (3.9) para el caso $a > b$), se tiene que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2(1 - \sin^2(\theta))} d\theta \\ &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{(b^2 - a^2)}{b^2} \sin^2(\theta)} d\theta \\ &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta, \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde se ha definido $k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} > 0$. La anterior integral no se puede resolver analíticamente por ningún método de integración. La aparición de integrales del tipo descrito anteriormente en muchas aplicaciones matemáticas y físicas, entre otras, motivó su estudio particular y su propia definición; la integral elíptica de primera clase se define como:

$$F(\phi, k) \equiv \int_0^\phi \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}. \quad (3.84)$$

La integral elíptica $F(\phi, k)$ requiere dos parámetros, uno que aparece en el integrando ($k^2 > 0$) y el otro que aparece como límite superior en la integral (ϕ). La integral elíptica de segunda especie y la cual se relaciona directamente con la longitud del arco de curva de una elipse se define como:

$$E(\phi, k) \equiv \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds. \quad (3.85)$$

Al comparar la definición (3.85) con la longitud de arco definida para una elipse en (3.83), se tiene que:

$$L = bE(2\pi, k), \quad \text{donde} \quad k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}. \quad (3.86)$$

También se definen las integrales elípticas completas de primera y segunda clase como:

$$K(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}, \quad (3.87)$$

$$E(k) \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds. \quad (3.88)$$

Ejemplo 3.8. *Demostrar que*

$$\int_a^{a+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds = E(k), \quad \text{para } a = (2n - 1)\pi \text{ y } n \in \mathbb{Z}, \quad (3.89)$$

Los límites establecidos en la integral impuesta, sugieren que la función $E(k)$ no cambia si la diferencia de los límites de integración es $\pi/2$ y siendo a un múltiplo impar de π .

Solución: Para demostrar la relación (3.89), simplemente se realiza un cambio de variable definido a través de:

$$u = s - (2n - 1)\pi, \quad \rightarrow du = ds, \quad (3.90)$$

donde los límites de integración vendrán dados por

$$s_{min} = (2n - 1)\pi \rightarrow u_{min} = 0, \quad s_{max} = (2n - 1)\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow u_{max} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.91)$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} \sen s &= \sen(u + (2n - 1)\pi) = \sen(u) \cos((2n - 1)\pi) - \cos(u) \underbrace{\sen((2n - 1)\pi)}_0 \\ &= (-1)^{2n-1} \sen(u). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Por lo tanto, la expresión (3.89) toma la forma

$$\int_{(2n-1)\pi}^{(2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sen^2 s} ds \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sen^2 u} du = E(k). \quad (3.93)$$

Ejercicio 3.4. Demostrar que la expresión (3.86) se puede escribir en términos de la función elíptica de segunda especie completa; es decir

$$L = 4bE(k), \quad \text{donde} \quad k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}. \quad (3.94)$$

Ejemplo 3.9. En este ejemplo se buscará una expresión para la longitud de una elipse con semieje mayor en el eje x con valor a y semieje menor en el eje y con valor b .

Solución: En términos de un parámetro θ (ángulo polar), las ecuaciones paramétricas para las variables x y y que definen los puntos sobre la elipse, son:

$$x = a \cos(\theta), \quad y = b \sen(\theta), \quad z = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.95)$$

Se tiene que la longitud de arco se puede escribir como:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sen^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2(\theta)) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2(\theta)} ds \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\theta)} d\theta, \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} > 0$. Ahora, con el cambio de variable

$$\theta = u - 3\pi/2 \rightarrow d\theta = du, \quad y \quad \cos(\theta) = \sin u, \quad (3.97)$$

y donde los límites de integración para la variable u van desde $-3\pi/2$ a $\pi/2$, con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} L &= a \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du \\ &= a \int_{-3\pi/2}^{-\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du + a \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du \\ &\quad + a \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du + a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Los límites de integración en los dos primeros términos de la expresión anterior se pueden reescribir convenientemente para poder utilizar el resultado establecido en la ecuación (3.93), tomando $-3\pi/2 \rightarrow -\pi/2 - \pi$ y $-\pi/2 \rightarrow \pi + \pi/2$. Adicionalmente la tercera integral se puede reescribir haciendo $u \rightarrow -u$. A partir de lo anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} L &= a \int_{-\pi/2-\pi}^{-\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du + a \int_{-\pi}^{-\pi+\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du \\ &\quad + a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du + a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Teniendo en cuenta el resultado expresado en la ecuación (3.93) se determina que los cuatro términos en (3.99) son todos iguales, por lo tanto

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du = 4aE(k). \quad (3.100)$$

Ejemplo 3.10. En este ejemplo se escribirá la integral

$$I = \int_0^\phi \sqrt{1 + k^2 \sin^2 s} \, ds, \quad \text{con } k > 0, \quad (3.101)$$

en términos de la función elíptica de segunda especie $E(k, \phi)$.

Solución: La integral I se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \sqrt{1 + k^2 \sin^2 s} \, ds &= \int_0^\phi \sqrt{1 + k^2 (1 - \cos^2 s)} \, ds \\ &= \int_0^\phi \sqrt{(1 + k^2) - k^2 \cos^2 s} \, ds \\ &= \sqrt{1 + k^2} \int_0^\phi \sqrt{1 - \left(\frac{k^2}{1 + k^2} \right) \cos^2 s} \, ds, \end{aligned} \quad (3.102)$$

y definiendo $k' = \sqrt{\left(\frac{k^2}{1+k^2}\right)}$ se tiene que

$$\int_0^\phi \sqrt{1+k^2 \sin^2 s} ds = \sqrt{(1+k^2)} \int_0^\phi \sqrt{1-k'^2 \cos^2 s} ds. \quad (3.103)$$

Ahora, realizando el cambio de variable $s \rightarrow u + \pi/2$, se tiene que

$$ds = du, \quad \cos(s) = \cos(u + \pi/2) = -\sin u, \quad (3.104)$$

Los límites de integración para la nueva variable, son:

$$\text{Para } s_{max} = \phi, u_{max} = \phi - \pi/2, \quad (3.105)$$

$$\text{Para } s_{min} = 0, u_{max} = -\pi/2, \quad (3.106)$$

con lo cual la integral (3.103) toma la forma

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \sqrt{1+k^2 \sin^2 s} ds &= \sqrt{(1+k^2)} \int_{-\pi/2}^{\phi-\pi/2} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 u} du \\ &= \sqrt{(1+k^2)} \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-k'^2 \sin^2 u} du \\ &\quad + \sqrt{(1+k^2)} \int_0^{\phi-\pi/2} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 u} du. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Ahora, tomando $u \rightarrow -u$ en la primera integral de la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \sqrt{1+k^2 \sin^2 s} ds &= \sqrt{(1+k^2)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 u} du \\ &\quad + \sqrt{(1+k^2)} \int_0^{\phi-\pi/2} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 u} du. \end{aligned} \quad (3.108)$$

y finalmente se tiene que

$$\int_0^\phi \sqrt{1+k^2 \sin^2 s} ds = \sqrt{(1+k^2)} \{E(k) + E(\phi - \pi/2, k)\} \quad (3.109)$$

Ejemplo 3.11. En este ejemplo, se demostrará que la función elíptica de segunda especie, puede escribirse como:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2 (2n-1)} k^{2n} \right\} \quad (3.110)$$

Solución: El integrando en la expresión (3.110), se puede expandir en una serie de Taylor, para lo cual se usa la relación (3.52), haciendo $x \rightarrow -k^2 \sin^2 t$ y $\alpha \rightarrow 1/2$, con lo cual se puede establecer que:

$$\begin{aligned}
(1 + (-k^2 \operatorname{sen} t^2))^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n+1)} (-1)^n (-k^2 \operatorname{sen} t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n+1)} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} t,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

entonces,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n+1)} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} t dt. \tag{3.112}$$

Ahora, tomando el resultado dado por (3.65), se tiene que

$$E(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n+1)} k^{2n}, \tag{3.113}$$

lo cual al sacar explícitamente el término $n = 0$ se puede escribir como

$$E(k) = \frac{\Gamma(1/2)^2}{2\Gamma(1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n+1)} k^{2n}. \tag{3.114}$$

Por otro lado, de las propiedades de la función Γ se tiene que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(2n-1)}, \tag{3.115}$$

$$\Gamma(1/2) = -\frac{1}{2}\Gamma(-1/2) \Rightarrow \Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2), \tag{3.116}$$

$$\Gamma(n+1) = n, \quad \Gamma(1) = 0! = 1. \tag{3.117}$$

Reemplazando las anteriores relaciones para la función Γ en (3.114) se tiene que

$$E(k) = \frac{\Gamma(1/2)^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)^2}{(n!)^2(2n-1)} k^{2n}, \tag{3.118}$$

Adicionalmente, de los resultados expresados (3.34) y (3.30) se tiene que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n \pi^{-1/2}} \quad (n > 0), \text{ y} \tag{3.119}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \tag{3.120}$$

por lo tanto

$$E(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{(2^n n!)^2 (2n-1)} k^{2n}, \tag{3.121}$$

y al tener en cuenta que $(2n)!! = 2^n n!$ (ecuación (3.37)), finalmente se obtiene:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2 (2n-1)} k^{2n} \right\} \quad (3.122)$$

Ejemplo 3.12. En este ejemplo se considera un péndulo simple de masa m y longitud l que se desplaza un ángulo θ_{max} medido con respecto al eje vertical desde su posición de equilibrio y se deja oscilar, como se muestra en la figura 3.2. Para el péndulo en estudio se demostrará que el periodo se determina mediante una integral elíptica (sin asumir valores pequeños de θ_{max}).

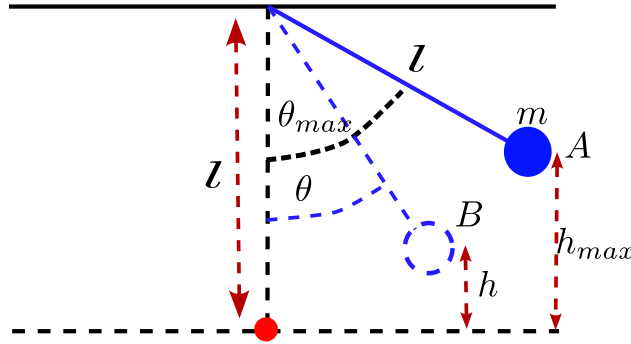


Figura 3.2: Ejemplo (3.12). Péndulo simple

Solución: Para cumplir el objetivo propuesto se inicia tomando dos puntos de referencia: El punto A que define la posición de máxima altura y el punto B; un punto cualquiera de la trayectoria definido con un ángulo θ respecto a la vertical (ver figura 3.2), entonces la energía mecánica en los puntos en mención vendrá dada por

$$E_A = mgh_{max}, \quad (3.123)$$

$$E_B = mgh + \frac{mv^2}{2}, \quad (3.124)$$

donde $h_{max} = l(1 - \cos\theta_{max})$, $h = l(1 - \cos\theta)$ y $v = lw = l\frac{d\theta}{dt}$. Al reemplazar las magnitudes anteriores y tener en cuenta la conservación de la energía mecánica se tiene que:

$$mgl(1 - \cos\theta_{max}) = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{m}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad (3.125)$$

lo que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g\cos\theta &= -g\cos\theta_{max}, \\ \rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_{max})}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Ahora, haciendo uso de propiedades trigonométricas y concretamente teniendo en cuenta que: $\cos \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{4g}{l}} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{4g}{l}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^{-2} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

En este punto se aplicará un cambio de variable dado por

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen} s. \quad (3.128)$$

Al tomar el diferencial sobre la ecuación (3.128) se tiene que

$$d \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = d \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen} s \right) \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{d\theta}{2} &= \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \cos s ds, \end{aligned} \quad (3.130)$$

a partir de lo cual se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \frac{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \cos s} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 s}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^{-2} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ahora, al multiplicar lado a lado las ecuaciones (3.131) y (3.127), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} &= \left\{ \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^{-2} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}} \right\} \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{4g}{l}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^{-2} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \operatorname{sen}^2 s}.\end{aligned}\quad (3.133)$$

Ahora, si se considera que el péndulo al tiempo cero se encontraba en la posición angular $\theta = 0$, y pasado un tiempo $t = T/4$ (T =periodo) asciende a la posición θ_{max} , entonces para la variable $s = \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta_m/2)} \right]$, se tiene que

$$\text{Al tiempo } t = 0, \quad s = \operatorname{sen}^{-1} [0] = 0, \quad (3.134)$$

$$\text{Al tiempo } t = T/4, \quad s = \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_{max}/2)}{\operatorname{sen}(\theta_{max}/2)} \right] = \pi/2. \quad (3.135)$$

A partir de lo anterior, al integrar la ecuación (3.133) entre $t = 0$ y $t = T/4$, se tiene que

$$\int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right) \operatorname{sen}^2 s}}, \quad (3.136)$$

por tanto el periodo del péndulo vendrá dado por

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_m}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_m}{2} \right) \right) \quad (3.137)$$

Ejemplo 3.13. En este ejemplo, se pretende calcular el potencial eléctrico debido a un anillo uniformemente cargado de radio R , en cualquier punto sobre el plano xy . El plano del anillo se encuentra sobre el plano xy y centrado en el origen de coordenadas.

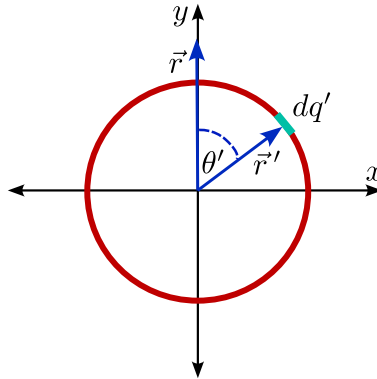


Figura 3.3: Ejemplo (3.13). Potencial asociado a un anillo cargado de radio R .

Solución: En la figura (3.3) se indica el anillo propuesto, donde se especifica gráficamente la posición $\vec{r}$ donde se desea evaluar el potencial y el vector $\vec{r}'$ asociado a una carga dq' sobre el anillo. De tal manera que el potencial eléctrico $d\phi(\vec{r})$ que genera la carga dq' en la posición $\vec{r}$ vendrá dado por:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.138)$$

al integrar sobre la carga total q del anillo se tiene que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.139)$$

Al considerar que la carga está distribuida uniformemente sobre el anillo, el elemento de carga dq puede ser escrito en términos de una densidad lineal de carga λ , tal que

$$dq' = \lambda ds', \quad (3.140)$$

donde ds' representa la longitud de arco asociado a un ángulo $d\theta'$. Con lo anterior el potencial vendrá dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{\lambda ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.141)$$

Por otra parte se tiene que (ver figura 3.3):

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta' + R^2}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

donde θ' corresponde al ángulo entre el vector $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, además se ha tenido en cuenta que $r' = R$. Para simplificar el cálculo y sin pérdida de generalidad, se asume que el vector $\vec{r}$ se encuentra a lo largo del eje y ; es decir $\vec{r} = r\hat{j}$. Con lo anterior el ángulo θ' es equivalente al ángulo entre el vector $\vec{r}'$ y el eje y (ver figura 3.3). Con lo anterior el potencial se puede escribir como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{\lambda ds'}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta' + R^2}}. \quad (3.143)$$

Ahora, dado que para un círculo, el elemento de arco $ds' = R d\theta'$, se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta' + R^2}}. \quad (3.144)$$

Tomando $\theta' \rightarrow \theta' + \pi$, entonces:

$$\cos \theta' \rightarrow -\cos \theta', \quad (3.145)$$

además, los límites de integración se deben de ajustar, tal que:

$$-\pi \rightarrow 0, \quad y \quad \pi \rightarrow 2\pi. \quad (3.146)$$

Con lo cual el potencial toma la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 + 2rR \cos \theta' + R^2}}. \quad (3.147)$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica

$$\sin^2(\theta'/2) = \frac{1 - \cos \theta'}{2} \rightarrow \cos \theta' = 1 - 2 \sin^2(\theta'/2), \quad (3.148)$$

el potencial toma la forma:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 + 2rR(1 - 2 \sin^2(\theta'/2)) + R^2}} \\ &= \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{(r^2 + 2rR + R^2) - 4rR \sin^2(\theta'/2)}} \\ &= \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{(r+R)^2 - 4rR \sin^2(\theta'/2)}} \\ &= \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r+R)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \left(\frac{4rR}{(r+R)^2}\right) \sin^2(\theta'/2)}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Por último, realizando el reemplazo $(\theta'/2) \rightarrow \theta$, se tiene que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r+R)} \left\{ \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{4rR}{(r+R)^2}\right) \sin^2 \theta}} \right\}. \quad (3.150)$$

La integral entre llaves en la expresión anterior, corresponde a una integral elíptica de primera especie $F\left(\pi, \sqrt{\frac{4rR}{(r+R)^2}}\right)$. Por lo tanto:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r+R)^2} F\left(\pi, \sqrt{\frac{4rR}{(r+R)^2}}\right) \quad (3.151)$$

3.5. Funciones hipergeométricas

En el estudio de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, los matemáticos identificaron una forma canónica que generaliza muchas ecuaciones diferenciales de interés físico. Esta ecuación, conocida como la *ecuación hipergeométrica*, se expresa como:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \quad (3.152)$$

donde α , β y γ son constantes.

Serie hipergeométrica

Una solución en serie de esta ecuación es la función hipergeométrica, que puede escribirse en términos de la función gamma como:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^n. \quad (3.153)$$

Entre las propiedades asociadas a la función ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$, se encuentra la simetría respecto al intercambio de los parámetros α y β , es decir:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x),$$

cuya demostración es directa por intercambio directo de α por β en la ecuación (3.153). Otra propiedad se establece cuando los parámetros α o β son enteros negativos. Si por ejemplo $\beta = -m$ con $m \in \mathbb{Z} > 0$, en tal caso, la función ${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x)$ toma la forma de un polinomio de grado m (la demostración se presenta en el ejemplo (3.14)).

Debido a su carácter general, la función hipergeométrica puede utilizarse para representar muchas otras funciones especiales, como por ejemplo las funciones elípticas (ver ejemplo (3.16)), la función error, funciones de Bessel (que se estudiarán en el capítulo (6)), entre muchas otras.

Ejemplo 3.14. En este ejemplo se mostrará que la función ${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x)$ con $m \in \mathbb{Z} > 0$, corresponde a un polinomio de grado m .

Solución: Partiendo de la definición (3.153), si se toma $\beta = -m$, se tiene

$${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(n - m)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-m)} x^n, \quad (3.154)$$

que se puede escribir como

$${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x) = \sum_{n=0}^m \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\Gamma(n - m)}{\Gamma(-m)} \right) x^n \\ + \frac{1}{\Gamma(-m)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(n - m)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \right\} x^n. \quad (3.155)$$

En la segunda sumatoria de la ecuación (3.155), todos los factores reunidos en llaves son finitos (asumiendo valores de $\Gamma(\alpha)$ finitos). Sin embargo, el factor fuera de la sumatoria $1/\Gamma(-m)$ tiende a cero (ya que $\Gamma(-m) \rightarrow \infty$). Por lo tanto, la ecuación (3.155) se reduce tomando la forma:

$${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x) = \sum_{n=0}^m \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\Gamma(n - m)}{\Gamma(-m)} \right) x^n. \quad (3.156)$$

Ahora, $\Gamma(n - m) \rightarrow \infty$ para $n \leq m$ y de igual forma $\Gamma(-m) \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$\left(\frac{\Gamma(n - m)}{\Gamma(-m)} \right) \rightarrow 1, \quad \text{para } n \leq m, \quad (3.157)$$

y se tiene que:

$${}_2F_1(\alpha, -m; \gamma; x) = \sum_{n=0}^m \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} x^n, \quad (3.158)$$

lo cual corresponde a un polinomio de grado m .

Ejercicio 3.5. Demostrar que si $\alpha = -k$, $\beta = -m$, con $k, n \in \mathbb{Z} < 0$ y $|k| < |m|$, entonces la función ${}_2F_1(\alpha, -m; -k; x)$ corresponde a un polinomio de grado m .

Representación integral

A menudo, la serie infinita puede expresarse mediante una integral. Para la función hipergeométrica, al utilizar la relación entre la función gamma y la función beta, se puede obtener la siguiente representación integral (ver ejemplo (3.15)):

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 (1 - t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta - 1} (1 - tx)^{-\alpha} dt, \quad (3.159)$$

válida bajo condiciones de convergencia adecuadas para los parámetros y el dominio de x .

Ejemplo 3.15. En este ejemplo se deducirá la forma integral (3.159) para las funciones hipergeométricas a partir de la definición (3.153).

Solución: Al multiplicar y dividir la expresión (3.153) por $\Gamma(\gamma - \beta)$, la función hipergeométrica se puede escribir como:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(n + 1)} \frac{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)} x^n. \quad (3.160)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de la función Beta $B(x, y)$ en su forma integral dada por la relación (3.58), y reemplazando $\Gamma(n + 1) = n!$, la ecuación (3.160) toma la forma:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt (1 - t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta + n - 1} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{n!} x^n. \quad (3.161)$$

Intercambiando el orden de la suma y la integral, se tiene:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 dt (1 - t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta - 1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(tx)^n}{n!} \right\}. \quad (3.162)$$

La sumatoria en llaves en (3.162) corresponde a la expansión en serie de la función $(1 - tx)^{-\alpha}$ (ecuación (3.52)), y por lo tanto se tiene que:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 (1 - t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta - 1} (1 - tx)^{-\alpha} dt. \quad (3.163)$$

La expresión (3.163) es válida bajo condiciones de convergencia adecuadas en los parámetros α , β y γ , y permite relacionar la función hipergeométrica con la función beta mediante una integral definida en el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 3.16. En este ejemplo se deducirá la relación entre las funciones elípticas de segunda especie y las funciones hipergeométricas.

Solución: Como punto de partida, se tomará la relación establecida para las funciones elípticas de segunda especie, dada por la expresión (ecuación (3.113)):

$$E(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - 1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(n + 1)} \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n + 1)} k^{2n}, \quad (3.164)$$

Ahora, de las propiedades de la función Γ se tiene que: $\Gamma(1/2) = (-1/2)\Gamma(-1/2)$, por lo tanto la expresión (3.164) se puede escribir como:

$$E(k) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)^2} (k^2)^n, \quad (3.165)$$

lo cual, teniendo en cuenta la relación (3.160) para las funciones hipergeométricas, se obtiene:

$$E(k) = \frac{\pi}{4} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (3.166)$$

Ejercicio 3.6. Demostrar la relación entre las funciones elípticas completas de primera especie y las funciones hipergeométricas, dada por:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (3.167)$$

3.5.1. Funciones Hipergeométricas Confluentes

Las funciones hipergeométricas confluentes surgen como un caso límite de las funciones hipergeométricas generales. En muchos problemas de la física matemática, sólo intervienen dos parámetros, y este caso puede abordarse de manera efectiva tomando el límite $\beta \rightarrow \infty$ en la función hipergeométrica general, lo cual se realizará a continuación:

Teniendo en cuenta la ecuación diferencial hipergeométrica dada por:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \quad (3.168)$$

se aplica el cambio de variable $x = u/\beta$, tal que

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dx} \right) = \beta \frac{d}{du}, \quad (3.169)$$

y

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{d}{du} \right) = \left(\frac{d}{du} \left(\beta \frac{d}{du} \right) \right) \left(\frac{du}{dx} \right) = \beta^2 \frac{d^2}{du^2}, \quad (3.170)$$

con lo cual, la ecuación (3.168) toma la forma:

$$\frac{u}{\beta} \left(1 - \frac{u}{\beta} \right) \beta^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{u}{\beta} \right] \beta \frac{dy}{du} - \alpha\beta y = 0. \quad (3.171)$$

que se puede escribir como

$$\left(1 - \frac{u}{\beta}\right) u \frac{d^2 y}{du^2} + \left[\gamma - u + (\alpha + 1) \frac{u}{\beta}\right] \frac{dy}{du} - \alpha y = 0. \quad (3.172)$$

Ahora, si $\beta \rightarrow \infty$, entonces $\frac{u}{\beta} \rightarrow 0$ y por lo tanto, la relación (3.172) se simplifica en la forma:

$$u \frac{d^2 y}{du^2} + (\gamma - u) \frac{dy}{du} - \alpha y = 0. \quad (3.173)$$

La ecuación diferencial (3.173) se conoce como la ecuación diferencial hipergeométrica confluyente.

Solución en serie de potencias

La solución en serie de potencias de la ecuación anterior se denomina *función hipergeométrica confluyente*, y puede obtenerse como el límite de la función hipergeométrica ordinaria:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)} x^n. \quad (3.174)$$

Esta expansión está bien definida para todo $x \in \mathbb{C}$. El límite se justifica usando la relación:

$$\frac{\Gamma(\beta + n)}{\beta^n \Gamma(\beta)} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } \beta \rightarrow \infty. \quad (3.175)$$

Ejercicio 3.7. Demostrar la relación (3.175).

Representación integral

La función $\Phi(\alpha; \gamma; x)$ también posee una representación integral, dada por:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\gamma - \alpha - 1} t^{\alpha - 1} e^{tx} dt. \quad (3.176)$$

Un caso importante ocurre cuando $\alpha = \gamma$, para el cual se tiene que:

$$\Phi(\alpha; \alpha; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (3.177)$$

También, se puede expresar la función error en términos de la función hipergeométrica confluyente, en la forma:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \Phi\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right). \quad (3.178)$$

Ejercicio 3.8. *Demostrar las relaciones (3.176), (3.177) y (3.178)*

4– Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

En este capítulo se encontrará la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, aplicando el método de separación de variables.

4.1. Método de separación de variables

La separación de variables es un método poderoso y versátil para resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), especialmente aquellas que aparecen comúnmente en las aplicaciones físicas. Este método es particularmente útil cuando las ecuaciones presentan simetría y cuando las condiciones de contorno son apropiadas. En física, muchos fenómenos pueden modelarse mediante EDPs. Por ejemplo:

- **Ecuación del calor:** Describe cómo cambia la temperatura $T(x, t)$ en un medio con respecto al tiempo. Esto es fundamental en la transferencia de calor y puede aplicarse a problemas como la difusión de calor en una barra metálica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \nabla^2 T(\vec{r}, t). \quad (4.1)$$

- **Ecuación de onda:** Se utiliza para modelar la vibración de cuerdas, membranas y otros sistemas que pueden describirse mediante ondas. Ejemplos incluyen el estudio de las ondas en una cuerda de guitarra o las ondas sísmicas en la Tierra.

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

- **Ecuación de Laplace y Poisson:** Estas ecuaciones son esenciales en electrostática, gravitación y flujo de fluidos, y aparecen comúnmente en el cálculo de potenciales. La ecuación de Poisson, viene dada por:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (4.3)$$

En el vacío, donde $\rho(\vec{r}) = 0$, la ecuación (4.3) se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0. \quad (4.4)$$

- **Ecuación de Schrödinger:** La ecuación de Schrödinger describe fenómenos cuánticos no relativistas, y su solución corresponde a la función de probabilidad de que un estado tenga un determinado valor, y se puede escribir como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r}) \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (4.5)$$

El método de separación de variables permite reducir una ecuación en derivadas parciales, a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) más simples, al suponer que la solución puede expresarse como el producto de funciones, cada una dependiendo únicamente de una variable independiente. Este enfoque no solo simplifica el problema matemático, sino que también proporciona intuiciones físicas valiosas al descomponer un sistema complejo en componentes más sencillos.

Por ejemplo, en un primer paso aplicando separación de variables, es posible convertir la ecuación de Schrödinger en una ecuación diferencial ordinaria para la variable temporal y una ecuación en derivadas parciales para las coordenadas espaciales. Para esto se inicia separando la dependencia en r y t en factores:

$$\Psi(\vec{r}, t) \equiv \psi(\vec{r})T(t). \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.5), se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (\psi(\vec{r})T(t)) + V(r)(\psi(\vec{r})T(t)) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi(\vec{r})T(t)), \quad (4.7)$$

que se puede escribir como:

$$-T \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(r)(\psi(\vec{r})T(t)) = -i\psi(\vec{r})\hbar \frac{dT(t)}{dt}, \quad (4.8)$$

donde la derivada parcial respecto al tiempo se ha reemplazado por una derivada total, dado que la función $T(t)$ sobre la que se está actuando depende solo de la variable t . Ahora, dividiendo ambos lados de la expresión (4.8) por $\psi(\vec{r})T(t)$ se obtiene:

$$-\frac{1}{\psi(\vec{r})} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = -i \frac{1}{T(t)} \hbar \frac{dT(t)}{dt}. \quad (4.9)$$

En el resultado expresado en (4.9), el lado derecho corresponde a una función que solo depende de la variable temporal t , mientras que el lado izquierdo solo depende de las

coordenadas espaciales. Dado que dichas variables son independientes, la única manera en que (4.9) puede ser válida para todo valor de $\vec{r}$ y t es que ambos lados sean constantes, por ejemplo α , tal que:

$$-\frac{1}{\psi(\vec{r})} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = \alpha \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = \alpha \psi(\vec{r}), \quad (4.10)$$

y

$$-i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(t)}{dt} = i\alpha \hbar T(t). \quad (4.11)$$

Con lo anterior, se ha reducido la ecuación de Schrödinger dependiente de las coordenadas espaciales y el tiempo, en una ecuación diferencial en derivadas parciales en las coordenadas espaciales y una ecuación diferencial ordinaria en la variable temporal. La mayoría de los problemas de física matemática elemental tienen la misma propiedad; es decir, conllevan a una ecuación temporal en la forma dada por (4.11) y una ecuación diferencial para las coordenadas espaciales dada por (4.10) que se puede escribir como:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + f(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = 0, \quad (4.12)$$

donde se ha simplificado la notación al incluir α en la función f . Con la excepción de la ecuación de Poisson, en todos los ejemplos dados de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, el lado derecho es cero (se conocen como EDPS homogéneas). En lo que sigue de este capítulo, se buscará la solución a la ecuación (4.12) en coordenadas cartesianas, y en los próximos dos capítulos se discutirá la solución de la ecuación (4.12) en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

4.2. Separación de variables en coordenadas cartesianas

En esta sección se estudiará la solución de la ecuación (4.12) (asumiendo ciertas condiciones para la función $f(\vec{r})$):

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + f(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = 0. \quad (4.13)$$

Lo anterior, aplicando el método de separación de variables en coordenadas cartesianas. El desarrollo del método y solución de la ecuación diferencial (4.13) depende de la forma asociada a la función $f(\vec{r})$ que, en muchos casos, no se puede resolver en forma analítica; sin embargo, para muchos problemas de interés en física, la solución analítica es posible. Como un caso particular, si se asume que $f(\vec{r})$ se presenta como una suma de funciones independientes para cada variable cartesiana, tal que

$$f(\vec{r}) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z), \quad (4.14)$$

entonces (4.13) se puede escribir como:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \{f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (4.15)$$

En el método de separación de variables en coordenadas cartesianas, la solución para (4.13), se asume como un producto de tres funciones asociadas a cada una de las coordenadas; explícitamente se define que:

$$\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (4.16)$$

donde $X(x)$ corresponde a una función exclusivamente asociada a la variable x , $Y(y)$ a la variable y y $Z(z)$ a la variable z . Al reemplazar (4.16) en (4.15) y poner el laplaciano ∇^2 en coordenadas cartesianas, la ecuación (4.15) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^3 f_i(x_i) (X(x)Y(y)Z(z)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x)Y(y)Z(z)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X(x)Y(y)Z(z)) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (X(x)Y(y)Z(z)) \\ - \sum_{i=1}^3 f_i(x_i) (X(x)Y(y)Z(z)) &= Y(y)Z(z) \frac{d^2}{dx^2} (X(x)) + X(x)Z(z) \frac{d^2}{dy^2} (Y(y)) \\ &\quad + X(x)Y(y) \frac{d^2}{dz^2} (Z(z)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\sum_{i=1}^3 f_i(x_i) = \{f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)\}$. Ahora, dividiendo toda la expresión (4.17) por el producto $X(x)Y(y)Z(z)$, se obtiene:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} (X(x)) + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} (Y(y)) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} (Z(z)) + \{f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)\} = 0, \quad (4.18)$$

que se puede escribir como:

$$\left\{ \frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} (X(x)) + f_1(x) \right\} + \left\{ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} (Y(y)) + f_2(y) \right\} + \left\{ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} (Z(z)) + f_3(z) \right\} = 0. \quad (4.19)$$

Como se puede observar, los términos que se han separado por llaves en (4.19), son funciones que dependen exclusivamente de una sola coordenada. Por lo tanto, para que la igualdad sea válida para todo valor de x, y, z , es necesario que cada término sea igual a una constante, lo cual conlleva que la expresión (4.19) se reduzca a tres ecuaciones diferenciales ordinarias, dadas por:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + f_1(x) = \nu_x, \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + f_2(y) = \nu_y, \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) + f_3(z) = \nu_z, \quad (4.22)$$

donde se debe cumplir que

$$\nu_x + \nu_y + \nu_z = 0. \quad (4.23)$$

En el caso particular que $f_1(x)$, $f_2(y)$ y $f_3(z)$ sean constantes, dichos valores se pueden absorber en las constantes ν_x , ν_y y ν_z , con lo cual las expresiones anteriores se reducen a:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = \nu_x, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = \nu_y, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \nu_z, \quad (4.24)$$

donde también está presente la restricción $\nu_x + \nu_y + \nu_z = 0$. Las variables ν_i pueden tomar cualquier valor (positivo, negativo o cero), lo cual será definido al momento de imponer condiciones de frontera sobre cada problema en particular que se desee resolver; sin embargo, y sin pérdida de generalidad, se puede asumir que

$$\nu_x = -\alpha^2, \quad \nu_y = -\beta^2, \quad \nu_z = \gamma^2, \quad (4.25)$$

tal que las ecuaciones (4.24) se pueden escribir como:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \gamma^2, \quad (4.26)$$

y la restricción (4.23), se escribe como:

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (4.27)$$

Aunque las expresiones (4.25) pueden dar a entender que se está restringiendo a valores negativos de ν_x y ν_y y positivos para ν_z , en realidad dicha restricción no existe; si ν_x resultará positivo, simplemente α debería ser imaginario puro, y lo mismo para las otras variables. Teniendo en cuenta los diferentes valores que puedan tomar las constantes α, β y γ , se presentan las siguientes posibles soluciones:

- Caso 1: Si dos de las constantes del conjunto $\{\alpha, \gamma, \beta\}$ son cero, entonces debido a la restricción (4.27), la tercera variable también lo será, y las ecuaciones diferenciales asociadas a las coordenadas cartesianas, serán:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = 0, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = 0, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = 0, \quad (4.28)$$

cuyas soluciones son:

$$X(x) = A_0x + B_0, \quad Y(y) = C_0y + D_0, \quad Z(z) = E_0z + F_0. \quad (4.29)$$

Por lo tanto, para $\alpha = \beta = \gamma = 0$, la solución $\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$, será:

$$\psi_1(x, y, z) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0)(E_0z + F_0), \quad (4.30)$$

lo cual, desarrolando parantesis y renombrando constantes, se puede escribir como:

$$\psi_1(x, y, z) = G_{xyz}xyz + G_{xy}xy + G_{xz}xz + G_{yz}yz + G_x x + G_y y + G_z z + G_0, \quad (4.31)$$

donde se ha nombrado con la letra $G_{\{\}}$, todas las constantes por determinar en la solución para cada problema en particular.

