

Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

German Enrique
Ramos Zambrano

Bruto Max Pimentel

èditorial

Universidad de **Nariño**

**Electrodinámica
Escalar de Primer Orden
en las Coordenadas
de Plano Nulo**

Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

Germán Enrique Ramos Zambrano
Universidad de Nariño

Bruto Max Pimentel
Universidade Estadual Paulista
São Paulo, Brasil

êditorial
Universidad de **Nariño**

Ramos Zambrano, Germán Enrique

Electrodinámica escalar de primer orden en las coordenadas de plano nulo /
Germán Enrique Ramos Zambrano, Bruto Max Pimentel—1ª. ed.-- San Juan de
Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026.

173 páginas : ilustraciones

Incluye referencias bibliográficas al final de cada capítulo y reseña de los autores p. 171

ISBN: 978-628-7864-35-1 Impreso

ISBN: 978-628-7864-36-8 Digital

1. Electrodinámica cuántica 2. Electrodinámica escalar de primer orden 3. Teoría
de Duffin-Kemmer-Petiau I. Pimentel, Bruto Max

530.1433 R175e – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

© Editorial Universidad de Nariño

© Germán Enrique Ramos Zambrano

Bruto Max Pimentel

ISBN impreso: 978-628-7864-35-1

ISBN digital: 978-628-7864-36-8

DOI: <https://doi.org/10.22267/lib.udn.040>

Primera edición

Corrección de estilo: Christian Benavides Martínez

Diseño de cubiertas: Nathaly Johana Rivadeneira

Diagramación: Germán Enrique Ramos Zambrano

Fecha de publicación: Marzo de 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier
medio o con cualquier propósito, sin la autorización
escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

Índice general

1. Introducción	9
Bibliografía	13
2. Introducción a la Electrodinámica Cuántica	16
Bibliografía	19
3. Electrodinámica Cuántica Generalizada (<i>GQED</i>)	20
3.1. Estructura de vínculos de la $SQED_4$ en las Coordenadas de Plano Nulo	20
3.2. Clasificación de los Vínculos	24
3.3. Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Gauge	26
3.4. Eliminación de los Vínculos	27
3.5. Inversión de Vínculos Escalares.....	31
3.6. Corchetes de Dirac	32
Bibliografía	36
4. Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)	37
4.1. Introducción	37
4.2. Ecuación de Onda Relativista	39
4.3. Ecuación de DKP y las propiedades de las matrices beta.....	46
4.4. Ecuación de DKP conjugada.....	48
4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP	50
4.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP	55
4.7. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF ...	56
4.8. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca ..	59
4.9. Representación de las Matrices Beta.....	62
4.10. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP	65
4.11. Interacción con Campo Electromagnético	74
Bibliografía	78
5. Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau libre en las Coordenadas de plano nulo	80
5.1 Introducción	80
5.2 Ecuación de DKP en $1 + 1$ Dimensiones	51

5.3 Estructura de Vínculos.....	82
5.4 Ecuaciones de Movimiento	88
5.5 Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac	89
Bibliografía	96
6. Ecuación de DKP en $3 + 1$ Dimensiones	97
6.1 Estructura de Vínculos.....	99
6.2 Ecuaciones de movimiento	105
6.3 Corchetes de Dirac	106
7. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $1 + 1$ Dimensiones	117
7.1 Estructura de Vínculos.....	118
7.2 Clasificación de los Vínculos	123
7.3 Ecuaciones de Movimiento	125
7.4 Proyección de los Vínculos	127
7.5 Inversión de los Vínculos del Sector Electromagnético.....	129
7.6 Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac.....	131
Bibliografía	140
8. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $3 + 1$ Dimensiones	141
8.1 Estructura de Vínculos.....	141
8.2 Clasificación de los Vínculos	147
8.3 Ecuaciones de Movimiento	149
8.4 Eliminación de los Vínculos de Primera Clase	151
8.5 Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP.....	153
8.6 Conjunto Final de Corchetes Dirac	164
9. Conclusiones	167
Bibliografía	170
Acerca de los autores	171

Prólogo

La aceptación de la ecuación de Dirac para describir partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$ estimuló a algunos investigadores a explorar ecuaciones de onda de primer orden que describan partículas de espín 0 y espín 1. Entre estas, destaca la ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau conocida también como teoría DKP, cuya estructura formal es semejante a la de la ecuación de Dirac, con la diferencia de que las matrices en que se fundamentan obedecen a un álgebra distinta.

En este trabajo se propone estudiar la electrodinámica escalar de primer orden, la cual describe la interacción de un campo de DKP con el campo electromagnético. Para ello, el análisis se desarrollará en las coordenadas de plano nulo, utilizando la formulación de Dirac para sistemas singulares.

Bruto Max Pimentel agradece a CNPq-Brazil por el apoyo financiero parcial, mientras que German Ramos expresa su agradecimiento tanto a la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social como al Departamento de Física de la Universidad de Nariño, Colombia.

Capítulo 1

Introducción

Inspirados por el éxito de la ecuación de Dirac en la descripción de partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$, varios investigadores buscaron formular ecuaciones de onda de primer orden para espines 0 y 1. G. Petiau [1], R. Duffin [2] y N. Kemmer [3], siguiendo las ideas de de Broglie [4], propusieron una formulación unificada para estas partículas bosónicas. Esta expresión, denominada ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau (o teoría DKP), comparte una estructura matricial con la de Dirac, si bien las álgebras que rigen sus matrices son distintas [5].

Una característica fundamental de la teoría de DKP radica en que en un espacio tiempo $(3 + 1)$ dimensional puede ser descompuesta en tres representaciones irreducibles: la de 5×5 , asociada a partículas de espín 0, 10×10 , que corresponde a partículas de espín 1; y la de 1×1 , la cual carece de significado físico. Entre 1939 y aproximadamente 1970, la mayoría de los trabajos acerca de la ecuación DKP se enfocaron en el desarrollo del formalismo y en la investigación de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Los cálculos de procesos, empleando dicha formulación y de Klein-Gordon, arrojaron resultados idénticos en aproximaciones de *on loop* [6]. Una contribución significativa para entender estas ecuaciones fue hecha por A. Wightman [7], quien demostró que, cuando el campo de DKP es acoplado al campo electromagnético, las ecuaciones de DKP para partículas de espín 1 permanecen estables bajo perturbaciones locales suaves del campo externo.

A mediados del siglo pasado, Dirac impuso dos requerimientos sobre sistemas dinámicos relativistas: la relatividad espacial y la formulación de ecuaciones de movimiento en forma Hamiltoniana. Aunque estas condiciones no definen el sistema dinámico, limitan las posibles formas que este pueda tener. Para una descripción completa de la dinámica, es necesario especificar todas las posibles interacciones del sistema. En mecánica no relativista, la evolución de un sistema está determinada por el Hamiltoniano, de modo que el estado del sistema en un instante $t = \text{cte}$ permite calcular su comportamiento en un instante posterior.

Dirac propuso tres formas diferentes de dinámica relativista dependiendo del tipo de superficies donde las condiciones iniciales fueron consideradas [8]. La primera, identificada como *forma instantánea*, es aquella cuando se selecciona una superficie tipo espacio y es

la más utiliza. La segunda, *punto forma*, es aquella consistente en considerar una rama de la superficie hiperbólica $x^\mu x_\mu = \kappa^2$, $x_0 > 0$. Por último, *el frente forma* es una superficie de una simple onda de luz, comúnmente identificada como *formalismo de plano nulo*.

En el frente forma, dos puntos a tiempos iguales poseen separación tipo espacio, y por tanto los campos definidos en esos puntos son cantidades independientes. Sin embargo, en el plano nulo la situación difiere porque el principio de micro-causalidad conduce a un requerimiento de localidad en las componentes transversales y de no localidad en la coordenada longitudinal [9]. Además, las coordenadas de plano nulo no están relacionadas mediante una transformación de Lorentz a las coordenadas tradicionales utilizadas en el frente forma, por lo que la descripción del mismo contenido físico en una teoría dinámica sobre el plano nulo podría resultar diferente de aquella descrita en el tratamiento convencional [10].

Una de las ventajas señaladas por Dirac en la formulación de plano nulo es que siete de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos, mientras que en el tratamiento convencional solo seis tienen esta propiedad. Otra característica notable de un sistema relativista tratado en esta geometría es que produce Lagrangianos singulares, es decir, a sistemas dinámicos con vínculos [11]. Esto en general conduce a una reducción en el número de operadores de campo independientes en el correspondiente espacio de fase.

La formulación DKP ha sido aplicada exitosamente en el análisis de interacciones relativistas entre hadrones y núcleos. Esta expresión de primer orden permite describir de una manera unificada bosones de espín 0 y 1, ofreciendo un mecanismo distinto a los tratamientos convencionales de Klein-Gordon y Proca. Aunque DKP es formalmente similar a la ecuación de Dirac, las álgebras asociadas a las matrices β_μ son sustancialmente diferentes. La equivalencia entre las ecuaciones de DKP y las de Klein-Gordon y Proca fue demostrada para el caso de las interacciones vectoriales mínimamente acopladas [12, 13], aunque la equivalencia entre la ecuación de DKP y la de Proca fue sugerida previamente sin considerar corrientes parcialmente conservadas en las interacciones [14].

La gran variedad de acoplamientos incapaces de ser expresados en la formulación de Klein-Gordon y Proca garantiza mayor contenido físico para sistemas descritos a partir de la teoría de DKP. De ahí que los acoplamientos se clasifiquen de acuerdo al comportamiento de los mismos bajo transformaciones de Lorentz, y que los acoplamientos escalares y vectoriales hayan sido utilizados para describir la dispersión elástica mesón-nucleón con mejores resultados experimentales comparados con aquellos obtenidos a partir del formalismos de Klein-Gordon y Proca [15, 16].

Al analizar la equivalencia entre las teorías de DKP y su contraparte de segundo orden, investigaciones recientes han demostrado la equivalencia entre los elementos físicos de la matriz S para el campo de partículas escalares interactuando con los campos externos electromagnéticos, de Yang-Mills y gravitacionales [17]. La teoría de DKP ha mostrado ser equivalente a teorías de segundo orden cuando presentan un acoplamiento mínimo al campo electromagnético donde fueron analizados también los términos anómalos que surgen en el Hamiltoniano de la ecuación de onda acoplada [13]. Además, la teoría de DKP relativista

ha sido aplicada con éxito en la mecánica cuántica en el estudio de osciladores de bosones escalares y vectoriales [18], en la QCD [19], en la condensación de Bose-Einstein y en el campo electromagnético a temperatura finita [20], etc.

Las investigaciones recientes sobre la formulación de la ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) han generado un cuerpo de conocimiento considerable, enfocado principalmente en bosones de espín uno. Entre estos avances, destaca la obtención de soluciones analíticas para partículas de espín 1 sometidas a interacciones fenomenológicas específicas, como los potenciales de Coulomb y Kratzer, incluyendo el análisis de los estados de paridad natural y anormal [21]. En el contexto de modelos nucleares, se ha efectuado un estudio riguroso de la ecuación DKP para partículas de espín 1 en las configuraciones de barrera y pozo del potencial de Woods-Saxon [22]. En cuanto a técnicas de solución, se implementó el método de Nikiforov-Uvarov para deducir soluciones de onda S en presencia de un potencial hiperbólico [23], y se examinaron las resonancias de transmisión de la DKP para espín 1 en un potencial de cúspide [24]. Finalmente, el alcance de la ecuación se ha extendido a la relatividad general, abordando la influencia de la constante cosmológica en la dinámica cuántica de partículas de espín 0 dentro de la solución Bonnor-Melvin-Lambda [25], y estableciendo la relación entre la DKP para espín 1 y las ecuaciones de Proca y Maxwell en geometrías de Riemann-Cartan de $1 + 1$ dimensiones [26].

La electrodinámica escalar de primer orden describe un campo de DKP en la representación 5×5 con acoplamiento mínimo a un campo electromagnético. Dada la estructura singular de la densidad Lagrangiana que describe el campo DKP y la naturaleza gauge del campo de Maxwell, un análisis consistente de la teoría requiere un procedimiento canónico apropiado que garantice compatibilidad entre los vínculos que surgirán de la teoría y un conjunto apropiado de corchetes de Poisson. Partiendo de que el estudio se realizará en las coordenadas de plano nulo, se deberá construir una representación adecuada de las matrices β_μ y del campo fundamental de DKP. De este modo, se espera que la estructura de vínculos que surgen en la teoría sea, de alguna manera, equivalente a los resultados que ya se han derivado en las coordenadas usuales [13]. Para obtener un conjunto de corchetes consistente, será necesario derivar las condiciones de gauge adecuadas.

Neville y Rohrlich [27] observaron que la cuantización sobre el plano nulo significa cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas; es decir, se deben especificar condiciones sobre ambas características, $x^+ = \text{cte}$, $x^- = \text{cte}$, y no solo sobre un plano nulo. Mc Cartor [28] demostró que cuantizar fermiones sin masa en $(1 + 1)$ en ambas características implica que existan conmutadores a iguales x^+ y x^- en la descripción Hamiltoniana, lo cual genera dos parámetros de evolución temporal, dificultando la determinación de una formulación Hamiltoniana única. Sin embargo, Steinhardt [29] destacó un problema importante asociado al procedimiento de cuantización sobre el plano nulo. Una vez se introduce la condición de gauge y se eliminan los vínculos, aún pueden persistir transformaciones de gauge impropias, que surgen de condiciones de frontera mal definidas, las cuales no pueden eliminarse con condiciones de gauge adicionales, ya que estas podrían suprimir estados físicos posibles [30]. Además, la presencia de las transformaciones de gauge

impropias también impide una definición coherente de los conmutadores de la teoría.

Una característica fundamental de una teoría relativista sobre el plano nulo es que esta describe un sistema dinámico con vínculos, de ahí que el procedimiento estándar de Dirac [31, 32, 33] será utilizado para analizar consistentemente la teoría.

Neville y Rohrlich [34] también estudiaron la electrodinámica escalar $SQED_4$ en la cual un campo de espín 0 cuantizado interactúa con un campo electromagnético cuantizado de fondo. La electrodinámica cuántica en este contexto se obtiene, por un lado, al considerar que los campos escalar y electromagnético son operadores en un espacio de Hilbert y, por otro lado, al requerir que las ecuaciones de campo se implementen mediante relaciones de conmutación adecuadas. La dinámica consistirá en la evolución del sistema fuera de un dado plano nulo con relaciones de conmutación entre los operadores especificadas sobre el plano nulo, siempre y cuando no involucren derivadas respecto al parámetro de evolución temporal x^+ .

Los autores del presente libro realizaron un estudio canónico detallado de $SQED_4$ sobre las coordenadas de plano nulo [35]. Con base en ello, se demuestra que la $SQED_4$ sobre el plano nulo posee una ley de Gauss que resulta de una combinación lineal de los vínculos asociados al sector electromagnético y escalar, como consecuencia de los vínculos de segunda clase del sector escalar. Al aplicar la condición de gauge de plano nulo, los vínculos de primera clase se transforman en vínculos de segunda clase. A su vez, el uso de condiciones de frontera apropiadas sobre los campos permite eliminar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase. Los conmutadores, obtenidos mediante la cuantización de los corchetes de Dirac en el nivel clásico y mediante un análisis detallado de la estructura de vínculos en $SQED_4$, son consistentes con los resultados previos en la literatura [34].

Bibliografia

- [1] G. Petiau, "Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires," *Acad. Roy. Belg. Mem. Collect.*, vol. 16, pp. 1-118, 1936.
- [2] R. J. Duffin, "On the characteristic matrices of covariant systems," *Phys. Rev.*, vol. 54, pp. 1114-1120, 1938.
- [3] N. Kemmer, "The particle aspect of meson theory," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 173, pp. 91-116, 1939.
- [4] L. de Broglie, "Ondes et quanta," *Comptes Rendus Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, vol. 177, pp. 507-510, 1923.
- [5] T.R. Cardoso and B.M. Pimentel, "A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau", *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, No 3, pp. 3319-3337, 1923.
- [6] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed., New York: Inter., 1965.
- [7] A. S. Wightman, "The Dirac equation," in *Aspects of Quantum Theory*, A. Salam and E. P. Wigner, Eds., Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1972, pp. 95-116.
- [8] P. A. M. Dirac, "Forms of relativistic dynamics," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, pp. 392-399, 1949.
- [9] P. P. Srivastava, "Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in ϕ^4 . CBPF-NF-075-93, Encontro Nacional de Particulas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep. 1993, 31 pp., hep-th/9312064.
- [10] P. P. Srivastava, "Light front quantized Schwinger model and theta-vacua," *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 13, pp. 1223-1233, 1998.
- [11] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, New York: Benjamin, 1964.
- [12] M. Nowakowski, "The electromagnetic coupling in Kemmer-Duffin-Petiau theory," *Phys. Lett. A*, vol. 244, pp. 329-337, 1998.
- [13] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, and J. S. Valverde, "Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance," *Phys. Lett. A*, vol. 268, pp. 165-173, 2000.

- [14] E. Fischbach, J. D. Louck, M. M. Nieto, and C. K. Scott, "The Lie algebra $so(n)$ and the Duffin-Kemmer-Petiau ring," *J. Math. Phys.*, vol. 14, pp. 60-64, 1973.
- [15] G. Kaelbermann, "Kemmer-Duffin-Petiau equation approach to pionic atoms," *Phys. Rev. C*, vol. 34, pp. 2240-2243, 1986.
- [16] R. E. Kozack, B. C. Clark, S. Hama, V. K. Mishra, R. L. Mercer, and L. Ray, "Spin one Kemmer-Duffin-Petiau equations and intermediate-energy deuteron nucleus scattering," *Phys. Rev. C*, vol. 40, pp. 2181-2194, 1989.
- [17] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, "On equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon equations," *Braz. J. Phys.*, vol. 30, pp. 275-281, 2000.
- [18] Y. Nadjadi and R. C. Barrett, "The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 27, pp. 4301-4316, 1994.
- [19] V. N. Gribov, "QCD at large and short distances," *Eur. Phys. J. C.*, vol. 10, pp. 93-135, 1999.
- [20] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, and J. S. Valverde, "Bose-Einstein condensation and free DKP field," *Phys. Lett. A*, vol. 316, pp. 33-43, 2003.
- [21] M. Baradaran, L. M. Nieto, L. P. de Oliveira, and S. Zarrinkamar, "The spin-one Duffin-Kemmer-Petiau equation revisited: analytical study of its structure and a careful choice of interaction", *Physica Scripta*, vol. 100, no. 7, pp. 1402-4896, 2025.
- [22] Garzón, A., Fernández, R., Arévalo, V. A., Laroze, D., Pérez, L. M., de Zayas, B., and Rojas, C., "The DKP Equation in Presence of a Woods-Saxon Potential: Transmission Resonances and Bound States". arXiv. <https://arxiv.org/abs/2504.16123>, 2023.
- [23] Hassanabadi H., Molaee Z. and Boumali A., "Exact solutions of the Duffin-Kemmer-Petiau equation with a hyperbolical potential in $1 + 3$ dimensions", *Chinese Physics C*, vol. 37, no. 7, pp. 073104, 2025.
- [24] Sogut, K., and Havare, A., "Transmission resonances in the Duffin-Kemmer-Petiau equation in $(1+1)$ dimensions for an asymmetric cusp potential", *Physica Scripta*, vol. 82, no. 4, pp. 045013, 2010.
- [25] Ahmed, F., and Bouzenada, A., "Relativistic Spin-0 Duffin-Kemmer-Petiau Equation in Bonnor-Melvin-Lambda Solution", *Inter. J. of Mod. Phys. A*, vol. 39, no. 11, pp. 2450032, 2024.
- [26] Ünal, N., "Duffin-Kemmer-Petiau equation, Proca equation and Maxwell's equation in $1 + 1$ dimensions.", *Concepts of Physics*, vol. 2, no. 11, pp. 273-276, 2005.
- [27] F. Rohrlich, "Null plane field theory," *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, vol. 8, pp. 277-322, 1971.

- [28] G. McCartor, "Light cone quantization for massless fields," *Z. Phys. C*, vol. 41, pp. 271-275, 1988.
- [29] P. J. Steinhardt, "Problems of quantization in the infinite momentum frame," *Annals Phys.*, vol. 128, pp. 425-435, 1980.
- [30] R. Benguria, P. Cordero, and C. Teitelboim, "Aspects of the Hamiltonian dynamics of interacting gravitational gauge and Higgs fields with applications to spherical symmetry," *Nucl. Phys. B*, vol. 122, pp. 61-99, 1976.
- [31] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern perspective*, New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [32] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982.
- [33] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Rome: Academic Nazionale dei Lincei, 1976.
- [34] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum electrodynamics on null planes and applications to lasers," *Phys. Rev. D*, vol. 3, pp. 1692-1707, 1971.
- [35] R. Casana, B. M. Pimentel, and G. E. R. Zambrano, SQED₄ and QED₄ on the null-plane," *Braz. J. Phys.*, vol. 44, pp. 398-409, 2014.

Capítulo 2

Introducción a la Electrodinámica Cuántica

La electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés) es la teoría que describe la interacción entre la luz y la materia, es decir, entre los campos electromagnéticos y las partículas con carga eléctrica. Se considera una de las teorías más precisas y exitosas de la física moderna, cuyas predicciones han sido verificadas experimentalmente con un grado de exactitud sin precedentes [1, 2]. En términos generales, la QED representa una unificación coherente de dos pilares fundamentales de la física del siglo XX: la *mecánica cuántica* y la *relatividad especial*. Mientras la electrodinámica clásica formulada por Maxwell describe la propagación de los campos eléctricos y magnéticos en el espacio, la QED incorpora la cuantización de dichos campos e introduce la noción de *fotón* como el cuanto fundamental del campo electromagnético. [3, 4].

El desarrollo de la QED fue un proceso gradual que se extendió desde las primeras décadas del siglo XX hasta mediados de los años cincuenta. Tras la formulación de la mecánica cuántica en la década de 1920, los físicos comenzaron a investigar la manera de incorporar el campo electromagnético dentro de este nuevo marco teórico, con el propósito de comprender las interacciones entre la radiación y la materia desde una perspectiva cuántica. Los primeros intentos de cuantizar el campo electromagnético fueron realizados por *P. A. M. Dirac* en 1927, quien introdujo la noción de emisión y absorción de cuantos de radiación. No obstante, las formulaciones iniciales de la teoría enfrentaron serias dificultades conceptuales y matemáticas: los cálculos de autoenergía del electrón, así como de otros procesos, conducían a resultados infinitos que carecían de una interpretación física consistente [5].

Durante los años cuarenta, *Richard Feynman*, *Julian Schwinger* y *Sin-Itiro Tomonaga* desarrollaron, de manera independiente, una formulación consistente de la electrodinámica cuántica mediante la introducción del procedimiento de *renormalización* [6, 7, 8]. Este método permitió redefinir las magnitudes físicas fundamentales —como la masa y la carga del electrón— de tal forma que las predicciones teóricas resultaran finitas y susceptibles de verificación experimental.

En QED, el campo electromagnético es sometido a un proceso de cuantización, de modo que la radiación se describe como un conjunto de partículas elementales sin masa denominadas *fotoes*. Por su parte, los electrones y positrones se representan mediante el campo de Dirac, el cual satisface las leyes de la mecánica cuántica relativista. La interacción entre ambos campos se interpreta como el intercambio de *fotoes virtuales*, de manera que la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas no se concibe como un campo continuo, sino como un proceso dinámico de intercambio discreto de cuantos de energía y momento. [4].

La electrodinámica cuántica se formula como una teoría gauge abeliana basada en el grupo de simetría $U(1)$. El lagrangiano que describe su dinámica fundamental puede expresarse como

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde ψ denota el campo de Dirac asociado al electrón, m su masa, y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.2)$$

corresponde al tensor de campo electromagnético. El requisito de invariancia de gauge local bajo el grupo $U(1)$ conduce a la introducción del potencial vector A_μ y a la definición de la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.3)$$

la cual asegura la conservación de la simetría gauge. Aquí, e representa la carga eléctrica elemental [1]. Una herramienta fundamental en QED son los *diagramas de Feynman*, introducidos como un método visual y computacional eficiente para representar los procesos de interacción entre partículas. En este formalismo, cada línea y vértice del diagrama se asocia con un término específico del lagrangiano (2.1), lo que permite traducir las expresiones matemáticas del formalismo cuántico en representaciones gráficas de los procesos físicos [9].

Las predicciones de la electrodinámica cuántica han sido verificadas experimentalmente. Entre los resultados más destacados se encuentran:

- *Momento magnético anómalo del electrón*, cuya medición experimental concuerda con las predicciones teóricas de la QED con una precisión del orden de una parte en 10^{12} [7].
- *Desplazamiento de Lamb*, que consiste en una pequeña diferencia de energía entre ciertos niveles atómicos del hidrógeno, inexplicable dentro de la teoría de Dirac pero correctamente descrita por las correcciones radiativas de la QED [1].
- *Procesos de dispersión y aniquilación electrón-positrón*, cuyos resultados experimentales coinciden estrechamente con las predicciones de la teoría [3].

Estos resultados hacen de la QED la teoría física más comprobada experimentalmente, y un modelo fundamental para el desarrollo posterior de teorías gauge no abelianas, como la cromodinámica cuántica (QCD) y la teoría electrodébil [9, 2].

Los extraordinarios logros teóricos y experimentales de la QED la han consolidado como la teoría física que con mayor éxito ha explicado los resultados experimentales. Además de su precisión sin precedentes, la QED constituye el modelo fundamental sobre el cual se edificó el desarrollo posterior de las teorías gauge. Su formulación permitió extender el principio de invariancia de gauge a otras interacciones fundamentales, lo que, a partir de la década de 1960, condujo a la creación de teorías gauge no abelianas basadas en grupos de simetría más complejos, capaces de describir las interacciones débil y fuerte [9, 2].

En este contexto, la *teoría electrodébil*, propuesta por *Sheldon Glashow*, *Abdus Salam* y *Steven Weinberg*, unificó las interacciones electromagnética y débil dentro de un marco teórico común basado en el grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [10, 11, 12]. En dicho esquema, la QED emerge como el límite de baja energía de la teoría electrodébil, donde los bosones $W^\pm$ y Z^0 adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs, mientras que el fotón permanece sin masa. De manera análoga, la *cromodinámica cuántica* (QCD) extiende el principio gauge para describir la interacción fuerte a través del grupo $SU(3)_C$. En conjunto, estas tres teorías —la QED, la teoría electrodébil y la QCD— constituyen el núcleo del *Modelo Estándar de la física de partículas* [3, 2].

La electrodinámica cuántica representa uno de los logros intelectuales más notables de la física moderna. Su extraordinaria coherencia teórica y su inigualable concordancia con los resultados experimentales la han convertido en un referente de consistencia interna y poder predictivo. Al unificar la relatividad especial y la mecánica cuántica en una formulación rigurosa, la QED proporciona una comprensión profunda de las interacciones entre la luz y la materia en su nivel más fundamental. Asimismo, su estructura gauge sentó las bases conceptuales para la formulación del Modelo Estándar, la piedra angular de la física de partículas contemporánea y una de las síntesis más elegantes del conocimiento científico del siglo XX.

Bibliografía

- [1] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons (2010).
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
- [3] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH (2008).
- [4] R. P. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press (1985).
- [5] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1967).
- [6] S. Tomonaga, “On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields”, *Prog. of Theor. Phys.*, vol. 1, pp. 27–42, 1946.
- [7] J. Schwinger, “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron”, *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, 1948.
- [8] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics”, *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, 1949.
- [9] C. Itzykson, and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).
- [10] S. L. Glashow, “Partial-symmetries of Weak Interactions”, *Nuc. Phys.*, vol. 22, pp. 579–588, 1961.
- [11] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions”, *Nuov. Cim.*, vol. 11, pp. 568-577, 1959.
- [12] S. Weinberg, “A Model of Leptons”, *Phys. Rev. Letters*, vol. 19, pp. 1264–1266, 1967.

Capítulo 3

Electrodinámica Cuántica Generalizada (GQED)

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

La teoría gauge que se está considerando es definida por la siguiente densidad Lagrangiana en el espacio-tiempo de 4 dimensiones:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}D_\mu\phi(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (3.1)$$

donde ϕ es un campo escalar complejo de una componente, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ denota el tensor de campo electromagnético, y $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$ se identifica como la derivada covariante.

La densidad Lagrangiana (3.1) es invariante bajo la siguiente simetría de gauge $U(1)$:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha. \quad (3.2)$$

Y las ecuaciones de campo correspondientes son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\alpha(x)} &= \partial_\mu^\alpha F^{\mu\alpha} + j^\alpha = 0, \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(x)} &= \left(D_\mu^* D^{\mu*} + m^2\right)\phi^* = 0, \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*(x)} &= \left(D_\mu D^\mu + m^2\right)\phi = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde j^α es la corriente definida como:

$$j^\mu \equiv ig[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*D^\mu\phi]. \quad (3.4)$$

Con el fin de calcular los momentos canónicos, se reformula la densidad Lagrangiana (3.1) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_+\phi(D_-\phi)^* + D_-\phi(D_+\phi)^* + D_k\phi(D^k\phi)^* - m^2\phi\phi^*. \quad (3.5)$$

En la relación anterior se han introducido el tiempo de plano nulo x^+ y la coordenada longitudinal x^- , los cuales se relacionan con las coordenadas x^0 y x^3 a partir de las siguientes ecuaciones de transformación:

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)$$

donde las coordenadas transversales $x^\perp \equiv (x^1, x^2)$ siguen siendo las mismas. En el espacio de cuadvectores $x = (x^+, x^\perp, x^-) \equiv (x^+, x^\perp, x^-)$, la métrica tiene la siguiente representación matricial:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En forma explícita, es posible deducir las siguientes identidades:

$$x^+ = x_- \quad , \quad x^- = x_+ \quad , \quad x \cdot y = x^+y^- + x^-y^+ - x^\perp \cdot y^\perp, \quad (3.8)$$

donde las derivadas en relación a las coordenadas x^+ y x^- son definidas por:

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} \quad , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-}, \quad (3.9)$$

con $\partial^+ = \partial_-$.

Ahora, utilizando la relación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = -F^{\beta\alpha},$$

se puede demostrar que los momentos canónicos asociados a los campos A_μ , ϕ y ϕ^* son:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = F^{\mu+}, \quad (3.10)$$

$$\pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi)} = (D_-\phi)^* \quad , \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi^*)} = D_-\phi, \quad (3.11)$$

respectivamente. A partir de las relaciones (3.10) y (3.11), es posible deducir la siguiente relación dinámica:

$$\pi^- = \partial_+ A_- - \partial_- A_+, \quad (3.12)$$

junto con cinco vínculos primarios distribuidos como se indica a continuación:

- Tres relaciones en el sector electromagnético, a saber:

$$C \equiv \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- \approx 0. \quad (3.13)$$

- Dos ecuaciones mas en la parte escalar:

$$\Gamma \equiv \pi - D_- \phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_- \phi)^* \approx 0. \quad (3.14)$$

Ahora, es necesario evaluar la consistencia de (3.13) y (3.14). Siguiendo el procedimiento de Dirac [1], se define el Hamiltoniano primario H_P adicionando al Hamiltoniano canónico

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C \quad \int d^3y \equiv \int dy^1 dy^2 dy^- = \int d^2y^\perp dy^-, \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \partial_+ \phi^* \pi + \pi^* \partial_+ \phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + \left(\pi^- \partial_-^\perp + \pi^k \partial_k^\perp - j^+ \right) A_+ - (D_k \phi) (D_k \phi)^* \\ &\quad + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

una combinación lineal de los vínculos primarios, es decir,

$$H_P = H_C + \int d^3y \left(u C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v \right), \quad (3.17)$$

donde u y u_k son multiplicadores de Lagrange asociados al sector electromagnético, mientras que v y v^* corresponden a la parte escalares.

A continuación se definen los corchetes de Poisson (PB) entre los campos fundamentales de la teoría de la siguiente manera:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (3.18)$$

$$\left\{ \phi(x), \pi^*(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \phi^*(x), \pi(y) \right\} = \delta^3(x-y), \quad (3.19)$$

donde $\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp)$. Según el procedimiento de Dirac, los vínculos primarios deben preservarse en el tiempo bajo la evolución generada por el Hamiltoniano primario. Esta afirmación se conoce como condición de consistencia de los vínculos. Con el fin de garantizar esta consistencia, se requiere que los vínculos primarios tengan un PB que desaparezca débilmente con H_P . Utilizando los siguientes PB entre los vínculos primarios, los cuales son consecuencia de las PB fundamentales (3.18) y (3.19):

$$\begin{aligned} \left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2D_-^\perp \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Gamma^*(x), \Gamma(y) \right\} &= -2D_-^{*\perp} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\} &= -2\delta_l^k \partial_-^\perp \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (3.20)$$

se puede verificar que la consistencia de los vínculos primarios correspondientes al sector escalar resulta en:

$$\dot{\Gamma} = \left\{ \Gamma, H_P \right\} = -ig [\phi \pi^- + 2D_- (A_+ \phi)] - D^k D_k \phi - m^2 \phi \quad (3.21)$$

$$-2D_- v \approx 0. \quad (3.22)$$

$$\dot{\Gamma}^* = \left\{ \Gamma^*, H_P \right\} = ig [\phi^* \pi^- + 2D_-^* (A_+ \phi^*)] - (D_k D^k \phi)^* - m^2 \phi^* \quad (3.23)$$

$$= -2(D_- v)^* \approx 0. \quad (3.24)$$

Las expresiones (3.22) y (3.24) permiten determinar los valores de los multiplicadores de Lagrange v y v^* , respectivamente. Como resultado, no existirán más vínculos asociados al sector escalar.

Procedemos ahora a evaluar la condición de consistencia asociada al vínculo primario del sector electromagnético. En primer lugar, se estudia el vínculo χ^k :

$$\dot{\chi}^k = \left\{ \chi^k, H_P \right\} = \partial_k \pi^- + j^k + \partial_j F_{jk} - 2\partial_- u_k \approx 0, \quad (3.25)$$

el cual se entiende como una ecuación que establece el valor del multiplicador u_k . Finalmente, se calcula la condición de consistencia del vínculo π^+ , que resulta en:

$$\dot{\pi}^+ = \left\{ \pi^+, H_P \right\} = \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k + j^+ \approx 0;$$

es decir, que se genera un vínculo secundario que se definirá por:

$$G \equiv \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k + j^+ \approx 0, \quad (3.26)$$

el cual corresponde a la ley de Gauss para la electrodinámica escalar en las coordenadas de plano nulo. Siguiendo el método de Dirac, se debe garantizar la consistencia de este vínculo secundario. Para ello, se utilizan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), \Gamma(y) \right\} &= 2ig\phi(x) (\partial_-^x - igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2ig\phi^*(x) (\partial_-^x + igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \chi^k(y) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

mediante las cuales se puede verificar que la consistencia de la ley de Gauss implica:

$$\begin{aligned} \dot{G}(x) &= g \left\{ 2 \left[g(\phi \phi^* \pi^- + \phi \phi^* \partial_-^x A_+ + \partial_-^x [\phi \phi^* A_+]) + i\phi (\partial_-^x - igA_-) v^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\phi^* (\partial_-^x + igA_-) v \right] + i\partial_k^x [\phi \partial_x^k \phi^* - \phi^* \partial_x^k \phi - 2igA^k \phi \phi^*] \right\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, es posible demostrar que:

$$\begin{aligned} \phi^* \dot{\Gamma} - \dot{\Gamma}^* &= -i \left\{ 2 \left[g \left[\phi \phi^* \pi^- + \partial_-^x (\phi^* A_+ \phi) + \phi \phi^* (\partial_-^x A_+) \right] - i\phi^* [\partial_-^x + igA_-] v \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\phi (\partial_-^x - igA_-) v^* \right] + i\partial_k^x [\phi \partial_x^k \phi^* - \phi^* \partial_x^k \phi - 2igA^k \phi \phi^*] \right\}, \end{aligned}$$

de tal manera que:

$$\dot{G}(x) = ig \left[\phi^*(x) \dot{\Gamma}(x) - \phi(x) \dot{\Gamma}^*(x) \right] \approx 0, \quad (3.27)$$

lo cual implica que no se genera ligaduras adicionales, ya que la expresión (3.27) indica que la ley de Gauss se conserva automáticamente. Por lo tanto, las relaciones (3.13), (3.14) y (3.26) constituyen el conjunto completo de vínculos que la teoría posee.

