

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



**Barras galácticas de tipo “boxy” debidas a órbitas periódicas estables
de familias planares de alta multiplicidad impar ($m > 3$)**

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Magister en ciencias Físicas

William Orlando Eraso Garzón

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2026

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Barras galácticas de tipo “boxy” debidas a órbitas periódicas estables
de familias planares de alta multiplicidad impar ($m > 3$)**

William Orlando Eraso Garzón

TRABAJO DE GRADO

Director:

Leonardo Chaves Velasquez

Doctor en física

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2026

©2026 -William Orlando Eraso Garzón

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Leonardo Chaves Velasquez

Director

Eduardo Rojas Peña S

Jurado

Ivanio Puerani

Jurado

James Perengüez López

Jurado

San Juan de Pasto, 20 de Marzo 2026

Agradezco al Dr. Panos Patsis, del Centro de Investigaciones para la Astronomía y Matemáticas Aplicadas de la Academia de Atenas (RCAMA, por sus siglas en inglés), por compartir conmigo los códigos necesarios para el desarrollo de este trabajo de grado. Agradezco también al Dr. Gilberto Gómez, del Instituto de Radioastronomía y Astrofísica de la UNAM (IRyA), y al Dr. Ivanio Puerari, del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), por facilitar el préstamo de equipos de cómputo de dichas instituciones, los cuales fueron fundamentales para la realización de las simulaciones presentadas en este trabajo.

Barras galácticas de tipo “boxy” debidas a órbitas periódicas estables de familias planares de alta multiplicidad impar ($m > 3$)

Resumen

Se estudió la dinámica orbital de cuatro modelos galácticos compuestos por un disco, un halo de materia oscura y una barra galáctica. El modelo 1 se clasifica dinámicamente como lento, mientras que el modelo 2 conserva los mismos parámetros geométricos y estructurales, pero con una velocidad patrón mayor, lo que lo caracteriza como rápido. El modelo 3 incorpora una barra más masiva que la del modelo 1 y, además, presenta una rotación más lenta. Finalmente, el modelo 4 mantiene los mismos parámetros geométricos que el modelo 3, pero con una velocidad patrón mayor, clasificándose también como rápido.

Para cada modelo se calcularon las superficies de sección de Poincaré (PSS) con el objetivo de identificar familias de órbitas periódicas de alta multiplicidad ($m > 3$) que puedan formar y fortalecer una barra galáctica de tipo boxy. En el modelo 1 se identificaron dos familias de este tipo; en el modelo 2 no se detectaron; en el modelo 3 se encontraron cinco familias; y en el modelo 4 se identificaron dos.

Se llevó a cabo un análisis de estabilidad de las órbitas periódicas en cada modelo, con el fin de caracterizar los patrones orbitales construidos por órbitas periódicas puramente estables. El modelo 1 exhibe el patrón orbital de barra de tipo boxy más definido, seguido por el modelo 3. En contraste, los modelos 2 y 4 no muestran patrones de barra morfológicamente adecuados.

Un análisis más completo, que incorpore el estudio de órbitas inestables y la inclusión de la tercera dimensión, podría conducir a conclusiones más robustas; sin embargo, su desarrollo requiere una capacidad computacional significativamente mayor.

Boxy Galactic Bars Due to Stable Periodic Orbits of Planar Families of High Odd Multiplicity ($m > 3$)

Abstract

We studied the orbital dynamics of four galactic models composed of a disk, a dark matter halo, and a galactic bar. Model 1 is dynamically classified as slow, whereas Model 2 preserves the same geometric and structural parameters as Model 1 but has a higher pattern speed, which characterizes it as fast. Model 3 includes a more massive bar than that of Model 1 and also exhibits a slower rotation. Finally, Model 4 retains the same geometric parameters as Model 3, but with a higher pattern speed, and is therefore also classified as fast.

For each model, Poincaré surfaces of section (PSS) were computed in order to identify families of high-multiplicity periodic orbits ($m > 3$) that can form and strengthen a boxy-type galactic bar. In Model 1, two such families were identified; in Model 2, none were detected; in Model 3, five families were found; and in Model 4, two families were identified.

A stability analysis of the periodic orbits was carried out for each model to characterize the orbital patterns constructed by purely stable periodic orbits. Model 1 exhibits the most well-defined boxy bar orbital pattern, followed by Model 3. In contrast, Models 2 and 4 do not display morphologically adequate bar patterns.

A more comprehensive analysis, incorporating the study of unstable orbits and the inclusion of the third dimension, could lead to more robust conclusions; however, its development requires significantly greater computational resources.

Índice general

Título	I
Título	II
Aceptación	IV
Dedicatoria	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
Índice de tablas	XI
Índice de figuras	XII
Glosario	XIV
1. Introducción	1
2. Marco referencial	7
3. Potenciales gravitacionales	10
3.1. El potencial del disco: Modelo de Miyamoto-Nagai	10
3.2. El potencial del Halo: El modelo de Dehnen	10
3.3. El potencial de la barra: El elipsoide de Ferrers	11
4. Formulación matemática, unidades y modelos galácticos.	14
4.1. Formulación matemática	14
4.2. Unidades	15
4.3. Modelos	16
5. Cálculos y códigos usados	19
5.1. Curvas de velocidad cero	19
5.2. Integración numérica de las órbitas.	20
5.3. Superficies de Sección de Poincaré (PSS, por sus siglas en Inglés)	21
5.4. Órbitas periódicas y estabilidad	22
6. Resultados	25
6.1. Modelo 1	25
6.1.1. PSS	25
6.1.2. Curvas características	29
6.1.3. Diagrama de estabilidad	29
6.1.4. Patrón orbital	29
6.2. Modelo 2	32

6.2.1. PSS	32
6.2.2. Curva característica.	33
6.2.3. Diagrama de estabilidad.	33
6.2.4. Patrón orbital.	33
6.3. Modelo 3	35
6.3.1. PSS	35
6.3.2. Curvas características.	39
6.3.3. Diagramas de estabilidad	42
6.3.4. Patrón orbital.	42
6.4. Modelo 4	44
6.4.1. PSS	46
6.4.2. Curvas características.	46
6.4.3. Diagramas de estabilidad.	46
6.4.4. Patrón orbital.	48
6.5. Discusión	48
7. Conclusiones	54
A. Cálculo de los radios de corrotación (puntos de Lagrange L5)	58
Bibliografía	60

Índice de tablas

4.1. Modelos galácticos.	16
6.1. Principales observatorios y <i>surveys</i> con imágenes públicas en las bandas J , H y K del infrarrojo cercano, adecuados para el estudio de galaxias de disco barradas en el universo cercano ($z \leq 0.1$).	53
A.1. Clasificación dinámica para los cuatro modelos estudiados	59

Índice de figuras

1.1. Esquema de clasificación de Hubble.	1
1.2. Galaxia espiral barrada NGC1300	2
1.3. Miembros de la familia x1. Figura tomada de [1].	4
1.4. Estructuras de barra boxy. Figura tomada de [2].	5
2.1. Tres snapshots tomados del trabajo de [3].	7
2.2. Diagrama característico para uno de los modelos presentados en [4].	8
2.3. Órbitas sticky con forma boxy. Figura tomada de [4].	9
6.1. PSS para el modelo 1 a energías de Jacobi: -0.280, -0.270, -0.260, -0.220, -0.200, -0.180, -0.160, y -0.140.	26
6.2. Miembros de las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1 con una energía de Jacobi de -0.270. En los paneles inferiores se muestra su respectiva conservación de la energía.	28
6.3. Curva característica para las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1.	30
6.4. Diagramas de estabilidad para las familias x1, m7, y m9 para el modelo 1.	31
6.5. Estructuras de barra boxy debidas a las familias de alta multiplicidad m7 y m9 para el modelo 1.	32
6.6. PSS para el modelo 2 a energías de Jacobi: $E_J = -0.265, -0.255, -0.250, -0.245, -0.235, -0.225$	34
6.7. Órbita m8 para el modelo 2.	35
6.8. Curvas características para las familias x1 y m8 en el modelo 2.	36
6.9. Diagrama de estabilidad para las familias x1 y m8 en el modelo 2.	37
6.10. Patrón orbital debido a órbitas totalmente estables de la familia m8 en el modelo 2.	38
6.11. PSS para el modelo 3 a energías de Jacobi: $E_J = -0.300, -0.275, -0.250, -0.225, -0.200, -0.175, -0.150, -0.125, -0.100$	40
6.12. Miembros de las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.	41
6.13. Curvas características para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.	42
6.14. Diagramas de estabilidad para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.	43
6.15. Curvas características para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.	45
6.16. PSS a energías: $E_J = -0.300, -0.280, -0.260, -0.240, -0.220, -0.200, -0.180, -0.160$	47

6.17. Órbitas de multiplicidad 5 y multiplicidad 9 para el modelo 4.	48
6.18. Órbitas de multiplicidad 5 y multiplicidad 9 para el modelo 4.	49
6.19. Diagrama de estabilidad para el modelo 4.	50
6.20. Patrones orbitales contruidos por órbitas periódicas estables de las familias m5 y m9 para el modelo 4.	51
A.1. Curvas de Velocidad Cero (ZVC) para los cuatro modelos estudiados. El valor de la vertical correspondiente al máximo valor de la energía de Jacobi, representa el punto Lagrangiano L5, y por lo tanto al radio de corrotación. . .	58

Glosario

Barra *boxy*: En el contexto de dinámica galáctica, una barra boxy se refiere a una estructura de caja rectangular.

Corrotación galáctica: se define como el radio al cual la velocidad patrón de la barra tiene el mismo valor de la velocidad circular. A este radio se encuentran los puntos de Lagrange L2, L3, L4 y L5. Una partícula ubicada con velocidad nula en unos de estos puntos, permanecerá en reposo en el sistema de referencia que rota con la barra.

Curvas de velocidad cero (ZVC): herramientas fundamentales en dinámica galáctica para delimitar regiones accesibles a una partícula (estrellas, gas), da su energía y momento angular en un potencial gravitatorio .

Curvas invariantes: curvas cerradas que rodean a una órbita periódica en diagramas de Poincaré. Su existencia es evidencia de que la órbita periódica es estable a esa energía. Son formadas por órbitas cuasiperiódicas.

Densidad Volumétrica: Cantidad de energía radiada por unidad de tiempo y por unidad de área, integrada sobre todo el espectro electromagnético.

Halo de materia oscura: estructura esferoidal (aproximadamente isotrópica) que envuelve una galaxia y domina su masa total.

- Índice de estabilidad GALI2:** (Índice de alineación generalizada de orden 2) es un indicador de estabilidad orbital que mide la alineación progresiva de vectores de desviación en el espacio de fase. Es útil especialmente para distinguir entre órbitas regulares y caóticas en sistemas dinámicos complejos como potenciales galácticos.
- Ondas de densidad:** perturbaciones colectivas en la distribución de masa (estrellas, gas, polvo) de un disco galáctico que generan patrones espirales o barras.
- Órbitas cuasiperiódicas:** Son órbitas que libran en torno a una órbita periódica. En una PSS generan las curvas invariantes.
- Órbitas periódicas de alta multiplicidad:** son un tipo de órbitas periódicas que cruzan varias veces la superficie de sección de Poincaré antes de cerrarse.
- Orbitas sticky:** son aquellas que se comportan como regulares durante largos periodos para después convertirse en caóticas y llenar el espacio de fase.
- Orbitas x1:** son una familia de orbitas estelares periódicas que juegan un papel fundamental en el sostén y estabilidad de las barras galácticas y en los brazos espirales, son soluciones específicas a las ecuaciones de movimiento en un potencial no axisimétrico.
- Redshift (z):** Medida del corrimiento hacia longitudes de onda mayores de la radiación electromagnética

emitida por un objeto astronómico, generalmente interpretada como consecuencia de la expansión del Universo y utilizada como indicador de distancia cosmológica.

Superficie de sección de Poincaré (PSS): es una herramienta usada en sistemas dinámicos para visualizar la evolución de un sistema en el espacio de fases. se define como un corte transversal del espacio de fases donde se registran los puntos cada vez que una trayectoria del sistema lo cruza, revelando patrones en el comportamiento dinámico (como órbitas periódicas o caos)

Survey: Programa observacional sistemático diseñado para explorar una región extensa del cielo, obteniendo datos homogéneos de un gran número de objetos astronómicos bajo criterios observacionales bien definidos.

Trayectorias estelares: representan el movimiento de las estrellas dentro de una galaxia, gobernado por el potencial gravitatorio colectivo (materia visible + materia oscura). Las trayectorias de las estrellas en las galaxias construyen y refuerzan diversas estructuras como barra, brazos espirales y anillos.

Capítulo 1

Introducción

Las galaxias son enormes sistemas compuestos por estrellas, gas y polvo, ligados gravitacionalmente por halos de materia oscura. Se conoce muy bien que desde el punto de vista dinámico la componente más importante es la estelar, ya que sus trayectorias, construyen y dan forma a diversas estructuras a gran escala en las galaxias. En el universo se encuentran galaxias con disco y sin disco. Las galaxias sin disco consisten de galaxias elípticas e irregulares, mientras que las galaxias de disco pueden ser espirales o espirales barradas. Este trabajo de grado se enfoca en el estudio dinámico de galaxias de disco. El primer esquema de clasificación de galaxias fue realizado por el astrónomo estadounidense Edwin Hubble

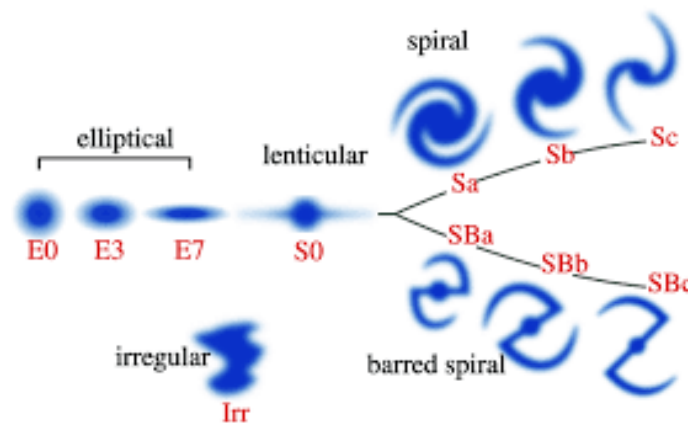


Figura 1.1: Esquema de clasificación de Hubble.

En este esquema de clasificación, las galaxias elípticas se ubican de izquierda a derecha de acuerdo a su grado de elipticidad. Mientras que las galaxias espirales van de izquierda a derecha de acuerdo a la fuerza del bulbo central y al grado enrollamiento de los brazos

espirales ¹.

En el caso de las galaxias de disco, una perturbación externa o interna hacia el mismo, puede generar la formación de ondas de densidad que lleva al surgimiento de estructuras no axi-simétricas como barras o brazos espirales. Esta es la teoría mas aceptada en la comunidad astronómica y se denomina la teoría de Lin Shu de ondas de densidad [5].

Galaxias con barras fuertes, se encuentran en imágenes en el óptico en casi la mitad de las galaxias cercanas de disco [6]. Este porcentaje, se incrementa hasta cerca del 70 % cuando se consideran observaciones en el infrarojo [7]. Un ejemplo de galaxia espiral con barra es NGC1300 mostrada en la figura 1.2.



Figura 1.2: Galaxia espiral barrada NGC1300

Desde el punto de vista dinámico, las barras son más relevantes que los brazos espirales, ya que pueden contener hasta 30 % la masa de su disco mientras que los brazos espirales solo llegan a contener hasta el 7 %.

Las barras galácticas se caracterizan por tres parámetros principales: tamaño, fuerza, y velocidad patrón (Ω_b). Esta última es la velocidad angular con la cual rota la barra. La velocidad patrón es el parámetro más importante de las barras, ya que dado un modelo galáctico, determina las ubicaciones de las resonancias en una galaxia y por lo tanto, la dinámica global del sistema.

¹El esquema de clasificación de Hubble se basa en la caracterización morfológica de las galaxias, más no en una clasificación evolutiva real de las mismas.

En general, las barras evolucionan en el tiempo, esto debido a que toman masa del disco y por lo tanto aumentan su fuerza y disminuyen su velocidad patrón. Sin embargo, desde un punto de vista fundamental, un modelo en el cual los parámetros estructurales y dinámicos de la barra no varíen nos proporciona un modelo base para entender la dinámica fundamental de estas estructuras. Se estima que en el caso de la Vía Láctea, la velocidad patrón es aproximadamente constante por cinco periodos de revolución de la barra. Un modelo con estas características conserva el valor del Hamiltoniano del modelo y se denomina autónomo. En este caso, el potencial gravitacional del modelo no cambia en el tiempo. Para estudiar estos modelos, se considera un sistema de referencia en donde la barra, que gira de forma constante, permanezca estático. De esta forma se ubican las medidas en un sistema no inercial de referencia. Las ecuaciones de movimiento que resultan del Hamiltoniano a través de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de primer orden las cuales no poseen solución analítica, entonces, es necesario recurrir a métodos computacionales para encontrar una solución aproximada de las mismas. Como ya se mencionó, este Hamiltoniano, que es una combinación de la energía mecánica total y el momentum angular, es una integral de movimiento. Únicamente, en sistemas que tengan esta característica (Sistemas Hamiltonianos Autónomos) es posible desarrollar un estudio de órbitas estelares periódicas.