- Caso 2: Para $\alpha = 0$, la restricción (4.27) conlleva $\gamma^2 = \beta^2$, con lo cual las ecuaciones (4.26), toman la forma:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = 0, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \beta^2, \quad (4.32)$$

por lo tanto, la solución $\psi(x, y, z)$ será lineal en x , armónica en la variable y e hiperbólica en la variable $Z(z)$; es decir:

$$X(x) = \{A'_0 x + B'_0\}, \quad (4.33)$$

$$Y(y) = \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sen \beta y\}, \quad (4.34)$$

$$Z(z) = \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\}. \quad (4.35)$$

La solución en este caso, será:

$$\begin{aligned} \psi_2(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) &= \{A'_0 x + B'_0\} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sen \beta y\} \\ &\times \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

- Caso 3: Para $\beta = 0$, la restricción (4.27) conlleva $\alpha^2 = \gamma^2$, con lo cual las ecuaciones (4.26), toman la forma:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\gamma^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = 0, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \gamma^2, \quad (4.37)$$

por lo tanto, la solución $Y(y)$ será lineal en y , armónica en la variable x e hiperbólica en la variable $Z(z)$; es decir:

$$Y(y) = \{C'_0 y + D'_0\}, \quad (4.38)$$

$$X(x) = \{A_\gamma \cos \gamma x + B_\gamma \sen \gamma x\}, \quad (4.39)$$

$$Z(z) = \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\}. \quad (4.40)$$

La solución en este caso, será:

$$\begin{aligned} \psi_3(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) &= \{C'_0 y + D'_0\} \{A_\gamma \cos \gamma x + B_\gamma \sen \gamma x\} \\ &\times \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

- Caso 4: Si $\gamma = 0$, la restricción (4.27), conlleva $\beta^2 = -\alpha^2$. entonces las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a las coordenadas cartesianas serán:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = \alpha^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = 0, \quad (4.42)$$

por lo cual la solución $\psi(x, y, z)$, será lineal en la coordenada Z , armónica en la coordenada x e hiperbólica en la coordenada y ; es decir:

$$X(x) = A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x, \quad (4.43)$$

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}, \quad (4.44)$$

$$Z(z) = E'_0 z + F'_0. \quad (4.45)$$

Por lo tanto, la solución para $\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ en este caso, será:

$$\psi_4(x, y, z) = \{A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\} \{E'_0 z + F'_0\} \quad (4.46)$$

- Caso 5: Para $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, se tiene que $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. En este caso se renombrará las constantes, tal que: $\alpha \rightarrow \alpha'$, $\beta \rightarrow \beta'$ y $\gamma \rightarrow \gamma'$, con lo cual las relaciones descritas en (4.26), toman la forma:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\alpha'^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -\beta'^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \gamma'^2, \quad (4.47)$$

donde $\gamma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$. Por lo tanto, la solución $\psi(x, y, z)$ será armónica en y , armónica en la variable x e hiperbólica en la variable $Z(z)$; es decir:

$$X(x) = \{A_{\alpha'} \cos \alpha' x + B_{\alpha'} \sin \alpha' x\}, \quad (4.48)$$

$$Y(y) = \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\}, \quad (4.49)$$

$$Z(z) = \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}. \quad (4.50)$$

La solución en este caso, será:

$$\begin{aligned} \psi_5(x, y, z) &= \{A_{\alpha'} \cos \alpha' x + B_{\alpha'} \sin \alpha' x\} \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \\ &\quad \times \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

con $\gamma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$.

Teniendo en cuenta todos los casos considerados anteriormente, la solución para el potencial vendrá dada por:

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y, z) + \psi_3(x, y, z) + \psi_4(x, y, z) + \psi_5(x, y, z). \quad (4.52)$$

Finalmente, para plantear la solución más general, se debe tener en cuenta todos los valores posibles que puedan tomar el conjunto de constantes $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'\}$. En muchos problemas de interés (y los que se trabajarán en este texto), las constantes en mención toman valores discretos, y por ello se introducen en la solución a través de sumatorias; en tal caso, la solución más general vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & G_{xyz}xyz + G_{xy}xy + G_{xz}xz + G_{yz}yz + G_xX + G_yY + G_zZ + G_0 \\ & + \{A'_0x + B'_0\} \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\ & + \{C'_0y + D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} \{A_\gamma \cos \gamma x + B_\gamma \sin \gamma x\} \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\ & + \{E'_0z + F'_0\} \sum_{\alpha \neq 0} \{A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\} \\ & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} \{A_{\alpha'} \cos \alpha' x + B_{\alpha'} \sin \alpha' x\} \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

El caso dos dimensional, se puede deducir a partir de (4.53). Para problemas planteados en las variables xy , el potencial ψ debe ser independiente de la coordenada z , por lo tanto en la expresión (4.53) se deben igualar a cero todas las constantes asociadas a funciones que dependan de la variable z (como $G_{xyz}, G_{xz}, G_{yz}, G_z, E_\beta, F_\beta, \dots, etc.$), con ello la solución (4.53) se reduce a:

$$\psi(x, y) = G_{xy}xy + G_x x + G_y y + G_0 + F'_0 \sum_{\alpha} \{A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\}. \quad (4.54)$$

La constante F'_0 se puede absorber en las constantes A_α y B_α y la solución toma la forma:

$$\psi(x, y) = G_{xy}xy + G_x x + G_y y + G_0 + \sum_{\alpha} \{A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\}. \quad (4.55)$$

Ejemplo 4.1. Se tiene un cascarón metálico rectangular infinito cuya sección transversal tiene lados de longitud l_1 y $2l_2$, como se muestra en la figura 4.1. Este cascarón está compuesto por cuatro placas conectadas mediante un material aislante de dimensión despreciable, que evita el flujo directo de temperatura entre las placas. Dos de las placas opuestas se mantienen a una temperatura constante $T = T_0$, mientras que las otras dos se mantienen a una temperatura de $T = 0$, como se ilustra en la figura 4.1. A partir de esta configuración, se determinará la función de temperatura en la región al interior del cascarón.

Solución: Para encontrar la función de temperatura, primero se debe definir un sistema de coordenadas y su origen correspondiente. En este caso, el plano xy será paralelo a la sección transversal del cascarón, mientras que el eje z se asociará con la dirección de extensión infinita del objeto en estudio (ver figura 4.2). Se elige el origen de tal manera que las condiciones de frontera del problema sean:

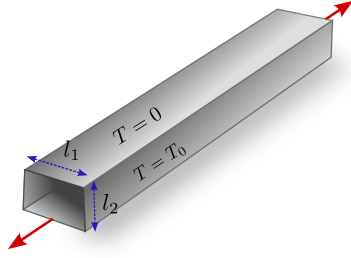


Figura 4.1: Ejemplo (4.1). Temperatura al interior de un cascarón infinito de sección transversal rectangular.

- $T(0, y) = 0$ para todo valor de y .
- $T(l_1, y) = 0$ para todo valor de y .
- $T(x, -l_2) = T_0$ para todo valor de x .
- $T(x, l_2) = T_0$ para todo valor de x .

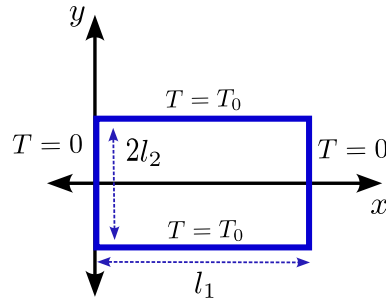


Figura 4.2: Ejemplo (4.1). Sección rectangular de un cascarón conductor en el plano xy .

Dado que el tubo rectangular se extiende desde $-\infty$ hasta ∞ sobre el eje z , entonces la función de temperatura no puede depender de dicha coordenada, por lo tanto, para el desarrollo del problema se utilizará la solución más general en dos dimensiones (4.55). Al aplicar la primera condición de frontera, $T(0, y) = 0$, en la ecuación (4.55), se tiene:

$$T(0, y) = \sum_{\alpha} (A_{\alpha}) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) + G_y y + G_0 = 0. \quad (4.56)$$

El conjunto de funciones $\{y^0, y, e^{\alpha y}, e^{-\alpha y}\}$ involucradas en la expresión (4.56) son linealmente independientes. Dado que la restricción impuesta debe ser válida para todo valor de la variable y , se concluye que:

$$A_{\alpha} = 0, \quad (4.57)$$

$$G_y = G_0 = 0, \quad (4.58)$$

de modo que la solución del problema se reduce a:

$$T(x, y) = \sum_{\alpha} (B_{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) + G_{xy} xy + G_x x. \quad (4.59)$$

Al considerar la segunda condición de frontera, se obtiene:

$$T(l_1, y) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha l_1) (C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}) + G_{xy} l_1 y + G_x l_1 = 0. \quad (4.60)$$

Considerando que esta igualdad debe cumplirse para todo valor de la variable y , y que las funciones $\{y^0(\text{cte}), y, e^{\pm \alpha y}\}$ son linealmente independientes, se debe imponer que:

$$B_{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha l_1) = 0, \quad (4.61)$$

$$G_{xy} l_1 = G_x l_1 = 0. \quad (4.62)$$

Dado que l_1 es una constante diferente de cero, se debe cumplir que $G_{xy} = G_x = 0$. Ahora, para descartar la solución trivial, se requiere que $B_{\alpha} \neq 0$, lo que conduce a la condición:

$$\operatorname{sen}(\alpha l_1) = 0 \rightarrow \alpha l_1 = n\pi \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l_1} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.63)$$

La relación anterior define los posibles valores que puede asumir la constante α . Así, en la solución general se debe incluir una suma sobre todos sus posibles valores que ingresarán en términos de n , tal que:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \left(C_n e^{\frac{n\pi}{l_1} y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} y}\right). \quad (4.64)$$

Ahora, las condiciones de frontera sobre las variable y , conllevan a:

$$T(x, y = l_2) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \left(C_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2} + D_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2}\right), \quad (4.65)$$

$$T(x, y = -l_2) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \left(C_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2} + D_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2}\right). \quad (4.66)$$

Al restar las dos ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \left\{ \left(C_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2} + D_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2}\right) - \left(C_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2} + D_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2}\right) \right\} = 0. \quad (4.67)$$

y dada la independencia de las funciones senoidales, se debe cumplir que:

$$C_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2} + D_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2} - C_n e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2} - D_n e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2} = 0, \quad (4.68)$$

lo cual se puede escribir como:

$$(C_n - D_n) \underbrace{\left(e^{\frac{n\pi}{l_1} l_2} - e^{-\frac{n\pi}{l_1} l_2} \right)}_{\neq 0 \forall n \neq 0} = 0. \quad (4.69)$$

y por tanto, se concluye que:

$$C_n = D_n. \quad (4.70)$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la solución se expresa como:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \left(e^{\frac{n\pi}{l_1} y} + e^{-\frac{n\pi}{l_1} y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2B_n C_n}_{C'_n} \sin\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1} y\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1} y\right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Las constantes C'_n serán deducidas de la condición de frontera $T_0 = T(x, l_2)$, a partir de:

$$T_0 = T(x, l_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1} l_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right). \quad (4.72)$$

Ahora, utilizando la condición de ortogonalidad para la función seno, se determina que:

$$\int_0^{l_1} \sin\left(\frac{m\pi}{l_1} x\right) T_0 dx = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1} l_2\right) \underbrace{\int_0^{l_1} dx \sin\left(\frac{m\pi}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_1} x\right)}_{\frac{l_1}{2} \delta_{nm}} \quad (4.73)$$

$$= \frac{l_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1} l_2\right) \delta_{nm} \quad (4.74)$$

$$= \frac{l_1}{2} \cosh\left(\frac{m\pi}{l_1} l_2\right) C'_m. \quad (4.75)$$

Por consiguiente, se establece que

$$C'_n = \frac{2T_0}{l_1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \int_0^{l_1} dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right), \quad (4.76)$$

con lo cual se tiene que

$$C'_n = \frac{2T_0}{l_1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \int_0^{l_1} dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right) \quad (4.77)$$

$$= \frac{2T_0}{l_1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \left[-\frac{l_1}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right) \right]_0^{l_1} \quad (4.78)$$

$$= \frac{2T_0}{l_1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \frac{l_1}{n\pi} \left[1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right] \quad (4.79)$$

$$= \frac{2T_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} [1 - (-1)^n]. \quad (4.80)$$

La solución anterior se puede expresar como:

$$C'_n = \begin{cases} \frac{4T_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.81)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Laplace para el problema en consideración es:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4T_0}{n\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}y\right) \\ &= \frac{4T_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar,}}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}y\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

La figura 4.3 muestra gráficamente la solución (4.82), truncando la sumatoria en $N = 100$, para $T_0 = 100$, $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$. La barra de colores indica los diferentes valores de la temperatura en la región rectangular en estudio. En líneas punteadas rojas, se marca curvas de igual temperatura. Se observa que en $x = 0$ y $x = l_1$ la temperatura es cero y en $y = -l_2$ y $y = l_2$ la temperatura es igual a T_0 (100).

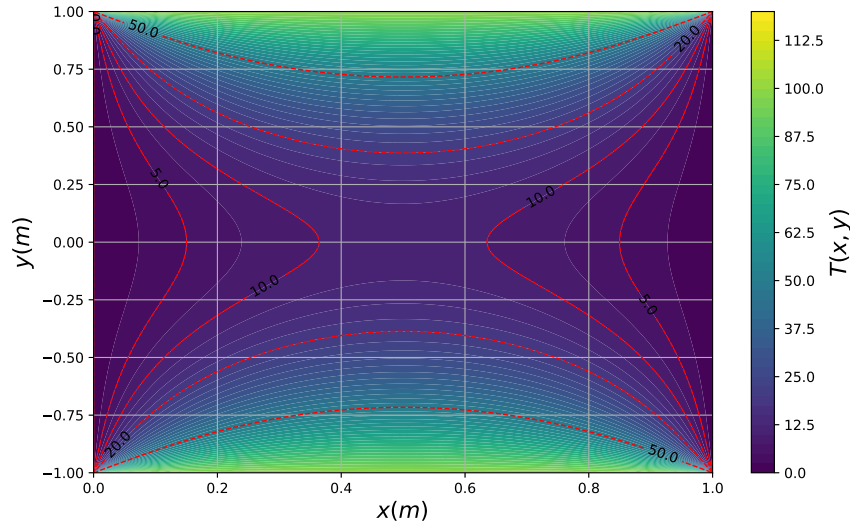


Figura 4.3: Ejemplo (4.1). Representación gráfica de la Solución (4.82) con $T_0 = 100$, $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$, truncando la sumatoria a 100 términos

Ejemplo 4.2. En este ejemplo se resolverá el problema planteado en el ejemplo (4.1), corriendo el eje y una distancia l_2 , tal que las condiciones de frontera sean:

- $T(0, y) = 0$ para todo valor de y .
- $T(l_1, y) = 0$ para todo valor de y .
- $T(x, 0) = T_0$ para todo valor de x .
- $T(x, 2l_2) = T_0$ para todo valor de x .

Solución: Una forma de solucionar este problema es realizar un proceso similar al planteado para encontrar la solución del ejemplo (4.1); sin embargo, es posible partir de la solución establecida en la ecuación (4.82) y simplemente correr el origen del eje y ; es decir, es suficiente con reemplazar $y \rightarrow y + l_2$ en (4.82), y se tiene:

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}(y + l_2)\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{l_1}l_2\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right). \quad (4.83)$$

Ejercicio 4.1. Demostrar la solución dada por (4.83) realizando el proceso descrito en el ejemplo (4.1) para las condiciones establecidas en el ejemplo (4.2).

Ejemplo 4.3. Se tiene un rectángulo metálico de lados a y b , ubicado en el plano xy como se observa en la figura 4.4. Las condiciones en la frontera para el problema planteado son:

- $\psi(x = 0, y) = 0$,
- $\psi(x = a, y) = V_0$,
- $\psi(x, y = 0) = V_1$,
- $\psi(x, y = b) = V(x)$.

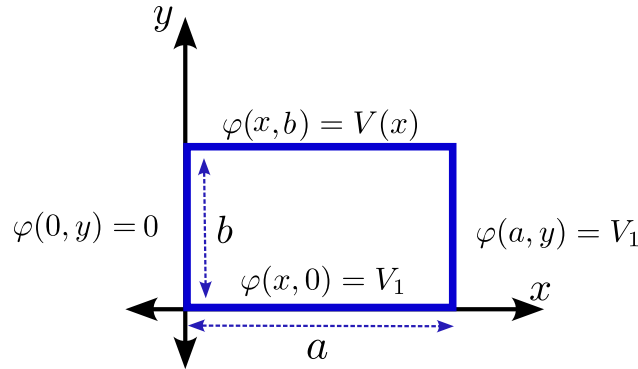


Figura 4.4: Ejemplo (4.3). Potencial eléctrico en el interior de un rectángulo.

Para la configuración planteada, en este ejemplo se encontrará el potencial eléctrico en la región limitada por el rectángulo metálico.

Solución: Dado que el problema está planteado en dos dimensiones, la solución a la ecuación de Laplace más general será:

$$\psi(x, y) = G_{xy}xy + G_x x + G_y y + G_0 + \sum_{\alpha} \{A_{\alpha} \cos \alpha x + B_{\alpha} \sin \alpha x\} \{C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}\}. \quad (4.84)$$

Al aplicar la condición $\psi(x = 0, y) = 0$, se tiene que:

$$\psi(x = 0, y) = 0 = G_y y + G_0 + \sum_{\alpha} \{A_{\alpha}\} \{C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}\}. \quad (4.85)$$

Dado que el conjunto de funciones $\{y^0, y, e^{\alpha y}, e^{-\alpha y}\}$ son linealmente independientes, la única posibilidad no trivial para que la relación (4.85) se cumpla para todo valor de y , será:

$$G_y = G_0 = A_{\alpha} = 0. \quad (4.86)$$

La opción $G_y = G_0 = C_{\alpha} = D_{\alpha} = 0$, conlleva una solución trivial y por tanto no es válida. A partir de las condiciones (4.86) la solución (4.85) se reduce a:

$$\psi(x, y) = G_{xy}xy + G_x x + \sum_{\alpha} \{\sin \alpha x\} \{C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}\}, \quad (4.87)$$

donde la constante B_α se ha absorbido en las constantes C_α y D_α . Ahora, al aplicar la condición $\psi(x = a, y) = V_0$, se tiene que:

$$\psi(x = a, y) = V_0 = G_{xy}ay + G_xa + \sum_{\alpha} \{\sin \alpha a\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\}, \quad (4.88)$$

lo cual se puede reescribir como

$$G_{xy}ay + \{G_xa - V_0\} + \sum_{\alpha} \{\sin \alpha a\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\} = 0. \quad (4.89)$$

Nuevamente, al tener en cuenta la independencia de las funciones implicadas, la relación (4.89) conlleva

$$G_{xy} = 0, \quad \{G_xa - V_0\} = 0, \quad C_\alpha \sin \alpha a = 0, \quad D_\alpha \sin \alpha a = 0. \quad (4.90)$$

Para evitar la solución trivial, se debe exigir que

$$G_{xy} = 0, \quad G_x = V_0/a, \quad \sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots. \quad (4.91)$$

Bajo las anteriores consideraciones, la solución se reduce a

$$\psi(x, y) = \frac{V_0}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} \{C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\}. \quad (4.92)$$

Ahora, las condiciones $\psi(x, y = 0) = V_1$ y $\psi(x, y = b) = V(x)$ conllevan a:

$$\psi(x, y = 0) = V_1 = \frac{V_0}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} \underbrace{\{C_n + D_n\}}_{H_n}, \quad (4.93)$$

$$\psi(x, y = b) = V(x) = \frac{V_0}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} \underbrace{\{C_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}b}\}}_{I_n}. \quad (4.94)$$

que se pueden escribir como

$$V_1 - \frac{V_0}{a}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} H_n, \quad (4.95)$$

$$V(x) - \frac{V_0}{a}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} I_n. \quad (4.96)$$

Para determinar la solución del problema bajo estudio, se deben determinar las constantes C_n y D_n , que se pueden despejar de las constantes definidas como H_n e I_n . Para poder encontrar dichas constantes se hace uso de la propiedad de ortonormalización de la función seno, por

tanto, se multiplican las expresiones (4.95) y (4.32) por $\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ y se integra en la variable x , con lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(V_1 - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \underbrace{\int_0^a \left\{ \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right\} dx}_{\frac{a\delta_{nm}}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{a\delta_{nm}}{2} \\ &= H_m \frac{a}{2}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

adicionalmente,

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(V(x) - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n \underbrace{\int_0^a \left\{ \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right\} dx}_{\frac{a\delta_{nm}}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{a\delta_{nm}}{2} \\ &= I_m \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$H_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(V_1 - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx, \quad (4.99)$$

$$I_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(V(x) - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \quad (4.100)$$

En este punto, para determinar I_m es necesario definir el valor de $V(x)$. Para llegar a una solución total del problema, se establece el caso particular $V(x) = \frac{2V_0}{a}x$, con lo cual:

$$H_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(V_1 - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx, \quad (4.101)$$

$$I_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \quad (4.102)$$

Para las constantes H_m , se tiene que:

$$H_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(V_1 - \frac{V_0}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{a} \left[\int_0^a V_1 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx - \int_0^a \frac{V_0}{a}x \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{a} \left[V_1 \left(\frac{a - a(-1)^m}{m\pi} \right) - \int_0^a \frac{V_0}{a}x \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Ahora, para realizar la integral en el segundo término en (4.104), se aplica integración por partes ($u = x$, $dv = \sin(m\pi x/a)dx$), con lo cual

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \frac{V_0}{a} x \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a}{m\pi} x \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \Big|_0^a + \frac{a}{m\pi} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a}{m\pi} (a \cos(m\pi) - 0) + \frac{a}{m\pi} \left(\frac{a}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \Big|_0^a \right) \right] \\
 &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a^2}{m\pi} (-1)^m + 0 \right] \\
 &= -\frac{V_0 a}{m\pi} (-1)^m,
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

por lo tanto,

$$H_m = \frac{2}{a} \left[V_1 \left(\frac{a - a(-1)^m}{m\pi} \right) + \frac{V_0 a}{m\pi} (-1)^m \right] \tag{4.106}$$

$$= \frac{2V_1(1 - (-1)^m)}{m\pi} + \frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m. \tag{4.107}$$

Dado que H_m depende de las constantes C_m y D_m (ecuación (4.93)), la expresión anterior toma la forma

$$C_m + D_m = \frac{2V_1(1 - (-1)^m)}{m\pi} + \frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m, \tag{4.108}$$

Para solucionar la integral asociada a las constantes I_m , se usa el resultado expresado en (4.105), tal que

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{V_0}{a} x \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \\
 &= -\frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m,
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

que en términos de C_m y D_m (ecuación (4.94)), toma la forma

$$C_m e^{\frac{m\pi}{a}b} + D_m e^{-\frac{m\pi}{a}b} = -\frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m. \tag{4.110}$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones (4.110) y (4.108), se tiene que

$$C_m \rightarrow \frac{2 \left((-1)^m (1 + e^{\frac{bm\pi}{a}}) V_0 + (1 - (-1)^m) V_1 \right)}{(1 - e^{\frac{2bm\pi}{a}}) m\pi}, \tag{4.111}$$

$$D_m \rightarrow \frac{2e^{\frac{bm\pi}{a}} \left((-1)^m (1 + e^{\frac{bm\pi}{a}}) V_0 - (-1 + (-1)^m) e^{\frac{bm\pi}{a}} V_1 \right)}{(-1 + e^{\frac{2bm\pi}{a}}) m\pi}. \tag{4.112}$$

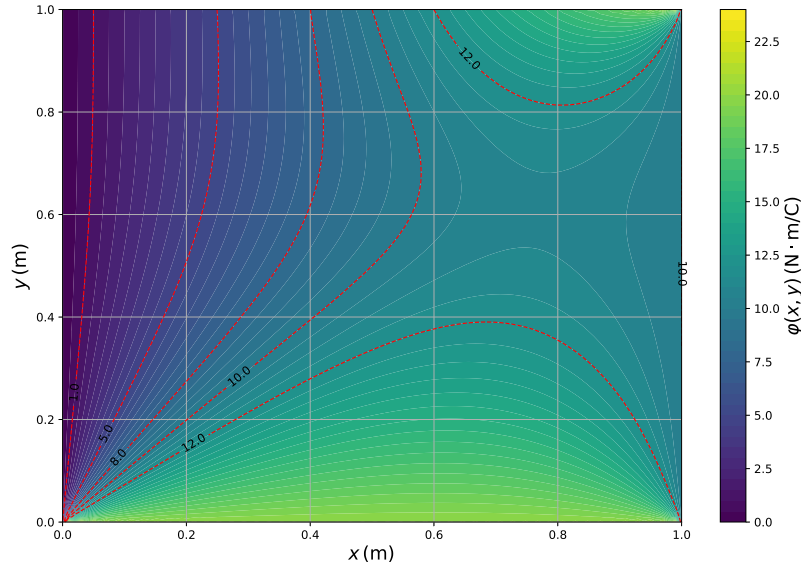


Figura 4.5: Ejemplo (4.3). Representación gráfica de la solución (4.113), con $V_1 = 20N \cdot m/C$, $V_0 = 10N \cdot m/C$ y $a = b = 1.0m$ y tomando en la sumatoria los primeros 100 datos.

Finalmente, la solución buscada vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{V_0}{a}x + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right. \\ & \times \left\{ \left(\frac{2 \left((-1)^m (1 + e^{\frac{bm\pi}{a}}) V_0 + (1 - (-1)^m) V_1 \right)}{(1 - e^{\frac{2bm\pi}{a}}) m\pi} \right) e^{\frac{m\pi}{a}y} \right. \\ & \left. + \left(\frac{2e^{\frac{bm\pi}{a}} \left((-1)^m (1 + e^{\frac{bm\pi}{a}}) V_0 - (-1 + (-1)^m) e^{\frac{bm\pi}{a}} V_1 \right)}{(-1 + e^{\frac{2bm\pi}{a}}) m\pi} \right) e^{-\frac{m\pi}{a}y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

En la figura 4.5 se esquematiza la solución establecida en (4.113), acotando la sumatoria con $M = 100$ y con valores de $V_1 = 20N \cdot m/C$, $V_0 = 10N \cdot m/C$ y $a = b = 1.0m$. La barra de colores indica los diferentes valores del potencial en la región rectangular en estudio. En líneas punteadas rojas, se marcan algunas líneas equipotenciales. Se observa que en $x = 0$ el potencial es igual a cero, en $x = a$ el potencial es V_0 , en $y = 0$ es V_1 y en $y = b$ el potencial aumenta linealmente ($2V_0x/a$).

Ejercicio 4.2. Considere la configuración planteada en el ejemplo (4.3), con condiciones de frontera definidas a través de:

- $\psi(x = 0, y) = 0$.
- $\psi(x = a, y) = V_0$.

- $\psi(x, y = 0) = V_1$.
- $\psi(x, y = b) = V(x)$.

Para la situación planteada, encuentre la solución mas general para el potencial dentro del cascaron rectangular cuando:

a) $V(x) = 5 \cos^2(2x/a)$.

b) $V(x) = \frac{V_0 x^2}{a^2}$.

Ejemplo 4.4. En este ejemplo se estudiará un problema dos dimensional asimétrico en el eje x . Se plantea un rectángulo limitado por material metálico, con las siguientes condiciones de contorno (ver figura 4.6):

- $\psi(x = -a/3, y) = 0$.
- $\psi(x = 2a/3, y) = V_0$.
- $\psi(x, y = 0) = V_0$.
- $\psi(x, y = b) = \frac{2V_0}{a}x + \frac{2V_0}{3}$.

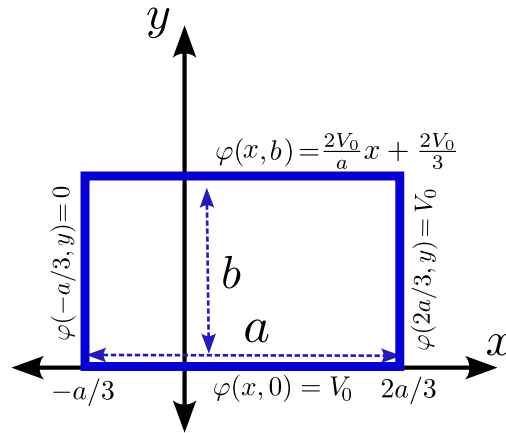


Figura 4.6: Ejemplo (4.4). Potencial eléctrico dentro de un cascarón rectangular en dos dimensiones.

Para la configuración planteada, se encontrará el potencial eléctrico en la región limitada por el rectángulo metálico.

Solución: Dado que el problema planteado está en dos dimensiones, la solución mas general vendrá dada por:

$$\psi(x, y) = G_{xy}xy + G_x x + G_y y + G_0 + \sum_{\alpha} \{A_{\alpha} \cos \alpha x + B_{\alpha} \sin \alpha x\} \{C_{\alpha} e^{\alpha y} + D_{\alpha} e^{-\alpha y}\}. \quad (4.114)$$

Al aplicar la condición $\psi(x = -a/3, y) = 0$, se tiene que:

$$0 = -\frac{a}{3}G_{xy}y - \frac{a}{3}G_x + G_yy + G_0 + \sum_{\alpha} \left\{ A_{\alpha} \cos\left(\alpha\frac{a}{3}\right) - B_{\alpha} \sin\left(\alpha\frac{a}{3}\right) \right\} \{C_{\alpha}e^{\alpha y} + D_{\alpha}e^{-\alpha y}\}. \quad (4.115)$$

Dado que el conjunto de funciones $\{y^0, y, e^{\alpha y}, e^{-\alpha y}\}$ son linealmente independientes, la única posibilidad no trivial para que la relación (4.115) se cumpla para todo valor de y , es que:

$$G_y = \frac{a}{3}G_{xy}, \quad G_0 = \frac{a}{3}G_x, \quad (4.116)$$

$$A_{\alpha} \cos\left(\alpha\frac{a}{3}\right) - B_{\alpha} \sin\left(\alpha\frac{a}{3}\right) = 0. \quad (4.117)$$

La condición (4.117), asumiendo que $\cos(\alpha\frac{a}{3}) \neq 0$ (el caso $\cos(\alpha\frac{a}{3}) = 0$ se deja como ejercicio para el lector), se puede escribir como:

$$A_{\alpha} = B_{\alpha} \frac{\sin(\alpha\frac{a}{3})}{\cos(\alpha\frac{a}{3})}. \quad (4.118)$$

Al reemplazar las condiciones (4.116) y (4.118) en la ecuación (4.114), la solución para el potencial toma la forma:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{3}{a}G_yxy + G_x x + G_yy + \frac{a}{3}G_x + \sum_{\alpha} \left\{ \sin\left(\alpha\frac{a}{3}\right) \cos \alpha x + \cos\left(\alpha\frac{a}{3}\right) \sin \alpha x \right\} \\ & \times \left\{ \underbrace{\frac{B_{\alpha}C_{\alpha}}{\cos(\alpha\frac{a}{3})}}_{C'_{\alpha}} e^{\alpha y} + \underbrace{\frac{B_{\alpha}D_{\alpha}}{\cos(\alpha\frac{a}{3})}}_{D'_{\alpha}} e^{-\alpha y} \right\}, \end{aligned} \quad (4.119)$$

que se puede escribir como

$$\psi(x, y) = \frac{3}{a}G_yxy + G_x x + G_yy + \frac{a}{3}G_x + \sum_{\alpha} \sin(\alpha(x + a/3)) \{C'_{\alpha}e^{\alpha y} + D'_{\alpha}e^{-\alpha y}\}. \quad (4.120)$$

Ahora, aplicando la condición $\psi(2a/3, y) = V_0$ se tiene que:

$$V_0 = 3G_yy + aG_x + \sum_{\alpha} \sin(\alpha a) \{C'_{\alpha}e^{\alpha y} + D'_{\alpha}e^{-\alpha y}\}. \quad (4.121)$$

Dado que el conjunto de funciones $\{y^0, y, e^{\alpha y}, e^{-\alpha y}\}$ son linealmente independientes, la única posibilidad no trivial para que la relación (4.121) se cumpla para todo valor de la variable y , se obtiene para:

$$G_x = \frac{V_0}{a}, \quad G_y = 0, \quad (4.122)$$

$$\sin \alpha a = 0. \quad (4.123)$$

La condición (4.123) conlleva:

$$\operatorname{sen}(\alpha a) = 0 \rightarrow \alpha a = n\pi \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{etc.} \quad (4.124)$$

Aplicando las condiciones anteriores a la expresión general del potencial, se tiene que:

$$\psi(x, y) = \frac{V_0}{a}x + \frac{V_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) \left\{ C'_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D'_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right\}, \quad (4.125)$$

Ahora se aplicarán las condiciones en $y = 0$ y $y = b$, tal que:

$$\psi(x, 0) = V_0 = \frac{V_0}{a}x + \frac{V_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) \underbrace{\{C'_n + D'_n\}}_{H_n}, \quad (4.126)$$

$$\psi(x, b) = \frac{2V_0}{a}x + \frac{2V_0}{3} = \frac{V_0}{a}x + \frac{V_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) \underbrace{\left\{ C'_n e^{\frac{3n\pi}{a}b} + D'_n e^{-\frac{3n\pi}{a}b} \right\}}_{I_n}, \quad (4.127)$$

que se pueden escribir convenientemente como:

$$V_0 - \frac{V_0}{a}(x + a/3) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) H_n, \quad (4.128)$$

$$\frac{V_0}{a}(x + a/3) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) I_n. \quad (4.129)$$

Ahora, si se multiplica la expresión (4.128) por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3)\right)$ y se integra en la variable x entre $-a/3 < x < 2a/3$, el lado izquierdo (LI) de (4.128) se escribe como:

$$LI = \int_{-a/3}^{2a/3} \left(V_0 - \frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx, \quad (4.130)$$

mientras que el lado derecho (LD) de (4.128) toma la forma:

$$\begin{aligned} (LD) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \underbrace{\int_{-a/3}^{2a/3} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}(x + a/3)\right) \right\} dx}_{\frac{a\delta_{nm}}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{a\delta_{nm}}{2} \\ &= H_m \frac{a}{2}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

por lo tanto,

$$H_m \frac{a}{2} = \int_{-a/3}^{2a/3} \left(V_0 - \frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}x \right) dx. \quad (4.132)$$

De forma análoga, si se multiplica la expresión (4.129) por $\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3) \right)$ y se integra en la variable x entre $-a/3 < x < 2a/3$, el lado izquierdo (LI) y derecho (LD) de (4.129), toman la forma:

$$\begin{aligned} LI &= \int_{-a/3}^{2a/3} \left(\frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}x \right) dx, \\ LD &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n \underbrace{\int_{-a/3}^{2a/3} \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \right\} dx}_{\frac{a\delta_{nm}}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{a\delta_{nm}}{2} \\ &= I_m \frac{a}{2}, \end{aligned} \quad (4.133)$$

por lo tanto,

$$I_m \frac{a}{2} = \int_{-a/3}^{2a/3} \left(\frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}x \right) dx. \quad (4.135)$$

$$(4.136)$$

En resumen:

$$H_m = \frac{2}{a} \int_{-a/3}^{2a/3} \left(V_0 - \frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3) \right) dx, \quad (4.137)$$

$$I_m = \frac{2}{a} \int_{-a/3}^{2a/3} \left(\frac{V_0}{a}(x + a/3) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3) \right) dx. \quad (4.138)$$

Realizando el cambio de variable $u = x + a/3 \rightarrow du = dx$, con los límites de integración dados por: para $x = -a/3 \rightarrow u_{\min} = 0$ y para $x = 2a/3 \rightarrow u_{\max} = a$, las expresiones para I_m y H_m toman la forma:

$$H_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(V_0 - \frac{V_0}{a}u \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}u \right) du, \quad (4.139)$$

$$I_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{V_0}{a}u \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a}u \right) du. \quad (4.140)$$

Realizando las integrales correspondientes, para H_m se tiene

$$\begin{aligned}
 H_m &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(V_0 - \frac{V_0}{a} y \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} y \right) dy \\
 &= \frac{2}{a} \left[\int_0^a V_0 \sin \left(\frac{m\pi}{a} u \right) du - \int_0^a \frac{V_0}{a} u \sin \left(\frac{m\pi}{a} u \right) du \right] \\
 &= \frac{2}{a} \left[V_0 \left(\frac{a - a(-1)^m}{m\pi} \right) - \int_0^a \frac{V_0}{a} u \sin \left(\frac{m\pi}{a} u \right) du \right] \quad (4.141)
 \end{aligned}$$

ahora, para la integral en el segundo término en (4.141) se integra por partes ($u = u$, $dv = \sin(m\pi u/a)du$), con lo cual

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \frac{V_0}{a} u \sin \left(\frac{m\pi}{a} u \right) du &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a}{m\pi} u \cos \left(\frac{m\pi}{a} u \right) \Big|_0^a + \frac{a}{m\pi} \int_0^a \cos \left(\frac{m\pi}{a} u \right) du \right] \\
 &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a}{m\pi} (a \cos(m\pi) - 0) + \frac{a}{m\pi} \left(\frac{a}{m\pi} \sin \left(\frac{m\pi}{a} u \right) \Big|_0^a \right) \right] \\
 &= \frac{V_0}{a} \left[-\frac{a^2}{m\pi} (-1)^m + 0 \right] \\
 &= -\frac{V_0 a}{m\pi} (-1)^m \quad (4.142)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 H_m &= \frac{2}{a} \left[V_0 \left(\frac{a - a(-1)^m}{m\pi} \right) + \frac{V_0 a}{m\pi} (-1)^m \right] \\
 &= \frac{2V_0(1 - (-1)^m)}{m\pi} + \frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m \\
 &= \frac{2V_0}{m\pi}, \quad (4.143)
 \end{aligned}$$

que en términos de C'_m y D'_m (ecuación (4.126)) se puede escribir como:

$$C'_m + D'_m = \frac{2V_0}{m\pi}, \quad (4.144)$$

Para solucionar la integral asociada a las constantes I_m , se usa el resultado expresado en (4.142), tal que

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{V_0}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) dx \\
 &= -\frac{2V_0}{m\pi} (-1)^m, \quad (4.145)
 \end{aligned}$$

que en términos de C'_m y D'_m (ecuación (4.126)) toma la forma:

$$C'_m e^{\frac{m\pi}{a}b} + D'_m e^{-\frac{m\pi}{a}b} = -\frac{2V_0}{m\pi}(-1)^m. \quad (4.146)$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones (4.144) y (4.146), se tiene que

$$C'_m \rightarrow \frac{2V_0 \left(1 + (-1)^m e^{\frac{bm\pi}{a}}\right)}{(1 - e^{\frac{2bm\pi}{a}})m\pi}, \quad (4.147)$$

$$D'_m \rightarrow \frac{2e^{\frac{bm\pi}{a}} V_0 \left((-1)^m + e^{\frac{bm\pi}{a}}\right)}{(-1 + e^{\frac{2bm\pi}{a}})m\pi} \quad (4.148)$$

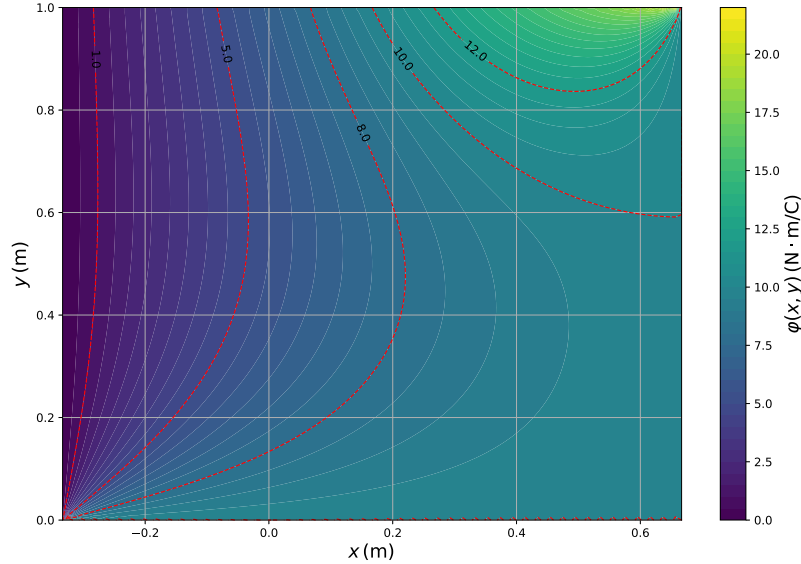


Figura 4.7: Ejemplo (4.4). Representación gráfica de la solución (4.149), con $V_0 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{C}$ y $a = b = 1.0 \text{ m}$ y tomando en la sumatoria los primeros 100 datos.