3.2. Clasificación de los Vínculos

Siguiendo el procedimiento de Dirac, se procede a clasificar las ligaduras en primera y segunda clase [1, 2]. Se puede determinar que π^+ tiene PB débilmente cero con el resto de vínculos de la teoría. Por lo tanto, π^+ se identifica como una ligadura de primera clase. Ahora, para clasificar los restantes vínculos $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$, es necesario evaluar los PB entre ellos, lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \{ \chi^k(x), \chi^l(y) \} &= -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \} &= -2D_-^x \delta^3(x-y), \\ \{ \Gamma(x), G(y) \} &= 2ig\delta^3(x-y) D_-^x \phi(x) + 2ig\phi(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \{ \Gamma^*(x), G(y) \} &= -2ig\delta^3(x-y) (D_-^x \phi(x))^* - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \{ G(x), G(y) \} &= -2g^2 \left[\delta^3(x-y) \partial_-^x (\phi(x) \phi^*(x)) + 2\phi(x) \phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las expresiones anteriores sugieren que las ligaduras podrían ser de segunda clase. Sin embargo, cuando se construye la matriz de vínculos cuyos elementos se definen por $C_{ab}(x, y) = \{ \Phi^a(x), \Phi^b(y) \} = \Delta_{ab}(x) \delta^3(x-y)$, donde $\Delta(x)$ se representa en la forma:

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2(D_-^x)^* & 2ig[(D_-^x)^* \phi(x)] + 2ig\phi(x) \partial_-^x & 0 \\ -2D_-^x & 0 & -2ig[D_-^x \phi^*(x)] - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x & 0 \\ 2ig\phi(x) D_-^x & -2ig\phi^*(x) (D_-^x)^* & F(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_l^k \partial_-^x \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

siendo F el operador:

$$F \equiv -2g^2 \partial_- (\phi \phi^*) - 4g^2 \phi \phi^* \partial_-, \quad (3.30)$$

es posible mostrar que la matriz $C(x, y)$ es singular con un autovalor nulo. El autovector asociado resultará de una combinación de los vínculos $\Phi^a(x)$ y tendrá la característica de ser una ligadura de primera clase. Este autovector, denominado $U(x)$, se calcula a partir de la siguiente ecuación de autovalores:

$$\int d^3x C(x, y) U(y) = 0. \quad (3.31)$$

De la expresión anterior se determina que el autovector correspondiente al autovalor cero es:

$$U(x) = \begin{pmatrix} \Gamma(x) \\ \Gamma^*(x) \\ G(x) \\ \chi^k(x) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

con lo que el segundo vínculo de primera clase se calcula de la siguiente manera:

$$\Sigma(x) = \Phi^a(x) U_a(x) = G(x) - ig \left[\Phi^*(x) \Gamma(x) - \Phi(x) \Gamma^*(x) \right]. \quad (3.33)$$

Una manera alternativa de visualizar el resultado anterior es observar la ley de Gauss, representada por el vínculo G , la cual, según el conjunto de paréntesis de Poisson (PB) en la ecuación (3.28), es de segunda clase. En el límite $g \rightarrow 0$, se recupera la teoría de campo de Maxwell libre, en la cual la ley de Gauss se clasifica estrictamente un vínculo de primera clase.

Por otra parte, si G perteneciera a un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase, el límite en el que la constante de acoplamiento tiende a cero no podría considerarse apropiado para recuperar las teorías libres, ya que los corchetes de Dirac (DB), que son necesarios construir para una teoría gauge, no estarían bien definidos. Se debe tener en cuenta que los DB asociados a la teoría están definidos en términos de una matriz no singular construida a partir del conjunto mínimo de vínculos de segunda clase. Esta matriz, sin embargo, se vuelve singular cuando se restaura las teorías libres, es decir, cuando $g \rightarrow 0$. En conclusión, se deberá considerar una combinación lineal de vínculos $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$ que resulta en un vínculo de primera clase, dado por la ecuación (3.33).

Una manera de mostrar que $\Sigma(x)$ es una ligadura de primera clase, consiste en calcular los PB con el conjunto restante de vínculos de la teoría. Por calculo directo de determina que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \Gamma(y) \right\} &= -ig \Gamma(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= ig \Gamma^*(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \chi^k(y) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Así, se garantiza que (3.33) es efectivamente una ligadura de primer la cual se puede expresar en la forma:

$$\Sigma = \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[\Phi^* \pi - \Phi \pi^* \right]. \quad (3.35)$$

Entonces, el conjunto de ligaduras de la SQED₄ se clasifican de la siguiente forma:

- Primera clase:

$$C = \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma = G - ig(\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*) \approx 0. \quad (3.36)$$

- Segunda clase:

$$\Gamma \equiv \pi - D_- \phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_- \phi)^* \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- \approx 0. \quad (3.37)$$

Los resultados anteriores aseguran que (3.36) constituye el número máximo de vínculos de primera clase y que la búsqueda de la independencia en el tiempo de $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$ conduce a expresiones que permiten calcular sus respectivos multiplicadores de Lagrange. Al comparar Σ con su análogo en las coordenadas de *instante forma* [2], se observa que, en este sistema de coordenadas, el segundo vínculo de primera clase no surge como una combinación lineal de las ligaduras que pertenecen al sector escalar y electromagnético, dado que en el análisis canónico correspondiente al *instante forma* el sector escalar presenta un comportamiento regular.

3.3. Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Gauge

A continuación, se procederá a comprobar que se poseen las ecuaciones de movimiento correctas, las cuales deberán ser compatibles con la completa libertad de gauge que caracteriza a la teoría. Para ello, se calcula la evolución temporal de los campos mediante el PB con el Hamiltoniano extendido H_E . Es decir, si $\Psi_a(x) \equiv (A_\mu(x), \pi^\mu(x), \phi(x), \phi^*(x), \pi(x), \pi^*(x))$ denota cualquier variable del espacio del sistema, entonces la evolución temporal de $\Psi_a(x)$ se determina a partir de:

$$\dot{\Psi}_a(x) = \left\{ \Psi_a(x), H_E \right\}, \quad (3.38)$$

donde el Hamiltoniano extendido es obtenido adicionando al Hamiltoniano primario H_P todos los vínculos de primera clase que surgieron en el problema, con lo cual se obtiene que:

$$H_E = \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\pi^-)^2 + \left(\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+ \right) A_+ - D_k \phi \left(D^k \phi \right)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ + \int d^3y \left[w_1 C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v + w_2 \Sigma \right]. \quad (3.39)$$

Las cantidades (v, v^*, u_k) se interpretan como los multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras de segunda clase, los cuales pueden ser fijados a partir de las condiciones de consistencia de $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$. Por su parte, (w_1, w_2) representan los multiplicadores correspondientes a los de primera clase, los cuales son, en principio, indeterminados y

arbitrarios. Así, la evolución temporal de los campos asociados al sector electromagnéticos es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{A}_+(x) &= w_1(x), \\ \dot{A}_-(x) &= \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x w_2(x), \\ \dot{A}_k(x) &= \partial_k^x A_+(x) + u_k(x) - \partial_k^x w_2(x).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Por consistencia de la segunda ecuación en (3.39) con la ecuación de movimiento (3.12), se podría elegir $w_2 = 0$. En forma similar, la evolución temporal de los momentos canónicos del sector electromagnético determina que:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^+(x) &= G(x) \approx 0, \\ \dot{\pi}^-(x) &= 2g^2\phi(x)\phi^*(x)A_+(x) + \partial_k^x u_k(x) + igv^*(x)\phi(x) - ig\phi^*(x)v(x), \\ \dot{\pi}^k(x) &= ig\phi(x)\left[\partial_x^k\phi^*(x) - igA^k(x)\phi^*(x)\right] + ig\phi^*(x)\left[\partial_k^x\phi(x) + igA_k(x)\phi(x)\right] \\ &\quad + \partial_l^x F_{lk}(x) - \partial_-^x u_k(x).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Al combinar las relaciones (3.40) y (3.41), se obtiene que

$$\partial_\mu^x F^{\mu\nu} + j^\nu \approx 0.\tag{3.42}$$

Un análisis semejante se puede realizar con las variables del sector escalar, para las cuales resulta que la evolución temporal es:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(x) &= v(x) + igw_2(x)\phi(x), \\ \dot{\phi}^*(x) &= v^*(x) - igw_2(x)\phi^*(x), \\ \dot{\pi}(x) &= -D_-^x D_-^x \phi(x) - igA_+(x)D_-^x \phi(x) - D_x^k D_k^x \phi(x) - m^2\phi(x) \\ &\quad + igD_-^x [w_2(x)\phi(x)] + igw_2(x)D_-^x \phi(x), \\ \dot{\pi}^*(x) &= -(D_-^x D_-^x \phi(x))^* + igA_+(x)(D_-^x \phi(x))^* - (D_k^x D_x^k \phi(x))^* \\ &\quad - m^2\phi^*(x) - ig(\phi(x)D_-^x)^* w_2(x) - 2igw_2(x)(D_-^x \phi(x))^*.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Combinando las expresiones anteriores, se puede deducir que:

$$\begin{aligned}\left(D_\mu^x D_x^\mu + m^2\right)\phi &\approx ig\partial_-^x w_2 + 2igw_2 D_-^x \phi, \\ \left(D_\mu^{x*} D_x^{\mu*} + m^2\right)\phi^* &\approx -ig\phi^* \partial_-^x w_2 - 2igw_2 (D_-^x \phi)^*.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo (4.42) y (4.44) son consistentes con su contraparte Lagrangiana si se elige $w_2 = 0$.

3.4. Eliminación de los Vínculos

El algoritmo de Dirac requiere de tantas condiciones de gauge como vínculos de primera clase surjan en la teoría. Sin embargo, tales relaciones deberán ser compatibles con las

ecuaciones de Euler-Lagrange, y por tanto deben fijar el multiplicador de Lagrange w_2 a cero y transformar las ligaduras de primera en segunda clase. Una condición de gauge que satisface tales requerimientos es:

$$A_- \approx 0, \quad \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0, \quad (3.45)$$

y se conoce en la literatura como gauge de plano nulo [3, 4].

Con el fin de eliminar el conjunto completo de vínculos de segunda clase, se aplicará el método iterativo [2]. Para cumplir con tal propósito, primero se seleccionará el conjunto de ligaduras de primera clase (3.36), junto con las condiciones de gauge (3.45), y se renombrarán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \pi^+ & \Phi_3 &\equiv A_- \\ \Phi_2 &\equiv \Sigma = G - i g (\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*) & \Phi_4 &\equiv \pi^- + \partial_- A_+. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ahora, se construirá una primera matriz con elementos $C_{ij}(x, y) \equiv \{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\}$ y que se representa en la forma:

$$C_{ij}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (3.47)$$

Para calcular la inversa $C_{ij}^{-1}(x, y)$, es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$\int d^3z C_{ik}^{-1}(x, z) C_{kj}(z, y) = \int d^3z C_{ik}(x, z) C_{kj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij} \delta^3(x - y). \quad (3.48)$$

No obstante, para garantizar (3.48) se requiere definir convenientemente la inversa del operador longitudinal ∂_- . En general, este operador esta definido como

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-, x^+, x^\perp) + F(x^+, x^\perp), \quad (3.49)$$

donde la función $\epsilon(x)$ es

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

y $F(x^+, x^\perp)$ es una función independiente de x^- . La presencia de la función F en la expresión (3.49) se debe a la ausencia de condiciones iniciales específicas, lo que podría implicar que a la matriz de vínculos (3.47) se le pueda asociar una única inversa. Dirac demostró que una matriz conformada por un conjunto completo de vínculos de segunda

clase debe tener una única inversa [1]; por lo tanto, el grupo de vínculos (3.46) no es un conjunto puro de vínculos de segunda clase. La matriz inversa de (3.47) no es por tanto única, porque entre los vínculos de segunda clase se encuentra un subconjunto de vínculos de primera clase ocultos [4]. La presencia de este conjunto oculto de ligaduras puede evidenciarse a través de las condiciones de consistencia (3.22), (3.24) y (3.25), a las que pueden asociar las siguientes soluciones a los correspondientes multiplicadores de Lagrange (v, v^*, u_k):

$$\begin{aligned} v(x) &= \hat{v}(x) + s(x^+, x^\perp), \\ v^*(x) &= \hat{v}^*(x) + s^*(x^+, x^\perp), \\ u_k(x) &= \hat{u}_k(x) + s_k(x^+, x^\perp), \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde $s(x^+, x^\perp)$, $s^*(x^+, x^\perp)$ y $s_k(x^+, x^\perp)$ son funciones arbitrarias de $(x^+, x^\perp)$, en tanto que $\hat{v}(x)$, $\hat{v}^*(x)$ y $\hat{u}_k(x)$ representan soluciones sin ambigüedades. De esta manera, el Hamiltoniano total se puede expresar como:

$$\begin{aligned} H'_E &= \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ &\quad + \int d^3y \left[w_1 C + \hat{u}_k \chi^k + \hat{v}^* \Gamma + \Gamma^* \hat{v} + w_2 \Sigma \right] + \int d^3y \left[s_k \chi^k + s^* \Gamma + \Gamma^* s \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

De acuerdo con Dirac, la contribución de la solución homogénea para v , v^* y u_k (3.51) siempre estará asociada con ligaduras de primera clase, que en nuestro caso corresponden a los vínculos ocultos de primera clase. Sin embargo, Steinhardt [3] demostró que este subconjunto de vínculos de primera clase está asociado con transformaciones de gauge impropias [4], las cuales cambian el estado físico de un sistema y proyectan una solución de las ecuaciones de movimiento en otra solución completamente diferente. Esto implica que no es posible eliminar las transformaciones de gauge impropias por medio de condiciones de gauge, ya que tal procedimiento podría excluir consideraciones físicas permitidas por el sistema.

La manera natural de eliminar las ligaduras ocultas es fijar condiciones de frontera adecuadas a fin de que el Hamiltoniano total funcione como un generador apropiado de traslaciones temporales. De hecho, la invariancia de la acción por transformaciones impropias da origen a leyes de conservación no triviales que se expresan en forma de integrales de superficie. A diferencia de las transformaciones de gauge habituales, que generan transformaciones propias y que son características de una teoría de gauge, estas no cambian el estado físico del sistema. La posibilidad de realizar transformaciones de gauge propias puede siempre ser eliminada imponiendo condiciones de gauge.

Por tanto, la evaluación explícita de la inversa de la matriz (3.47) involucra la determinación de una función arbitraria de $(x^+, x^\perp)$. Esta función puede ser determinada

considerando condiciones de frontera apropiadas sobre la variación en la coordenada canónica generada por el vínculo. Entonces, al imponer las condiciones de frontera sobre los campos (ϕ, ϕ^*, A_k) , citadas en [5] y [6], la inversa del operador ∂_- puede definirse sobre cualquier función integrable $f(x^-)$ de la siguiente forma:

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-), \quad (3.53)$$

la cual es menos singular que $\frac{1}{x^-}$ y desaparece mas rápido que $\frac{1}{x^-}$ para valores grandes de x^- . A partir de (3.53) se puede garantizar que la inversa única de la matriz de vínculos (3.47) es dada por:

$$C_{ij}^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\perp - y^\perp). \quad (3.54)$$

Una manera alternativa de calcular la inversa (3.54) es usar el hecho de que los DB deben satisfacer las identidades de Jacobi [7]. Utilizando la relación (3.54), el primer conjunto de corchetes de Dirac (DB) $\{ \cdot, \cdot \}_{D1}$, para dos variables dinámicas $A(x)$ y $B(y)$, se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} \{ A(x), B(y) \}_{D1} &= \{ A(x), B(y) \} - \int d^3u d^3v \{ A(x), \Phi_i(u) \} C_{ij}^{-1}(u, v) \\ &\quad \{ \Phi_j(v), B(y) \}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Es posible demostrar que si $A_a(x)$ es un campo escalar, se cumple que

$$\begin{aligned} \{ A_a(x), B_b(y) \}_{D1} &= \{ A_a(x), B_b(y) \} - \int d^3u d^3v \{ A_a(x), \Theta_2(u) \} C_{2j}^{-1}(u, v) \\ &\quad \{ \Theta_d(v), B_b(y) \}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ahora, en el caso de que $B_b(x)$ es también una variable escalar, se deberá cumplir que

$$\{ A_a(x), B_b(y) \}_{D1} = \{ A_a(x), B_b(y) \}, \quad (3.57)$$

de tal manera que los DB no nulos que tienen en cuenta los campos escalares son:

$$\{ \phi(x), \pi^*(y) \}_{D1} = \delta^3(x - y) \quad , \quad \{ \phi^*(x), \pi(y) \}_{D1} = \delta^3(x - y). \quad (3.58)$$

Si se considera que $B_b(x) = A_+(x)$, se determina que

$$\{ A_a(x), A_+(y) \}_{D1} = \frac{1}{2} \int d^3u \{ A_a(x), \Theta_2(u) \} |u^- - y^-| \delta^2(u - y),$$

a partir del cual se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y), \\
 \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y), \\
 \left\{ \pi(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x - y) \partial_-^x \phi(x), \\
 \left\{ \pi^*(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x - y) \partial_-^x \phi^*(x).
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

No obstante, para $A_a(x) = A_k(x)$ se cumple que

$$\left\{ A_k(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_k(x), B_b(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{2j}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\},$$

de la cual se puede concluir que los últimos $\{\cdot, \cdot\}_{D1}$ no nulos son:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D1} &= \delta_k^l \delta^3(x - y), \\
 \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x - y).
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.5. Inversión de Vínculos Escalares

En este instante se procede a resolver las ligaduras de segunda clase asociados al sector escalar. Para ello, será necesario definir un segundo conjunto de DB, $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$, a partir de:

$$\Psi_1(x) \equiv \pi(x) - \partial_-^x \phi(x) \approx 0, \quad \Psi_2 \equiv \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) \approx 0. \tag{3.61}$$

El BD $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ para dos variables $A_a(x)$ y $B_b(y)$ es definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D2} &\equiv \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Psi_c(u) \right\}_{D1} \\
 &\quad D_{cd}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_d(v), B_b(y) \right\}_{D1},
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

donde $D_{ab}^{-1}(x, y)$ (con $a, b = 1, 2$) es la inversa de la matriz $D_{ab}(x, y)$ construida a partir de (3.61), la cual posee los siguientes elementos:

$$D_{ab}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_a(x), \Psi_b(y) \right\}, \tag{3.63}$$

y con la siguiente representación matricial:

$$D(x, y) = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_-^x \delta^3(x - y). \tag{3.64}$$

Es posible mostrar que la inversa tiene la forma:

$$D^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y). \tag{3.65}$$

Bajo la definición de los DB $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$, las ligaduras escalares se pueden considerarse como identidades fuertes, es decir:

$$\pi(x) - \partial_-^x \phi(x) = 0 \quad , \quad \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) = 0, \quad (3.66)$$

de tal manera que de las cuatro coordenadas asociadas a ellos $(\phi, \phi^*, \pi, \pi^*)$, solo dos son independientes. Aun cuando los vínculos no especifican cuáles son las coordenadas independientes, existe completa libertad en la selección de los grados de libertad. La forma funcional de las relaciones (3.65) permite considerar a (ϕ, ϕ^*) como las coordenadas independientes. Por ende, los DB $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ se calcularán inicialmente en relación con estas variables. Si existe interés en evaluar los DB asociado a las variables (π, π^*) , basta utilizar las expresiones (3.65).

A partir de (3.62) se puede obtener el siguiente conjunto de DB no nulos:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y), \\ \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x - y) \left[\phi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi(v) \right. \\ &\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\ \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x - y) \left[\phi^*(x) |x - y| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi^*(v) \right. \\ &\quad \left. \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(v^- - y^-) \right], \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D2} &= \delta_k^l \delta^3(x - y), \\ \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x - y), \\ \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{g^2}{16} \int d^3u d^3v \left[\phi(u) \phi^*(v) + \phi^*(u) \phi(v) \right] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x - u) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u - v) \epsilon(v^- - y^-) \\ &\quad \delta^2(v - y). \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.6. Corchetes de Dirac

Finalmente, se realiza el cálculo los DB entre los grados de libertad de la teoría. Para ello, es necesario identificar las coordenadas independientes que el sistema presenta. Inicialmente, la SQED₄ es definida por el siguiente espacio de fase: $(A_\mu, \phi, \phi^*, \pi^\mu, \pi, \pi^*)$, es decir, un espacio de dimensión 12. Al aplicar la definición de los DB, el grupo de

ligaduras previamente invertidas se traduce en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 A_- &= 0, \\
 \pi^- + \partial_- A_+ &= 0, \\
 \pi - D_- \phi &= \pi - \partial_- \phi = 0, \\
 \pi^* - (D_- \phi)^* &= \pi^* - \partial_- \phi^* = 0, \\
 \pi^+ &= 0, \\
 \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[\phi^* \pi - \phi \pi^* \right] &= \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[\phi^* \partial_- \phi - \phi \partial_- \phi^* \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

lo que deja a la teoría con 6 coordenadas independientes. Además, las ligaduras $\chi^k(x)$ del sector electromagnético, bajo la definición de los DB parciales, toman la forma:

$$\chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k \approx 0, \tag{3.70}$$

lo que permite considerar como grado de libertad al campo $A_k(x)$. Por tanto, a partir de (3.70) se construye la matriz de ligaduras de segunda clase:

$$F^{kl}(x, y) \equiv \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\}_{D2} = -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x - y), \tag{3.71}$$

cuya inversa es la siguiente:

$$\left(F^{-1} \right)^{kl}(x, y) = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y). \tag{3.72}$$

Por tanto, el conjunto final de DB para las variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_a(x)$ se determina a partir de:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_D &\equiv \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D2} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \chi^s(u) \right\}_{D2} \\
 &\quad \left(F^{-1} \right)^{sn}(u, v) \left\{ \chi^n(v), B_b(y) \right\}_{D2}.
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Al emplear la forma explícita de la matriz inversa $\left(F^{-1} \right)^{sn}(x, y)$ dada por (3.72), la expresión para los DB (3.73) resulta en:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u - v) \\
 &\quad \left\{ A_a(x), \chi^s(u) \right\}_{D2} \left\{ \chi^s(v), B_b(y) \right\}_{D2}.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_k(x), \chi^l(u) \right\}_{D2} &= \delta_l^k \delta^3(x - u), \\
 \left\{ \chi^s(v), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(v^- - y^-) \partial_s^y \delta^2(v - y), \\
 \left\{ A_+(x), \chi^s(u) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - u^-) \partial_s^x \delta^2(v - y), \\
 \left\{ \phi(x), \chi^s(u) \right\}_{D2} &= 0, \\
 \left\{ \phi^*(x), \chi^s(u) \right\}_{D2} &= 0,
 \end{aligned}$$

se deriva el conjunto final de DB entre las variables dinámicas fundamentales de la teoría:

$$\left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (3.75)$$

$$\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{i}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{i}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Del principio de correspondencia se deducen los siguientes conmutadores entre los campos:

$$\left[A_k(x), A_l(y) \right] = -\frac{i}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (3.78)$$

$$\left[\phi(x), \phi^*(y) \right] = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left[\phi(x), A_+(y) \right] &= -\frac{1}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \left[\phi^*(x), A_+(y) \right] &= \frac{1}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Las dos primeras relaciones fueron deducidas por Neville y Rohrlich [8]. Ellos derivaron estas expresiones comenzando con las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libres a tiempos iguales x^+ , y^+ y, posteriormente, calcularon los conmutadores sobre el plano nulo $x^+ = y^+$. Las relaciones de conmutación que involucran los operadores de campo $\hat{A}_+(x)$ no fueron obtenidas por Neville y Rohrlich; sin embargo, ellos

afirmaron que estas expresiones deberían ser deducidas al resolver una serie de vínculos cuánticos. En esta parte del trabajo, se obtuvieron las relaciones de conmutación entre los campos independientes de la teoría, los cuales fueron derivados a nivel clásico siguiendo un análisis cuidadoso de la estructura de vínculos del modelo.

En resumen, hemos demostrado que la SQED₄ presenta una ligadura de primera clase, que resulta de una combinación lineal de vínculos y se identifica con el auto vector asociado al modo cero. Esta ligadura es una consecuencia directa de los vínculos asociados al sector escalar. Este hallazgo debe compararse con aquellos obtenidos en las coordenadas de instante forma, en los cuales el segundo vínculo de primera clase es simplemente la ley de Gauss, la cual depende únicamente de las variables correspondientes al campo electromagnético, sin vínculos adicionales asociados al sector escalar.

Con el fin de transformar los vínculos de primera en segunda clase, se empleó el gauge de plano nulo y se impusieron condiciones de frontera apropiadas sobre los campos. Asimismo, se fijó el subconjunto oculto de vínculos de primera clase y se determinó una única inversa correspondiente a la matriz de vínculos de segunda clase. A partir de esta construcción, se dedujeron los DB de la teoría y se cuantizaron vía principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libre obtenidas son consistentes con los resultados reportados en la literatura [8]. Los conmutadores que involucran los operadores de campo $\hat{A}_+$ fueron calculados cuantizando los DB derivados a nivel clásico, siguiendo un análisis cuidadoso de la estructura de vínculos.

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, New York: Benjamin, 1964.
- [2] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, vol. 169, New York: Springer, 1982.
- [3] P. J. Steinhardt, "Problems of quantization in the infinite momentum frame," *Annals Phys.*, vol. 128, pp. 425-435, 1980.
- [4] BR. Benguria, P. Cordero, and C. Teitelboim, "Aspects of the Hamiltonian dynamics of interacting gravitational gauge and Higgs fields with applications to spherical symmetry," *Nucl. Phys. B*, vol. 122, pp. 61-99, 1976.
- [5] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum field theory off null planes," *Nuovo Cim. A*, vol. 1, pp. 625-644, 1971.
- [6] F. Rohrlich, "Null plane field theory," *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, vol. 8, pp. 277-322, 1971.
- [7] S. B. Pereslegin and V. A. Franke, "Hamiltonian structure of the nonlinear sigma model in light front coordinates," *Theor. Math. Phys.*, vol. 59, pp. 365-378, 1984.
- [8] A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum electrodynamics on null planes and applications to lasers," *Phys. Rev. D*, vol. 3, pp. 1692-1707, 1971.

Capítulo 4

Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

4.1. Introducción

En 1928 Dirac propuso una teoría destinada a describir partículas de espín $\frac{1}{2}$ [1], la cual se caracterizaba porque la estructura fina del átomo de hidrógeno surgía naturalmente al estudiar la interacción de un electrón con un protón bajo el dominio de un potencial coulombiano. Al analizar el límite no relativista de la ecuación de Dirac, en presencia de este tipo de potencial, se reduce a la ecuación de Schrödinger más un término de espín-órbita. La razón por la cual Dirac propuso su ecuación fue resolver el problema de la densidad de probabilidad que surgía de la ecuación relativista de Klein-Gordon-Fock (KGF). Se sabe que la ecuación de KGF se obtiene de la relación energía-momento relativista: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, cuando se identifica la energía E y el momento p con los operadores $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ y $-i\hbar \nabla$, respectivamente, los cuales deberán actuar sobre una función de onda compleja $\psi(x, t)$ de manera que se obtiene:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi(x, t) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(x, t) = 0, \quad (4.1)$$

o en forma equivalente:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x, t) = 0. \quad (4.2)$$

La ecuación de KGF fue considerada inicialmente por Schrödinger para estudiar el espectro del átomo de hidrógeno mucho antes de formular su ecuación no relativista.

A partir de la función de onda $\psi(x, t)$, se puede construir la densidad de probabilidad $\rho(x, t)$, cuya importancia radica en que $\rho(x, t) d^3x$ se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula en un elemento de volumen d^3x . Por esta razón, la cantidad $\rho(x, t)$ debe ser positiva definida. Sin embargo, en el caso de la ecuación de KGF, se

puede demostrar que la densidad de probabilidad es dada por:

$$\rho(x, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial t} \right], \quad (4.3)$$

la cual no es definida positiva y por lo tanto no puede ser considerada como una densidad de probabilidad. Fue en 1934 cuando Pauli y Weisskopf interpretaron la densidad de probabilidad (4.3) como una densidad de carga [2].

La propuesta de Dirac de una teoría cuántica para el electrón que condujera a una densidad de probabilidad definida positiva se enfocó en buscar una ecuación relativista de primer orden en la derivada temporal, y mostró que esta debería ser una ecuación matricial expresada de la siguiente forma:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.4)$$

donde las matrices γ^μ deberán obedecer la siguiente álgebra:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

donde el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ tiene la forma $(+, -, -, -)$. A partir de (4.4) se puede demostrar que la densidad de probabilidad correspondiente se expresa como:

$$\rho(x) = \psi^\dagger \psi, \quad (4.6)$$

la cual es definida positiva.

El esfuerzo realizado por Yukawa en 1935 para explicar algunas características de las fuerzas nucleares [3] permitió que los físicos trataran con nuevas partículas, diferentes de aquellas conocidas de espín $\frac{1}{2}$ tales como el protón, neutrón, electrón y positrón. Sus estudios mostraron que la interacción de corto alcance entre dos nucleones es mediada por un bosón con una masa intermedia entre la del protón y la del electrón, la cual denominaron mesón. Posteriormente, se identificó que una partícula de este tipo estaba presente en rayos cósmicos [4]; sin embargo, transcurrieron diez años antes de confirmar que dicho mesón era diferente de aquel propuesto por Yukawa [5]. Pese a esta diferencia, el éxito de la teoría de Yukawa y la observación de mesones en rayos cósmicos incentivó la búsqueda de una ecuación que posiblemente describiera estas partículas. En la época no se había encontrado evidencia experimental contundente acerca del espín de los mesones cargados y neutros, que según la teoría de Yukawa podría ser 0 o 1.

Tras el éxito de la teoría de Dirac, de Broglie propuso que un fotón podría estar conformado por la combinación de dos leptones, un hecho que podría explicar la masa del mismo [6]. Fue así que de Broglie buscó una ecuación de primer orden que pudiera describir su fotón masivo. Simultáneamente, Kemmer estudiaba las ecuaciones de segundo orden de Proca, y observó que podrían ser escritas como un conjunto de ecuaciones de primer orden [7], las cuales escribió junto con las correspondientes ecuaciones para el

caso de espín 0. Kemmer se dio cuenta de que tales ecuaciones podrían escribirse en las formas matriciales de 10×10 y 5×5 , de manera que describieran las representaciones irreducibles de espín 1 y espín 0, respectivamente. Sin embargo, Kemmer no consiguió determinar el álgebra que tales matrices debían satisfacer. Fue entonces cuando Petiau, un matemático y estudiante de de Broglie, mostró en 1936 el álgebra de las matrices correspondientes, estableciendo que su estructura debería ser 16×16 [8].

No obstante, el trabajo de Petiau permaneció prácticamente desconocido por muchos años, al igual que el estudio de J. Géhéniau [9], quien dos años después descompuso tal álgebra en representaciones de dimensión diez, cinco y unidimensional o trivial. Después de conocer el trabajo de Duffin, Kemmer unificó toda la información disponible y formuló un abordaje de primer orden [10]. El propósito principal de Kemmer fue reformular la ecuación de Proca a fin de obtener ecuaciones de onda de primer orden sin necesidad de utilizar una forma tensorial. La teoría desarrollada guardaba una estrecha correspondencia con la teoría del electrón de Dirac.

La ecuación derivada por Kemmer tiene la forma:

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.7)$$

donde las matrices β^μ deben satisfacer la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.8)$$

Las matrices β^μ tienen dimensión 16 y constituyen una representación reducible del álgebra (4.8), la cual solo admite tres representaciones irreducibles, a saber: una representación irreducible en 10 dimensiones asociada a partículas de espín 1, una representación de 5 dimensiones correspondiente a partículas de espín 0 y una representación trivial sin significado físico en 1 dimensión. Por su parte, el objeto $\psi(x)$ representa una función de onda multicomponente. Para partículas de espín 1, la función de onda tiene 10 componentes y conduce a la teoría usual basada en la ecuación de Proca, en la que cuatro de estas componentes forman un cuadrivector y seis configuran un tensor antisimétrico. En el caso de partículas de espín 0, la función de onda de 5 componentes conduce a la teoría de KGF, llamada también escalar, donde una de sus componentes corresponde a un escalar y las otras cuatro corresponden a su cuadrigradiante.

4.2. Ecuación de Onda Relativista

En cuanto a la ecuación de onda de la mecánica cuántica no relativista, esta no resulta ser invariante de Lorentz, ya que las derivadas espaciales y temporal no aparecen en ella de forma simétrica. De hecho, la energía que describe una partícula no relativista

es $E = \frac{p^2}{2m}$, que a nivel cuántico es interpretada por los operadores:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \rightarrow -i \nabla. \quad (4.9)$$

Se esperaría que la relación (4.9) pudiera utilizarse para derivar una ecuación de onda relativista de la relación: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, lo que resultaría en la ecuación de KGF (4.2). Por esta razón se asume que los campos de una teoría cuántica deben satisfacer la condición de KGF, bajo la cual se interpreta que los campos $Q_\alpha(x)$ correspondientes a partículas elementales libres deben satisfacer la ecuación:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (4.10)$$

Ahora, si las componentes de los campos $Q_\alpha(x)$ corresponden a un conjunto de partículas con valores de masa $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, entonces la ecuación (4.10) queda expresada como:

$$\prod_{\alpha=1}^n \left(\partial^\mu \partial_\mu + m_\alpha^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (4.11)$$

Es bien conocido que las ecuaciones de algún orden pueden ser transformadas en un sistema de ecuaciones de primer orden al incrementar el número de variables, donde este nuevo conjunto de variable tiene un importante significado físico. El hecho de que una ecuación de onda sea de primer orden en la operación de derivada temporal es esencial para el formalismo canónico de la mecánica cuántica. Dado que la invariancia canónica de la teoría asegura la conservación de la probabilidad, es necesario adoptar el formalismo canónico en teoría cuántica de campos con el fin de mantener esta ley de conservación. Por lo tanto, las ecuaciones de onda deben tener una forma de ecuaciones canónicas, las cuales son ecuaciones diferenciales de primer orden. Es decir, una teoría canónica de campos cuánticos estará basada sobre campos que satisfacen ecuaciones diferenciales de primer orden.

Un ejemplo de ello es el caso de un campo escalar $\varphi(x)$, el cual satisface una ecuación de campo tipo (4.10), es decir:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \varphi(x) = 0. \quad (4.12)$$

Ahora bien, es posible convertir (4.12) en una ecuación de primer orden al reescribirla de la siguiente forma:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left[\frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x) \right] + m \varphi(x) = 0. \quad (4.13)$$

Si se define que

$$\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x), \quad (4.14)$$

la ecuación (4.13) se expresa como:

$$\partial^\nu \varphi_\nu(x) + m \varphi(x) = 0. \quad (4.15)$$

De esta manera, al adicionar el cuadvivector $\varphi_v(x)$ al campo original $\varphi(x)$, se define un campo que posee cinco componentes $(\varphi(x), \varphi_v(x))$, los cuales satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\varphi_v(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_v \varphi(x) \quad , \quad \partial^\nu \varphi_v(x) + m \varphi(x) = 0. \quad (4.16)$$

Es decir, la ecuación de segundo orden diferencial (4.12) se ha reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden, como se expresa en (4.16). Sin embargo, este cambio implica un aumento en el número de variables: $(\varphi(x), \varphi_v(x))$.

Usualmente, una ecuación de onda relativista para la función de onda $Q_\alpha(x)$ con $\alpha = 1, 2, \dots, n$ es de la forma:

$$\Delta_\mu^\nu(\partial) Q_\nu(x) = 0. \quad (4.17)$$

No obstante, la condición de KGF limita esta ecuación de onda, ya que requiere que exista un operador diferencial $D_v^\sigma(\partial)$ que garantice la condición mencionada, es decir:

$$D_v^\sigma(\partial) \Delta_\mu^\nu(\partial) = \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \delta_\mu^\nu. \quad (4.18)$$

En general, el operador $D_v^\sigma(\partial)$ tiene la siguiente representación:

$$D(\partial) \equiv [D_v^\sigma(\partial)] = \alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \\ + \dots + \alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} + \dots, \quad (4.19)$$

donde los coeficientes $\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l}$ son matrices de dimensión n . Si se denota el orden más alto de diferenciación del operador (4.19) por b , se debe cumplir que

$$\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \text{para} \quad l > b. \quad (4.20)$$

La matriz $\Delta_\mu^\nu(\partial)$ es de primer orden en el operador ∂ y es, en general, de la forma:

$$\Delta(\partial) \equiv [\Delta_\mu^\nu(\partial)] = i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta, \quad (4.21)$$

donde ρ^μ y β son matrices de dimensión n , el parámetro m es una constante y la función de onda $Q_\alpha(x)$ se representa como una matriz columna. A partir de las relaciones (4.18), (4.19) y (4.21), es posible observar que:

$$\partial^\mu \partial_\mu + m^2 = \left(\alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} + \dots \right) \left(i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta \right).$$

Al igualar potencias del mismo orden diferencial en la relación anterior, es posible determinar que

$$m = -\alpha\beta. \quad (4.22)$$

De (4.22) se puede proponer que se cumpla

$$\alpha = -m\beta^{-1}, \quad (4.23)$$

es decir, que la matriz β tenga inversa, con lo cual, la ecuación (4.17) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta^{-1} \Delta_{\mu}^{\nu} (\partial) Q_{\nu} (x) = \left(i\beta^{-1} \rho^{\mu} \partial_{\mu} - m \right) Q_{\nu} (x) = 0. \quad (4.24)$$

Definiendo la matriz

$$\beta^{\mu} \equiv \beta^{-1} \rho^{\mu}, \quad (4.25)$$

se puede expresar (4.24) como se muestra a continuación:

$$\left(i\beta^{\mu} \partial_{\mu} - m \right) Q_{\nu} (x) = 0, \quad (4.26)$$

la cual es equivalente a la expresión (4.17).