En las galaxias, las trayectorias que describen las estrellas, son de suma importancia, ya que estas construyen las diferentes estructuras galácticas como barras y brazos espirales. De interés primordial son las órbitas periódicas de la familia $x1$. En el caso de un potencial con barra, estas órbitas son elongadas a lo largo del semieje mayor de la barra y constituyen el modelo estándar de la formación de barras, siendo estas la columna vertebral de estas estructuras. En la figura 1.3 se muestra un conjunto de órbitas de la familia $x1$ ². Esta figura fue tomada de [1]

Para hacer un estudio de órbitas periódicas, es necesario aplicar herramientas matemáticas propias de sistemas dinámicos, tales como Diagramas de Poincaré y teorías propias de la teoría del caos.

²En este caso los autores tomaron el semieje mayor de la barra sobre el eje vertical

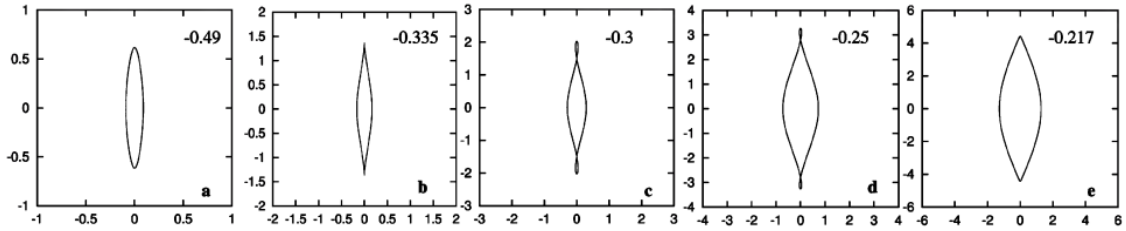


Figura 1.3: Miembros de la familia x1. Figura tomada de [1].

El modelo estándar de la formación orbital de barras, es capaz de explicar un gran número de observaciones en cuanto a barras con morfología elíptica se refiere. Sin embargo, existen un tipo de barras de morfología tipo "boxy" (de caja alargada) que no se pueden explicar con este modelo. La figura 1.4 muestra un ejemplo de este tipo de estructuras (figura tomada de: [2].)

Este tipo de estructuras también aparecen en simulaciones de N-cuerpos y son de gran interés en dinámica galáctica. Inclusive, existe evidencia que apunta a que la Vía Láctea contiene una barra con esta morfología (ver por ejemplo: [8]).

Si se desea explicar la formación de barras tipo boxy, es necesario proponer teorías que vayan más allá del típico "modelo estándar" de la formación de barras, y explorar otro tipo de órbitas que hagan el papel de bloques fundamentales de estas estructuras.

En este trabajo de grado, se hizo un estudio de un tipo de órbitas de alta multiplicidad impar ³ ($m > 3$) que pueden soportar una barra boxy. En particular analizamos cuatro modelos propuestos en el artículo de [3] y también estudiados en [4]. Los modelos 1 y 3 son exactamente iguales a los estudiados en las dos referencias anteriores. Los modelos 2 y 4 contienen los mismos parámetros de estructura de los modelos 1 y 3 pero se modificó su velocidad patrón. La variación de la velocidad patrón se introdujo con el propósito de comparar sistemas barrados rápidos y lentos, ya que en [4] se sugiere que las barras de tipo boxy tienden a formarse preferentemente en sistemas lentos.

El esquema general de este trabajo de grado se puede resumir de la siguiente manera: En

³En sistemas dinámicos, la multiplicidad se define como las veces que una órbita periódica intercepta la superficie de Poincaré antes de cerrarse

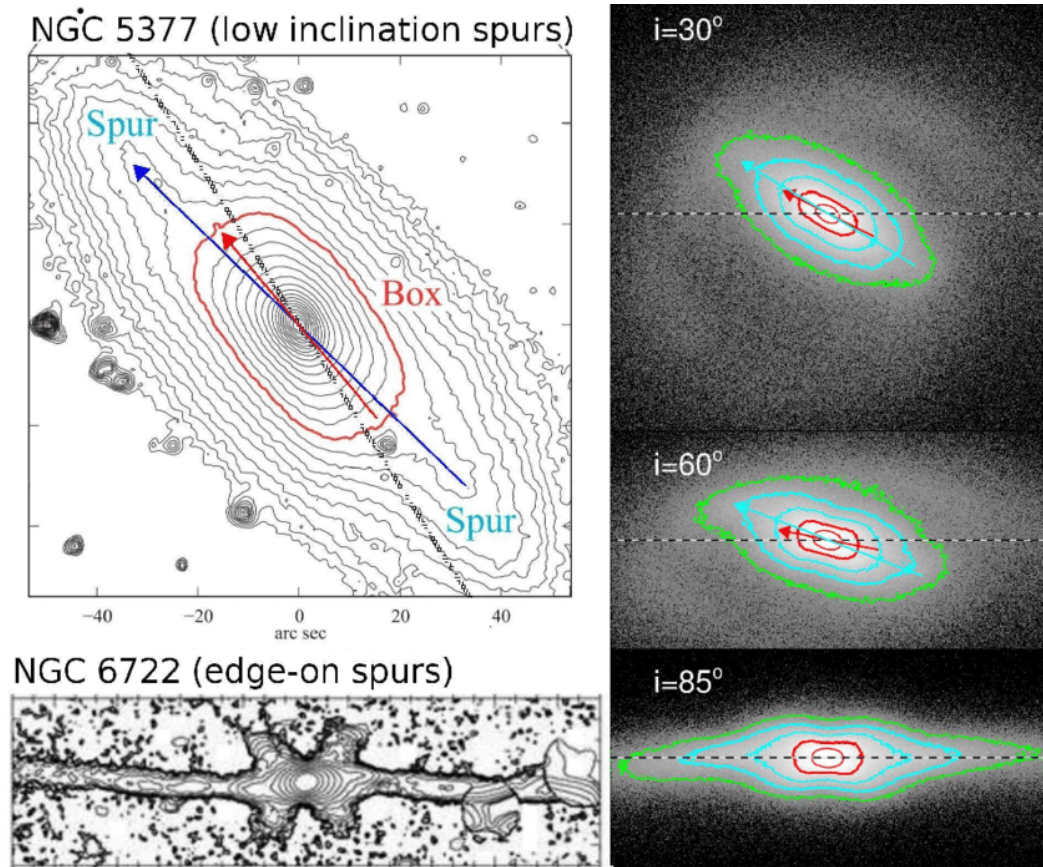


Figura 1.4: Estructuras de barra boxy. Figura tomada de [2].

el capítulo 2 se hace una descripción general de los trabajos principales sobre los cuales se basó este estudio. Además, se indican el propósito y la importancia del mismo. En el capítulo 3 se presentan los potenciales galácticos usados. Estos corresponden a un fondo axisimétrico compuesto de una halo de materia oscura y un disco galáctico, mientras que la parte no axisimétrica corresponde a una barra elipsoidal no homogénea. En el capítulo 4 se presentan la formulación matemática, las unidades usadas y se describen cada uno de los modelos galácticos estudiados. En el capítulo 5 se describen los cálculos realizados y los códigos utilizados dentro del estudio. En el capítulo 6 se presentan los resultados principales. Allí se muestran las diferentes PSS de los modelos, el análisis de estabilidad de las órbitas periódicas, y los patrones orbitales. Al final de este capítulo se presenta una discusión general de los resultados obtenidos. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones de este trabajo de grado.

Capítulo 2

Marco referencial

Este trabajo de grado, se basó principalmente en los estudios desarrollados en los artículos de: [9], [3], y [4]. En [9], se reporta una simulación de N cuerpos en dónde se formó una barra galáctica. En [3], se utilizaron snapshots de esta simulación para extraer los parámetros de estructura del disco, del halo de materia oscura, y una barra galáctica. Con estos parámetros se realizó un análisis de estabilidad para explorar la formación de las barras galácticas que tiene la característica de ser boxy. Tanto en las simulaciones numéricas, como los modelos respuesta, la barra formada tiene esta característica morfológica (ver figura 2.1).

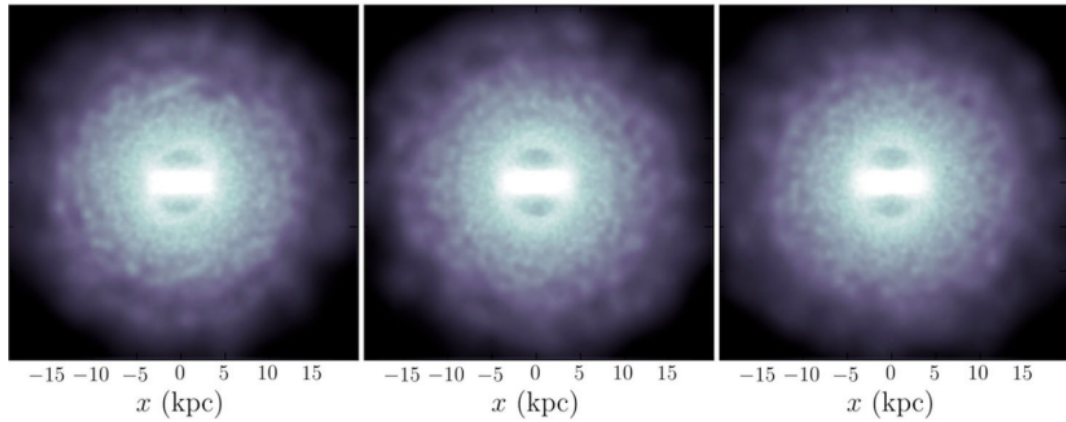


Figura 2.1: Tres snapshots tomados del trabajo de [3].

En [4], se usaron tres de estos modelos con el fin de encontrar las posibles órbitas que pueden construir este tipo de estructuras. Para esto se utilizó el índice de estabilidad GALI2 [10]. Este índice de estabilidad representa de manera fehaciente y cuantitativa el comportamiento estable o caótico de una determinada órbita estelar. En particular se construyeron diagramas característicos como el que se muestra en la figura 2.2. En este diagrama, la barra de color indica el grado de caoticidad de las órbitas, siendo blanco estable y azul caótico. Con es-

te análisis se encontraron un tipo de órbitas “sticky” que pueden ser candidatas a construir estructuras “boxy”. Órbitas sticky son aquellas que se comportan como regulares durante largos periodos para después convertirse en caóticas y llenar el espacio de fase del sistema.

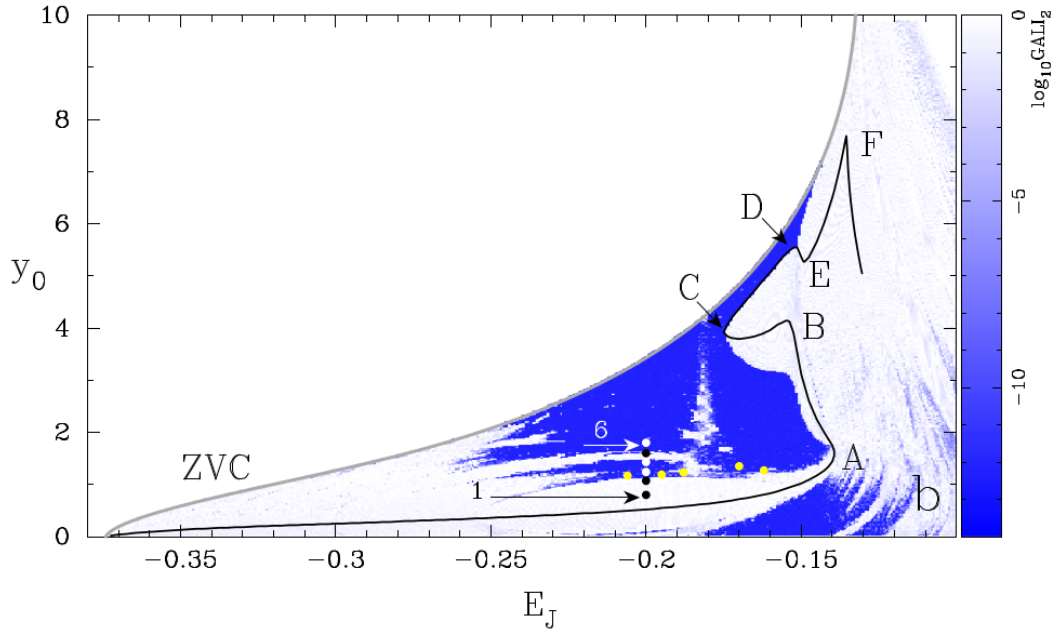


Figura 2.2: Diagrama característico para uno de los modelos presentados en [4].

En la figura 2.3 se muestran algunos ejemplos de este tipo de órbitas. Como conclusión general de este trabajo, se mostró que aquellas órbitas que contienen un comportamiento caótico también pueden contribuir a construir cierto tipo de estructuras galácticas. También se propuso que en sistemas de barra lentos el mecanismo de generación de barras boxy es más efectivo (la definición de barra lenta se explica en el capítulo 4)

En este trabajo de grado, se usaron dos modelos galácticos correspondientes a los trabajos de [3] y [4] (modelos 1 y 3). Estos modelos, son en principio autoconsistentes ya que provienen de simulaciones de N cuerpos. El modelo 1 es considerado un modelo de barra débil (masa pequeña en comparación a la masa del disco), mientras que el modelo 3 es un modelo de barra fuerte. Ambos modelos son clasificados como lentos. Por otra parte, los modelos 2 y 4 contienen los mismos parámetros de estructura que los modelos 1 y 3 respectivamente, pero

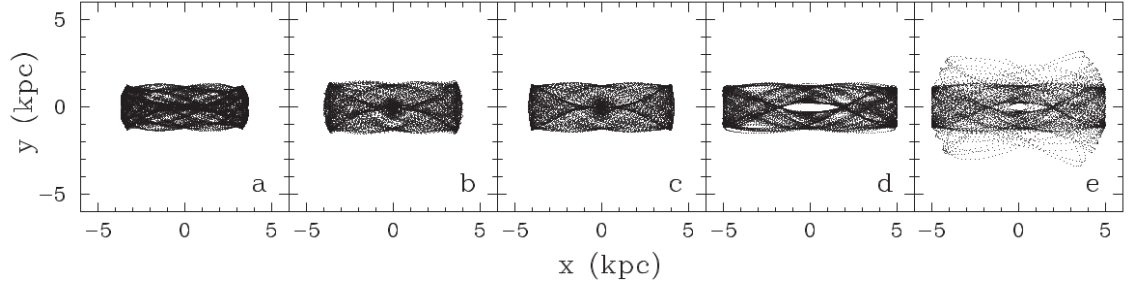


Figura 2.3: Órbitas sticky con forma boxy. Figura tomada de [4].

la velocidad patrón de la barra se cambió de tal manera que los modelos sean rápidos. Esto se hizo con el fin de observar la diferencia dinámica entre ambos tipos de barras. Se usaron PSS y análisis de estabilidad de órbitas periódicas con el fin de explorar los patrones orbitales generados por un tipo de órbitas de alta multiplicidad impar ($m > 3$). Como se muestra en el capítulo 6, los miembros estables de estas familias pueden construir, bajo ciertas condiciones, barras de tipo boxy (las condiciones de estabilidad se explican en el capítulo 4). En este análisis solo se consideraron las órbitas completamente estables de alta multiplicidad. Sin embargo, como se demostró en [4], órbitas que presentan cierto tipo de caoticidad también pueden contribuir a formar barras galácticas. También se consideraron solamente trayectorias orbitales en el plano $x - y$. Para hacer un estudio que incluya órbitas en tres dimensiones se requiere mayor poder computacional, y podría ser un posible tema para otro trabajo de grado.

Capítulo 3

Potenciales gravitacionales

En este trabajo de grado, se utilizaron modelos galácticos compuestos de un disco, un halo y una barra. A continuación se describen estos modelos

3.1. El potencial del disco: Modelo de Miyamoto-Nagai

El potencial de Miyamoto-Nagai [11] para un disco galáctico está dado por

$$\Phi_d = -\frac{GM_d}{\sqrt{x^2 + y^2 + (A + \sqrt{z^2 + B^2})^2}} \quad (3.1)$$

donde M_d es su masa, G es la constante de gravitación universal, y A , B son sus parámetros de escala horizontal y vertical respectivamente.

3.2. El potencial del Halo: El modelo de Dehnen

Un halo de materia oscura esférico que rodea el disco puede ser modelado por un potencial de Dehnen [12], el cual está dado por

$$\Phi_h = -\frac{GM_h}{a_h(2 - \gamma)} \left[1 - \left(\frac{r}{r + a_h} \right)^{2-\gamma} \right] \quad (3.2)$$

donde M_h es la masa del halo, γ es un parámetro adimensional ($0 \leq \gamma < 3$) el cual determina la pendiente del perfil del halo, y a_h es el radio de escala.