Finalmente, la solución buscada vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{V_0}{a}(x + a/3) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\frac{m\pi}{a}(x + a/3)\right) \right\} \\ & \times \left\{ \left(\frac{2V_0 \left(1 + (-1)^m e^{\frac{bm\pi}{a}}\right)}{(1 - e^{\frac{2bm\pi}{a}})m\pi} \right) e^{\frac{m\pi}{a}y} \right. \\ & \left. + \left(\frac{2e^{\frac{bm\pi}{a}} V_0 \left((-1)^m + e^{\frac{bm\pi}{a}}\right)}{(-1 + e^{\frac{2bm\pi}{a}})m\pi} \right) e^{-\frac{m\pi}{a}y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

En la figura 4.7 se muestra la solución establecida en (4.149), acotando la sumatoria con $M = 100$ y con valores de $V_0 = 10N \cdot m/C$ y $a = b = 1.0m$. La barra de colores indica los diferentes valores del potencial en la región rectangular en estudio. En líneas punteadas rojas, se marcan algunas líneas equipotenciales. Se observa que en $x = -1/3$ el potencial es igual a cero, en la posición $x = 2/3$ y $y = 0$ es V_0 , y en $y = b$ el potencial aumenta linealmente en función de x .

Ejercicio 4.3. En el ejemplo(4.4), en la condición (4.117), se asumió que $\cos(\alpha a/3) \neq 0$. Si se elige $\cos(\alpha a/3) = 0$, entonces para que se cumpla (4.117) se debe imponer que $B_\alpha =$, adicionalmente $\alpha = 3n\pi/a$ (n impar). Demuestre que bajo dicha elección no es posible obtener una solución que cumpla la condición $\psi(2a/3, y) = V_0$.

Ejemplo 4.5. En este ejemplo se considera un prisma rectangular con superficies metálicas. El cubo se extiende en un eje coordenado entre: $-a/2 < x < a/2$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Las superficies se encuentran en equilibrio térmico con temperaturas definidas por:

- $T(-a/2, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $T(a/2, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $T(x, 0, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $T(x, b, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $T(x, y, 0) = 0$ para todo valor de x y y .
- $T(x, y, c) = V(x, y)$ para todo valor de x y y .

El objetivo en este ejemplo es determinar la función de temperatura en el espacio vacío limitado por el prisma.

Solución: La función de temperatura al interior del prisma obedece la ecuación de calor que en el caso de equilibrio térmico (cuando la temperatura no cambia en el tiempo) obedece la ecuación de Laplace, cuya solución general está dada por (4.53):

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) = & G_{xyz}xyz + G_{xy}xy + G_{xz}xz + G_{yz}yz + G_x x + G_y y + G_z z + G_0 \\
 & + \{A'_0 x + B'_0\} \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\
 & + \{C'_0 y + D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} \{A_\gamma \cos \gamma x + B_\gamma \sin \gamma x\} \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\
 & + \{E'_0 z + F'_0\} \sum_{\alpha \neq 0} \{A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x\} \{C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}\} \\
 & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} \{A_{\alpha'} \cos \alpha' x + B_{\alpha'} \sin \alpha' x\} \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}.
 \end{aligned} \tag{4.150}$$

Dadas las condiciones de frontera planteadas, se puede evidenciar que existe periodicidad en la variable y ; debido a que en $y = 0$ y $y = b$ la función de temperatura es cero. Por lo anterior, se deben eliminar de la solución general los términos lineales e hiperbólicos en la variable y , con lo cual la solución se reduce a:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) = & G_{xz}xz + G_x x + G_z z + G_0 \\
 & + \{A'_0 x + B'_0\} \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\
 & + \{D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} \{A_\gamma \cos \gamma x + B_\gamma \sin \gamma x\} \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\
 & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} \{A_{\alpha'} \cos \alpha' x + B_{\alpha'} \sin \alpha' x\} \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}.
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

Antes de aplicar las condiciones de frontera sobre el eje x , se debe entender que en física, es posible ajustar el origen coordenado de tal manera que se facilite el cálculo matemático. En este sentido, este problema se resuelve con mayor facilidad corriendo el origen para el eje x hacia la izquierda en una cantidad $a/2$. Por lo tanto, a partir de ahora se trabajará con la función de temperatura $T'(x', y, z)$, para la cual las condiciones de frontera sobre la coordenada x' serán:

- $T'(0, y, z) = 0$, para todo valor de y, z .
- $T'(a, y, z) = 0$, para todo valor de y, z .

Con lo anterior, se ha impuesto la equivalencia $T'(x', y, z) \equiv T'(x + a/2, y, z) \equiv T(x, y, z)$. Sobre la forma final de la función de temperatura, para que cumpla las condiciones de frontera originales, solo es necesario correr nuevamente el origen del eje x en una cantidad $a/2$ (hacia la derecha, respecto al resultado final). Teniendo en cuenta lo anterior, al aplicar la nueva condición en $x' = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 T'(0, y, z) = 0 = & G_z z + G_0 \\
 & + \{B'_0\} \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\
 & + \{D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} A_\gamma \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\
 & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} A_{\alpha'} \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\},
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

lo cual, dada la independencia de las funciones implicadas, conlleva:

$$G_z = G_0 = B'_0 = A_\gamma = A_{\alpha'} = 0. \quad (4.153)$$

A partir de las condiciones (4.153), se tiene que

$$\begin{aligned} T'(x', y, z) = & G_{xz}x'z + G_x x' \\ & + A'_0 x' \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\ & + \{D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} B_\gamma \sin(\gamma x') \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\ & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} B_{\alpha'} \sin(\alpha' x') \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Ahora, aplicando la condición en $x = a$, se tiene que:

$$\begin{aligned} T'(a, y, z) = & G_{xz}az + G_x a \\ & + A'_0 a \sum_{\beta \neq 0} \{C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y\} \{E_\beta e^{\beta z} + F_\beta e^{-\beta z}\} \\ & + \{D'_0\} \sum_{\gamma \neq 0} B_\gamma \sin(\gamma a) \{E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}\} \\ & + \sum_{\alpha', \beta' \neq 0} B_{\alpha'} \sin(\alpha' a) \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

lo cual implica que:

$$G_{xz} = G_x = 0 = A'_0 = 0, \quad (4.156)$$

y además que

$$\sin(\gamma a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{m\pi}{a}, \quad (4.157)$$

$$\sin(\alpha' a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{n\pi}{a}. \quad (4.158)$$

A partir de los resultados anteriores, la solución para el potencial toma la forma:

$$\begin{aligned} T'(x', y, z) = & \{D'_0\} \sum_{m=1} B_m \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \{E_m e^{\frac{2m\pi z}{a}} + F_m e^{-\frac{2m\pi z}{a}}\} \\ & + \sum_{n=1} \sum_{\beta'} B_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right) \{C_{\beta'} \cos \beta' y + D_{\beta'} \sin \beta' y\} \{E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z}\}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Ahora, para $y = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} T'(x', 0, z) = 0 = \{D'_0\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x'}{a} \right) \right\} \left\{ E_\gamma e^{\frac{m\pi z}{a}} + F_m e^{-\frac{2m\pi z}{a}} \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta'} \left\{ B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \right\} \{C_{\beta'}\} \left\{ E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

En la relación (4.160), el primer término a la derecha de la igualdad no puede compensar el segundo, y por tanto $D'_0 = 0$. Adicionalmente, se debe exigir que: $C'_\beta = 0$. A partir de las anteriores consideraciones, la solución toma la forma:

$$T'(x', y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta'} \left\{ B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \right\} \{D_{\beta'} \operatorname{sen} \beta' y\} \left\{ E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z} \right\}. \quad (4.161)$$

Ahora, al aplicar la condición en $y = b$ se establece que:

$$T'(x', y, z) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta'} \left\{ B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \right\} \{D_{\beta'} \operatorname{sen} \beta' b\} \left\{ E_{\gamma'} e^{\gamma' z} + F_{\gamma'} e^{-\gamma' z} \right\}, \quad (4.162)$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \beta' b = 0 \rightarrow \beta' = \frac{l\pi}{b}, \quad \text{con } l = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.163)$$

con lo cual se tiene que

$$T'(x', y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) D_l \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi y}{b} \right) \left\{ E_{nl} e^{\gamma_{nl} z} + F_{nl} e^{-\gamma_{nl} z} \right\}, \quad (4.164)$$

donde se ha definido $\gamma_{nl} = \sqrt{n^2 + l^2}$. Ahora, al evaluar la función de temperatura en $z = 0$, se obtiene:

$$T'(x', y, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) D_l \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi y}{b} \right) \{E_{nl} + F_{nl}\}, \quad (4.165)$$

y por lo tanto: $E_{nl} = -F_{nl}$, tal que la solución se puede escribir como:

$$\begin{aligned} T'(x', y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) D_l \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi y}{b} \right) E_{nl} \{e^{\gamma_{nl} z} - e^{-\gamma_{nl} z}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{2B_n D_l E_{nl}}_{E'_{nl}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi y}{b} \right) \sinh(\gamma_{nl} z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E'_{nl} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi y}{b} \right) \sinh(\gamma_{nl} z). \end{aligned} \quad (4.166)$$

La última condición a evaluar en $z = c$, conlleva:

$$T'(x', y, c) = V(x', y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E'_{nl} \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \sinh(\gamma_{nl}c). \quad (4.167)$$

Para determinar las constantes E'_{nl} , se utiliza la condición de ortonormalización de la función seno, y por ello se multiplica por el factor $\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \times \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$, ambos lados de la igualdad (4.167) y se integra en la variable x entre $0 < x' < a$, y en la variable y entre $0 < y < b$, con lo cual el lado izquierdo (LI) y derecho (LD) de (4.167), se escriben como:

$$LI = \int_0^a \int_0^b V(x', y) \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dx' dy, \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} LD &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E'_{nl} \sinh(\gamma_{nl}c) \\ &\times \left\{ \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) dx' \right\} \\ &\times \left\{ \int_0^b \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E'_{nl} \sinh(\gamma_{nl}c) \frac{a}{2} \delta_{nm} \frac{b}{2} \delta_{lk} \\ &= E'_{mk} \sinh(\gamma_{mk}c) \frac{ab}{4}, \end{aligned} \quad (4.169)$$

por lo tanto, el coeficiente E'_{mk} que determina la función para la temperatura es:

$$E'_{mk} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{mk}c)} \int_0^a \int_0^b V(x', y) \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dx' dy. \quad (4.170)$$

Como un caso particular, para $V(x', y) = \frac{x'yV_0}{ab}$, con $V_0 = cte$, se tiene que:

$$E'_{mk} = \frac{4V_0}{(ab)^2 \sinh(\gamma_{mk}c)} \left\{ \int_0^a x' \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) dx' \right\} \left\{ \int_0^b y \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \right\}. \quad (4.171)$$

Las integrales asociadas en la ecuación anterior se resuelven por partes, tal que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^b y \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \\ &= \left[-y \frac{b}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \right]_0^b + \frac{b}{k\pi} \int_0^b \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \\ &= -\frac{b^2}{k\pi} \cos k\pi + \frac{b^2}{(k\pi)^2} (\sin k\pi - \sin 0) \\ &= -\frac{b^2}{k\pi} (-1)^k, \end{aligned} \quad (4.172)$$

de igual forma se tiene,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^a x \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x'}{a} \right) dx' \\
 &= \left[-x' \frac{a}{m\pi} \cos \left(\frac{m\pi x'}{a} \right) \right]_0^a + \underbrace{\frac{a}{m\pi} \int_0^a \cos \left(\frac{m\pi x'}{a} \right) dx'}_0 \\
 &= -\frac{a^2}{4m\pi} \cos(m\pi) \\
 &= -\frac{a^2}{m\pi} (-1)^m
 \end{aligned} \tag{4.173}$$

Reemplazando I_1 e I_2 en (4.171), se tiene que

$$\begin{aligned}
 E'_{mk} &= \frac{4V_0}{(ab)^2 \sinh(\gamma_{mk}c)} \left(\frac{b^2}{k\pi} (-1)^k \right) \left(\frac{a^2}{m\pi} (-1)^m \right) \\
 &= \frac{2V_0(-1)^{k+m}}{k \cdot m\pi^2 \sinh((\sqrt{m^2 + k^2})c)}.
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

Finalmente la función para la temperatura $T(x, y, z)$ estará dada por:

$$\begin{aligned}
 T'(x', y, c) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2V_0(-1)^{k+m}}{k \cdot m\pi^2 \sinh((\sqrt{m^2 + k^2})c)} \right) \\
 &\quad \times \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x'}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi y}{b} \right) \sinh(\sqrt{m^2 + k^2}z) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.175}$$

La solución asociada al origen inicial para el eje x vendrá dada por una traslación en una cantidad $a/2$ hacia la derecha, respecto a la solución (4.175), es decir:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, c) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2V_0(-1)^{k+m}}{k \cdot m\pi^2 \sinh((\sqrt{m^2 + k^2})c)} \right) \\
 &\quad \times \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi(x + a/2)}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi y}{b} \right) \sinh(\sqrt{m^2 + k^2}z) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

Ejercicio 4.4. Considere un prisma rectangular con superficies metálicas. El cubo se extiende en un eje coordenado entre $-a/2 < x < a/2$, $-b/2 < y < b/2$ y $0 < z < c$. Las superficies del prisma se encuentran sujetas a los siguientes potenciales:

- $\psi(-a/2, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $\psi(a/2, y, z) = 0$ para todo valor de y y z .
- $\psi(x, -b/2, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $\psi(x, b/2, z) = 0$ para todo valor de x y z .
- $\psi(x, y, 0) = V_0$ para todo valor de x y y .
- $\psi(x, y, c) = \frac{V_0 x^2 y}{a^2 b}$ para todo valor de x y y .

5– Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

En este capítulo se encontrará la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, aplicando el método de separación de variables.

5.1. Separación de variables

La ecuación de Laplace representa un caso especial de la ecuación (4.12); cuando $f(r) = 0$, y en tal caso se tiene que:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0. \quad (5.1)$$

Ahora, tomando el laplaciano en coordenadas esféricas (ecuación (A.44)), la ecuación de Laplace se escribe como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi(\vec{r}) \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (5.2)$$

Si la función $\psi(\vec{r})$ se puede expresar como: $\psi(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)S(\phi)$, al reemplazar en (5.2) y dividir la expresión resultante por $\psi(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)S(\phi)$, se obtiene:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{S(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} S(\phi) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) \right) \right\} = 0. \quad (5.3)$$

El primer término en la expresión (5.3) corresponde a una función que depende exclusivamente de la coordenada r , mientras que el segundo término (factores agrupados por llaves), es una función que depende de las variables θ y ϕ , por lo tanto, para que la relación (5.3) se mantenga para todo valor de r, θ , y ϕ , cada término en (5.3) debe tomar un valor constante que se denotara como α , a partir de lo cual, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) = \alpha, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left\{ \frac{1}{S(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} S(\phi) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) \right\} = -\alpha. \quad (5.5)$$

Siendo α una constante, las relaciones (5.4) y (5.5) garantizan (5.3). Ahora, la relación (5.5) se puede escribir convenientemente como:

$$\frac{1}{S(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} S(\phi) = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) \right\} - \alpha \sin^2 \theta. \quad (5.6)$$

Se observa que la parte izquierda de la igualdad dada por (5.6) solo depende de la variable ϕ , en tanto que la parte derecha solo depende de la variable θ , por lo tanto, para que la igualdad sea válida para todo valor de θ y ϕ , cada lado debe ser igual a una constante, que en este caso se denotará como β , y se tiene:

$$\frac{1}{S(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} S(\phi) = -\beta, \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) \right\} + \alpha \sin^2 \theta = \beta. \quad (5.8)$$

En resumen, las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen tras aplicar separación de variables en coordenadas esféricas para la ecuación de Laplace, son:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \alpha R = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2 S}{d\phi^2} + \beta S = 0. \quad (5.11)$$

En muchas aplicaciones físicas, los sistemas físicos presentan simetría azimutal, es decir son invariantes bajo rotaciones sobre el eje z , lo cual implica que las ecuaciones y soluciones que describen los sistemas físicos son independientes de la coordenada ϕ , lo cual requiere un tratamiento particular que se desarrollará en las siguientes secciones.

5.2. Solución de la ecuación de Laplace con simetría azimutal

La simetría azimutal se presenta cuando la función $S(\phi)$ es constante, es decir, problemas para los cuales el potencial es independiente del ángulo azimutal ϕ . Para tal situación, la ecuación (5.11) implica que $\beta = 0$ porque S es una constante (no nula). Las variables independientes se reducen a dos (θ y ϕ) y la solución a la ecuación de Laplace se reduce a: $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Con lo anterior las ecuaciones (5.9) y (5.10) toman la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\alpha}{r^2} R = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha \Theta = 0. \quad (5.13)$$

Para resolver la ecuación (5.13) se realiza convenientemente el cambio de variable $u = \cos \theta$, y se tiene en cuenta que:

$$\frac{d\Theta(\theta)}{du} = \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{du} = \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \frac{1}{du/d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}, \quad (5.14)$$

lo cual conlleva:

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{du}, \quad (5.15)$$

por lo tanto:

$$\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d\Theta(\theta)}{du} = -(1 - \cos^2 \theta) \frac{d\Theta(\theta)}{du} = -(1 - u^2) \frac{d\Theta(\theta)}{du} \quad (5.16)$$

Al reemplazar la relación (5.16) en la ecuación (5.13) e introducir la función $P(u)$; tal que $P(u) \equiv \Theta(\theta)$, se tiene que:

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left((1 - u^2) \frac{dP}{du} \right) + \alpha P = 0. \quad (5.17)$$

El término entre parentesis en la expresión anterior es una función de u , por lo tanto se puede cambiar la derivada respecto a θ en función de la variable u , tal que

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{du} \left((1 - u^2) \frac{dP}{du} \right) \underbrace{\left(\frac{du}{d\theta} \right)}_{-\sin \theta} + \alpha P = 0. \quad (5.18)$$

y se tiene que

$$\frac{d}{du} \left((1 - u^2) \frac{dP}{du} \right) + \alpha P = 0, \quad (5.19)$$

que también se puede escribir como:

$$(1 - u^2) \frac{d^2 P}{du^2} - 2u \frac{dP}{du} + \alpha P = 0, \quad (5.20)$$

o en la forma:

$$\frac{d^2 P}{du^2} - \frac{2u}{(1 - u^2)} \frac{dP}{du} + \frac{\alpha}{(1 - u^2)} P = 0. \quad (5.21)$$

A partir de la aplicación del método de separación de variables a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, asumiendo simetría azimutal, se ha llegado a las ecuaciones diferenciales ordinarias (5.12) y (5.21) para la variable r y θ respectivamente. Dichas ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden resolver aplicando el método de Frobenius que se explicará en la siguiente sección.

5.3. Método de Frobenius

El método de Frobenius se puede aplicar en la solución de ecuaciones diferenciales que se pueden expresar en la forma:

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y = 0, \quad (5.22)$$

o en forma equivalente como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \quad (5.23)$$

donde las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ corresponden a:

$$P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad Q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} \quad (5.24)$$

El teorema de Frobenius dice: Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (5.22), entonces existe al menos una solución de la forma

$$y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+s} \quad (5.25)$$

donde el número s es una constante por determinar. La serie converge por lo menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < C$. Si se encuentra que s es un número que no es un entero, entonces la solución correspondiente $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+s}$ no es una serie de potencias. Por razones de simplicidad, al resolver ecuaciones diferenciales que se presenten en la forma (5.22), el punto singular se asume igual a $x = 0$. Lo anterior no es una restricción sobre la solución, dado que siempre es posible realizar un corrimiento de una función $f(x)$ tal que el punto singular en estudio en un sistema de referencia conveniente corresponda al punto $x = 0$. Con lo anterior, la solución en serie de potencias se puede escribir como:

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = a_0 x^s + a_1 x^{s+1} + a_2 x^{s+2} + a_3 x^{s+3} + \dots \quad (5.26)$$

La suposición básica del método de Frobenius es que la solución de la ecuación diferencial puede ser representada por una serie de potencias. Esto no es una suposición restrictiva porque casi todas las funciones encontradas en aplicaciones físicas pueden escribirse como series de potencias en su intervalo de convergencia. Este intervalo puede ser muy pequeño o puede cubrir toda la línea real.

Bajo la solución planteada, la primera y segunda derivada de $y(x)$ a partir de la relación (5.26) están dadas por:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)x^{n+s-1} = sa_0x^{s-1} + (s+1)a_1x^s + \dots, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} \\ &= s(s-1)a_0x^{s-2} + (s+1)sa_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)a_2x^s + \dots. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Entonces, para encontrar la solución a la ecuación diferencial (5.23) en serie de potencias, se sustituye las Ecuaciones (5.26), (5.27) y (5.28) en (5.23). El resultado obtenido se agrupa por términos con potencias distintas de x . Como la ecuación (5.23) esta igualada a cero, se sabe que la unica forma de que la ecuación se anule para todo valor de x se obtiene cuando todos los coeficientes que acompañan a diferentes potencias de x se anulen por separado. Al igualar los primeros coeficientes a cero, se obtienen los posibles valores de s . Al igualar los restantes coeficientes a cero se obtienen relaciones de recurrencias que definen los valores de a_n en términos de coeficientes con índice mas pequeño (a_{n-1} ó a_{n-2}). De esta manera, a partir de la relación de recurrencia obtenida, es posible obtener todos los coeficientes a_n en términos de los primeros coeficientes (en general a_0 ó a_1), los cuales se determinan imponiendo convenientes condiciones de normalización para la solución.

5.4. Solución a la ecuación diferencial de Legendre: Polinomios de Legendre

En esta sección se aplicará el método de Frobenius para encontrar la solución a la ecuación de Legendre, dada por:

$$(1-u^2)\frac{d^2P}{du^2} - 2u\frac{d^2P}{du^2} + \alpha P(u) = 0. \quad (5.29)$$

Como se explicó en la sección anterior, en el método de Frobenius se asume una solución en serie de potencias dada por:

$$P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{(n+s)}, \quad (5.30)$$

a partir de lo cual se tiene que

$$\frac{dP}{du} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+s) a_n u^{(n+s)-1}, \quad (5.31)$$

$$\frac{d^2P}{du^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)((n+s)-1)a_n u^{(n+s)-2}. \quad (5.32)$$

Ahora, reemplazando las anteriores expresiones en la ecuación de Legendre (5.29) se tiene:

$$0 = (1 - u^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) ((n + s) - 1) a_n u^{(n+s)-2} - 2u \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) a_n u^{(n+s)-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n u^{(n+s)}, \quad (5.33)$$

que se puede escribir como:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) ((n + s) - 1) a_n u^{(n+s)-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) ((n + s) - 1) a_n u^{(n+s)} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) a_n u^{(n+s)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n u^{(n+s)}. \quad (5.34)$$

Las últimas tres sumatorias en la relación anterior se pueden factorizar en una única suma y se obtiene:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n + s) ((n + s) - 1) a_n u^{(n+s)-2} - \sum_{n=0}^{\infty} ((n + s) ((n + s) + 1) - \alpha) a_n u^{(n+s)}. \quad (5.35)$$

Los términos con potencias más bajas en la expresión (5.35), corresponden a los valores de $n = 0$ y $n = 1$ en la primera sumatoria de (5.35), y son:

$$a_0 s(s - 1) u^{s-2}, \quad a_1 (s + 1) s u^{s-1}, \quad (5.36)$$

y dado que la igualdad (5.35) exige que todos los coeficientes asociados a diferentes potencias de u se deben de anular separadamente, se debe cumplir que

$$a_0 s(s - 1) = 0, \quad (5.37)$$

$$a_1 (s + 1) s = 0. \quad (5.38)$$

Las anteriores igualdades se cumplen simultáneamente si $s = 0$ y con esta elección¹ la ecuación (5.35) se puede escribir como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1) a_n u^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n + 1) - \alpha) a_n u^n = 0. \quad (5.39)$$

Los términos para $n = 0$ y $n = 1$ en la primera sumatoria de la expresión anterior, se anulan, por lo tanto,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) a_n u^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n + 1) - \alpha) a_n u^n = 0. \quad (5.40)$$

¹Las otras posibilidad son: $s = 1 \rightarrow a_1 = 0$ y $s = -1 \rightarrow a_0 = 0$. Se puede verificar que finalmente para las elecciones alternativas la solución que se obtiene es equivalente a la deducida al tomar $s = 0$.

Ahora, denotando $n' = n - 2$ en la primera sumatoria de (5.40), se tiene que

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (n' + 2)(n' + 1)a_{n'+2}u^{n'} - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n + 1) - \alpha) a_n u^n = 0, \quad (5.41)$$

y ya que n' es un índice arbitrario (puede tener cualquier etiqueta y denominarse simplemente n), la expresión (5.41) se puede escribir con una única sumatoria, con lo cual se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - (n(n + 1) - \alpha) a_n\} u^n = 0. \quad (5.42)$$

Dado que las funciones $f_n(u) = u^n$ son linealmente independientes, la igualdad (5.42) solo se cumple para

$$\{(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - (n(n + 1) - \alpha) a_n\} = 0, \quad (5.43)$$

a partir de lo cual se llega a la relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = \frac{(n(n + 1) - \alpha)}{(n + 1)(n + 2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

La ecuación (5.44) es fundamental para la solución de la ecuación diferencial de Legendre. Genera todos los a_n con n par a partir de a_0 , y todos los a_n impares a partir de a_1 . La fórmula general se obtiene por inducción. Para los a_n pares se tiene en cuenta que a partir de (5.44), se obtiene: $a_2 = -\frac{\alpha}{2}a_0$, y para $n = 2$ se obtiene:

$$a_4 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha}{4 \cdot 3} \left(-\frac{\alpha}{2}\right) a_0 = \frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)}{4!} a_0. \quad (5.45)$$

De manera similar, para $n = 4$, se tiene

$$a_6 = \frac{4 \cdot 5 - \alpha}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5)}{6!} a_0, \quad (5.46)$$

por lo tanto,

$$a_8 = \frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5)(\alpha - 6 \cdot 7)}{8!} a_0. \quad (5.47)$$

A partir de las relaciones anteriores, y por inducción, se puede inferir que:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5) \cdots [\alpha - (2n - 2)(2n - 1)]}{(2n)!} a_0. \quad (5.48)$$

Los términos para a_n con $n = \text{impar}$ se obtiene a partir de a_1 . De la relación (5.44) se tiene que $a_3 = (2 - \alpha)/(2 \cdot 3)a_1$, y por iteración, los coeficientes a_5 y a_7 son:

$$a_5 = \frac{3 \cdot 4 - \alpha}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(3 \cdot 4 - \alpha)(2 \cdot 1 - \alpha)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1, \quad (5.49)$$

$$a_7 = \frac{(5 \cdot 6 - \alpha)}{6 \cdot 7} a_5 = \frac{(5 \cdot 6 - \alpha)(3 \cdot 4 - \alpha)(2 \cdot 1 - \alpha)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1, \quad (5.50)$$

a partir de las expresiones anteriores, por inducción, se puede inferir que:

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n (\alpha - 2)(\alpha - 3 \cdot 4)(\alpha - 5 \cdot 6) \cdots [\alpha - (2n - 1)2n]}{(2n + 1)!} a_1. \quad (5.51)$$

Los resultados anteriores sugieren escribir la serie de potencias de $P(u)$ en términos de una suma sobre potencias pares (que depende del coeficiente a_0) y una suma sobre potencias impares (que depende de a_1); es decir

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n}_{\text{par}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n}_{\text{impar}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} u^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} u^{2n+1} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Reemplazando los coeficientes definidos en las relaciones (5.51) y (5.48) en la expansión en serie de $P(u)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} P(u) &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha (\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5) \cdots [\alpha - (2n - 2)(2n - 1)]}{(2n)!} u^{2n} \\ &+ a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha - 2)(\alpha - 3 \cdot 4)(\alpha - 5 \cdot 6) \cdots [\alpha - (2n - 1)2n]}{(2n + 1)!} u^{2n+1}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Las series en (5.53) deben ser convergentes para que se pueda utilizar en aplicaciones físicas y por lo tanto se debe establecer su convergencia. Para cumplir con dicho objetivo, se aplica la prueba del cociente, a partir de lo cual para la serie par se obtiene :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2} u^{2n+2}}{a_{2n} u^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n(2n + 1) - \alpha}{(2n + 1)(2n + 2)} \right| u^2 = u^2. \quad (5.54)$$

Entonces, cuando $u^2 < 1$, la serie converge. Dado que $u = \cos \theta$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, se tiene que la prueba del cociente determina que la serie par converge para todo valor de u excepto para los valores de $u = \pm 1$ (es decir, para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$), donde no se puede establecer la convergencia de la serie por el método empleado. En dichos puntos se aplica la prueba del cociente generalizado. Entonces, para n muy grande, se tiene:

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|_{u^2=1} = \left| \frac{2n(2n+1) - \alpha}{(2n+1)(2n+2)} \right| \approx \frac{n}{n+1} - \frac{\alpha}{(2n+1)(2n+2)} \approx 1 - \frac{1}{n+1} \approx 1 - \frac{1}{n}, \quad (5.55)$$

a partir de lo cual se determina divergencia para la serie en $u = \pm 1$. Aplicando el mismo procedimiento para la serie impar, se determina que la serie también diverge. En conclusión tanto la serie par como impar divergen en $u = \pm 1$.

Ejercicio 5.1. *Demostrar que la serie impar en (5.53) diverge para $u = \pm 1$.*

Debido a la falta de convergencia, se debe acotar las sumas presentes en (5.53) (ya que una suma con términos finitos de cantidades finitas siempre es finita), lo cual es posible teniendo en cuenta que el parámetro α es completamente arbitrario. El valor de α se elige de tal manera que todos los coeficientes a_n se anulen para un valor de $n > k = \text{finito}$. Aplicando el método anterior se logra una suma finita y por lo tanto $P(u)$ se convierte en un polinomio de grado k , el cual siempre es convergente para valores finitos de su argumento. Bajo la idea anterior, se asumirá que todos los coeficientes $a_0, a_2, \dots, a_{2j}$ son diferentes de cero (en este caso $k = 2j$), y se desea conseguir que todos los restantes coeficientes después del coeficiente a_{2j} sean cero. Para obtener lo requerido, basta con tomar la relación de recurrencia para $n = \text{par}$ e imponer que:

$$a_{2j+2} = \frac{2j(2j+1) - \alpha}{(2j+1)(2j+2)} \underbrace{a_{2j}}_{\neq 0} = 0, \quad (5.56)$$

con lo cual $\alpha = 2j(2j+1)$. Dado que a_{2j+4} es función de a_{2j+2} (por la relación de recurrencia) y que $a_{2j+2} = 0$, entonces $a_{2j+4} = 0$ y de igual forma se anulan todos los coeficientes con índice mayor a a_{2j} (coeficientes pares). Con lo anterior se ha podido acotar la serie par en (5.53), pero aún no se ha resuelto el problema respecto a la divergencia de la serie impar. Se debe probar si la elección para α que acota la serie par, también logra acotar la serie impar. Entonces al reemplazar $\alpha = 2j(2j+1)$ en la fórmula de recurrencia para los coeficientes impares en (5.53) se tiene que:

$$a_{2n+1} = \frac{(2n-1)2n - 2j(2j+1)}{(2n+1)2n} a_{2n-1}. \quad (5.57)$$

Al establecer el numerador igual a cero se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver para n y se obtiene:

$$n = -j \quad \text{o} \quad n = \frac{j+1}{2}. \quad (5.58)$$

Ninguno de los resultados anteriores es un entero positivo. Por lo tanto, el valor de α elegido para truncar la serie par no permite truncar la serie impar. Una situación similar se presenta

si primero se trunca la serie impar tomando un valor α dado y luego se trata de truncar la serie par. Para evitar este problema, se recurre a la elección de otra de las constantes arbitrarias: a_0 y a_1 . Al establecer a_1 igual a cero, se evita completamente la serie impar. Inversamente, si el valor de α elegido trunca la serie impar entonces a_0 debe ser igual a cero². Por convención, a_0 y a_1 se determinan de modo que $P(1) = 1$. En resumen: Una solución a la ecuación diferencial de Legendre (5.29) existe solo si $\alpha = k(k+1)$, donde k es un entero no negativo. La solución correspondiente se denota por $P_k(u)$ y es un polinomio de grado k , llamado el N -ésimo polinomio de Legendre, que tiene solo potencias pares de u si k es par ($k = 2j$) y potencias impares de u si k es impar ($k = 2j + 1$). Por convención, $P_k(1) = 1$ para todo k . Por lo tanto, para cada k se tiene una solución diferente y un diferente a_0 ó a_1 para evaluar.

Ejercicio 5.2. Si se acota en primer lugar la serie impar de los polinomios de Legendre escogiendo un valor de α conveniente, demostrar que dicha elección no trunca la serie par en los polinomios de Legendre.