Consideremos como un caso especial la siguiente forma para el operador $D(\partial)$:

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^{\mu} \partial_{\mu}. \quad (4.27)$$

Se puede mostrar que

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} + m^2 = -m\alpha + \left(i\alpha\beta^{\mu} - m\alpha^{\mu} \right) \partial_{\mu} + \frac{i}{2} \left(\alpha^{\mu} \beta^{\nu} + \alpha^{\nu} \beta^{\mu} \right) \partial_{\mu} \partial_{\nu},$$

donde el último término se ha simetrizado debido a la presencia del tensor $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$. Ahora, al igualar potencias del mismo orden diferencial, se determina que:

$$\begin{aligned} m^2 &= -m\alpha, \\ 0 &= i\alpha\beta^{\mu} - m\alpha^{\mu}, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \left(\alpha^{\mu} \beta^{\nu} + \alpha^{\nu} \beta^{\mu} \right), \end{aligned}$$

lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \alpha &= -m, \\ \alpha^{\mu} &= -i\beta^{\mu}, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\beta^{\mu} \beta^{\nu} + \beta^{\nu} \beta^{\mu} \right), \end{aligned}$$

donde la última relación se puede escribir como:

$$\beta^{\mu} \beta^{\nu} + \beta^{\nu} \beta^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Ahora bien, el número b que aparece en la expresión (4.20) puede expresarse como:

$$b = 2f, \quad (4.29)$$

donde f es el máximo valor del espín del campo descrito por $Q_{\nu}(x)$ [11]. Para el caso de (4.27), $b = 1$ y por lo tanto el espín del campo $Q_{\nu}(x)$ es $\frac{1}{2}$. Así, la expresión (4.26) es

la ecuación de campo con espín $\frac{1}{2}$, donde las matrices β^μ satisfacen el álgebra indicada en (4.28).

Ahora, se procede a determinar la estructura de la matrices β^μ , que generalmente son de orden $n \times n$. Para el caso $n = 2$, las matrices en mención son de 2×2 , y se podría considerar a las matrices de Pauli σ_k , ($k = 1, 2, 3$) junto con la matriz identidad I , las cuales constituyen una base que satisface las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\left\{ \sigma_k, \sigma_j \right\} = 2\delta_{kj} \quad , \quad \left\{ \sigma_k, I \right\} = 0. \quad (4.30)$$

La relación anterior indica que las matrices (σ_k, I) no satisfacen el álgebra (4.28), por lo que dichas matrices no pueden ser consideradas como una base para este caso ni pueden ser identificadas con las matrices β^μ . Debido a lo anterior, se procede a considerar la dimensión $n = 4$ [12]. Para este caso, las matrices asociadas son las de Dirac, denotadas como γ^μ , las cuales satisfacen la relación (4.28), y en consecuencia pueden ser identificadas con las matrices β^μ , es decir, $\beta^\mu \rightarrow \gamma^\mu$. De esta manera, la ecuación (4.26) correspondiente se expresa como:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.31)$$

donde las matrices γ^μ satisfacen el álgebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

La ecuación (4.31), conocida como ecuación de Dirac, describe partículas masivas de masa m por medio del campo $\psi(x)$. Esta interpretación es resultado apenas de una identificación, ya que la caracterización de $\psi(x)$ como un espinor es consecuencia del estudio de las matrices γ^μ y de su comportamiento bajo transformaciones de Lorentz.

A partir de (4.32), es posible mostrar que

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \left(i\gamma^\nu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (4.33)$$

es decir, cada componente del campo $\psi(x)$ satisface la condición de KGF. Cualquier función de las matrices de Dirac puede ser escrita como una combinación lineal de 16 matrices γ^A , donde $A = 1, 2, \dots, 16$, definidas de la siguiente manera:

$$\gamma^A = \begin{cases} I & \rightarrow 1 \\ \gamma^\mu & \rightarrow 4 \\ \gamma^\mu \gamma^5 & \rightarrow 4 \\ \gamma^5 & \rightarrow 1 \\ \Sigma^{\mu\nu} & \rightarrow 6 \end{cases} ,$$

donde

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \quad , \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) .$$

Además, se puede demostrar que las matrices γ^A satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (\gamma^A)^2 &= I, \\ \text{Tr} \gamma^A &= 0 \quad , \quad \gamma^A \neq I, \\ \text{Tr} (\gamma^A \gamma^B) &= 0 \quad , \quad A \neq B. \end{aligned}$$

Las matrices γ^A son linealmente independientes y por tanto constituyen una base, de manera que cualquier matriz 4×4 puede descomponerse en función de γ^A .

Ahora, analicemos el caso cuando el operador $D(\partial)$ es de segundo orden, es decir:

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (4.34)$$

De esta manera, la ecuación (4.18) implica que:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 &= -m\alpha + \left(i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu \right) \partial_\mu + \left[\frac{i}{2} \left(\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) - m\alpha^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \\ &\quad + i \sum_P (\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu) \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu, \end{aligned}$$

donde $\sum_P$ indica una suma sobre todas las permutaciones posibles de los índices $(\mu\sigma\nu)$ debido a la simetría del operador diferencial $\partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu$. Para que la igualdad sea satisfecha, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} m^2 &= -m\alpha, \\ 0 &= i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \left(\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) - m\alpha^{\mu\nu} \\ 0 &= i \sum_P (\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu). \end{aligned}$$

Estas condiciones conducen a:

$$\begin{aligned} m &= -\alpha, \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu, \\ \alpha^{\mu\sigma} &= \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} \left(\beta^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\mu \right) - \eta^{\mu\sigma} \right], \\ 0 &= \sum_P \left[\frac{1}{2} \left(\beta^\mu \beta^\sigma \beta^\nu + \beta^\sigma \beta^\mu \beta^\nu \right) - \eta^{\mu\sigma} \beta^\nu \right]. \end{aligned}$$

Al considerar todas las permutaciones posibles, la última relación conduce a la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.35)$$

Una manera alternativa de deducir la relación (4.35) es a partir de la idea de de Broglie, según la cual la matriz β^μ se puede expresar como

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \Gamma'^\mu), \quad (4.36)$$

donde

$$\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu \otimes 1 \quad , \quad \Gamma'^\mu \equiv 1 \otimes \gamma^\mu. \quad (4.37)$$

Además, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \left\{ \Gamma^\mu, \Gamma^\nu \right\} &= 2\eta^{\mu\nu} = \left\{ \Gamma'^\mu, \Gamma'^\nu \right\} \\ \left[\Gamma^\mu, \Gamma'^\nu \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A partir de la relación (4.36) puede demostrarse que

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma &= \frac{1}{8} \left(\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma'^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'^\mu \Gamma^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En forma similar, se determina que

$$\begin{aligned} \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} \left(\Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'^\sigma \Gamma^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sumando las relaciones (4.39) y (4.40) se obtiene que

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} \left[\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right. \\ &\quad \left. + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A su vez, de la relación (4.38), se puede determinar que

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} - \Gamma^\nu \Gamma^\mu,$$

de manera que:

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu - \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu.$$

Así que la relación anterior permite establecer que:

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu. \quad (4.42)$$

De forma similar se muestra:

$$\Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu. \quad (4.43)$$

Combinando las relaciones (4.42) y (4.43) en la expresión (4.41), se obtiene:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu,$$

que es el álgebra (4.35).

4.3. Ecuación de DKP y las propiedades de las matrices beta

A partir de una ecuación de primer orden, es posible analizar las propiedades de los campos escalares masivos (espín 0) y de los campos vectoriales masivos (espín 1). Lo anterior es posible si se aumenta el número de variables, como ocurrió con el ejemplo que dio origen a la ecuación (4.15). La ecuación que se desea considerar es proporcionada por el formalismo de primer orden de DKP, que describe este tipo de partículas y se expresa como:

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.44)$$

donde las matrices β^μ satisfacen la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.45)$$

La ecuación (4.44) describe entonces las propiedades de las partículas libres de espín 0 y espín 1, con las matrices β^μ satisfaciendo las propiedades algebraicas (4.45) en ambos casos. Esta álgebra admite tres representaciones irreducibles: una representación de 10 dimensiones, asociada a partículas de espín 1; una representación de 5 dimensiones, correspondiente a partículas de espín 0; y una representación trivial de 1 dimensión, sin significado físico. Ahora, la evidencia de los valores de espín se da por el hecho de que la función de onda multicomponente $\psi(x)$ cuenta con 5 componentes en el caso de espín 0, en tanto que en el caso de espín 1, la función de onda tiene 10 componentes.

A partir de la relación (4.45), se puede deducir una serie de propiedades útiles de las matrices β^μ . Haciendo $\mu = \nu = \sigma$ en (4.45), se obtiene:

$$(\beta^\mu)^3 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad (4.46)$$

donde se entiende que no se suma sobre el índice μ . Ahora bien, el conjunto de matrices que complementan las matrices β^μ se define como:

$$\bar{\eta}^\mu = 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu}. \quad (4.47)$$

A partir de (4.46), se satisface la siguiente propiedad:

$$(\bar{\eta}^\mu)^2 = \underbrace{4(\beta^\mu)^4}_{4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2} - 4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2 + (\eta^{\mu\mu})^2 = (\eta^{\mu\mu})^2 = 1. \quad (4.48)$$

La relación de anticonmutación entre las matrices β^μ y $\bar{\eta}^\mu$ se puede derivar al multiplicar la expresión (4.47) por la matriz β^σ por la derecha. De esta manera se obtiene:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma - \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma, \quad (4.49)$$

Ahora procedamos a realizar $\mu = \nu$ en la relación (4.45):

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma + \beta^\sigma (\beta^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu} \beta^\mu, \quad (4.50)$$

así que:

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma = \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma (\beta^\mu)^2.$$

Substituyendo la anterior relación en (4.49) se obtiene:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma = 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu, \quad (4.51)$$

Entonces:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu = \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} = 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu, \quad (4.52)$$

a partir de lo cual se deduce:

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma &\neq \mu & \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} &= 0, \\ \text{si } \sigma &= \mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \end{aligned} \quad (4.53)$$

La relación de conmutación entre las matrices β^μ y $\bar{\eta}^\mu$ se obtiene multiplicando la expresión (4.47) por β^μ tanto por la izquierda como por la derecha, de manera que resulta en el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \beta^\mu \bar{\eta}^\mu &= \underbrace{2(\beta^\mu)^3}_{\eta^{\mu\mu} \beta^\mu} - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \\ \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= 2(\beta^\mu)^3 - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la identidad (4.46). Restando las ecuaciones, obtenemos que:

$$\beta^\mu \bar{\eta}^\mu - \bar{\eta}^\mu \beta^\mu = \left[\beta^\mu, \bar{\eta}^\mu \right] = 0. \quad (4.54)$$

La relación de conmutación entre las matrices $\bar{\eta}^\mu$ se puede determinar por multiplicación directa y utilizando la expresión (4.51), es decir:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu &= \bar{\eta}^\mu \left(2(\beta^\nu)^2 - \eta^{\nu\nu} \right) = 2(\bar{\eta}^\mu \beta^\nu) \beta^\nu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu = 2(2\eta^{\nu\mu} \beta^\mu - \beta^\nu \bar{\eta}^\mu) \beta^\nu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu \\ &= 4\eta^{\mu\nu} \left[\beta^\mu, \beta^\nu \right] + \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\mu, \end{aligned}$$

de manera que

$$\left[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 4\eta^{\mu\nu} \left[\beta^\mu, \beta^\nu \right]. \quad (4.55)$$

De la relación anterior se puede deducir fácilmente que en el caso $\mu \neq \nu$,

$$\left[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 0. \quad (4.56)$$

Otra relación útil que se puede derivar resulta de (4.45) cuando $\sigma = \mu$,

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu + \eta^{\mu\nu} \beta^\mu,$$

por tanto:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu. \quad (4.57)$$

4.4. Ecuación de DKP conjugada

Si se escoge una representación para las matrices β tal que

$$(\beta^\mu)^\dagger = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad (4.58)$$

se garantiza que

$$(\bar{\eta}^\mu)^\dagger = \bar{\eta}^\mu, \quad (4.59)$$

es decir, garantizan que las matrices $\bar{\eta}^\mu$ resulten ser hermíticas. Ahora, se pretende buscar una matriz C que actúe sobre las matrices β y que suministre su conjugado hermitico, tal que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} C\beta^\mu C &= (\beta^\mu)^\dagger, \\ C^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Utilizando la ecuación (4.58), se obtiene que:

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \quad (4.61)$$

Multiplicando la expresión (4.61) por la matriz C tanto por la derecha como la izquierda, obtenemos:

$$C\beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu C, \quad \beta^\mu C = \eta^{\mu\mu} C\beta^\mu,$$

de manera que al sustraerlas, resulta en:

$$[C, \beta^\mu] = \eta^{\mu\mu} [\beta^\mu, C] = -\eta^{\mu\mu} [C, \beta^\mu],$$

lo que es equivalente a:

$$(1 + \eta^{\mu\mu}) [C, \beta^\mu] = 0. \quad (4.62)$$

De la relación anterior podemos establecer dos casos: Si $\mu = 0$, la igualdad se cumple si $[C, \beta^0] = 0$. Para el caso en que $\mu = i$, la cantidad $[C, \beta^i]$ se mantiene indeterminada. Por tanto, con el fin de garantizar que la relación (4.62) se cumpla para todo μ , es necesario que:

$$[C, \beta^\mu] = 0. \quad (4.63)$$

Sin embargo, siendo que $C^2 = 1$, se deduce que:

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \beta^\mu \bar{\eta}^\mu,$$

por lo tanto

$$C\beta^\mu = \beta^\mu \bar{\eta}^\mu C,$$

igualmente

$$\beta^\mu C = C\beta^\mu \bar{\eta}^\mu,$$

lo que al restar los dos últimos resultados da:

$$[C, \beta^\mu] = [\beta^\mu \bar{\eta}^\mu, C] = \beta^\mu [\bar{\eta}^\mu, C] + [\beta^\mu, C] \bar{\eta}^\mu.$$

Ahora, dado que: $[C, \beta^\mu] = 0$, la anterior relación implica que:

$$0 = \beta^\mu [\bar{\eta}^\mu, C]. \quad (4.64)$$

Exigiendo que la identidad se cumpla para todo β^μ , debe cumplir que:

$$[C, \bar{\eta}^\mu] = 0. \quad (4.65)$$

Ahora, siendo que $[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu] = 0$, se puede escoger C tal que:

$$C \equiv A_\mu \bar{\eta}^\mu,$$

sin embargo, dado que el cuadrado de esta matriz deberá ser la identidad, podremos restringir la forma de esta matriz:

$$C^2 = A_\mu \bar{\eta}^\mu A_\nu \bar{\eta}^\nu = \sum_a A_a A_a \bar{\eta}^a \bar{\eta}^a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b = \sum_a A_a A_a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b.$$

La forma mas simple de satisfacer esta restricción es si todos los coeficientes A_a son nulos, con excepción de uno en particular, que podemos denotar por d . No obstante, la condición $C^2 = 1$ nos hace seleccionar el valor $d = 1$. Con lo cual se establece que $C \equiv \bar{\eta}^\mu$, que puede garantizar a su vez que $C^2 = (\bar{\eta}^\mu)^2 = 1$. Utilizando este resultado en la expresión (4.61) junto con (4.54), se determina que:

$$\eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \bar{\eta}^\mu \beta^\mu \bar{\eta}^\mu = \beta^\mu (\bar{\eta}^\mu)^2 = \beta^\mu,$$

es decir:

$$(1 - \eta^{\mu\mu}) \beta^\mu = 0. \quad (4.66)$$

Si la expresión anterior se cumple para todo β^μ , se debe garantizar que $\eta^{\mu\mu} = 1$, lo que implica que la única solución posible de esta ecuación es cuando $\mu = 0$. Así, se concluye que $C = \bar{\eta}^0$, y de (4.60) se establece que

$$(\beta^\mu)^\dagger = \bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \quad (4.67)$$

Por tanto, la matriz responsable de la conjugación hermítica de las matrices β^μ es la matriz $\bar{\eta}^0$, con lo cual se puede concluir que β^0 es hermítica en tanto que β^i son antihermíticas.

Si la operación de adjunto hermitiano es aplicada a la ecuación de DKP (4.44), se obtiene:

$$\psi^\dagger(x) \left(-i(\beta^\mu)^\dagger \partial_\mu - m \right) = -\psi^\dagger(x) \left(i\bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m \right) = 0.$$

Al multiplicar la expresión anterior por $\bar{\eta}^0$ por la derecha, obtenemos que

$$\psi^\dagger(x) \left(i\bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m\bar{\eta}^0 \right) = \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0 \left(i\beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0.$$

A su vez, si se define el campo conjugado a $\psi(x)$ como

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0, \quad (4.68)$$

se deduce entonces la ecuación de DKP conjugada:

$$\bar{\psi}(x) \left(i\beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0. \quad (4.69)$$

Ahora, se procederá a derivar la correspondiente ecuación de continuidad asociada a la teoría. Multiplicando la ecuación de DKP por $\bar{\psi}(x)$ por la izquierda en tanto que a la ecuación conjugada se la multiplica por $\psi(x)$ por la derecha, se deduce que:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi = 0 \quad , \quad i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0,$$

que al sumar resulta en:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) + i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi = i\partial_\mu(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) = 0. \quad (4.70)$$

Por tanto, se define la densidad de corriente como:

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi, \quad (4.71)$$

con lo cual la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.72)$$

El factor $\frac{1}{2}$ que resulta en la definición de la corriente (4.71) se introduce con el fin de obtener una densidad de corriente similar a aquella que se utiliza en la ecuación de Klein-Gordon-Fock y su límite no relativista [13]. No obstante, la componente temporal de la corriente, es decir J^0 , no es definida positiva, lo que implica que esta cantidad no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad. A pesar de esto, aún es posible interpretar a J^0 como una densidad de carga. Esta carga no debe ser considerada necesariamente como una carga eléctrica, sino como una carga generalizada que resulta de la simetría asociada al sistema.

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

Una teoría relativista adecuada deberá ser covariante de Lorentz, es decir, su formulación debe permitir una transformación que conecte dos sistemas de referencia inercial [14]. Dados dos sistemas de referencias inercial asociados a los observadores X y X' , estos

describirán el mismo evento físico en términos de sus respectivas coordenadas. Las coordenadas que conectan dichas observaciones es mediada por la transformación de Lorentz, la cual es definida como:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (4.73)$$

la cual garantiza que el operador ∂_{μ} se transforme como un vector covariante:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}, \quad (4.74)$$

cumpliendo la condición:

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (4.75)$$

Ahora, si se exige que la ecuación de DKP permanece invariante por transformación (4.73), en el sistema de referencia asociado al observador X' se debe cumplir que:

$$\left(i\beta'^{\mu} \partial'_{\mu} - m \right) \psi'(x') = 0, \quad (4.76)$$

donde $\psi'(x')$ es la función de onda transformada de Lorentz. Ahora, se asumirá que bajo una transformación de Lorentz el campo $\psi(x)$ se transforma en la forma:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = U(\Lambda) \psi(x), \quad (4.77)$$

donde $U(\Lambda)$ es una matriz. Lo anterior implica la búsqueda de una representación de la transformación de Lorentz en el espacio de Hilbert. Con ello en mente, se debe exigir que las matrices β^{μ} también satisfagan el álgebra de DKP, es decir:

$$\beta'^{\mu} \beta'^{\nu} \beta'^{\sigma} + \beta'^{\sigma} \beta'^{\nu} \beta'^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \beta'^{\sigma} + \eta^{\sigma\nu} \beta'^{\mu}. \quad (4.78)$$

Con el fin de conectar los dos sistemas de referencia inercial, se deberá encontrar una representación explícita de β'^{μ} y $U(\Lambda)$, con la condición de que la transformación $U^{-1}(\Lambda)$ exista, ya que la misma permite la conexión con el sistema de referencia inicial. Utilizando los resultados (4.74) y (4.77) en la expresión (4.76), se obtiene que:

$$\left(i\beta'^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} - m \right) U(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Y si se multiplica la expresión anterior por $U^{-1}(\Lambda)$ por el lado izquierdo, el resultado es:

$$\left(iU^{-1}(\Lambda) \beta'^{\mu} U(\Lambda) \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (4.79)$$

Ahora, si la ecuación de DKP es covariante, es decir, que la expresión anterior tenga la forma

$$\left(i\beta^{\nu} \partial_{\nu} - m \right) \psi(x) = 0,$$

se deberá cumplir que

$$U^{-1}(\Lambda) \beta'^{\mu} U(\Lambda) \Lambda_{\mu}^{\nu} = \beta^{\nu}.$$

Utilizando la identidad (4.75), se puede transformar la ecuación anterior en lo siguiente:

$$U^{-1}(\Lambda) \beta'^{\mu} U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu}, \quad (4.80)$$

lo que indica cómo deben transformarse las matrices β^{μ} .

Una manera de encontrar una representación de $U(\Lambda)$ es considerar las transformaciones de Lorentz infinitesimales propias, para las cuales Λ^{μ}_{ν} deberá ser de la forma:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}_{\nu} + O(\Delta\omega^2). \quad (4.81)$$

Siendo que la distancia entre dos puntos espacio temporales infinitesimalmente próximos es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$d^2s = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (4.82)$$

se puede demostrar que la cantidad $\Delta\omega_{\mu\nu}$,

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \quad (4.83)$$

es antisimétrica. Expandiendo la matriz $U(\Lambda)$ en potencias de $\Delta\omega_{\mu\nu}$ y manteniendo potencias hasta de primer orden se determina que:

$$U(\Lambda) \simeq 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

donde α y $S^{\mu\nu}$ son cantidades a ser determinadas. Substituyendo (4.84) en (4.80) hasta el primer orden en $\Delta\omega_{\mu\nu}$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu} = \beta'^{\mu} + i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta} \left[\beta'^{\mu}, S^{\alpha\beta} \right].$$

Igualando los coeficientes relacionados a los polinomios en $\Delta\omega_{\mu\nu}$ se obtiene que

$$\beta^{\mu} = \beta'^{\mu}, \quad (4.85)$$

en tanto que

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu} = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[\beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right]. \quad (4.86)$$

Esta última representación se utilizará para encontrar la forma explícita del generador infinitesimal $S^{\alpha\beta}$.

Ahora bien, en la expresión

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu} = \Delta\omega_{\alpha\nu} \eta^{\mu\alpha} \beta^{\nu},$$

siendo que $\Delta\omega_{\mu\nu}$ es antisimétrico, es necesario antisimetrizar el producto $\eta^{\mu\alpha} \beta^{\nu}$ en el par de índices (α, ν) , de manera que la relación anterior se exprese como:

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu} = \Delta\omega_{\sigma\rho} \eta^{\mu\sigma} \beta^{\rho} = \frac{1}{2} \Delta\omega_{\sigma\rho} \left(\eta^{\mu\sigma} \beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho} \beta^{\sigma} \right), \quad (4.87)$$

de modo que la expresión (4.86) se pueda expresar en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho}\left(\eta^{\mu\sigma}\beta^\rho - \eta^{\mu\rho}\beta^\sigma\right) = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho}\left[\beta^\mu, S^{\sigma\rho}\right]. \quad (4.88)$$

Ahora, a partir del álgebra de las matrices DKP, es posible mostrar que:

$$\eta^{\mu\sigma}\beta^\rho - \eta^{\mu\rho}\beta^\sigma = \left[\beta^\mu, \left[\beta^\sigma, \beta^\rho\right]\right], \quad (4.89)$$

de manera que

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho}\left[\beta^\mu, \left[\beta^\sigma, \beta^\rho\right]\right] = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho}\left[\beta^\mu, S^{\sigma\rho}\right]. \quad (4.90)$$

Así, la relación anterior permite inferir los valores de las cantidades α y $S^{\mu\nu}$, a saber:

$$\alpha = -\frac{i}{2}, \quad S^{\sigma\rho} = \left[\beta^\sigma, \beta^\rho\right]. \quad (4.91)$$

La transformación de Lorentz finita es completamente determinada para ser:

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\sigma\rho}\right), \quad (4.92)$$

lo que establece finalmente la manera como se transforman los campos $\psi(x)$ bajo Lorentz.

Ahora, la transformación de Lorentz correspondiente a el campo conjugado es dada por:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\bar{\eta}^0 = \bar{\psi}(x)\left(\bar{\eta}^0 U^{\dagger}\bar{\eta}^0\right), \quad (4.93)$$

donde

$$U^{\dagger}(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\dagger\sigma\rho}\right). \quad (4.94)$$

Sin embargo,

$$S^{\dagger\rho\sigma} = \left[\beta^\rho, \beta^\sigma\right]^{\dagger} = \left(\beta^\rho\beta^\sigma - \beta^\sigma\beta^\rho\right)^{\dagger} = \beta^{\dagger\sigma}\beta^{\dagger\rho} - \beta^{\dagger\rho}\beta^{\dagger\sigma}.$$

De la expresión (4.67) se puede determinar que

$$S^{\dagger\rho\sigma} = -\bar{\eta}^0 S^{\rho\sigma} \bar{\eta}^0. \quad (4.95)$$

Al analizar la aproximación infinitesimal de la transformación asociada a $U(\Lambda)$, se obtiene que

$$\bar{\eta}^0 U^{\dagger} \bar{\eta}^0 \simeq -\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\rho\sigma},$$

que en el límite finito se deduce como

$$\bar{\eta}^0 U^{\dagger}(\Lambda) \bar{\eta}^0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\rho\sigma}\right) = U^{-1}(\Lambda), \quad (4.96)$$

y por lo tanto

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) U^{-1}(\Lambda). \quad (4.97)$$

Se puede afirmar entonces que la covarianza de la ecuación de DKP ha sido probada y que es independiente de la representación de las matrices β^μ .

A partir de la relación (4.80) es posible demostrar que

$$U^{-1} S^{\sigma\rho} U = \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu S^{\mu\nu}, \quad (4.98)$$

Lo que indica que $S^{\sigma\rho}$ es un tensor de segundo orden en el álgebra de las matrices β^μ . En general, todo tensor en esta álgebra puede ser escrito como una combinación lineal del producto de β y δ [15]. De la relación (4.89) se establece que

$$\eta^{\mu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\mu\rho} \beta^\sigma = [\beta^\mu, S^{\sigma\rho}], \quad (4.99)$$

de manera que

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\rho}] = \eta^{\mu\sigma} S^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho} S^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\rho} S^{\sigma\nu} - \eta^{\nu\sigma} S^{\rho\mu}. \quad (4.100)$$

Al introducir las matrices σ_k de la siguiente manera:

$$\sigma_k = i\epsilon_{klm} S_{lm}, \quad (4.101)$$

y teniendo en cuenta la expresión (4.100), se determina que

$$[\sigma_k, \sigma_l] = -4S_{kl}.$$

Ahora, dado que

$$i\epsilon_{kln} \sigma_n = -(S_{kl} - S_{lk}) = -2S_{kl},$$

y de manera que

$$-S_{kl} = \frac{i}{2} \epsilon_{kln} \sigma_n,$$

se puede concluir entonces que

$$\left[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2} \right] = i\epsilon_{kln} \frac{\sigma_n}{2}. \quad (4.102)$$

La expresión anterior se interpreta como las relaciones de conmutación para las matrices de momento angular, lo que implica que σ_k tendrá las propiedades de momento angular y podrá tomar los autovalores $(f, f-1, f-2, \dots, -f+1, -f)$, donde f es un número entero o semientero. La ecuación característica para las matrices σ_k es:

$$(\sigma_k - f)(\sigma_k - f + 1) \cdots (\sigma_k + f - 1)(\sigma_k + f) = 0. \quad (4.103)$$

En general, la representación de las matrices de momento angular que satisfacen (4.103) puede descomponerse en representaciones irreducibles $D_{|f|}, D_{|f-1|}, \dots$ del grupo de rotaciones infinitesimales. Estas representaciones irreducibles corresponden a los valores

$|f|, |f-1|, \dots$ de momento angular. Ya que en una representación irreducible D_l la función de onda tiene $(2l+1)$ componentes independientes correspondientes a diferentes direcciones de momento angular, se muestra que el campo de DKP $\psi(x)$ describe el estado de una partícula con espín $f=1$. Así, se deduce que la función de onda en (4.31) describe los estados de partículas espín $|f|, |f-1|, \dots$. Este momento angular es una propiedad intrínseca de las partículas, ya que no desaparece inclusive cuando estas se encuentran en un estado de reposo.

4.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP

El conjunto de matrices β^μ junto con el operador unidad generan un anillo con el álgebra de espín entero [16]. El álgebra expresada por (4.45) produce, a su vez, un conjunto de 126 matrices independientes. Esta álgebra, de acuerdo con el teorema de Frobenius-Schur, debe poseer tres representaciones independientes irreducibles [7]:

$$126 = 1^2 + 5^2 + 10^2. \quad (4.104)$$

Se tendrá entonces una representación de primera orden, que es trivial y no posee significado físico; una representación de quinto orden que describe partículas de espín 0, conocida como el sector escalar de la teoría DKP; y finalmente, una representación de décimo orden asociado con partículas de espín 1 que se conoce como el sector vectorial.

El campo de DKP, por tanto, poseerá un exceso de componentes y la teoría deberá ser condicionada por una ecuación que permita eliminar las que resulten redundantes. Dicha condición se deriva de la ecuación de DKP multiplicando (4.44) por $(1 - (\beta^0)^2)$, obteniendo:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - (\beta^0)^2\right) \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m\right) \psi \\ &= \left[i \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^0 \partial_0 + i \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^k \partial_k - m \left(1 - (\beta^0)^2\right) \right] \psi \end{aligned} \quad (4.105)$$

A partir de (4.46) se deduce que

$$(\beta^0)^3 = \eta^{00} \beta^0 = \beta^0,$$

por lo tanto,

$$0 = \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^0.$$

Ahora, de (4.50) se obtiene que

$$(\beta^0)^2 \beta^k + \beta^k (\beta^0)^2 = \eta^{00} \beta^k + \eta^{k0} \beta^0 = \beta^k,$$

entonces

$$\beta^k (\beta^0)^2 = \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^k.$$

De manera que la ecuación (4.105) se reduce a:

$$i\beta^k (\beta^0)^2 \partial_k \psi = m \left(1 - (\beta^0)^2\right) \psi. \quad (4.106)$$

Como se podrá observar posteriormente, la relación (4.106) permitirá determinar que tres (cuatro) componentes del campo $\psi(x)$ se expresan en términos de las otras dos (seis) componentes y sus derivadas en el sector escalar (vectorial), de modo que las componentes superfluas desaparecen y se mantienen solamente las componentes físicas de la teoría de DKP. Se mostrará, además, que las ecuaciones de KGF y de Proca son obtenidas seleccionando los sectores de espín 0 y 1, respectivamente, de la teoría DKP para el bosón libre.

4.7. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF

En 1953, Fujiwara [17] desarrolló dos conjuntos distintos de operadores que tienen la interesante propiedad de seleccionar el sector de espín 0 o 1 de la teoría de DKP. La propuesta de Fujiwara se basó en la propuesta de Peaslee [18]. Sin embargo, el abordaje realizado por Umezawa [11] resultó ser mucho más didáctico y presenta de manera explícita estos operadores. Para seleccionar la función de onda de espín 0, es necesario introducir los operadores P y P^μ definidos de la siguiente forma:

$$P \equiv -(\beta^0)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2, \quad (4.107)$$

el cual cumple con la condición

$$P^2 = 1. \quad (4.108)$$

Además, se introduce el operador:

$$P^\mu \equiv P\beta^\mu, \quad (4.109)$$

al cual se le puede deducir la siguiente propiedad:

$$P^\mu \beta^\nu = P\beta^\mu \beta^\nu.$$

Ahora, siendo que $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu$, se determina:

$$\left(\beta^\mu \beta^\nu - \eta^{\mu\nu}\right) \beta^\mu = 0. \quad (4.110)$$

Dado que la identidad anterior se deberá cumplir para todo β^μ , se deduce que

$$\beta^\mu \beta^\nu = \eta^{\mu\nu}, \quad (4.111)$$

de manera que

$$P^\mu \beta^\nu = P \beta^\mu \beta^\nu = P \eta^{\mu\nu}. \quad (4.112)$$

Los resultados anteriores nos llevan a la siguiente identidad:

$$PS^{\sigma\rho} = P \left[\beta^\sigma, \beta^\rho \right] = P \left(\beta^\sigma \beta^\rho - \beta^\rho \beta^\sigma \right) = 0 = S^{\sigma\rho} P. \quad (4.113)$$

En forma similar, se demuestra que:

$$P^\mu S^{\sigma\rho} = \eta^{\mu\sigma} (P \beta^\rho) - \eta^{\mu\rho} (P \beta^\sigma) = \eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma. \quad (4.114)$$

Bajo una transformación infinitesimal de Lorentz arbitraria, se deduce la siguiente expresión:

$$P\psi'(x') = PU(\Lambda)\psi(x) \simeq P\psi(x), \quad (4.115)$$

lo que permite determinar que $P\psi(x)$ se transforma como un escalar, de manera que el operador P selecciona el sector escalar de la teoría de DKP. En forma análoga, se puede observar que si se utiliza la relación (4.114), se obtiene:

$$P^\mu \psi'(x') = \Lambda^\mu_\rho \left(P^\rho \psi(x) \right), \quad (4.116)$$

lo que indica que $P^\mu \psi(x)$ se transforma como un vector. Si se aplica el operador P a la ecuación de DKP, entonces:

$$0 = P \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = i\partial_\mu \left(P^\mu \psi(x) \right) - m \left(P\psi(x) \right). \quad (4.117)$$

Ahora, si aplicamos el operador P^μ y se utiliza la expresión (4.112), se determina que

$$P^\mu \psi(x) = \frac{i}{m} \partial^\mu \left(P\psi(x) \right), \quad (4.118)$$

que, al substituir en la relación (4.117), resulta en

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \left(P\psi(x) \right) = 0. \quad (4.119)$$

Por lo tanto, los campos $P\psi(x)$ son identificados con campos escalares de masa m que obedecen la ecuación de KGF para un bosón libre. Lo anterior implica que se trata de una ecuación de onda para espín 0. De este modo, cuando se aplica el operador de proyección P a la ecuación de DKP, se selecciona inmediatamente el sector de espín 0 de la teoría, suministrado solamente la componente física del campo $\psi(x)$ que satisface la ecuación de KGF libre.

Si se denota la función de onda multicomponente $\psi(x)$ como

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^0(x) \\ \varphi^1(x) \\ \varphi^2(x) \\ \varphi^3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\nu(x) \end{pmatrix}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (4.120)$$

se puede encontrar una representación de las matrices β^μ de manera que los operadores P y P^μ seleccionen las componentes del campo DKP que podamos asociar con el campo de KGF. La naturaleza de los operadores P y P^μ debe ser tal que

$$P\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

Lo anterior implica que dichos operadores deberán ser de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.122)$$

De la expresión (4.118), se puede determinar que:

$$P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \frac{i}{m} \partial^\mu \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix},$$

lo que implica que:

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x). \quad (4.123)$$

Definiendo el siguiente campo:

$$\varphi(x) \equiv \sqrt{m} \bar{\varphi}(x), \quad (4.124)$$

se determina que

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \partial^\mu \bar{\varphi}(x), \quad (4.125)$$

de manera que el campo multicomponente de DKP se puede expresar de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \bar{\varphi}(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}} \partial^\mu \bar{\varphi}(x) \end{pmatrix}, \quad (4.126)$$

la cual se interpretará como la forma física de la función de onda de DKP del sector de espín 0. En este contexto, se tiene que:

$$P\psi(x) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial^\mu \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (4.127)$$

lo cual satisface la condición:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \begin{pmatrix} P\psi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \bar{\varphi}(x) = 0. \quad (4.128)$$

4.8. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

De forma similar, se puede seleccionar la función de onda para campos de espín 1. Para ello, se introduce el siguiente conjunto de operadores [11]:

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0}), \\ R^{\mu\nu} &= R^\mu \beta^\nu, \end{aligned} \quad (4.129)$$

los cuales satisfacen las propiedades:

$$R^{\mu\nu} = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0}) \beta^\nu = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu - \eta^{\mu 0} \beta^\nu).$$

Del álgebra de las matrices β , se establece que:

$$\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu - \eta^{\mu 0} \beta^\nu = \eta^{\nu 0} \beta^\mu - \beta^\nu \beta^0 \beta^\mu = -(\beta^\nu \beta^0 - \eta^{\nu 0}) \beta^\mu,$$

de manera que

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}. \quad (4.130)$$

Ahora, del álgebra de las matrices β , se obtiene que:

$$\beta^0 \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^0 = \eta^{0\nu} \beta^\theta + \eta^{\theta\nu} \beta^0,$$

de manera que al considerar que $\beta^\nu \beta^\theta = \eta^{\nu\theta}$, se deduce que:

$$R^{\mu\nu} \beta^\theta = R^\mu \eta^{\theta\nu} - R^\nu \eta^{\mu\theta}. \quad (4.131)$$

Ahora, asociado al operador R^μ , se determina que:

$$R^\mu S^{\sigma\rho} = \eta^{\mu\sigma} R^\rho - \eta^{\mu\rho} R^\sigma. \quad (4.132)$$

Igualmente, se muestra:

$$S^{\sigma\rho} R^\mu = \eta^{\sigma\rho} R^\mu - \eta^{\rho\sigma} R^\mu = 0. \quad (4.133)$$

Un análisis similar permite establecer que:

$$R^{\mu\nu} S^{\sigma\rho} = \eta^{\sigma\nu} R^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} R^{\nu\rho} - \eta^{\rho\nu} R^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}. \quad (4.134)$$

Las identidades anteriores garantizan que, bajo una transformación infinitesimal, se cumple que:

$$R^\mu \psi'(\chi') = \left(R^\mu \psi(\chi) \right) + \delta\omega^\mu_\rho \left(R^\rho \psi(\chi) \right), \quad (4.135)$$

lo que indica que el operador R^μ selecciona las componentes del campo DKP $\psi(\chi)$ que se transforman como las componentes de un cuadrivector.