3.3. El potencial de la barra: El elipsoide de Ferrers

De acuerdo a [13], el potencial de una distribución de densidad de la forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c(1 - \mu^2)^n & \mu < 1 \\ \rho &= 0 & \mu \geq 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde n es un entero positivo, ρ_c es la densidad central y

$$\mu^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad a > b \geq c \geq 0 \quad (3.4)$$

donde a, b, c son los semiejes de la barra.

está dado por:

$$\phi = -\pi Gabc \frac{\rho_c}{n+1} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta(u)} (1 - \mu^2(u))^{(n+1)} \quad (3.5)$$

donde $\mu^2(u) = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}$, $\Delta(u)^2 = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)$ y λ es la única solución positiva de la ecuación $u(\lambda) = 1$ fuera de la barra, y $\lambda = 0$ dentro de la barra. Aplicando una expansión multipolinomial el potencial queda

$$\phi = \pi Gabc \rho_c \sum_{i+j+k+l=n+1} \frac{n!}{i!j!k!l!} (-1)^{n-i} x^{2j} y^{2k} z^{2l} W_{jkl} \quad (3.6)$$

donde W_{jkl} son los coeficientes de Pfenniger [14] los cuales se calculan por medio de la integral:

$$W_{jkl} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta(u)} \left(\frac{1}{a^2+u} \right)^j \left(\frac{1}{b^2+u} \right)^k \left(\frac{1}{c^2+u} \right)^l \quad (3.7)$$

Para el caso $n = 2$ (barra homogénea), la forma explicita del potencial de la barra queda

$$\begin{aligned} \Phi = -\frac{C}{6} & (W_{000} - 6W_{111}x^2y^2z^2 + 3W_{200}x^4 - W_{300}x^6 + 6W_{110}x^2y^2 \\ & - 3W_{120}x^2y^4 - 3W_{210}x^4y^2 - 3W_{100}x^2 + 3W_{020}y^4 - W_{030}y^6 \\ & + 6W_{011}z^2y^3 - 3W_{012}z^4y^2 - 3W_{021}y^4z^2 - 3W_{021}y^4z^2 - 3W_{010}y^2 + 3W_{002}z^4 \\ & + 3W_{002}z^4 - W_{003}z^6 + 6W_{101}x^2z^2 - 3W_{201}x^2z^4 - 3W_{001}z^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $C = 2\pi G\rho_c abc$, siendo ρ_c la densidad central.

La forma explicita de los coeficientes de Pfenniger es:

$$W_{000} = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{1/2}} F(\phi, \kappa) \quad (3.9)$$

$$W_{100} = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{1/2}} [F(\phi, \kappa) - E(\phi, \kappa)] \quad (3.10)$$

$$W_{010} = \frac{2(a^2 - c^2)^{1/2}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} E(\phi, \kappa) - \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} F(\phi, \kappa) - \frac{2}{(b^2 - c^2)} \sqrt{\frac{c^2 + \lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}} \quad (3.11)$$

$$W_{001} = \frac{2}{(b^2 - c^2)} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} - \frac{2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} E(\phi, \kappa) \quad (3.12)$$

$$W_{110} = \frac{W_{010} - W_{100}}{(a^2 - b^2)} \quad (3.13)$$

$$W_{011} = \frac{W_{001} - W_{010}}{(b^2 - c^2)} \quad (3.14)$$

$$W_{101} = \frac{W_{100} - W_{001}}{(c^2 - a^2)} \quad (3.15)$$

$$W_{200} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(a^2 + \lambda)} - W_{110} - W_{101} \right)}{3} \quad (3.16)$$

$$W_{020} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(b^2 + \lambda)} - W_{011} - W_{110} \right)}{3} \quad (3.17)$$

$$W_{002} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(c^2 + \lambda)} - W_{101} - W_{011} \right)}{3} \quad (3.18)$$

$$W_{111} = \frac{W_{110} - W_{011}}{(c^2 - a^2)} \quad (3.19)$$

$$W_{120} = \frac{W_{020} - W_{110}}{(a^2 - b^2)} \quad (3.20)$$

$$W_{012} = \frac{W_{002} - W_{011}}{(b^2 - c^2)} \quad (3.21)$$

$$W_{201} = \frac{W_{200} - W_{101}}{(c^2 - a^2)} \quad (3.22)$$

$$W_{210} = \frac{W_{110} - W_{200}}{(a^2 - b^2)} \quad (3.23)$$

$$W_{021} = \frac{W_{011} - W_{020}}{(b^2 - c^2)} \quad (3.24)$$

$$W_{101} = \frac{W_{101} - W_{002}}{(c^2 - a^2)} \quad (3.25)$$

$$W_{300} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(a^2+\lambda)^2} - W_{210} - W_{201} \right)}{5} \quad (3.26)$$

$$W_{030} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(b^2+\lambda)^2} - W_{021} - W_{120} \right)}{5} \quad (3.27)$$

$$W_{003} = \frac{\left(\frac{2}{\Delta(\lambda)(c^2+\lambda)^2} - W_{102} - W_{012} \right)}{5} \quad (3.28)$$

donde $F(\phi, \kappa)$ y $E(\phi, \kappa)$ son las integrales elípticas incompletas, y

$$\sin(\phi) = ((a^2 - c^2)/(a^2 + \lambda))^{1/2}, \quad \kappa = ((a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)) \quad (3.29)$$

Capítulo 4

Formulación matemática, unidades y modelos galácticos.

4.1. Formulación matemática

En este trabajo se usó la formulación Hamiltoniana. El problema físico consiste de una componente axisimétrica compuesta de un disco y un halo galáctico. Sobre esta componente yace una barra galáctica (componente no axisimétrica) que rota en torno al eje z con momentum angular positivo con una velocidad angular de la barra o velocidad patrón constante con signo positivo. El signo positivo de la velocidad patrón resulta en una rotación de la barra en contra de las manecillas del reloj. El Hamiltoniano para un modelo cuya barra rota de forma constante es

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi - \Omega_b(xp_y - yp_x) = E_J \quad (4.1)$$

donde p_x, p_y, p_z son las velocidades en el sistema inercial de referencia (sistema que no rota), Φ es el potencial gravitacional el cual es la suma de los potenciales del disco, del halo y de la barra, Ω_b es la velocidad patrón de la barra (velocidad angular), y x, y son las coordenadas cartesianas en el sistema rotante.

El valor numérico del Hamiltoniano E_J , se denomina energía de Jacobi, la cual está relacionada con la energía total del sistema. En este tipo de modelos galácticos, la velocidad patrón es constante y a su vez el potencial gravitacional es independiente del tiempo, de esta forma la energía de Jacobi representa una integral de movimiento y por lo tanto este sistema corresponde a un sistema Hamiltoniano Autónomo. En sistemas de este tipo, la energía mecánica y el momentum angular no se conservan independientemente, pero una combinación de las dos si (ecuación 4.1). En sistemas dinámicos, una órbita consiste en las seis componentes

solución (posiciones y velocidades) de las ecuaciones de movimiento, las cuales se calculan por medio de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

A partir del Hamiltoniano 4.1 se obtiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de primer orden, las cuales están dadas por

$$\dot{x} = p_x + \Omega_b y \quad (4.2)$$

$$\dot{y} = p_y - \Omega_b x \quad (4.3)$$

$$\dot{z} = p_z \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_b p_y \quad (4.5)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Omega_b p_x \quad (4.6)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4.7)$$

Este conjunto de ecuaciones no poseen solución analítica, por lo tanto, para resolverlas, es necesario usar técnicas computacionales, las cuales brindan una solución aproximada al problema (ver sección 5).

4.2. Unidades

Para este tipo de sistemas, se normaliza la constante de gravitación universal ($G = 1$). De esta forma, las unidades quedan establecidas de la siguiente manera:

- Longitud (1 kpc)
- Masa ($10^{10} M_\odot$)
- Tiempo (4.718 Myr)
- Energía de Jacobi ($0.212 \text{ kpc}^2/\text{Myr}^2$)

4.3. Modelos

En este trabajo de grado, se usaron dos modelos reportados en [4]. Estos modelos representan un potencial galáctico consistente de una parte axisimétrica y una parte no axisimétrica. La primera se compone de un disco de Miyamoto-Nagai [11], y un halo de materia oscura de Dehnen [12]. La componente no axisimétrica hace referencia a una barra galáctica de Ferrers (ver sección 3). Los parámetros geométricos y dinámicos usados se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Modelos galácticos.

Modelo	Barra						Disco			Halo		
	$T\text{-}\Omega_b$	$a(\text{kpc})$	$b(\text{kpc})$	$c(\text{kpc})$	Ω_b km/(s kpc)	$M_b(10^{10})$ $M_\odot$	$A(\text{kpc})$	$B(\text{kpc})$	M_d (10^{10}) $M_\odot$	$a_H(\text{kpc})$	γ	M_h (10^{10}) $M_\odot$
1	Lenta	5.40	1.76	1.13	24	2.36	0.95	0.53	2.64	5.21	0.71	25
2	Rápida	5.40	1.76	1.13	50	2.36	0.95	0.53	2.64	5.21	0.71	25
3	Lenta	7.98	2.76	1.93	9	3.30	0.71	0.59	1.70	5.95	0.89	25
4	Rápida	7.98	2.76	1.93	33	3.30	0.71	0.59	1.70	5.95	0.89	25

Respecto a la tabla 4.1, la primera columna representa el modelo barrado, la segunda columna es el tipo de rotación de la barra (puede ser lenta o rápida). La tercera columna representa el semieje mayor de la barra (a), la cuarta columna es el semieje menor de la barra (b), la quinta columna representa el semieje vertical de la barra (c). La sexta columna es la velocidad patrón o velocidad angular de la barra (Ω_b)¹, y la séptima columna es la masa de la barra (M_b). Con respecto al disco, la octava columna es el parámetro de escala planar (A), la novena columna es el parámetro de escala vertical (B) y la décima columna representa la masa del disco (M_d). Para el halo, tenemos que la onceava columna es el parámetro de escala radial (a_h), la doceava columna es un parámetro de halo adimensional (γ), y finalmente la última columna es la masa del halo (M_h). Los modelos 1 y 3 son idénticos a los usados en [4] en cuanto a parámetros estructurales se refiere. También se nota que el modelo 3 es idéntico al modelo 4 estructuralmente. Lo que diferencia a estos modelos es el valor de la velocidad patrón. Este es el parámetro dinámico más importante, ya que determina la dinámica general del modelo, ubicando la localización de las diferentes resonancias galácticas.

¹El valor de la velocidad patrón en los cuatro modelos es positiva, esto indica que la barra rota en contra de las manecillas del reloj.

En este trabajo de grado se exploró la dinámica orbital de estos modelos, con el fin de entender la formación de un tipo de estructuras barradas de tipo boxy, comúnmente encontradas en observaciones y en simulaciones computacionales. Cabe mencionar que los modelos utilizados en [4], provienen originalmente del trabajo de [3]. En este último se calcularon los diferentes parámetros estructurales y dinámicos que dan cuenta de la barra, el disco, y el halo a partir de snapshots de simulaciones de N cuerpos. Tanto los snapshots de las simulaciones, como los modelos respuesta, mostraron la formación de barras boxy. La característica dinámica principal de estos modelos consiste en su "lentitud". Cuando decimos lentitud, nos referimos a su velocidad patrón. Dado un modelo galáctico, la localización de la región de corrotación depende del valor de Ω_b . Es bien sabido en dinámica que las barras no pueden exceder la región de corrotación [15]. De esta forma la definición para que un modelo barrado sea rápido o lento está definida por el parámetro $R = R_c/a$, en donde R_c es el radio de corrotación, y a es el semieje mayor de la barra. Según [16], una barra, se define como lenta si $R > 1.4$. En [4] se hizo un análisis de estabilidad orbital para explicar este tipo de barras. Allí se encontró un tipo de órbitas "sticky" que pueden dar cuenta de este tipo de morfologías. Órbitas sticky son aquellas que durante largos periodos de tiempo se comportan como regulares pero que al final de la integración entran a un régimen caótico. Se concluyó que este mecanismo es más eficiente en modelos barrados lentos.

A continuación se presentan los valores de R para los cuatro modelos usados ²

- Modelo 1: $R = 2.00$.
- Modelo 2: $R = 1.08$
- Modelo 3: $R = 2.87$
- Modelo 4: $R = 1.03$

Los modelos 1 y 3 son lentos y auto consistentes ya que provienen de una simulación de N cuerpos. Los modelos 2 y 4 son modelos rápidos, y dado el valor artificial que se ha impuesto para Ω_b , no son auto consistentes. Se introdujo de forma artificial estos valores

²Para tener una mayor claridad sobre el cálculo de estos parámetros ver el apéndice A.

para la velocidad patrón con el fin de explorar la diferencia dinámica entre modelos barrados lentos y rápidos.

Capítulo 5

Cálculos y códigos usados

En este capítulo se describen los cálculos desarrollados y los códigos usados.

5.1. Curvas de velocidad cero

La energía de Jacobi se puede escribir en términos de las componentes no inerciales de la velocidad en la forma

$$E_J = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(x, y, z) - \frac{\Omega_b^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (5.1)$$

donde v_x, v_y, v_z son las componentes no inerciales de la velocidad, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ es la rapidez en el sistema no inercial y Φ es el potencial total dado por

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_b(x, y, z) + \Phi_d(x, y, z) + \Phi_h(x, y, z) \quad (5.2)$$

El cuál se la suma de los potenciales de la barra, el disco, y el halo, y es independiente del tiempo.

Las ecuaciones de transformación entre coordenadas inerciales y no inerciales están dadas por

$$v_x = p_x + \Omega_b y \quad (5.3)$$

$$v_y = p_y - \Omega_b x \quad (5.4)$$

$$v_z = p_z \quad (5.5)$$

Una curva de velocidad cero, es aquella que define la región en dónde el movimiento es permitido. Para poder calcularla hacemos $x = 0$, $v = 0$ y calculamos el par (E_J, y) . El código para realizar este cálculo se llama `zvc.f`, el cuál está escrito en lenguaje Fortran. Este código incluye rutinas para calcular el potencial gravitacional total.

5.2. Integración numérica de las órbitas.

Las órbitas que describen las estrellas (en menor medida el gas y el polvo) en las galaxias, son los ladrillos con los cuales se construyen las diferentes estructuras galácticas como barras, brazos espirales, y anillos. La solución del conjunto de ecuaciones diferenciales desde 4.2 hasta 4.7, dadas las condiciones iniciales, nos entrega una órbita en el potencial galáctico determinado. Como se mencionó en el capítulo anterior, este conjunto de ecuaciones no tienen solución analítica, por lo tanto es necesario recurrir a integradores numéricos para poder obtener una solución aproximada. El código utilizado para integrar una órbita determinada se llama `integrator.f`. Este código está escrito en lenguaje Fortran. El procedimiento para integrar una órbita se describe a continuación

- En este trabajo sólo se consideraron orbitas planares, por lo tanto siempre se mantiene las componentes de la posición y la velocidad en z con valores nulos: $z = 0$, $v_z = 0$.
- Se asigna un valor para la energía de Jacobi que esté por dentro de la curva de velocidad cero.
- Se asigna un valor nulo para la componente horizontal: $x = 0$. De esta forma las partículas parten desde el eje y .
- Se asigna un valor para la coordenada y que esté dentro de la curva de velocidad cero.
- Por lo general se le da un valor nulo a la componente: $v_y = 0$
- Se calcula la componente v_x de la velocidad a partir de la ecuación 5.1. Al ser una ecuación cuadrática, sólo se considera la solución negativa debido a que estamos interesados en órbitas prógradas.
- Se calculan la componentes inerciales de la velocidad con las ecuaciones 5.3 a 5.5.
- De esta forma se han establecido las seis condiciones iniciales:
 $x_0, y_0, z_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}$.

- El sistema de ecuaciones diferenciales es integrado usando un método de Runge-Kutta 45 con un paso adecuado para conservar la energía en un orden menor de 10^{-10} .
- La trayectoria de la órbita se mantiene en el plano (x, y) y se integra hasta un tiempo establecido.

5.3. Superficies de Sección de Poincaré (PSS, por sus siglas en Inglés)

Una PSS, representa un método cualitativo de estudiar caos y estabilidad en sistemas dinámicos. Esta es una herramienta fundamental en el estudio de sistemas dinámicos, especialmente en sistemas Hamiltonianos conservativos, que permite analizar la dinámica del sistema mediante la reducción de la dimensión del espacio de fases. Consiste en definir una Hipersuperficie transversal al flujo dinámico y registrar los puntos en los que una trayectoria del sistema intersepta dicha superficie bajo una condición bien definida (por ejemplo, con una orientación específica del cruce). La sucesión de intersecciones genera un mapa discreto, conocido como mapa de Poincaré, que preserva las propiedades esenciales de la dinámica continua original. Este método resulta particularmente útil para identificar órbitas periódicas, cuasi-periódicas y caóticas, así como para estudiar la estabilidad de las trayectorias y la estructura global del espacio de fase [17]. En este estudio, el método para calcular una superficie de Poincaré para órbitas planares (x, y, p_x, p_y) , a una energía dada, es el siguiente

- Se calcula la curva de velocidad cero del modelo galáctico.
- Se escoge la energía dónde se desea calcular la superficie de Poincaré.
- Se asigna $z = 0, p_z = 0$.
- Se asigna $x = 0, p_y = 0$.
- Se calcula la componente p_x a partir de la ecuación para la energía de Jacobi considerando órbitas prógradas.

- En nuestro caso se toma $x = 0$. Así quedan tres coordenadas (y, p_x, p_y)
- Las condiciones anteriores representan una PSS.
- Se integra la órbita.
- Se restringe p_x haciendo que $v_x < 0$ cuando la órbita cruza la PSS. De esta manera se registra el par (y, p_y) cada vez que la partícula intercepta la PSS.
- Cada órbita se integra por 40.718 Gyr registrando así los puntos de la superficie de Poincaré.
- El proceso se repite para varios valores de y hasta que se alcanza la curva de velocidad cero en el diagrama característico.