Formula compacta para los polinomios de Legendre

Como ya se estableció, la relación de recurrencia para los coeficientes en la serie de potencias definida en el método de Frobenius viene dada por:

$$a_{n+2} = \frac{(n(n+1) - \alpha)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.59)$$

Como ya se explico, para truncar la serie en la solución de serie de potencias en el método de Frobenius, se asume que existe un valor entero k , tal que $a_k \neq 0$ y $a_{k+2} = 0$, es decir, que para un entero k se tiene:

$$a_{k+2} = \frac{(k(k+1) - \alpha)}{(k+1)(k+2)} \underbrace{a_k}_{\neq 0} = 0. \quad (5.60)$$

Por lo tanto $\alpha = k(k+1)$. Ahora, cambiando $n \rightarrow n-2$ en la ecuación (5.59) y reemplazando $\alpha = k(k+1)$, se obtiene:

$$a_n = \frac{(n-2)(n-1) - k(k+1)}{n(n-1)} a_{n-2} = \frac{-(k-n+2)(k+n-1)}{n(n-1)} a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, k. \quad (5.61)$$

²Al mismo resultado se llega, si en las condiciones (5.37) y (5.38) se toma como solución $s = 1$ (con lo cual $a_1 = 0$) ó $s = -1$ (con lo cual $a_0 = 0$)

Por iteración de la expresión (5.61) es posible encontrar cualquier coeficiente a_n en términos de a_0 ó a_1 . Al aplicar una iteración sobre (5.61), es posible establecer la relación:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^2 \frac{(k-n+2)(k+n-1)}{n(n-1)} \frac{(k-n+4)(k+n-3)}{(n-2)(n-3)} a_{n-4} \\ &= (-1)^2 \frac{[(k-n+2)(k-n+4)][(k+n-1)(k+n-3)]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} a_{n-4}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Iterando m veces, es posible establecer que:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^m \frac{[(k-n+2)(k-n+4) \cdots (k-n+2m)]}{n(n-1) \cdots (n-2m+1)} \\ &\quad \times [(k+n-1)(k+n-3) \cdots (k+n-2m+1)] a_{n-2m}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Hasta el momento, la expresión (5.63) es válida tanto para $n = \text{par}$, como $n = \text{impar}$. En este punto es conveniente analizar los dos casos por separado.

- Para el caso $n = \text{par}$, el valor de k también debe ser par, y para enfatizar dicha propiedad se tomará $k = 2j$, adicionalmente se tomará $n = 2m$ en la expresión (5.63), con lo cual se obtiene:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\{(2j) \cdots (2j-2m+2)\} \{(2j+2m-1) \cdots (2j+1)\}}{2m(2m-1) \cdots 1} a_0. \quad (5.64)$$

Los dos factores en entre llaves en (5.64), se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} [(2j) \cdots (2j-2m+2)] &= [(2j) \cdots (2j-2m+2)] \frac{(2j-2m)!!}{(2j-2m)!!} \\ &= \frac{(2j)!!}{(2j-2m)!!}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} [(2j+2m-1) \cdots (2j+1)] &= [(2j+2m-1) \cdots (2j+1)] \frac{(2j-1)!!}{(2j-1)!!} \\ &= \frac{(2j+2m-1)!!}{(2j-1)!!}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

por lo tanto, la expresión (5.64) toma la forma:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{[(2j)!!/(2j-2m)!!][(2j+2m-1)!!/(2j-1)!!]}{(2m)!} a_0. \quad (5.67)$$

Ahora, al utilizar las relaciones para el doble factorial definidas por:

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}, \quad (2l)!! = 2^l l!, \quad (5.68)$$

se obtiene:

$$a_{2m} = \underbrace{\frac{(j!)^2 a_0}{(2j)!}}_{A_{2j}} \frac{(-1)^m (2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \frac{1}{(2m)!} \equiv A_{2j} \frac{(-1)^m (2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \frac{1}{(2m)!}, \quad (5.69)$$

donde se ha definido $A_{2j} = a_0((j!)^2/(2j)!)$. A partir del resultado anterior la expresión para los polinomios de Legendre de grado par toma la forma:

$$P_{2j} = \sum_{m=0}^j A_{2j} \frac{(-1)^m (2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \frac{1}{(2m)!} u^{2m}, \quad (5.70)$$

donde las constantes A_{2j} se determinan a partir de la condición de normalización, tal que: $P_{2j}(1) = 1$.

- Ahora para el calculo de los coeficientes a_n con n impar, se toma en la expresión (5.63) $n = 2m+1$, y $k = 2j+1$ y se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (-1)^m \frac{[(2j-2m+2)(2j-2m+4) \cdots (2j)]}{(2m+1)(2m) \cdots (2)} a_1 \\ &\quad \times [(2j+2m+1)(2j+2m-1) \cdots (2j+3)] \\ &= (-1)^m \frac{(2j)!!}{(2(j-m))!!} \frac{(2(j+m+1)-1)!!}{(2j+1)!!} \frac{a_1}{(2m+1)!}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

lo cual, teniendo en cuenta las relaciones (5.68) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (-1)^m \frac{2^j j!}{2^{j-m}(j-m)!} \frac{(2(j+m+1))! 2^j j!}{2^{j+m+1}(j+m+1)!(2j)!} \frac{a_1}{(2m+1)!} \\ &= \underbrace{\frac{a_1 (j!)^2}{2(2j)!}}_{B_j} \frac{(-1)^m (2(j+m+1))!}{(j-m)!(j+m+1)!(2m+1)!} \\ &= B_j \frac{(-1)^m (2(j+m+1))!}{(j-m)!(j+m+1)!(2m+1)!} \\ &= B_j \frac{(-1)^m (2j+2m+2)!}{(j+m+1)!(j-m)!} \frac{1}{(2m+1)!}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

A partir del resultado anterior, los polinomios de Legendre de grado impar se pueden escribir como:

$$P_{2j+1}(u) = B_j \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m (2j + 2m + 2)!}{(j + m + 1)! (j - m)!} \frac{u^{2m+1}}{(2m + 1)!}, \quad (5.73)$$

donde las constantes B_j se determinan a partir de la condición de normalización, tal que: $P_{2j+1}(1) = 1$.

Las expresiones (5.70) y (5.73), se pueden escribir en una sola expresión, si se cambia el índice de la sumatoria por $l = j - m$ y se reemplaza $n = 2j$ en la suma par y $n = 2j + 1$ en la suma impar. Entonces, las dos expresiones en mención se pueden definir mediante una sola relación, dada por:

$$P_n(u) = K_n \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l (2n - 2l)!}{(n - l)! l!} \frac{u^{n-2l}}{(n - 2l)!}, \quad (5.74)$$

donde $[n/2]$, para cualquier número real $n/2$, denota el mayor entero menor o igual que $n/2$; y K_n es una constante arbitraria que, por convención, se elige como $1/2^n$, de manera que $P_n(1) = 1$. Con esto, se obtiene:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l (2n - 2l)!}{(n - l)! l!} \frac{u^{n-2l}}{(n - 2l)!}. \quad (5.75)$$

5.5. Solución a la ecuación diferencial ordinaria para la variable radial

En la solución de la parte angular (con simetría azimutal) se estableció que $\alpha = k(k + 1)$. Con lo anterior, la ecuación (5.9) para la parte radial se puede escribir como:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - k(k + 1)R = 0. \quad (5.76)$$

Para solucionar la ecuación diferencial (5.76) se aplica nuevamente el método de Frobenius, tomando la solución en la forma:

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{n+s}. \quad (5.77)$$

Ahora, la primera y segunda derivada para la función $R(r)$ es

$$\frac{dR(r)}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)b_n r^{n+s-1}, \quad (5.78)$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)b_n r^{n+s-2}. \quad (5.79)$$

Al reemplazar las derivadas anteriores en (5.76) se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)b_n r^{n+s} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)b_n r^{n+s} - k(k+1)R = 0, \quad (5.80)$$

que se puede escribir en una sola sumatoria, tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+1) - k(k+1)]b_n r^{n+s} = 0. \quad (5.81)$$

Dado que las funciones $f_n(r) = r^{n+s}$ son linealmente independientes, para que (5.81) se cumpla para cualquier valor de r se debe exigir que

$$[(n+s)(n+s+1) - k(k+1)]b_n = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.82)$$

En particular, para $n = 0$, y asumiendo que $b_0 \neq 0$, se obtiene la ecuación indicial:

$$s(s+1) - k(k+1) = 0, \quad (5.83)$$

la cual presenta las posibles soluciones: $s = k$ y $s = -k - 1$. Para $s = k$, la ecuación (5.82) se puede escribir como ($n \neq 0$):

$$[(n+k)(n+k+1) - k(k+1)]b_n = 0, \quad (5.84)$$

que se puede escribir como: $n(n+2k+1)b_n = 0$. Dado que ni n ni $(n+2k+1)$ son ceros, se debe concluir que $b_n = 0$ para todo valor de $n \geq 1$. Así, para $s = k$, se obtiene la solución $R(r) = b_0 r^k$; sin embargo, el valor de b_0 en general es diferente para cada posible valor de k , lo cual hace conveniente escribir la solución para $s = k$ como:

$$R(r) = A_k r^k, \quad (5.85)$$

donde A_k es una constante arbitraria. Ahora, para $s = -k - 1$, la relación definida en la ecuación (5.82) toma la forma

$$[(n - k - 1)(n - k) - k(k + 1)]b_n = 0, \quad (5.86)$$

que se puede escribir como

$$n(n - 2k - 1)b_n = 0, \quad (5.87)$$

lo cual se cumple para: $n = 2k + 1$ ó $b_n = 0$. Si se toma $n = 2k + 1$, la solución expresada en (5.77) toma la forma (con $s = -k - 1$):

$$R(r) = r^{-k-1}b_{2k+1}r^{2k+1} = b_{2k+1}r^k, \quad (5.88)$$

y siendo que b_{2k+1} es una constante arbitraria, la solución (5.88) corresponde a la misma solución ya obtenida expresada en (5.85). Por tanto para $s = -k - 1$ se asume que $n \neq 2k + 1$ y por lo tanto $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$. En la sumatoria asociada a la solución $R(r)$ solo se mantiene el termino con $n = 0$ y la solución para $s = -k - 1$ queda:

$$R(r) = \underbrace{b_0}_{B_k} r^{-k-1} = B_k r^{-k-1}, \quad (5.89)$$

donde b_0 se ha denotado por B_k que representa una constante arbitraria. En conclusión la solución más general de la ecuación diferencial radial es

$$R_k(r) \equiv A_k r^k + B_k r^{-k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.90)$$

5.5.1. Solución a la ecuación de Laplace con simetría azimutal

A partir de los resultados obtenidos para $R_k(r)$ y para $P_k(u)$ ($P_k(u) \equiv P_k(\cos \theta) \equiv \Theta(\theta)$), se tiene que la solución a la ecuación de Laplace con simetría azimutal para un valor de k dado, viene dada por:

$$\psi_k(\vec{r}) = R_k(r)P_k(u) = (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\cos \theta). \quad (5.91)$$

La solución mas general se obtiene al considerar todos los posibles valores de k . Los ejemplos que se trabajarán en este texto, se restringen a problemas en los cuales $k \in \mathbb{Z}$, en tal caso, la solución mas general implica una suma sobre todos los posibles valores de k , y se tiene que:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\cos \theta). \quad (5.92)$$

5.6. Polinomios de Legendre

Como se vio en la sección (5.4), los polinomios de Legendre son solución a la ecuación diferencial ordinaria asociada a la variable θ , que se obtiene tras aplicar el método de separación de variables a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Dada su importancia en física, a continuación se describen algunas características y propiedades importantes.

5.6.1. Función generatriz

Como una forma alternativa, los polinomios de Legendre definidos por la sumatoria (5.75), se pueden obtener a partir de derivadas aplicadas a una función, que se denomina *función generatriz*. En esta sección se establecerá la forma de dicha función y la representación de los polinomios como derivadas de dicha función.

Fácilmente se puede demostrar que la la función $1/|\vec{r} - \vec{r}_0|$ es una solución de la ecuación de Laplace en todos los puntos del espacio excepto $\vec{r}_0$ (la demostración se deja como ejercicio para el lector). Si se coloca $\vec{r}_0$ a lo largo del eje z, es decir $\vec{r}_0 = a\hat{k}$, se tiene que

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{r} - a\hat{k}| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}, \quad (5.93)$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}_0$; sin embargo, dado que $\vec{r}_0$ apunta en la dirección $\hat{k}$, θ coincide con el ángulo polar en coordenadas esféricas. Con la orientación elegida para $\vec{r}_0$, la magnitud $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ no depende de ϕ , lo que implica una solución con simetría azimutal de la ecuación de Laplace y, según (5.92), la expresión $1/|\vec{r} - \vec{r}_0|$ puede desarrollarse en serie:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\cos \theta). \quad (5.94)$$

Si se considera la región del espacio dentro de una esfera de radio a ($r < a$), el origen $\vec{r} = \vec{0}$ se encuentra incluido y, por lo tanto, la solución al lado derecho de la ecuación (5.94) no puede contener términos con potencias negativas de r (para tener una solución convergente), por lo tanto, $B_k = 0$ para todo valor de k . La relación (5.94) se simplifica y se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos \theta). \quad (5.95)$$

Para determinar las constantes A_k , se sustituye en (5.95) el valor $\theta = 0$ y, teniendo en cuenta que, por convención, $P_k(1) = 1$ (es decir, para $\theta = 0 \rightarrow P_k(1) = 1$), se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar}} = \frac{1}{|r - a|} = \frac{1}{a - r} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k. \quad (5.96)$$

Ahora, Dado que $r/a < 1$ (por estarse analizando la solución al interior de una esfera de radio a), la expresión $1/|1 - r/a|$ se puede expandir en una serie de potencias, tal que:

$$\frac{1}{a-r} = \frac{1}{a(1-r/a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{a^{k+1}}, \quad (5.97)$$

por lo tanto, la relación (5.96) se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{a^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k, \quad (5.98)$$

lo cual establece que $A_k = 1/a^{k+1}$. Reemplazando el resultado obtenido para A_k descrito en la ecuación (5.95), resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k P_k(\cos \theta), \quad r < a. \quad (5.99)$$

Definiendo la variable t como $t \equiv r/a$ y teniendo en cuenta $u \equiv \cos \theta$, la expresión (5.99) se puede escribir como:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u). \quad (5.100)$$

El lado derecho en (5.100), corresponde a una serie de Maclaurin para la función del lado izquierdo, que se denotará como $f(t, u)$, es decir:

$$f(t, u) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}}. \quad (5.101)$$

Se puede concluir que el coeficiente k -ésimo de la expansión de Maclaurin de $f(t, u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}}$, es $P_k(u)$. Concretamente:

$$P_k(u) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}} \right)_{t=0}. \quad (5.102)$$

Por lo anterior, la función $f(t, u)$ definida en (5.101) se denomina *función generadora de los polinomios de Legendre*.

Ejercicio 5.3. Demostrar que la función $\psi(\vec{r}) = 1/|\vec{r} - \vec{r}_0|$, representa una solución a la ecuación de Laplace.

5.6.2. Propiedades de los Polinomios de Legendre

A partir de las relaciones obtenidas para los polinomios de Legendre (como las establecidas en las ecuaciones (5.75) y (5.102)) se pueden analizar y derivar propiedades importantes de los polinomios de Legendre. Entre las mas importantes se encuentran:

Paridad

A partir de la relación (5.75), por sustitución directa de $u \rightarrow -u$, se puede comprobar que:

$$P_k(-u) = (-1)^k P_k(u). \quad (5.103)$$

es decir, $P_k(u)$ es una función par si k es par y es impar si k es impar.

Relación de Recurrencia

Una relación de recurrencia importante para los polinomios de Legendre puede deducirse a partir de la ecuación (5.100). Al derivar (5.100) con respecto a la variable t , se obtiene:

$$\frac{u-t}{(1+t^2-2tu)^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_k(u). \quad (5.104)$$

El lado izquierdo de la expresión anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{u-t}{(1+t^2-2tu)^{3/2}} &= \left\{ \frac{u-t}{1+t^2-2tu} \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}} \right\} \\ &= \frac{u-t}{1+t^2-2tu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \right\}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Al igualar el lado derecho de (5.105) con el lado derecho de (5.104), se tiene que:

$$\frac{u-t}{1+t^2-2tu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_k(u), \quad (5.106)$$

lo cual se puede escribir como:

$$(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) + (1+t^2-2tu) \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_k(u) = 0, \quad (5.107)$$

que se puede expandir en la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} P_k(u) - u \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) + \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_k(u) + \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k+1} P_k(u) - 2u \sum_{k=1}^{\infty} k t^k P_k(u) = 0. \quad (5.108)$$

Las menores potencias en la variable t en la primera y quinta sumatorias de la expresión (5.108) son t^1 ; el primer término de la segunda y tercera sumatorias tiene potencia t^0 , mientras que el primer término de la cuarta sumatoria corresponde a t^2 . Para expresar la ecuación (5.108) mediante una única sumatoria, es necesario que todas ellas tengan como primer término una potencia t^2 . Para lograrlo, se extrae de la primera sumatoria el término con $k = 0$; de la segunda, los términos con $k = 0$ y $k = 1$; de la tercera, los términos con $k = 1$ y $k = 2$; y, de la quinta, el término con $k = 1$. Aplicando este procedimiento y agrupando los términos con potencias t^0 y t^1 , la ecuación (5.108) adopta la forma:

$$\begin{aligned} 0 = & (-uP_0(u) + P_1(u))t^0 + (P_0(u) + 2P_2(u) - 3uP_1(u))t^1 \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} t^{k+1} P_k(u) - u \sum_{k=2}^{\infty} t^k P_k(u) + \sum_{k=3}^{\infty} k t^{k-1} P_k(u) + \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k+1} P_k(u) - 2u \sum_{k=2}^{\infty} k t^k P_k(u). \end{aligned} \quad (5.109)$$

Todas las sumas en (5.109) pueden unificarse en un único símbolo de sumatoria. Para ello, se realiza el cambio de variable $k = n - 1$ en la primera y cuarta suma; $k = n$ en la segunda y última; y $k = n + 1$ en la tercera. De este modo, la ecuación (5.109) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} 0 = & \{-uP_0(u) + P_1(u)\}t^0 + \{P_0(u) + 2P_2(u) - 3uP_1(u)\}t^1 \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{P_{n-1}(u) - uP_n(u) + (n+1)P_{n+1}(u) + (n-1)P_{n-1}(u) - 2unP_n(u)\}t^n. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Dada la independencia lineales de las funciones $g_k(t) = t^k$, se establece que cada factor entre llaves en la ecuación (5.110) son ceros y se obtiene la relación de recurrencia:

$$(2n+1)uP_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.111)$$

Usando $P_0(u) = 1$ y $P_1(u) = u$, se pueden generar todos los polinomios de Legendre a partir de la Ecuación (5.111).

Ortogonalidad

Una de las propiedades más importantes de los polinomios de Legendre es que, bajo una apropiada definición del producto interno, dichos polinomios son ortogonales. Esta propiedad

es útil, ya que puede interpretarse como una relación de completez: cualquier función bien comportada puede expandirse en términos de los polinomios de Legendre, de forma análoga a como las funciones periódicas pueden representarse mediante las funciones trigonométricas seno y coseno. Para encontrar la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, se procede escribiendo la ecuación diferencial de Legendre para un polinomio de orden n y para otro de orden m , es decir:

$$\frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] + n(n+1)P_n(u) = 0, \quad (5.112)$$

$$\frac{d}{du} [(1-u^2)P'_m(u)] + m(m+1)P_m(u) = 0, \quad (5.113)$$

donde $P'_n(u) \equiv \frac{dP_n(u)}{du}$. Ahora se procede a multiplicar la ecuación (5.112) por $P_m(u)$ y la ecuación (5.113) por $P_n(u)$ y se integra en el rango de definición de la variable u , es decir, entre -1 a $+1$, con lo cual se tiene:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] P_m(u) du + n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u) du = 0, \quad (5.114)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_m(u)] P_n(u) du + m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(u)P_n(u) du = 0. \quad (5.115)$$

Ahora, integrando por partes el primer término en (5.114) y (5.115), se encuentra:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] P_m(u) du &= \underbrace{[(1-u^2)P'_n(u)P_m(u)]_{-1}^1}_0 \\ &\quad - \int_{-1}^1 (1-u^2)P'_n(u)P'_m(u) du, \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_m(u)] P_n(u) du &= \underbrace{[(1-u^2)P'_m(u)P_n(u)]_{-1}^1}_0 \\ &\quad - \int_{-1}^1 (1-u^2)P'_m(u)P'_n(u) du. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Reemplazando los resultados anteriores en (5.112) y (5.113), conlleva:

$$- \int_{-1}^1 (1-u^2)P'_n(u)P'_m(u) du + n(n+1)P_n(u) = 0, \quad (5.118)$$

$$- \int_{-1}^1 (1-u^2)P'_m(u)P'_n(u) du + m(m+1)P_m(u) = 0, \quad (5.119)$$

Al restar las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(u) P_m(u) du = 0. \quad (5.120)$$

El resultado expresado en (5.120), establece que:

$$\text{Si } m \neq n, \Rightarrow \int_{-1}^1 P_n(u) P_m(u) du = 0. \quad (5.121)$$

Es decir, si el producto interno se define como una integral de -1 a $+1$, entonces los polinomios de Legendre de diferentes órdenes son ortogonales.

Normalización de los Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre se pueden normalizar adecuadamente para lo cual se utiliza la relación (5.100) y la propiedad de ortogonalización establecida en la ecuación (5.121). Elevando al cuadrado la ecuación (5.100) e integrando en el rango de definición de la variable u (entre -1 y 1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(u) \right) du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+k} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(u) P_m(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

La expresión entre llaves en la ecuación (5.122) por la propiedad de ortogonalización de los polinomios de Legendre, solo es diferente de cero para $m = k$, por lo tanto, la ecuación (5.122) se simplifica y toma la forma:

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \int_{-1}^1 P_k^2(u) du. \quad (5.123)$$

Ahora, la integral en el lado derecho de (5.123) se evalúa considerando el cambio de variable $y = 1 + t^2 - 2tu$, de modo que $dy = -2t du$, y se obtiene:

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} = -\frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)]. \quad (5.124)$$

Los dos términos logarítmicos en la expresión (5.124), se pueden expandir en una serie de potencias, tal que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} &= \frac{1}{t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-t)^k}{k} \right) \\
&= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} (1 - (-1)^k).
\end{aligned} \tag{5.125}$$

El análisis de la parte derecha de la expresión (5.125) muestra que, cuando k toma valores pares, los términos se anulan; por lo tanto, solo deben considerarse los términos impares de k . Para dejar explícitos únicamente los términos impares en la sumatoria, se realiza el reemplazo $k \rightarrow 2k+1$, y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+2} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} (1 - (-1)^{2k+1}) \\
&= 2 \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1}.
\end{aligned} \tag{5.126}$$

Al reemplazar el resultado expresado en (5.126) en la ecuación (5.123) se establece la relación:

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \int_{-1}^1 P_k^2(u) du. \tag{5.127}$$

Para que estas dos series de potencias en t sean iguales, sus coeficientes deben ser iguales, por lo tanto:

$$\int_{-1}^1 P_k^2(u) du = \frac{2}{2k+1}. \tag{5.128}$$

Combinando el resultado dado por (5.121) y el resultado de normalización expresado en (5.128), se obtiene la condición de ortonormalización de los polinomios de Legendre, que se expresada como:

$$\int_{-1}^1 P_m(u) P_n(u) du = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \tag{5.129}$$

5.6.3. Fórmula de Rodrigues

Hasta el momento, se ha establecido la forma funcional de los polinomios de Legendre de orden k como series de potencias (5.102) y, adicionalmente, en forma cerrada en términos de

derivadas de una función generadora (5.75). Puede obtenerse una expresión adicional para los polinomios de Legendre a partir de la fórmula de Rodrigues, dada por:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n. \quad (5.130)$$

Para mostrar la consistencia de la relación anterior, se verificará que la expresión (5.130) es solución de la ecuación diferencial de Legendre dada por (5.29). Para cumplir el objetivo anterior se tiene en cuenta que la función $f(z) = (z^2 - 1)^n$; de argumento complejo, se puede expresar en forma integral a través de la fórmula de Cauchy dada por:

$$(z^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{\xi - z} d\xi. \quad (5.131)$$

Por lo tanto, la expresión (5.130) con argumento complejo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{\xi - z} d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \end{aligned} \quad (5.132)$$

La primera y segunda derivadas aplicadas sobre la función $P_n(z)$, a partir de (5.132), vienen dadas por las expresiones:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{n+1}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi, \quad (5.133)$$

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+3}} d\xi. \quad (5.134)$$

Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (5.29) (con argumento complejo y con $\alpha = n(n+1)$), se obtiene:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P}{dz^2} - 2z \frac{dP}{dz} + n(n+1)P = \frac{n+1}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n [n\xi^2 - 2(n+1)\xi z + n+2]}{(\xi - z)^{n+3}} d\xi, \quad (5.135)$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{(\xi^2 - 1)^n [n\xi^2 - 2(n+1)\xi z + n+2]}{(\xi - z)^{n+3}} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{(\xi^2 - 1)^{n+1}}{(\xi - z)^{n+2}} \right), \quad (5.136)$$

la expresión (5.135) toma la forma:

$$\begin{aligned} (1-z^2)\frac{d^2P}{dz^2} - 2z\frac{dP}{dz} + n(n+1)P &= \frac{n+1}{2^n(2\pi i)} \oint_C \frac{d}{d\xi} \left(\frac{(\xi^2-1)^{n+1}}{(\xi-z)^{n+2}} \right) d\xi \\ &= \frac{n+1}{2^n(2\pi i)} \oint_C d \left(\frac{(\xi^2-1)^{n+1}}{(\xi-z)^{n+2}} \right) \end{aligned} \quad (5.137)$$

El integrando en (5.137) es la derivada de una función y ya que el contorno de integración está cerrado, los límites inferiores y superiores de la integración coinciden y la integral se anula. Así, la fórmula de Rodrigues efectivamente genera los polinomios de Legendre.

Ejercicio 5.4. Demostrar la relación expresada en la ecuación (5.136).

Ejemplo 5.1. Como un ejemplo del uso de la fórmula de Rodrigues, en este ejemplo, se realizará la integral dada por:

$$I = \int_{-1}^1 u^k P_n(u) du, \quad \text{para } k \leq n. \quad (5.138)$$

Solución: El procedimiento consiste en reemplazar la expresión dada para $P_n(u)$ en (5.130), en la integral (5.138), e integrar por partes repetidamente. Para una primera integración por partes se obtiene:

$$I = \frac{1}{2^n n!} \left[u^k \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} (u^2-1)^n \right]_{-1}^1 - \frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^1 u^{k-1} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} (u^2-1)^n du. \quad (5.139)$$

El primer término en (5.139) es cero porque cada diferenciación reduce, al menos en una unidad, la potencia del factor $(u^2-1)^n$. Así, después de $n-1$ diferenciaciones, se obtiene una suma de términos, cada uno proporcional a $(u^2-1)^m$ con $1 \leq m < n$. Todos estos términos se anulan en $x=1$ y en $x=-1$. Después de aplicar reiteradas integraciones por partes (k veces), se obtiene:

$$I = \frac{(-1)^k}{2^n n!} k! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{du^{n-k}} (u^2-1)^n du. \quad (5.140)$$

Ahora, si $k < n$, es posible realizar una integral adicional en (5.140), y la integral resulta en:

$$I = \frac{(-1)^k}{2^n n!} k! \frac{d^{n-k-1}}{du^{n-k-1}} (u^2-1)^n \Big|_{-1}^1. \quad (5.141)$$

Ya que $k < n$, entonces $n-k-1 \geq 0$, por lo tanto la integral (5.141) será proporcional a (u^2-1) , lo cual se anula para $u = \pm 1$. Entonces, la integral (5.140) solo es diferente de cero para $n=k$, en tal caso la integral (5.140), toma la forma:

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du \quad (5.142)$$

La integral que queda se puede resolver realizando nuevamente una integración por partes, para lo cual se toma $w = (u^2 - 1)^n$ y $dv = du$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du &= \underbrace{(u^2 - 1)^n u \Big|_{-1}^1}_{=0} - 2n \int_{-1}^1 u^2 (u^2 - 1)^{n-1} du \\ &= -2n \int_{-1}^1 u^2 (u^2 - 1)^{n-1} du. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Si se aplica nuevamente integración por partes, tomando $w = (u^2 - 1)^{n-1}$ y $dv = u^2 du$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du &= -2n \left\{ \underbrace{(u^2 - 1)^{n-1} \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1}_{=0} - 2(n-1) \int_{-1}^1 \frac{u^4}{3} (u^2 - 1)^{n-1} du \right\} \\ &= (-2)^2 n(n-1) \int_{-1}^1 \frac{u^4}{3} (u^2 - 1)^{n-1} du, \end{aligned} \quad (5.144)$$

Al continuar aplicando el procedimiento de integración por partes m veces, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du &= (-2)^m (n(n-1)\dots(n-m+2)(n-m+1)) \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \frac{u^{2m}}{3 \cdot 5 \dots (2m-1)} (u^2 - 1)^{n-m} du \end{aligned} \quad (5.145)$$

y si se toma $m = n$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du &= (-2)^n (n(n-1)\dots(2)(1)) \int_{-1}^1 \frac{u^{2n}}{3 \cdot 5 \dots (2n-1)} du \\ &= (-2)^n n! \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)!!} \Big|_{-1}^1 \\ &= (-2)^n n! \frac{2}{(2n+1)(2n-1)!!}. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Reemplazando el resultado expresado en (5.146) en la ecuación (5.142), la integral en estudio toma la forma:

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (u^2 - 1)^n du = \frac{(-1)^n}{2^n} (-2)^n n! \frac{2}{(2n+1)(2n-1)!!} \\ &= \frac{2n!}{(2n+1)(2n-1)!!}, \end{aligned} \quad (5.147)$$

y teniendo en cuenta que $(2n-1) = (2n)!/(2^n n!)$, resulta en

$$I = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (5.148)$$

En conclusión:

$$\int_{-1}^1 u^k P_n(u) du = \begin{cases} 0, & \text{si } k < n, \\ \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}, & \text{si } k = n. \end{cases} \quad (5.149)$$

Si en lugar de u^k se tiene un polinomio general de orden k en u con $n > k$, la integral aún se anulará.

Ejercicio 5.5. Demuestre que la integral (5.138) se anula para todo $k > n$.

5.7. Solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

En la sección (5.1), tras aplicar el método de separación de variables a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, se obtuvieron las ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables r, θ y ϕ , dadas por:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \alpha R = 0, \quad (5.150)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (5.151)$$

$$\frac{d^2 S}{d\phi^2} + \beta S = 0, \quad (5.152)$$

las cuales, posteriormente, se resolvieron en el caso de simetría azimutal, es decir, cuando $\beta = 0$. En esta sección se resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales para las variables esféricas en el caso general $\beta \neq 0$.

5.7.1. Solución para a la ecuación diferencial para la coordenada ϕ

La ecuación (5.152) tiene solución armónica (periódica) si $\beta > 0$, y solución hiperbólica (proporcional a $e^{\pm\sqrt{\beta}\phi}$) si $\beta < 0$; para $\beta = 0$, la ecuación es lineal respecto a la variable ϕ . Dado que, físicamente, la solución esperada debe cumplir $S(\phi) = S(\phi + 2\pi)$ (periódica), la única solución admisible para problemas físicos es la armónica, la cual ocurre cuando $\beta > 0$.

Bajo esta consideración, la solución debe ser proporcional a las funciones exponenciales $e^{\pm i\sqrt{\beta}\phi}$; por lo tanto, se obtiene:

$$S(\phi) = A_{\pm} e^{\pm i\sqrt{\beta}\phi}, \quad (5.153)$$

donde $A_{\pm}$ son constantes por determinar. Además, la condición de periodicidad $S(\phi) = S(\phi + 2\pi)$ implica que $\sqrt{\beta}$ debe ser un número entero; por lo tanto, se denota $\beta = m^2$, siendo m un número entero, y la solución (5.153) puede escribirse como:

$$S(\phi) = A_{\pm} e^{\pm im\phi}. \quad (5.154)$$

Ejercicio 5.6. *Demostrar que las funciones $A_{\pm} e^{\pm i\sqrt{\beta}\phi}$, son soluciones a la ecuación diferencial (5.152) y que la condición de periodicidad definida para la variable angular ϕ ($S(\phi) = S(\phi + 2\pi)$), requiere que $\sqrt{\beta}$ sea un número entero.*

5.7.2. Solución a la ecuación diferencial asociada a la coordenada θ : Polinomios asociados de Legendre.

Ya que se ha definido $\beta > 0$ y $\sqrt{\beta}$ como entero, al reemplazar $\beta = m^2$, la ecuación (5.151) se puede escribir como:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (5.155)$$

Ahora, para el caso de simetría azimutal, es decir con $\beta = 0$, se determino que α se podría escribir en términos de un número entero a través de la relación $\alpha = k(k+1)$. Dado que la solución para $\beta = 0$ es una caso particular de la ecuación diferencial (5.155), se concluye que (5.155) puede escribirse como:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (5.156)$$

Realizando el mismo procedimiento aplicado al caso particular de simetría azimutal, es decir, tomando $u = \cos(\theta)$ y, escribiendo (5.156) en términos de u , se obtiene la ecuación:

$$(1-u^2) \frac{d^2 Y(u)}{du^2} - 2u \frac{dY(u)}{du} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] Y(u) = 0, \quad (5.157)$$

donde se ha denotado $\Theta(\theta) = Y(u)$.