Ahora, al considerar el operador $R^{\mu\nu}$, se determina que:

$$R^{\mu\nu} \psi'(\chi') = R^{\mu\nu} \psi(\chi) + \delta\omega^\mu_\sigma \left(R^{\sigma\nu} \psi(\chi) \right) + \delta\omega^\nu_\rho \left(R^{\mu\rho} \psi(\chi) \right). \quad (4.136)$$

Si consideramos una transformación de Lorentz infinitesimal de un tensor de segundo orden, su comportamiento sería:

$$R'^{\mu\nu} \simeq R^{\mu\nu} + \delta\omega^\mu_\alpha R^{\alpha\nu} + \delta\omega^\nu_\alpha R^{\mu\alpha}.$$

Este resultado permite establecer, a partir de la relación (4.136), que el operador $R^{\mu\nu}$ selecciona aquellas componentes del campo de DKP $\psi(\chi)$ que se transforman como un tensor de segundo orden.

Si se aplica el operador R^μ a la ecuación de DPK, se obtiene:

$$R^{\mu\nu} \partial_\nu \psi(\chi) = -im R^\mu \psi(\chi). \quad (4.137)$$

Sin embargo, si el operador $R^{\mu\nu}$ es aplicado a la ecuación de DKP, resulta en

$$\partial^\nu \left(R^\mu \psi(\chi) \right) - \partial^\mu \left(R^\nu \psi(\chi) \right) = -im R^{\mu\nu} \psi(\chi). \quad (4.138)$$

Teniendo en cuenta que $R^\mu \psi(\chi)$ se transforma como un vector, podemos definir el siguiente campo tensorial de segundo orden:

$$V^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu \left(R^\mu \psi(\chi) \right) - \partial^\mu \left(R^\nu \psi(\chi) \right), \quad (4.139)$$

el cual satisface la propiedad de ser antisimétrico,

$$V^{\mu\nu} = -V^{\nu\mu}. \quad (4.140)$$

De esta manera, la ecuación (4.138) se expresa como:

$$R^{\mu\nu} \psi(\chi) = -\frac{i}{m} V^{\mu\nu}, \quad (4.141)$$

con lo cual, la relación (4.137) se escribe:

$$\partial_\nu \left(R^{\mu\nu} \psi(\chi) \right) + im R^\mu \psi(\chi) = -\frac{i}{m} \partial_\nu V^{\mu\nu} + im \left(R^\mu \psi \right) = 0,$$

es decir,

$$\partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \left(R^\mu \psi \right) = 0, \quad (4.142)$$

que se interpreta como la ecuación de Proca para el campo vectorial $R^\mu \psi(x)$ que describe una partícula de espín 1. Si se aplica el operador ∂_μ a la ecuación (4.142), se deriva una condición subsidiaria para el campo $R^\mu \psi(x)$. De la antisimetría del tensor $V^{\nu\mu}$, resulta que:

$$\partial_\mu \partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \partial_\mu (R^\mu \psi) = m^2 \partial_\mu (R^\mu \psi) = 0,$$

por tanto

$$\partial_\mu (R^\mu \psi) = 0. \quad (4.143)$$

Ahora, si la condición anterior es utilizada en (4.142), se obtiene que

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) (R^\mu \psi(x)) = 0. \quad (4.144)$$

Como se puede ver, las ecuaciones (4.143) y (4.144) son equivalentes a las ecuaciones de Proca. Por su parte, la ecuación (4.144) indica que son necesarias 4 coordenadas para describir la partícula de espín 1; sin embargo, la condición (4.143) elimina una de esas componentes, estableciendo que son necesarios únicamente 3 grados de libertad.

Al denotar la función de onda multicomponente $\psi(x)$ para el caso en consideración como se deja a continuación:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \\ \phi^4(x) \\ \phi^5(x) \\ \phi^6(x) \\ \phi^7(x) \\ \phi^8(x) \\ \phi^9(x) \end{pmatrix}, \quad (4.145)$$

se puede encontrar una representación de las matrices β^μ de manera que el operador R^μ seleccione las componentes físicas del campo DKP para el sector de espín 1, las cuales son identificadas como $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$. Bajo esta condición se puede esperar que el operador R^μ realice la siguiente acción:

$$R^\mu \psi(x) = \begin{pmatrix} \phi^k(x) \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (4.146)$$

Sin embargo, se debe tener en cuenta que, de las componentes físicas indicadas anteriormente, la relación (4.143) los vincula, manteniendo solo tres de ellas como independientes. A partir de la expresión (4.144), se puede deducir que son estas cuatro componentes del campos $\psi(x)$ las que satisfacen la ecuación de KGF libre. Con el fin de garantizar

(4.146), los operadores R^μ deberán ser de la forma:

$$\begin{aligned}
 R^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 R^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.147}$$

4.9. Representación de las Matrices Beta

Según la propuesta de de Broglie, una manera de construir las matrices β que garantice que el álgebra (4.35) sea satisfecha es si dichas matrices pueden expresarse en la forma:

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} \left(\gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right), \tag{4.148}$$

donde

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = 2\eta^{\mu\nu} = \left\{ \gamma'^\mu, \gamma'^\nu \right\}, \quad \left[\gamma^\mu, \gamma'^\nu \right] = 0. \tag{4.149}$$

Es importante tener en cuenta que la representación dada por (4.148) es reducible. De esta manera, una teoría basada en la ecuación

$$\partial_\mu \left(\gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right) \psi(x) + \kappa \psi(x) = 0 \tag{4.150}$$

es equivalente a la teoría DKP. A partir de (4.150), se puede concluir que el campo $\psi(x)$ se transforma como el producto directo de dos campos de Dirac. Como ya se ha mostrado, el campo de DKP describe los campos de espín 0 y espín 1, además de

contener una representación trivial que está contenida en la representación particular para las matrices β^μ dada por (4.148).

En la sección anterior, se mostró que el campo de espín 0 posee cinco componentes ($P\psi, P^\mu\psi$), en tanto que el campo de espín 1 tiene diez componentes ($R^\mu\psi, V^{\mu\nu}$). De esta forma, las representaciones irreducibles para los campos de espín 0 y espín 1 contienen 15 componentes. Debido a (4.148), las representaciones reducibles para β^μ tienen 16 componentes, por tanto, es necesario encontrar una última componente a fin de descomponer en tres representaciones irreducibles: $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$.

Esta última componente será entonces una representación irreducible, lo cual implica que debe ser una cantidad escalar que satisfaga una ecuación diferencial de primer orden. Sin embargo, es imposible encontrar tal ecuación para una componente escalar que también cumpla la ecuación de segundo orden de GKF, a menos que dicho escalar sea cero. Por lo tanto, se concluye que la última componente es trivial, es decir, no tiene interés físico.

Debido a la irreducibilidad de las tres representaciones, el número de matrices linealmente independientes es dado por la expresión (4.104). Usando el álgebra de las matrices β^μ , se puede mostrar que toda matriz en dicha álgebra, así como su producto, puede expresarse como una combinación lineal de las siguientes 126 matrices [19]:

$$\begin{array}{lll}
 I & \bar{\eta}^\mu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \\
 \beta^\mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \beta^\beta \\
 \beta^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \\
 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \beta^\beta \\
 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta.
 \end{array} \quad (4.151)$$

En cualquier representación que se dé para las 126 matrices, solo 16 poseen traza no nula, es decir, las $\bar{\eta}^\mu$ y todos los productos entre ellas. Las trazas de las matrices β^μ y las matrices que contienen $\bar{\eta}^\mu$ son las siguientes [20]:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left(\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{2n+1}} \right) &= 0, \\
 \text{Tr} \left(\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \beta^{\mu_3} \beta^{\mu_4} \dots \beta^{\mu_{2n-2}} \beta^{\mu_{2n-1}} \beta^{\mu_{2n}} \right) &= \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \dots \delta^{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} \\
 &\quad + \delta^{\mu_2 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_5} \dots \delta^{\mu_{2n-2} \mu_{2n-1}} \delta^{\mu_1 \mu_{2n}}.
 \end{aligned} \quad (4.152)$$

Ahora, en relación con cada representación del campo de DKP, se cumple:

	$s = 1$	$s = 0$	trivial
$\text{Tr} (I)$	10	5	1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu)$	2	-1	-1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu)$	-2	1	1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha)$	-2	3	-1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta)$	2	-3	-1.

(4.153)

La traza de un número impar de matrices β^μ es siempre nula. Para el cálculo de diferentes observables, solo es necesario conocer las propiedades de las matrices β^μ , de manera que las mediciones asociadas a ellas no dependan de la representación específica de dichas matrices. Aunque existen varias representaciones posibles, a continuación se presentarán algunas específicas para las matrices beta en los tres casos mencionados. En el caso de la representación trivial, todas las matrices deben ser iguales a cero:

$$\beta^0 = \beta^1 = \beta^2 = \beta^3 = 0. \quad (4.154)$$

Para la representación correspondiente a los campos de espín 0, las matrices β^μ son 5×5 y tienen la forma:

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Ahora, para los campos de espín 1, las las matrices β^μ son 10×10 y una representación

posible es:

$$\begin{aligned}
 \beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.156}$$

4.10. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

Debido a la estrecha similitud entre la forma funcional de la ecuación de Dirac y la ecuación de DKP, se propone que la densidad Lagrangiana para el campo de DKP libre es

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^\mu (\partial_\mu \psi(x)) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}(x)) \beta^\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x), \tag{4.157}$$

a partir de la cual se calculan las correspondientes ecuaciones de campo asociadas a $(\psi, \bar{\psi})$, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0. \tag{4.158}$$

Calculando las derivadas correspondientes, se determina que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= -\frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu - m \bar{\psi}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{i}{2} \beta^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} &= -\frac{i}{2} \beta^\mu \psi,
 \end{aligned}$$

relaciones que, al ser substituidas en (4.158), se expresan como:

$$\bar{\psi}(x) \left(\partial_\mu \beta^\mu + m \right) = 0 \quad , \quad \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.159)$$

lo cual resulta en las ecuaciones de campo (4.44) y (4.69). Es posible observar que la densidad lagrangiana indicada en (4.157) posee una simetría global $U(1)$:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (4.160)$$

lo cual es reflejo de la presencia de la corriente conservada indicada por la ecuación (4.71)

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi.$$

Ahora, debido a que el Lagrangiano que describe la teoría de DKP es de primer, así como en el caso del campo de Dirac, es posible mostrar que las dos teorías comparten una propiedad en común. Con el fin de evidenciar lo anterior, se procede a calcular los momentos canónicos asociados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ de la siguiente manera:

$$\bar{\pi}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi(x))} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \quad , \quad \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi}(x))} = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi(x). \quad (4.161)$$

El hecho de que en la expresión anterior se muestre que los momentos canónicos $(\bar{\pi}, \pi)$ asociados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$, respectivamente, se relacionen a los mismos campos y no a las derivadas temporales de ellos sugiere que el Lagrangiano que describe los campos de DKP es singular. Esto significa que las coordenadas que definen el espacio de fase $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$ no son completamente independientes, y que, según las expresiones (4.161), constituyen un conjunto de vínculos [21]. Por lo tanto, se deberá emplear un método adecuado para analizar consistentemente la teoría. En nuestro caso, será considerado el método de Dirac para estudiar sistemas con vínculos [22]. Es así, que al sistema de ecuaciones (4.161) se le asociará el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\bar{\Gamma}(x) \equiv \bar{\pi}(x) - \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \approx 0 \quad , \quad \Gamma(x) \equiv \pi(x) + \frac{i}{2} \beta_0 \psi(x) \approx 0. \quad (4.162)$$

El número de vínculos que resulta de (4.162) dependerá del tipo de campo que se desea describir a partir de $(\psi, \bar{\psi})$. Siguiendo el procedimiento de Dirac, se definirá la densidad Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &\equiv \bar{\pi} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \pi - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^k \partial_k \psi + \frac{i}{2} \partial_k \bar{\psi} \beta^k \psi + m \bar{\psi} \psi, \end{aligned}$$

de manera que el Hamiltoniano canónico asociado a la teoría es

$$H_C = \int d^3x \mathcal{H}_C = \int d^3x \left[-\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^k \partial_k \psi + \frac{i}{2} \partial_k \bar{\psi} \beta^k \psi + m \bar{\psi} \psi \right]. \quad (4.163)$$

De igual manera, se define al Hamiltoniano primario adicionando al Hamiltoniano canónico los vínculos primarios con sus respectivos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} H_P &= H_C + \int d^3y \left[\bar{\alpha}(y) \Gamma(y) + \bar{\Gamma}(y) \alpha(y) \right] \\ &= \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^k (\partial_k^y \psi) + \frac{i}{2} (\partial_k^y \bar{\psi}) \beta^k \psi + m \bar{\psi} \psi + \bar{\alpha}(y) \Gamma(y) + \bar{\Gamma}(y) \alpha(y) \right], \end{aligned} \quad (4.164)$$

donde $(\bar{\alpha}, \alpha)$ representa a los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios $(\Gamma, \bar{\Gamma})$, respectivamente. Ahora, dado que el espacio de fase de la teoría es expandido por $(\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi})$, para dos variables dinámicas definidas en dicho espacio:

$$F(x) \equiv F[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)] \quad , \quad G(x) \equiv G[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)] \quad (4.165)$$

la definición funcional de los corchetes de Poisson a tiempos iguales es:

$$\begin{aligned} \left\{ F(x), G(y) \right\}_{x^0=y^0} &= \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \psi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \bar{\pi}_a(z)} + \frac{\delta F(x)}{\delta \bar{\psi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi_a(z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta F(x)}{\delta \bar{\pi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \psi_a(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \bar{\psi}_a(z)} \right]. \end{aligned} \quad (4.166)$$

A partir de la relación anterior, se puede mostrar que los únicos PB diferentes de cero son:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{\pi}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y). \quad (4.167)$$

Utilizando las relaciones (4.167), es posible mostrar que el conjunto de vínculos primarios (4.162) satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} = i(\beta_0)_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} = -i(\beta_0)_{ab}^T \delta^3(x-y). \quad (4.168)$$

El procedimiento de Dirac establece que los vínculos primarios deben preservarse en el tiempo, es decir, deben ser consistentes bajo la evolución temporal generada por el Hamiltoniano primario. Por lo tanto, se exige que $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ posean un PB débilmente igual a cero con el Hamiltoniano primario, lo cual asegura la consistencia del vínculo $\bar{\Gamma}(x)$ y establece que:

$$\dot{\bar{\Gamma}}(x) = \left\{ \bar{\Gamma}(x), H_P \right\} = \bar{\psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k^x \beta^k + m \right) + i \bar{\alpha}(x) \beta_0 \approx 0. \quad (4.169)$$

En forma similar, exigir que $\Gamma(x)$ se mantenga en el tiempo implica que

$$\dot{\Gamma}(x) = \left\{ \Gamma(x), H_P \right\} = \left(i \beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) + i \beta_0 \alpha(x) \approx 0. \quad (4.170)$$

No obstante, aunque las relaciones (4.169) y (4.170) establecen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios $(\Gamma, \bar{\Gamma})$, la singularidad

de la matriz β_0 establece que no todas las componentes de $(\alpha, \bar{\alpha})$ consiguen ser determinados. Para identificar qué multiplicadores de Lagrange son determinados y qué condiciones pueden surgir para aquellos que no se pueden fijar, se introducen los siguientes operadores:

$$P_1 \equiv \beta_0^2, \quad P_2 \equiv 1 - \beta_0^2. \quad (4.171)$$

A partir de la relación anterior, es posible deducir las siguientes propiedades para los operadores considerados:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 1, \\ P_1^2 &= P_1, \\ P_2^2 &= P_2, \\ P_1 P_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.172)$$

donde la relación (4.46) ha sido utilizada. Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones (4.172) indica que el sistema de operadores (P_1, P_2) define un par de proyectores. Reescribiendo las ecuaciones (4.46) en la siguiente forma

$$i\beta_0\alpha(x) = -\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0, \quad (4.173)$$

$$i\bar{\alpha}(x)\beta_0 = -\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right) \approx 0, \quad (4.174)$$

es posible establecer a partir de (4.173) que

$$\beta_0^2\alpha(x) = P_1\alpha(x) = i\beta_0\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0, \quad (4.175)$$

lo cual permitirá determinar algunas de las componentes del multiplicador de Lagrange $\alpha(x)$. Ahora, si aplicamos el operador $(1 - \beta_0^2)$, se deduce que:

$$i\left(1 - \beta_0^2\right)\beta_0\alpha(x) = 0 = -\left(1 - \beta_0^2\right)\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0,$$

lo cual constituye un conjunto de relaciones entre las coordenadas del espacio de fase. Esto implica que de la consistencia del vínculos primarios $\Gamma(x)$ se obtiene una agrupación de vínculos secundarios que se denotarán de la siguiente manera:

$$\Theta(x) \equiv \left(1 - \beta_0^2\right)\left(i\beta_k\overrightarrow{\partial}_x^k - m\right)\psi(x) \approx 0. \quad (4.176)$$

Un análisis similar con la ecuación (4.174) permite concluir que

$$\bar{\alpha}(x)\beta_0^2 = \bar{\alpha}(x)P_1 = i\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right)\beta_0 \approx 0, \quad (4.177)$$

garantizando que se pueden fijar algunos de las componentes del multiplicando de Lagrange $\bar{\alpha}(x)$. Ahora, si aplicamos a la relación (4.174) el operador $(1 - \beta_0^2)$ por la derecha, resulta que:

$$i\bar{\alpha}(x)\beta_0\left(1 - \beta_0^2\right) = 0 = -\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right)\left(1 - \beta_0^2\right) \approx 0,$$

de manera que un nuevo conjunto de vínculos secundarios resulta de la consistencia de $\bar{\Gamma}(x)$. A este nuevo conjunto se lo denotará como:

$$\bar{\Theta}(x) \equiv \bar{\Psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_x^k \beta_k + m \right) \left(1 - \beta_0^2 \right) \approx 0. \quad (4.178)$$

El número de multiplicadores de Lagrange que se consiguen determinar de las relaciones (4.175) y (4.177), al igual que el número de vínculos secundarios que resultan de la consistencia de $(\Gamma, \bar{\Gamma})$, dependerá de la dimensión de los operadores (P_1, P_2) , es decir, de la representación de los campos de DKP.

Debido a la existencia de vínculos secundarios, la consistencia de los mismos deberá ser considerada, es decir, se exigirá que:

$$\dot{\Theta}(x) \approx 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Theta}}(x) \approx 0. \quad (4.179)$$

Con el fin de calcular las relaciones anteriores, se utilizarán las siguientes identidades que resultan del cálculo de los PB entre los vínculos secundarios y los vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \left\{ \Theta_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta_0^2 \right) \left(i \beta_k \partial_x^k - m \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\Theta}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} &= \left[\left(i \overleftarrow{\partial}_y^k \beta_k + m \right) \left(1 - \beta_0^2 \right) \right]_{ab}^T \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (4.180)$$

donde todas las otras combinaciones posibles de PB entre dichos vínculos son cero. Así, puede mostrarse que la consistencia del vínculo secundario $\Theta(x)$ implica que:

$$\dot{\Theta}(x) = \left\{ \Theta(x), H_p \right\} = \left(1 - \beta_0^2 \right) \left(i \beta_k \partial_x^k - m \right) \alpha(x) \approx 0. \quad (4.181)$$

Igualmente, la consistencia sobre el vínculo $\bar{\Theta}(x)$ conlleva que:

$$\dot{\bar{\Theta}}(x) = \left\{ \bar{\Theta}(x), H_p \right\} = \bar{\alpha}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_x^k \beta_k + m \right) \left(1 - \beta_0^2 \right) \approx 0. \quad (4.182)$$

Al analizar (4.175) y (4.177), se observa que el proyector β_0^2 selecciona ciertas componentes de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$, mientras que las relaciones (4.181) y (4.182) implican que es el otro proyector $(1 - \beta_0^2)$ el que selecciona las componentes que aun hacían falta por determinar. Una manera de verificar la anteriores afirmaciones es a través de la representación de las matrices β^μ . Si primero consideramos el caso en el que el campo de DKP está asociado a los campos de espín 0, es posible obtener la siguiente representación de los proyectores al utilizar (4.155):

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.183)$$

de manera que, a partir de las expresiones (4.175) y (4.177), se determinan las componentes (1,2) asociadas a los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$, mientras que de

las ecuaciones (4.181) y (4.182) se establecen relaciones para las componentes (3,4,5). Ahora, si el campo DKP describe partículas de espín 1, las matrices β^μ podrán tener la representación (4.156), de manera que los proyectores en consideración tendrán la siguiente forma:

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.184)$$

con lo cual, a partir de (4.175) y (4.177), se calculan las componentes (2,3,4,8,9,10), en tanto que de (4.181) y (4.182) se deducen las componentes (1,5,6,7) de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x)$, $\bar{\alpha}(x)$.

Los resultados anteriores permiten asegurar que todas las componentes de los multiplicadores de Lagrange son determinados, lo que al mismo tiempo garantiza que el conjunto de vínculos $(\Gamma(x), \bar{\Gamma}(x), \Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ son de segunda clase. Estos vínculos primarios y secundarios serán agrupados y renombrados de la siguiente manera:

$$\theta_A(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \theta_4(x)) \equiv (\Gamma(x), \Theta(x), \bar{\Gamma}(x), \bar{\Theta}(x)), \quad (4.185)$$

de modo que podamos construir una matriz de vínculos de segunda clase con sus elementos definidos como:

$$G_{AB}(x, y) \equiv \{ \theta_A(x), \theta_B(y) \}. \quad (4.186)$$

A partir de los PB definidos por las relaciones (4.168) y (4.180), se puede mostrar que esta matriz tendrá la siguiente estructura:

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & C(x, y) \\ D(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.187)$$

donde

$$\begin{aligned} C(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} i\beta_0 & (i\partial_x^k \beta_k - m)(1 - \beta_0^2) \\ (1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k - m) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \\ D(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} -i\beta_0^T & [(1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k + m)]^T \\ [(i\partial_x^k \beta_k + m)(1 - \beta_0^2)]^T & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (4.188)$$

Con el fin de eliminar los vínculos de segunda clase de la teoría, se introducen los Corchetes de Dirac DB, los cuales son definidos para dos variables dinámicas, $A(x) \equiv A[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)]$ y $B(x) \equiv B[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)]$, de la siguiente forma:

$$\left\{ A_i(x), B_j(y) \right\}_D = \left\{ A_i(x), B_j(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_i(x), \theta_A(u) \right\} G_{AB}^{-1}(u, v) \left\{ \theta_B(v), B_j(y) \right\}, \quad (4.189)$$

donde $G_{AB}^{-1}(x, y)$ denota la inversa de la matriz de vínculos (4.187). Bajo la definición de los DB (4.189) el conjunto de vínculos, $(\Gamma(x), \bar{\Gamma}(x), \Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ se tornan en identidades fuertes, de manera que podemos determinar la siguiente igualdad a partir de los vínculos primarios:

$$\bar{\pi}(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0, \quad \pi(x) = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi(x), \quad (4.190)$$

es decir, los momentos canónicos $(\pi(x), \bar{\pi}(x))$ se tornan en variables dependientes en la teoría. Ahora, a partir de las identidades fuertes que resultan de los vínculos secundarios, se podrán extraer los verdaderos grados de libertad. Con el fin de calcular los correspondientes PD, se debe especificar la representación del campo de DKP que quiere estudiarse. En nuestro caso, se desea analizar la representación asociada a campos de espín 0, de manera que los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ están definidos por estar constituidos por cinco componentes. Por tanto, utilizando la representación matricial de las matrices β^μ dadas por (4.155), los vínculos $(\Theta_\alpha(x), \bar{\Theta}_\alpha(x))$ tendrán para $\alpha = 3, 4, 5$ las únicas componentes no triviales, ya que, como se mencionó anteriormente, la consistencia de los vínculos $(\Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ determina esas componentes de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$. Así, es posible mostrar que las matrices $C(x, y)$ y $D(x, y)$ tendrán la siguiente representación:

$$C(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & -i\partial_1^x & -i\partial_2^x & -i\partial_3^x \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \\ i\partial_1^x & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_2^x & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$D(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & i\partial_1^x & i\partial_2^x & i\partial_3^x \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ -i\partial_1^x & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_2^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.191)$$

La matriz inversa asociada a $G(x, y)$ se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\int d^3z G(x, z) G^{-1}(z, y) = \int d^3z G^{-1}(x, z) G(z, y) = I \delta^3(x - y), \quad (4.192)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión 16×16 . A partir de la relación (4.192) y de la forma funcional de la matriz $G(x, y)$ dada por (4.187), la matriz $G^{-1}(x, y)$ tendrá la siguiente estructura:

$$G^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & D^{-1}(x, y) \\ C^{-1}(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.193)$$

donde $C^{-1}(x, y)$ y $D^{-1}(x, y)$ son las matrices inversas correspondientes a $C(x, y)$ y $D(x, y)$, respectivamente, las cuales tienen los siguientes elementos:

$$D^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & \frac{1}{m}\partial_2^x & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$C^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.194)$$

Ahora, con el fin de calcular los DB correspondientes a los campos, se utilizarán los siguientes PB:

$$\begin{aligned}\left\{ \psi_i(x), \theta_{3i}(u) \right\} &= \delta_{il} \delta^3(x-u), \\ \left\{ \theta_{1i}(v), \bar{\psi}_j(y) \right\} &= -\delta_{ij} \delta^3(v-y),\end{aligned}\quad (4.195)$$

con lo cual es posible determinar que el DB correspondientes a los campos de DKP $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ es:

$$\left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}_D = G_{3i1j}^{-1}(x, y). \quad (4.196)$$

De las relaciones (4.193) y (4.194), se determina que esta submatriz tiene las siguientes componentes:

$$\left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}_D = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.197)$$

Todas las otras posibles combinaciones de DB entre los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ son nulos. A partir de (4.197), se deduce el siguiente DB:

$$\left\{ \psi_0(x), \bar{\psi}_1(y) \right\}_D = -i\delta^3(x-y). \quad (4.198)$$

Con el fin de comparar con el resultado conocido para el campo escalar complejo, se considerara la representación del campo $\psi(x)$ dada por la expresión (4.126), con la cual es posible determinar $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0$, donde la matriz $\bar{\eta}^0$ en la representación considerada para las matrices β^μ tiene la forma:

$$\bar{\eta}^0 = 2\beta_0^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.199)$$

De esta manera, los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ se expresan en componentes, como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi} \end{pmatrix}, \\ \bar{\psi} &= \left(\sqrt{m}\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi}^* \right),\end{aligned}\quad (4.200)$$

de manera que se puede determinar que $\psi_0(x) = \sqrt{m}\bar{\varphi}(x)$ y $\bar{\psi}_1 = -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^*(x)$. En consecuencia, el DB (4.198) se reescribe como:

$$\left\{ \bar{\varphi}(x), \partial_0\bar{\varphi}^*(x) \right\}_D = \delta^3(x-y), \quad (4.201)$$

resultado que es coherente con la teoría que describe el campo escalar complejo. Los DB asociados a los momentos canónicos $(\pi(x), \bar{\pi}(x))$ pueden derivarse a partir de las identidades (4.190). Debe realizarse un análisis equivalente si se espera que los campos de DKP describan partículas de espín 1. En este caso, se debe considerar la representación de las matrices β^μ dadas por (4.156), con la relevancia de que la matriz de vínculos de segunda clase $G(x, y)$ es de 32×32 .

4.11. Interacción con Campo Electromagnético

La interacción de un campo de DKP con el campo electromagnético se estudia mediante la prescripción de acople mínimo, según la cual:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (4.202)$$

de donde se obtiene la correspondiente densidad Lagrangiana (4.157),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(D_\mu\psi) - \frac{i}{2}(\overline{D_\mu\psi})\beta^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\beta^\mu A_\mu\psi, \end{aligned} \quad (4.203)$$

lo que resulta en el siguiente Lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\beta^\mu A_\mu\psi. \quad (4.204)$$

Por tanto, con el fin de recuperar el término de interacción en la teoría de KGF, se puede utilizar la función de onda física para el campo de DKP $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$, expresadas por (4.200). Si se utiliza la representación (4.155) de las matrices β^μ , se deduce que:

$$\beta^\mu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.205)$$

de manera que:

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\beta^\mu A_\mu\psi = ieA_\mu \left[\bar{\varphi}^*(x) \partial^\mu \bar{\varphi}(x) - \partial^\mu \bar{\varphi}^*(x) \bar{\varphi}(x) \right]. \quad (4.206)$$

Sin embargo, esta relación difiere del Lagrangiano de interacción de la teoría de KGF, dado por

$$\mathcal{L}_{I_{KGF}} = ieA^\mu \left[\bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_\mu \bar{\varphi}^* \right] + g^2 A_\mu A^\mu \bar{\varphi} \varphi^*, \quad (4.207)$$

notándose una diferencia en el término cuadrático. Esto implica que la equivalencia entre la teoría de DKP y la teoría de KGF solo es válida en el caso libre. No obstante, se mostrará que esta diferencia se debe a un uso incorrecto de la forma física del campo DKP (4.126), dado que esta última ya no es aplicable debido a que su derivación fue válida únicamente para campos libres.

Notemos, en primer lugar, que la expresión (4.126) para la forma física del campo es inconsistente con la invariancia de gauge que debe poseer la teoría. Bajo una transformación de gauge local, el campo de DKP debe comportarse como:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \quad (4.208)$$

siendo que las componentes físicas deben transformar de la siguiente manera:

$$\bar{\varphi}(x) \rightarrow \bar{\varphi}'(x) = e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi}(x). \quad (4.209)$$

Al aplicar la propiedad de transformación del campo $\bar{\varphi}(x)$ en la expresión (4.126) para la forma física del campo de DKP, se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left(\begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}'(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}'(x) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{m}e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi}(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}e^{ie\alpha(x)}\partial^\mu\bar{\varphi}(x) - \frac{e}{\sqrt{m}}\partial^\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi}(x) \end{array} \right) \\ &\neq e^{ie\alpha(x)} \left(\begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}(x) \end{array} \right), \end{aligned}$$

lo que indica que la expresión que fue derivada en el caso libre ya no es válida en presencia de interacción. Una manera de dar solución a este problema consiste en cambiar la forma física del campo $\psi(x)$ y reemplazándola por:

$$\psi(x) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}'(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D^\mu\bar{\varphi}'(x) \end{array} \right), \quad (4.210)$$

donde D^μ es la derivada covariante definida por (4.202), garantizando así que

$$\psi'(x) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}'(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D'^\mu\bar{\varphi}'(x) \end{array} \right) = e^{ie\alpha}\psi,$$

donde se ha tenido en cuenta que la transformación del campo gauge es $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)$. Por lo tanto, se puede garantizar la compatibilidad entre las dos transformaciones en (4.208) y (4.209).

Ahora, si se deriva la ecuación de campo a partir de la densidad Lagrangiana (4.203), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= -\frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu - m\bar{\psi} + e\bar{\psi}\beta^\mu A_\mu, & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= \frac{i}{2}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - m\psi + e\beta^\mu A_\mu\psi, & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} &= -\frac{i}{2}\beta^\mu\psi, \end{aligned}$$

de manera que:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = (i\beta^\mu D_\mu - m) \psi,$$

es decir, se concluye que

$$(i\beta^\mu D_\mu - m) \psi = 0. \quad (4.211)$$

Y en forma similar se deduce que:

$$\bar{\psi} (iD_\mu^* \beta^\mu + m) = 0. \quad (4.212)$$

Utilizando las relaciones (4.109) y (4.112), se deduce que al aplicar los operadores P y P^μ a la ecuación de campos (4.211), resulta:

$$\begin{aligned} P\beta^\mu D_\mu \psi &= D_\mu (P^\mu \psi) = \frac{m}{i} (P\psi), \\ (P^\mu \psi) &= \frac{i}{m} \underbrace{P^\mu \beta^\nu D_\nu \psi}_{P_{\eta}{}^{\mu\nu}} = \frac{i}{m} D^\mu (P\psi), \end{aligned}$$

de manera que

$$(D_\mu D^\mu + m^2) (P\psi) = 0. \quad (4.213)$$

La relación anterior muestra que todos los elementos de la matriz columna $P\psi$ son campos escalares de masa m que obedecen la ecuación de KGF con acoplamiento mínimo, en tanto que los elementos $P^\mu \psi$ son $\frac{i}{m}$ veces la derivada covariante del correspondiente elemento $P\psi$. Utilizando los mismos pasos y la misma representación de las matrices β^μ que se emplearon para derivar (4.126) en el caso libre, se puede determinar que la correcta forma física para el campo de DKP ψ en presencia de la interacción con el campo electromagnético está dada por (4.210), donde se tiene que

$$P\psi(x) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu \psi(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} D^\mu \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (4.214)$$

de manera que, a partir de (4.213), se deduce:

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \bar{\varphi}(x) = 0. \quad (4.215)$$

Por lo tanto, para garantizar la iteración con un campo electromagnético en la teoría de DKP de forma coherente, no es suficiente tener en cuenta la derivada covariante en la densidad Lagrangiana (4.203), lo cual conduce al Lagrangiano de interacción (4.204). Debido a ello, la forma física del campo de DKP ψ deberá poseer una derivada covariante entre sus componentes, como se indica en (4.210). Utilizando la versión correcta del campo DKP dada por (4.210) en la densidad Lagrangiana (4.203), se permite determinar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\varphi}^* \partial^\mu D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} (\partial^\mu D_\mu^* \bar{\varphi}^*) \right] - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{2} i e A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) \\ &\quad + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \end{aligned}$$

Integrando por partes el primer término de la relación anterior, se deduce:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} + \partial^\mu \bar{\varphi} D_\mu^* \bar{\varphi}^* \right] - \frac{1}{2} \partial^\mu \left[\bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} D_\mu^* \bar{\varphi}^* \right] \\ & - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{2} ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) - e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, a excepción de un término de frontera, la densidad Lagrangiana se expresa como:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi},$$

a partir de la cual se puede identificar el correcto Lagrangiano de Interacción de la teoría de DKP expresada anteriormente por (4.207). De este modo, al utilizar la forma física correcta del campo de DKP $\psi(x)$ en el caso de acoplamiento mínimo, es posible recuperar el Lagrangiano de la teoría de KGF con el término apropiado de interacción. Por lo tanto, la equivalencia de esas teorías se mantiene tanto en el caso libre como en presencia de una interacción con campo electromagnético. Sin embargo, el hecho de utilizar la forma física del campo de DKP del caso libre resulta en inconsistencias cuando el campo electromagnético está presente, lo que además conlleva a una incompatibilidad con la invariancia de gauge de la teoría.

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 117, pp. 610-624, 1928.
- [2] W. Pauli and V. F. Weisskopf, "On quantization of the scalar relativistic wave equation," *Helv. Phys. Acta*, vol. 7, pp. 709-731, 1934.
- [3] H. Yukawa, "On the interaction of elementary particles I," *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, vol. 17, pp. 48-57, 1935.
- [4] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, "Note on the nature of cosmic ray particles," *Phys. Rev.*, vol. 51, pp. 884-886, 1937.
- [5] M. Conversi, E. Pancini, and O. Piccioni, "On the disintegration of negative mesons," *Phys. Rev.*, vol. 71, pp. 209-210, 1947.
- [6] L. de Broglie, "Ondes et quanta," *Comptes Rendus Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, vol. 177, pp. 507-510, 1923.
- [7] N. Kemmer, "The particle aspect of meson theory," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 173, pp. 91-116, 1939.
- [8] R. J. Duffin, "On the characteristic matrices of covariant systems," *Phys. Rev.*, vol. 54, pp. 1114-1120, 1938.
- [9] J. Gehéniau, "Sur la masse propre du photon et le tenseur électromagnétique," *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.*, vol. 202, no. 7, pp. 559-560, 1938.
- [10] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, "Historical development of the Bhabha first-order relativistic wave equations for arbitrary spin," *Am. J. Phys.*, vol. 45, pp. 818-822, 1977.
- [11] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1956.
- [12] H. A. Bethe and R. Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, 3rd ed., Advanced Books Classics, Boulder, CO: Westview Press, 1997.
- [13] H. M. Pilkuhn, *Relativistic Quantum Mechanics*, Berlin: Springer, 2000.
- [14] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Berlin: Springer, 2000.
- [15] Harish-Chandra, "On relativistic wave equations," *Phys. Rev.*, vol. 71, pp. 793-805, 1947.
- [16] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, "Bhabha first order wave equations. 1. C, P, and T," *Phys. Rev. D*, vol. 10, pp. 4049-4052, 1974.