El código que realiza el cálculo se llama `pss.f` y está escrito en lenguaje Fortran. Técnicamente, el código integra la órbita que es lanzada desde la vertical, hasta que esta vuelva a cruzar la superficie de Poincaré. Cuando esto ocurre el integrador regresa un paso y vuelve integrar la órbita con otro integrador de RK45 cambiando esta vez el tiempo por la coordenada x e incluyendo el tiempo como una nueva coordenada. De esta forma el punto de la superficie de Poincaré se registra de forma muy precisa conservando la energía con un orden menor a 10^{-10} . Ha este procedimiento se lo conoce como el método de Henon [18].

5.4. Órbitas periódicas y estabilidad

Las órbitas de las estrellas construyen las estructuras galácticas y las órbitas periódicas son los bloques fundamentales de dichas componentes galácticas. Cabe resaltar que las órbitas perfectamente periódicas son objetos puramente matemáticos, ya que en la práctica las podemos estimar solo por encima de una cierta tolerancia [19]. Con el fin de encontrar una órbita periódica usamos un método iterativo de Newton-Rhapson. Se resume el algoritmo para calcular órbitas periódicas y su estabilidad de la siguiente manera.

- Se analiza las PSS hasta localizar curvas invariantes ¹. Esto nos da una aproximación de las condiciones iniciales de una órbita periódica.
- Lanzamos la partícula desde la vertical ($x = 0$) con velocidad inicial $v_x < 0$. Las demás coordenadas se mantienen nulas, de esta manera tenemos un conjunto de condiciones iniciales.
- Se integra la órbita usando el integrador RK45 hasta que la partícula intercepta nuevamente la superficie de Poincaré.
- Se aplica un método iterativo de Newton-Raphson con el fin de comparar los valores iniciales y final de los vectores de estado. Si el error es menor a 10^{-7} se registra la órbita como periódica.
- Para calcular los índices de estabilidad usamos la teoría de ecuaciones variacionales. Entonces se considera pequeñas desviaciones de las condiciones iniciales. La relación entre los vectores de estado variacionales inicial y final está dada por

$$\xi = M\xi_0 \quad (5.6)$$

en donde ξ_0 y ξ son los vectores de estado inicial y final respectivamente, y M es la llamada matriz monodrómica. La ecuación característica de esta matriz es

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0 \quad (5.7)$$

las soluciones de esta ecuación obedecen las relaciones $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $\lambda_3\lambda_4 = 1$ y por cada par podemos escribir

$$\lambda_i, 1/\lambda_i = \frac{1}{2}[-b_i \pm (b_i^2 - 4)^{1/2}] \quad (5.8)$$

donde $b_i = \frac{1}{2}(\alpha \pm \Delta^{1/2})$ y $\Delta = \alpha^2 - 4(\beta - 2)$. Entonces b_1 y b_2 son los índices de estabilidad planar y vertical respectivamente. Si $\Delta > 0$, $|b_1| < 2$ y $|b_2| < 2$, los cuatro auto valores se localizan en un círculo unitario y la órbita es completamente

¹La existencia de curvas invariantes nos indican que una determinado órbita periódica es estable para una determinada energía de Jacobi

estable. Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ y $|b_2| < 2$ o $|b_1| < 2$ y $|b_2| > 2$, dos autovalores se ubican en el eje real y dos en el círculo unitario, la órbita es llamada inestable simple. Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 0$ y $|b_2| > 0$, los cuatro auto valores se ubican en el eje real y la órbita se clasifica como inestable doble. Finalmente si $\Delta < 0$, los cuatro auto valores son números complejos y la órbita se clasifica como inestable compleja. Una medida que garantiza la calidad de estos cálculos, corresponde al caso del valor del determinante de la matriz Monodrómica, el cual debe estar siempre cercano a la unidad. En las simulaciones presentadas en este trabajo de grado, siempre se controló dicho valor con un error computacional menor a un orden de 10^{-10} ².

Lo dicho anteriormente se resume de la siguiente manera:

- Si $\Delta > 0$, $|b_1| < 2$ y $|b_2| < 2$ Órbita completamente estable.
- Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ y $|b_2| < 2$ o $|b_1| < 2$ y $|b_2| > 2$ Inestable simple.
- Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ y $|b_2| > 2$ Inestable doble.
- $\Delta < 0$ Inestable compleja.

El código que realiza este proceso se denomina `stability.f` y está escrito en lenguaje de programación Fortran. El código aplica este algoritmo a diferentes valores de la energía de Jacobi generando así lo que se denomina una curva característica y un diagrama de estabilidad para una familia orbital periódica. Además de los índices de estabilidad b_1 y b_2 , el código también entrega las condiciones iniciales de las órbitas periódicas.

Estos algoritmos se utilizaron para desarrollar el análisis orbital de un tipo de órbitas que pueden ser consideradas como los bloques fundamentales de barras boxy. Los resultados se muestran en el siguiente capítulo.

²Para mayor información sobre la teoría de estabilidad e inestabilidad de órbitas periódicas ver [19]

Capítulo 6

Resultados

En este trabajo de grado se buscaron órbitas periódicas completamente estables que sean candidatas a ser los bloques fundamentales de barras galácticas de tipo boxy. Los procedimientos descritos anteriormente permitieron encontrar un tipo de órbitas periódicas de alta multiplicidad impar ($m > 3$) que podrían ser candidatas a ser las constructoras de este tipo de barras. En este capítulo se muestran los resultados obtenidos. Para lograr nuestro objetivo principal utilizamos los códigos mencionados en el capítulo 5 con los modelos descritos en la tabla 4.1. Las unidades del sistema también se describieron en el capítulo anterior. En las figuras que se presentan a continuación, por simplicidad, se omitió incluir las unidades para la energía de Jacobi pero se entiende que estas son $\text{kpc}^2/\text{Myr}^2$. A continuación se presentan los resultados para cada uno de los modelos estudiados.

6.1. Modelo 1

Este modelo tiene la característica de ser un modelo de barra débil y lento.

6.1.1. PSS

La figura 6.1 muestra las superficies de Poincaré a energías de Jacobi de $E_J = -0.280, -0.270, -0.260, -0.220, -0.200, -0.180, -0.160$, y -0.140 .

Para $E_J = -0.280$, se nota la existencia de fuertes curvas invariantes en torno a una órbita periódica¹. Identificamos esta órbita como un miembro de la familia principal x1 denotada con un punto azul. La existencia de curvas invariantes en torno a la órbita periódica nos indica

¹La existencia de curvas invariantes en torno a una órbita periódica, indica que a esa energía la familia es estable planar ($-2 < b_1 < 2$).

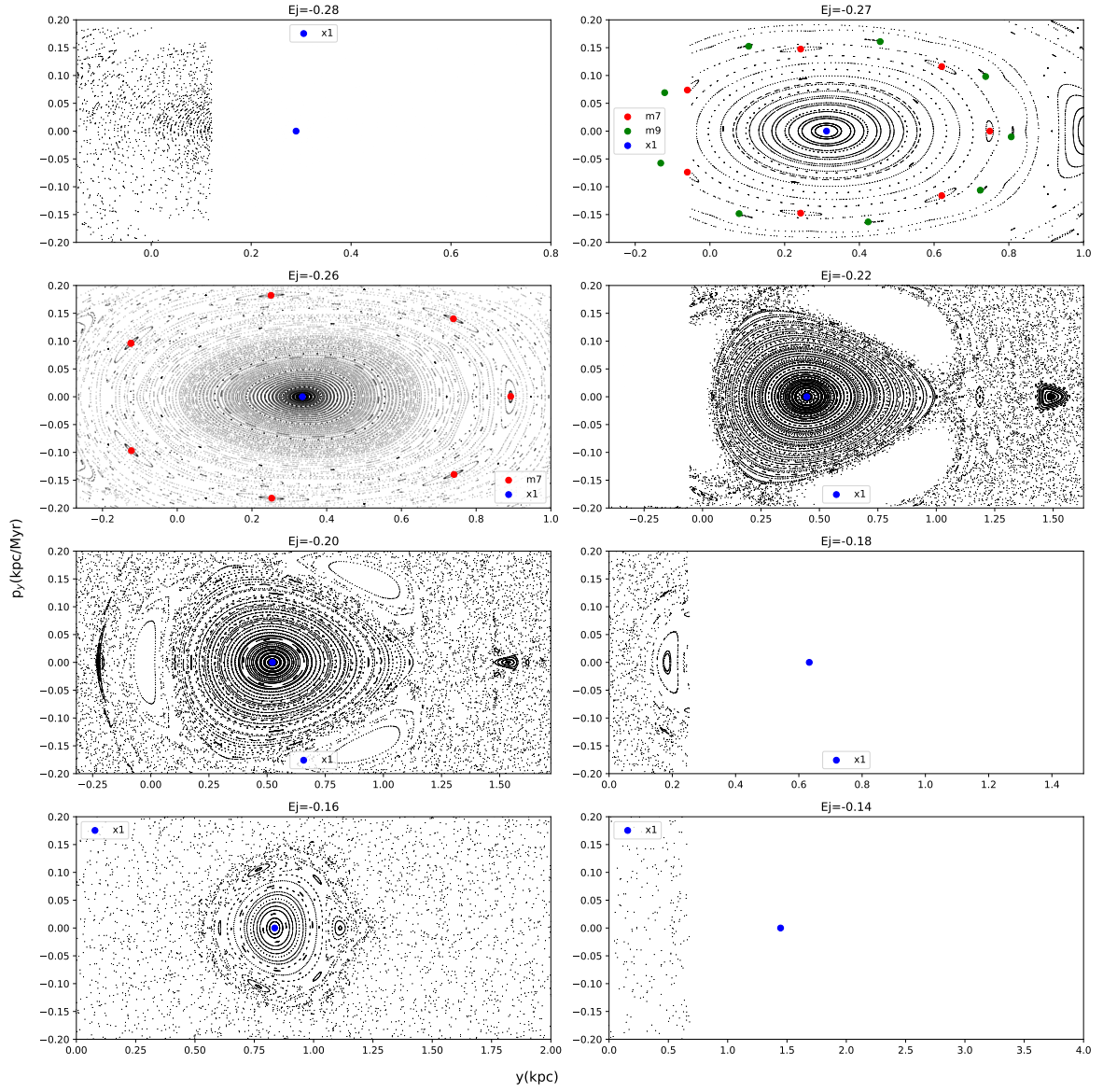


Figura 6.1: PSS para el modelo 1 a energías de Jacobi: -0.280, -0.270, -0.260, -0.220, -0.200, -0.180, -0.160, y -0.140.

que a esta energía la familia es estable. Justo por fuera de la influencia de esta familia, se nota la existencia de otra familia orbital pero en este caso de multiplicidad 9 (la denotamos como $m9$). Para $E_J = -0.270$, también encontramos una fuerte presencia de curvas invariantes en torno a la familia $x1$ (punto azul). A medida que nos alejamos del punto correspondiente a $x1$, y justo por fuera de las curvas invariantes de esta familia, notamos la presencia de pequeñas curvas invariantes de un tipo de órbitas periódicas de otra familia de alta multiplicidad. Esta se marca con puntos rojos y corresponde a una órbita de multiplicidad 7 ($m7$). Más externa a $m7$ volvemos a encontrar la misma familia de multiplicidad 9 ($m9$) localizada anteriormente a $E_J = -0.280$, esta la marcamos con color verde. La presencia de curvas invariantes para estas órbitas indica que estas familias son estables a esta energía. Para $E_J = -0.260$, nuevamente encontramos una fuerte presencia de curvas invariantes de la familia $x1$. Más externo a $x1$ encontramos nuevamente una órbita de la familia $m7$ denotada con puntos rojos. Para $E_J = -0.220$ también se nota una fuerte contribución de $x1$, sin embargo no encontramos órbitas de tipo $m7$ y $m9$. A esta energía se nota la presencia de puntos dispersos indicando que se inicia el surgimiento de un comportamiento caótico. A partir de $E_J = -0.200$ volvemos a encontrar la presencia de la familia $x1$, marcada, en todos los casos, con un punto azul. También notamos que a medida que la energía de Jacobi se incrementa, el comportamiento caótico se torna más fuerte. En estos casos no encontramos las familias $m7$ y $m9$, esto se debe a que las órbitas son inestables o simplemente ya no existen en este rango de energías. La figura 6.2 muestra tres ejemplos de órbitas periódicas encontradas en los diagramas de Poincaré de la figura 6.1. La órbita en azul corresponde a un miembro de la típica familia principal $x1$ a una energía de Jacobi de $E_J = -0.270$. La órbita en rojo corresponde a un miembro de la familia $m7$ a una energía de $E_J = -0.270$. Finalmente, la órbita en verde corresponde a un miembro de la familia $m9$. Los paneles inferiores muestran el error en la energía para cada una de las órbitas. Notamos que en los tres casos, la conservación de la energía fue menor que 10^{-12} . En general, en todos los cálculos, la conservación de la energía fue de un orden menor que 10^{-10} lo cual es un indicativo de la calidad de nuestros integradores.

Respecto a las órbitas $m7$ y $m9$ se nota que estas son de morfología boxy y pueden formar

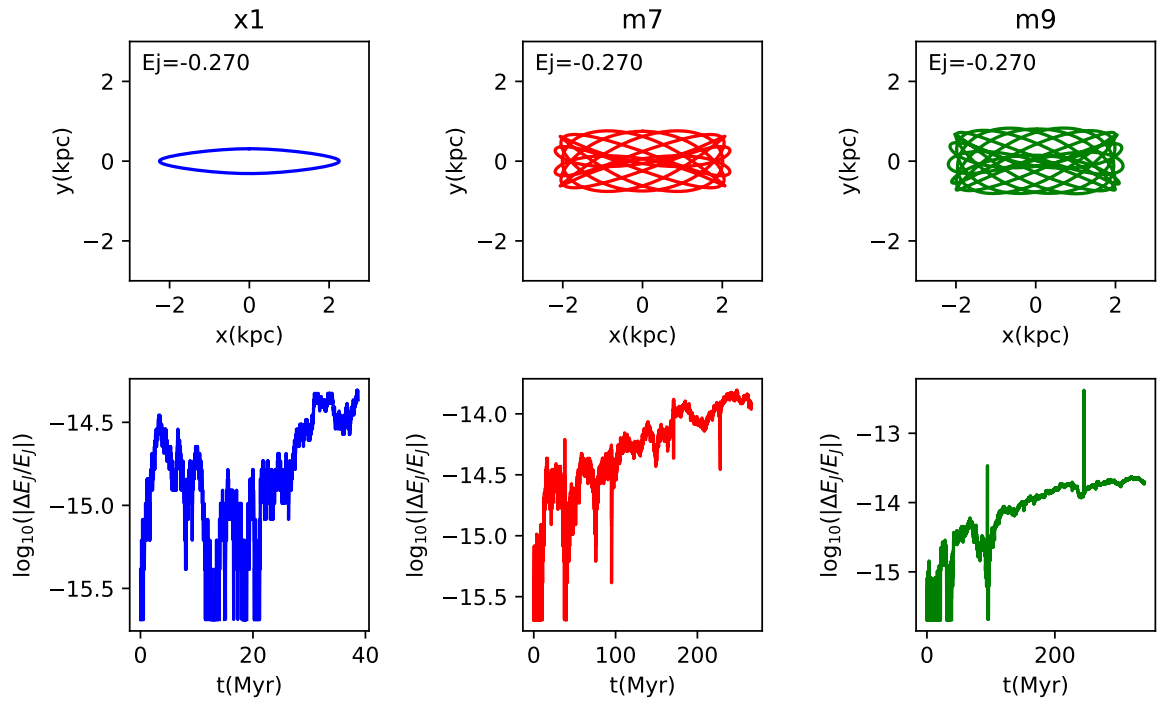


Figura 6.2: Miembros de las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1 con una energía de Jacobi de -0.270. En los paneles inferiores se muestra su respectiva conservación de la energía.

barras de este tipo.

6.1.2. Curvas características

Ya identificadas las órbitas m7 y m9 en las PSS, procedimos a calcular los miembros periódicos de estas familias. En la figura 6.3 se muestran sus curvas características en un típico diagrama E_J - y , en dónde y es la posición desde la vertical desde donde se lanzan las órbitas. La curva en gris marca la curva de velocidad cero (ZVC) y determina la región en dónde el movimiento es permitido. Los puntos en azul corresponden a órbitas periódicas de la familia x1, los puntos en rojo representan órbitas periódicas de la familia m7, y los puntos en verde son órbitas periódicas de la familia m9. La morfología de la familia x1 en este diagrama característico es ampliamente discutida en [20], [21], y [4]. Por otro lado se observa que las familias de alta multiplicidad m7 y m9 yacen en un amplio rango de energías en este diagrama característico.

6.1.3. Diagrama de estabilidad

La figura 6.4 muestra los índices de estabilidad b_1 y b_2 para las familias x1, m7, y m9. El índice de estabilidad planar es b_1 , mientras que el índice de estabilidad vertical es b_2 . En el capítulo 5 se mencionó los tipos de estabilidad existentes. En este trabajo de grado, solo estamos interesados en órbitas que son puramente estables, es decir, tanto estabilidad planar como estabilidad vertical. Esto ocurre cuando $|b_1| < 2$ y $|b_2| < 2$. Es decir que las familias son puramente estables cuando sus dos índices están por dentro de las líneas horizontales grises simultáneamente.