Ejercicio 5.7. *Demostrar que la ecuación (5.156) bajo el cambio de variable $u = \cos \theta$, toma la forma indicada en la expresión (5.157), donde se denota $\Theta(\theta) = Y(u)$, con $u = \cos \theta$.*

Se puede asumir que la solución a la ecuación (5.157) se puede escribir como:

$$Y(u) = (1 - u^2)^{m/2} Q(u), \quad (5.158)$$

para la cual se tiene que:

$$Y'(u) = \frac{dY(u)}{du} = -mu(1 - u^2)^{(m/2)-1} Q(u) + (1 - u^2)^{m/2} Q'(u) \quad (5.159)$$

Ahora, al derivar $Y'(u)$ para encontrar $Y''(u)$, se obtiene que:

$$Y''(u) = \left[-m(1 - u^2)^{\frac{m}{2}-1} + m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) (2u^2)(1 - u^2)^{\frac{m}{2}-2} \right] Q(u) \quad (5.160)$$

$$- 2mu(1 - u^2)^{\frac{m}{2}-1} Q'(u) + (1 - u^2)^{\frac{m}{2}} Q''(u). \quad (5.161)$$

Al tener en cuenta los resultados expresados en (5.158), (5.159) y (5.161), la ecuación (5.157), toma la forma:

$$(1 - u^2)^{m/2} \{ (1 - u^2) Q''(u) - 2(m+1)u Q'(u) + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) Q(u) \} = 0, \quad (5.162)$$

y ya que la relación anterior se debe cumplir para todo valor de u , se tiene que

$$(1 - u^2) Q''(u) - 2(m+1)u Q'(u) + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) Q(u) = 0. \quad (5.163)$$

Por otro lado, la ecuación de Legendre está dada por

$$(1 - u^2) \frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} - 2u \frac{dP_\ell(u)}{du} + \ell(\ell+1) P_\ell(u) = 0, \quad (5.164)$$

que al ser derivada m veces, se tiene:

$$\frac{d^m}{du^m} \left\{ (1 - u^2) \frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right\} - 2 \frac{d^m}{du^m} \left\{ u \frac{dP_\ell(u)}{du} \right\} + \ell(\ell+1) \frac{d^m}{du^m} P_\ell(u) = 0. \quad (5.165)$$

Al considerar la fórmula de Leibniz para derivación de un producto de funciones dada por:

$$\frac{d^n}{du^n} \{ w(u) v(u) \} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{d^k}{du^k} w(u) \right) \left(\frac{d^{n-k}}{du^{n-k}} v(u) \right) \quad (5.166)$$

es posible derivar m veces la expresión (5.165). Aplicando la fórmula de Leibniz sobre el primer término de (5.165), se tiene que:

$$\frac{d^m}{du^m} \left\{ (1 - u^2) \frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right\} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \left\{ \frac{d^k}{du^k} (1 - u^2) \right\} \left\{ \frac{d^{m-k}}{du^{m-k}} \left(\frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right) \right\}. \quad (5.167)$$

Los únicos términos en la sumatoria en (5.167) que no se anulan, corresponden a $k = 0, 1, 2$; para otros valores de k , la derivación anula el término $(1 - u^2)$. Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{du^m} \left\{ (1 - u^2) \frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right\} &= (1 - u^2) \frac{d^m}{du^m} \left(\frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right) + m \left(\frac{d}{du} (1 - u^2) \right) \left(\frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} \left(\frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{d^2}{du^2} (1 - u^2) \right) \left(\frac{d^{m-2}}{du^{m-2}} \left(\frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.168)$$

lo cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{du^m} \left\{ (1 - u^2) \frac{d^2 P_\ell(u)}{du^2} \right\} &= (1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} \left(\frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} \right) - 2um \left(\frac{d}{du} \left(\frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} \right) \right) \\ &\quad - m(m-1) \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m}. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Ahora, aplicando la fórmula de Leibniz al segundo término en (5.164), se tiene que

$$2 \frac{d^m}{du^m} \left(u \frac{dP_\ell(u)}{du} \right) = 2 \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{d^k}{du^k} u \right) \left(\frac{d^{m-k}}{du^{m-k}} \left(\frac{dP_\ell(u)}{du} \right) \right). \quad (5.170)$$

Los únicos términos en la sumatoria diferentes de cero en la expresión anterior, son aquellos para los cuales k toma el valor de cero y uno, de tal manera que

$$2 \left(\frac{d^m}{du^m} \left(u \frac{dP_\ell(u)}{du} \right) \right) = u \left(\frac{d^m}{du^m} \left(\frac{dP_\ell(u)}{du} \right) \right) + 2m \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} \left(\frac{dP_\ell(u)}{du} \right), \quad (5.171)$$

lo cual se puede escribir como

$$2 \left(\frac{d^m}{du^m} \left(u \frac{dP_\ell(u)}{du} \right) \right) = 2u \left(\frac{d}{du} \left(\frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} \right) \right) + 2m \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m}. \quad (5.172)$$

Al reemplazar (5.169) y (5.172) en (5.167), se tiene que:

$$(1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} \left(\frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} \right) - 2u(m+1) \frac{d}{du} \left(\frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} \right) - m(m+1) \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m} = 0. \quad (5.173)$$

Comparando la ecuación (5.163) con la ecuación (5.173), se observa que son equivalentes si se establece que

$$Q(u) = \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m}, \quad (5.174)$$

por lo tanto, la solución para la ecuación asociada de Legendre, vendrá dada por:

$$Y(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m}. \quad (5.175)$$

La función $Y(u)$ representa los polinomios asociados de Legendre, que se denotan como P_ℓ^m (para $m \geq 0$), es decir:

$$P_\ell^m(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(u)}{du^m}. \quad (5.176)$$

La expresión anterior se puede generalizar para valores negativos de m , simplemente tomando el valor absoluto de m , en la parte derecha de (5.176), con lo cual es posible escribir la siguiente expresión para todo valor de m :

$$P_\ell^m(u) = (1 - u^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} P_\ell(u)}{du^{|m|}}. \quad (5.177)$$

Dado que los polinomios de Legendre $P_l(u)$ son de orden l en la variable u , los polinomios asociados de Legendre son diferentes de cero solo si $|m| \leq l$ (ya que la relación (5.177) implica $|m|$ derivadas aplicadas a los polinomios $P_l(u)$). Por lo tanto

$$-l \leq m \leq l. \quad (5.178)$$

5.7.3. Armónicos esféricos

La solución en la parte angular para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (en los ángulos θ y ϕ), vendrá dada por la multiplicación de la solución $S(\phi)$; la cual es proporcional a $e^{\pm im\phi}$, por la solución a la ecuación asociada de Legendre para la variable θ (polinomios asociados de Legendre), con lo cual se tiene:

$$Y_{l\pm m}(\theta, \phi) = C_{l\pm m} P_\ell^m(u) e^{\pm im\phi}. \quad (5.179)$$

Las funciones $Y_{l\pm m}(\theta, \phi)$ se conocen como los armónicos esféricos, donde $C_{l\pm m}$ representa una constante que se determina a través de la condición de ortonormalización dada por:

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (5.180)$$

a partir de lo cual, se determina que

$$C_{lm} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}. \quad (5.181)$$

Por lo tanto, los armónicos esféricos toman la forma:

$$Y_{l\pm m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \frac{(\ell \mp m)!}{(\ell \pm m)!}} P_\ell^m(u) e^{\pm im\phi}. \quad (5.182)$$

5.7.4. Solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

Dado que la ecuación diferencial para la coordenada radial no depende del valor que tome la variable β , la solución para la parte radial encontrada para el caso de simetría azimutal es general, y por lo tanto, la solución mas general para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas vendrá dada por:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) Y_k^m(\theta, \phi). \quad (5.183)$$

5.8. Aplicaciones físicas

Existen gran variedad de problemas en física con simetría esférica que requieren la solución de la ecuación de Laplace. Como caso particular, se conoce que el campo electrostático obedece la Ley de Gauss, dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (5.184)$$

donde $\rho(\vec{r})$ corresponde a la densidad de carga eléctrica y ϵ_0 a la susceptibilidad eléctrica en el vacío. Ya que el campo eléctrico es conservativo, se puede escribir como el gradiente de un potencial eléctrico $\psi(\vec{r})$, tal que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\psi(\vec{r}), \quad (5.185)$$

de tal forma que la ley de Gauss, en términos del potencial eléctrico, se puede escribir como:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (5.186)$$

Si se está estudiando una región del espacio libre de carga eléctrica ($\rho(\vec{r}) = 0$), la ley de Gauss se convierte en la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico, es decir

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0. \quad (5.187)$$

A continuación se presentarán ejemplos de problemas electrostáticos que impliquen la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

Ejemplo 5.2. *Se considera un cascarón esférico de radio R , cuyo potencial en la superficie está dado por $V(\theta)$. Para esta configuración, se determinará el potencial eléctrico tanto en la región interior como en la exterior al cascarón.*

Solución: En la región libre de carga $r \neq R$, el potencial obedece la ecuación de Laplace y dado que el potencial en $r = R$ solo depende del ángulo θ , dicha condición sugiere una solución con simetría azimutal, que se expresa en forma general como (ecuación (5.92)):

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\cos \theta). \quad (5.188)$$

En este punto, para dar solución al problema, se dividirá el espacio en dos regiones: en la región interior al cascarón $r \leq R$ y en la región exterior al cascarón $r \geq R$.

Región interior: $r \leq R$

Dado que el punto $r = 0$ se encuentra dentro de la región de estudio, para tener una solución convergente se debe tomar $B_k = 0$ en (5.188), con lo cual la solución toma la forma:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos \theta). \quad (5.189)$$

Ahora, aplicando la condición en la frontera: $\psi(R, \theta) = V(\theta)$ para $r = R$, se tiene que

$$V(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k P_k(\cos \theta). \quad (5.190)$$

Para determinar las constantes A_k en (5.190), se utiliza la condición de ortonormalización para los polinomios de Legendre (ecuación (5.129)); al multiplicar la ecuación (5.190) por $P_l(\cos \theta)$ e integrar sobre el ángulo sólido $d\Omega$, se obtiene:

$$\int V(\theta) P_l(\cos \theta) d\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \int P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) d\Omega. \quad (5.191)$$

El diferencial de ángulo sólido en coordenadas esféricas, está dado por $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$; sin embargo, teniendo en cuenta la naturaleza azimutal del problema, la integración correspondiente al ángulo $d\phi$ arroja un valor de 2π en ambos lados de la ecuación (5.191) y se cancela, por lo tanto la expresión (5.191) se reduce a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \underbrace{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{2\delta_{lm}/(2l+1)} \\ &= \frac{2A_l R^l}{2l+1}. \end{aligned} \quad (5.192)$$

Por lo tanto

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (5.193)$$

Una vez realizada la integración en (5.193) se obtienen los valores de A_l que al ser reemplazados en la expresión (5.189) definen la solución buscada. En próximos ejemplos se dará concretamente la dependencia de $V(\theta)$ con la variable θ para una solución particular del problema en estudio.

Región exterior: $r \geq R$

En este caso, el punto $r = 0$, no se encuentra dentro de la región de estudio, pero si los puntos para los cuales $r \rightarrow \infty$, de tal manera que para garantizar una solución convergente se debe tomar $A_k = 0$ en (5.188), con lo cual la solución toma la forma:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k r^{-k-1} P_k(\cos \theta). \quad (5.194)$$

Nuevamente, al tener en cuenta la condición en la frontera: $\psi(R, \theta) = V(\theta)$ para $r = R$, se tiene que

$$V(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{-k-1} P_k(\cos \theta). \quad (5.195)$$

Para determinar las constantes B_k en (5.195), es necesario utilizar la condición de ortonormalización para los polinomios de Legendre. Para ello se multiplica la ecuación (5.190) por $P_l(\cos \theta)$ y se integra en el ángulo sólido $d\Omega$; es decir:

$$\int V(\theta) P_l(\cos \theta) d\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{-k-1} \int P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) d\Omega, \quad (5.196)$$

siendo $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Dado que el integrando en (5.191) no depende del ángulo ϕ , la integral en dicho ángulo simplemente es 2π , y la expresión (5.196) toma la forma

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{-k-1} \underbrace{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{2\delta_{lm}/(2l+1)} \\ &= \frac{2B_l R^{-l-1}}{2l+1}. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Por lo tanto,

$$B_l = \frac{2l+1}{2R^{-l-1}} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (5.198)$$

Una vez realizada la integración en (5.198), se obtienen los valores de B_l que determinan completamente la solución expresada (5.194).

Ejemplo 5.3. Se considera en este ejemplo un cascarón esférico conductor de radio R , dividido por el plano ecuatorial por una aislante de espesor despreciable. La parte superior del cascarón se encuentra a un potencial V_0 y la parte inferior se encuentra a un potencial $-V_0$. Para el sistema planteado, se encontrará el potencial eléctrico dentro y fuera del cascarón (ver figura 5.1).

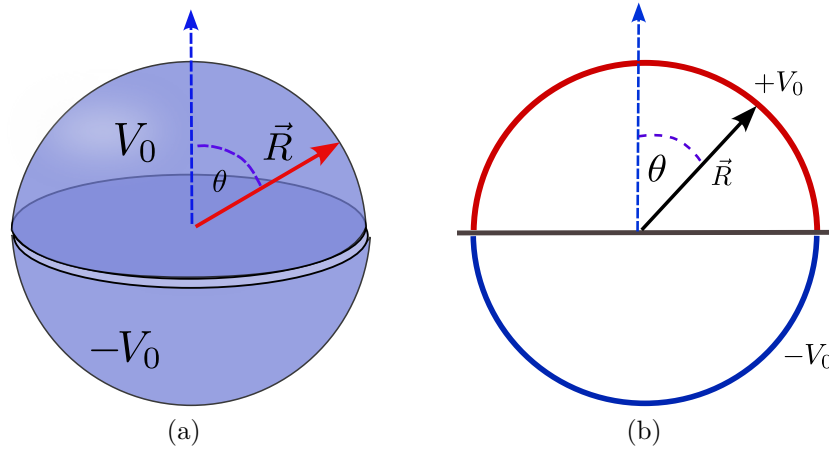


Figura 5.1: Ejemplo (5.3). Potencial eléctrico de un cascarón esférico dividido en dos hemisferios.

Solución: Tomando convenientemente al eje z como el eje perpendicular al plano ecuatorial que separa la esfera en dos partes, se puede escribir el potencial como:

$$V(\theta) = \begin{cases} V_0 & \text{Para } 0 \leq \theta \leq \pi \\ -V_0 & \text{Para } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (5.199)$$

Lo anterior implica que el potencial se puede establecer como una función que depende del ángulo θ . La solución por lo tanto tendrá carácter azimutal y se pueden utilizar las expresiones (5.193) y (5.198) para encontrar los coeficientes A_k y B_k , que determinan las soluciones para las regiones $r < R$ y $r > R$ respectivamente, las cuales fueron obtenidas en el ejemplo (5.2). Concretamente se tiene que:

Región interior: $r < R$

Al interior de la esfera, la solución viene dada por:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos \theta), \quad (5.200)$$

donde A_k se determina a partir de (ecuación (5.193)):

$$A_k = \frac{2k+1}{2R^k} \underbrace{\int_0^\pi V(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{I_k}, \quad (5.201)$$

donde el potencial $V(\theta)$ viene dado por (5.199). Por lo tanto, la integral en la ecuación (5.201) toma la forma:

$$\begin{aligned} I_k &= \left\{ \int_0^{\pi/2} V_0 P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi V_0 P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\} \\ &= V_0 \left\{ \int_0^{\pi/2} P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (5.202)$$

Tomando $u = \cos \theta$, se tiene que

$$\begin{aligned} I_k &= V_0 \left\{ - \int_1^0 P_k(u) du + \int_0^{-1} P_k(u) du \right\}, \\ &= V_0 \left\{ \int_0^1 P_k(u) du - \int_{-1}^0 P_k(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (5.203)$$

Cambiando $u \rightarrow -u$ en la segunda integral al lado derecho de (5.203), se obtiene:

$$I_k = V_0 \left\{ \int_0^1 P_k(u) du + \int_1^0 P_k(-u) du \right\}, \quad (5.204)$$

y al tener en cuenta que $P_k(-u) = (-1)^k P_k(u)$, la expresión (5.204) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} I_k &= V_0 \left\{ \int_0^1 P_k(u) du + (-1)^k \int_1^0 P_k(u) du \right\} \\ &= V_0 \left\{ \int_0^1 P_k(u) du - (-1)^k \int_0^1 P_k(u) du \right\} \\ &= V_0 (1 - (-1)^k) \int_0^1 P_k(u) du. \end{aligned} \quad (5.205)$$

La ecuación (5.205) establece que si $k = \text{par}$, $I_k = 0$, por lo cual la solución solo puede tener potencias impares de r . Tomando $k \rightarrow 2k+1$, la expresión (5.205) se puede escribir como:

$$I_{2k+1} = 2V_0 \int_0^1 P_{2k+1}(u) du. \quad (5.206)$$

Para resolver la integral en (5.206), se puede utilizar la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre, tal que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_{2k+1}(u)du &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \int_0^1 \frac{d^{2k+1}}{du^{2k+1}}(u^2-1)^{2k+1}du \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{du^{2k}}(u^2-1)^{2k+1} \Big|_{u=0}^{u=1}.\end{aligned}\quad (5.207)$$

Al evaluar la expresión anterior en $u = 1$ se anula, ya que como se menciono anteriormente

$$\frac{d^{2k}}{du^{2k}}(u^2-1)^{2k+1} \propto (u^2-1), \quad (5.208)$$

debido a que el número de derivadas ($2k$) es menor que la potencia ($2k+1$), y que $(u^2-1)|_{u=1} = 0$. A partir de lo anterior, la expresión (5.207) toma la forma

$$\int_0^1 P_{2k+1}(u)du = -\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{du^{2k}}(u^2-1)^{2k+1} \Big|_{u=0}.$$
 (5.209)

Ahora, utilizando la formula de Newton para el binomio $(u^2-1)^{2k+1}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_{2k+1}(u)du &= -\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{du^{2k}} \left\{ \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{(2k+1)!}{j!(2k+1-j)!} \underbrace{(-1)^{2k+1-j}}_{-(-1)^j} (u^2)^j \right\} \Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}} \left\{ \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{(-1)^j}{j!(2k+1-j)!} \frac{d^{2k}}{du^{2k}} u^{2j} \right\} \Big|_{u=0}.\end{aligned}\quad (5.210)$$

El factor u^{2j} solo se puede derivar un máximo de $2j$ veces (un número mayor de derivadas, implica derivar una constante cuyo resultado es cero), por lo tanto, ya que se esta derivando $2k$ veces, se debe cumplir que: $2k \leq 2j$, y por lo tanto $j \geq k$. Los términos para los cuales $j > k$; tras la derivación, resultan proporcionales a la variable u , los cuales al ser evaluados en cero se anulan, por lo tanto el único término diferente de cero en la sumatoria en (5.210) corresponde al término para el cual $j = k$ y la expresión (5.210) se reduce a:

$$\int_0^1 P_{2k+1}(u)du = \frac{1}{2^{2k+1}} \left\{ \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \frac{d^{2k}}{du^{2k}} u^{2k} \right\} \Big|_{u=0}.$$
 (5.211)

Ahora, ya que

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} u^{2k} &= (2k)u^{2k-1}, \\ \frac{d^2}{du^2} u^{2k} &= (2k)(2k-1)u^{(2k-2)}, \\ \frac{d^3}{du^3} u^{2k} &= (2k)(2k-1)(2k-2)u^{(2k-3)}.\end{aligned}\quad (5.212)$$

Por iteración, tras efectuar m derivaciones sobre u^{2k} , se puede determinar que:

$$\frac{d^m}{du^m} u^{2k} = (2k)(2k-1)\dots(2k-(m-1))u^{(2k-m)}. \quad (5.213)$$

Si $m \rightarrow 2k$, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2k}}{du^{2k}} u^{2k} &= (2k)(2k-1)\dots(2k-(2k-1))u^0 \\ &= (2k)!. \end{aligned} \quad (5.214)$$

Reemplazando el resultado anterior en (5.211), se tiene que

$$\int_0^1 P_{2k+1}(u) du = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \quad (5.215)$$

Al reemplazar (5.215) en (5.206), se obtiene:

$$I_{2k+1} = 2V_0 \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!}, \quad (5.216)$$

por lo tanto las constantes A_k definidas en (5.201) para $k \rightarrow 2k+1$, toman la forma:

$$A_{2k+1} = \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)! R^{2k+1}}. \quad (5.217)$$

Ya que I_k es cero para $k = \text{par}$, conlleva que $A_k = 0$ para $k = \text{par}$. La solución al interior de la esfera para el potencial finalmente toma la forma:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta), \quad (5.218)$$

Ejercicio 5.8. Realizar la gráfica de $\psi(r, \theta)$ vs θ para la solución expresada en (5.218), para diferentes valores de r entre 0 y R (tomando los primeros 10 términos de la sumatoria).

Región exterior: $r > R$

En la región exterior a la esfera, la solución viene dada por:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k r^{-k-1} P_k(\cos \theta), \quad (5.219)$$

donde B_k se determina a partir de (ecuación (5.193)):

$$B_k = \frac{2k+1}{2R^{-k-1}} \underbrace{\int_0^\pi V(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{I_k}, \quad (5.220)$$

La integral I_k implicada en la determinación de B_k , ya se resolvió en la evaluación del potencial al interior de la esfera y su resultado se expresa en (5.216), correspondiente a valores impares de k ; para valores pares, el resultado es cero. Entonces, teniendo en cuenta el resultado dado en (5.216), se tiene que:

$$B_{2k+1} = \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)! V_0}{R^{-2k-2} 2^{2k+1} k! (k+1)!}, \quad (5.221)$$

y la solución en el exterior del cascarón esférico toma la forma:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)! V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{-2k-2} P_{2k+1}(\cos \theta), \quad (5.222)$$

En la figura 5.2 se esquematiza $\psi(r, \theta)$ vs θ para la solución expresada en (5.222), para diferentes valores de r (tomando los primeros 10 términos de la sumatoria y con $V_0 = 1$ y $R = 1$). Como se observa en la figura 5.2, cuando $r \rightarrow R$ el potencial toma la forma de una función escalón y cuando $r \gg R$, el potencial tiende a anularse.

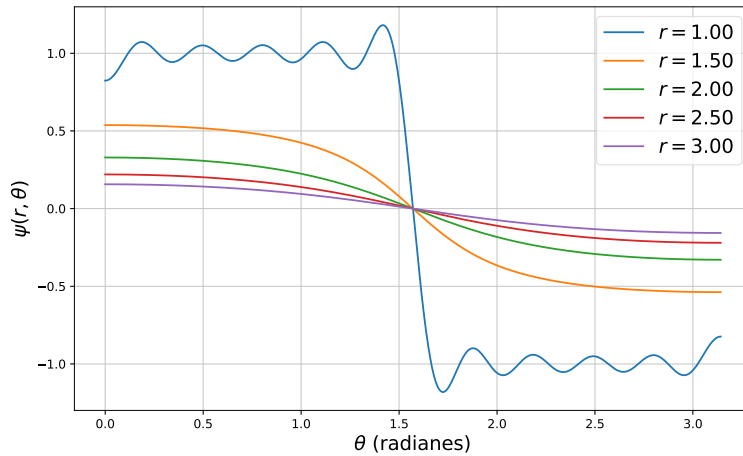


Figura 5.2: Ejemplo (5.3). Representación gráfica de la solución establecida en (5.222), tomando los primeros 10 términos de la sumatoria y con valores de $V_0 = 1$ y $R = 1$.

Ejemplo 5.4. Se tiene una esfera metálica de radio a , la cual se encuentra a un potencial V_a . La esfera se ubica en el interior de un cascarón conductor esférico de radio R ($R > a$) que

se encuentra dividido en el plano ecuatorial por un medio aislante de espesor infinitesimal que separa el cascarón en dos. La parte superior del cascarón se mantiene a un potencial V_0 y la parte inferior a un potencial $-V_0$ (ver figura 5.3). Para tal sistema se encontrará el potencial en las regiones $a < r < R$ y $R > b$.

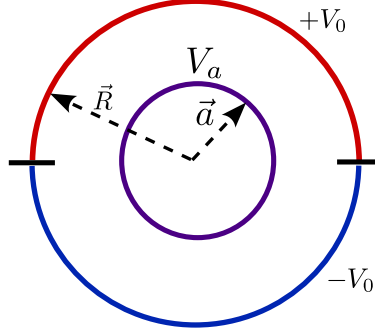


Figura 5.3: Ejemplo (5.4). Potencial eléctrico generado por dos cascarones esféricos. El cascarón externo se divide en dos hemisferios.

Solución: Las condiciones establecidas en este ejemplo para la región $r > R$ coinciden con las planteadas en el ejemplo (5.2); por lo tanto, la solución es la misma que la dada en la ecuación (5.222). Resta determinar el caso correspondiente a la región $a < r < R$, cuya solución general está dada por la expresión (5.92).

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k-1}) P_k(\cos \theta). \quad (5.223)$$

Para la región $a < r < R$, no se tiene en cuenta los puntos $r = 0$ y la variable r siempre se mantiene finita, por lo tanto los dos términos en (5.223) son admisibles. Las condiciones de frontera que se deben utilizar para determinar los coeficientes A_k y B_k son:

Condición en $r = a$

Para $r = a$, $\psi(r, \theta) = V_a$, tal que

$$\begin{aligned} \psi(a, \theta) = V_a &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(A_k a^k + B_k a^{-k-1})}_{C_k} P_k(\cos \theta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos \theta), \quad \forall \theta, \end{aligned} \quad (5.224)$$

donde se ha definido

$$C_k = A_k a^k + B_k a^{-k-1}. \quad (5.225)$$

Para encontrar las constantes C_k a partir de (5.224), se utiliza las propiedades de ortogonalización de los polinomios de Legendre, por lo tanto se multiplica (5.224) por $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ y se integra en la variable $d\theta$ entre 0 y π , con lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V_a P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \underbrace{\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{2\delta_{lm}/(2l+1)} \\ &= \frac{2C_l}{2l+1}. \end{aligned} \quad (5.226)$$

Por lo tanto,

$$C_l = \frac{(2l+1)V_a}{2} \int_0^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (5.227)$$

La integral en (5.227) se resuelve nuevamente usando las condiciones de ortogonalización de los polinomios de Legendre al tener en cuenta que $P_0(\cos \theta) = 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi \underbrace{P_0(\cos \theta)}_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{2l+1} \delta_{0l}, \end{aligned} \quad (5.228)$$

por lo tanto

$$C_l = 0, \quad \text{para } l \neq 0 \text{ y} \quad (5.229)$$

$$C_0 = V_a, \quad (5.230)$$

lo cual, en términos de A_k y B_k , se puede escribir como:

$$A_k a^k + B_k a^{-k-1} = 0, \quad \text{para } l \neq 0 \text{ y} \quad (5.231)$$

$$A_0 + B_0 a = V_a. \quad (5.232)$$

Condición en $r = R$

Ahora, para $r = R$, $\psi(R, \theta) = V(\theta)$, con

$$V(\theta) = \begin{cases} V_0 & \text{Para } 0 < \theta \leq 1 \\ -V_0 & \text{Para } -1 \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad (5.233)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(A_k R^k + B_k R^{-k-1})}_{D_k} P_k(\cos \theta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k(\cos \theta), \end{aligned} \quad (5.234)$$

donde se ha definido

$$D_k = A_k R^k + B_k R^{-k-1}, \quad (5.235)$$

y se tiene que

$$V(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k(\cos \theta). \quad (5.236)$$

La expresión (5.236), es igual a la ecuación (5.190), salvo que en este caso las constantes a determinar son D_k y en (5.190) las constantes que multiplicaban a los polinomios de Legendre P_k eran $A_k R^k$. Para determinar D_k , se debe utilizar las propiedades de ortogonalización de los polinomios de Legendre, es decir, multiplicar por $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ e integrar en el rango de definición de la variable θ (ver el procedimiento realizado para encontrar las constantes A_k en (5.193)), con lo cual se obtiene:

$$D_k = \frac{2k+1}{2} \underbrace{\int_0^\pi V(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{I_k}. \quad (5.237)$$

La integral I_k ya fue resuelta en el ejemplo (5.3) y su resultado para valores impares de k se expresa en la ecuación (5.216). En el ejemplo (5.3), adicionalmente se demostró que para valores pares de k la integral se anula. Por lo anterior se tiene que:

$$D_{2k} = 0, \quad (5.238)$$

$$D_{2k+1} = \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!}. \quad (5.239)$$

A partir (5.235), las anteriores relaciones en términos de A_k y B_k se escriben como:

$$A_{2k} R^{2k} + B_{2k} R^{-2k-1} = 0, \quad (5.240)$$

$$A_{2k+1} R^{2k+1} + B_{2k+1} R^{-2k-2} = \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!}. \quad (5.241)$$

A partir de (5.231), (5.232), (5.240) y (5.241), es posible determinar las constantes A_k y B_k para todo valor de k . Para $k = 0$ a partir de (5.240) y (5.232) se tiene que

$$A_0 + B_0 R = 0, \quad (5.242)$$

$$A_0 + B_0 a = V_a, \quad (5.243)$$

y por lo tanto

$$B_0 = \frac{V_a}{a - R}, \quad (5.244)$$

$$A_0 = \frac{V_a R}{R - a}. \quad (5.245)$$

Ahora, para $k = \text{par}$ ($k \neq 0$), a partir de (5.240) y (5.243) se tiene que

$$A_k a^{2k} + B_{2k} a^{-2k-1} = 0, \quad A_{2k} R^{2k} + B_{2k} R^{-2k-1} = 0. \quad (5.246)$$

Las igualdades (5.246) solo tienen solución para $A_{2k} = B_{2k} = 0$. Por lo tanto, a excepción de $k = 0$, no hay términos con polinomios de Legendre pares en la solución para el potencial. Ahora para $k = \text{impar}$, a partir de (5.231) y (5.241) se tiene que

$$A_{2k+1} a^{2k+1} + B_{2k+1} a^{-2k-2} = 0, \quad (5.247)$$

$$A_{2k+1} R^{2k+1} + B_{2k+1} R^{-2k-2} = \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!}, \quad (5.248)$$

y despejando las constantes A_{2k+1} y B_{2k+1} , se tiene que:

$$A_{2k+1} = -\frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \frac{a^{-2k-2}}{(R^{-2k-2} a^{2k+1} + a^{-2k-2} R^{2k+1})}, \quad (5.249)$$

$$B_{2k+1} = \frac{(-1)^k (2k)! (4k+3) V_0}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \frac{a^{2k+1}}{(R^{-2k-2} a^{2k+1} + a^{-2k-2} R^{2k+1})}. \quad (5.250)$$

La solución finalmente vendrá dada por:

$$\psi(r, \theta) = \frac{V_a R}{R - a} + \frac{V_a r}{(a - R)} + \sum_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1} r^{2k+1} + B_{2k+1} r^{-2k-2}) P_{2k+1}(\cos \theta), \quad (5.251)$$

donde A_{2k+1} y B_{2k+1} están definidas por (5.249) y (5.250).

En la figura 5.4, se esquematiza $\psi(r, \theta)$ vs θ para la solución expresada en (5.251), para diferentes valores de r (tomando los primeros 20 términos de la sumatoria y con $V_0 = 2$, $V_a = 1$, $R = 2$ y $|\vec{a}| = 1$). Como se observa en la figura 5.2, cuando $r \rightarrow R$ el potencial se aproxima a una función escalón (debería ser exactamente la función escalón si se incluyen todos los términos en la sumatoria) y cuando $r \rightarrow a$, el potencial tiende a V_a .

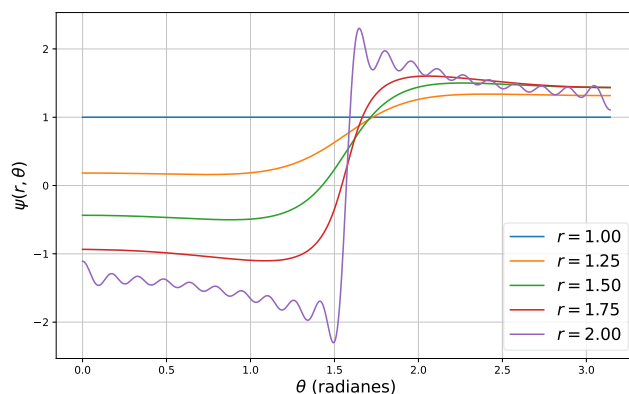


Figura 5.4: Ejemplo (5.4). Representación gráfica de la solución establecida en (5.251), tomando los primeros 20 términos de la sumatoria y con valores $V_0 = 2$, $V_a = 1$, $R = 2$ y $|\vec{a}| = 1$.

Ejercicio 5.9. Se tiene un cascarón esférico conductor de radio R que se encuentra a un potencial $V(\theta) = V_0 \cos^2(\theta/2)$. Para tal sistema, encuentre el potencial en la región interior y exterior al cascarón.

Ejercicio 5.10. Se tiene un cascarón esférico conductor de radio $\vec{b}$, el cual se encuentra a un potencial V_b . Al interior del cascarón de radio b , se ubica otro cascarón esférico de radio R ($b > R$), el cual se encuentra dividido en el plano ecuatorial por un medio aislante de espesor infinitesimal que divide el cascarón en dos. La parte superior del cascarón se mantiene a un potencial V_0 y la parte inferior a un potencial $-V_0$ (ver figura 5.5). Para tal sistema, encuentre el potencial en las regiones: a) $r < R$, b) $R < r < b$ y c) $r > b$.

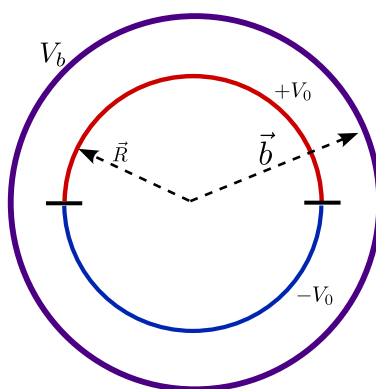


Figura 5.5: Ejercicio (5.10). Potencial eléctrico generado por dos cascarones esféricos. El cascarón interno se divide en dos hemisferios.

6– Ecuación de Laplace en coordenadas Cilíndricas

El laplaciano en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , está dado por la expresión (A.38), y por lo tanto la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) es una ecuación diferencial de segundo orden que acopla las coordenadas (ρ, ϕ, z) . Para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada una de las coordenadas, se aplica el método de separación de variables, donde se asume una solución de la forma:

$$\psi(\vec{r}) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (6.2)$$

donde $R(\rho)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$ son funciones exclusivamente dependientes de las variables ρ , ϕ y z respectivamente. Al reemplazar la solución propuesta (6.2) en (6.1) y dividiendo la ecuación en mención por $\psi(\vec{r})$ en la forma dada por (6.2), la expresión (6.1) se puede escribir como:

$$\left\{ \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} \right) \Phi(\phi) \right\} + \left\{ \frac{1}{Z(z)} \left(\frac{d^2}{dz^2} \right) Z(z) \right\} = 0. \quad (6.3)$$

En (6.3), el primer término entre llaves depende únicamente de las variables ρ y ϕ , mientras que el segundo término entre llaves depende solo de la variable z . Como la igualdad (6.3) debe cumplirse para todo valor de ρ , ϕ y z , la única posibilidad es que cada uno de estos términos sea constante. Dado que la suma de ambas constantes debe ser igual a cero (para satisfacer (6.3)), se obtiene:

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} \right) \Phi(\phi) = -\lambda \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \left(\frac{d^2}{dz^2} \right) Z(z) = \lambda. \quad (6.5)$$

La constante λ puede tomar valores negativos, positivos o cero. Cada caso se analizará en forma independiente más adelante. Por otra parte, la ecuación (6.4) se puede reescribir como:

$$\left\{ \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + \lambda \rho^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{\Phi(\phi)} \left(\frac{d^2}{d^2\phi} \right) \Phi(\phi) \right\} = 0 \quad (6.6)$$

El primer término en llaves en (6.6) depende exclusivamente de la variable ρ y el segundo término depende exclusivamente de la variable ϕ , y ya que la igualdad se debe cumplir para todo valor que puedan tomar las coordenadas ρ y ϕ , los dos términos deben igualarse a una constante, con lo cual se tiene que:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + \lambda \rho^2 = \alpha, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \left(\frac{d^2}{d^2\phi} \right) \Phi(\phi) = -\alpha. \quad (6.8)$$

En resumen, tras aplicar el método de separación de variables a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias, que corresponden a las ecuaciones (6.5), (6.7) y (6.8). La ecuación diferencial (6.5) para la coordenada z tiene tres posibles soluciones dependiendo del valor que tome la constante λ ; si $\lambda > 0$ la solución es hiperbólica; combinación lineal de las funciones $e^{\pm\sqrt{\lambda}}$ (o su equivalente en función de senos y cosenos hiperbólicos). Si $\lambda < 0$ la solución será armónica; combinación lineal de las funciones $e^{\pm i\sqrt{\lambda}}$, o su equivalente en función de senos y cosenos (la opción que se tomará en este texto). Si $\lambda = 0$ la solución será lineal respecto a la coordenada z . Lo mismo ocurre para la ecuación diferencial (6.8); sin embargo, en este caso, dado que la coordenada ϕ es una variable angular, la solución debe cumplir la condición de periodicidad $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ (o que $\Phi(\phi) = cte$), y por lo tanto se requiere una solución armónica que impone la condición: $\alpha > 0$ ¹. Valores de $\alpha = 0$ no son admisibles, salvo en sentido de tener una función $\Phi(\phi) = cte$, pero dicha solución puede ser satisfecha por la solución armónica al considerar valores de $\alpha \geq 0$.

Las condiciones de frontera particulares a un problema dado, definen los posibles valores que puedan tomar las constantes α y λ . La solución más general debe tener en cuenta todos los posibles valores para las constantes α y λ ; es decir $\alpha \geq 0$ y $\lambda \geq 0$ o $\alpha \geq 0$ y $\lambda \leq 0$ (las soluciones $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$ no pueden estar presentes a la vez en una misma solución, ya que no se puede tener soluciones hiperbólicas y armónicas para la variable z al mismo tiempo). Al requerir que $\alpha \geq 0$, es posible tomar $\alpha = \omega^2$. Adicionalmente considerando en primera instancia valores positivos para la variable λ , se puede considerar $\lambda = l^2$. Con esto, las expresiones (6.4), (6.7) y (6.8), se pueden reescribir como:

¹En problemas de electrostática, conducción de calor entre otros, α es estrictamente un valor entero; sin embargo, la ecuación diferencial (6.7) más general para la variable ρ depende de α y existen problemas para los cuales dicha solución puede permitir valores de α en los reales, por lo tanto hasta que se diga lo contrario se asumirá únicamente que α sea positivo.

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + l^2 \rho^2 = \omega^2, \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \left(\frac{d^2}{d^2\phi} \right) \Phi(\phi) = -\omega^2. \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \left(\frac{d^2}{dz^2} \right) Z(z) = l^2. \quad (6.11)$$

La solución para (6.10) es armónica y se puede escribir como una combinación lineal de las funciones $e^{\pm i\omega\phi}$; o de las funciones seno y coseno. Tomando la segunda opción, la solución para $\Phi(\phi)$ se puede escribir como:

$$\Phi(\phi) = C_\omega \cos(\omega\phi) + D_\omega \sin(\omega\phi) \quad (\omega \geq 0). \quad (6.12)$$

Valores de $\omega < 0$, se incluyen implícitamente en la solución (6.12), ya que el seno y el coseno se pueden escribir como función de $e^{i(\pm\omega)\phi}$. Para $\omega = 0$, la solución (6.12) conlleva $\Phi(\phi) = C_0 = cte$, que es el único caso admisible para $\omega = 0$ en la ecuación diferencial (6.10).

Respecto a la solución para la ecuación (6.11), para valores $l > 0$, la solución es hiperbólica y se puede escribir como:

$$Z_l(z) = F_l e^{lz} + G_l e^{-lz} \quad (l > 0). \quad (6.13)$$

Y para $l = 0$, la solución es lineal en z , tal que

$$Z(z) = F_0 z + G_0 \quad (l = 0), \quad (6.14)$$

Establecer la solución para la ecuación diferencial (6.12) requiere un tratamiento especial. A continuación se discutirá en primer lugar el caso particular $l = 0$ y $\omega = 0$, posteriormente, el caso $l = 0$ y $\omega \neq 0$ y finalmente el caso más complejo $l \neq 0$ y $\omega \neq 0$.