- [17] I. Fujiwara, "On the Duffin-Kemmer algebra," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 10, pp. 589-616, 1953.
- [18] D. C. Peaslee, " β -Matrix Formalism as $\xi \rightarrow 0$," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 6, pp. 639-641, 1951.
- [19] Y. Nadjadi and R. C. Barrett, "The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 27, pp. 4301-4316, 1994.
- [20] Y. Nadjadi and R. C. Barrett, "Solution of the central field problem for a Duffin-Kemmer-Petiau vector boson," *J. Math. Phys.*, vol. 35, pp. 4517-4533, 1993.
- [21] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, vol. 169, New York: Springer, 1982.
- [22] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, New York: Benjamin, 1964.

Capítulo 5

Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau Libre en las Coordenadas de Plano Nulo

5.1. Introducción

El éxito de la ecuación de Dirac en la descripción de partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$ inspiró a varios investigadores a buscar una ecuación de onda de primer orden que pudiera describir partículas de espín 0 y espín 1. Fue así que G. Petiau [1], R. Duffin [2], y N. Kemmer [3] propusieron una ecuación de primer orden que caracteriza esta clase de partículas de una manera unificada, siguiendo las ideas propuestas en el trabajo de de Broglie [4]. Esta ecuación de primer orden, conocida como teoría DKP, presenta una estructura muy similar a la ecuación de Dirac, aunque con un álgebra matricial diferente. La característica de esta teoría radica en que su representación, en un espacio-tiempo $(3 + 1)$ dimensional, admite una descomposición en tres representaciones irreducibles: una representación 5×5 que se asocia a las partículas de espín 0, una representación 10×10 correspondiente a partículas de espín 1 y finalmente una representación 1×1 que es trivial y carece de significado físico.

Durante el periodo comprendido entre 1939 y aproximadamente 1970, la mayoría de los trabajos relacionados a la ecuación de DKP se enfocaron en el desarrollo del formalismo y en el análisis de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Diversos cálculos basados en las ecuaciones de KGF y DKP para distintos procesos dieron resultados idénticos, incluyendo algunos que consideraban correcciones a un loop [1]. Una contribución importante en este ámbito fue realizada por A. Wightman [2], quien demostró que cuando el campo DKP tiene un acoplamiento mínimo con el campo electromagnético, la ecuación DKP para partículas de espín 0 se mantiene estable ante perturbaciones locales suaves en campos externos.

En este capítulo se estudiará la estructura del campo DKP libre en el formalismo de plano nulo [7]. En primer lugar, se realizará el análisis de la teoría de $1 + 1$ dimensiones, y posteriormente se extenderá a $3 + 1$ dimensiones.

5.2. Ecuación de DKP en $1 + 1$ Dimensiones

En $1 + 1$ dimensiones, la métrica $g^{\mu\nu}$ posee las siguientes componentes en las coordenadas de plano nulo: $\mu, \nu = +, -$, de manera que su representación matricial es de la forma:

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

De la relación anterior se puede determinar que del álgebra de las matrices β^μ

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\mu = \beta^\mu g^{\alpha\nu} + \beta^\nu g^{\alpha\mu}, \quad (5.2)$$

se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \beta^+ \beta^- \beta^+ &= \beta^+ \quad , \quad \beta^- \beta^+ \beta^- = \beta^- \\ \beta^+ (\beta^-)^2 + (\beta^-)^2 \beta^+ &= \beta^- \quad , \quad \beta^- (\beta^+)^2 + (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ \\ (\beta^+)^3 &= 0 \quad , \quad (\beta^-)^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En un espacio-tiempo dos dimensional, el campo DKP $\psi(x)$ se expresa como un vector de tres componentes con la siguiente representación matricial:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi^+(x) \\ \psi^-(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

A fin de seleccionar la función de onda de espín 0, se introducen los operadores de proyección P y P^μ definidos por las relaciones (4.107) y (4.109), de manera que su naturaleza sea:

$$P\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^\mu \psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión (5.4), el conjunto de operadores (P, P^+, P^-) deberá seleccionar las componentes del campo DKP de la siguiente forma:

$$P\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^+\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^-\psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

con lo cual, una representación matricial apropiada de (P, P^+, P^-) es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

La expresión anterior permite introducir la forma matricial de las matrices (β^+, β^-) como:

$$\beta^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

5.3. Estructura de Vínculos

La densidad Lagrangiana asociada al campo DKP en $1 + 1$ dimensiones en las coordenadas de plano nulo se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\Psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+ (\partial_+ \psi) - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\Psi}) \beta^+ \psi + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^- (\partial_- \psi) - \frac{i}{2} (\partial_- \bar{\Psi}) \beta^- \psi - m \bar{\Psi} \psi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Los momentos canónicos $(\bar{p}, p)$ conjugados a los campos $(\psi, \bar{\Psi})$ se obtienen directamente de (5.9), definiéndose como:

$$\bar{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+, \quad p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi. \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) indica que el conjunto de variables $(\psi, \bar{\Psi}, \bar{p}, p)$ que define el espacio de fase de la teoría DKP libre no es linealmente independiente. Estas ecuaciones establecen que existe un conjunto de vínculos primarios que se definirán de esta forma:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0, \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+ \approx 0. \quad (5.11)$$

Teniendo en cuenta la representación (5.4), la dimensión del espacio de fase de la teoría DKP es 12, con lo cual se puede concluir que el número de vínculos primarios deducidos en la expresión (5.11) es 6.

A continuación, se evalúa la preservación temporal del grupo de ligaduras iniciales mediante el algoritmo de Dirac. [8]. El cálculo de la densidad Hamiltoniana canónica del modelo es el siguiente

$$H_C = \int dx^- \mathcal{H}_C = \int dx^- \bar{\Psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_-) + m \right] \psi. \quad (5.12)$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C &\equiv \bar{p}\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}p - \mathcal{L} \\ &= \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + m \right] \psi.\end{aligned}\quad (5.13)$$

El formalismo de Dirac dicta que, debido a los vínculos iniciales (5.11), la dinámica está regida por el Hamiltoniano primario, obtenido al sumar a $\mathcal{H}_C$ una combinación lineal de las ligaduras primarias:

$$H_P = H_C + \int dy^- \left[\bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \quad (5.14)$$

donde $(\bar{\lambda}, \lambda)$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a $(\theta, \bar{\theta})$, respectivamente. Ahora, se procede a introducir los corchetes de Poisson fundamentales a tiempos iguales ($x^+ = y^+$) correspondientes al espacio de fase $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$, los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta(x^- - y^-). \quad (5.15)$$

A partir de (5.15), se puede mostrar fácilmente que el conjunto de vínculos primarios (5.11) satisface las siguientes relaciones:

$$\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} = i\beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} = -i\beta_{ba}^+ \delta(x^- - y^-). \quad (5.16)$$

Considerando las relaciones anteriores, la evolución temporal de $\theta(x)$, arroja el siguiente resultado:

$$\dot{\theta} = \left\{ \theta(x), H_P \right\} = \left(\beta^- i \partial_-^x - m \right) \psi + i\beta^+ \lambda \approx 0. \quad (5.17)$$

La expresión (5.17) impone una condición al multiplicador θ . Sin embargo, dada la naturaleza singular de la matriz β^+ no todas las componentes de θ quedaran fijadas a partir de la expresión (5.17). Este resultado se podrá visualizar más adelante. En forma similar, el requerimiento de consistencia para $\bar{\theta}(x)$ resulta en,

$$\dot{\bar{\theta}} = \left\{ \bar{\theta}(x), H_P \right\} = \bar{\psi} \left(\beta^- i \partial_-^x + m \right) + i\bar{\lambda} \beta^+ \approx 0. \quad (5.18)$$

De manera equivalente, a pesar de que la ecuación (5.18) resulta en una condición sobre $\bar{\theta}$, el carácter singular de β^+ implica que no todas las componentes de $\bar{\theta}$ quedan unívocamente fijadas por (5.18).

A continuación, se mostrará que a partir de las relaciones (5.17) y (5.18) solo se determinan valores para algunas componentes de los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$. Para ello, se utilizará la representación matricial de (β^+, β^-) y algunas propiedades que

resultan de su álgebra, como se indican en la ecuación (5.3). Definiendo los siguientes productos de matrices:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \beta^- \beta^+ , & A_2 &\equiv 1 - \beta^- \beta^+ , \\ B_1 &\equiv \beta^+ \beta^- , & B_2 &\equiv 1 - \beta^+ \beta^- , \end{aligned} \quad (5.19)$$

se puede determinar que

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \beta^- \underbrace{\beta^+ \beta^- \beta^+}_{\beta^+} = \beta^- \beta^+ = A_1, \\ A_2^2 &= (1 - \beta^- \beta^+)^2 = 1 - \beta^- \beta^+ - \beta^- \beta^+ + \beta^- \underbrace{\beta^+ \beta^- \beta^+}_{\beta^+} \\ &= 1 - \beta^- \beta^+ = A_2, \\ A_1 + A_2 &= 1. \end{aligned}$$

De forma similar, se deduce que:

$$\begin{aligned} B_1^2 &= \beta^+ \underbrace{\beta^- \beta^+ \beta^-}_{\beta^-} = \beta^+ \beta^- = B_1, \\ B_2^2 &= (1 - \beta^+ \beta^-)^2 = 1 - \beta^+ \beta^- - \beta^+ \beta^- + \beta^+ \underbrace{\beta^- \beta^+ \beta^-}_{\beta^-} \\ &= 1 - \beta^+ \beta^- = B_2, \\ B_1 + B_2 &= 1. \end{aligned}$$

Es decir, el conjunto de operadores (A_1, A_2, B_1, B_2) constituye un grupo de proyectores diferentes de aquellos definidos por (5.5), y posee la siguiente representación matricial:

$$\begin{aligned} A_1 &= \beta^- \beta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , & A_2 &= 1 - \beta^- \beta^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \beta^+ \beta^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , & B_2 &= 1 - \beta^+ \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Utilizando los resultados anteriores en (5.5), es posible deducir a partir de (5.17) que:

$$\begin{aligned} i\beta^- \beta^+ \lambda &= iA_1 \lambda \approx -\beta^- (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \Rightarrow \\ i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 0 & i\partial_-^x \\ i\partial_-^x & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i\lambda_1 \\ i\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\psi_3 \\ m\psi_1 - i\partial_-^x \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta última expresión establece condiciones para las componentes (λ_1, λ_2) del multiplicador $\lambda(x)$, mientras que la componente λ_3 mantiene indeterminada. De igual manera, a partir de (5.18) se deduce:

$$\begin{aligned} i\bar{\lambda}\beta^+\beta^- &= i\bar{\lambda}B_1 \approx -\bar{\psi}(-\beta^-i\partial_-^x + m)\beta^- \Rightarrow \\ i(\bar{\lambda}_1 \quad \bar{\lambda}_2 \quad \bar{\lambda}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= -(\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_3) \begin{pmatrix} m & 0 & -i\partial_-^x \\ -i\partial_-^x & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (\bar{\lambda}_1 \quad 0 \quad i\bar{\lambda}_3) &= -(\bar{m}\bar{\psi}_2 \quad 0 \quad m\bar{\psi}_1 - i\partial_-^x\bar{\psi}_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3)$ correspondientes $\bar{\lambda}(x)$ pueden ser fijadas, en tanto que $\bar{\lambda}_2$ está por ser determinada. Los resultados anteriores sugieren que existe un conjunto adicional de ligaduras secundarias que permitiran fijar las componentes λ_3 y $\bar{\lambda}_2$.

Las componentes restantes pueden deducirse utilizando los proyectores complementarios. Por tanto, es posible mostrar a partir de (5.17) y (5.18) que resulta un nuevo conjunto de vínculos definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \psi \right]_a \approx 0, \quad a=2, \\ \bar{\omega}_a &= \left[\bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^-\beta^+) \right]_a \approx 0, \quad a=3, \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde los valores $a=2$ y $a=3$ son consecuencia de la representación matricial (5.20). Para evaluar la consistencia de (5.21) se utiliza los siguientes corchetes de Poisson diferentes de cero entre las ligaduras primarias y secundarias:

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x + m) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(i\partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^-\beta^+) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[(i\partial_-^x \beta^- - m) (1 - \beta^-\beta^+) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A partir de (5.22), se determina que:

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \lambda \approx 0, \quad (5.23)$$

Utilizando la representación matricial de los proyectores, se deduce que

$$(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ i\partial_-^x \lambda_1 - m\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 0,$$

lo que implica que se ha generado una nueva relación entre las componentes (λ_1, λ_2) .

Al usar la relación (5.3), se puede determinar la siguiente identidad entre las matrices (β^+, β^-) :

$$(\beta^+)^2 (\beta^-)^2 + \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = \beta^+ \beta^- \quad , \quad \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- + (\beta^+)^2 (\beta^-)^2 = \beta^+ \beta^- ,$$

de manera que

$$\beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- . \quad (5.24)$$

Así que de la consistencia del vínculo $\omega(x)$ se deduce que:

$$\begin{aligned} \beta^+ \dot{\omega} &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \left(\beta^- i \partial_-^x \lambda - m \lambda \right) \\ &= -i \beta^+ \beta^{-2} i \partial_-^x (i \beta^+ \lambda) + i m \beta^- \beta^+ (i \beta^+ \lambda) . \end{aligned}$$

A partir de la expresión (5.17), se puede verificar que:

$$\beta^+ \dot{\omega} = -i m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi \approx 0 ,$$

lo cual sugiere que ha surgido un vínculo terciario en la teoría, que se identifica como:

$$\Omega \equiv \left[-m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_-^x + m^2 \beta^- \beta^+ \right] \psi \approx 0 . \quad (5.25)$$

En forma similar, al analizar la consistencia de $\bar{\omega}(x)$, resulta:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\lambda} (i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0 , \quad (5.26)$$

Utilizando la representación matricial considerada con anterioridad, es posible observar que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} (i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) &= \left[i \partial_-^x \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + m \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \partial_-^x \bar{\lambda}_1 + m \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \\ &\approx 0 , \end{aligned}$$

garantizando así una nueva relación entre los multiplicadores de Lagrange $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3)$. Ahora, al analizar la consistencia de $\bar{\omega}(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} \beta^+ &= [\bar{\lambda} (i \partial_-^x \beta^- + m)] (1 - \beta^- \beta^+) \beta^+ \\ &= \partial_-^x (i \bar{\lambda} \beta^+) \beta^{-2} \beta^+ - i m (i \bar{\lambda} \beta^+) \beta^+ \beta^- . \end{aligned}$$

A partir de (5.18), se deduce que:

$$\dot{\bar{\omega}} \beta^+ = i m i \partial_-^x \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + i m^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \approx 0 ,$$

resultando en un vínculo terciario que se definirá en la forma

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right] \approx 0. \quad (5.27)$$

Si el procedimiento de Dirac nuevamente es tenido en cuenta, la consistencia de $(\Omega, \bar{\Omega})$ debe ser analizada. Para ello, se deben considerar los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x - m^2\beta^-\beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \theta_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x - m^2\beta^+\beta^- \right]_{ab} \delta(x^- - y^-). \end{aligned}$$

Los resultados anteriores permiten establecer que:

$$\dot{\Omega} = \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right] \lambda \approx 0, \quad (5.28)$$

a partir de la cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right] \lambda &= \begin{pmatrix} m^2\lambda_1 - i2m\partial_-^x\lambda_3 \\ -im\partial_-^x\lambda_1 + m^2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\approx 0, \end{aligned}$$

por tanto, la componente $\lambda_3(x)$ es determinada y así, el multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ se consigue fijar completamente. De forma similar, se puede deducir que:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \bar{\lambda} \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right] \approx 0, \quad (5.29)$$

que explícitamente se expresa como:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right] &= (m^2\bar{\lambda}_1 + i2m\partial_-^x\bar{\lambda}_2 \quad 0 \quad im\partial_-^x\bar{\lambda}_1 + m^2\bar{\lambda}_3) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Así, se determina la componente $\bar{\lambda}_2(x)$ asociada al multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}(x)$, de tal manera que se elimina la arbitrariedad sobre éste. Por tanto, las relaciones (5.28) y (5.29) indican que no se generan mas ligaduras en la teoría. Así, se puede concluir que el conjunto completo de vínculos que caracteriza la teoría DKP libre en 1+1 dimensiones en las coordenadas de plano nulo es:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \approx 0, \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ \approx 0 \\ \omega &= (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \approx 0, \\ \bar{\omega} &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^-\beta^+) \approx 0, \\ \Omega &= \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right] \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &= \bar{\psi} \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right] \approx 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Estas ligaduras son de segunda clase y los PB entre ellos son:

$$\begin{aligned}
\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= i\beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(\beta^- i\partial_-^x + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2 \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right]_{ba} \delta(x^- - y^-).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

5.4. Ecuaciones de Movimiento

La definición del conjunto (5.30), permite establecer la equivalencia entre la formulación Hamiltoniana y las ecuaciones de campo Lagrangiana. La evolución temporal del campo ψ se obtiene como:

$$\dot{\psi}(x) = \left\{ \psi(x), H_P \right\} = \lambda(x). \tag{5.32}$$

Similarmente, para el campo conjugado $\bar{\psi}(x)$ el cambio temporal es:

$$\dot{\bar{\psi}}(x) = \left\{ \bar{\psi}(x), H_E \right\} = \bar{\lambda}(x). \tag{5.33}$$

La evolución temporal de los momentos canónicos conjugados confirma la relación:

$$\dot{p}(x) = \left\{ p(x), H_E \right\} = \partial_+ p(x) = (\beta^- i\partial_- - m) \psi(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(x). \tag{5.34}$$

Al emplear la relación (5.32) y la ligadura primaria, se demuestra que la expresión (5.34) se transforma en:

$$(\beta^- i\partial_- - m) \psi(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi(x) \approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi(x),$$

lo que resulta en la ecuación de campo DKP:

$$\beta^+ i\partial_+ \psi(x) + (\beta^- i\partial_- - m) \psi(x) = (\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \approx 0. \tag{5.35}$$

Al estudiar la dinámica del momento $\bar{p}(x)$, resulta:

$$\dot{\bar{p}}(x) = \left\{ \bar{p}(x), H_E \right\} = -\bar{\psi}(x) (\beta^- i\partial_-^x + m) - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(x) \beta^+.$$

Sustituyendo la identidad (5.33) y la ecuación de ligadura se llega a:

$$\dot{\bar{p}}(x) = \partial_+ \bar{p}(x) = -\bar{\psi}(x) (\beta^- i\partial_- + m) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+(x) \approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+,$$

de la cual se concluye la segunda ecuación de campo:

$$\bar{\psi}(x) \beta^+ i\partial_+ + \bar{\psi}(x) (\beta^- i\partial_- + m) = \bar{\psi}(x) (\beta^\mu \partial_\mu + m) \approx 0. \tag{5.36}$$

En resumen, las relaciones (5.35) y (5.36) confirman que la evolución del sistema obtenida en el formalismo de Dirac es débilmente equivalente a la dinámica predicha por la formulación de campo Lagrangiana.

5.5. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Para confirmar que el grupo de ligaduras (5.30) son de segunda clase, empleamos los operadores de proyección (5.5). En la representación actual, estos operadores de proyección quedan definidos como:

$$\begin{aligned} P &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+, \\ P^+ &= P \beta^+ = \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) = \beta^- (\beta^+)^2, \\ P^- &= P \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2, \end{aligned} \quad (5.37)$$

y cumplen la siguiente condición:

$$P^+ \beta^- = P = P^- \beta^+ \quad , \quad P^+ \beta^+ = 0 = P^- \beta^-. \quad (5.38)$$

Al proyectar los campos sobre las variables del espacio de fase,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\equiv \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi^+(x) \\ \psi^-(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi^*(x) & \bar{\psi}^+(x) & \bar{\psi}^-(x) \end{pmatrix}, \\ p(x) &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi(x) \\ p_+(x) \\ p_-(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p}(x) \equiv \begin{pmatrix} \bar{p}_\varphi(x) & \bar{p}_+(x) & \bar{p}_-(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

se obtienen las siguientes expresiones:

- El vínculo

$$\theta = p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0,$$

produce,

$$\begin{aligned} P\theta &= Pp + \frac{i}{2} P\beta^+ \psi = p_\varphi + \frac{i}{2} P^+ \psi = p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ \approx 0, \\ P^+ \theta &= P^+ p + \frac{i}{2} P^+ \beta^+ \psi = p_+ \approx 0, \\ P^- \theta &= P^- p + \frac{i}{2} P^- \beta^+ \psi = p_- + \frac{i}{2} P\psi = p_- + \frac{i}{2} \varphi \approx 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

- Las componentes de la ligadura

$$\omega = (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_-^x - m) \psi \approx 0,$$

resultan ser,

$$\begin{aligned} P\omega &= (P - P^+ \beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi = (P - P) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi = 0, \\ P^+ \omega &= i\partial_-^x P\psi - mP^+ \psi = i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^- \omega &= 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

- Para el vínculo

$$\Omega = -m(1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_- \psi + m^2 \beta^- \beta^+ \psi \approx 0,$$

se halla,

$$\begin{aligned} P\Omega &= -2mP^- i \partial_- \psi + m^2 P\psi = -2mi \partial_- \psi^- + m^2 \varphi \approx 0, \\ P^+ \Omega &= -mD_- \varphi + m^2 \psi^+ = -m(D_- \varphi - m\psi^+) = -mP^+ \omega \approx 0, \\ P^- \Omega &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

- Si consideramos la ligadura

$$\bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0,$$

sus componentes son:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} P &= \bar{p} P - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi} (P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- \approx 0, \\ \bar{\theta} (P^+)^\dagger &= \bar{p} (P^+)^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \bar{\psi} P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* \approx 0, \\ \bar{\theta} (P^-)^\dagger &= \bar{p} (P^-)^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

- Al analizar,

$$\bar{\omega} = \bar{\psi}(-i \partial_- \beta^- + m)(1 - \beta^- \beta^+) \approx 0,$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \bar{\omega} P &= \bar{\psi}(i \partial_- \beta^- + m)(P - P) = 0, \\ \bar{\omega} (P^+)^\dagger &= \bar{\psi}(i \partial_- \beta^- + m)(\beta^- P - \beta^- P) = 0, \\ \bar{\omega} (P^-)^\dagger &= i \partial_- \bar{\psi} P + m \bar{\psi} (P^-)^\dagger = i \partial_- \varphi^* + m \bar{\psi}^- \approx 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

- Por último, para el grupo de vínculos

$$\bar{\Omega} = mi \partial_- \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + m^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \approx 0,$$

se establece,

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} P &= 2mi \partial_- \bar{\psi} (P^+)^\dagger + m^2 \bar{\psi} P = 2mi \partial_- \bar{\psi}^+ + m^2 \varphi^* \approx 0, \\ \bar{\Omega} (P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\Omega} (P^-)^\dagger &= mi \partial_- \bar{\psi} P + m^2 \bar{\psi} (P^-)^\dagger = mi \partial_- \varphi^* + m^2 \bar{\psi}^- \\ &= m(i \partial_- \varphi^* + m \bar{\psi}^-) = m \bar{\omega} (P^-)^\dagger \approx 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Las proyecciones del grupo de ligaduras en su forma matricial establecen los siguientes 10 vínculos no redundantes:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ & , & & \Psi_6 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \\
 \Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_7 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\varphi}^* \\
 \Psi_3 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_- \\
 \Psi_4 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & , & & \Psi_9 &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \\
 \Psi_5 &\equiv 2m\partial_-^x \psi^- + im^2\varphi & , & & \Psi_{10} &\equiv 2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ - im^2\varphi^*
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Estas restricciones permiten construir la matriz de ligaduras de segunda clase (D_{ij}), cuyos elementos se definen mediante

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}, \tag{5.46}$$

y cuya representación es:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & i\partial_-^x & im^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & im^2 & 0 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & -im^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im^2 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-).$$

Para proceder con el cálculo de los Corchetes de Dirac (DB), es imprescindible obtener la inversa $D^{-1}(x, y)$ de esta matriz. Esta inversa debe satisfacer la condición

$$\int dz^- D(x, z) D^{-1}(z, y) = \int dz^- D^{-1}(x, z) D(z, y) = \delta(x^- - y^-). \tag{5.47}$$

A partir de (5.47), se puede mostrar que $D^{-1}(x, y)$ es:

$$D_{ij}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 & D_7 & D_8 & D_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.48}$$

donde los elementos de matriz son funciones de (x^-, y^-) y tienen la siguiente forma:

■ Funciones $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}A_6(x, y) &= -\frac{m}{4}\epsilon(x^- - y^-), \\A_7(x, y) &= \frac{i}{2}\delta(x^- - y^-), \\A_8(x, y) &= -\frac{im^2}{8}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\A_9(x, y) &= -\frac{i}{4}\epsilon(x^- - y^-).\end{aligned}$$

■ Funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}B_3(x, y) &= -\frac{1}{8m^2}\epsilon(x^- - y^-), \\B_6(x, y) &= -\frac{im^2}{8}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\B_7(x, y) &= -\frac{m}{4}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\B_8(x, y) &= -\frac{im^3}{16}\frac{1}{\partial_-^x\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\B_9(x, y) &= \frac{m}{8}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\B_{10}(x, y) &= \frac{1}{4m}\epsilon(x^- - y^-).\end{aligned}$$

■ Funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}C_6(x, y) &= \frac{i}{2}\delta(x^- - y^-), \\C_7(x, y) &= \frac{1}{2m}\partial_-^x\delta(x^- - y^-), \\C_8(x, y) &= -\frac{m}{8}\epsilon(x^- - y^-), \\C_9(x, y) &= \frac{1}{2m}\delta(x^- - y^-).\end{aligned}$$

■ Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}D_6(x, y) &= -\frac{i}{4}\epsilon(x^- - y^-), \\D_7(x, y) &= \frac{1}{2m}\delta(x^- - y^-), \\D_8(x, y) &= \frac{m}{8}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\D_9(x, y) &= \frac{1}{4m}\epsilon(x^- - y^-).\end{aligned}$$

- Funciones $E_i(x, y)$:

$$E_8(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

- Funciones $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ F_2(x, y) &= \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ F_3(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\ F_4(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned}$$

- Funciones $G_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\ G_2(x, y) &= -\frac{m}{8} \epsilon(x^- - y^-), \\ G_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\ G_4(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-). \end{aligned}$$

- Funciones $H_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ H_2(x, y) &= \frac{m^3}{16} \frac{1}{\partial_-^x} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ H_3(x, y) &= -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \delta(x^- - y^-), \\ H_4(x, y) &= -\frac{m}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ H_5(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned}$$

- Funciones $K_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ K_2(x, y) &= -\frac{m}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ K_3(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\ K_4(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-), \end{aligned}$$

■ Funciones $M_i(x, y)$:

$$M_2(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Con la inversa de la matriz de vinculos determinada, definimos los Corchetes de Dirac (DB) entre dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(y)$ mediante la expresión general:

$$\begin{aligned} \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ A_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\} \\ &\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

La estructura de las ligaduras del modelo indica que el conjunto de variables dinámicas independientes es: $(\varphi, \psi^+, \psi^-, \varphi^*, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-)$. El cálculo de los DB para el campo $\varphi(x)$ se basa en la relación:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} D_{6\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Los únicos DB no nulos para $\varphi(x)$ son:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.51)$$

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.52)$$

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \quad (5.53)$$

Para obtener los DB correspondientes al campo $\psi^+(x)$, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ \psi^+(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

obteniendo las relaciones:

$$\left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_D = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (5.55)$$

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D = -\frac{m}{8} \epsilon(x - y) \quad (5.56)$$

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-). \quad (5.57)$$

Finalmente, los DB del campo $\psi^-(x)$ se derivan de:

$$\left\{ \psi^-(x), B_b(y) \right\}_D = \left\{ \psi^-(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}, \quad (5.58)$$

arrojando los resultados:

$$\left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_D = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.59)$$

$$\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D = \frac{m^3}{16} \frac{1}{\partial_-^x} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-) \quad (5.60)$$

$$\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \delta(x^- - y^-). \quad (5.61)$$

Bibliografía

- [1] G. Petiau, "Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires," *Acad. Roy. Belg. Mem. Collect.*, vol. 16, pp. 1-118, 1936.
- [2] R. J. Duffin, "On the characteristic matrices of covariant systems," *Phys. Rev.*, vol. 54, pp. 1114-1120, 1938.
- [3] N. Kemmer, "The particle aspect of meson theory," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 173, pp. 91-116, 1939.
- [4] L. de Broglie, "Ondes et quanta," *Comptes Rendus Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, vol. 177, pp. 507-510, 1923.
- [5] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed., New York: Inter., 1965.
- [6] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95, edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
- [7] P. A. M. Dirac, "Forms of relativistic dynamics," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, pp. 392-399, 1949.
- [8] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, New York: Benjamin, 1964.

Capítulo 6

Ecuación de DKP en 3 + 1 Dimensiones

En este capítulo analizaremos la teoría DKP libre en las coordenadas de plano nulo en 3+1 dimensiones. Primero, se presenta la métrica $g^{\mu\nu}$ en las coordenadas de plano nulo:

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

En la dimensión que se considera, se confirma la validez de las siguientes relaciones algebraicas para las matrices β :

$$\begin{aligned} \beta^+ \beta^- \beta^+ &= \beta^+ & , & & \beta^- \beta^+ \beta^- &= \beta^- \\ \beta^+ (\beta^-)^2 + (\beta^-)^2 \beta^+ &= \beta^- & , & & \beta^- (\beta^+)^2 + (\beta^+)^2 \beta^- &= \beta^+ \\ (\beta^+)^3 &= 0 & , & & (\beta^-)^3 &= 0 \end{aligned}$$

que son consecuencia directa del álgebra (5.1) asociada a las matrices β . El campo de DKP en 3 + 1 dimensiones se representa matricialmente como:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde los operadores de proyección se definen para seleccionar sus componentes:

$$\begin{aligned}
 P\psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^+\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^1\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 P^2\psi &= \begin{pmatrix} \psi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^-\psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Una representación matricial de estos operadores es:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 P^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dado que

$$P^\mu = P\beta^\mu, \quad P^\mu\beta^\nu = P\eta^{\mu\nu}, \tag{6.5}$$

una forma conveniente de expresar las matrices β es:

$$\begin{aligned}
 \beta^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.1. Estructura de Vínculos

La densidad Lagrangiana se presenta como :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (\partial_+ \psi) - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\psi}) \beta^+ \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^A (\partial_A \psi) - \frac{i}{2} (\partial_A \bar{\psi}) \beta^A \psi \\ &\quad - m \bar{\psi} \psi,\end{aligned}\quad (6.7)$$

con $A = -, 1, 2$. Los momentos canónicos $(p, \bar{p})$ se establecen como:

$$\bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi, \quad (6.8)$$

definiendo el conjunto de vinculos primarios:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \quad (6.9)$$

La dimensión de los campos implica que hay diez ligaduras primarias. Para analizar su estabilidad temporal, introducimos la densidad Hamiltoniana canónica,

$$\mathcal{H}_C \equiv \bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftrightarrow{\partial}_A^y - \overleftrightarrow{\partial}_A^x) + m \right] \psi,$$

y el Hamiltoniano,

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C. \quad (6.10)$$

La estabilidad de estos vinculos se analiza mediante el Hamiltoniano primario H_P , formado al sumar a H_C una combinación lineal de las ligaduras primarias:

$$H_P = H_C + \int d^3x \left[\bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \quad (6.11)$$

donde $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2$ y $(\lambda, \bar{\lambda})$ sus respectivos multiplicadores de Lagrange. El espacio de fase de la teoría es definido por las coordenadas $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$, de manera que los corchetes de Poisson a tiempos iguales ($x^+ = y^+$) correspondientes a estas coordenadas son definidos por:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y), \quad (6.12)$$

con la delta de Dirac en tres dimensiones definida de la siguiente manera:

$$\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2).$$

A partir de (6.12), es posible comprobar que los vínculos primarios satisfacen los siguientes corchetes de Poisson:

$$\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} = i \beta_{ab}^+ \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} = -i \beta_{ba}^+ \delta^3(x-y). \quad (6.13)$$

$P\beta^+ = P^+$	$P\beta^- = P^-$	$P\beta^k = P^k$	$P^+\beta^+ = 0$
$P^-\beta^+ = P$	$P^-\beta^- = 0$	$P^-\beta^k = 0$	$P^k\beta^+ = 0$
$\beta^-P = (P^+)^\dagger$	$\beta^+P = (P^-)^\dagger$	$\beta^kP = -(P^k)^\dagger$	$\beta^- (P^+)^\dagger = 0$
$\beta^- (P^-)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^k (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^- (P^k)^\dagger = 0$
$P^+\beta^k = 0$	$P^k\beta^l = \delta_l^k P$	$\beta^k (P^+)^\dagger = 0$	$\beta^l (P^k)^\dagger = \delta_l^k P$
$P^+\beta^- = P$	$P^k\beta^- = 0$	$\beta^+ (P^+)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^k)^\dagger = 0$

 Cuadro 6.1: Relaciones algebraicas entre los proyectores de los campos y las matrices β

Los resultados previos nos permiten calcular las condiciones de consistencia. Primero, para la ligadura $\theta(x)$, se obtiene:

$$\dot{\theta} = \left\{ \theta(x), H_P \right\} = (i\partial_A^x \beta^A - m) \psi + i\beta^+ \lambda \approx 0. \quad (6.14)$$

Similarmente, la estabilidad de la ligadura $\bar{\theta}(x)$ implica:

$$\dot{\bar{\theta}} = \left\{ \bar{\theta}(x), H_P \right\} = \bar{\psi} (\beta^A i\partial_A^x + m) + i\bar{\lambda} \beta^+ \approx 0. \quad (6.15)$$

Las relaciones (6.14) y (6.15) al usar las propiedades de los operadores de proyección, permiten fijar algunas componentes de los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$. Utilizando relaciones entre las matrices β y los operadores de proyección que se resumen en la tabla 6.1, es posible deducir

$$P = P^\dagger, \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P, \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P. \quad (6.16)$$

Al proyectar $\theta(x)$, se establecen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P^-\psi) + i\partial_k^x (P^k\psi) - m(P\psi) + i(P^+\lambda) \approx 0 \\ P^+\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P\psi) - m(P^+\psi) \approx 0, \\ P^l\dot{\theta} &= i\partial_l^x (P\psi) - m(P^l\psi) \approx 0, \\ P^-\dot{\theta} &= -m(P^-\psi) + i(P\lambda) \approx 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

De estas, se determinan dos componentes de $\lambda(x)$ que son: $(P\lambda, P^+\lambda)$. El procedimiento de estabilidad genera nuevos vínculos, obtenidos al aplicar el proyector $(1 - \beta^+\beta^-)$, de manera que se deduce la siguiente ligadura secundaria:

$$\omega_\delta = \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \right]_\delta \approx 0, \quad (6.18)$$

con $\delta = 2, 3, 4$. Al utilizar los operadores de proyección es posible observar que:

$$\begin{aligned}
 P^+ \omega &= P^+ \left(\beta^- i \partial_-^x \psi + \beta^k i \partial_k^x \psi - m \psi \right) = i \partial_-^x (P \psi) - m (P^+ \psi) \\
 &= P^+ \dot{\theta} \approx 0, \\
 P^l \omega &= P^l \left(\beta^- i \partial_-^x \psi + \beta^k i \partial_k^x \psi - m \psi \right) = i \partial_l^x (P \psi) - m (P^l \psi) \\
 &= P^l \dot{\theta} \approx 0, \\
 P \omega &= 0, \\
 P^- \omega &= 0,
 \end{aligned}$$

resultados que son consistentes con la ecuación (6.17). Al analizar la estabilidad de $\bar{\theta}(x)$, se deduce:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\theta}} P &= i \partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] - i \partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + m (\bar{\psi} P) + i [\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] \approx 0 \\
 \dot{\bar{\theta}} (P^+)^{\dagger} &= m [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + i (\bar{\lambda} P) \approx 0, \\
 \dot{\bar{\theta}} (P^l)^{\dagger} &= i \partial_l^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^l)^{\dagger}] \approx 0, \\
 \dot{\bar{\theta}} (P^-)^{\dagger} &= i \partial_-^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^-)^{\dagger}] \approx 0,
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

lo que fija dos componentes de $\bar{\lambda}(x)$, que son $(\bar{\lambda} P, \bar{\lambda} (P^-)^{\dagger})$ y hace surgir un nuevo vínculo secundarios,

$$\bar{\omega}_{\delta} = [\bar{\psi} (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+)]_{\delta} \approx 0, \tag{6.20}$$

con $\delta = 3, 4, 5$. De la relación (6.20) resulta:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} (P^l)^{\dagger} &= (i \partial_-^x \bar{\psi} \beta^- + i \partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi}) (P^l)^{\dagger} = i \partial_l^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^l)^{\dagger}] \\
 &= \dot{\bar{\theta}} (P^l)^{\dagger} \approx 0 \\
 \bar{\omega} (P^-)^{\dagger} &= (i \partial_-^x \bar{\psi} \beta^- + i \partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi}) (P^-)^{\dagger} = i \partial_-^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^-)^{\dagger}] \\
 &= \dot{\bar{\theta}} (P^-)^{\dagger} \approx 0 \\
 \bar{\omega} P &= 0, \\
 \bar{\omega} (P^+)^{\dagger} &= 0,
 \end{aligned}$$

expresiones consistentes con (6.19). La teoría ahora contiene seis ligaduras secundarias

$$\begin{aligned}
 \omega_{\delta} &= [(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x - m) \psi]_{\delta} \approx 0, & \delta = 2, 3, 4, \\
 \bar{\omega}_{\delta} &= [\bar{\psi} (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+)]_{\delta} \approx 0, & \delta = 3, 4, 5,
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

los cuales satisfacen los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x + m) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_A^x \beta^A - m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab} \delta^3(x - y).
\end{aligned} \tag{6.22}$$

La estabilidad de estos se analiza calculando:

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+ \beta^-) [(\beta^A i \partial_A^x - m) \lambda(x)] \approx 0. \tag{6.23}$$

Al proyectar $\dot{\omega}$ se obtienen:

$$\begin{aligned}
P \dot{\omega} &= 0, \\
P^- \dot{\omega} &= 0, \\
P^l \dot{\omega} &= i \partial_l^x (P \lambda) - m (P^l \lambda) \approx 0, \\
P^+ \dot{\omega} &= i \partial_-^x (P \lambda) - m (P^+ \lambda) \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

La ecuación (6.14) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\beta^+ \lambda \approx -\partial_-^x \beta^- \psi - \partial_k^x \beta^k \psi - i m \psi.$$

Utilizando la expresión de los proyectores del campo de DKP y las propiedades expresadas por la tabla 6.1, es posible deducir de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
(P^+ \lambda) &= -\partial_-^x (P^- \psi) - \partial_k^x (P^k \psi) - i m (P \psi), \\
(P \lambda) &= -i m (P^- \psi).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Por lo tanto, la cuarta ecuación que aparece en (6.24) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
P^+ \dot{\omega} &= m \partial_-^x (P^- \psi) + m \partial_-^x (P^- \psi) + m \partial_k^x (P^k \psi) + i m^2 (P \psi) \\
&= -P \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - i m^2 \right) \psi
\end{aligned}$$

Utilizando la relación (6.16), el resultado anterior se expresa:

$$P^+ \dot{\omega} \approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - i m^2 \right) \psi \right\},$$

de manera que hemos podido extraer un vínculo terciario definido por:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - i m^2 \right) \psi \approx 0 \tag{6.26}$$

Ahora, utilizando los resultados de (6.25) en la tercera ecuación de (6.24), se establece que:

$$P^l \dot{\omega} = m \partial_l^x (P^- \psi) - m (P^l \lambda), \quad (6.27)$$

lo cual determina las componentes $l = 1, 2$ del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$.