6.1.4. Patrón orbital

Ya obtenidas las condiciones iniciales para las órbitas periódicas de las familias m7 y m9, seleccionamos solo los miembros completamente estables y obtuvimos sus trayectorias. Los patrones morfológicos contruidos por estas órbitas se muestran en la figura 6.5. El panel izquierdo muestra el patrón orbital contruido por órbitas completamente estables de la fa-

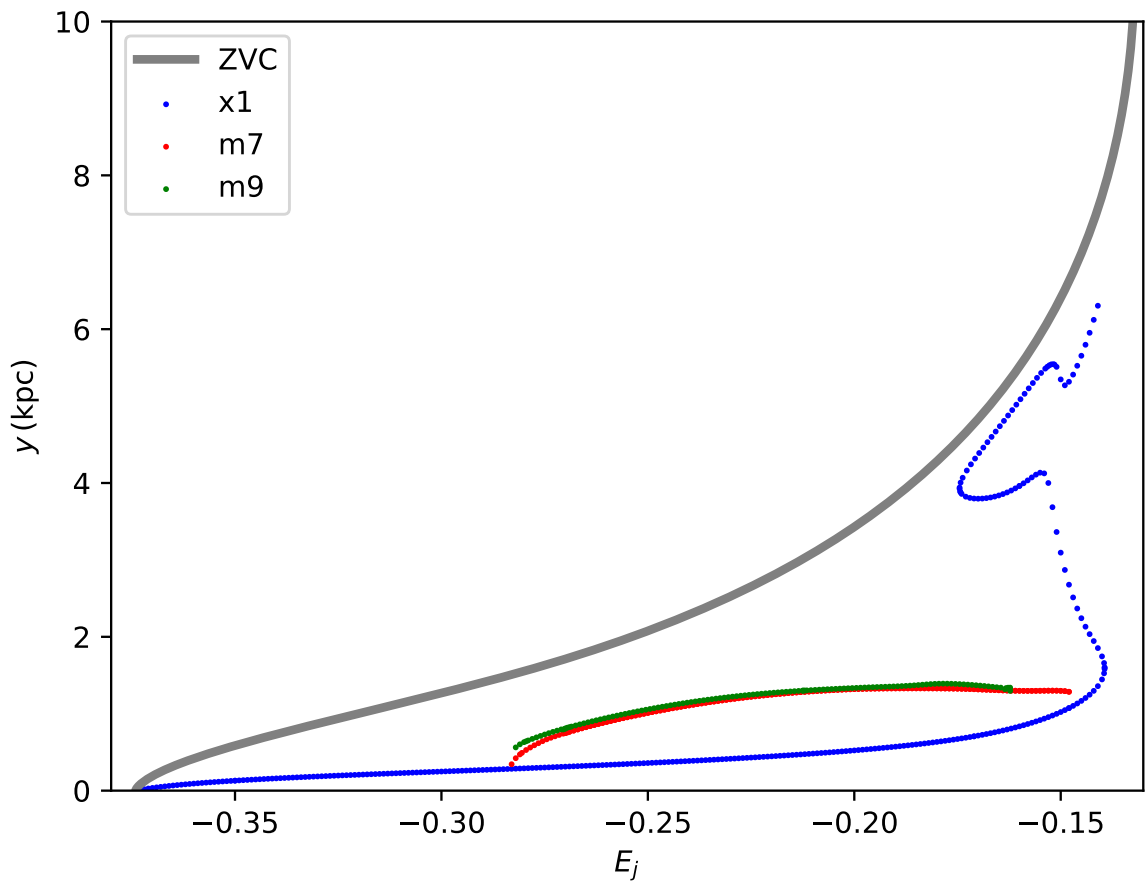


Figura 6.3: Curva característica para las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1.

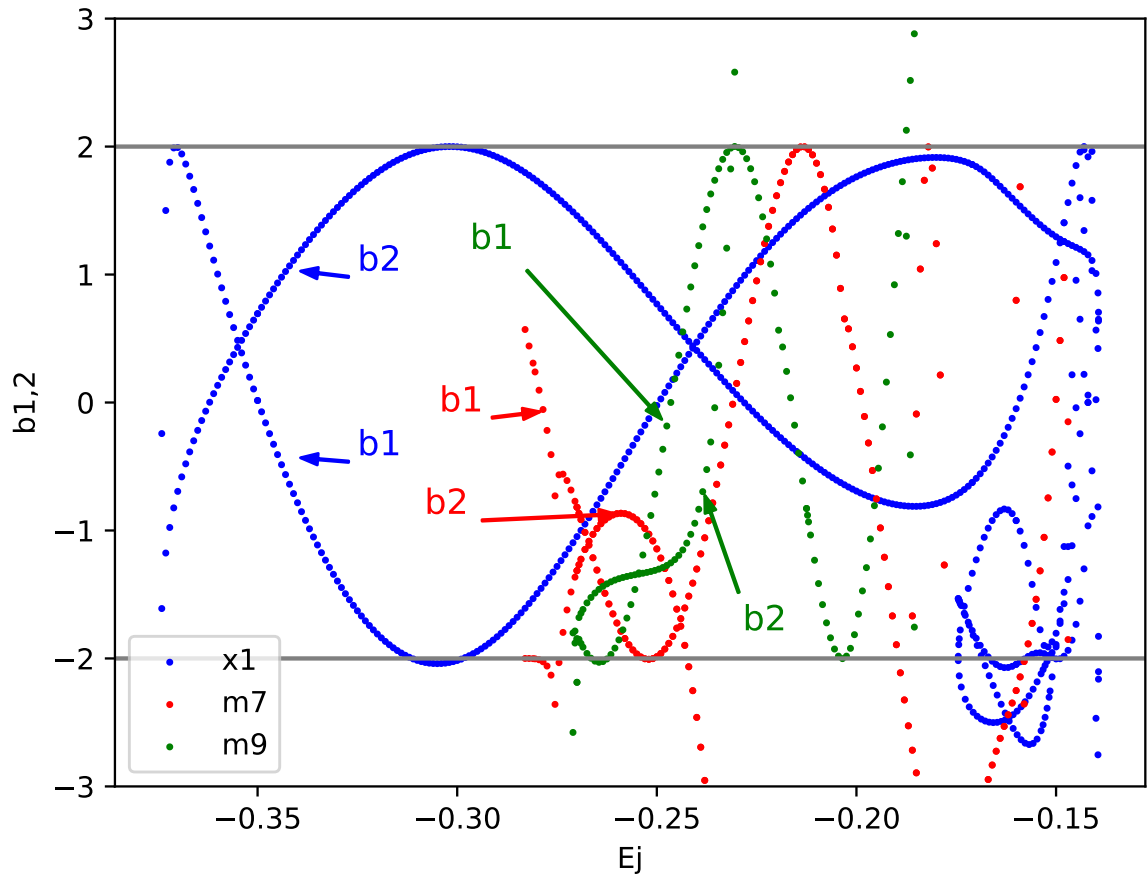


Figura 6.4: Diagramas de estabilidad para las familias x_1 , m_7 , y m_9 para el modelo 1.

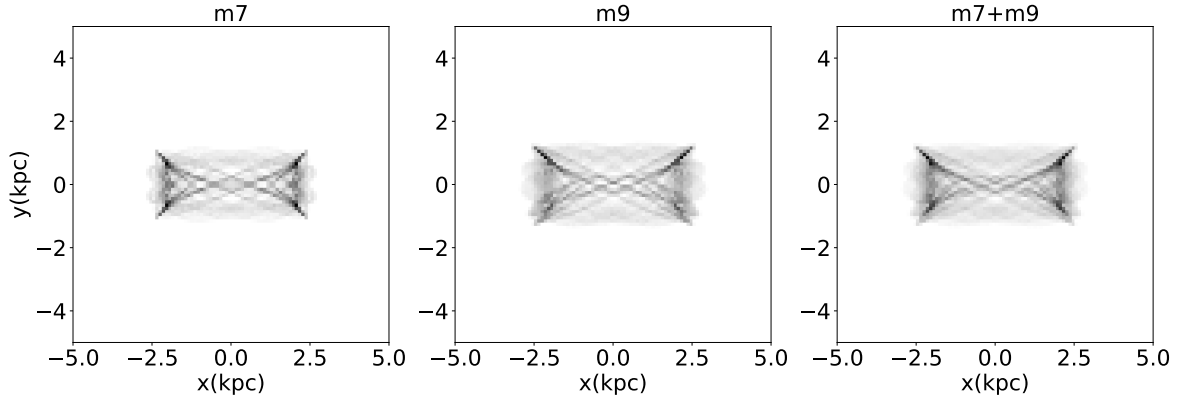


Figura 6.5: Estructuras de barra boxy debidas a las familias de alta multiplicidad $m7$ y $m9$ para el modelo 1.

milia $m7$, mientras que el panel central muestra el patrón orbital construido por miembros completamente estables de la familia $m9$. El panel derecho muestra la superposición de los dos patrones. Los miembros estables de las familias $m7$ y $m9$ delinean un patrón de barra de tipo boxy, cuya superposición refuerza la estructura galáctica. Además, se detecta una morfología en forma de “X” embebida en la barra, característica frecuentemente reportada en simulaciones de N-cuerpos y observaciones extragalácticas.[2, 3].

6.2. Modelo 2

Este modelo galáctico, consiste de los mismos parámetros de estructura del modelo 1, pero con diferente Ω_b . Como se indicó en la sección 4, este modelo es rápido, ubicando así los límites superiores de la barra muy cerca del círculo de corrotación. Con el fin de encontrar órbitas de alta multiplicidad que puedan formar barras boxy, repetimos el análisis realizado en el caso del modelo 1.

6.2.1. PSS

En la figura 6.6 se muestra un conjunto de superficies de Poincaré a varias energías de Jacobi. Para $E_J = -0.3$ (la energía más baja estudiada), encontramos fuertes curvas invariantes

correspondientes a la familia x1, su correspondiente punto periódico se marca con un punto azul tal cómo en la figura 6.1. La fuerte estabilidad de la familia x1 se repite para los casos $E_J = -0.295, -0.285$. En este caso, denotamos su PSS con color magenta, y se nota que es una órbita de multiplicidad ocho (m8). Para las energías $E_J = -0.265, -0.255, -0.250, -0.245, -0.235, -0.225$, no encontramos evidencia de estabilidad de la familia m8, o de otro tipo de familias de alta multiplicidad. En la figura 6.7 se muestra la trayectoria correspondiente a m8 con su respectiva conservación de la energía de Jacobi. La geometría excesivamente cuadrada de esta órbita no es compatible con la construcción de una morfología de barra galáctica.

6.2.2. Curva característica.

En la figura 6.8 se muestra la curva característica para las familias x1 y m8. Nuevamente, marcamos en gris la curva de velocidad cero (ZVC) de este modelo. En color azul encontramos la curva característica para x1, y en magenta la curva característica para m8. Se nota que la familia m8 recorre menos valores de E_J , y además, a medida que la energía de Jacobi crece, esta familia alcanza interceptos más altos en el eje y .

6.2.3. Diagrama de estabilidad.

La figura 6.9 muestra el comportamiento de los índices de estabilidad b_1 y b_2 para las familias x1 y m8. Se nota que la familia x1 es principalmente estable para todo su intervalo de energía. Por otro lado la familia m8 es totalmente estable en un intervalo pequeño de energía.

6.2.4. Patrón orbital.

Nuevamente integramos las órbitas periódicas puramente estables de la familia m8 con el fin de encontrar su patrón orbital. El resultado se muestra en la figura 6.10. Se observa que este patrón no representa, bajo ninguna circunstancia, una estructura morfológica de barra galáctica.

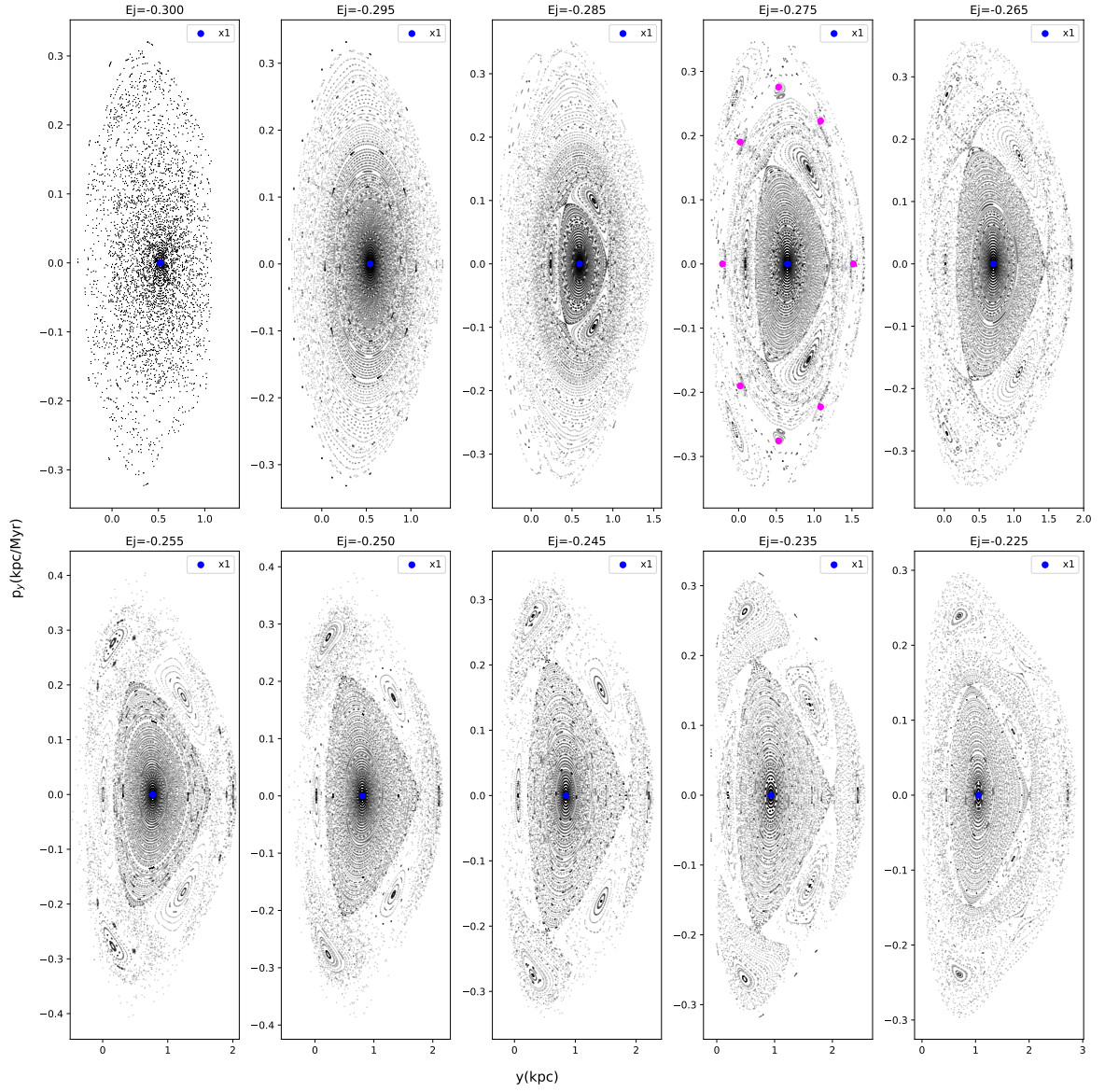


Figura 6.6: PSS para el model 2 a energías de Jacobi: $E_J = -0.265, -0.255, -0.250, -0.245, -0.235, -0.225$

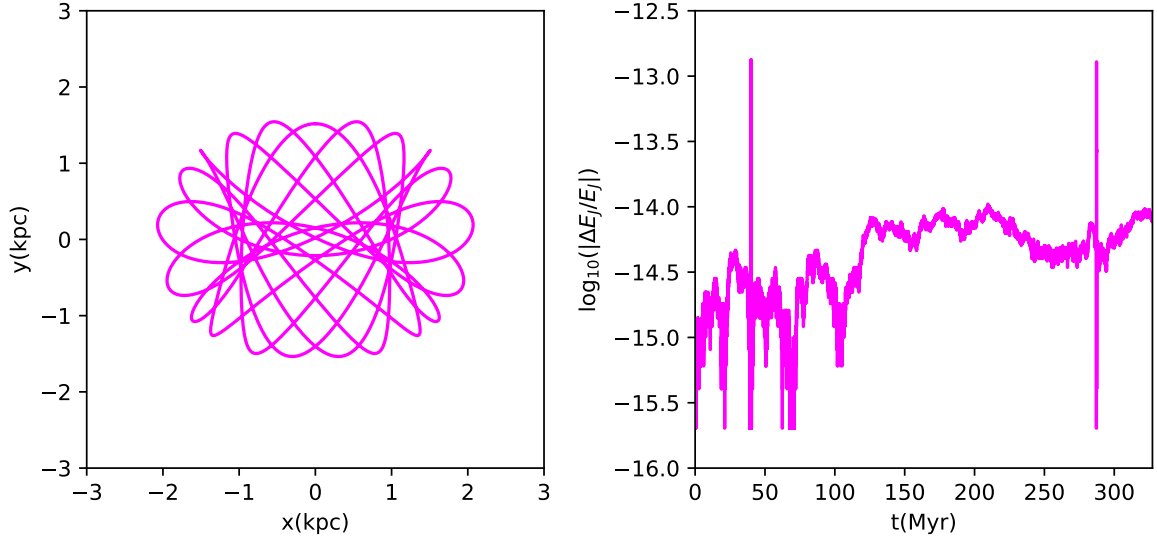


Figura 6.7: Órbita m8 para el modelo 2.

6.3. Modelo 3

Este modelo corresponde a uno de los estudiados en [4]. Este es a su vez, el modelo más fuerte y lento de todos.