Caso con $\lambda = 0$ y $\omega = 0$:

En este caso la ecuación diferencial (6.9) toma la forma

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) = 0 \rightarrow \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) = cte = \mathbb{A}_0. \quad (6.15)$$

Integrando (6.15) se tiene:

$$\begin{aligned} \int dR(\rho) &= \int \frac{\mathbb{A}_0}{\rho} d\rho \\ &\downarrow \\ R(\rho) &= \mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas físicamente admisible para el caso en el cual $\lambda = 0$ y $\Phi(\phi) = cte$ ($m = 0$), es:

$$\psi(\rho, z) = (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0) (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0), \quad (6.17)$$

donde se ha usado las constantes $\mathbb{F}_0$ y $\mathbb{G}_0$ para diferenciar la solución $Z(z)$ de otras posibles soluciones que incluyan funciones lineales para la función $Z(z)$.

Caso con $l = 0$ y $\omega \neq 0$:

Para el caso $l = 0$, la solución para la ecuación diferencial (6.5) es lineal en z , tal que

$$Z(z) = F_0 z + G_0, \quad (6.18)$$

donde F_0 y G_0 son constantes a determinar por condiciones de frontera en cada problema en particular. Por otra parte, la expresión (6.9), se puede escribir como:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) = \omega^2. \quad (6.19)$$

Para resolver la ecuación (6.19) se aplica el método de Frobenius, asumiendo una solución en serie de potencias de la forma

$$R_s(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{s,j} \rho^{s+j}, \quad (6.20)$$

donde se ha utilizado el subíndice s para diferenciar soluciones con valores distintos de s . Al reemplazar la solución propuesta en (6.19), se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{ (s+j)^2 - \omega^2 \} A_{s,j} \rho^{s+j} = 0. \quad (6.21)$$

La expresión anterior para todo valor de ρ se garantiza solo si,

$$((s+j)^2 - \omega^2) A_{s,j} = 0, \quad \forall j, \quad (6.22)$$

entonces, para $j = 0$, asumiendo $A_{s,0} \neq 0$, se tiene que

$$s = \pm \omega. \quad (6.23)$$

Por lo tanto, se tienen dos posibles soluciones, definidas por:

$$R_{\omega}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{\omega,j} \rho^{\omega+j}, \quad (6.24)$$

$$R_{-\omega}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{-\omega,j} \rho^{-\omega+j}. \quad (6.25)$$

Para $s = m$, la condición (6.22) toma la forma:

$$((\omega + j)^2 - \omega^2) A_{\omega,j} = 0, \quad \forall j > 0, \quad (6.26)$$

que se puede escribir como

$$j(j + 2\omega) A_{\omega,j} = 0. \quad (6.27)$$

Ya que el índice j no puede ser negativo, la única opción posible para satisfacer la igualdad (6.27) es que $A_{\omega,j} = 0$, para todo $j > 0$. Con lo cual la solución para $s = \omega$, toma la forma:

$$R_{\omega}(\rho) = \underbrace{A_{\omega,0}}_{A_{\omega}} \rho^{+\omega} = A_{\omega} \rho^{+\omega}. \quad (6.28)$$

Por otra parte, si se toma $s = -\omega$, entonces la condición (6.22) se puede escribir como:

$$j(j - 2\omega) A_{-\omega,j} = 0, \quad \forall j > 0, \quad (6.29)$$

y asumiendo $A_{-\omega,j} \neq 0$ (condición menos restrictiva), se tiene que $j = 2\omega$, por lo tanto, la sumatoria asociada a la solución para $s = -\omega$, solo tendrá dos términos diferentes de cero, dados por $j = 0$ y $j = 2\omega$, con lo cual la solución vendrá dada por:

$$R_{-\omega}(\rho) = \underbrace{A_{-\omega,0}}_{B_{\omega}} \rho^{-\omega} + \underbrace{A_{-\omega,2\omega}}_{A'_{\omega}} \rho^{+\omega} = B_{\omega} \rho^{-\omega} + A'_{\omega} \rho^{\omega}. \quad (6.30)$$

Los resultados obtenidos evidencian que la solución $R_{-\omega}$ en su segundo término ya contiene la solución dada por R_{ω} (ecuación (6.28)); por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial (6.19) se puede escribir simplemente como:

$$R_{\omega}(\rho) = A_{\omega} \rho^{\omega} + B_{\omega} \rho^{-\omega}. \quad (6.31)$$

La solución para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas con $l = 0$ y $\omega \neq 0$, vendrá dada a través de la expresión:

$$\psi_\omega(\rho, \phi, Z) = (A_\omega \rho^\omega + B_\omega \rho^{-\omega}) (C_\omega \cos \omega \phi + D_\omega \sin \omega \phi) (F_0 z + G_0), \quad (6.32)$$

y se debe tener en cuenta que la solución más general posible debe considerar todos los valores que pueda tomar la variable ω . En muchas situaciones físicas, las condiciones de frontera restringen los valores de ω a valores enteros y en tal caso la solución más general para $l = 0$ y $\omega \neq 0$, se obtiene al incluir una sumatoria en ω , y se tiene que:

$$\psi(\rho, \phi, Z) = \sum_{\omega} (A_\omega \rho^\omega + B_\omega \rho^{-\omega}) (C_\omega \cos \omega \phi + D_\omega \sin \omega \phi) (F_0 z + G_0). \quad (6.33)$$

Caso con $l > 0$ y $\omega \neq 0$:

En este caso se debe resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + l^2 \rho^2 = \omega^2, \quad (6.34)$$

Realizando el cambio de variable $x = l\rho$, y definiendo $\mathcal{R}(x) \equiv R(\rho)$, se tiene

$$\frac{dR(\rho)}{d\rho} = \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} \frac{dx}{d\rho} = l \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx}, \quad (6.35)$$

y

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) \equiv \frac{x}{l\mathcal{R}(x)} \frac{d}{dx} \left(l\rho \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} \right) \left(\frac{dx}{d\rho} \right) = \frac{x}{\mathcal{R}(x)} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} \right). \quad (6.36)$$

Al reemplazar (6.36) en (6.34), se obtiene

$$\frac{x}{\mathcal{R}(x)} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} \right) + x^2 = \omega^2, \quad (6.37)$$

lo cual se puede escribir como:

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\omega^2}{x^2} \right) \mathcal{R}(x) = 0. \quad (6.38)$$

La ecuación diferencial (6.38) es conocida en el campo de las matemáticas como la ecuación de Bessel, y sus soluciones se denominan las funciones de Bessel, las cuales usualmente se denotan como $J_\omega(x)$ ($\mathcal{R}_\omega(x) \equiv J_\omega(x)$). Mediante la aplicación del método de Frobenius es posible encontrar una solución para la ecuación (6.38) (el proceso se realizará en la próxima sección), la cual se puede escribir como:

$$J_\omega(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(s+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (6.39)$$

Donde ω puede tomar valores positivos como negativos. En el caso que ω no sea entero, las soluciones $J_\omega(x)$ y $J_{-\omega}(x)$ son independientes y, por lo tanto, su combinación lineal representa la solución más general a la ecuación de Bessel. Sin embargo, si ω es entero, las soluciones $J_\omega(x)$ y $J_{-\omega}(x)$ no son linealmente independientes, para ellas se cumple que

$$J_\omega(x) = (-1)^\omega J_{-\omega}(x). \quad (6.40)$$

Por lo tanto, se debe establecer una segunda solución. Para ω entero, una segunda solución se representa por las funciones de Neumann, que en términos de las funciones de Bessel se pueden escribir como:

$$N_\omega(x) = \frac{J_\omega(x) \cos(\omega\pi) - J_{-\omega}(x)}{\sin(\omega\pi)}, \quad \omega \notin \mathbb{Z}, \quad (6.41)$$

y para $\omega = m \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$N_m(x) = \lim_{\omega \rightarrow m} \frac{J_\omega(x) \cos(\omega\pi) - J_{-\omega}(x)}{\sin(\omega\pi)}. \quad (6.42)$$

En cualquier caso, la solución más general para la ecuación de Bessel, se puede escribir como una combinación lineal de las funciones de Bessel y Neumann, es decir:

$$\mathcal{R}_\omega(x) = \mathcal{A}_\omega J_\omega(x) + \mathcal{B}_\omega N_\omega(x), \quad (6.43)$$

por lo tanto, la solución para la variable ρ , será:

$$R_{\omega,l}(\rho) = \mathcal{A}_\omega J_\omega(l\rho) + \mathcal{B}_\omega N_\omega(l\rho), \quad (6.44)$$

donde se ha remplazando $x \rightarrow l\rho$.

Como conclusión de este apartado, si $l > 0$ y $\omega \geq 0$, la solución más general para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para un valor de ω y l dado, teniendo en cuenta (6.12), (6.13) y (6.44), vendrá dada por:

$$\psi_{l\nu}(\rho, \phi, z) = (\mathcal{A}_\nu J_\nu(l\rho) + \mathcal{B}_\nu N_\nu(l\rho)) (\mathcal{C}_\nu \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_\nu \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}), \quad (6.45)$$

donde se ha utilizado la denominación ν en el lugar de ω , y constantes con letra caligráfica, para enfatizar la diferencia en constantes y diferentes posibles de valores de ω en cada solución que se esta analizando.

Teniendo en cuenta la solución establecida en (6.17), (6.32) y (6.45), la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, respetando condiciones de periodicidad en la variable angular ϕ , y para $\lambda \geq 0$ ($l \in \mathbb{R}$), será:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, z) = & (\mathcal{A}_\nu J_\nu(l\rho) + \mathcal{B}_\nu N_\nu(l\rho)) (\mathcal{C}_\nu \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_\nu \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}) \\ & + (A_\omega \rho^\omega + B_\omega \rho^{-\omega}) (C_\omega \cos \omega\phi + D_\omega \sin \omega\phi) (F_0 z + G_0) \\ & + (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0) (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0). \end{aligned} \quad (6.46)$$

En los problemas físicos que se consideraran en este texto, la periodicidad de la variable angular ϕ establecerá que ω sea un valor entero, por lo tanto la solución más general debe incluir todos los posibles valores asociados a ω (y ν en la solución (6.46)), por lo tanto:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ (\mathcal{A}_\nu J_\nu(l\rho) + \mathcal{B}_\nu N_\nu(l\rho)) (\mathcal{C}_\nu \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_\nu \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}) \} \\ & + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ (A_\omega \rho^\omega + B_\omega \rho^{-\omega}) (C_\omega \cos \omega\phi + D_\omega \sin \omega\phi) (F_0 z + G_0) \} \\ & + (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0) (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0). \end{aligned} \quad (6.47)$$

La elección $\lambda \geq 0$, establece que la solución de la función $Z(z)$ sea lineal en z o de tipo hiperbólico. Sin embargo, en ciertos problemas, las condiciones de frontera impuestas sobre la variable z pueden ser periódicas, lo cual no puede ser satisfecho por la solución dada en (6.47), al menos si se restringe la solución a valores reales de l . Si en cambio se consideran valores puramente imaginarios para l en la expresión (6.47), entonces la solución, originalmente hiperbólica en z , se transforma en una solución armónica. Esto permite satisfacer condiciones de frontera periódicas en la variable z .

En conclusión, la solución dada en (6.47) puede generalizarse para cualquier valor de λ , siempre que se admitan valores reales o puramente imaginarios para l . En tal caso, el argumento de las funciones de Bessel y Neumann se vuelve imaginario, lo cual, aunque es matemáticamente válido, no es lo convencional. Por esta razón, se recurre a soluciones de la ecuación de Bessel para $\lambda < 0$, conocidas como funciones modificadas de Bessel, las cuales están relacionadas con las funciones de Bessel ordinarias mediante:

$$I_\omega(x) = i^{-\omega} J_\omega(ix), \quad (6.48)$$

y

$$K_\omega(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{I_{-\omega}(x) - I_\omega(x)}{\sin(\omega\pi)} \right) \quad \text{para } \omega \notin \mathbb{Z} \quad (6.49)$$

$$K_n(x) = \lim_{\omega \rightarrow n} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{I_{-\omega}(x) - I_\omega(x)}{\sin(\omega\pi)} \right) \right\} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z} \quad (6.50)$$

A partir de lo anterior, se puede establecer que la solución para la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para $\lambda \leq 0$, vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \psi_2(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ (\mathcal{A}'_{\nu} I_{\nu}(l\rho) + \mathcal{B}'_{\nu} K_{\nu}(l\rho)) (\mathcal{C}'_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}'_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}'_l e^{ilz} + \mathcal{G}'_l e^{-ilz}) \} \\ & + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ (A'_{\omega} \rho^{\omega} + B'_{\omega} \rho^{-\omega}) (C'_{\omega} \cos \omega\phi + D'_{\omega} \sin \omega\phi) (F'_0 z + G'_0) \} \\ & + (\mathbb{A}'_0 \ln \rho + \mathbb{B}'_0) (\mathbb{F}'_0 z + \mathbb{G}'_0). \end{aligned} \quad (6.51)$$

6.1. Solución a la ecuación diferencial de Bessel

En esta sección se resolverá la ecuación diferencial de Bessel, utilizando el método de Frobenius. Partiendo de la ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{R}(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\omega^2}{x^2}\right) \mathcal{R}(x) = 0, \quad (6.52)$$

se propone la solución en series de potencias en la forma

$$\mathcal{R}_s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{s+j}, \quad (6.53)$$

donde s es una constante a determinar. La primera y segunda derivada de (6.53) son:

$$\frac{d\mathcal{R}_s(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{\infty} (s+j) A_j x^{s+j-1}, \quad (6.54)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{R}_s(x)}{dx^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (s+j)(s+j-1) A_j x^{s+j-2}. \quad (6.55)$$

$$(6.56)$$

Al tener en cuenta (6.53), (6.54) y (6.55), la expresión (6.52) se puede escribir como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (s+j)(s+j-1) A_j x^{s+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} (s+j) A_j x^{s+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{s+j} - \omega^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{s+j-2} = 0. \quad (6.57)$$

El primer, segundo y cuarto término en (6.57) se pueden agrupar en una sola sumatoria, a partir de lo cual se obtiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} ((s+j)^2 - \omega^2) A_j x^{s+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{s+j} = 0. \quad (6.58)$$

Sacando de la primera sumatoria en (6.58) los términos $j = 0$ y $j = 1$, la expresión (6.58) toma la forma:

$$(s^2 - \omega^2)A_0 x^{s-2} + ((s+1)^2 - \omega^2)A_1 x^{s-1} + \sum_{j=2}^{\infty} ((s+j)^2 - \omega^2)A_j x^{s+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{s+j} = 0. \quad (6.59)$$

Las dos sumatorias en (6.59) se pueden escribir como un solo término. Para ello, en la primera sumatoria de (6.59) se reemplaza $j \rightarrow k+2$, con lo cual se tiene que:

$$\sum_{j=2}^{\infty} ((s+j)^2 - \omega^2)A_j x^{s+j-2} = \sum_{k=0}^{\infty} ((s+k+2)^2 - \omega^2)A_{k+2} x^{s+k}, \quad (6.60)$$

y ya que k es un índice arbitrario (renombrando nuevamente $k \rightarrow j$), al tener en cuenta (6.60), la igualdad (6.59) se puede escribir como:

$$(s^2 - \omega^2)A_0 x^{s-2} + ((s+1)^2 - \omega^2)A_1 x^{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \{((s+j+2)^2 - \omega^2)A_{j+2} + A_j\} x^{s+j} = 0. \quad (6.61)$$

La igualdad anterior implica que los coeficientes correspondientes a distintas potencias de la variable x deben anularse de manera independiente. En consecuencia, se tiene que:

$$(s^2 - \omega^2)A_0 = 0, \quad (6.62)$$

$$((s+1)^2 - \omega^2)A_1 = 0, \quad (6.63)$$

$$\{(s+j+2)^2 - \omega^2\} A_{j+2} + A_j = 0, \quad \forall j > 1. \quad (6.64)$$

A partir de (6.62), si se asume $A_0 \neq 0$, se tiene que $s = \pm\omega$. Imponiendo la solución anterior en (6.63) y asumiendo que $A_1 \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= ((\pm\omega + 1)^2 - \omega^2) \\ &= 1 \pm 2\omega, \end{aligned} \quad (6.65)$$

por lo tanto $\omega = \mp 1/2$; sin embargo, si nos restringimos a situaciones donde ω sea un valor entero (ya que ω proviene de la solución para $\Phi(\phi)$ que se exige sea periódica), la solución

$\omega = \mp 1/2$ no es admisible ², y se concluye que:

$$\text{si } s = \pm\omega, \text{ entonces } A_1 = 0. \quad (6.66)$$

Por otro lado, la relación (6.64) se puede escribir como:

$$A_{j+2} = \frac{A_j}{\omega^2 - (s + j + 2)^2}, \quad (6.67)$$

y ya que se ha definido $A_1 = 0$, la igualdad (6.67) establece que $A_3 = 0$ y por iteración de (6.67) se concluye que: $A_5 = A_7 = \dots = A_{2j+1} = 0$; es decir, la solución propuesta en (6.53) solo tendrá potencias pares en x , tal que

$$\mathcal{R}_s(x) = x^s \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} x^{2j}. \quad (6.68)$$

Los términos A_{2j} se definen a partir de (6.67), tomando $j \rightarrow 2j - 2$. Adicionalmente si se reemplaza $s \rightarrow \omega$ (el caso $s = -\omega$, quedara implícito en el signo de ω en la sustitución $s \rightarrow \omega$), la ecuación (6.67) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} A_{2j} &= \frac{A_{2j-2}}{\omega^2 - (\omega + 2j)^2} \\ &= -\frac{A_{2j-2}}{2^2 j(\omega + j)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Para determinar si la solución (6.68), con los coeficientes definidos en (6.69) es convergente, se aplica el criterio del cociente, y se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{2j} x^{2j}}{A_{2j-2} x^{2j-2}} \right| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{2j-2} x^{2j}}{(2^2 j(\omega + j)) A_{2j-2} x^{2j-2}} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2^2 j(\omega + j))} \right| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.70)$$

con lo cual se evidencia la convergencia de (6.68). La relación de recurrencia (6.69) posibilita escribir todos los coeficientes A_{2j} , en términos de A_0 , por iteración. Entonces, aplicando una y dos iteraciones en (6.69) se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{2j} &= (-1)^2 \frac{A_{2j-4}}{2^4 j(j-1)(\omega+j)(\omega+j-1)} \\ &= (-1)^3 \frac{A_{2j-6}}{2^6 j(j-1)(j-2)(\omega+j)(\omega+j-1)(\omega+j-2)}, \end{aligned} \quad (6.71)$$

²A pesar que la ecuación diferencial de Bessel puede tener soluciones con $\omega \notin \mathbb{Z}$, en este texto no se abordará problemas que soporten dicha condición.

por lo tanto, para m iteraciones se tiene que (reagrupando convenientemente los términos en el denominador):

$$A_{2j} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \left\{ \frac{1}{j(j-1)(j-2)\dots(j-m+1)} \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{(\omega+j)(\omega+j-1)(\omega+j-2)\dots(\omega+j-m+1)} \right\} A_{2j-2m}. \quad (6.72)$$

Al tomar $m = j$, la anterior expresión se puede escribir como:

$$A_{2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \underbrace{\left\{ \frac{1}{j(j-1)(j-2)\dots(1)} \right\}}_{1/j!} \underbrace{\left\{ \frac{1}{(\omega+j)(\omega+j-1)(\omega+j-2)\dots(\omega+1)} \right\}}_{\omega!/(\omega+j)!} A_0 \\ = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{\omega!}{j!(\omega+j)!} A_0. \quad (6.73)$$

Teniendo en cuenta el último resultado, la solución establecida en (6.68) toma la forma

$$\mathcal{R}_\omega(x) = (\omega! A_0) x^\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! (\omega+j)!} x^{2j} \\ = (\omega! A_0 2^\omega) \left(\frac{x}{2}\right)^\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\omega+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (6.74)$$

La constante A_0 es arbitraria y se toma convenientemente como $A_0 = 1/(\omega! 2^2)$, con lo cual se tiene que:

$$\mathcal{R}_\omega(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\omega+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (6.75)$$

La funciones definidas por (6.75) se conocen como las funciones de Bessel y se denotan usualmente por $J_\omega(x)$, entonces:

$$J_\omega(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\omega \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\omega+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (6.76)$$

La solución para $s = -\omega$, se obtiene a partir de (6.76) cambiando simplemente $\omega \rightarrow -\omega$.

Aunque la solución dada en (6.76) fue establecida restringiendo a $\omega \in \mathbb{Z}$, la ecuación (6.76) se puede generalizar tomando el factorial en términos de la función gamma, es decir:

$$J_{\omega}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\omega + j + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (6.77)$$

6.2. Propiedades de las funciones de Bessel y Newmann

En esta sección se describirán algunas de las más importantes propiedades de las funciones de Bessel y Neumann.

6.2.1. Comportamiento asintótico y raíces para las funciones de Bessel y Neumann

Las funciones de Bessel $J_n(x)$ son oscilatorias, decayendo a cero conforme $x \rightarrow \infty$. La figura 6.1 muestra el comportamiento de $J_n(x)$ para diferentes valores de n ($n \in \mathbb{Z}$). Como se observa de la figura 6.1, las funciones de Bessel presentan raíces (valores de x para los cuales $J_n(x) = 0$), que son importantes tener en cuenta al abordar problemas que impliquen soluciones donde se presenten funciones de Bessel. Entonces existen valores de x , que se denominarán x_{ni} , para los cuales $J_n(x_{ni}) = 0$. En la tabla 6.1 se muestran las primeras cinco raíces para las funciones $J_n(x)$, con $n = 0, 2, 4, 6, 8$.

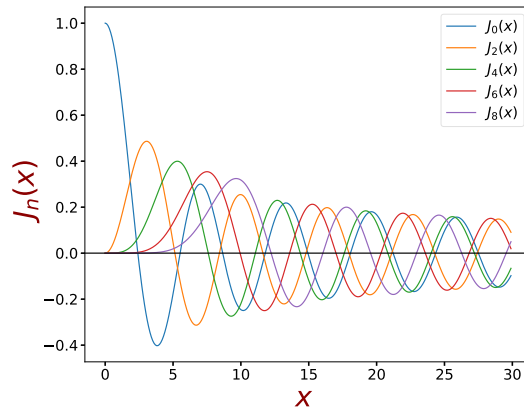


Figura 6.1: Funciones de Bessel de orden entero.

J_0	J_2	J_4	J_6	J_8
2.4048	5.1356	7.5883	9.9361	12.2251
5.5201	8.4172	11.0647	13.5893	16.0378
8.6537	11.6198	14.3725	17.0038	19.5545
11.7915	14.7959	17.6160	20.3208	22.9452
14.9309	17.9598	20.8269	23.5861	26.2668

Tabla 6.1: Ceros de las funciones de Bessel.

Las funciones de Newman, por su parte, son divergentes en el origen y, de forma similar a las funciones de Bessel, decaen oscilando hacia cero conforme $x \rightarrow \infty$. Las funciones de Neumann también presentan raíces; es decir, existen valores de x , que se denominarán x_{ni} , para los cuales $N_n(x_{ni}) = 0$. La figura 6.2 muestra el comportamiento de $N_n(x)$ para diferentes valores de n . En la tabla 6.2 se muestran las primeras cinco raíces para las funciones $N_n(x)$, con $n = 0, 2, 4, 6, 8$.

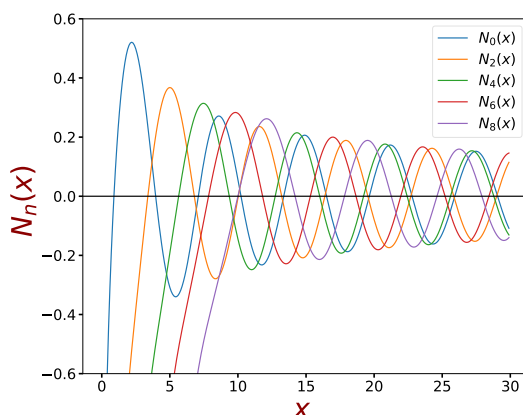


Figura 6.2: Funciones de Neumann de orden entero.

N_0	N_2	N_4	N_6	N_8
0.8936	3.3842	5.6451	7.8377	9.9946
3.9577	6.7938	9.3616	11.811	14.1904
7.0861	10.0235	12.7301	15.3136	17.8179
10.2223	13.21	15.9996	18.6707	21.2609
13.3611	16.379	19.2244	21.9583	24.6126

Tabla 6.2: Ceros de las funciones de Neumann.

Límites asintóticos

Los límites asintóticos de las funciones de Bessel y Neumann son relevantes, ya que, a partir de ellos se puede establecer si una función de Bessel o Neumann, en un problema en particular, pueden estar o no presentes, de acuerdo a las condiciones de frontera impuestas. Para las funciones de Bessel y Neumann se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

- Para $x \ll 1$:

$$\begin{aligned}
 J_\omega(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\omega, \\
 N_\omega(x) &\rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.5772 + \dots \right] & , \quad \omega = 0 \\ -\frac{\Gamma(\omega)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\omega & , \quad \omega \neq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

- Cuando $x \gg 1$:

$$\begin{aligned} J_\omega(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_\omega(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (6.78)$$

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} J_\omega(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \left(\frac{ex}{2\omega}\right)^\omega, \\ N_\omega(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \left(\frac{ex}{2\omega}\right)^{-\omega}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

- Si $x = 0$,

$$J_\omega(0) = \delta_{\omega 0}. \quad (6.80)$$

6.2.2. Relaciones de recurrencia

Entre las relaciones de recurrencia más importantes de las funciones de Bessel se encuentran:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x), \quad (6.81)$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x). \quad (6.82)$$

Para demostrar las relaciones anteriores, se parte de la fórmula en serie de potencias establecida en la ecuación (6.77), la cual para $\omega = m - 1$, se escribe como:

$$J_{m-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (6.83)$$

sacando de la suma el término $k = 0$, se tiene

$$J_{m-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left[\frac{1}{\Gamma(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right]. \quad (6.84)$$

Ahora, la expresión (6.77), para $\omega = m + 1$ toma la forma:

$$J_{m+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (6.85)$$

Al cambiar el índice de la sumatoria en términos de j , tal que $k = j - 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
J_{m+1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)! \Gamma(m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-2} \\
&= -\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j-1)! \Gamma(m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \\
&\underbrace{\equiv}_{j \rightarrow k} -\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Ahora, al restar y sumar las expresiones (6.84) y (6.86), se obtiene:

$$\begin{aligned}
J_{m-1}(x) \pm J_{m+1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{\Gamma(m)} \\
&+ \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{k! \Gamma(m+k)} \mp \frac{1}{(k-1)! \Gamma(m+k+1)} \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{6.87}$$

El factor entre llaves en la expresión anterior; que por ahora denominaremos $C_{mk}^{\mp}$, se simplifica en la forma

$$\begin{aligned}
C_{mk}^{\mp} &= \frac{1}{k(k-1)! \Gamma(m+k)} \mp \frac{1}{(k-1)! (m+k) \Gamma(m+k)} \\
&= \frac{1}{(k-1)! \Gamma(m+k)} \left(\frac{1}{k} \mp \frac{1}{(m+k)} \right)
\end{aligned} \tag{6.88}$$

con lo cual se tiene que:

$$C_{mk}^{-} = \frac{m}{k(k-1)! (m+k) \Gamma(m+k)} = \frac{m}{k! \Gamma(m+k+1)}, \tag{6.89}$$

$$C_{mk}^{+} = \frac{(2k+m)}{k(k-1)! (m+k) \Gamma(m+k)} = \frac{(2k+m)}{k! \Gamma(m+k+1)}. \tag{6.90}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (6.89) y en (6.87); para la suma entre las funciones de Bessel, se obtiene:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left[\frac{m}{\Gamma(m+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k m}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \tag{6.91}$$

$$= m \left(\frac{2}{x}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6.92}$$

$$= \frac{2m}{x} J_m(x), \tag{6.93}$$

con lo cual se demuestra la relación de recurrencia (6.81). Ahora, reemplazando los resultados obtenidos en (6.90) y en (6.87); para la resta entre las funciones de Bessel, se tiene que:

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left[\frac{m}{\Gamma(m+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+m)}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right]. \quad (6.94)$$

El primer término en (6.94) se puede incluir en la sumatoria de (6.94); iniciando la suma desde $k=0$, con lo cual la expresión (6.94) toma la forma:

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left\{ (2k+m) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m-1} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left\{ 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \right\} \\ &= 2 \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \right\} = 2 \frac{d}{dx} J_m(x), \end{aligned} \quad (6.95)$$

que se puede escribir como:

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x), \quad (6.96)$$

con lo cual se demuestra la relación de recurrencia (6.82).

Una propiedad adicional se deriva de los resultados anteriores; si se suma la ecuación (6.81) a la ecuación (6.82), obteniéndose:

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x). \quad (6.97)$$

De igual forma, si se resta la relación (6.81) a la ecuación (6.82), se obtiene:

$$J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x). \quad (6.98)$$

6.2.3. Relación de ortonormalización para las funciones de Bessel

Al igual que los polinomios de Legendre, las funciones de Bessel tienen asociada una propiedad de ortonormalización, que se deducirá a continuación.

Se consideran funciones de Bessel $J_\omega(l\rho)$, con valor de $\omega = m \in \mathbb{Z}$ (casos de interés en el presente texto). Las ecuaciones diferenciales de Legendre para dos funciones $J_m(k\rho)$ y $J_m(l\rho)$ (se debe notar que se mantiene el orden m igual para las dos funciones, pero con un parámetro en el argumento diferente), se escriben como:

$$\frac{d^2 J_m(k\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) J_m(k\rho) = 0, \quad (6.99)$$

$$\frac{d^2 J_m(l\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m(l\rho)}{d\rho} + \left(l^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) J_m(l\rho) = 0. \quad (6.100)$$

Al multiplicar la ecuación (6.99) por $\rho J_m(l\rho)$ y la ecuación (6.100) por $\rho J_m(k\rho)$, y restar las dos expresiones resultantes, se obtiene:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho \left(J_m(k\rho) \frac{dJ_m(l\rho)}{d\rho} - J_m(l\rho) \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right) \right] = (k^2 - l^2) \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho), \quad (6.101)$$

Ejercicio 6.1. *Demostrar la relación (6.101).*

Continuando con el procedimiento, al integrar la ecuación (6.101) entre los límites $\rho \rightarrow a$ y $\rho \rightarrow b$, resulta:

$$\left[\rho \left(J_m(k\rho) \frac{dJ_m(l\rho)}{d\rho} - J_m(l\rho) \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right) \right]_a^b = (k^2 - l^2) \int_a^b \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho) d\rho. \quad (6.102)$$

En aplicaciones físicas, es posible escoger convenientemente los límites a y b de tal manera que el lado izquierdo en (6.102) se anule, con lo cual, la expresión (6.102) toma la forma:

$$(k^2 - l^2) \int_a^b \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho) d\rho = 0. \quad (6.103)$$

El resultado expresado en (6.102) establece que, si $k \neq l$, la integral se anula, es decir:

$$\int_a^b \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho) d\rho = 0, \quad \text{si } k \neq l. \quad (6.104)$$

La ecuación (6.104) establece la condición de ortogonalidad para las funciones de Bessel. Ahora, si en (6.102) se toma $k = l$, entonces la integral puede tomar un valor diferente de cero y se debe calcular la integral

$$I = \int \rho J_m^2(l\rho) d\rho, \quad (6.105)$$

lo cual se realizará a continuación: En términos de la variable $x = l\rho$, la integral anterior se puede escribir como:

$$I = \frac{1}{l^2} \int x J_m^2(x) dx. \quad (6.106)$$

Al aplicar integración por partes, tomando $u = J_m^2(x)$ y $dv = x dx$, se tiene que

$$I = \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} (x^2 J_m^2(x)) - \int (x^2 J_m(x)) J'_m(x) \right\} dx. \quad (6.107)$$

Ahora, la ecuación diferencial de Bessel (6.100), en términos de la variable $x = l\rho$, se puede escribir como:

$$l^2 \frac{d^2 J_m(x)}{dx^2} + \frac{l^2}{x} \frac{dJ_m(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) l^2 J_m(x) = 0. \quad (6.108)$$

Al multiplicar la ecuación anterior por x^2 y dividirla por l^2 , se obtiene:

$$x^2 \frac{d^2 J_m(x)}{dx^2} + x \frac{dJ_m(x)}{dx} + x^2 J_m(x) - m^2 J_m(x) = 0. \quad (6.109)$$

por tanto,

$$x^2 J_m(x) = m^2 J_m(x) - x J'_m(x) - x^2 J''_m(x). \quad (6.110)$$

Al reemplazar (6.110) en el segundo término de (6.107), se tiene:

$$I = \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \int J'_m(x) [m^2 J_m(x) - x J'_m(x) - x^2 J''_m(x)] dx \right\} \quad (6.111)$$

$$= \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - m^2 \int \{ J_m(x) J'_m(x) dx - x J_m^2(x) dx - x^2 J''_m(x) J'_m(x) \} dx \right\}. \quad (6.112)$$

Si se observa que

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_m^2(x)}{dx} = J_m(x) J'_m(x) dx, \quad y \quad (6.113)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} x^2 (J'_m(x))^2 \right\} = x J'_m(x) dx + x^2 J''_m(x) J'_m(x) dx, \quad (6.114)$$

la ecuación (6.112) se puede escribir como:

$$I = \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \frac{m^2}{2} \int \frac{dJ_m^2(x)}{dx} dx + \int \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} x^2 (J'_m(x))^2 \right\} dx \right\}, \quad (6.115)$$

y por tanto

$$I = \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \frac{1}{2} m^2 J_m^2(x) + \frac{1}{2} x^2 [J'_m(x)]^2 \right\}. \quad (6.116)$$

Retomando la variable $\rho = x/l$, se obtiene la integral indefinida:

$$I = \int \rho J_m(l\rho)^2 d\rho = \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{m^2}{l^2} \right) J_m^2(l\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 [J'_m(l\rho)]^2. \quad (6.117)$$

En aplicación físicas, la integral expresada en (6.117) es definida, y los límites de integración se ajustan de forma conveniente. Es usual tomar el límite inferior como cero, y el límite superior como cualquier valor positivo (la variable ρ en coordenadas cilíndricas no puede tomar valores negativos), y la integral definida toma la forma:

$$I = \int_0^a \rho J_m(l\rho)^2 d\rho = \left\{ \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{m^2}{l^2} \right) J_m^2(l\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 [J'_m(l\rho)]^2 \right\}_0^a. \quad (6.118)$$

Si $m = 0$ y $\rho = 0$, la ecuación (6.118) se anula. Si $m \neq 0$, entonces $J_m(0) = 0$ (lo cual se determina a partir de la expansión en serie de potencias para las funciones de Bessel definidas en (6.76)). Al tener en cuenta lo anteriormente expuesto, la integral expresada en (6.118) se simplifica a la forma:

$$\int_0^a \rho J_m^2(l\rho) d\rho = \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{l^2} \right) J_m^2(la) + \frac{1}{2} a^2 [J'_m(la)]^2. \quad (6.119)$$

La ecuación (6.119) es válida para todo valor entero de m (casos que serán de interés en el presente texto). Es habitual simplificar el lado derecho de (6.119) eligiendo l de tal forma que $J_m(la) = 0$, es decir, que la sea una raíz de la función de Bessel de orden m , a partir de lo cual, se tiene que:

$$\int_0^a \rho J_m^2(l\rho) d\rho = \frac{1}{2} a^2 [J'_m(la)]^2, \quad (6.120)$$

y teniendo en cuenta (6.98) se puede escribir como (tomando $J_m(la) = 0$):

$$\int_0^a \rho J_m^2(l\rho) d\rho = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(la)]^2. \quad (6.121)$$

En general, existen infinitas raíces para las funciones de Bessel. Definiendo x_{mn} como la n -ésima raíz de $J_m(x)$, se tiene:

$$la = x_{mn} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (6.122)$$

A partir de lo anterior, la expresión (6.121) toma la forma:

$$\int_0^a \rho J_m^2\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) d\rho = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2. \quad (6.123)$$

Ahora, teniendo en cuenta (6.123) y (6.104), la condición de ortonormalización para las funciones de Bessel, se puede expresar como:

$$\int_0^a J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mk}\rho}{a}\right) \rho d\rho = \frac{1}{2}a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2 \delta_{kn}, \quad (6.124)$$

donde $a > 0$ y x_{mn} es la n -ésima raíz de $J_m(x)$.