El análisis de estabilidad para $\bar{\omega}(x)$ conduce a:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\lambda} (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0. \quad (6.28)$$

La proyección de $\dot{\bar{\omega}}$, determina:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} P &= 0, \\ \dot{\bar{\omega}} (P^+)^{\dagger} &= 0, \\ \dot{\bar{\omega}} (P^l)^{\dagger} &= i \partial_l^x (\bar{\lambda} P) + m [\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger}] \approx 0, \\ \dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} &= i \partial_-^x (\bar{\lambda} P) + m [\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] \approx 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

A partir de (6.15), se puede deduce:

$$\bar{\lambda} \beta^+ \approx -\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- - \partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + i m \bar{\psi}, \quad (6.30)$$

con lo cual es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} P) &= i m [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}], \\ [\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] &= -\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + \partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + i m (\bar{\psi} P). \end{aligned}$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$\dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} \approx \left\{ \bar{\psi} \left[-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + i m^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^{\dagger},$$

donde la relación (6.16) ha sido utilizada. Así, se ha podido deducir un vínculo terciarios definido como:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + i m^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \quad (6.31)$$

De la tercera ecuación en (6.29) se puede verificar que:

$$\dot{\bar{\omega}} (P^l)^{\dagger} = -m \partial_l^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + m [\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger}], \quad (6.32)$$

lo que resulta en condiciones para las componentes $l = 1, 2$ del multiplicador $\bar{\lambda}(x)$. En resumen, el sistema posee el siguiente conjunto de ligaduras terciarias:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - i m^2 \right) \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + i m^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0.. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Para completar el procedimiento de Dirac, se verifica la estabilidad temporal de las ligaduras terciarias (6.33). Utilizando los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}\{\Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y)\} &= \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\ \{\bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y)\} &= \left[\left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{ab}^T \delta^3(x-y).\end{aligned}\quad (6.34)$$

El estudio de estabilidad de $\Omega(x)$ muestra que:

$$\dot{\Omega} = (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda. \quad (6.35)$$

Al proyectar Ω se obtiene:

$$\begin{aligned}P^- \dot{\Omega} &= 0, \\ P^k \dot{\Omega} &= 0, \\ P \dot{\Omega} &= 0, \\ P^+ \dot{\Omega} &= -2m \partial_-^x (P^- \lambda) - m \partial_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda),\end{aligned}$$

de manera que $\lambda(x)$ queda completamente fijado, ya que todas sus componentes se determinan. De manera similar, la consistencia sobre $\bar{\Omega}(x)$ se analiza de forma análoga:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \left(-2m \partial_-^x \bar{\lambda} \beta^- - m \partial_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda} \right) \beta^+ (\beta^-)^2. \quad (6.36)$$

A partir de la cual se deduce que:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Omega}} (P^k)^\dagger &= 0, \\ \dot{\bar{\Omega}} (P^+)^\dagger &= 0, \\ \dot{\bar{\Omega}} P &= 0 \\ \dot{\bar{\Omega}} (P^-)^\dagger - 2m \partial_-^x [\bar{\lambda} (P^+)^\dagger] - m \partial_k^x [\bar{\lambda} (P^k)^\dagger] + im^2 (\bar{\lambda} P) &= 0,\end{aligned}$$

Este análisis confirma que $\bar{\lambda}$ también queda totalmente fijado, y se concluye que no surgen más ligaduras.

En síntesis, la teoría queda definida por el conjunto de vínculos:

$$\begin{aligned}\theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi, \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \\ \omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) \left(\beta^A i \partial_A^x - m \right) \psi, \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left(i \partial_A^x \beta^A + m \right) (1 - \beta^- \beta^+), \\ \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left(-2m \partial_-^x \beta^- - m \partial_k^x \beta^k + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2.\end{aligned}\quad (6.37)$$

Los corchetes de Poisson (6.13), (6.22) y (6.34) establecen que este conjunto es de segunda clase, una característica consistente con el análisis de DKP en coordenadas convencionales, aunque las ligaduras terciarias sean exclusivos del plano nulo.

6.2. Ecuaciones de movimiento

A continuación, se establece la equivalencia entre las ecuaciones de Hamilton (en el espacio de fase) y las ecuaciones de Euler-Lagrange (en el espacio de configuración). La evolución cinemática de la teoría es regida por el Hamiltoniano primario:

$$H_P = \int d^3y \left[\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda \right],$$

lo que implica que el cambio temporal de los campos $(\psi, \bar{\psi})$ es:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_a(x) &= \left\{ \psi_a(x), H_E \right\} = \lambda_a(x), \\ \dot{\bar{\psi}}_a(x) &= \left\{ \bar{\psi}_a(x), H_E \right\} = \bar{\lambda}_a(x), \end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\psi} = \lambda, \quad \dot{\bar{\psi}} = \bar{\lambda}, \quad (6.38)$$

Inicialmente, esta variación parecería indeterminada debido a los multiplicadores $(\lambda, \bar{\lambda})$. Sin embargo, como los vínculos de la teoría libre son de segunda clase, su consistencia permite determinar y fijar dichos multiplicadores. El cambio temporal de los momentos $(p, \bar{p})$, resulta ser:

$$\begin{aligned} \dot{p}_a(x) &= \left\{ p_a(x), H_E \right\} = \left\{ \left(\beta^A i \partial_A^x - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda \right\}_a, \\ \dot{\bar{p}}_a(x) &= \left\{ \bar{p}_a(x), H_E \right\} = \left\{ -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A^x + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ \right\}_a. \end{aligned}$$

Al aplicar la condición de los vínculos primarios se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \partial_+ p = \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda = \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi \\ &\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi, \end{aligned}$$

entonces

$$\beta^+ i \partial_+ \psi + \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi = \left(\beta^\mu i \partial_\mu - m \right) \psi \approx 0. \quad (6.39)$$

De modo similar,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ = -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ \\ &\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\bar{\psi} \left(\beta^+ i \partial_+ \right) + \bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) = \bar{\psi} \left(\beta^\mu i \partial_\mu + m \right) \approx 0. \quad (6.40)$$

Las ecuaciones (6.39) y (6.40) garantizan que las ecuaciones de campo derivadas del formalismo de Hamilton son débilmente equivalentes a las del formalismo de Euler-Lagrange.

6.3. Corchetes de Dirac

Para invertir los vínculos de segunda clase, se proyectan de manera similar al caso $1+1$ dimensiones. Esto requiere emplear las propiedades de las matrices β presentadas a continuación:

$$\begin{aligned}
 (\beta^+)^T &= \beta^- \quad , \quad (\beta^-)^T = \beta^+ , \\
 (\beta^0)^\dagger &= \beta^0 \quad , \quad (\beta^1)^\dagger = -\beta^1 , \\
 P &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ , \\
 P^+ &= P \beta^+ = \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) = \beta^- (\beta^+)^2 , \\
 P^- &= P \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 , \\
 P^+ \beta^- &= P = P^- \beta^+ \quad , \quad P^+ \beta^+ = 0 = P^- \beta^- ,
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

junto con

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P ,$$

además de los resultados presentados en la tabla 6.1. Estas propiedades, junto con la representación explícita de las variables del espacio de fase $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$ que definen el espacio de fase, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi^* & \bar{\psi}^+ & \bar{\psi}^1 & \bar{\psi}^2 & \bar{\psi}^- \end{pmatrix} , \\
 p &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_+ \\ p_1 \\ p_2 \\ p_- \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p} \equiv \begin{pmatrix} \bar{p}_\varphi & \bar{p}_+ & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_- \end{pmatrix} ,
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

permiten proyectar las ligaduras de la siguiente manera (6.41) se puede establecer:

- El vínculo primario

$$\theta = p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 ,$$

proyecta en

$$\begin{aligned}
 P\theta &= p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ \approx 0 , \\
 P^+\theta &= p_+ \approx 0 , \\
 P^k\theta &= p_k \approx 0 , \\
 P^-\theta &= p_- + \frac{i}{2} \varphi \approx 0 .
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

■ La ligadura secundaria

$$\begin{aligned}\omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x - m) \psi \\ &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x + \beta^k i \partial_k^x - m) \psi \approx 0\end{aligned}$$

proyecta en

$$\begin{aligned}P\omega &= 0, \\ P^+\omega &= i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^k\omega &= i\partial_k^x \varphi - m\psi^k \approx 0, \\ P^-\omega &= 0,\end{aligned}\tag{6.44}$$

■ La proyección de la ligadura terciaria

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^l \partial_l^x - im^2 \right) \psi \approx 0,$$

resulta en

$$\begin{aligned}P\Omega &= 0, \\ P^+\Omega &= -2m \partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi \approx 0 \\ P^k\Omega &= 0, \\ P^-\Omega &= 0.\end{aligned}\tag{6.45}$$

■ El vinculo conjugado

$$\bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0$$

proyecta en

$$\begin{aligned}\bar{\theta}P &= \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- \approx 0, \\ \bar{\theta} (P^+)^\dagger &= \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* \approx 0, \\ \bar{\theta} (P^k)^\dagger &= \bar{p}_k \approx 0, \\ \bar{\theta} (P^-)^\dagger &= \bar{p}_- \approx 0.\end{aligned}\tag{6.46}$$

■ La ligadura

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{\psi} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \\ &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m) (1 - \beta^- \beta^+),\end{aligned}$$

proyecta en:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}P &= 0, \\ \bar{\omega} (P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\omega} (P^k)^\dagger &= i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \approx 0, \\ \bar{\omega} (P^-)^\dagger &= i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.\end{aligned}\tag{6.47}$$

- Finalmente, la proyección del vínculo

$$\overline{\Omega} = \overline{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0,$$

arroja

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} P &= 0, \\ \overline{\Omega} (P^+)^{\dagger} &= 0, \\ \overline{\Omega} (P^k)^{\dagger} &= 0, \\ \overline{\Omega} (P^-)^{\dagger} &= -2m\partial_-^x \overline{\psi}^+ + m\partial_l^x \overline{\psi}^l + im^2 \varphi^* \approx 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, el conjunto de ligaduras de segunda clase se establece como

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv p_{\varphi} + \frac{i}{2}\psi^+ & \Psi_8 &\equiv \overline{p}_{\varphi} - \frac{i}{2}\overline{\psi}^- \\ \Psi_2 &\equiv p_+ & \Psi_9 &\equiv \overline{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \\ \Psi_3 &\equiv p_k & \Psi_{10} &\equiv \overline{p}_k \\ \Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi & \Psi_{11} &\equiv \overline{p}_- \\ \Psi_5 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & \Psi_{12} &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\overline{\psi}^- \\ \Psi_6 &\equiv i\partial_k^x \varphi - m\psi^k & \Psi_{13} &\equiv i\partial_k^x \varphi^* + m\overline{\psi}^k \\ \Psi_7 &\equiv -2m\partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi & \Psi_{14} &\equiv -2m\partial_-^x \overline{\psi}^+ + m\partial_k^x \overline{\psi}^k + im^2 \varphi^* \end{aligned} \quad (6.48)$$

A partir de estas 14 ligaduras, se construye la matriz de vínculos segunda clase $D_{ij}(x, y)$, definida por:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}. \quad (6.49)$$

Esta matriz presenta la estructura de bloques:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 7} & \varphi(x, y) \\ \chi(x, y) & 0_{7 \times 7} \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

donde los bloques $A(x, y)$ y $B(x, y)$ son matrices 7×7 que tienen la forma:

$$\varphi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & i\partial_k^x & -im^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & m\partial_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im^2 & 0 & -m\partial_k^x & -2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$\chi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & i\partial_k^x & im^2 \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -m\partial_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ im^2 & -2m\partial_-^x & m\partial_k^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (6.51)$$

mientras que $0_{7 \times 7}$ se interpretan como matrices nulas de 7×7 .

Para calcular los Corchetes de Dirac, se requiere obtener la inversa de la matriz vínculos $D(x, y)$ que deberá satisfacer la ecuación

$$\int d^3z D(x, z) C^{-1}(z, y) = \int d^3z C^{-1}(x, z) D(z, y) = \delta^3(x - z). \quad (6.52)$$

Tras un laborioso cálculo, se halla que esta inversa $C^{-1}(x, y)$ tiene la forma de bloques:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0_{9 \times 9} & \psi(x, y) \\ \phi(x, y) & 0_{9 \times 9} \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

donde

$$\psi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo que los elementos de matriz de $\psi(x, y)$ y $\phi(x, y)$ son funciones de (x, y) y tienen la forma:

■ Funciones $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 A_{10}(x, y) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y), \\
 A_{11}(x, y) &= \frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
 A_{12}(x, y) &= \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
 A_{13}(x, y) &= \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
 A_{14}(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y) \right], \\
 A_{15}(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 B_{10}(x, y) &= \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y) \right], \\
 B_{11}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \delta^3(x - y) \right\}, \\
 B_{12}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 B_{13}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 B_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y) \right] \right\}, \\
 B_{15}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y) \right], \\
 B_{16}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
 B_{17}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
 B_{18}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 C_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 C_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 C_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 C_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 C_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 C_{15}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 C_{16}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 D_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 D_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
 D_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 D_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 D_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 D_{15}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 D_{17}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $E_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
E_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
E_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\
E_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
E_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
E_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
E_{15}(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
F_{10}(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
F_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta^3(x - y), \\
F_{12}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
F_{13}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
F_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
F_{15}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $G_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
G_{12}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y), \\
G_{14}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).
\end{aligned}$$

■ Funciones $H_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
H_{13}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y), \\
H_{14}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).
\end{aligned}$$

■ Funciones $K_i(x, y)$:

$$K_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

■ Funciones $M_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
M_1(x, y) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
M_2(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
M_3(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
M_4(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
M_5(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
M_6(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $P_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
P_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
P_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
P_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
P_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\
P_6(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $Q_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
Q_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
Q_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
Q_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
Q_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
Q_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
Q_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
Q_7(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $R_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 R_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 R_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 R_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 R_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 R_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
 R_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 R_8(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $S_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 S_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 S_2(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{4} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \right\}, \\
 S_3(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 S_4(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 S_5(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \delta^3(x - y) \right], \\
 S_6(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 S_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
 S_8(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
 S_9(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $T_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad T_5(x, y) = -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y) , \\ T_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] , \\ T_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) , \\ T_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) , \\ T_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) . \end{aligned}$$

■ Funciones $U_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} U_2(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right) , \\ U_3(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y) . \end{aligned}$$

■ Funciones $W_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} W_2(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right) , \\ W_4(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y) . \end{aligned}$$

■ Funciones $Z_i(x, y)$:

$$Z_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) .$$

La obtención de esta inversa permite definir el Corchete de Dirac entre dos variables de fase $A_a(x)$ y $B_b(y)$ como:

$$\begin{aligned} \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\} \\ &\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\} . \end{aligned} \quad (6.54)$$

Un análisis de las 18 ecuaciones de ligadura (6.48), es posible determinar que el espacio de fase expandido por $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$, de dimensión 20, solamente 2 campos son independientes. Dada la forma de los vínculos, estos grados de libertad se pueden considerar como siendo (φ, φ^*) . Empleando los Corchetes de Poisson no nulos entre las coordenadas (φ, φ^*) y los vínculos en (6.48):

$$\left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\} = \delta^3(x - u) \quad , \quad \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\} = \delta^3(x - u) , \quad (6.55)$$

se calcula el Corchete de Dirac para el campo $\varphi(x)$,

$$\{\varphi(x), B_b(y)\}_D = \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\} - \int dv D_{8\beta}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}.$$

El Corchete de Dirac entre los campos (φ, φ^*) es:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = M_1(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y). \quad (6.56)$$

Usando de la forma física de la función de onda del campo de DKP para el sector de espín 0 indicada por la ecuación (4.126),

$$\varphi(x) = \sqrt{m} \phi(x) \quad , \quad \varphi^*(x) = \sqrt{m} \phi^*(x), \quad (6.57)$$

el Corchete de Dirac se simplifica a

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = m \left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y),$$

es decir:

$$\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y), \quad (6.58)$$

confirmando la equivalencia con las relaciones (4.70) previamente derivadas para el caso libre.

Capítulo 7

Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $1 + 1$ Dimensiones

En el periodo comprendido entre 1939 y 1970, los trabajos desarrollados con la ecuación de DKP se direccionaron al estudio de partículas cargadas que interactúan con un campo electromagnético. Tomando como base la formulación de DKP y de Klein-Gordon, varios estudios de diferentes procesos condujeron a resultados idénticos, hasta correcciones de un loop [1]. Sin embargo, A. Wightman [2] demostró que cuando el campo de DKP se acopla al campo electromagnético, la ecuación de campo para la partícula de espín 0 es estable bajo perturbaciones locales suaves de campos externos.

Es bien sabido que, en el caso de campos libres, existe una equivalencia entre el formalismo de DKP con las ecuaciones de campo de KG y de Proca. No obstante, cuando se introduce una interacción, como la electromagnética, surgen ciertas dudas. Se ha demostrado [3] que la presencia de términos anómalos en el Hamiltoniano de la teoría y la aparente diferencia entre las descripciones desaparecen si se especifican cuidadosamente las componentes físicas de los campos de DKP. Además, se ha probado [4] que los elementos de matriz S en las teorías de DKP y de KG coinciden en el caso de partículas de espín 0 que interactúan con campos externos gauge abelianos y no abelianos, incluyendo el campo gravitacional.

En este capítulo estudiaremos la estructura canónica del campo de DKP cuando interactúa con el campo electromagnético. Se realizará, asimismo, el estudio de la estructura de vínculos de la teoría para el caso de dos y cuatro dimensiones en el formalismo de las coordenadas de plano nulo. Además, se estudiará la naturaleza gauge del problema y se considerará la condición de gauge más conveniente con el fin de calcular los DB entre los grados de libertad.

7.1. Estructura de Vínculos

En esta sección se desarrolla el análisis hamiltoniano del campo escalar descrito por la ecuación de Duffin–Kemmer–Petiau (DKP) en interacción con un campo electromagnético en dos dimensiones. En forma general, la teoría es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^\mu (\bar{D}_\mu \Psi) - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\Psi}) \beta^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

donde hemos definido las derivadas covariantes $D_\mu \equiv i\partial_\mu - gA_\mu$ y $\bar{D}_\mu \equiv i\partial_\mu + gA_\mu$. Las ecuaciones de campo correspondientes a la densidad Lagrangiana (7.1) son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\Psi} \beta^\nu \Psi = 0, \quad \bar{\Psi} (\beta^\mu \bar{D}_\mu + m) = 0, \quad (\beta^\mu D_\mu - m) \Psi = 0. \quad (7.2)$$

Por su parte, los momentos canónicos $(\pi^\mu, \bar{p}, p)$ conjugados a las variables $(A_\mu, \Psi, \bar{\Psi})$, respectivamente, son definidos de la siguiente manera:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = -F^{+\mu}, \quad \bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+, \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \Psi \quad (7.3)$$

Del conjunto de relaciones (7.3), es posible deducir el conjunto de vínculos primarios:

$$\pi^+ \approx 0, \quad \theta = p + \frac{i}{2} \beta^+ \Psi \approx 0, \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+ \approx 0, \quad (7.4)$$

junto con la siguiente relación dinámica:

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+ \quad (7.5)$$

La evolución temporal de las variables del espacio de fase $(A_\mu, \Psi, \bar{\Psi}, \pi^\mu, \bar{p}, p)$ requiere introducir el Hamiltoniano canónico, el cual se define como:

$$H_C = \int dx^- \left\{ \frac{1}{2} \pi^{-2} + \left(\pi^- \partial_- + g \bar{\Psi} \beta^+ \Psi \right) A_+ + \bar{\Psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + g A_- \beta^- + m \right] \Psi \right\}. \quad (7.6)$$

Debido a la presencia de los vínculos primarios, la dinámica del sistema es gobernada por el Hamiltoniano primario H_P el cual resulta de sumar al Hamiltoniano canónico una combinación de las ligaduras primarias, es decir:

$$H_P = H_C + \int dx^- \left(u(x) \pi^+(x) + \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right), \quad (7.7)$$

donde $(u, \bar{\lambda}, \lambda)$ son un conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios $(\pi^+, \theta, \bar{\theta})$, respectivamente. La consistencia de los vínculos primarios, requiere

definir los corchetes fundamentales de Poisson entre las variables dinámicas fundamentales, como se aprecia enseguida:

$$\begin{aligned}\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} &= \delta_\mu^\nu \delta(x-y), \\ \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta(x-y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta(x-y).\end{aligned}\tag{7.8}$$

De (7.8), es posible mostrar que el conjunto de vínculos primarios satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= i\beta_{ab}^+ \delta(x-y), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= -i\beta_{ba}^+ \delta(x-y).\end{aligned}\tag{7.9}$$

La consistencia de $\pi^+(x)$ establece que:

$$\dot{\pi}^+(x) = \partial_- \pi^-(x) - g \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \equiv G(x) \approx 0,\tag{7.10}$$

es decir, surge una ligadura secundaria asociada al sector electromagnético y que se identifica como la ley de Gauss para la electrodinámica escalar. La consistencia de este nuevo vínculo requiere considerar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g [\beta^+ \psi(x)]_b \delta(x^- - y^-) \\ \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g [\bar{\psi} \beta^+(x)]_b \delta(x^- - y^-).\end{aligned}\tag{7.11}$$

A partir de los resultados anteriores se determina que:

$$\dot{G} = \partial_- (\bar{\psi} \beta^- \psi) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \approx 0\tag{7.12}$$

La conservación de la Ley de Gauss se verifica al analizar la consistencia de los vínculos primarios del sector DKP. Específicamente, en el caso de $\theta(x)$ resulta:

$$\dot{\theta} = (\beta^- D_-^x - m) \psi - g A_+ \beta^+ \psi + i \beta^+ \lambda \approx 0,\tag{7.13}$$

donde $D_-^x \equiv i\partial_-^x - gA_-$. En forma similar, la consistencia de $\bar{\theta}(x)$ implica:

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) + g A_+ \bar{\psi} \beta^+ + i \bar{\lambda} \beta^+ \approx 0,\tag{7.14}$$

con $\bar{D}_-^x \equiv i\partial_-^x + gA_-$. A partir de (7.13) y (7.14), se obtiene que:

$$\begin{aligned}\beta^+ \lambda &\approx i \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi - ig A_+ \beta^+ \psi, \\ \bar{\lambda} \beta^+ &\approx i \bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) + ig A_+ \bar{\psi} \beta^+.\end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en (7.12) se obtiene:

$$\dot{G} = \partial_- (\bar{\psi} \beta^- \psi) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda = 0,\tag{7.15}$$

confirmando que la ley de Gauss de la electrodinámica escalar es automáticamente conservada.

Al emplear la representación matricial de β en $1 + 1$ dimensiones, la ecuación (7.13) al ser proyectada por $\beta^- \beta^+$, resulta en:

$$\begin{aligned} i\beta^- \beta^+ \left(\lambda + ig A_+ \psi \right) &\approx -\beta^- \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi \\ &\Downarrow \\ \begin{pmatrix} i(\lambda_1 + ig A_+ \psi_1) \\ i(\lambda_2 + ig A_+ \psi_2) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\psi_3 \\ m\psi_1 - D_-^x \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La consistencia de $\theta(x)$ impone condiciones a $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ del multiplicador $\lambda(x)$, dejando la componente $\lambda_3(x)$ indefinida. Análogamente, al aplicar el proyector $\beta^+ \beta^-$ en (7.14), se obtiene:

$$i(\bar{\lambda} - ig A_+ \bar{\psi}) \beta^+ \beta^- \approx -\bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \beta^-,$$

que en forma matricial se escribe:

$$\begin{pmatrix} i(\bar{\lambda}_1 - ig A_+ \bar{\psi}_1) & 0 & i(\bar{\lambda}_3 - ig A_+ \bar{\psi}_3) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m\bar{\psi}_2 & 0 & m\bar{\psi}_1 + \bar{D}_-^x \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}.$$

Esto fija las componentes $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$, mientras que $\bar{\lambda}_2(x)$ del multiplicador $\bar{\lambda}(x)$ permanece libre. Esta arbitrariedad sugiere la aparición de vínculos secundarios en el sector escalar.

De manera similar a la teoría libre, estas nuevas ligaduras se deducen a partir de los proyectores complementarios. Así, el conjunto de vínculos para el sector escalar es el siguiente::

$$\begin{aligned} \omega_\delta &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi \right]_\delta \approx 0, & \delta = 2, \\ \bar{\omega}_\delta &= \left[\bar{\psi} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta \approx 0, & \delta = 3. \end{aligned} \quad (7.16)$$

La consistencia de este nuevo conjunto de ligaduras requiere tener en cuentas los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[\left(D_-^x \beta^- - m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \end{aligned} \quad (7.17)$$

junto con las relaciones,

$$\begin{aligned}\left\{ \omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= -g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= g \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta(x^- - y^-).\end{aligned}\quad (7.18)$$

Por lo tanto, la conservación en el tiempo de $\omega(x)$ implica:

$$\dot{\omega} = \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[-g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \psi + \left(\beta^- D_-^x - m \right) \lambda \right] \approx 0. \quad (7.19)$$

Al usar su representación matricial se obtiene:

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \psi_1 + D_-^x \lambda_1 - m \lambda_2 \\ -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \psi_1 + D_-^x \lambda_1 - m \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Esto establece una nueva relación entre $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$, mientras $\lambda_3(x)$ permanece indeterminada. Seguidamente, al aplicar la identidad $\beta^- \beta^+ \beta^- = \beta^+ \beta^- \beta^+$, se obtiene:

$$\beta^+ \dot{\omega} = -im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x \psi + im^2 \beta^- \beta^+ \psi - g \pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \psi - ig A_+ \beta^+ \omega \approx 0.$$

Esto revela un vínculo terciario, el cual se define como:

$$\Omega \equiv \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g \pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \psi \approx 0 \quad (7.20)$$

De igual manera, el análisis de consistencia de $\bar{\omega}$ revela que:

$$\dot{\bar{\omega}} = \left[g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \approx 0. \quad (7.21)$$

Al ser representado en forma matricial, se determina:

$$\dot{\bar{\omega}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}_1 + \bar{D}_-^x \bar{\lambda}_1 + m \bar{\lambda}_3 \\ g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}_1 + \bar{D}_-^x \bar{\lambda}_1 + m \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx 0. \quad (7.22)$$

Esto establece una nueva relación entre $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$, mientras que $\bar{\lambda}_2(x)$ aún permanece indefinido, lo que indica la existencia de una nueva ligadura, la cual resulta de:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}} \beta^+ &= \left[g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \beta^+ \\ &\approx im \bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- + g \pi^- \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \beta^+ \approx 0.\end{aligned}$$

Esto define un nuevo vínculo terciario, denotado como:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[im \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- + g \pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \approx 0. \quad (7.23)$$

Para analizar la consistencia de este nuevo conjunto de ligaduras, se calculan los siguientes Corchetes de Poisson entre $(\Omega, \bar{\Omega})$ y el resto de las ligaduras del sector DKP,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
 &\quad \left. - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\theta}_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \bar{D}_-^x - im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
 &\quad \left. + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[im \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
 &\quad \left. + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
 \left\{ \theta_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= \left[im D_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) - im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
 &\quad \left. - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la consistencia de $\Omega(x)$ implica:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= \left\{ \Omega, H_p \right\} \\
 &= ig \left\{ m \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) - ig \left(\bar{\psi} \beta^- \psi \right) \beta^+ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \right\} \beta^- \psi \\
 &\quad + \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \lambda \approx 0. \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

Al usar la representación matricial de β en 1 + 1 dimensiones, se tiene que:

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 2igm \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \psi_3 + g^2 \left(\bar{\psi} \beta^- \psi \right) \psi_1 + (im^2 - g\pi^-) \lambda_1 - 2im D_-^x \lambda_3 \\ igm \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \psi_1 - im D_-^x \lambda_1 + im^2 \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Esto establece una nueva condición para las componentes $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ del multiplicador $\lambda(x)$, además de una condición para $\lambda_3(x)$. Consecuentemente, la consistencia de $\Omega(x)$ no genera nuevas ligaduras. Análogamente, la consistencia de la ligadura $\bar{\Omega}(x)$ implica:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\Omega}} &= \left\{ \bar{\Omega}, H_p \right\} \\
 &= ig \bar{\psi} \beta^- \left[m \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + ig \left(\bar{\psi} \beta^- \psi \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \beta^+ \right] \\
 &\quad + \bar{\lambda} \left[im \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \approx 0, \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

relación que se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\Omega}} &= \left(-g^2 \left(\bar{\psi} \beta^- \psi \right) \bar{\psi}_1 + 2igm \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \bar{\psi}_2 + (im^2 + g\pi^-) \bar{\lambda}_1 + 2im \bar{D}_-^x \bar{\lambda}_2 \right. \\
 &\quad \left. igm \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \bar{\psi}_1 + im \bar{D}_-^x \bar{\lambda}_1 + im^2 \bar{\lambda}_3 \right). \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Esto establece una nueva condición para $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$ del multiplicador $\bar{\lambda}(x)$, junto con una condición que permite determinar $\bar{\lambda}_2(x)$.

7.2. Clasificación de los Vínculos

En resumen, el conjunto máximo de vínculos que la teoría posee es:

$$\begin{aligned}
 \pi^+ &\approx 0, & G &= \partial_-^x \pi^- - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \approx 0, \\
 \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0, & \bar{\theta} &= \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0, \\
 \omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_-^x - m) \psi \approx 0, \\
 \bar{\omega} &= \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0, \\
 \Omega &\equiv [-im(1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g \pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+] \psi \approx 0, \\
 \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} [im \bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \beta^+ \beta^- + g \pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+] \approx 0,
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

los cuales atisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
 \{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \} &= i \beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-) \\
 \{ G(x), \theta_b(y) \} &= -g \left[\beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_-^x - m) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \} &= \left[(\bar{D}_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \} &= \left[-im(1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
 &\quad \left. - g \pi^-(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \} &= \left[im \bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
 &\quad \left. + g \pi^-(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \omega_a(x), \Omega_b(y) \} &= g^2 \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_a \left[\beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \omega_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \} &= -g^2 \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \bar{\omega}_a(x), \Omega_b(y) \} &= -g^2 \left[\bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \left[\beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \bar{\omega}_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \} &= g^2 \left[\bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
 \{ \Omega_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \} &= im g^2 \left[\left[(1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_b \right. \\
 &\quad \left. + \left[\beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) \right]_b \right] \delta(x^- - y^-)
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Las relaciones previas implican que $\pi^+(x)$ tiene Corchete de Poisson nulo con todas las demás ligaduras de la teoría; en consecuencia, se clasifica como una ligadura de primera clase. No obstante, dado que se analiza una teoría gauge, se debe demostrar la existencia de un segundo vínculo de primera clase, análogo al resultado obtenido en (SQED).

Basándose en el análisis de SQED, la segunda ligadura de primera clase surge de una combinación lineal del segundo vínculo electromagnético y el conjunto de ligaduras del sector DKP. A continuación, se comprobaba que este segundo vínculo de primera clase se expresa como:

$$\Sigma \equiv G - ig \left(\bar{\psi}\theta - \bar{\theta}\psi \right) = \partial_-^x \pi^- - ig \left(\bar{\psi}p - \bar{p}\psi \right). \quad (7.30)$$

Con el propósito de la demostración, se evalúan los corchetes de Poisson de la ecuación (7.30) respecto a las ligaduras (7.28), comprobando que el resultado se anule (fuerte o débilmente). En consecuencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \theta_b(y) \right\} &= -ig\theta_a(x) \delta(x^- - y^-) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= ig\bar{\theta}_b(x) \delta(x^- - y^-) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \omega_b(y) \right\} &= -i\omega_b(x) \delta(x^- - y^-) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= ig\bar{\omega}_b(x) \delta(x^- - y^-) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \Omega_b(y) \right\} &= -ig\delta(x^- - y^-) \Omega_b(x) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= ig\delta(x^- - y^-) \bar{\Omega}_b(x) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= 0. \end{aligned}$$

A partir de los resultados previos, se concluye que la teoría admite el siguiente conjunto de vínculos de primera clase:

$$\pi^+ \approx 0, \quad \Sigma = \partial_-^x \pi^- - ig(\bar{\psi}p - \bar{p}\psi) \approx 0, \quad (7.31)$$

en cambio, el conjunto correspondiente de ligaduras de segunda clase está constituido por:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \approx 0, \\ \bar{\theta} &= \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ \approx 0, \\ \omega &= \left(1 - \beta^+\beta^-\right) \left(\beta^-D_-^x - m\right) \psi \approx 0, \\ \bar{\omega} &= \bar{\psi} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m\right) \left(1 - \beta^-\beta^+\right) \approx 0, \\ \Omega &\equiv \left[-im \left(1 + \beta^+\beta^-\right) \beta^-D_-^x + im^2\beta^-\beta^+ - g\pi^-\beta^+\beta^-\beta^+\right] \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left[im\bar{D}_-^x\beta^- \left(1 + \beta^-\beta^+\right) + im^2\beta^+\beta^- + g\pi^-\beta^+\beta^-\beta^+\right] \approx 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

A continuación, con el fin de fijar el gauge y transformar los vínculos de primera en segunda clase, se introducen las condiciones de gauge de cono de luz, definidas como:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0, \quad (7.33)$$

con ello se garantizara la equivalencia entre los resultados deducidos en el presente marco y los correspondientes a la electrodinámica escalar.