6.3.1. PSS

En la figura 6.11 se muestra un conjunto de PSS para las energías de Jacobi: $E_J = -0.300, -0.275, -0.250, -0.225, -0.200, -0.175, -0.150, -0.125, -0.100$. Para $E_J = -0.300$ y $E_J = -0.275$ encontramos un fuerte patrón de estabilidad de la familia x1 en donde nuevamente se ha marcado su punto periódico con color azul. Para este modelo, a energías $E_J = -0.250, -0.225, -0.200$ encontramos una gran cantidad de órbitas de alta multiplicidad impar. A $E_J = -0.250$ notamos la presencia de una familia de multiplicidad 5 (m5-2) y una familia de multiplicidad 7 (m7). Marcamos la familia m5-2 con color naranja y la familia m7 con color rojo. Se nota aquí que m5-2 tiene curvas invariantes más fuertes que m7. Para $E_J = -0.225$ encontramos las familias m7-2 y m11. Marcamos la familia m7-2 con color marrón y la familia m11

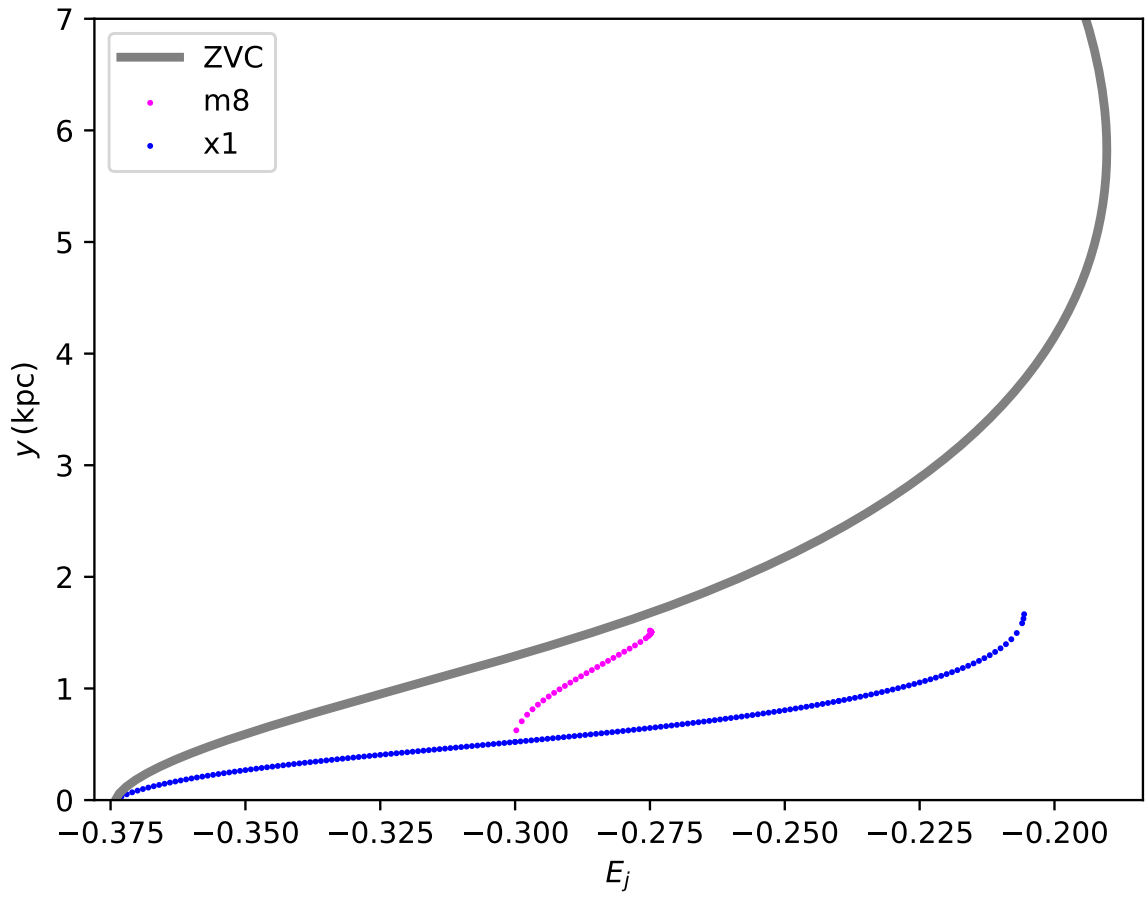
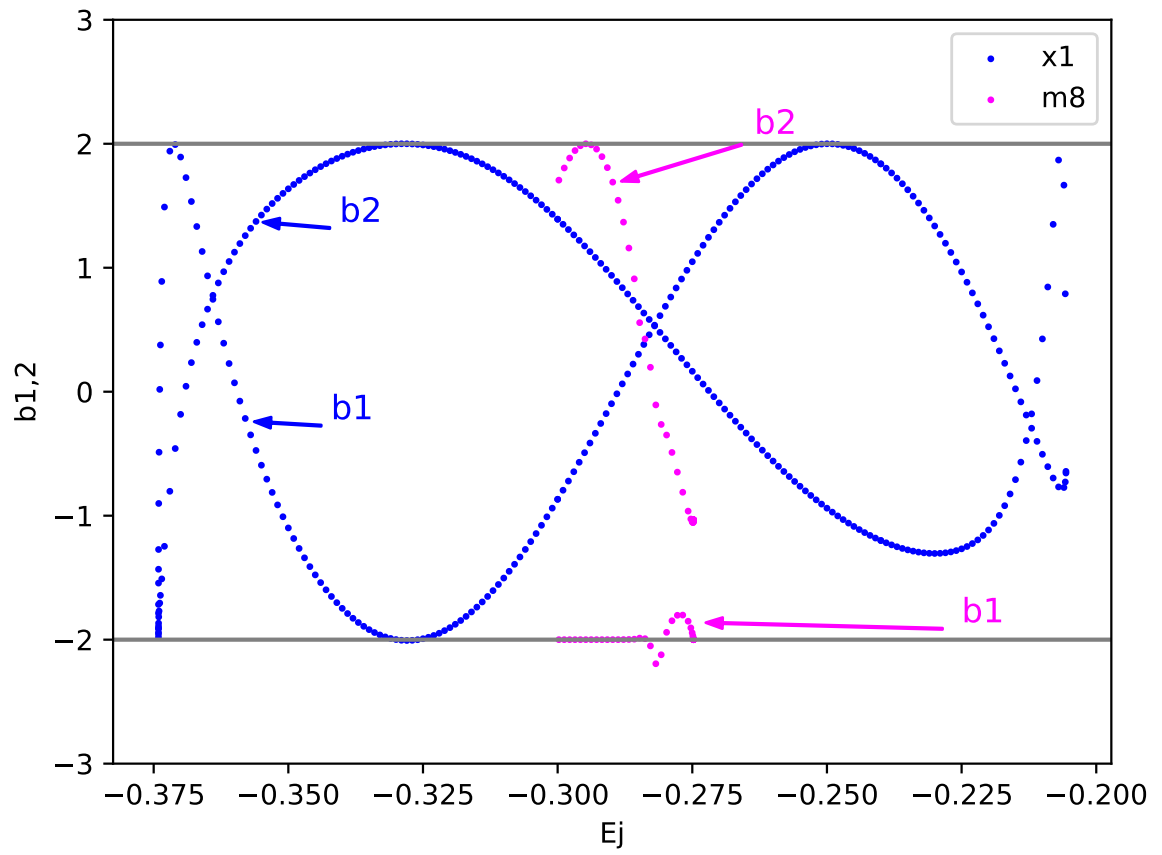


Figura 6.8: Curvas características para las familias x1 y m8 en el modelo 2.

Figura 6.9: Diagrama de estabilidad para las familias x_1 y m_8 en el modelo 2.

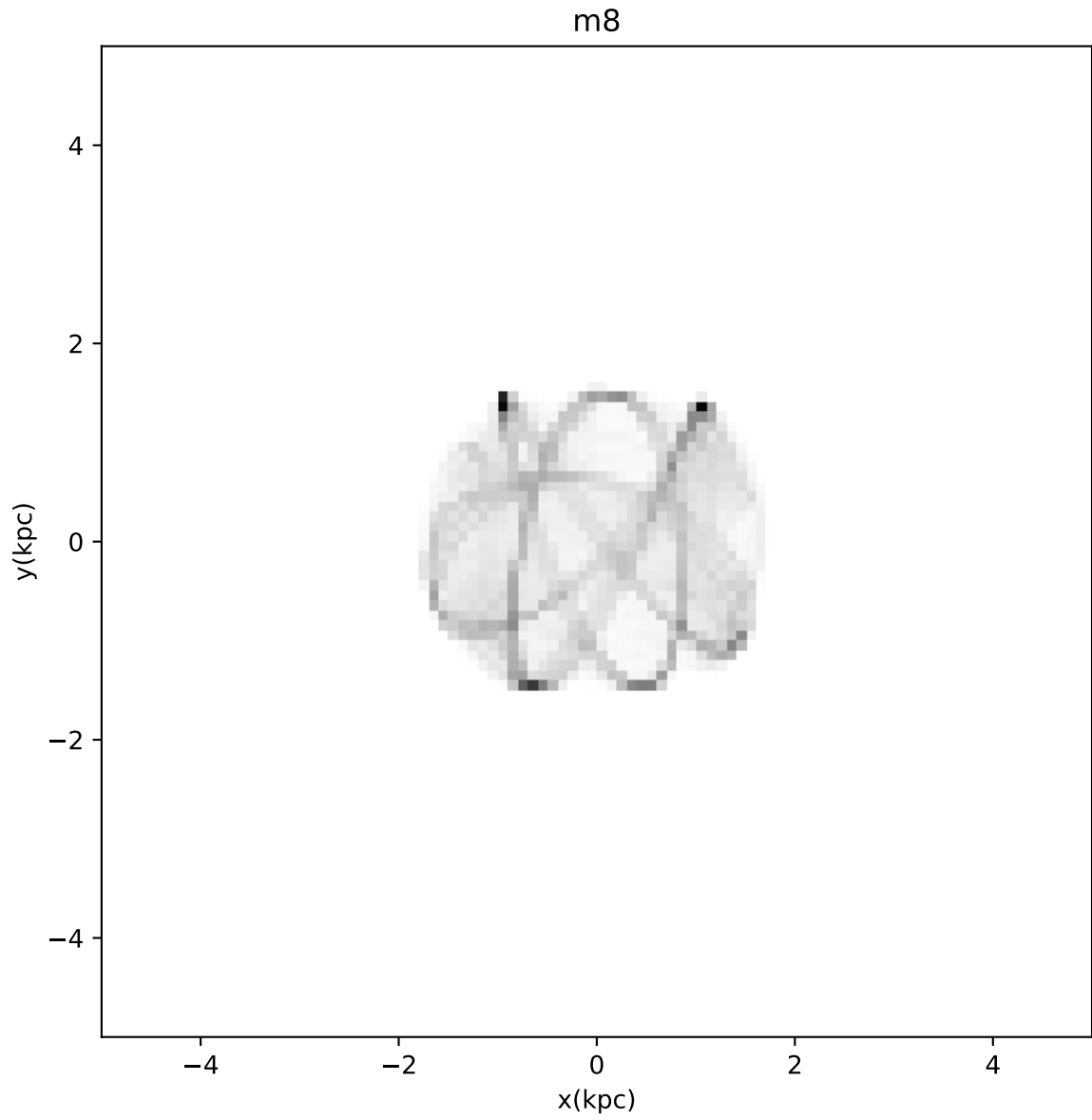


Figura 6.10: Patrón orbital debido a órbitas totalmente estables de la familia m8 en el modelo 2.

con color celeste. Además, también se encontró nuevamente las familias m5-2 y m7. En el caso $E_J = -0.200$, encontramos la familia m5, marcada con color purpura. Nuevamente se encontraron, a esta energía, las familias m7 y m11. Se nota también que el comportamiento caótico empieza a aparecer desde $E_J = -0.250$ y que incrementa a medida que la energía crece. En todos los casos se nota que la familia x1 es estable.

En la figura 6.12 se muestra un conjunto de miembros orbitales encontrados en las superficies de Poincaré 6.11. El panel superior izquierdo muestra un miembro de la típica familia principal x1 a una energía de $E_J = -0.200$. El panel superior central muestra a un miembro de la familia m5 con $E_J = -0.200$. El panel superior derecho muestra una trayectoria de m5-2 a $E_J = -0.225$. El panel inferior izquierdo muestra una trayectoria de la familia m7 a $E_J = -0.250$. El panel inferior central muestra un miembro de la familia m7-2 con $E_J = -0.225$. Finalmente, el panel inferior derecho muestra una trayectoria de la familia m11 con una energía de $E_J = -0.200$. Se nota claramente que las familias m5, m7, m7-2 y m11 son candidatos más adecuados para construir una barra galáctica. En contraste, la familia m5-2 exhibe una morfología relativamente cuadrada, lo que sugiere que no es particularmente adecuada para la formación de este tipo de estructuras.

6.3.2. Curvas características.

Nuevamente calculamos las órbitas periódicas para las familias mencionadas en la sección anterior. Las curvas características de estas familias se encuentran en la figura 6.13. Aquí marcamos con color gris la curva de velocidad cero (ZVC). En el panel izquierdo se muestra un esquema general de las curvas características de las órbitas mencionadas. Se observa que estas recorren grandes intervalos de energía a excepción de la familia m11. Asimismo, se observa que estas familias aparecen muy próximas en el diagrama $E_J - y$. El panel derecho muestra un acercamiento a la región donde se localizan dichas familias.

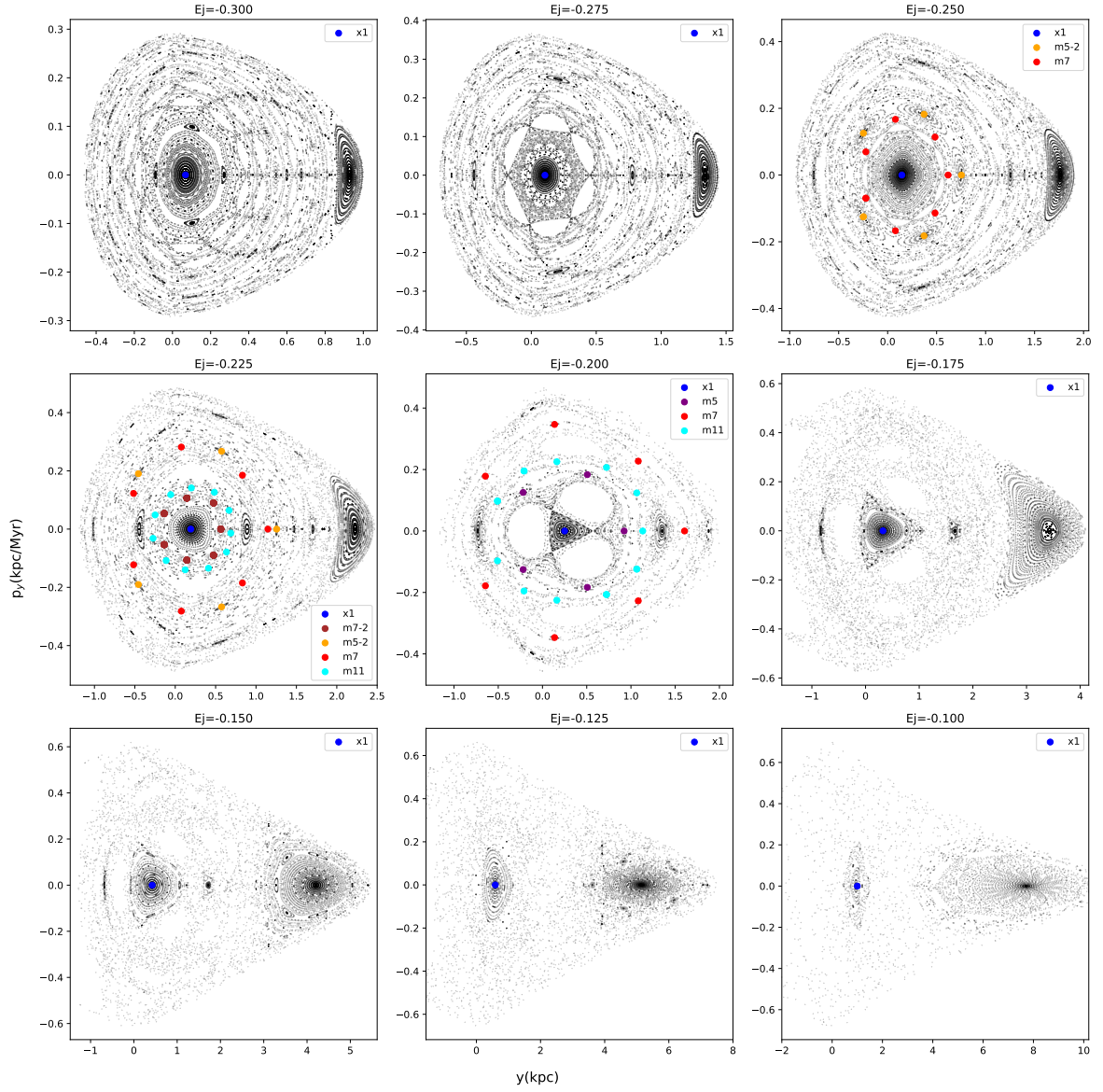


Figura 6.11: PSS para el modelo 3 a energías de Jacobi: $E_J = -0.300, -0.275, -0.250, -0.225, -0.200, -0.175, -0.150, -0.125, -0.100$