6.2.4. Función generatriz

Las funciones de Bessel de orden entero tienen una función generadora; es decir, existe una función $f(x, t)$ tal que

$$f(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x). \quad (6.125)$$

Para encontrar la función generadora $f(x, t)$, se puede partir de la relación de recurrencia:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \quad (6.126)$$

Al multiplicar la expresión (6.126) por t^m y sumar sobre todos los valores de m se obtiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m-1}(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m+1}(x) = \frac{2}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m t^m J_m(x). \quad (6.127)$$

La primera suma en (6.127) puede escribirse como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m-1}(x) = t \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m-1} J_{m-1}(x) = t \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) = t f(x, t), \quad (6.128)$$

donde en la última igualdad de (6.128) se ha sustituido $n \rightarrow m-1$, que no afecta los límites establecidos para la sumatoria. De forma similar, para la segunda sumatoria en la ecuación (6.127), se tiene que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m+1}(x) = \frac{1}{t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m+1} J_{m+1}(x) = \frac{1}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) = \frac{1}{t} f(x, t), \quad (6.129)$$

donde se ha utilizado el índice $n = m+1$. La sumatoria al lado derecho en (6.127), se puede manipular de tal forma que se puede escribir como

$$\frac{2}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m t^m J_m(x) = \frac{2t}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m t^{m-1} J_m(x) = \frac{2t}{x} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.130)$$

Reemplazando las expresiones (6.128), (6.129) y (6.130), en (6.127), se obtiene:

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) f(x, t) = \frac{2t}{x} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (6.131)$$

que se puede escribir como

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{df}{f}. \quad (6.132)$$

Ahora, se integra la expresión (6.132) en la variable t , tal que:

$$\int \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \int \frac{df}{f} \quad (6.133)$$

↓

$$\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) = \ln f + C(x), \quad (6.135)$$

donde el término $C(x)$ representa una “constante” en la variable t ($C(x)$ puede depender de la variable x , dado que la integración se realizó en la variable t). Por lo tanto,

$$f(x, t) = C(x) \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \right]. \quad (6.136)$$

Para determinar $C(x)$, se parte inicialmente expandiendo las funciones exponenciales en (6.136) en serie de potencias, y se tiene:

$$f(x, t) = C(x) e^{xt/2} e^{-x/2t} = C(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt/2)^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x/2t)^m}{m!} \right), \quad (6.137)$$

que se puede escribir como

$$f(x, t) = C(x) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} t^{n-m}. \quad (6.138)$$

De la doble sumatoria en la expresión (6.138), se toman aparte los términos con potencia cero en la variable t , es decir, los términos para los cuales $n = m$, con lo cual la función $f(x, t)$ toma la forma:

$$f(x, t) = C(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + C(x) \sum_{n \neq m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} t^{n-m}. \quad (6.139)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión (6.76), se puede evidenciar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = J_0(x), \quad (6.140)$$

por lo tanto,

$$f(x, t) = C(x)J_0(x) + C(x) \sum_{n \neq m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} t^{n-m}. \quad (6.141)$$

Por otro lado, a partir de (6.125) se evidencia que

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \\ &= J_0(x) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} t^n J_n(x)}. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Las expresiones (6.141) y (6.142) representan la misma función y cada término asociado a una potencia diferente de la variable t debe ser equivalente en las dos expresiones; por lo tanto, el factor que acompaña a $J_0(x)$ en (6.142) (factor 1) debe ser igual al factor que acompaña a $J_0(x)$ en (6.141); es decir: $C(x) = 1$, con lo cual la función $f(x, t)$ definida en (6.136) toma la forma:

$$f(x, t) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]. \quad (6.143)$$

La función $f(x, t)$ establecida en (6.143) representa la función generatriz de las funciones de Bessel de orden entero.

Ejemplo 6.1. *Expandir las funciones seno y coseno en funciones de Bessel.*

Solución: Si se reemplaza $t = i$ en la expresión (6.143), se tiene que :

$$f(x, i) = \exp \left[\frac{ix}{2} \right]. \quad (6.144)$$

Por otra parte, a partir de (6.125) se tiene que:

$$f(x, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x), \quad (6.145)$$

por lo tanto,

$$e^{ix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x). \quad (6.146)$$

Ahora, aplicando la relación de Euler en la parte izquierda de (6.146) y separando términos pares e impares en la sumatoria a la derecha de (6.146), se obtiene:

$$\begin{aligned}\cos x + i \sin x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{2k} J_{2k}(x) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{2k+1} J_{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x),\end{aligned}\quad (6.147)$$

Las partes real e imaginaria en cada lado de la igualdad (6.147) deben ser iguales y, por lo tanto, se tiene que:

$$\cos x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x), \quad (6.148)$$

$$\sin x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x). \quad (6.149)$$

Las relaciones anteriores pueden ser simplificadas aún más; por ejemplo, la expresión para el coseno se puede escribir como:

$$\cos x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k J_{2k}(x) + J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x). \quad (6.150)$$

Al cambiar el índice de sumatoria en la primera suma en (6.150) por $k \rightarrow -k$, se tiene que,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k J_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} J_{-2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (-1)^{2k} J_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x), \quad (6.151)$$

resultado que es igual a la segunda suma en (6.150), por lo tanto,

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x). \quad (6.152)$$

De manera similar, se puede mostrar que

$$\sin x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x), \quad (6.153)$$

Ejercicio 6.2. Demostrar la relación (6.153).

6.2.5. Forma integral de la función de Bessel

La función de Bessel tiene una forma integral, la cual se puede deducir partiendo de la función generadora $f(x, t)$. Para ello, se toma $t = e^{i\theta}$ en la expresión (6.143) y se tiene que:

$$f(x, e^{i\theta}) = \exp \left[\frac{x}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \equiv e^{ix \operatorname{sen} \theta}. \quad (6.154)$$

Por otra parte, a partir de (6.125), se establece que

$$f(x, e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x), \quad (6.155)$$

entonces,

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x). \quad (6.156)$$

Para encontrar $J_n(x)$ a partir de la relación anterior, se multiplica ambos lados de la ecuación (6.156) por $e^{-im\theta}$ y se integra en la variable θ entre $-\pi$ a π , con lo cual se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \operatorname{sen} \theta} e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right)}_{2\pi\delta_{nm}} J_n(x), \quad (6.157)$$

↓

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \operatorname{sen} \theta - m\theta)} d\theta = 2\pi J_m(x), \quad (6.158)$$

donde se ha tenido en cuenta que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 2\pi & \text{si } n = m, \end{cases} = 2\pi\delta_{mn}. \quad (6.159)$$

Por tanto, se concluye que:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \operatorname{sen} \theta - m\theta)} d\theta. \quad (6.160)$$

Ejercicio 6.3. Partiendo de la definición (6.160), demostrar que:

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta - m\theta) d\theta. \quad (6.161)$$

6.2.6. Expansión en términos de funciones de Bessel

En matemáticas, es posible expandir una función, bajo ciertas características, en términos de otras funciones que suelen tener definida una propiedad de ortogonalidad, como es el caso de la expansión en series de Fourier o en polinomios de Legendre. De igual forma, es posible expandir una función $f(\rho)$, definida en el intervalo $(0, a)$, en la forma:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m \left(\frac{x_{mn}\rho}{a} \right). \quad (6.162)$$

Los coeficientes c_n se pueden encontrar multiplicando ambos lados de la expresión (6.162) por $\rho J_m(x_{ml}\rho/a)$ e integrando desde 0 hasta a , y se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^a \rho J_m \left(\frac{x_{ml}\rho}{a} \right) f(\rho) d\rho &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^a \rho J_m \left(\frac{x_{ml}\rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mn}\rho}{a} \right) d\rho}_{\frac{a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})}{2} \delta_{nl}} \\ &= c_l \frac{a^2 J_{m+1}^2(x_{ml})}{2}, \end{aligned} \quad (6.163)$$

por lo tanto,

$$c_l = \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(x_{ml})} \int_0^a f(\rho) J_m \left(\frac{x_{ml}\rho}{a} \right) \rho d\rho. \quad (6.164)$$

Relación de Parseval

Una relación importante que se obtiene a partir de (6.162), es la denominada *relación de Parseval*, la cual se obtiene al elevar al cuadrado la ecuación (6.162), multiplicar por ρ e integrar entre $\rho = 0$ a $\rho = a$, con lo cual se obtiene:

$$\int_0^a f^2(\rho) \rho d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n c_k \int_0^a J_m \left(\frac{x_{mn}\rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mk}\rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \delta_{kn}, \quad (6.165)$$

donde se ha usado la condición de ortonormalización para las funciones de Bessel. Con lo anterior se concluye que:

$$\int_0^a f^2(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 J_{m+1}^2(x_{mn}). \quad (6.166)$$

La relación dada en (6.166) se conoce como la *Relación de Parseval*.

Ejemplo 6.2. En este ejemplo se encontrará la expansión en funciones de Bessel de la función: $f(\rho) = \rho^k$.

Solución: En la relación (6.162) no se especifica el orden que deben tener las funciones de Bessel, que definen la expansión (valor de m), por lo tanto su elección es libre y permite escoger un apropiado orden que conlleve a una solución más simple. En este caso se tomará $m = k$, con lo cual se tiene:

$$\rho^k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_k \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right), \quad (6.167)$$

por lo tanto,

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{k+1}^2(x_{kn})} \int_0^a \rho^k J_k \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{2}{a^2 J_{k+1}^2(x_{kn})} \int_0^a \rho^{k+1} J_k \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) d\rho. \quad (6.168)$$

Para realizar la integración presente en (6.168), se realiza el cambio de variable $u = \frac{x_{kn} \rho}{a}$, a partir de lo cual se tiene que:

$$c_n = \frac{2a^k}{x_{kn}^{k+2} J_{k+1}^2(x_{kn})} \int_0^{x_{kn}} u^{k+1} J_k(u) du, \quad (6.169)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (u^m J_m(u)) &= m u^{m-1} J_m(u) + u^m J'_m(u) \\ &= u^m \left\{ \frac{m}{u} J_m(u) + J'_m(u) \right\} \\ &= u^m J_{m-1}(u), \end{aligned} \quad (6.170)$$

donde se ha utilizado la relación (6.97). Ahora, si se toma $m = k + 1$ en (6.170) se obtiene

$$\frac{d}{du} (u^{k+1} J_{k+1}(u)) = u^{k+1} J_k(u). \quad (6.171)$$

Al reemplazar el resultado obtenido en (6.171) en (6.169) se tiene:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2a^k}{x_{kn}^{k+2} J_{k+1}^2(x_{kn})} \int_0^{x_{kn}} \left(\frac{d}{du} u^{k+1} J_{k+1}(u) \right) du \\ &= \frac{2a^k}{x_{kn}^{k+2} J_{k+1}^2(x_{kn})} \left(u^{k+1} J_{k+1}(u) \right) \Big|_0^{x_{kn}} \\ &= \frac{2a^k}{x_{kn} J_{k+1}(x_{kn})}. \end{aligned} \quad (6.172)$$

$$= \frac{2a^k}{x_{kn} J_{k+1}(x_{kn})}. \quad (6.173)$$

Por lo tanto, la expansión buscada toma la forma:

$$\rho^k = 2a^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_k\left(\frac{x_{kn}\rho}{a}\right)}{x_{kn} J_{k+1}(x_{kn})}. \quad (6.174)$$

En problemas de electrostática o conducción térmica, es común encontrarse ante sistemas con configuraciones que requieran la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, cuya solución más general se puede expresar con la relación (6.47) (o (6.51)). A continuación se ilustran algunos ejemplos con condiciones de frontera específicas, donde se hará uso de la solución (6.47) (o (6.51)).

Ejemplo 6.3. En este ejemplo se considera un cascarón cilíndrico metálico de altura L y radio R , cuyo eje de simetría es paralelo al eje z , como se muestra en la figura 6.3. Las diferentes superficies del cascarón se mantienen a potenciales eléctricos dados por las siguientes condiciones de frontera:

- $\psi(\rho, \phi, 0) = 0$ para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $\psi(a, \phi, z) = 0$ para todo valor de (ϕ, z) .
- $\psi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$ para todo valor de (ρ, ϕ) :

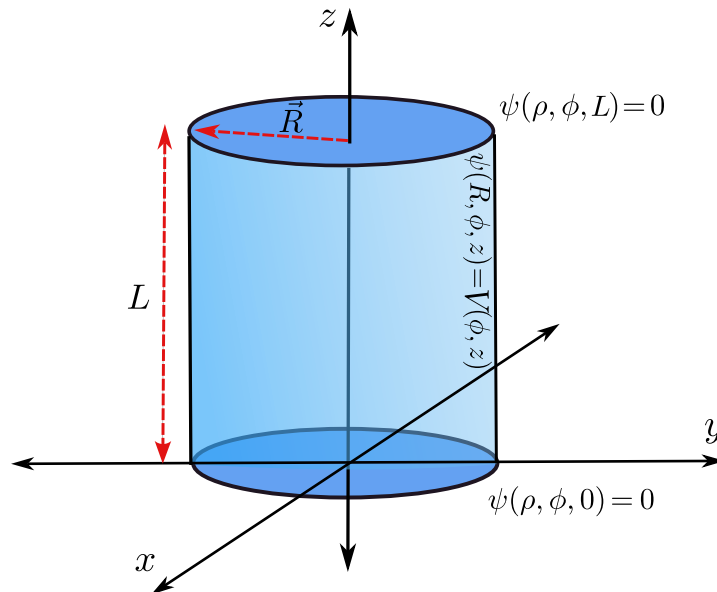


Figura 6.3: Ejemplo (6.3). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie circular en $z = L$.

Solución: Al interior del cilindro, el potencial eléctrico cumple la ecuación de Laplace, por lo tanto, la solución más general vendrá dada por (ecuación (6.46)):

$$\begin{aligned}
\psi(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ (\mathcal{A}_{\nu} J_{\nu}(l\rho) + \mathcal{B}_{\nu} N_{\nu}(l\rho)) (\mathcal{C}_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}) \} \\
& + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ (A_{\omega} \rho^{\omega} + B_{\omega} \rho^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sin \omega\phi) (F_0 z + G_0) \} \\
& + (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0) (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0).
\end{aligned} \tag{6.175}$$

La solución particular para el problema planteado, se obtendrá al considerar las condiciones de frontera específicas del problema y determinar de esa forma, los valores de las constantes presenten en (6.175).

Ya que la región de estudio comprende el interior del cilindro, se debe garantizar una solución finita cuando $\rho \rightarrow 0$. Por lo tanto, las constantes que son factores de las funciones $\rho^{-\omega}$, $\ln \rho$ y $N_{\nu}(l\rho)$; las cuales divergen en $\rho = 0$, se deben de anular, es decir:

$$B_{\omega} = \mathcal{B}_{\nu} = \mathbb{A}_0 = 0, \tag{6.176}$$

y la solución se simplifica tomando la forma

$$\begin{aligned}
\psi(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \mathcal{A}_{\nu} J_{\nu}(l\rho) (\mathcal{C}_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}) \} \\
& + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ A_{\omega} \rho^{\omega} (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sin \omega\phi) (F_0 z + G_0) \} \\
& + \mathbb{B}_0 (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0).
\end{aligned} \tag{6.177}$$

Ahora se toma en cuenta la condición $\psi(R, \phi, z) = 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(R, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \mathcal{A}_{\nu} J_{\nu}(lR) (\mathcal{C}_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}_l e^{lz} + \mathcal{G}_l e^{-lz}) \} \\
& + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ A_{\omega} R^{\omega} (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sin \omega\phi) (F_0 z + G_0) \} \\
& + \mathbb{B}_0 (\mathbb{F}_0 z + \mathbb{G}_0) = 0.
\end{aligned} \tag{6.178}$$

Dado que la condición anterior se debe cumplir para cualquier valor que puedan tomar las variables (ϕ, z) , se debe garantizar que:

$$\mathcal{A}_{\nu} J_{\nu}(lR) = 0, \quad A_{\omega} R^{\omega} = 0, \quad \mathbb{B} = 0, \tag{6.179}$$

por lo tanto se determina que $A_{\omega} = \mathbb{B} = 0$. Además, si no se considera la solución trivial (es decir, se toma $A_{\nu} \neq 0$), se debe exigir que:

$$J_{\nu}(lR) = 0. \tag{6.180}$$

La condición establecida en (6.180), se cumplen para ciertos valores de x que corresponden a las raíces de las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ que se denotarán como $x_{\nu n}$, tal que:

$$J_\nu(lR) = J_\nu(x_{\nu n}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.181)$$

con lo cual:

$$lR = x_{\nu n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (6.182)$$

Lo anterior sugiere que el valor de l depende de los valores ν y n , por lo tanto, se denotará:

$$l \rightarrow l_{\nu n} = \frac{x_{\nu n}}{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (6.183)$$

Lo anterior establece los posibles valores de las constantes l , y todos sus posibles valores se deben incluir en la solución más general, por tanto, la solución debe incluir una suma sobre n , con lo cual se obtiene (cambiando el subíndice l por n , y la variable l por $l_{\nu n}$):

$$\psi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \mathcal{A}_\nu J_\nu(l_{\nu n} \rho) (C_\nu \cos(\nu \phi) + \mathcal{D}_\nu \sin(\nu \phi)) (\mathcal{F}_n e^{l_{\nu n} z} + \mathcal{G}_n e^{-l_{\nu n} z}) \}. \quad (6.184)$$

Ahora, al considerar la condición de frontera: $\psi(\rho, \phi, 0) = 0$, se tiene:

$$\psi(\rho, \phi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \mathcal{A}_\nu J_\nu(l_{\nu n} \rho) (C_\nu \cos(\nu \phi) + \mathcal{D}_\nu \sin(\nu \phi)) (\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n) \} = 0, \quad (6.185)$$

la cual se debe garantizar para todo valor de (ρ, ϕ) , por lo tanto,

$$\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n = 0, \quad (6.186)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{A}_\nu J_\nu(l_{\nu n} \rho)) (C_\nu \cos \nu \phi + \mathcal{D}_\nu \sin \nu \phi) (F_n e^{l_{\nu n} z} - F_n e^{-l_{\nu n} z}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_\nu(l_{\nu n} \rho)) \left(\underbrace{2\mathcal{A}_\nu \mathcal{F}_n C_\nu}_{C_{\nu n}} \cos \nu \phi + \underbrace{2\mathcal{A}_\nu \mathcal{F}_n \mathcal{D}_\nu}_{D_{\nu n}} \sin \nu \phi \right) \left(\frac{e^{l_{\nu n} z} - e^{-l_{\nu n} z}}{2} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (J_\nu(l_{\nu n} \rho)) (C_{\nu n} \cos \nu \phi + D_{\nu n} \sin \nu \phi) \sinh(l_{\nu n} z), \end{aligned} \quad (6.187)$$

donde las constantes $C_{\nu n}$ y $D_{\nu n}$ están por determinar. Finalmente, si se tiene en cuenta la condición $\psi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$, se obtiene:

$$\psi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{R} \rho\right) (C_{\nu n} \cos \nu \phi + D_{\nu n} \sin \nu \phi) \sinh\left(\frac{x_{\nu n}}{R} L\right). \quad (6.188)$$

Utilizando la condición de ortonormalización de las funciones de Bessel:

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{R} \rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho\right) = \frac{R^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nm}, \quad (6.189)$$

se puede determinar que

$$\begin{aligned}
 \int_0^R d\rho \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho \right) V(\rho, \phi) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{\nu n} \cos \nu \phi + D_{\nu n} \sin \nu \phi) \sinh \left(\frac{x_{\nu n}}{R} L \right) \\
 &\quad \times \underbrace{\int_0^R d\rho \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho \right) J_\nu \left(\frac{x_{\nu n}}{R} \rho \right)}_{\frac{R^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nm}} \\
 &= \frac{R^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{\nu n} \cos \nu \phi + D_{\nu n} \sin \nu \phi) \sinh \left(\frac{x_{\nu n}}{R} L \right) \\
 &\quad \times [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nm} \\
 &= \frac{R^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (C_{\nu m} \cos \nu \phi + D_{\nu m} \sin \nu \phi) \sinh \left(\frac{x_{\nu m}}{R} L \right) \\
 &\quad \times [J_{\nu+1}(x_{\nu m})]^2, \tag{6.190}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_0^R d\rho \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho \right) V(\rho, \phi) = \frac{R^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [J_{\nu+1}(x_{\nu m})]^2 (C_{\nu m} \cos \nu \phi + D_{\nu m} \sin \nu \phi) \sinh \left(\frac{x_{\nu m}}{R} L \right). \tag{6.191}$$

Para encontrar los coeficientes $D_{\nu m}$, se utilizan las condiciones de ortonormalización de las funciones $\sin \nu \phi$:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin(\nu \phi) \sin(\nu' \phi) = \pi \delta_{\nu \nu'}. \tag{6.192}$$

Por lo tanto, al multiplicar la ecuación (6.191) por $\sin(\omega \phi)$ e integrar entre 0 a 2π en la variable ϕ , el lado derecho (LD) y el lado izquierdo (LI) de la ecuación (6.191), resultan en:

$$LI = \int_0^R d\rho \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho \right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\nu' \phi) V(\rho, \phi) \tag{6.193}$$

$$\begin{aligned}
 LD &= \frac{R^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [J_{\nu+1}(x_{\nu m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu m}}{R} L \right) \left(\underbrace{C_{\nu m} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\nu' \phi) \cos \nu \phi}_0 + D_{\nu m} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin(\nu' \phi) \sin \nu \phi}_{\pi \delta_{\nu \nu'}} \right) \\
 &= \frac{\pi R^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [J_{\nu+1}(x_{\nu, m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu m}}{R} L \right) D_{\nu m} \delta_{\nu \nu'} \\
 &= \frac{\pi R^2}{2} [J_{\nu'+1}(x_{\nu', m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu', m}}{R} L \right) D_{\nu' m}, \tag{6.194}
 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\int_0^R d\rho \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu m}}{R} \rho \right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\nu' \phi) V(\rho, \phi) = \frac{\pi R^2}{2} [J_{\nu'+1}(x_{\nu',m})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu',m}}{R} L \right) D_{\nu'm}, \quad (6.195)$$

obteniéndose:

$$D_{\nu n} = \frac{2}{\pi R^2 [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu n}}{R} L \right)} \int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu n}}{R} \rho \right) \sin(\nu \phi) V(\rho, \phi). \quad (6.196)$$

Para encontrar los valores de $C_{\nu n}$ se realiza un procedimiento similar al anterior, pero esta vez, utilizando la propiedad de ortonormalización para la función coseno,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos(\nu \phi) \cos(\nu' \phi) = \pi \delta_{\nu\nu'}. \quad (6.197)$$

Por lo tanto, al multiplicar la ecuación (6.191) por $\cos(\omega \phi)$ e integrar en la variable ϕ , y tener en cuenta (6.197), se determina que:

$$C_{\nu n} = \frac{2}{\pi R^2 [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \sinh \left(\frac{x_{\nu n}}{R} L \right)} \int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\phi \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu n}}{R} \rho \right) \cos(\nu \phi) V(\rho, \phi). \quad (6.198)$$

Los valores de $C_{\nu n}$ y $D_{\nu n}$ determinan completamente la solución para el potencial eléctrico dado por (6.188), una vez se defina el valor para el potencial $V(\rho, \phi)$.

Ejercicio 6.4. Demostrar que la solución (6.51) no es compatible con las condiciones de frontera establecidas en el ejemplo (6.3).

Ejemplo 6.4. Se tiene un cascarón cilíndrico de radio R y longitud L , cuyas superficies se mantienen a diferentes temperaturas. Se asume que entre la cara lateral y las superficies circulares que componen el cilindro, existe un medio infinitesimal no conductor que mantiene cada superficie a una temperatura dada. Las condiciones de frontera son:

- $T(\rho, \phi, 0) = 0$, para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $T(\rho, \phi, L) = 0$, para todo valor de (ρ, ϕ) .
- $T(R, \phi, z) = f(\phi, z)$, para todo valor de (ϕ, z) .

Solución: Para solucionar este problema, se parte de la solución (6.51) (se deja como ejercicio para el lector demostrar que la solución establecida en la expresión (6.47) no es compatible con las condiciones de frontera planteadas en este ejercicio), la cual para la función de temperatura viene dada por:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ (\mathcal{A}'_{\nu} I_{\nu}(l\rho) + \mathcal{B}'_{\nu} K_{\nu}(l\rho)) (C'_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}'_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}'_l e^{ilz} + \mathcal{G}'_l e^{-ilz}) \} \\
& + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ (A'_{\omega} \rho^{\omega} + B'_{\omega} \rho^{-\omega}) (C'_{\omega} \cos \omega\phi + D'_{\omega} \sin \omega\phi) (F'_0 z + G'_0) \} \\
& + (\mathbb{A}'_0 \ln \rho + \mathbb{B}'_0) (\mathbb{F}'_0 z + \mathbb{G}'_0). \tag{6.199}
\end{aligned}$$

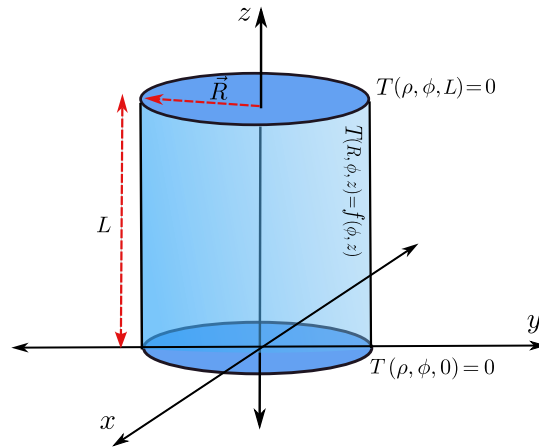


Figura 6.4: Ejemplo (6.4). Cascarón Cilíndrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie lateral definida por $\rho = a$.

Solución: Para encontrar la solución al problema planteado, se deben ajustar las constantes presentes en (6.199) que representen las condiciones de frontera establecidas para el caso particular en estudio. En primer lugar, dado que se requiere una solución finita cuando $\rho \rightarrow 0$, es necesario eliminar, de la solución general, las funciones divergentes en $\rho = 0$. Por lo tanto, se debe tomar $\mathcal{B}\nu 1' = \mathcal{B}'_{\omega} = \mathbb{A}'_0 = 0$, con lo cual la solución se simplifica y adopta la forma:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, z) = & \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \mathcal{A}'_{\nu} I_{\nu}(l\rho) (C'_{\nu} \cos(\nu\phi) + \mathcal{D}'_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}'_l e^{ilz} + \mathcal{G}'_l e^{-ilz}) \} \\
& + \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ A'_{\omega} \rho^{\omega} (C'_{\omega} \cos \omega\phi + D'_{\omega} \sin \omega\phi) (F'_0 z + G'_0) \} \\
& + \mathbb{B}'_0 (\mathbb{F}'_0 z + \mathbb{G}'_0). \tag{6.200}
\end{aligned}$$

Ahora, tomando la condición $T(\rho, \phi, 0) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, 0) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \{A'_{\nu} I_{\nu}(l\rho) (C'_{\nu} \cos(\nu\phi) + D'_{\nu} \sin(\nu\phi)) (\mathcal{F}'_l + \mathcal{G}'_l)\} \\
&+ \sum_{\omega=0}^{\infty} \{A'_{\omega} \rho^{\omega} (C'_{\omega} \cos \omega\phi + D'_{\omega} \sin \omega\phi) G'_0\} \\
&+ \mathbb{B}'_0 \mathbb{G}'_0 = 0.
\end{aligned} \tag{6.201}$$

Dado que la condición anterior debe cumplirse para todo valor de las variables (ρ, ϕ) y, debido a la independencia de las funciones implicadas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_l + \mathcal{G}'_l &= 0, \\
G'_0 &= 0, \\
\mathbb{B}'_0 \mathbb{G}'_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.202}$$

Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, la solución general toma la forma:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}(l\rho) \left\{ \underbrace{2iA'_{\nu}C'_{\nu}\mathcal{F}'_l}_{C_{\nu l}} \cos(\nu\phi) + \underbrace{2iA'_{\nu}D'_{\nu}\mathcal{F}'_l}_{D_{\nu l}} \sin(\nu\phi) \right\} \underbrace{\{e^{ilz} - e^{-ilz}\}}_{\sin lz} / 2i \\
&+ \sum_{\omega=0}^{\infty} \rho^{\omega} \left\{ \underbrace{A'_{\omega}C'_{\omega}}_{A_{\omega 0}} \cos \omega\phi + \underbrace{A'_{\omega}D'_{\omega}}_{B_{\omega 0}} \sin \omega\phi \right\} F'_0 z \\
&+ \underbrace{\mathbb{B}'_0 \mathbb{F}'_0}_{\mathbb{B}_0} z.
\end{aligned} \tag{6.203}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}(l\rho) \{C_{\nu l} \cos(\nu\phi) + D_{\nu l} \sin(\nu\phi)\} \sin lz \\
&+ \sum_{\omega=0}^{\infty} \rho^{\omega} \{A_{\omega 0} \cos \omega\phi + B_{\omega 0} \sin \omega\phi\} F'_0 L \\
&+ \mathbb{B}_0 z.
\end{aligned} \tag{6.204}$$

Ahora, al aplicar la condición $T_B(\rho, \phi, L) = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
T(\rho, \phi, L) = 0 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}(l\rho) \{C_{\nu l} \cos(\nu\phi) + D_{\nu l} \sin(\nu\phi)\} \sin lL \\
&+ \sum_{\omega=0}^{\infty} \rho^{\omega} \{A_{\omega 0} \cos \omega\phi + B_{\omega 0} \sin \omega\phi\} F'_0 L + \mathbb{B}_0 L.
\end{aligned} \tag{6.205}$$

Dado que la condición anterior debe cumplirse para todo valor de (ρ, ϕ) , y considerando la independencia de las funciones asociadas (y una solución no trivial), se debe cumplir:

$$\sin(lL) = 0, \Rightarrow l = \frac{n\pi}{L}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots, \tag{6.206}$$

$$F'_0 = 0, \tag{6.207}$$

$$\mathbb{B}_0 L = 0 \Rightarrow \mathbb{B}_0 = 0. \tag{6.208}$$

La relación (6.206) establece que el parámetro l depende de n , por lo tanto, la solución más general debe incluir todos los posibles valores de n , tal que:

$$T(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}(n\pi\rho/L) \{C_{\nu l} \cos(\nu\phi) + D_{\nu l} \sin(\nu\phi)\} \sin(n\pi z/L). \tag{6.209}$$

Para la última condición de frontera, se tiene que:

$$T(R, \phi, z) = f(\phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}(n\pi R/L) \{C_{\nu l} \cos(\nu\phi) + D_{\nu l} \sin(\nu\phi)\} \sin(n\pi z/L). \tag{6.210}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right)$ e integrando en z resulta:

$$\begin{aligned}
\int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) f(\rho, z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\nu}\left(\frac{n\pi}{L}R\right) [C_{\nu n} \cos(\nu\phi) + D_{\nu n} \sin(\nu\phi)] \\
&\quad \underbrace{\int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}_{\frac{L}{2}\delta_{nm}} \\
&= \frac{L}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\nu}\left(\frac{n\pi}{L}R\right) [C_{\nu n} \cos(\nu\phi) + D_{\nu n} \sin(\nu\phi)] \delta_{nm} \\
&= \frac{L}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}\left(\frac{m\pi}{L}R\right) [C_{\nu m} \cos(\nu\phi) + D_{\nu m} \sin(\nu\phi)], \tag{6.211}
\end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) f(\rho, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}\left(\frac{m\pi}{L}R\right) [C_{\nu m} \cos(\nu\phi) + D_{\nu m} \sin(\nu\phi)]. \tag{6.212}$$

Ahora, para determinar los valores de las constantes $C_{\nu m}$, se multiplica la expresión (6.212) por $\sin(\omega\phi)$ y se integra en el ángulo ϕ , con lo cual, el lado derecho (LD) y el lado izquierdo (LI) de la expresión (6.212), se pueden escribir como:

$$LI = \frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\omega\phi) f(\rho, z) \quad (6.213)$$

$$\begin{aligned} LD &= \sum_{\nu} I_{\nu}\left(\frac{m\pi}{L}R\right) \times \left[\underbrace{C_{\nu m} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\omega\phi) \cos(\nu\phi)}_0 + \underbrace{D_{\nu m} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\omega\phi) \sin(\nu\phi)}_{\pi\delta_{\nu\omega}} \right] \\ &= \pi \sum_{\nu} I_{\nu}\left(\frac{m\pi}{L}a\right) D_{\nu m} \delta_{\nu,\omega} \\ &= \pi I_{\omega}\left(\frac{m\pi}{L}a\right) D_{\omega m}, \end{aligned} \quad (6.214)$$

por lo tanto

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\omega\phi) f(\rho, z) = \pi I_{\omega}\left(\frac{m\pi}{L}a\right) D_{\omega m} \quad (6.215)$$

de manera que (reemplazando $\omega \rightarrow \nu$),

$$D_{\nu n} = \frac{2}{\pi L} \frac{1}{I_{\nu}\left(\frac{n\pi}{L}a\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\phi \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin(\nu\phi) f(\rho, z). \quad (6.216)$$

Para determinar los valores de las constantes $C_{\nu m}$, se aplica un procedimiento similar al utilizado para encontrar $D_{\nu m}$. En este caso, se multiplica la expresión (6.212) por $\cos\omega\phi$, se integra en el ángulo ϕ y se utiliza la condición de ortogonalidad para las funciones $\cos(\nu\phi)$, con lo cual se puede verificar que:

$$C_{\nu n} = \frac{2}{\pi L} \frac{1}{I_{\nu}\left(\frac{n\pi}{L}R\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\phi \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos(\nu\phi) f(\rho, \phi). \quad (6.217)$$

Las constantes $C_{\nu n}$ y $D_{\nu n}$ determinan completamente la solución (6.210), una vez se especifique la dependencia funcional de $f(\rho, \phi)$.

Ejercicio 6.5. A partir de (6.212), demostrar la expresión para $C_{\nu n}$, dada por (6.217).

Ejemplo 6.5. Se considera un conductor cilíndrico muy largo ($L \rightarrow \infty$) de radio a , que se mantiene a un potencial eléctrico V_a . Este conductor es coaxial con un cascarón cilíndrico, también muy largo ($L \rightarrow \infty$), de radio interior b ($b > a$) y radio exterior c , el cual se encuentra a un potencial V_b . El objetivo es determinar el potencial eléctrico en la región comprendida entre $a < \rho < b$ (ver figura 6.5).

Solución: Para abordar el problema, se elige el eje z como eje de simetría del sistema; dado que el cilindro se extiende indefinidamente en dicha dirección, es decir, desde $z \rightarrow -\infty$

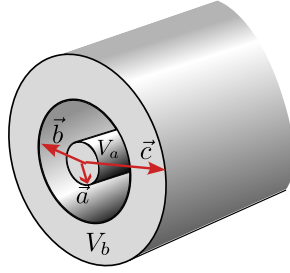


Figura 6.5: Ejemplo (6.5). Potencial eléctrico entre dos cilindros coaxiales.

hasta $z \rightarrow \infty$. Como el potencial en $\rho = a$ y en $\rho = b$ es constante, se deduce que el sistema presenta simetría tanto a lo largo del eje z (no existe un origen preferencial para dicho eje) como respecto al ángulo ϕ . Por consiguiente, el potencial eléctrico no depende de la variable z ni de la variable ϕ .

A partir de la solución general (6.47), la independencia del potencial respecto a z y ϕ implica que deben anularse los factores $\mathcal{F}_l$, $\mathcal{G}_l$, F_0 y $\mathbb{F}_0$, y además tomarse $\omega = 0$. En estas condiciones, la solución se reduce a la forma:

$$\psi(\rho) = \{(A_0 + B_0)(C_0)(G_0)\} + (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0)(\mathbb{G}_0), \quad (6.218)$$

que se puede escribir simplemente como:

$$\psi(\rho) = \mathbb{A}_0 \ln \rho + H_0, \quad (6.219)$$

donde en H_0 se han reunido todos los términos que no dependen de la variable ρ . Ahora, teniendo en cuentas las condiciones de frontera para el potencial, se tiene que:

$$\psi(a) = V_a = \mathbb{A}_0 \ln a + H_0, \quad (6.220)$$

$$\psi(b) = V_b = \mathbb{A}_0 \ln b + H_0. \quad (6.221)$$

A partir del sistema de ecuaciones establecido, se encuentra que:

$$\mathbb{A}_0 = \frac{(V_b - V_a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (6.222)$$

$$H_0 = V_a \left(1 + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) - V_b, \quad (6.223)$$

con lo cual el potencial eléctrico, resulta:

$$\psi(\rho) = \frac{(V_b - V_a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln \rho + V_a \left(1 + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) - V_b. \quad (6.224)$$

A partir de (6.224) es posible encontrar el campo eléctrico, por aplicación del gradiente en coordenadas cilíndricas, y se tiene que:

$$\vec{E} = - \left(\frac{d}{d\rho} \psi(\rho) \right) \hat{\rho} = - \frac{(V_b - V_a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{1}{\rho} \right) \hat{\rho}. \quad (6.225)$$

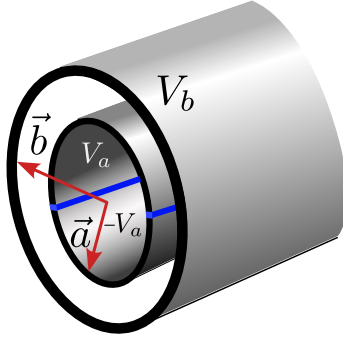


Figura 6.6: Ejemplo (6.6). Cable coaxial con una división sobre el conductor externo.