7.3. Ecuaciones de Movimiento

Una vez deducidos todos los vínculos de primera clase que la teoría presenta, estamos en condiciones de determinar por completo su dinámica, la cual reflejará la libertad de gauge inherente al sistema. Para ello, es necesario definir el Hamiltoniano extendido H_E , el cual se obtiene al considerar todos los vínculos de primera clase secundarios que surgen en el problema. En este caso, dicho Hamiltoniano se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_E &\equiv H_P + \int dx^- u_2(x) \Sigma(x) \\ &= \int dx^- \left[\frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^- \partial_-^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y) + g A_- \beta^- + m \right] \psi \right. \\ &\quad \left. + u_1 \pi^+ + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda + u_2 \Sigma \right]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Se procede ahora a considerar la evolución temporal de las variables dinámicas correspondientes al sector electromagnético. En particular, se estudia la dinámica de $A_+(x)$, obteniéndose:

$$\dot{A}_+(x) = \left\{ A_+(x), H_E \right\} = u_1(x). \quad (7.35)$$

De este modo, se observa que la evolución temporal de $A_+(x)$ permanece completamente indeterminada, ya que depende de $u_1(x)$, el cual constituye el multiplicador de Lagrange asociado a un vínculo de primera clase. Dicho parámetro, al no haber sido especificado, refleja la libertad de gauge inherente al sistema. De manera análoga al caso anterior, la evolución temporal del campo $A_-(x)$ determina la siguiente expresión:

$$\dot{A}_-(x) = \left\{ A_-(x), H_E \right\} = \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x u_2(x). \quad (7.36)$$

La relación obtenida sugiere que, con el fin de asegurar la equivalencia con la ecuación (7.5), el multiplicador de Lagrange $u_2(x)$ puede ser, en el caso más simple, una constante. Por otro lado, al examinar la evolución temporal de los momentos canónicos conjugados a las variables previamente introducidas, se deduce que:

$$\dot{\pi}^+(x) = \left\{ \pi^+(x), H_E \right\} = G(x) \approx 0. \quad (7.37)$$

Por otro lado, la evolución temporal del momento $\pi^-(x)$ permite determinar que:

$$\dot{\pi}^-(x) = \left\{ \pi^-(x), H_E \right\} = -g\bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x). \quad (7.38)$$

Combinando (7.36) y (7.37), es posible deducir que:

$$\dot{\pi}^+ = \partial_+^x F^{++} = \partial_-^x \pi^- - g\bar{\psi} \beta^+ \psi \approx -\partial_-^x F^{+-} - g\bar{\psi} \beta^+ \psi,$$

de manera que

$$\partial_\mu^x F^{\mu+} \approx g\bar{\psi} \beta^+ \psi.$$

En forma análoga, y teniendo en cuenta la anti simetría del tensor del campo electromagnético, se deduce que:

$$\dot{\pi}^- = -\partial_+^x F^{+-} = -\partial_\mu^x F^{\mu-} = -g\bar{\psi} \beta^- \psi,$$

en consecuencia, al considerar conjuntamente los dos resultados previos, se deduce que:

$$\partial_\mu^x F^{\mu\nu} - g\bar{\psi} \beta^\nu \psi \approx 0. \quad (7.39)$$

A continuación, al realizar el análisis correspondiente al sector DKP, se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{\psi}(x) = \left\{ \psi(x), H_E \right\} = \lambda(x) + i g u_2(x) \psi(x). \quad (7.40)$$

Por su parte, al analizar el comportamiento del campo $\bar{\psi}(x)$, se determina que:

$$\dot{\bar{\psi}}(x) = \left\{ \bar{\psi}(x), H_E \right\} = \bar{\lambda}(x) - i g u_2(x) \bar{\psi}(x). \quad (7.41)$$

De modo similar, al considerar la evolución temporal de los momentos canónicos $(p, \bar{p})$ a partir del Hamiltoniano extendido H_E , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{p}(x) &= \left\{ p(x), H_E \right\} \\ &= -g A_+(x) \beta^+ \psi(x) + \left[\beta^- \left(i \partial_-^x - g A_-(x) \right) - m \right] \psi(x) \\ &\quad + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(x) + i g u_2(x) p(x). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Considerando conjuntamente las expresiones (7.3) y (7.40), la ecuación (7.42) adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \partial_+ p = -g A_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^- \left(i \partial_- - g A_- \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta^+ g u_2 \psi + i g u_2 p \\ &\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi, \end{aligned}$$

es decir,

$$\beta^+ \left(i\partial_+ - gA_+ \right) \psi + \left[\beta^- \left(i\partial_- - gA_- \right) - m \right] \psi \approx -gu_2 \beta^+ \psi,$$

que en forma compacta se expresa:

$$\left(\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi \approx -gu_2 \beta^+ \psi. \quad (7.43)$$

De modo análogo, al considerar la evolución temporal del momento canónico $\bar{p}(x)$, se establece que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}(x) &= \left\{ \bar{p}(x), H_E \right\} \\ &= -gA_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^+ - \bar{\psi}(x) \left[\beta^- \left(i\partial_- + gA_-(x) \right) + m \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(x) \beta^+ - i gu_2(x) \bar{p}(x). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Utilizando (7.3) y (5.38), se infiere que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^- (i\partial_- + gA_-) + m \right] - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} gu_2 \bar{\psi} \beta^+ - i gu_2 \bar{p} \\ &\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+, \end{aligned}$$

o sea,

$$\bar{\psi} \beta^+ \left(i\partial_+ + gA_+ \right) + \bar{\psi} \left[\beta^- \left(i\partial_- + gA_- \right) + m \right] \approx gu_2 \bar{\psi} \beta^+,$$

la cual puede escribirse como:

$$\bar{\psi} \left(\beta^\mu \bar{D}_\mu + m \right) \approx gu_2 \bar{\psi} \beta^+. \quad (7.45)$$

En consecuencia, si las ecuaciones de campo obtenidas a nivel Hamiltoniano son débilmente equivalentes a las ecuaciones de campo derivadas a nivel Lagrangiano, se concluye que el multiplicador de Lagrange $u_2(x)$ debe satisfacer la condición $u_2(x) \approx 0$.

7.4. Proyección de los Vínculos

Con el propósito de calcular los corchetes de Dirac entre los grados de libertad de la teoría, se procede a reescribir los vínculos correspondientes al sector DKP en su forma más simple, es decir, en términos de las componentes elementales de los campos de DKP. A partir de las expresiones (5.37) y (5.38), es posible mostrar que:

■ Vínculo $\theta(x)$:

$$\begin{aligned} P\theta &= p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\ P^+\theta &= p_+ \approx 0, \\ P^-\theta &= p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0. \end{aligned}$$

■ Vínculos $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} P\omega &= 0, \\ P^+\omega &= D_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^-\omega &= 0. \end{aligned}$$

■ Vínculo $\Omega(x)$:

$$\begin{aligned} P\Omega &= -2imD_-^x \psi^- + im^2 \varphi - g\pi^- \varphi \approx 0 \\ P^+\Omega &= -imP^+\omega \approx 0, \\ P^-\Omega &= 0. \end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\theta}(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}P &= \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^+)^\dagger &= \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^-)^\dagger &= \bar{p}_- \approx 0. \end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\omega}(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}P &= 0, \\ \bar{\omega}(P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\omega}(P^-)^\dagger &= \bar{D}_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0. \end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\Omega}(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}P &= 2im\bar{D}_-^x \bar{\psi}^+ + im^2 \varphi^* + g\pi^- \varphi^* \approx 0, \\ \bar{\Omega}(P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\Omega}(P^-)^\dagger &= im\bar{\omega}(P^-)^\dagger \approx 0. \end{aligned}$$

De este modo, puede concluirse que, al expresarse en términos de las componentes de los campos DKP, el sector escalar presenta el siguiente conjunto de ligaduras de segunda

clase:

$$\begin{aligned}
 p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ &\approx 0, & p_+ &\approx 0, & p_- + \frac{i}{2}\varphi &\approx 0 \\
 D_-^x \varphi - m\psi^+ &\approx 0, & -2imD_-^x \psi^- + im^2\varphi - g\pi^- \varphi &\approx 0, \\
 \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- &\approx 0, & \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* &\approx 0, & \bar{p}_- &\approx 0, \\
 \bar{D}_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- &\approx 0, & 2im\bar{D}_-^x \bar{\psi}^+ + im^2\varphi^* + g\pi^- \varphi^* &\approx 0.
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

Finalmente, al expresar el vínculo $\Sigma(x)$ en términos de las componentes de los campos DKP, éste adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \partial_-^x \pi^- - ig(\bar{\psi}p - \bar{p}\psi) \\
 &= \partial_-^x \pi^- - ig\left(\varphi^* p_\varphi + \bar{\psi}^+ p_+ + \bar{\psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^-\right).
 \end{aligned}$$

7.5. Inversión de los Vínculos del Sector Electromagnético

A continuación, se realiza la inversión de los vínculos de segunda clase del sector electromagnético, conformados por las ligaduras de primera clase (7.31), las condiciones de gauge (7.33). Dichos elementos se denotarán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 &\equiv \pi^+, \\
 \Theta_2 &\equiv \partial_-^x \pi^- - ig\left(\varphi^* p_\varphi + \bar{\psi}^+ p_+ + \bar{\psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^-\right), \\
 \Theta_3 &\equiv A_-, \\
 \Theta_4 &\equiv \pi^- + \partial_-^x A_+,
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

A partir de (7.47), es posible construir una primera matriz la cual se define mediante los siguientes elementos:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Phi_i(x), \Phi_j(y) \right\}, \tag{7.48}$$

y que admiten la siguiente representación en forma matricial:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-). \tag{7.49}$$

Con el objetivo de suprimir las ligaduras (7.47), se construye un primer conjunto de corchetes de Dirac que, para dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(x)$, se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ A_a(x), \Theta_c(u) \right\} \\
 &\quad C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

En esta expresión, $C_{ij}^{-1}(x, y)$ caracteriza las componentes de la inversa de la matriz (7.49), la cual se obtiene a partir de la solución de la siguiente ecuación:

$$\int dz^- C(x, z) C^{-1}(z, y) = \int dz^- C^{-1}(x, z) C(z, y) = I \delta(x^- - y^-), \quad (7.51)$$

donde I es la matriz identidad de 3×3 . A partir de ello, es posible demostrar mediante un cálculo directo que la matriz $C^{-1}(x, y)$ adopta la siguiente representación:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.52)$$

A partir de (7.47) y bajo la definición de los DB D1, se puede verificar que se deben cumplir las identidades:

$$\begin{aligned} \pi^+ &= 0, \\ \partial_-^x \pi^- - i g (\varphi^* p_\varphi + \bar{\Psi}^+ p_+ + \bar{\Psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^-) &= 0, \\ A_- &= 0, \\ \pi^- + \partial_-^x A_+ &= 0, \end{aligned} \quad (7.53)$$

de manera que las coordenadas (A_-, π^+) resultan ser idénticamente nulas, mientras que A_+ constituye la única coordenada independiente asociada al sector electromagnético. Por consiguiente, puede afirmarse que, incluso sin considerar los vínculos correspondientes al sector DKP, el espacio de fase, parcialmente, esta conformado por las coordenadas independientes:

$$(A_+, \varphi, \varphi^*, \psi^+, \psi^-, \bar{\Psi}^+, \bar{\Psi}^-, p_\varphi, \bar{p}_\varphi, p_+, p_-, \bar{p}_+, \bar{p}_-). \quad (7.54)$$

Es posible mostrar que, cuando la variable dinámica A_a se identifica con uno de los campos pertenecientes al sector DKP, se cumple que:

$$\begin{aligned} \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ A_a(x), \Theta_2(u) \right\} \\ &\quad C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Entonces, si $B_b(y)$ corresponde a otro de los campos del sector DKP, a partir de la representación matricial (7.52) se obtiene que:

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}. \quad (7.56)$$

De (7.56) se deduce que el primer conjunto de DB entre campos de DKP coincide con los PB originalmente definidos entre dichas variables, de modo que:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\}_{D1} &= \delta_{ab} \delta(x - y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\}_{D1} &= \delta_{ab} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Ahora, en el caso en que $B_b = A_+$,

$$\left\{ A_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{1}{2} \int du \left\{ A_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-|.$$

Entonces, si $A_a(x) = \psi_a(x)$:

$$\left\{ \psi_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-|. \quad (7.58)$$

A partir de (7.53), es posible mostrar que:

$$\left\{ \psi_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} \psi_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.59)$$

De igual manera, cuando $A_a(x) = p_a(x)$:

$$\left\{ p_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} p_a(x) |x^- - y^-|, \quad (7.60)$$

lo cual, de forma equivalente, da lugar a:

$$\left\{ p_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} p_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.61)$$

Si se considera ahora que $A_a(x) = \bar{\psi}_a(x)$:

$$\left\{ \bar{\psi}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-|, \quad (7.62)$$

entonces:

$$\left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.63)$$

$$\left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.64)$$

Finalmente, para el caso en que $A_a(x) = \bar{p}_a(x)$,

$$\left\{ \bar{p}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) |x^- - y^-|, \quad (7.65)$$

$$\left\{ \bar{p}_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.66)$$

7.6. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

Bajo la definición de los DB (7.55), los vínculos asociados al sector de DKP se expresan en la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ & , & & \Psi_6 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- \\ \Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_7 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* \\ \Psi_3 &\equiv p_- + \frac{i}{2} \varphi & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_- \\ \Psi_4 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & , & & \Psi_9 &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \\ \Psi_5 &\equiv 2m\partial_-^x \psi^- + im^2 \varphi - g\pi^- \varphi & , & & \Psi_{10} &\equiv 2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ - im^2 \varphi^* - g\pi^- \varphi^*. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Ahora, con el propósito de convertir las ligaduras (7.67) en identidades fuertes, en identidades fuertes, se define un nuevo conjunto de DB que, que se definen como:

$$\left\{ A_b(x), B_b(y) \right\}_{D2} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} - \int du^- dv^- \left\{ A_a(x), \Psi_i(u) \right\}_{D1} D_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D1}, \quad (7.68)$$

donde $D_{ij}^{-1}(x, y)$ identifica la inversa de la matriz:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}_{D1}, \quad (7.69)$$

la cual posee la siguiente representación:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ C(x, y) & D(x, y) \end{pmatrix}, \quad (7.70)$$

siendo $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ y $D(x, y)$ matrices 5×5 con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(x) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(x) & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \\ B(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & i\partial_-^x & \lambda(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i & 0 & 0 & -m & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & -\beta(x) \\ \theta(x) & 0 & 2m\partial_-^x & -\beta(x) & \xi(x) \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \\ C(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & -\theta(x) \\ -i & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & m & 0 & \beta(x) \\ -\lambda(x) & 2m\partial_-^x & 0 & \beta(x) & -\xi(x) \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \\ D(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(x) \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma(x) & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

en las que se ha introducido las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\equiv -g^2 \varphi(x) \varphi(x), \quad \beta(x) \equiv -g^2 \varphi^*(x) \varphi(x), \\ \gamma(x) &\equiv -g^2 \varphi^*(x) \varphi^*(x), \quad \theta(x) \equiv (im^2 - g\pi^-(x)), \\ \lambda(x) &\equiv (im^2 + g\pi^-(x)), \quad \xi(x) \equiv -2img^2 [\varphi^*(x) \psi^-(x) + \varphi(x) \bar{\psi}^+(x)]. \end{aligned} \quad (7.71)$$

La matriz $D^{-1}(x, y)$ es solución de la siguiente ecuación:

$$\int dz^- D(x, z) D^{-1}(z, y) = \int dz^- D^{-1}(x, z) C(z, y) = I \delta(x^- - y^-), \quad (7.72)$$

a partir de la cual es posible mostrar que:

$$D^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(x, y) & \tilde{B}(x, y) \\ \tilde{C}(x, y) & \tilde{D}(x, y) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & A_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ B_1(x, y) & B_2(x, y) & B_3(x, y) & B_4(x, y) & 0 \\ 0 & C_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}(x, y) &= \begin{pmatrix} A_6(x, y) & A_7(x, y) & A_8(x, y) & A_9(x, y) & 0 \\ B_6(x, y) & B_7(x, y) & B_8(x, y) & B_9(x, y) & B_{10}(x, y) \\ C_6(x, y) & C_7(x, y) & C_8(x, y) & C_9(x, y) & 0 \\ D_6(x, y) & D_7(x, y) & D_8(x, y) & D_9(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & E_8(x, y) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}(x, y) &= \begin{pmatrix} F_1(x, y) & F_2(x, y) & F_3(x, y) & F_4(x, y) & 0 \\ G_1(x, y) & G_2(x, y) & G_3(x, y) & G_4(x, y) & 0 \\ H_1(x, y) & H_2(x, y) & H_3(x, y) & H_4(x, y) & H_5 \\ K_1(x, y) & K_2(x, y) & K_3(x, y) & K_4(x, y) & 0 \\ 0 & M_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{D}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_8(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_8(x, y) & 0 & 0 \\ H_6(x, y) & H_7(x, y) & H_8 & H_9(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & K_8(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los elementos no nulos que aparecen en $\tilde{A}(x, y)$, $\tilde{B}(x, y)$, $\tilde{C}(x, y)$ y $\tilde{D}(x, y)$ son dados por:

■ Funciones $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} A_2(x, y) &= \frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \quad A_6(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ A_7(x, y) &= \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \quad A_9(x, y) = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ A_8(x, y) &= \frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}. \end{aligned}$$

■ Funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 B_1(x, y) &= -\frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\
 B_2(x, y) &= \frac{1}{16m^2} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \gamma(x) \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right\}, \\
 B_3(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \epsilon(x^- - y^-), \\
 B_4(x, y) &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\
 B_6(x, y) &= \frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 B_7(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 B_8(x, y) &= \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \frac{1}{2} \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - y^-) + \frac{\gamma(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] \right\}, \\
 B_9(x, y) &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 B_{10}(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 C_2(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \gamma(x) \epsilon(x^- - y^-), \quad C_6(x, y) = \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\
 C_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \quad C_9(x, y) = \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
 C_8(x, y) &= \frac{1}{8m} \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

■ Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 D_2(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\
 D_6(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\
 D_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
 D_8(x, y) &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 D_9(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

- Funciones $E_i(x, y)$:

$$E_8(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

- Funciones $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), & F_3(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\ F_2(x, y) &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\ F_4(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ F_8(x, y) &= -\frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right]. \end{aligned}$$

- Funciones $G_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\ G_2(x, y) &= \frac{1}{8m} \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-), \\ G_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\ G_4(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\ G_8(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \alpha(x) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned}$$

- Funciones $H_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\ H_2(x, y) &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ -\frac{1}{2} \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\ H_3(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \delta(x^- - y^-) \right\}, \\ H_4(x, y) &= \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\ H_5(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-), \\ H_6(x, y) &= \frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\ H_7(x, y) &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \delta(x^- - y^-) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_8(x, y) &= \frac{1}{16m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] \right\}, \\
H_9(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right].
\end{aligned}$$

■ Funciones $K_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
K_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\
K_2(x, y) &= \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
K_3(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
K_4(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-), \\
K_8(x, y) &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right].
\end{aligned}$$

■ Funciones $M_i(x, y)$:

$$M_2(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Bajo la definición de los DB en (7.68), es posible determinar que, a partir del conjunto de identidades (7.67), los siguientes campos pueden considerarse como variables independientes:

$$(\varphi, \psi^+, \psi^-, \varphi^*, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-).$$

En efecto, puede deducirse que, cuando $A_a(x) = \varphi(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{5j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{6j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{10j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1},
\end{aligned}$$

relación que permite establecer los siguientes DB:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-). \quad (7.73)$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \\
&\quad -\frac{ig^2}{8m} \varphi(x) \int du \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(u^- - y^-).
\end{aligned} \quad (7.74)$$

Ahora, si $B_b(y) = \bar{\psi}^-(y)$, se deduce que:

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (7.75)$$

Considerando el caso $A_a(x) = \psi^+(x)$, los DB diferentes de cero se calculan de:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), B_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^+(x), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{5j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{7j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{10j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned}$$

De manera que si $B_b(y) = \varphi^*(y)$, resulta:

$$\left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (7.76)$$

Por su parte, cuando $B_b(y) = \bar{\psi}^+(y)$, se determina que:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{1}{8m} \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Ahora, si $B_b(y) = \bar{\psi}^-(y)$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{73}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_1} \\ &= D_{73}^{-1}(x, y) = G_3(x, y) \\ &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

así que:

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-). \quad (7.78)$$

Ahora, si se considera $A_a(x) = \psi^-(x)$, es posible deducir que los DB se calculan a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), B_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^-(x), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{5j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{8j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{10j}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), B_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $B_b(y) = \varphi^*(y)$,

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \varphi^*(y) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Ahora si $B_b(y) = \bar{\psi}^+(y)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ -\frac{\alpha(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] - \frac{1}{2} \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - y^-) \right\} \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{ig^2}{8m} \bar{\psi}^+(y) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \psi^-(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(u^- - y^-). \end{aligned} \quad (7.82)$$

De igual manera, el DB calculado con el campo $\bar{\psi}^-(y)$ es:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D2} &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \delta(x^- - y^-) \right\} \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \bar{\psi}^-(y) \int dv^- \epsilon(x^- - y^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (7.83)$$

Consideremos además el caso $B_b(y) = A_+(y)$ de las relaciones que permiten calcular los DB asociados a los campos DKP. Entonces, en primer lugar se establece que:

$$\left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} = \frac{ig}{2} \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \quad (7.84)$$

De manera similar, cuando el campo en consideración es $\psi^+(x)$, se obtiene:

$$\left\{ \psi^+(x), A_+(y) \right\}_{D2} = \frac{g}{2} \left[i\psi^+(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{2m} \varphi(x) \epsilon(x^- - y^-) \right]. \quad (7.85)$$

Si se estudia el caso para $\psi^-(x)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \psi^-(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{16m} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \right. \\ &\quad \left. \epsilon(x - v) \right\} \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) - \frac{ig}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \\ &\quad \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{g}{16m^2} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - v^-) \right] \\ &\quad \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (7.86)$$

Ahora, cuando se analiza el campo $\varphi^*(x)$, resulta que:

$$\left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} = -\frac{ig}{2} \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \quad (7.87)$$

De manera similar, para el campo $\bar{\psi}^+(x)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\psi}^+(x), A_+(y) \right\}_{D2} = & -\frac{ig}{2} \bar{\psi}^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{16m^2} \int dv^- \frac{1}{\partial_-} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - v^-) \right] \\ & \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{g}{16m} \int dv^- \frac{1}{\partial_-} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - v^-) \right\} \\ & \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{ig}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (7.88)$$

Finalmente, cuando se estudia el DB para el campo $\bar{\psi}^-(x)$, se obtiene:

$$\left\{ \bar{\psi}^-(x), A_+(y) \right\}_{D2} = -\frac{g}{2} \left[i\bar{\psi}^-(x) |x^- - y^-| + \frac{1}{2m} \varphi^*(x) \epsilon(x^- - y^-) \right]. \quad (7.89)$$

Bibliografía

- [1] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed., New York: Inter., 1965.
- [2] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95, edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
- [3] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, and J. S. Valverde, "Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance," *Phys. Lett. A*, vol. 268, pp. 165-173, 2000.
- [4] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, "Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon-Fock equations for electromagnetic, Yang-Mills and external gravitational field interactions: Proof of equivalence," *Phys. Lett. A*, vol. 271, pp. 16-25, 2000.

Capítulo 8

Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3 + 1 Dimensiones

8.1. Estructura de Vínculos

A partir de la densidad Lagrangiana (7.1) y de las relaciones asociadas a los momentos canónicos conjugados definidas por (7.3), es posible demostrar que la electrodinámica escalar de primer orden en 3 + 1 dimensiones presenta el siguiente conjunto de vínculos primarios en el sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- , \quad (8.1)$$

junto con las ligaduras correspondientes del sector escalar

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0 , \quad (8.2)$$

ademas de una ecuación dinámica definida por:

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+ . \quad (8.3)$$

El Hamiltoniano canónico correspondiente a la teoría es definido por

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C ,$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \bar{p} \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} (F^{kl})^2 , \end{aligned} \quad (8.4)$$

donde $A = -, 1, 2$. La dinámica del sistema estará determinada por el Hamiltoniano primario, el cual se construye a partir del Hamiltoniano canónico más una combinación lineal de los vínculos primarios vía multiplicadores de Lagrange, que para el caso será:

$$H_P = H_C + \int d^3x \left[u(x) \pi^+(x) + u_l(x) \phi^l(x) + \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \quad (8.5)$$

donde $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2 = d^3x^A$. Los PB fundamentales de la teoría son definidos por:

$$\begin{aligned} \left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (8.6)$$

A continuación, analicemos la consistencia de los vínculos primarios estudiando en primer lugar aquella correspondientes al sector electromagnético, de manera que:

$$\dot{\pi}^+ = \left\{ \pi^+(x), H_P \right\} = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \equiv G \approx 0, \quad (8.7)$$

es decir, un vínculo secundario ha surgido del sector electromagnético. Ahora bien, con el fin de estudiar su consistencia, se utilizarán los siguientes PB:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), \phi^l(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g \left[\beta^+ \psi(x) \right]_b \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (8.8)$$

De manera que la evolución temporal de $G(x)$ establece que:

$$\dot{G} = \left\{ G(x), H_P \right\} = \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \approx 0. \quad (8.9)$$

Ahora, en el caso de $\phi^k(x)$ resulta:

$$\dot{\phi}^k = \left\{ \phi^k(x), H_P \right\} = \partial_k^x \pi^- - g \bar{\psi} \beta^k \psi + \partial_m^x F_{mk} - 2\partial_-^x u_k, \quad (8.10)$$

lo que indica una relación sobre el multiplicador de Lagrange $u_k(x)$.

Ahora, se procede a estudiar la dinámica de los vínculos asociados al sector DKP. EN el caso de la ligadura θ se obtiene:

$$\dot{\theta} = \left\{ \theta_a(x), H_P \right\} = (D_A^x \beta^A - m) \psi + \beta^+ (i\bar{\lambda} - gA_+ \psi) \approx 0, \quad (8.11)$$

con $D_A^x \equiv i\partial_A^x - gA_A$. De manera similar, cuando se analiza la consistencia de $\bar{\theta}(x)$, se obtiene:

$$\dot{\bar{\theta}} = \left\{ \bar{\theta}_a(x), H_P \right\} = \bar{\psi} \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) + (i\bar{\lambda} + g\bar{\psi}A_+) \beta^+ \approx 0, \quad (8.12)$$

donde $\bar{D}_A^x \equiv i\partial_A^x + gA_A$. Combinando las ecuaciones (8.11) junto con (8.9), se obtiene:

$$\dot{G} = 0, \quad (8.13)$$

indicando que la ley de , identificada con la relación $G(x)$, para la electrodinámica escalar de primer orden en 3 + 1 dimensiones también se conserva.

En este punto, corresponde analizar si las relaciones (8.11) y (8.12) permiten determinar de manera completa los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$. . Con este objetivo, se hará uso de las propiedades que satisfacen las matrices beta en las coordenadas del plano nulo:

$$\begin{aligned} P\beta^+ &= P^+, & P\beta^- &= P^-, & P\beta^k &= P^k, \\ P^-\beta^+ &= P, & P^-\beta^- &= 0, & P^-\beta^k &= 0, \\ P^+\beta^+ &= 0, & P^+\beta^- &= P, & P^+\beta^k &= 0, \\ P^k\beta^+ &= 0, & P^k\beta^- &= 0, & P^k\beta^l &= \delta_l^k P, \end{aligned} \quad (8.14)$$

además de las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \beta^- P &= (P^+)^{\dagger}, & \beta^+ P &= (P^-)^{\dagger}, & \beta^k P &= -(P^k)^{\dagger}, \\ \beta^- (P^-)^{\dagger} &= P, & \beta^+ (P^-)^{\dagger} &= 0, & \beta^k (P^-)^{\dagger} &= 0, \\ \beta^- (P^+)^{\dagger} &= 0, & \beta^+ (P^+)^{\dagger} &= P, & \beta^k (P^+)^{\dagger} &= 0, \\ \beta^- (P^k)^{\dagger} &= 0, & \beta^+ (P^k)^{\dagger} &= 0, & \beta^l (P^k)^{\dagger} &= \delta_l^k P, \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde los operadores de proyección son definidos como:

$$P = P^{\dagger} \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^{\dagger} = P. \quad (8.16)$$

De la representación matricial de los campos $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$:

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi^l \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi^* & \bar{\psi}^+ & \bar{\psi}^- & \bar{\psi}^l \end{pmatrix} , \\ p &\equiv \begin{pmatrix} p_{\varphi} \\ p_+ \\ p_- \\ p_l \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p} \equiv \begin{pmatrix} \bar{p}_{\varphi} & \bar{p}_+ & \bar{p}_- & \bar{p}_l \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (8.17)$$

con $l = 1, 2$, es posible deducir de (8.11):

$$\begin{aligned} P\dot{\theta} &= D_-^x (P^-\psi) + D_k^x (P^k\psi) - m (P\psi) + i (P^+\lambda) - gA_+ (P^+\psi) \approx 0, \\ P^+\dot{\theta} &= D_-^x (P\psi) - m (P^+\psi) \approx 0, \\ P^l\dot{\theta} &= D_l^x (P\psi) - m (P^l\psi) \approx 0, \\ P^-\dot{\theta} &= -m (P^-\psi) + i (P\lambda) - gA_+ (P\psi) \approx 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Con ello, se pueden establecer dos condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ , que corresponden a $P^+\lambda$ y $P\lambda$, mientras que las componentes $P^l\lambda$ permanecen indeterminadas. Lo anterior sugiere que la teoría presenta un vínculo secundario, tal como lo indican las relaciones (8.18), asociado con la condición de consistencia de $\theta(x)$. Dicha ligadura secundaria puede obtenerse, en analogía con el caso libre, mediante la acción del operador $(1 - \beta^+\beta^-)$, de manera que:

$$\omega_\delta = [(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A D_A^\chi - m) \psi]_\delta \approx 0, \quad (8.19)$$

con $\delta = 2, 3, 4$. Es posible observar que:

$$\begin{aligned} P^+\omega &= P^+ (\beta^- D_-^\chi \psi + \beta^k D_k^\chi \psi - m\psi) \\ &= D_-^\chi (P\psi) - m (P^+\psi) = P^+\dot{\theta} \approx 0 \\ P^l\omega &= P^l (\beta^- D_-^\chi \psi + \beta^k D_k^\chi \psi - m\psi) \\ &= D_l^\chi (P\psi) - m (P^l\psi) = P^l\dot{\theta} \approx 0 \\ P\omega &= 0, \quad P^-\omega = 0, \end{aligned}$$

que son consistentes con (8.18). De forma similar, cuando la expresión (8.12) es considerada, se deduce que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\theta}}P &= \bar{D}_-^\chi [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] - \bar{D}_k^\chi [\bar{\psi} (P^k)^\dagger] + m (\bar{\psi}P) + i [\bar{\lambda} (P^-)^\dagger] \\ &\quad + gA_+ [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \approx 0, \\ \dot{\bar{\theta}} (P^+)^\dagger &= m [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] + i (\bar{\lambda}P) + gA_+ (\bar{\psi}P) \approx 0, \\ \dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger &= \bar{D}_l^\chi (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] \approx 0, \\ \dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger &= \bar{D}_-^\chi (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \approx 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Así, las relaciones que involucran a $\bar{\lambda}P$ y $\bar{\lambda} (P^-)^\dagger$ indican que únicamente dos componentes del multiplicador $\bar{\lambda}$ pueden ser determinadas, mientras que las componentes $\bar{\lambda} (P^l)^\dagger$

permanecen sin especificar. A partir de esta expresión, se constata que surgen nuevamente vínculos secundarios asociados con la condición de consistencia de $\bar{\theta}(x)$, los cuales pueden identificarse mediante la aplicación del operador $(1 - \beta^-\beta^+)$, de manera que:

$$\bar{\omega}_\delta = [\bar{\psi} (\bar{D}_A^\chi \beta^A + m) (1 - \beta^-\beta^+)]_\delta \approx 0, \quad (8.21)$$

donde $\delta = 3, 4, 5$. Es posible mostrar a partir de (8.21) que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} (P^l)^\dagger &= \left(\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi} \right) (P^l)^\dagger \\
 &= \bar{D}_l^x (\bar{\psi} P) + m \left[\bar{\psi} (P^l)^\dagger \right] = \dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger \approx 0 \\
 \bar{\omega} (P^-)^\dagger &= \left(\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi} \right) (P^-)^\dagger \\
 &= \bar{D}_-^x (\bar{\psi} P) + m \left[\bar{\psi} (P^-)^\dagger \right] = \dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger \approx 0 \\
 \bar{\omega} P &= 0, \quad \bar{\omega} (P^+)^\dagger = 0,
 \end{aligned}$$

lo que resulta compatible con (8.20). Entonces, podemos concluir que la teoría posee un conjunto de vínculos secundarios asociados al sector DKP identificados con (8.19) y (8.21), y que satisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[\left(D_A^x \beta^A - m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \omega_a(x), \phi^k(y) \right\} &= -g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \phi^k(x), \omega_a(y) \right\} &= g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\omega}_a(x), \phi^k(y) \right\} &= g \left[\bar{\psi}(x) \beta^k \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \phi^k(x), \bar{\omega}_a(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^k \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y).
 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Utilizando las relaciones anteriores, es posible deducir que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} &= \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[-g \pi^- \beta^- \psi - g \beta^- \psi \partial_-^x A_+ - g \beta^k \psi \partial_k^x A_+ \right. \\
 &\quad \left. - g u_l \beta^l \psi + \left(\beta^A D_A^x - m \right) \lambda \right] \approx 0.
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

A continuación, es necesario verificar si la expresión (8.23) garantiza que todas las componentes del multiplicador $\lambda(x)$ se encuentren completamente determinadas. Para este propósito, se emplean los operadores definidos en (8.16), a partir de los cuales se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P \dot{\omega} &= 0, \quad P^- \dot{\omega} = 0, \\
 P^l \dot{\omega} &= -g \left(\partial_l^x A_+ + u_l \right) (P \psi) + D_l^x (P \lambda) - m (P^l \lambda) \approx 0, \\
 P^+ \dot{\omega} &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P \psi) + D_-^x (P \lambda) - m (P^+ \lambda) \approx 0.
 \end{aligned}$$

Empleando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}(P^+\lambda) &= iD_-^x (P^-\psi) + iD_k^x (P^k\psi) - im (P\psi) - igA_+ (P^+\psi), \\ (P\lambda) &= -im (P^-\psi) - igA_+ (P\psi),\end{aligned}$$

es posible mostrar que:

$$P^+\dot{\omega} \approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \right\}.$$

Así, se concluye que surge un vínculo terciario, el cual se define como:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \approx 0. \quad (8.24)$$

Si se estudia la dinámica de $\bar{\omega}(x)$, resulta:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}} &= \left[g\pi^- \bar{\psi} \beta^- + g\bar{\psi} \beta^- \partial_-^x A_+ + g\bar{\psi} \beta^k \partial_k^x A_+ + gu_1 \bar{\psi} \beta^1 + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \right] \\ &\quad \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \approx 0.\end{aligned} \quad (8.25)$$

A partir de esta relación se deduce que:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}} P &= 0, \quad \dot{\bar{\omega}} (P^+)^\dagger = 0, \\ \dot{\bar{\omega}} (P^1)^\dagger &= g \left(\partial_1^x A_+ + u_1 \right) (\bar{\psi} P) + \bar{D}_1^x (\bar{\lambda} P) + m \left[\bar{\lambda} (P^1)^\dagger \right], \\ \dot{\bar{\omega}} (P^-)^\dagger &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (\bar{\psi} P) + \bar{D}_-^x (\bar{\lambda} P) + m \left[\bar{\lambda} (P^-)^\dagger \right].\end{aligned}$$

De las expresiones que resultan de la consistencia de $\bar{\theta}(x)$, es posible verificar que:

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda} P) &= im \left[\bar{\psi} (P^+)^\dagger \right] + igA_+ (\bar{\psi} P), \\ \left[\bar{\lambda} (P^-)^\dagger \right] &= i\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi} (P^+)^\dagger \right] - i\bar{D}_k^x \left[\bar{\psi} (P^k)^\dagger \right] + im (\bar{\psi} P) + igA_+ \left[\bar{\psi} (P^-)^\dagger \right],\end{aligned}$$

de manera que:

$$\dot{\bar{\omega}} (P^-)^\dagger \approx \left\{ \bar{\psi} \left(2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^\dagger.$$

Entonces, un vínculo terciario se evidencia y se define como:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left(2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \quad (8.26)$$

Se estudia ahora la consistencia del conjunto de $\Omega(x)$ y $\bar{\Omega}(x)$, lo que conduce a:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= (\beta^-)^2 \beta^+ \left\{ -g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \psi + im \left(\partial_1^x A_+ + u_1 \right) \beta^1 \psi - \psi \partial_1^x u_1 \right] \right. \\ &\quad \left. - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] \psi + \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \lambda \right\}.\end{aligned}$$

De la relación anterior, se puede deducir que:

$$\begin{aligned} P^- \dot{\Omega} &= 0, & P^k \dot{\Omega} &= 0, & P \dot{\Omega} &= 0 \\ P^+ \dot{\Omega} &= -g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P^- \psi) + im \left(\partial_l^x A_+ + u_l \right) (P^l \psi) - (P \psi) \partial_l^x u_l \right] \\ &\quad - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] (P \psi) + \left[2im D_-^x (P^- \lambda) + im D_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda) + g\pi^- (P \lambda) \right], \end{aligned}$$

indicando que no se generan más ligaduras. De manera similar, la consistencia de $\bar{\Omega}(x)$, establece:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} &= \left\{ g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + im \left(\partial_l^x A_+ + u_l \right) \bar{\psi} \beta^l + \bar{\psi} \partial_l^x u_l \right] \right. \\ &\quad \left. - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] \bar{\psi} + \left(2im \bar{D}_-^x \bar{\lambda} \beta^- + im \bar{D}_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda} + g\pi^- \bar{\lambda} \right) \right\} \beta^+ (\beta^-)^2, \end{aligned}$$

a partir de la cual es posible verificar que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} (P^k)^\dagger &= 0, & \dot{\bar{\Omega}} (P^+)^\dagger &= 0, & \dot{\bar{\Omega}} P &= 0 \\ \dot{\bar{\Omega}} (P^-)^\dagger &= g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] - im \left(\partial_l^x A_+ + u_l \right) [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] + (\bar{\psi} P) \partial_l^x u_l \right] \\ &\quad - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] (\bar{\psi} P) + 2im \bar{D}_-^x [\bar{\lambda} (P^+)^\dagger] - im \bar{D}_k^x [\bar{\lambda} (P^l)^\dagger] \\ &\quad + im^2 (\bar{\lambda} P) + g\pi^- (\bar{\lambda} P), \end{aligned}$$

lo que indica que la teoría ya no posee mas vínculos.