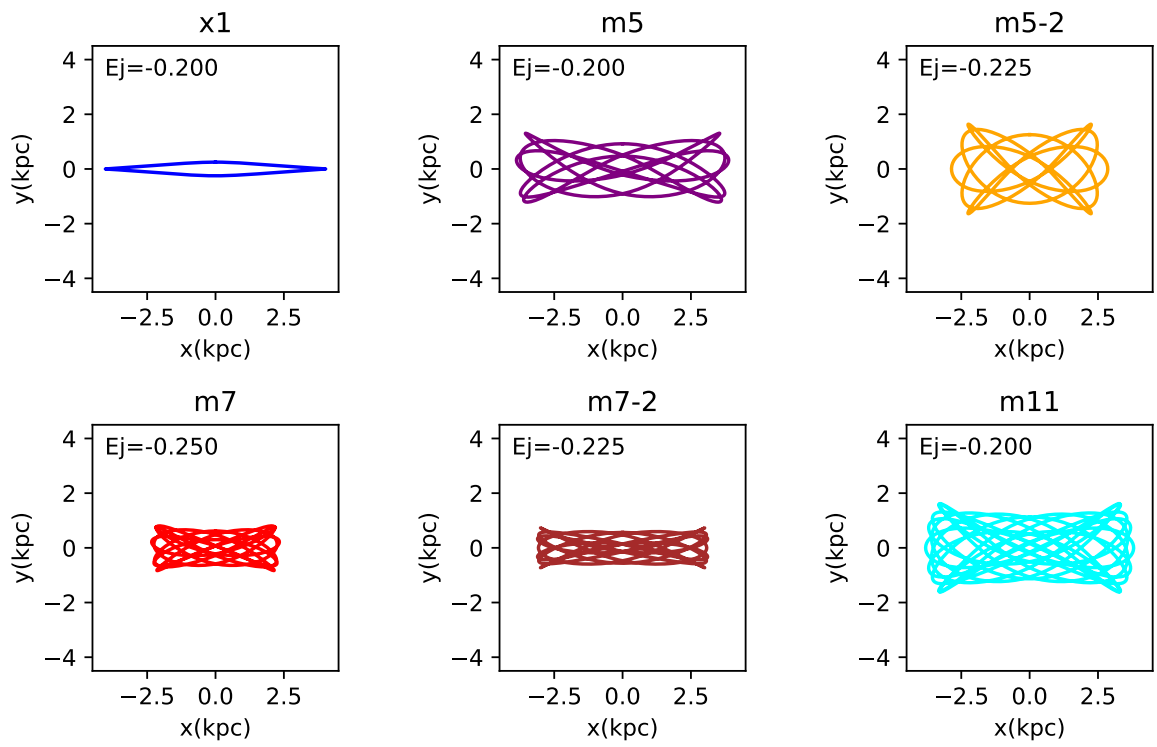


Figura 6.12: Miembros de las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.

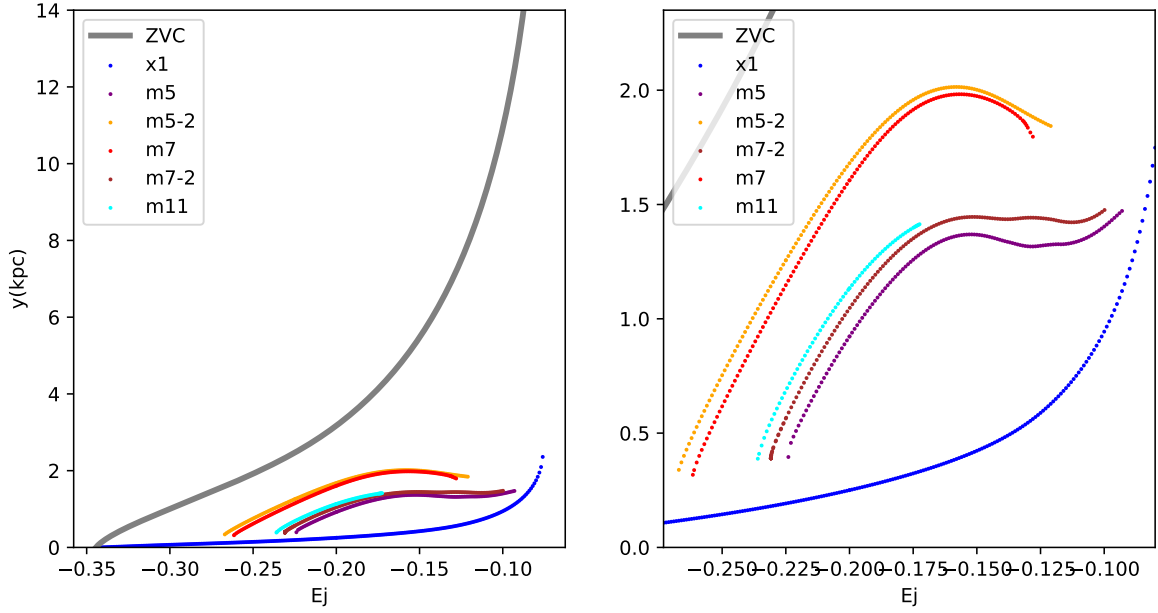


Figura 6.13: Curvas características para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2, y m11 para el modelo 3.

6.3.3. Diagramas de estabilidad

El diagrama de estabilidad para este modelo se encuentra en la figura 6.14. Se nota que debido a la gran cantidad de órbitas de alta multiplicidad impar encontradas, el comportamiento de los índices de estabilidad es mucho más complejo que en los modelos 1 y 2. Se observa que en general, estas órbitas son estables en intervalos de energía más pequeños que el modelo 1. Es interesante notar que la familia m11 es completamente inestable durante todo el intervalo de energía, por esta razón no se lo considera en el análisis de este trabajo de grado.

6.3.4. Patrón orbital.

Los resultados del patrón orbital de las órbitas de alta multiplicidad para este modelo se muestran en la figura 6.15. El panel superior izquierdo muestra el patrón orbital correspondiente a la familia m5. Dado que el intervalo de energía asociado a órbitas estables es muy reducido, este patrón orbital está compuesto únicamente por un número limitado de órbitas

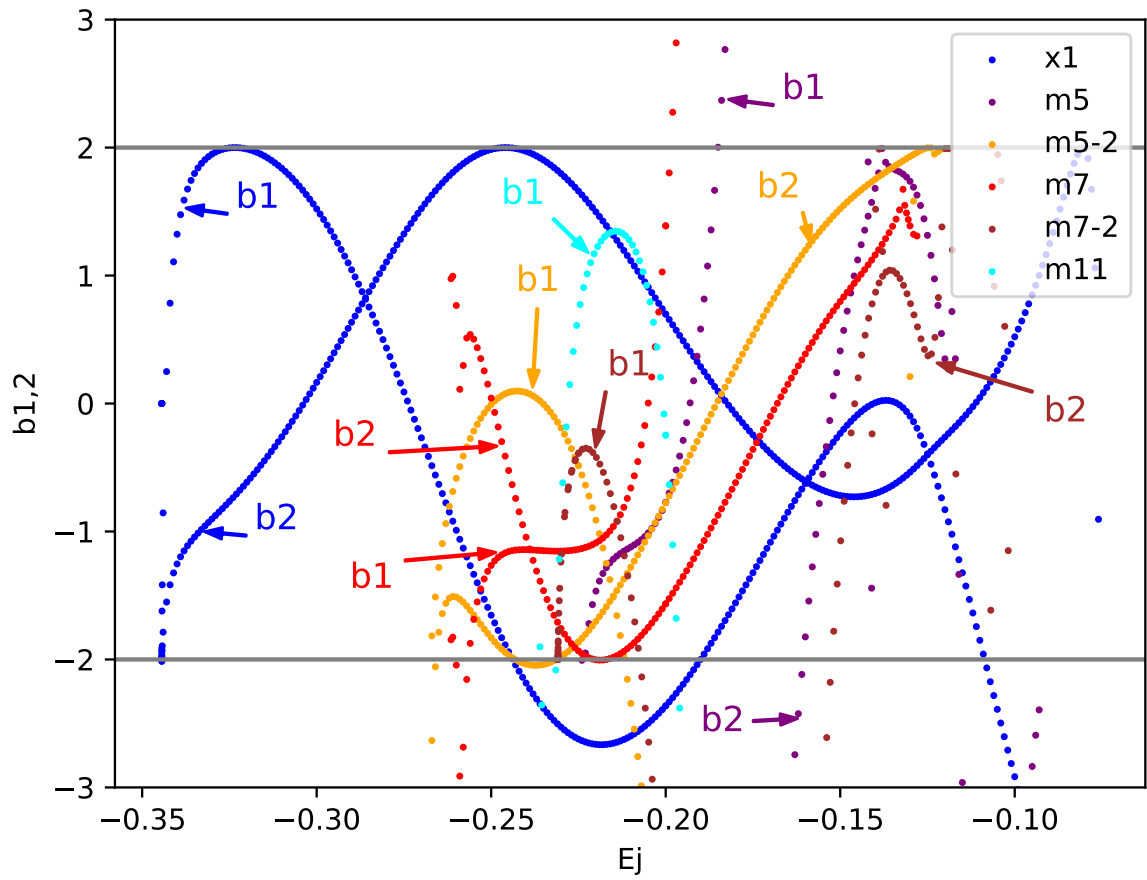


Figura 6.14: Diagramas de estabilidad para las familias x_1 , m_5 , m_{5-2} , m_7 , m_{7-2} , y m_{11} para el modelo 3.

periódicas. El panel superior central presenta el patrón orbital resultante de los miembros periódicos estables de la familia m5-2, en el cual se identifica una barra pequeña que contiene una estructura en forma de “X”. El patrón orbital construido a partir de órbitas periódicas completamente estables de la familia m7 se muestra en el panel superior derecho; en este caso, también se observa una estructura de barra pequeña con una “X” en su interior. El panel inferior izquierdo corresponde al patrón construido por la familia m7-2, el cual es similar al generado por las órbitas de la familia m5, debido a que el intervalo de estabilidad es igualmente reducido. El panel inferior central indica el patrón orbital resultante de la superposición de las familias m5, m5-2, m7 y m7-2. En este caso, se observa una pequeña barra central rodeada por una estructura de mayor extensión que no contribuye a la construcción de la barra. El patrón de barra más definido es el construido por las órbitas de las familias m5-2 y m7, el cual consiste en una barra pequeña que presenta una estructura en forma de “X” en su interior.

En general, se observa que en este modelo las órbitas periódicas estables de las familias multiperiodicas no construyen un patrón de barra rectangular tan pronunciado como el obtenido en el modelo 1. El análisis orbital realizado en [4] mostró que las órbitas sticky son capaces de construir barras con morfologías de tipo boxy. Esto sugiere que, aunque las órbitas periódicas estables de este modelo no generan un patrón morfológico de barra fuerte, sus componentes inestables podrían contribuir de manera significativa a su formación. No obstante, es necesario llevar a cabo un estudio más detallado de las órbitas inestables para obtener conclusiones definitivas.

6.4. Modelo 4

Este modelo consiste de los mismos parámetros geométricos que el modelo 3 pero con una velocidad patrón alta, esto hace que el modelo sea caracterizado como rápido.

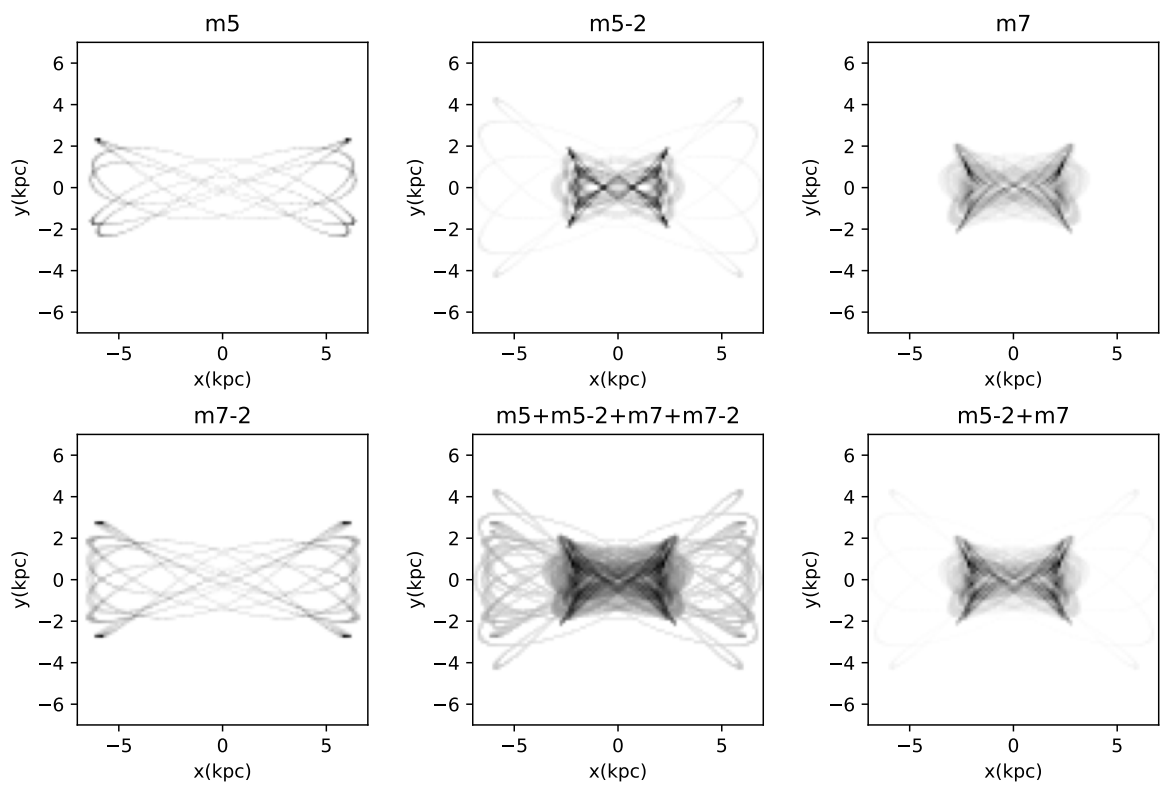


Figura 6.15: Curvas características para las familias $x1$, $m5$, $m5-2$, $m7$, $m7-2$, y $m11$ para el modelo 3.

6.4.1. PSS

La figura 6.16 muestra las PSS de este modelo para diferentes valores de la energía de Jacobi. A energías de $E_J = -0.300$ y $E_J = -0.280$ encontramos una fuerte contribución estable de la familia x1. A una energía de $E_J = -0.260$ se observa el inicio de un comportamiento caótico y la aparición de una familia de alta multiplicidad (m5) denotada con puntos purpura. A $E_J = -0.240$ se nota más comportamiento caótico con alguna contribución estable de la familia x1. A $E_J = -0.220$ se nota gran comportamiento caótico y la existencia de una familia de multiplicidad 9 (m9) en donde se denota sus intersecciones en la superficie de Poincaré con color verde. A energías de $E_J = -0.200$ y $E_J = -0.180$ se identifica la familia x1 rodeada por caos. Finalmente a $E_J = -0.160$ notamos que ya no existe la familia x1 y que el espacio de fase está dominado principalmente por comportamiento caótico.

La figura 6.17 muestran dos órbitas de alta multiplicidad para este modelo. El panel izquierdo muestra una órbita de m5 y el panel derecho una órbita m9. Se observa claraente que en ambos casos este tipo de órbitas no pueden formar un patrón de barra boxy.

6.4.2. Curvas características.

Procedimos nuevamente a calcular las órbitas periódicas para este modelo. La figura 6.18 muestra las curvas características para las familias x1, m5, y m9. De nuevo denotamos en gris la curva de velocidad cero (ZVC). Se nota que tanto las familia m5 como la familia m9 alcanzan rápidamente valores en el cruce con la vertical a medida que se incrementa la energía de Jacobi.

6.4.3. Diagramas de estabilidad.

Los índices de estabilidad b_1 y b_2 para las familias x1, m5, y m9 se muestran en la figura 6.19. Notamos que estas familias existen en intervalos pequeños de energía.

Los resultados del patrón orbital se muestran en la siguiente sección.