Ejercicio 6.6. Encuentre el campo eléctrico para el sistema planteado en el ejemplo (6.5) aplicando ley de Gauss y compare su resultado con el obtenido en (6.225). Asuma que conoce la densidad lineal de carga del conductor interno.

Ejercicio 6.7. Determinar el potencial eléctrico para el ejemplo (6.5) en la región $\rho > c$.

Ejemplo 6.6. Se tiene un cascarón cilíndrico conductor, muy largo ($L \rightarrow \infty$) y de espesor despreciable de radio a , compuesto por dos mitades con secciones transversales semicirculares, separadas por un medio dieléctrico infinitesimal (para mantener las dos mitades a diferentes potenciales). La mitad superior del cilindro se encuentra a un potencial $+V_a$, mientras que la mitad inferior se encuentra a un potencial $-V_a$. Este cilindro se encuentra ubicado dentro de otro cilindro de radio b ($b > a$), coaxial con el primero, el cual se mantiene a un potencial constante V_b , como se indica en la figura 6.6. El objetivo es determinar el potencial eléctrico en la región $a < \rho < b$.

Solución: Para solucionar el problema planteado, se tomará como eje z el eje a lo largo de la longitud del conductor. Las condiciones de frontera establecidas no dependen de la variable z ; y ya que el conductor tiene longitud infinita, se puede deducir que la solución para el potencial no puede depender de la variable z . Por lo tanto, tomando como punto de partida la solución general (6.47), para que el potencial sea independiente de la variable z , se debe tomar: $\mathcal{F}_l = \mathcal{G}_l = F_0 = \mathbb{F}_0 = 0$, con lo cual la ecuación (6.47) se reduce a (absorbiendo las constantes G_0 y $\mathbb{G}_0$ en las otras constantes de la solución):

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi) = & \sum_{\omega=0}^{\infty} \{ (A_{\omega} \rho^{\omega} + B_{\omega} \rho^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega \phi + D_{\omega} \sin \omega \phi) \} \\ & + (\mathbb{A}_0 \ln \rho + \mathbb{B}_0), \end{aligned} \quad (6.226)$$

que se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \phi) = & \underbrace{(A_0 + B_0)C_0 + \mathbb{B}_0}_{C'_0} + \mathbb{A}_0 \ln \rho \\ & + \sum_{\omega=1}^{\infty} \{ (A_{\omega}\rho^{\omega} + B_{\omega}\rho^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sen \omega\phi) \},\end{aligned}\quad (6.227)$$

es decir,

$$\psi(\rho, \phi) = C'_0 + \mathbb{A}_0 \ln \rho + \sum_{\omega=1}^{\infty} \{ (A_{\omega}\rho^{\omega} + B_{\omega}\rho^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sen \omega\phi) \}, \quad (6.228)$$

Ahora, para la condición de frontera establecida en $\rho = b$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi(b, \phi) = V_b = & \sum_{\omega=1}^{\infty} \{ (A_{\omega}b^{\omega} + B_{\omega}b^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sen \omega\phi) \} \\ & + C'_0 + \mathbb{A}_0 \ln b,\end{aligned}\quad (6.229)$$

que se puede escribir como

$$V_b - K = \sum_{\omega=1}^{\infty} H_{\omega} (C_{\omega} \cos \omega\phi + D_{\omega} \sen \omega\phi), \quad (6.230)$$

donde se ha nombrado

$$H_{\omega} = (A_{\omega}b^{\omega} + B_{\omega}b^{-\omega}), \quad (6.231)$$

$$K = (\mathbb{A}_0 \ln b + C'_0). \quad (6.232)$$

Ahora, al integrar la expresión (6.230) en la variable ϕ entre 0 y 2π , se tiene:

$$\int_0^{2\pi} (V_b - K) d\phi = \sum_{\omega=1}^{\infty} H_{\omega} \left(C_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\omega\phi) d\phi}_0 + D_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sen(\omega\phi) d\phi}_0 \right), \quad (6.233)$$

por tanto,

$$(V_b - K) = 0. \quad (6.234)$$

Para encontrar las constantes H_{ω} se utilizan las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno. Al multiplicar la ecuación (6.230) por $\cos(\nu\phi)$ e integrar en la variable ϕ entre 0 y 2π , el lado izquierdo (LI) de (6.230) bajo la integración en ϕ se anula, ya que

$$LI = \int_0^{2\pi} (V_b - K) \cos(\nu\phi) d\phi = 0, \quad (6.235)$$

y el lado izquierdo (LD) toma la forma:

$$\begin{aligned} LD &= \sum_{\omega=1}^{\infty} H_{\omega} \left(C_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\omega\phi) \cos(\nu\phi) d\phi}_{\pi\delta_{\omega\nu}} + D_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\omega\phi) \cos(\nu\phi) d\phi}_0 \right) \\ &= \pi H_{\nu} C_{\nu}, \end{aligned} \quad (6.236)$$

por lo tanto, se obtiene que:

$$H_{\nu} C_{\nu} = 0 \rightarrow H_{\nu} = 0, \quad \text{para } \nu > 0, \quad (6.237)$$

donde se ha asumido $C_{\nu} \neq 0$ (opción menos restrictiva). Se deja como ejercicio para el lector, demostrar que al multiplicar la ecuación (6.230) por $\sin(\nu\phi)$ e integrar en la variable ϕ , se deduce que

$$H_{\nu} D_{\nu} = 0 \rightarrow H_{\nu} = 0, \quad \text{para } \nu > 0, \quad (6.238)$$

asumiendo $D_{\nu} \neq 0$. Eligir $H_{\nu} \neq 0$, conlleva la solución trivial.

Ejercicio 6.8. Demostrar que al multiplicar la ecuación (6.230) por $\sin(\nu\phi)$ e integrar en la variable ϕ , conlleva que: $H_{\nu} = 0$, asumiendo $D_{\nu} \neq 0$.

Las expresiones (6.234) y (6.237), teniendo en cuenta las relaciones (6.231) y (6.232), se pueden escribir como:

$$V_b - (A_0 \ln b + C'_0) = 0, \quad (6.239)$$

$$(A_{\omega} b^{\omega} + B_{\omega} b^{-\omega}) = 0, \quad \text{para } \omega > 0. \quad (6.240)$$

En particular, a partir de (6.240), se tiene que

$$B_{\omega} = -A_{\omega} b^{2\omega}, \quad \text{para } \omega > 0. \quad (6.241)$$

Por otra parte, el potencial eléctrico sobre la superficie $\rho = a$, se puede expresar como:

$$V(\phi) = \begin{cases} V_a, & \text{para } 0 \leq \phi \leq \pi, \\ -V_a, & \text{para } \pi \leq \phi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (6.242)$$

por lo tanto, la condición de frontera en $\rho = a$, toma la forma:

$$\begin{aligned} \psi(a, \phi) = V(\phi) = \sum_{\omega=1}^{\infty} \{ (A_{\omega} a^{\omega} + B_{\omega} a^{-\omega}) (C_{\omega} \cos \omega \phi + D_{\omega} \sen \omega \phi) \} \\ + (\mathbb{A}_0 \ln a + C'_0), \end{aligned} \quad (6.243)$$

que se puede escribir como

$$V(\phi) - Q = \sum_{\omega=1}^{\infty} P_{\omega} (C_{\omega} \cos \omega \phi + D_{\omega} \sen \omega \phi), \quad (6.244)$$

donde se ha definido

$$P_{\omega} = (A_{\omega} a^{\omega} + B_{\omega} a^{-\omega}), \quad (6.245)$$

$$Q = (\mathbb{A}_0 \ln a + C'_0). \quad (6.246)$$

Al integrar la expresión (6.244) en la variable ϕ , se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} (V(\phi) - Q) d\phi = \sum_{\omega=1}^{\infty} P_{\omega} \left(C_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \omega \phi d\phi}_0 + D_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sen \omega \phi d\phi}_0 \right), \quad (6.247)$$

por tanto

$$\int_0^{\pi} (V_a - Q) d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} (-V_a - Q) d\phi = 0, \quad (6.248)$$

a partir de lo cual se obtiene:

$$2Q = 0, \quad (6.249)$$

que se puede escribir como (teniendo en cuenta (6.245) y (6.246)):

$$(\mathbb{A}_0 \ln a + C'_0) = 0. \quad (6.250)$$

Ahora, al multiplicar la ecuación (6.244) por $\cos(\nu\phi)$, e integrar en la variable ϕ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (V(\phi) - Q) \cos(\nu\phi) d\phi &= \sum_{\omega=1}^{\infty} P_{\omega} C_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\omega\phi) \cos(\nu\phi) d\phi}_{\pi \delta_{\nu\omega}} \\ &+ \sum_{\omega=1}^{\infty} P_{\omega} D_{\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sen(\omega\phi) \cos(\nu\phi) d\phi}_0 \\ &= \pi P_{\nu} C_{\nu}, \end{aligned} \quad (6.251)$$

El lado izquierdo de (6.251), se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 LI &= \int_0^{2\pi} V(\phi) \cos(\nu\phi) d\phi - \underbrace{\int_0^{2\pi} Q \cos(\nu\phi) d\phi}_0 \\
 &= V_a \int_0^\pi \cos(\nu\phi) d\phi - V_a \int_\pi^{2\pi} \cos(\nu\phi) d\phi \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.252}$$

Por lo tanto

$$P_\nu C_\nu = 0, \quad \text{para } \nu > 0. \tag{6.253}$$

Ahora, teniendo en cuenta (6.245) y (6.241), la condición (6.253) toma la forma

$$\underbrace{A_\nu a^{-\nu} (a^{2\nu} - b^{2\nu})}_{\neq 0} C_\nu = 0, \quad \text{para } \nu > 0, \tag{6.254}$$

por lo tanto se concluye que

$$C_\nu = 0, \quad \text{para } \nu > 0. \tag{6.255}$$

En (6.254), no se puede considerar $A_\nu = 0$, pues se llegaría a una solución trivial. Ahora, al multiplicar la ecuación (6.244) por $\sin(\nu\phi)$ e integrar en la variable ϕ (reemplazando $C_\omega = 0$), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} (V(\phi) - Q) \sin(\nu\phi) d\phi &= \sum_{\omega=1}^{\infty} P_\omega D_\omega \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\omega\phi) \sin(\nu\phi) d\phi}_{\pi \delta_{\nu\omega}} \\
 &= \pi P_\nu D_\nu,
 \end{aligned} \tag{6.256}$$

El lado izquierdo de (6.256), se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 LI &= \int_0^{2\pi} V(\phi) \sin(\nu\phi) d\phi - \underbrace{\int_0^{2\pi} Q \sin(\nu\phi) d\phi}_0 \\
 &= V_a \int_0^\pi \sin(\nu\phi) d\phi - V_a \int_\pi^{2\pi} \sin(\nu\phi) d\phi \\
 &= \frac{2V_a}{\nu} (1 + \cos(\nu\phi)) \\
 &= \frac{2V_a}{\nu} (1 - (-1)^\nu).
 \end{aligned} \tag{6.257}$$

Por lo tanto,

$$P_\nu D_\nu = \begin{cases} \frac{4V_a}{\pi\nu} & \text{para } \nu = \text{impar}, \\ 0 & \text{para } \nu = \text{par}, \end{cases} \tag{6.258}$$

y teniendo en cuenta (6.245) y (6.241), la condición (6.258) toma la forma:

$$\underbrace{A_\nu D_\nu}_{A'_\nu} a^{-\nu} (a^{2\nu} - b^{2\nu}) = \begin{cases} \frac{4V_a}{\pi\nu} & \text{para } \nu = \text{impar}, \\ 0 & \text{para } \nu \text{ par}, \end{cases} \quad (6.259)$$

y dado que $a^{-\nu} (a^{2\nu} - b^{2\nu}) \neq 0$, se tiene que:

$$A'_\nu = \begin{cases} \frac{4V_a}{a^{-\nu}\pi\nu(a^{2\nu}-b^{2\nu})} & \text{para } \nu \text{ impar}, \\ 0 & \text{para } \nu \text{ par}. \end{cases} \quad (6.260)$$

El haber determinado que $C_\nu = 0$, hace que D_ν sea una constante irrelevante, o que se pueda absorber en las constantes A_ν (como se hizo en (6.259)) y B_ν .

La constante B_ν se determina a partir de (6.241). Al multiplicar por D_ν la expresión (6.241) se obtiene:

$$\underbrace{B_\nu D_\nu}_{B'_\nu} = - \underbrace{(A_\nu D_\nu)}_{A'_\nu} b^{2\nu} = - \frac{4V_a b^{2\nu}}{a^{-\nu}\pi\nu (a^{2\nu} - b^{2\nu})}, \quad (6.261)$$

por lo tanto

$$B'_\nu = \begin{cases} -\frac{4V_a b^{2\nu}}{a^{-\nu}\pi\nu(a^{2\nu}-b^{2\nu})}, & \text{para } \nu \text{ impar}, \\ 0, & \text{para } \nu \text{ par}. \end{cases} \quad (6.262)$$

Dado que $A'_\nu = B'_\nu = 0$, para n par, se anulan todos los términos pares en la sumatoria para la solución del potencial eléctrico. Adicionalmente, a partir de (6.239) y (6.250), se obtiene:

$$\mathbb{A}_0 = \frac{V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}, \quad (6.263)$$

$$C'_0 = -\frac{V_b \ln a}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}. \quad (6.264)$$

A partir de lo anterior, la solución para el potencial (con $C_\omega = 0$), toma la forma:

$$\psi(\rho, \phi) = C'_0 + \mathbb{A}_0 \ln \rho + \sum_{\substack{\omega=1 \\ \omega=\text{par}}}^{\infty} \left\{ \underbrace{A_\omega D_\omega}_{A'_\omega} \rho^\omega + \underbrace{B_\omega D_\omega}_{B'_\omega} \rho^{-\omega} \right\} \sin \omega \phi. \quad (6.265)$$

Ahora, teniendo en cuenta los resultados establecidos en (6.260), (6.262), (6.263) y (6.264), el potencial eléctrico se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi) &= -\frac{V_b \ln a}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{V_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln \rho \\ &+ \frac{4V_a}{\pi} \sum_{\substack{\omega=1 \\ \omega=\text{impar}}}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{a^{-\omega} (a^{2\omega} - b^{2\omega})} \right) \rho^\omega - \left(\frac{b^{2\omega}}{a^{-\omega} (a^{2\omega} - b^{2\omega})} \right) \rho^{-\omega} \right\} \frac{\sin \omega \phi}{\omega}. \end{aligned} \quad (6.266)$$

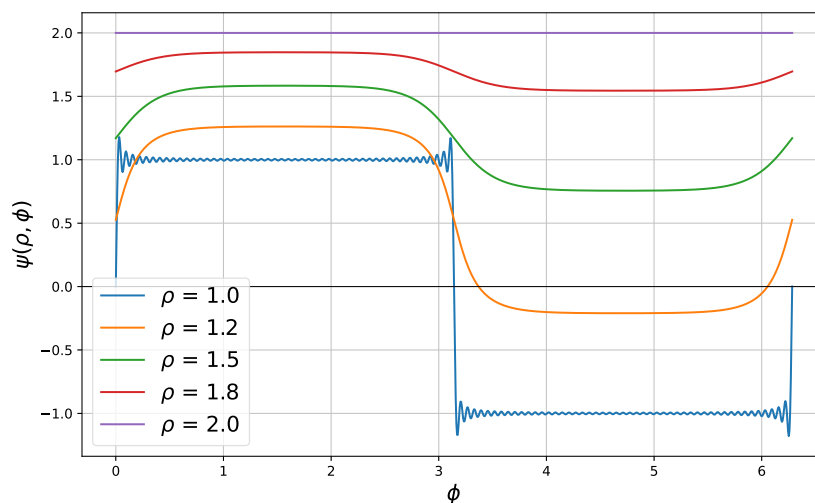


Figura 6.7: Ejemplo (6.6). Representación gráfica de la solución para el potencial eléctrico (6.266), acotando la suma en 50 términos, con $V_a = 1$, $V_b = 2$, $a = 1$ y $b = 2$.

La figura (6.7) indica gráficamente la función (6.266) para diversos valores de ρ , acotando la suma a 50 términos y con $V_a = 1$, $V_b = 2$, $a = 1$ y $b = 2$.

Por reemplazo directo sobre la ecuación (6.266), se puede verificar que si $\rho = b$, entonces $\psi(b, \phi) = V_b$, y si $\rho = a$ se obtiene:

$$\psi(\rho, \phi) = \frac{4V_a}{\pi} \sum_{\substack{\omega=1 \\ \omega \text{ impar}}}^{\infty} \frac{\sin \omega \phi}{\omega}. \quad (6.267)$$

La ecuación (6.267) corresponde a la expansión en serie de Fourier de la función paso, con amplitud definida por V_a .

Ejercicio 6.9. Encuentre el potencial eléctrico para la configuración planteada en el ejemplo (6.5), en las regiones: $\rho < a$ y $\rho > c$.

A– Operaciones y operadores vectoriales

A. Coordenadas curvilíneas

En el caso de las coordenadas cartesianas, la base en tres dimensiones $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ es constante en todos los puntos del espacio, lo que significa que no depende de las coordenadas cartesianas. En contraste, las coordenadas curvilíneas se refieren a aquellas que tienen una base vectorial ortonormal que, en general, puede variar en función de las coordenadas, lo que implica que los vectores base pueden cambiar de un punto a otro. Ejemplos comunes de coordenadas curvilíneas incluyen las coordenadas esféricas, con vectores base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$, y las coordenadas cilíndricas, con vectores base $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$. En este contexto, se considera un espacio de tres grados de libertad, donde las coordenadas curvilíneas, que pueden representar cualquier base ortogonal, como las cartesianas, cilíndricas o esféricas, se denotan como:

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad (\text{A.1})$$

y la respectiva base será:

$$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}, \quad (\text{A.2})$$

de tal manera que una función vectorial se escribirá como:

$$\vec{F}(u_1, u_2, u_3) = F_1(u_1, u_2, u_3) \hat{u}_1 + F_2(u_1, u_2, u_3) \hat{u}_2 + F_3(u_1, u_2, u_3) \hat{u}_3. \quad (\text{A.3})$$

A continuación, se procederá a encontrar algunos operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas, como el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano de funciones escalares y vectoriales asumiendo una dependencia en coordenadas curvilíneas.

B. Gradiente en coordenadas curvilíneas

El gradiente para una función escalar $f(u_1, u_2, u_3)$, en coordenadas curvilíneas, se puede deducir a partir de su definición; es decir, teniendo en cuenta que el diferencial de una función df es igual al producto del vector gradiente $\vec{\nabla}f$ por el vector de desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, tal que:

$$df(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$df(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3. \quad (\text{A.5})$$

Por otra parte, el diferencial del desplazamiento vectorial $d\vec{r}$ en términos de las coordenadas $\{u_1, u_2, u_3\}$ viene dado por:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (\text{A.6})$$

La derivada parcial del vector $\vec{r}$ respecto a u_1 representa el cambio del vector $\vec{r}$ respecto a u_1 , donde se mantiene constante las coordenadas u_2 y u_3 . Por lo tanto, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ debe ser proporcional al vector unitario $\hat{u}_1$ (ya que $\hat{u}_1$ es precisamente el vector orientado en la dirección en la cual incrementa la coordenada u_1 , manteniendo u_2 y u_3 constantes). Ahora, al dividir el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ sobre su norma $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}|$, se obtiene un vector cuya dirección coincide con el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ y de norma 1, es decir $\hat{u}_1$, por lo tanto:

$$\hat{u}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}|} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad (\text{A.7})$$

donde se ha definido:

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|. \quad (\text{A.8})$$

Los valores h_i se conocen como factores de escala de la transformación. A partir de (A.7) se establece que:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i. \quad (\text{A.9})$$

Reemplazando (A.9) en (A.6) se obtiene:

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3. \quad (\text{A.10})$$

Ahora, el gradiente $\vec{\nabla} f$ es un vector, que en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} f = \left(\vec{\nabla} f \right)_1 \hat{u}_1 + \left(\vec{\nabla} f \right)_2 \hat{u}_2 + \left(\vec{\nabla} f \right)_3 \hat{u}_3, \quad (\text{A.11})$$

donde $(\vec{\nabla}f)_i$ representa la componenete i -ésima del operador vectorial $\vec{\nabla}f$ en la base $\{\hat{u}_i\}$. Al reemplazar (A.10) y (A.11) en (A.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} df &= \left((\vec{\nabla}f)_1 \hat{u}_1 + (\vec{\nabla}f)_2 \hat{u}_2 + (\vec{\nabla}f)_3 \hat{u}_3 \right) \cdot (h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3) \\ &= (\vec{\nabla}f)_1 h_1 du_1 + (\vec{\nabla}f)_2 h_2 du_2 + (\vec{\nabla}f)_3 h_3 du_3. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por otra parte se sabe que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3. \quad (\text{A.13})$$

Al comparar (A.12) con (A.13), se puede establecer que:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (\vec{\nabla}f)_i h_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.14})$$

y por lo tanto:

$$(\vec{\nabla}f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.15})$$

con lo cual se puede concluir que (teniendo en cuenta (A.11)):

$$\vec{\nabla}f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{u}_3. \quad (\text{A.16})$$

Así, el operador vectorial gradiente en coordenadas curvilíneas se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{u}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}. \quad (\text{A.17})$$

C. Divergencia en coordenadas curvilíneas

La divergencia de un campo vectorial $\vec{A}(u_1, u_2, u_3)$ en coordenadas curvilíneas puede obtenerse considerando el flujo neto del campo a través de una celda diferencial. Este procedimiento parte de la interpretación física de la divergencia como la cantidad neta que “sale” de un volumen infinitesimal por unidad de volumen.

Consideremos una celda ortogonal elemental delimitada por los vectores de base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, cuyas dimensiones son $h_1 du_1$, $h_2 du_2$ y $h_3 du_3$, de modo que el volumen diferencial será:

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (\text{A.18})$$

El campo vectorial $\vec{A}$ se expresa en esta base como:

$$\vec{A} = A_1 \hat{u}_1 + A_2 \hat{u}_2 + A_3 \hat{u}_3. \quad (\text{A.19})$$

Para calcular la divergencia, se analiza el flujo del campo a través de las caras del volumen en cada dirección. El flujo neto en la dirección u_1 , por ejemplo, es:

$$[h_2 h_3 A_1]_{u_1 + \frac{du_1}{2}} - [h_2 h_3 A_1]_{u_1 - \frac{du_1}{2}} \approx \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) du_1. \quad (\text{A.20})$$

Se obtiene un resultado similar para las direcciones u_2 y u_3 . Sumando los tres flujos, el flujo neto total es:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) du_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) du_3. \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto, la divergencia resulta del cociente entre el flujo neto y el volumen diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]. \quad (\text{A.22})$$

D. Rotacional en coordenadas curvilíneas

El operador rotacional aplicado a un campo vectorial $\vec{A}(u_1, u_2, u_3)$ en coordenadas curvilíneas ortogonales describe la tendencia del campo a inducir rotación en su entorno. Este operador puede deducirse considerando la circulación del campo a lo largo del borde de una superficie diferencial y dividiendo entre el área de dicha superficie.

En un sistema curvilíneo ortogonal con vectores base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ y factores de escala h_1, h_2, h_3 , el campo vectorial se expresa como:

$$\vec{A} = A_1 \hat{u}_1 + A_2 \hat{u}_2 + A_3 \hat{u}_3. \quad (\text{A.23})$$

El rotacional puede representarse mediante un determinante que generaliza la fórmula del sistema cartesiano, tomando en cuenta los factores de escala:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Esta expresión representa de forma compacta el rotacional en cualquier sistema ortogonal, y puede expandirse si se requiere su forma explícita componente a componente.

Alternativamente, el rotacional también puede expresarse como combinación lineal de los vectores base, cuyas componentes son:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right], \quad (\text{A.25})$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right], \quad (\text{A.26})$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right]. \quad (\text{A.27})$$

De este modo, el operador rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales puede escribirse de manera general como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 \hat{u}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 \hat{u}_2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 \hat{u}_3. \quad (\text{A.28})$$

E. Laplaciano en coordenadas curvilíneas

El operador laplaciano, aplicado a una función escalar $f(u_1, u_2, u_3)$, representa la divergencia del gradiente de f , es decir:

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f). \quad (\text{A.29})$$

Para sistemas curvilíneos ortogonales con factores de escala h_1 , h_2 , y h_3 , el gradiente de f se expresa como:

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{u}_3. \quad (\text{A.30})$$

Aplicando el operador divergencia al gradiente, y utilizando la expresión general de la divergencia en coordenadas ortogonales, se obtiene:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]. \quad (\text{A.31})$$

Esta es la forma general del operador laplaciano para funciones escalares en cualquier sistema de coordenadas ortogonales. Su forma específica dependerá de los factores de escala h_i correspondientes al sistema considerado (como cilíndricas o esféricas).

En caso de trabajar con campos vectoriales, el laplaciano vectorial de un campo $\vec{A}$ se define componente a componente, como:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_1 \hat{u}_1 + \nabla^2 A_2 \hat{u}_2 + \nabla^2 A_3 \hat{u}_3, \quad (\text{A.32})$$

donde cada componente A_i se somete individualmente al operador escalar definido en (A.31), suponiendo que la base $\hat{u}_i$ no depende de las coordenadas. Si la base es variable, deben añadirse términos adicionales que involucran derivadas de los vectores base (caso que no se desarrolla aquí).

F. Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) constituyen un sistema ortogonal curvilíneo útil para problemas con simetría axial. Las relaciones con las coordenadas cartesianas son:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (\text{A.33})$$

Los vectores base correspondientes son $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$, donde: $\hat{\rho}$ apunta en dirección radial desde el eje z , $\hat{\phi}$ es tangente a la circunferencia con centro en el eje z , $\hat{z}$ coincide con la dirección del eje vertical. Los factores de escala de este sistema son:

$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1. \quad (\text{A.34})$$

F.1. Gradiente en coordenadas cilíndricas

Usando los factores de escala, el operador gradiente de una función escalar $f(\rho, \phi, z)$ se expresa como:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (\text{A.35})$$

F.2. Divergencia en coordenadas cilíndricas

Para un campo vectorial $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$, la divergencia se calcula como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{A.36})$$

F.3. Rotacional en coordenadas cilíndricas

El rotacional de un campo vectorial $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$ está dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}. \quad (\text{A.37})$$

F.4. Laplaciano en coordenadas cilíndricas

Para una función escalar $f(\rho, \phi, z)$, el operador laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{A.38})$$

En el caso de un campo vectorial $\vec{A}$, el laplaciano actúa componente a componente, utilizando la expresión anterior para cada una de las componentes escalares del campo.

G. Operadores diferenciales en coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) se utilizan para describir fenómenos con simetría radial. Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{A.39})$$

Los vectores base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ tienen las siguientes interpretaciones: $\hat{r}$: dirección radial, apunta desde el origen hacia el punto, $\hat{\theta}$: dirección polar, medida desde el eje z , $\hat{\phi}$: dirección azimutal, en el plano xy , tangente al círculo de latitud.

Los factores de escala asociados son:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta. \quad (\text{A.40})$$

G.1. Gradiente en coordenadas esféricas

Dada una función escalar $f(r, \theta, \phi)$, su gradiente se escribe como:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (\text{A.41})$$

G.2. Divergencia en coordenadas esféricas

Para un campo vectorial $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$, la divergencia es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (\text{A.42})$$

G.3. Rotacional en coordenadas esféricas

El rotacional de un campo vectorial $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ se expresa como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

G.4. Laplaciano en coordenadas esféricas

Para una función escalar $f(r, \theta, \phi)$, el operador laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.44})$$

Para campos vectoriales, el laplaciano se aplica componente a componente de forma escalar si los vectores base son independientes de la posición, lo cual no ocurre en coordenadas esféricas. Por tanto, el laplaciano vectorial requiere un tratamiento más avanzado que incluye derivadas de los vectores base y no se aborda aquí.

Índice de figuras

1.1. Función $D_n(x - x_0)$ para diferentes valores de n con $x_0 = 0$	12
1.2. Función creciente alrededor de x_n	17
1.3. Función decreciente alrededor de x_n	17
1.4. Función $F_T(x - x_0)$ centrada en $x_0 = 0$	21
1.5. Contorno de integración.	22
1.6. Ejemplo (1.2). Cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado.	27
1.7. Ejercicio (1.5). Cinco cargas ubicadas en los vértices de una pirámide.	29
1.8. Ejercicio (1.6). Ocho cargas ubicadas en los vértices de un cubo.	29
1.9. Ejercicio (1.7). Cargas ubicadas en los vértices de un triángulo.	30
2.1. Ejemplo (2.1). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.33) con $L = 2$, para diferentes valores de N (cota sumatoria)	37
2.2. Ejemplo (2.2). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.39) con $L = 2$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).	39
2.3. Ejemplo (2.3). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.51) con $L = 10$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).	41
2.4. Ejemplo (2.4). Representación gráfica de la expansión de Fourier (2.81) con $L = 1$, para diferentes valores de N (cota sumatoria).	47
2.5. Ejemplo (2.5). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.94), con $a = 1$	50
2.6. Ejemplo (2.5). Representación gráfica del modulo de la transformada de Fourier expresada en la la ecuación (2.99).	50
2.7. Ejemplo (2.7). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.103), con $a = 2$	51
2.8. Ejemplo (2.7). Representación gráfica de la transformada de Fourier definida en (2.108).	53

2.9. Ejemplo (2.8). Representación gráfica de la función descrita en la ecuación (2.109), con $T=2$	53
2.10. Ejemplo (2.8). Representación gráfica de la transformada de Fourier establecida en la ecuación (2.112).	54
3.1. Ejemplo (3.7). a) Distribución normal, b) distribución acumulada.	65
3.2. Ejemplo (3.12). Péndulo simple	72
3.3. Ejemplo (3.13). Potencial asociado a un anillo cargado de radio R	74
4.1. Ejemplo (4.1). Temperatura al interior de un cascarón infinito de sección transversal rectangular.	91
4.2. Ejemplo (4.1). Sección rectangular de un cascarón conductor en el plano xy	91
4.3. Ejemplo (4.1). Representación gráfica de la Solución (4.82) con $T_0 = 100$, $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$, truncando la sumatoria a 100 términos	95
4.4. Ejemplo (4.3). Potencial eléctrico en el interior de un rectángulo.	96
4.5. Ejemplo (4.3). Representación gráfica de la solución (4.113), con $V_1 = 20N \cdot m/C$, $V_0 = 10N \cdot m/C$ y $a = b = 1.0m$ y tomando en la sumatoria los primeros 100 datos.	100
4.6. Ejemplo (4.4). Potencial eléctrico dentro de un cascarón rectangular en dos dimensiones.	101
4.7. Ejemplo (4.4). Representación gráfica de la solución (4.149), con $V_0 = 10N \cdot m/C$ y $a = b = 1.0m$ y tomando en la sumatoria los primeros 100 datos.	106
5.1. Ejemplo (5.3). Potencial eléctrico de un cascarón esférico dividido en dos hemisferios.	146
5.2. Ejemplo (5.3). Representación gráfica de la solución establecida en (5.222), tomando los primeros 10 términos de la sumatoria y con valores de $V_0 = 1$ y $R = 1$	150
5.3. Ejemplo (5.4). Potencial eléctrico generado por dos cascarones esféricos. El cascarón externo se divide en dos hemisferios.	151
5.4. Ejemplo (5.4). Representación gráfica de la solución establecida en (5.251), tomando los primeros 20 términos de la sumatoria y con valores $V_0 = 2$, $V_a = 1$, $R = 2$ y $ \vec{a} = 1$	155
5.5. Ejercicio (5.10). Potencial eléctrico generado por dos cascarones esféricos. El cascarón interno se divide en dos hemisferios.	155
6.1. Funciones de Bessel de orden entero.	168
6.2. Funciones de Neumann de orden entero.	169

6.3. Ejemplo (6.3). Cascaron Cilindrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie circular en $z = L$	183
6.4. Ejemplo (6.4). Cascaron Cilindrico con superficies a potencial cero, excepto para la superficie lateral definida por $\rho = a$	188
6.5. Ejemplo (6.5). Potencial electrico entre dos cilindros coaxiales.	192
6.6. Ejemplo (6.6). Cable coaxial con una division sobre el conductor externo. . .	193
6.7. Ejemplo (6.6). Representacion grafica de la solucion para el potencial electrico (6.266), acotando la suma en 50 terminos, con $V_a = 1$, $V_b = 2$, $a = 1$ y $b = 2$. . .	199

Bibliografía

- [1] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*. París: Didot, 1822.
- [2] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1930.
- [3] L. Schwartz, *Théorie des distributions*. París: Hermann, 1950.
- [4] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
- [5] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [6] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. New York: Pearson, 2017.
- [7] G. Arfken, H. Weber y F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2013.
- [8] S. Hassani, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer International Publishing, 2013.

Juan Carlos Salazar Montenegro

Es físico egresado de la Universidad de Nariño, con una maestría en Física de la Universidad de Antioquia y doctorado en Ciencias Físicas de la Universidad de los Andes. Actualmente es docente de tiempo completo en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño. Integra el grupo de Altas Energías y su investigación se centra en modelos más allá del Modelo Estándar en física de partículas y en didáctica de la enseñanza en física, enfocándose en el desarrollando de herramientas didácticas

Ángela Viviana Gómez Azuero

Es licenciada en Física, con maestría y doctorado en Ciencias-Física. Ha trabajado como docente en la Universidad de los Andes y en la Universidad Mariana, donde actualmente es la directora del programa de Ingeniería Civil. Ha participado en grupos de investigación enfocados en Física, Matemáticas, Materia Condensada y Ciencias Básicas aplicadas a la Ingeniería. Con amplia experiencia en programación, su especialización se centra en simulaciones complejas y en la analítica de datos. También investiga la didáctica de la enseñanza en Física, desarrollando metodologías innovadoras para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos físicos a nivel universitario

Eduardo Rojas Peña

Es físico egresado de la Universidad Nacional de Colombia (2003), con maestría (2006) y doctorado (2008) en Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) s. Estancias postdoctorales financiadas por la DGAPA-UNAM (2009-2012, México), la FAPESP (2012-2015, Brasil) y Colciencias (2015-2017, Universidad de Antioquia). Profesor Ocasional Universidad de Antioquia (2017-2018). Desde el 2018 es docente de tiempo completo en el Departamento de Física de la Universidad de Nariño e Integra el grupo de investigación en Altas Energías.

èditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2026
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Este libro constituye una guía integral para el aprendizaje de herramientas matemáticas esenciales en física. Dirigido a estudiantes de nivel intermedio, abarca desde las series y transformadas de Fourier, fundamentales en el análisis de sistemas lineales, hasta la teoría de funciones especiales como la gamma, la beta y las funciones elípticas, clave en problemas avanzados de física teórica.

La obra también incluye una presentación detallada de la distribución delta de Dirac y su aplicación en la formulación de condiciones puntuales, así como un tratamiento sistemático de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, resaltando el método de separación de variables y la importancia de las condiciones de contorno.

Cada capítulo está diseñado con un enfoque pedagógico, integrando explicaciones teóricas, ejemplos resueltos paso a paso y ejercicios propuestos. Esta combinación convierte al texto en una herramienta de estudio autónomo y a la vez en un material de apoyo ideal para cursos de física matemática, electromagnetismo, mecánica cuántica o ingeniería aplicada.

En definitiva, se trata de un libro que no solo enseña técnicas, sino que también promueve una comprensión profunda del papel de las matemáticas en la descripción y análisis del mundo físico.

ISBN: 978-628-7864-34-4



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1994



ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de Nariño