8.2. Clasificación de los Vínculos

En resumen, la teoría está constituida por el siguiente conjunto de vínculos asociados al sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0, \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_- \quad , \quad G = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi, \quad (8.27)$$

junto con el siguiente conjunto de vínculos asociados al sector DKP:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi, & \bar{\theta} &= \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+, \\ \omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A D_A^x - m) \psi, & \bar{\omega} &= \bar{\psi} (\bar{D}_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \\ \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ (2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^-) \psi \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} (2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^-) \beta^+ (\beta^-)^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

En analogía con lo obtenido en 1 + 1 dimensiones, mostremos ahora que, además de $\pi^+(x)$, el segundo vínculo de segunda clase es dado por la siguiente combinación lineal:

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv G - ig (\bar{\psi} \theta - \bar{\theta} \psi) = \partial_A^x \pi^A - ig (\bar{\psi} p - \bar{p} \psi) \\ &= \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - ig (\bar{\psi} p - \bar{p} \psi). \end{aligned} \quad (8.29)$$

En primer lugar, se sabe que al considerar los PB con los vínculos correspondientes al sector electromagnético, se determina que:

$$\left\{ \Sigma(x), \Phi^k(y) \right\} = \left\{ G(x), \Phi^k(y) \right\} = 0,$$

de igual manera:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= -ig^2 \left[\bar{\Psi}(x) \beta^+ \Psi(x) - \bar{\Psi}(x) \beta^+ \Psi(x) \right] \delta^3(x-y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, cuando se analizan los vínculos del sector DKP, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \theta_b(y) \right\} &\approx -g [\beta^+ \Psi(x)]_b \delta^3(x-y) + g [\beta^+ \Psi(x)]_b \delta^3(x-y) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

En forma similar:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &\approx -g [\bar{\Psi}(x) \beta^+]_b \delta^3(x-y) + g [\bar{\Psi}(x) \beta^+]_b \delta^3(x-y) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Cuando se consideran los vínculos secundarios del sector DKP, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \omega_b(y) \right\} &= -ig \delta^3(x-y) \omega_b(x) \approx 0. \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= ig \delta^3(x-y) \bar{\omega}_b(x) \approx 0. \end{aligned}$$

Finalmente, cuando se tienen en cuenta los vínculos terciarios del sector DKP, se deduce:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \Omega_b(y) \right\} &= -ig \Omega_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0. \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= ig \bar{\Omega}_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha podido determinar explícitamente que el conjunto máximo de vínculos deducidos para la teoría se puede clasificar de la siguiente manera:

- Vínculos de primera clase,

$$\pi^+ \approx 0, \quad \Sigma \equiv G - ig \left(\bar{\Psi} \theta - \bar{\theta} \Psi \right) = \partial_A^x \pi^A - ig \left(\bar{\Psi} p - \bar{p} \Psi \right). \quad (8.30)$$

- Vínculos de segunda clase:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \Psi, \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+, \\ \omega &= \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \Psi, \quad \bar{\omega} = \bar{\Psi} \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \\ \Omega &= (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \Psi, \\ \bar{\Omega} &= \bar{\Psi} \left(2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2, \\ \phi^k &= \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_-. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Ahora, con el fin de tornar los vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase, se introducirán las condiciones de gauge de plano nulo definidas como:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0 \quad (8.32)$$

8.3. Ecuaciones de Movimiento

Una vez que se ha determinado completamente la libertad de gauge de la teoría y se han identificado todos los vínculos de primera y segunda clase, es posible determinar la dinámica de los campos compatible con éstos. Para ello, se utilizara el Hamiltoniano extendido H_E , que para el caso en consideración se define como:

$$\begin{aligned} H_E &= H_P + \int d^3y u_2 \Sigma \\ &= \int d^3y \left[\frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (F_{mn})^2 + u_1 \pi^+ + u_l \phi^l + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda + u_2 \Sigma \right]. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Al analizar la dinámica de los campos asociados al sector electromagnético, se determina que:

$$\dot{A}_+(x) = \{A_+(x), H_E\} = u_1(x). \quad (8.34)$$

$$\dot{A}_-(x) = \{A_-(x), H_E\} = \pi^- + \partial_-^x A_+ - \partial_-^x u_2, \quad (8.35)$$

$$\dot{A}_s(x) = \{A_s(x), H_E\} = \partial_s^x A_+(x) + u_s(x) - \partial_s^x u_2(x). \quad (8.36)$$

Ahora, si la dinámica de los momentos canónicos asociados a los campos $A_\mu(x)$ es considerada, resulta que:

$$\dot{\pi}^+(x) = \{\pi^+(x), H_E\} = G(x) \approx 0, \quad (8.37)$$

$$\dot{\pi}^-(x) = \{\pi^-(x), H_E\} = -g \bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x) + \partial_l^x u_l(x). \quad (8.38)$$

$$\dot{\pi}^s(x) = \{\pi^s(x), H_E\} = -g \bar{\psi}(x) \beta^s \psi(x) + \partial_m^x F_{ms}(x) - \partial_s^x u_s(x). \quad (8.39)$$

A continuación, se procede a garantizar la equivalencia de estas ecuaciones de movimiento con su contraparte Lagrangiano. Para ello, de la expresión (8.36) se puede deducir que:

$$u_s = \partial_+ A_s - \partial_s A_+ + \partial_s u_2 = F_{+s} + \partial_s u_2 = F^{s-} + \partial_s u_2, \quad (8.40)$$

de manera que:

$$\dot{\pi}^+ = \partial_+ \pi^+ = \partial_+ F^{++} \approx \partial_A \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi = \partial_A F^{A+} - g \bar{\psi} \beta^+ \psi,$$

es decir:

$$\partial_\mu F^{\mu+} - g\bar{\psi}\beta^+\psi \approx 0. \quad (8.41)$$

De igual manera:

$$\dot{\pi}^- = \partial_+ \pi^- = \partial_+ F^{+-} = -g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l u_1 = -g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l F^{l-} + \partial_l \partial_l u_2,$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ F^{+-} + \partial_l F^{l-} - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2 = \partial_+ F^{+-} + \partial_- F^{--} + \partial_l F^{l-} \\ &\quad - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\partial_\mu F^{\mu-} - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2 = 0. \quad (8.42)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^s &= \partial_+ \pi^s = \partial_+ F^{s+} = -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F_{ms} - \partial_- u_s \\ &= -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F^{ms} - \partial_- F^{s-} - \partial_- \partial_s u_2 \\ &= -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F^{ms} + \partial_- F^{-s} - \partial_- \partial_s u_2, \end{aligned}$$

así que:

$$\partial_\mu F^{\mu s} - g\bar{\psi}\beta^s\psi - \partial_- \partial_s u_2 = 0. \quad (8.43)$$

Lo que implica que la equivalencia con la ecuación de movimiento para el campo electromagnético derivada en el espacio de configuración, dada en la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\psi}\beta^\nu\psi = 0,$$

exigirá que se deba cumplir la condición $u_2 = 0$.

Ahora, si se estudia la dinámica de los campos asociados al sector DKP, se obtiene que:

$$\dot{\psi}(x) = \left\{ \psi(x), H_E \right\} = \lambda + i g u_2 \psi, \quad (8.44)$$

$$\dot{\bar{\psi}}(x) = \left\{ \bar{\psi}(x), H_E \right\} = \bar{\lambda} - i g u_2 \bar{\psi}. \quad (8.45)$$

En el caso de los momentos canónicos conjugados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$, se obtiene:

$$\dot{p}(x) = -g A_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^A \left(i \partial_A^x - g A_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda + i g u_2 p, \quad (8.46)$$

a partir de la cual se puede deducir que:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \partial_+ p = -g A_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^A \left(i \partial_A - g A_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda + i g u_2 p \\ &= -g A_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^- \left(i \partial_A - g A_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi + \frac{1}{2} \beta^+ g u_2 \psi + i g u_2 p \\ &\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi, \end{aligned}$$

es decir,

$$\left(\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi \approx -gu_2 \beta^+ \psi. \quad (8.47)$$

En el caso del momento $\bar{p}(x)$, se determina que:

$$\dot{\bar{p}}(x) = -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A^x + g A_A \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ - i g u_2 \bar{p}, \quad (8.48)$$

expresión que puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A^x + g A_A \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ - i g u_2 \bar{p} \\ &= -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A^x + g A_A \right) + m \right] - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ + \frac{1}{2} g u_2 \bar{\psi} \beta^+ - i g u_2 \bar{p} \\ &\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+, \end{aligned}$$

a partir de la cual se puede deducir:

$$\bar{\psi} \left(\beta^\mu \overline{D}_\mu + m \right) \approx g u_2 \bar{\psi} \beta^+. \quad (8.49)$$

Este resultado confirma entonces que la suposición de escoger $u_2 = 0$ es válida.

8.4. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase

A fin de suprimir los vínculos de segunda clase que aparecen en la teoría, se implementará el método iterativo. En una primera etapa, se tomará en cuenta el conjunto compuesto por los vínculos de primera clase y las correspondientes condiciones de gauge, definiéndose así las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\equiv \pi^+, \\ \Theta_2 &\equiv \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - i g \left(\bar{\psi} p - \bar{p} \psi \right), \\ \Theta_3 &\equiv A_-, \\ \Theta_4 &\equiv \pi^- + \partial_-^x A_+. \end{aligned} \quad (8.50)$$

A partir de las cuales se procede a definir la primera matriz de vínculos, cuyos elementos se calculan de la siguiente manera:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Phi_i(x), \Phi_j(y) \right\}, \quad (8.51)$$

y que posee la siguiente representación:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (8.52)$$

La inversa de esta matriz fue calculada con anterioridad y tiene la forma:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x - y). \quad (8.53)$$

Entonces, se procede a definir el primer conjunto de DB, identificado con D1, que para dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(y)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Theta_c(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}. \quad (8.54)$$

Si $A_a(x)$ se identifica como una variable perteneciente al sector DKP, entonces se verifica que:

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}.$$

En el caso en que $B_b(y)$ corresponda igualmente a un campo DKP, se obtiene que:

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\},$$

a partir de este resultado, se concluye que:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x - y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x - y). \quad (8.55)$$

Cuando se considera que $B_b(y) = A_+(y)$, se deduce que:

$$\left\{ A_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{1}{2} \int d^3u \left\{ A_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \delta^2(u - y),$$

de lo cual se obtiene:

$$\left\{ \psi_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y), \quad (8.56)$$

$$\left\{ p_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{ig}{2} p_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y). \quad (8.57)$$

En el caso de considerar $\bar{\psi}_a(x)$ y $\bar{p}_a(x)$, se tiene que:

$$\left\{ \bar{\psi}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y). \quad (8.58)$$

$$\left\{ \bar{p}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x - y). \quad (8.59)$$

En el caso particular en que $A_a(x) = A_k(x)$, se verifica que:

$$\left\{ A_k(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_k(x), B_b(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{2d}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}.$$

A partir del cual, es posible deducir que:

$$\left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{1}{2} \left| x^- - y^- \right| \partial_k^x \delta^2(x - y). \quad (8.60)$$

$$\left\{ A_k(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} = -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) \partial_k^x \delta^2(x - y). \quad (8.61)$$

$$\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D1} = \delta_k^l \delta^3(x - y). \quad (8.62)$$

8.5. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Con el propósito de eliminar los vínculos asociados al sector escalar representado por los campos de DKP, es fundamental aislar sus componentes no redundantes. Para ello, se emplearán las propiedades de los proyectores de los campos DKP indicadas en la ecuación (6.41). Usando la representación física de dichos campos dada por la ecuación (6.42), es posible obtener las ligaduras no triviales de la siguiente manera:

- Vínculo $\theta(x)$:

$$\begin{aligned} P\theta &= p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\ P^+\theta &= p_+ \approx 0, \\ P^k\theta &= p_k \approx 0, \\ P^-\theta &= p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0. \end{aligned}$$

- Vínculo $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} P\omega &= 0, \\ P^+\omega &= D_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^k\omega &= D_k^x \varphi - m\psi^k \approx 0, \\ P^-\omega &= 0. \end{aligned}$$

- Vínculo $\Omega(x)$:

$$\begin{aligned} P\Omega &= 0, \\ P^+\Omega &= 2im D_-^x \psi^- + im D_k^x \psi^k + (-im^2 + g\pi^-) \varphi \approx 0, \\ P^k\Omega &= 0, \\ P^-\Omega &= 0. \end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\theta}(\chi)$:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}P &= \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^+)^\dagger &= \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^k)^\dagger &= \bar{p}_k \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^-)^\dagger &= \bar{p}_- \approx 0.\end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\omega}(\chi)$:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}P &= 0, \\ \bar{\omega}(P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\omega}(P^k)^\dagger &= \bar{D}_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \approx 0, \\ \bar{\omega}(P^-)^\dagger &= \bar{D}_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.\end{aligned}$$

■ Vínculo $\bar{\Omega}(\chi)$:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}P &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+ \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\ \bar{\Omega}(P^+)^\dagger &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+ \beta^- \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\ \bar{\Omega}(P^k)^\dagger &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_l^x \beta^l + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+ \beta^- \beta^- (P^k)^\dagger = 0, \\ \bar{\Omega}(P^-)^\dagger &= 2im\bar{D}_-^x \bar{\psi}^+ - im\bar{D}_l^x \bar{\psi}^l + (im^2 + g\pi^-) \varphi^* \approx 0.\end{aligned}$$

De este modo, se concluye que el conjunto de vínculos no redundantes de la teoría, correspondientes al sector DKP, está formado por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \quad \Psi_2 \equiv p_+ \approx 0, \quad \Psi_3 \equiv p_k \approx 0, \\ \Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0, \quad \Psi_5 \equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ \Psi_6 &\equiv (i\partial_k^x - gA_k) \varphi - m\psi^k \approx 0, \\ \Psi_7 &\equiv 2m\partial_-^x \psi^- - im(i\partial_k^x - gA_k) \psi^k + (im^2 - g\pi^-) \varphi \approx 0, \\ \Psi_8 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \quad \Psi_9 \equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \quad \Psi_{10} \equiv \bar{p}_k \approx 0, \\ \Psi_{11} &\equiv \bar{p}_- \approx 0, \quad \Psi_{12} \equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0, \\ \Psi_{13} &\equiv (i\partial_k^x + gA_k) \varphi^* + m\bar{\psi}^k, \\ \Psi_{14} &\equiv 2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + im(i\partial_k^x + gA_k) \bar{\psi}^k - (im^2 + g\pi^-) \varphi^* \approx 0.\end{aligned}\tag{8.63}$$

A partir de (8.63), ese puede construir una segunda matriz de vínculos, cuyos elementos se definen de la siguiente forma:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}_{D1}. \quad (8.64)$$

La cual puede expresarse de manera compacta como:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ C(x, y) & D(x, y) \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (8.65)$$

donde se han introducido las siguientes submatrices:

$$A(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & D_k^x & \lambda(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & imD_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta(x) \\ D_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta(x) & 0 & -imD_k^x & 2m\partial_-^x & \beta(x) & 0 & -\xi(x) \end{pmatrix},$$

$$C(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & \bar{D}_k^x & -\theta(x) \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -im\bar{D}_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & -\beta(x) \\ \bar{D}_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(x) & 2m\partial_-^x & im\bar{D}_k^x & 0 & -\beta(x) & 0 & \xi(x) \end{pmatrix},$$

$$D(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y se han definido los siguientes funciones:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &\equiv g^2 \varphi(x) \varphi(x) \quad , \quad \beta(x) \equiv g^2 \varphi(x) \varphi^*(x) \quad , \quad \gamma(x) \equiv g^2 \varphi^*(x) \varphi^*(x), \\ \theta(x) &\equiv \left[i m^2 - g \pi^-(x) \right] \quad , \quad \lambda(x) \equiv \left[i m^2 + g \pi^-(x) \right], \\ \xi(x) &\equiv 2 i m g^2 \left[\varphi^*(x) \psi^-(x) + \varphi(x) \bar{\psi}^+(x) \right].\end{aligned}\tag{8.66}$$

La matriz inversa $C^{-1}(x, y)$ correspondiente a $D(x, y)$ se deduce como solución de la siguiente ecuación:

$$\int d^3 y D(x, y) C^{-1}(x, z) = I \delta^3(x - z),\tag{8.67}$$

donde I corresponde a la matriz identidad. Aplicando la relación (8.67) y tras realizar el análisis correspondiente, se puede demostrar que la matriz $C^{-1}(x, y)$ toma la forma siguiente:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} E(x, y) & F(x, y) \\ G(x, y) & D(x, y) \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned}E(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$H(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & M_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde las componentes no nulas de las matrices presentan la siguiente forma explícita:

■ Funciones $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad A_{10} = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ A_{11} &= \frac{i}{2} \delta^3(x-y), \quad A_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\ A_{13} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], \quad A_{14} = \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ A_{15} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

■ Funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\ B_2 &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma(x) \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\ B_3 &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \quad B_4 = \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\ B_5 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \delta^3(x-y) \right], \quad B_6 = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\ B_{10} &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\ B_{11} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \delta^3(x-y) \right\}, \\ B_{12} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\} \\
B_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) - \frac{\gamma(x)}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
B_{15} &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
B_{16} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\
B_{17} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], \quad B_{18} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

■ Funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{i}{4m^2} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
C_{10} &= \frac{1}{2} \bar{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad C_{11} = -\frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \delta^3(x-y), \\
C_{12} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
C_{13} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
C_{14} &= -\frac{i}{4m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \\
C_{15} &= \frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad C_{16} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

■ Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{i}{4m^2} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \quad D_{10} = \frac{1}{2} \bar{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
D_{11} &= -\frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \delta^3(x-y), \quad D_{12} = -\frac{1}{2m} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
D_{13} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
D_{14} &= -\frac{i}{4m} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
D_{15} &= \frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
D_{17} &= \frac{1}{m} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

■ Funciones $E_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\gamma(x)}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \quad , \quad E_{10} = \frac{i}{2} \delta^3(x-y) \quad , \quad E_{11} = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ E_{12} &= -\frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \quad , \quad E_{13} = -\frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \delta^3(x-y), \\ E_{14} &= \frac{1}{4m} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ E_{15} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

■ Funciones $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad F_{10} = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ F_{11} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y) \quad , \quad F_{12} = \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\ F_{13} &= \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], \\ F_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \\ F_{15} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

■ Funciones $G_i(x, y)$:

$$G_{12} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad , \quad G_{14} = \frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

■ Funciones $H_i(x, y)$:

$$H_{13} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad , \quad H_{14} = \frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

■ Funciones $K_i(x, y)$:

$$K_{14} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).$$

■ Funciones $M_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \quad , \quad M_2 = \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\ M_3 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad M_4 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right], \\ M_5 &= -\frac{i}{2} \delta^3(x-y) \quad , \quad M_6 = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ M_{14} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right]. \end{aligned}$$

■ Funciones $P_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{i}{2}\delta^3(x-y) \quad , \quad P_2 = -\frac{1}{4m} \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) , \\ P_3 &= -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x-y) \quad , \quad P_4 = -\frac{i}{2m} D_2^x \delta^3(x-y) \quad , \quad P_5 = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x-y) , \\ P_6 &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x-y) \quad , \quad P_{14} = \frac{\alpha(x)}{4m^2} \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] . \end{aligned}$$

■ Funciones $Q_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{2} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] , \\ Q_2 &= \frac{i}{4m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} , \\ Q_3 &= -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\} , \\ Q_4 &= -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\} \quad , \quad Q_5 = -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x-y) , \\ Q_6 &= -\frac{i}{2m} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad Q_7 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y) , \\ Q_{14} &= \frac{i}{4m^2} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} . \end{aligned}$$

■ Funciones $R_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{2} D_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] , \\ R_2 &= \frac{i}{4m} D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} , \\ R_3 &= -\frac{1}{2m} D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\} , \\ R_4 &= -\frac{1}{2m} D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\} \quad , \quad R_5 = -\frac{i}{2m} D_2^x \delta^3(x-y) , \\ R_6 &= -\frac{i}{2m} D_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad R_8 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y) , \\ R_{14} &= \frac{i}{4m^2} D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} . \end{aligned}$$

■ Funciones $S_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \\
 S_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{2} \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} - \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) + \frac{\alpha(x)}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right\}, \\
 S_3 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
 S_4 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
 S_5 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \delta^3(x-y) \right\} \\
 S_6 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \\
 S_7 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right], \\
 S_8 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right], \quad S_9 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
 S_{10} &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
 S_{11} &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \delta^3(x-y) \right], \quad S_{12} = \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\} \\
 S_{13} &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
 S_{14} &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(x) \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
 S_{15} &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].
 \end{aligned}$$

■ Funciones $T_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ T_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\ T_3 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right], \\ T_4 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right], \quad T_5 = -\frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\ T_6 &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \quad T_{14} = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right]. \end{aligned}$$

■ Funciones $U_i(x, y)$:

$$U_2 = \frac{i}{2m} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad U_3 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y).$$

■ Funciones $W_i(x, y)$:

$$W_2 = \frac{i}{2m} D_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad W_4 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y).$$

■ Funciones $Z_i(x, y)$:

$$Z_2 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).$$

Una vez obtenida la matriz $D^{-1}(x, y)$, es posible establecer el segundo conjunto de DB de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned} \quad (8.68)$$

De la definición del conjunto de vínculos de segunda clase asociados al sector escalar (8.63), se puede identificar a las variables (φ, φ^*) de los campos de DKP como los grados de libertad propios de dicho sector, mientras que las restantes componentes se interpretan como variables dependientes. Asimismo, a partir de la definición de los DB D_1 , se pueden considerar como coordenadas independientes del sector electromagnético las variables (A_+, A_k) . En consecuencia, los DB D_2 asociados al campo $\varphi(x)$ se determinan a partir de (8.68) y se expresan como:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D_1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned}$$

De esta forma, al calcular el DB para el caso $B_b(y) = \varphi^*(y)$, se obtiene que:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x-y) \delta^2(x-x). \quad (8.69)$$

Ahora, al considerar el campo $A_+(y)$, se deduce que:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x-y) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \end{aligned} \quad (8.70)$$

donde todo otro DB D2 que involucre el campo $\varphi(x)$ y las variables independientes resulta nulo. De manera análoga, los DB asociados a $\varphi^*(x)$ se obtienen a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi^*(x), B_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi^*(x), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} D_{1\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1}. \end{aligned}$$

Así, al evaluar el DB D2 con respecto al campo $A_+(y)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x-y) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \varphi^*(v) \right. \\ &\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Otro conjunto posible de DB D2 asociados a $A_+(x)$ se determina a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} \\ &\quad D_{5,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} \\ &\quad D_{7,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{12}(u) \right\}_{D1} \\ &\quad D_{12,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} \\ &\quad D_{14\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}_{D1}, \end{aligned}$$

a partir del cual es posible deducir que:

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x - u) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u - v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v - y). \end{aligned} \quad (8.72)$$

En el caso de considerar los campos $A_k(x)$, es posible demostrar que los DB no nulos asociados a esta variable son:

$$\begin{aligned}\left\{A_k(x), A_+(y)\right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x - y), \\ \left\{A_k(x), \pi^l(y)\right\}_{D2} &= \delta_k^l \delta^3(x - y).\end{aligned}\quad (8.73)$$

8.6. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

Finalmente, se determina que el conjunto de vínculos que aún resta por invertir bajo la definición de los DB D2 está dado por:

$$\phi^p \equiv \pi^p - \partial_-^x A_p, \quad (8.74)$$

a partir de los cuales se construye la última matriz de vínculos, cuyos elementos se determinan de la siguiente manera:

$$F_{kl}(x, y) \equiv \left\{\phi^k(x), \phi^l(y)\right\}_{D2} = -2\delta_k^l \partial_-^x \delta^3(x - y),$$

donde la matriz inversa correspondiente adopta la siguiente forma:

$$F_{kl}^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y). \quad (8.75)$$

A partir de (8.75), se puede definir el conjunto final de DB entre dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(y)$, el cual se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\{A_a(x), B_b(y)\}_D &= \{A_a(x), B_b(y)\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \{A_a(x), \phi^p(u)\}_{D2} \\ &\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u - v) \{\phi^p(v), B_b(y)\}_{D2}.\end{aligned}\quad (8.76)$$

Por lo que, bajo la definición de DB D2 y del conjunto de vínculos (8.74), los campos $(A_k, A_+, \varphi, \varphi^*)$ pueden considerarse como variables independientes. En el caso de calcular el DB asociado al campo $A_k(x)$, los términos relevantes de la relación (8.76) son:

$$\begin{aligned}\left\{A_k(x), B_b(y)\right\}_D &= \left\{A_k(x), B_b(y)\right\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3v \epsilon(x^- - v^-) \delta^2(x - v) \\ &\quad \left\{\phi^k(v), B_b(y)\right\}_{D2},\end{aligned}$$

de modo que, al considerar $B_b(y) = A_l(y)$, se obtiene:

$$\left\{A_k(x), A_l(y)\right\}_D = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x - y). \quad (8.77)$$

Ahora, al considerar $B_b(y) = A_+(y)$, resulta:

$$\left\{A_k(x), A_+(y)\right\}_D = -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x - y). \quad (8.78)$$

De este modo, es posible demostrar que se obtienen los siguientes casos particulares:

$$\begin{aligned}\left\{ A_k(x), \varphi(y) \right\}_D &= 0, \\ \left\{ A_k(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= 0.\end{aligned}\quad (8.79)$$

De la relación (8.76), se puede verificar que, cuando $A_a(x) = \varphi(x)$ o $A_a(x) = \varphi^*(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned}\left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_2}, \\ \left\{ \varphi^*(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), B_b(y) \right\}_{D_2},\end{aligned}\quad (8.80)$$

de manera que los resultados derivados para los campos $\varphi(x)$ y $\varphi^*(x)$ siguen siendo válidos, por tanto:

$$\begin{aligned}\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{m}{4} \epsilon(x-y) \delta^2(x-x), \\ \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x-y) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\ \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x-y) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right].\end{aligned}\quad (8.81)$$

Finalmente, cuando se estudia el caso $A_a(x) = A_+(x)$, se concluye que los términos a considerar de la expresión (8.76) son:

$$\begin{aligned}\left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_{D_2} - \frac{1}{8} \partial_p^x \int du^- d^3v \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x-v) \\ &\quad \epsilon(u^- - v^-) \left\{ \phi^p(v), B_b(y) \right\}_{D_2},\end{aligned}$$

a partir de los cuales se infiere que:

$$\begin{aligned}\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x-u) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u-v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v-y) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \nabla_x^2 \delta^2(x-y) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) |u^- - y^-|. \end{aligned}\quad (8.82)$$

En resumen, la teoría está caracterizada por el siguiente conjunto de DB, que es consistente con todos los vínculos de segunda clase y condiciones de gauge introducidos:

$$\begin{aligned}\left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x-y), \\ \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x-y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x - u) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u - v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v - y) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \nabla_x^2 \delta^2(x - y) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) |u^- - y^-|. \end{aligned}$$

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x - y) \delta^2(x - x),$$

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x - y) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x - y) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \end{aligned}$$

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo se abordaron los aspectos clásicos más relevantes de la electrodinámica escalar de primer orden formulada en coordenadas de plano nulo. Dado el carácter singular de esta teoría, se aplicó el formalismo de Dirac para el estudio de sistemas con vínculos.

En la primera parte se establecieron las bases de la dinámica en coordenadas de plano nulo, donde se discutieron las propiedades fundamentales asociadas al grupo de Poincaré. Asimismo, se mostraron las relaciones existentes entre los conmutadores a tiempos iguales de los operadores de campo escalar, las soluciones de las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera correspondientes. Además, se determinó que toda teoría de campos formulada en coordenadas de plano nulo se describe mediante un Lagrangiano singular, lo que hace necesario un tratamiento apropiado que garantice un análisis coherente con los vínculos específicos que surjan en cada teoría.

En el capítulo 2 se llevó a cabo un análisis riguroso de la electrodinámica escalar SQED₄ formulada en coordenadas de plano nulo, estableciendo una comparación detallada con su contraparte en el formalismo desarrollado sobre una superficie tipo espacio. En primer lugar, se observó que el vínculo de primera clase, identificado como la ley de Gauss, surge como una combinación lineal de los vínculos pertenecientes a los sectores electromagnético y escalar, y se obtiene a partir del autovector de modo cero de la matriz de vínculos. Este resultado se debe a la presencia de vínculos asociados al sector escalar. No obstante, cuando el análisis se realiza en la forma instante, se evidencia que el segundo vínculo de primera clase no recibe contribución alguna del sector escalar, puesto que en dicho formalismo este sector se encuentra libre de vínculos.

Tras seleccionar las condiciones de gauge en el plano nulo, los vínculos de primera clase se transformaron en vínculos de segunda clase. Sin embargo, fue necesario imponer condiciones de frontera adecuadas sobre los campos para eliminar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase, lo que permitió obtener una inversa bien definida de la matriz de vínculos de segunda clase. De esta manera, los corchetes de Dirac de la

teoría pudieron derivarse de forma consistente y cuantificarse mediante el principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación entre los campos obtenidas resultaron coherentes con los resultados previamente reportados en la literatura [1]. No obstante, las relaciones de conmutación que involucran al operador de campo A_+ no fueron determinadas por Neville y Rohrlich, quienes argumentaron que dichas expresiones podían obtenerse resolviendo las ecuaciones de vínculo cuánticas. En contraste, en el presente trabajo dichos conmutadores se calcularon directamente al cuantizar los corchetes de Dirac derivados clásicamente, tras un análisis detallado de la estructura de vínculos de la teoría SQED₄.

En el capítulo 4, se analizó la teoría de Duffin–Kemmer–Petiau (DKP), la cual constituye una formulación relativista de primer orden para la descripción de partículas con espín 0 y 1. En primer lugar, se estudiaron las propiedades generales de la ecuación de DKP y el álgebra asociada a las matrices β . Posteriormente, se examinó la covarianza de dicha ecuación bajo transformaciones de Lorentz, así como la ley de transformación de los campos fundamentales. A continuación, se abordaron las representaciones irreducibles de la teoría de DKP y se demostró su equivalencia con el formalismo de Klein–Gordon–Fock en el sector de espín 0, y con el formalismo de Proca en el sector de espín 1. Debido a la dependencia lineal en las derivadas de los campos en la densidad lagrangiana de la teoría DKP, fue necesario emplear el método de Dirac para tratar rigurosamente la estructura de vínculos, identificando los grados de libertad físicos y estableciendo los corchetes de Poisson compatibles con los vínculos obtenidos. Finalmente, se discutió el acoplamiento mínimo electromagnético dentro del marco de la teoría DKP.

En el capítulo 5, se estudió la teoría de DKP libre en las coordenadas de plano nulo, tanto en dos como en cuatro dimensiones. En este sistema de coordenadas, la naturaleza singular de la teoría se manifestó de manera más evidente, pues, a diferencia de su formulación en las coordenadas de instante forma, surgen nuevos conjuntos de vínculos secundarios y terciarios. Esto evidencia que los multiplicadores de Lagrange necesarios para describir la dinámica de los campos no pueden fijarse completamente, y que el número de componentes determinadas depende, en primera instancia, de la dimensión de la representación de los campos considerados. No obstante, para hacer explícitos los vínculos secundarios, fue necesario introducir un nuevo conjunto de proyectores. Solo después de identificar de forma completa el conjunto máximo de vínculos presentes en la teoría, fue posible establecer el conjunto de vínculos independientes. Con este propósito, se emplearon los proyectores que permiten aislar las componentes físicas de los campos de DKP. Una vez definido dicho conjunto, se determinaron los grados de libertad correspondientes y los corchetes de Dirac asociados. Finalmente, se comprobó que las expresiones obtenidas resultan equivalentes a aquellas derivadas para el campo escalar complejo de Klein–Gordon–Fock en las coordenadas de plano nulo.

En el último capítulo, se analizó la electrodinámica escalar de primer orden, interpretada como la interacción entre un campo escalar descrito por la teoría de DKP y el campo electromagnético. Como era de esperarse, la estructura de vínculos resultó completamente distinta a la correspondiente al formalismo de segundo orden de la SQED₄. Se presentó en detalle la estructura de vínculos del sistema y se verificó que, en el límite en que la constante de acoplamiento tiende a cero, se recuperan los resultados conocidos para las teorías libres, lo que garantiza la coherencia del análisis realizado. Además, la clasificación de los vínculos permitió observar que el segundo vínculo de primera clase —identificado como la ley de Gauss para la teoría con interacción— emerge como una combinación lineal entre el vínculo subsidiario del sector electromagnético y los vínculos primarios del sector DKP. Un estudio minucioso reveló que los campos $(\varphi, \varphi^*, A_+)$ constituyen los grados de libertad físicos de la teoría. Finalmente, los corchetes de Dirac entre estas variables se obtuvieron a partir de un análisis exhaustivo, demostrando su equivalencia con los resultados derivados en el formalismo de segundo orden cuando se adopta la representación física de los campos DKP.

Bibliografía

- [1] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum electrodynamics on null planes and applications to lasers," *Phys. Rev. D*, vol. 3, pp. 1692-1707, 1971.

Acerca de los autores

German Enrique Ramos Zambrano

Físico de la Universidad de Nariño, realizó estudios de maestría y doctorado en el Instituto de Física Teórica de la Universidade Estadual Paulista en Sao Paulo-Brasil. Actualmente, es docente del programa de Física de la Universidad de Nariño, asimismo, investigador del Grupo de Altas Energías. El interés investigativo se enfoca en teoría clásica de campos y teoría cuántica de campos a temperatura cero y temperatura finita.

Bruto Max Pimentel

Físico de la Universidad Nacional de Trujillo, Peru, realizó estudios de maestría y doctorado en el Instituto de Física Teórica de la Universidade Estadual Paulista en Sao Paulo-Brasil. Actualmente, es docente del Instituto de Física Teórica de la Universidade Estadual Paulista en Sao Paulo-Brasil. Investigador del Grupo de Teoría de Campos. El interés investigativo se enfoca en Mecánica Estadística, fenómenos Críticos, fenomenología das Partículas Elementares, gravitación y cosmología y Física Matemática.

êditorial

Universidad de **Nariño**

Acto de publicación: 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Duffin, Kemmer y Patiau propusieron a mediados del siglo XX una ecuación de campo de primer orden que permitía describir partículas de espín cero y espín uno, que se conoce como ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Esta ecuación resulta ser muy semejante a la ecuación matricial de Dirac, con una álgebra distinta a la satisfecha por las matrices de Dirac. La electrodinámica escalar de primer orden describe un campo de DKP en la representación 5×5 con acoplamiento mínimo a un campo electromagnético.

La estructura singular de la densidad lagrangiana que describe esta teoría requiere un procedimiento consistente que garantice la compatibilidad entre las ligaduras que resulten y la simetría de gauge que caracteriza el sistema. El estudio de teoría se realiza en las coordenadas de plano nulo, lo que implicó encontrar una adecuada representación de las matrices de DKP que permita seleccionar las componentes físicas de los campos fundamentales

ISBN: 978-628-7864-36-8



9 786287 864368



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1994



Asociación de Investigadores
RESOLUCIÓN MIB 00022 - SEÑERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de Nariño