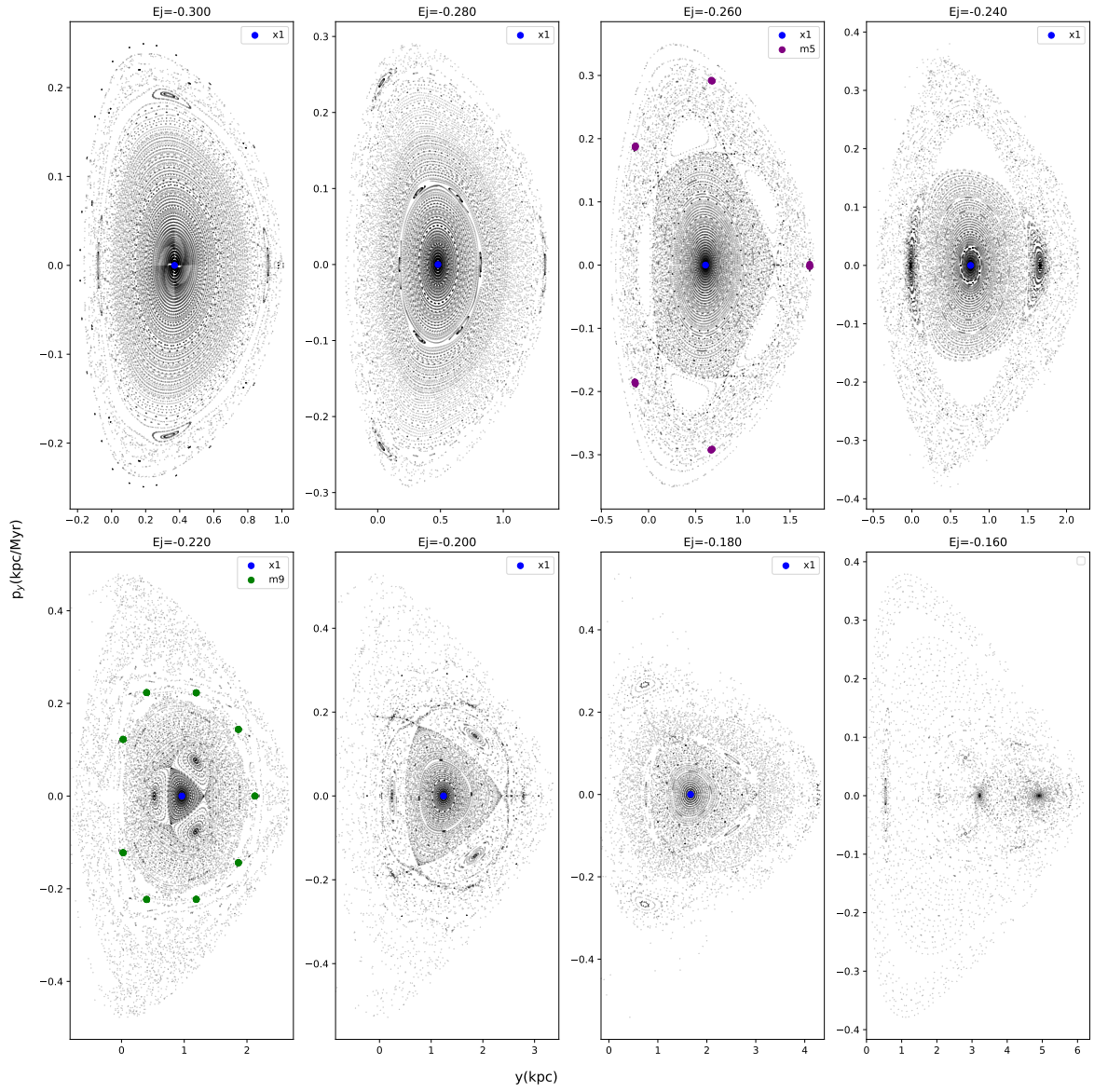


Figura 6.16: PSS a energías: $E_J = -0.300, -0.280, -0.260, -0.240, -0.220, -0.200, -0.180, -0.160$.

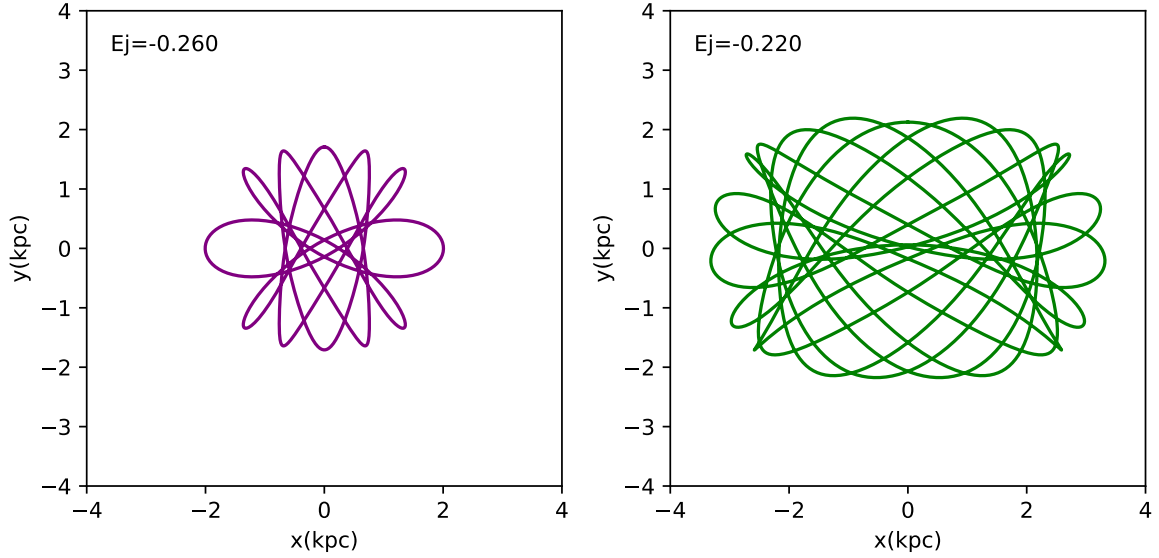


Figura 6.17: Órbitas de multiplicidad 5 y multiplicidad 9 para el modelo 4.

6.4.4. Patrón orbital.

El panel izquierdo de la figura 6.20 muestra el patrón orbital construido por órbitas periódicas estables de la familia m5, mientras que el panel derecho de la misma figura muestra el patrón orbital construido por órbitas periódicas estables de la familia m9. Se observa claramente que ninguna de las dos familias puede formar un patrón de barra boxy.

6.5. Discusión

Cabe destacar que este trabajo de grado fue realizado utilizando los recursos computacionales facilitados por el INAOE y el IRyA (UNAM), en México durante un tiempo limitado. No obstante, para llevar a cabo un análisis más profundo se requiere una capacidad de cómputo significativamente mayor. Por ejemplo, en el estudio de las superficies de Poincaré es necesario generar un mayor número de dichas superficies con intervalos de energía más reducidos. Asimismo, el cálculo de órbitas periódicas demanda una resolución más alta para obtener resultados más precisos.

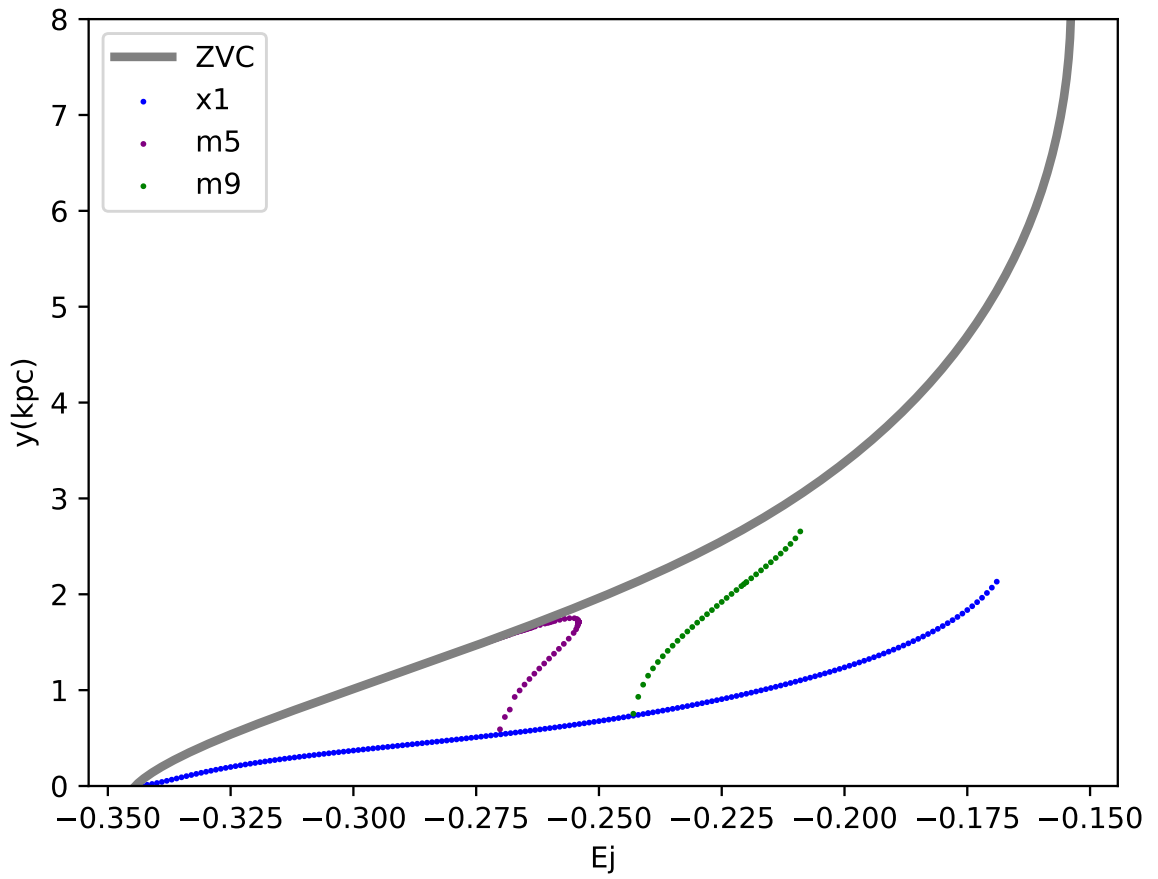


Figura 6.18: Órbitas de multiplicidad 5 y multiplicidad 9 para el modelo 4.

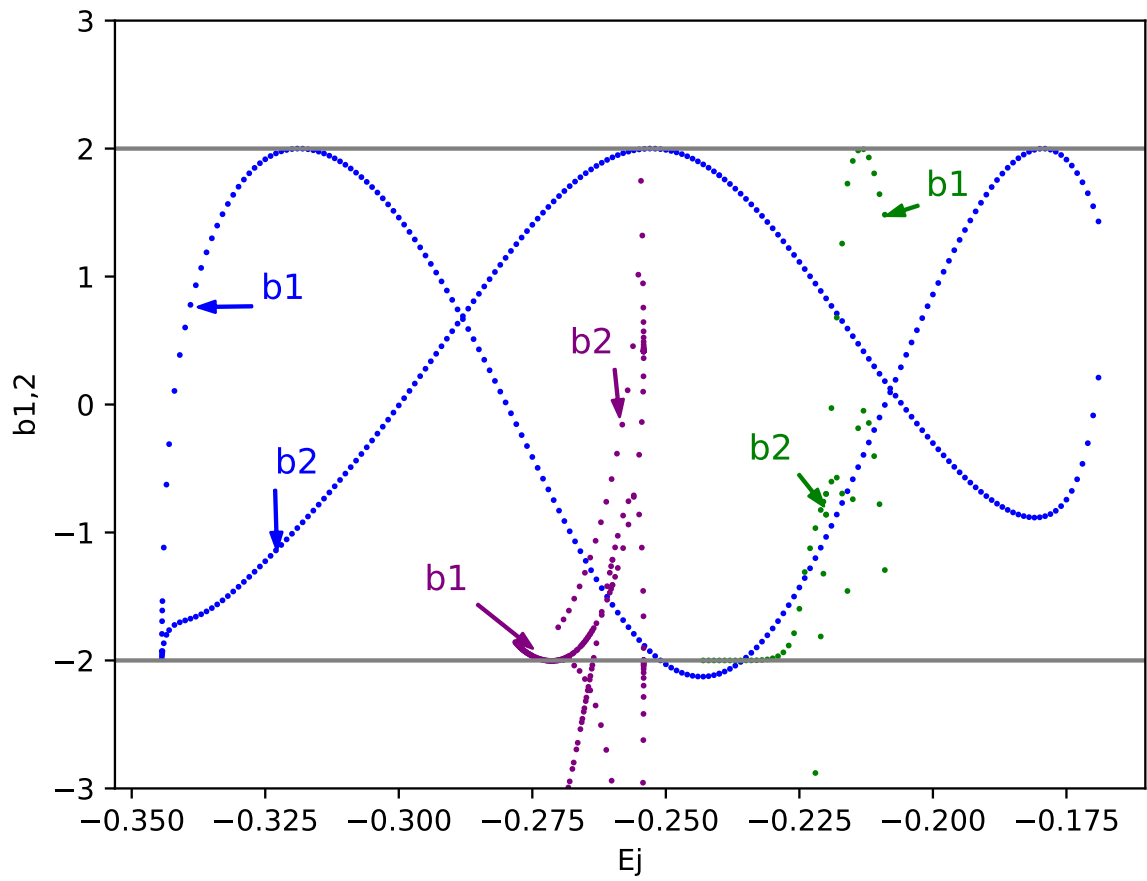


Figura 6.19: Diagrama de estabilidad para el modelo 4.

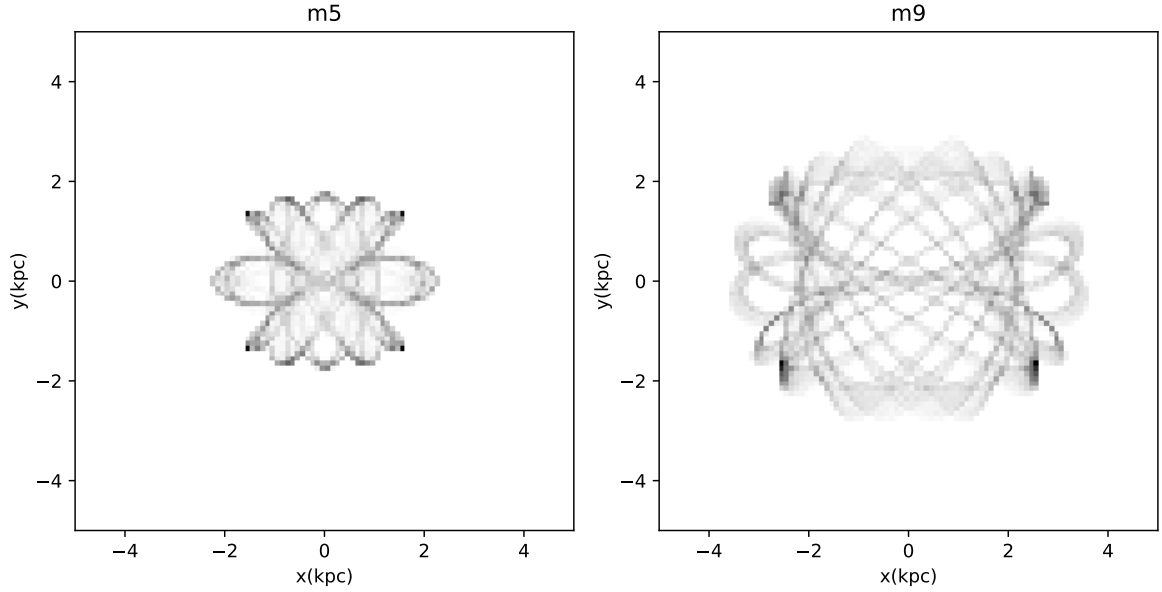


Figura 6.20: Patrones orbitales contruidos por órbitas periódicas estables de las familias m5 y m9 para el modelo 4.

En el caso del modelo 1, se identificaron dos familias de órbitas periódicas de alta multiplicidad impar ($m = 7$ y $m = 9$). La componente completamente estable de estas familias genera un patrón orbital de barra de tipo *boxy* bien definido. Por su parte, el modelo 2, estructuralmente equivalente al modelo 1 pero con una velocidad de rotación mayor, presenta una única familia de alta multiplicidad par ($m = 8$). En este caso, la componente estable no produce un patrón de barra morfológicamente aceptable.

Con respecto al modelo 3, caracterizado por ser más masivo y poseer una velocidad de rotación menor, se identificó un enjambre de familias de órbitas periódicas de alta multiplicidad impar ($m = 5, 7, 11$). La componente estable de este conjunto da lugar a un patrón de barra más pequeño en comparación con el modelo 1. Cabe señalar que, en este trabajo, únicamente se analizó la componente estable de las familias orbitales.

Para el modelo 4, el cual es estructuralmente idéntico al modelo 3 pero con una velocidad patrón significativamente mayor, se reportan dos familias periódicas de alta multiplicidad impar ($m = 5$ y $m = 9$). Sin embargo, los patrones orbitales generados por los miembros

estables de estas familias no sostienen una morfología de barra galáctica.

Las órbitas *sticky* reportadas en [4] se localizan en las mismas regiones del diagrama característico de los modelos 1 y 3. Esto sugiere que es necesario realizar un análisis de estabilidad más detallado para determinar con mayor certeza el papel que desempeñan estas órbitas en la formación de morfologías de tipo *boxy*.

El análisis presentado en este trabajo de grado requirió el cálculo de PSS de alta resolución. Las corridas computacionales necesarias para obtener dichos diagramas resultan considerablemente costosas desde el punto de vista computacional. Se encontró que las curvas invariantes asociadas a órbitas periódicas de alta multiplicidad son relativamente “pequeñas” y por lo tanto difíciles de identificar si se comparan, por ejemplo, con aquellas correspondientes a la familia $x1$. La identificación de este tipo de órbitas dentro de las PSS se realizó principalmente mediante inspección visual cuidadosa, lo cual introduce limitaciones inherentes al método y dificulta la detección sistemática de estructuras sutiles. Adicionalmente, es posible que existan órbitas de este tipo a valores de la energía para los cuales no se calcularon las PSS en este trabajo.

Un análisis más riguroso requeriría el cálculo de PSS con resoluciones aún mayores, así como su generación en intervalos de energía significativamente más finos. Sin embargo, este enfoque incrementa de manera dramática los requerimientos computacionales del problema. En este contexto, la incorporación futura de herramientas de Aprendizaje de Máquina o técnicas de Inteligencia Artificial, orientadas a la identificación automática de patrones dinámicamente estables en las PSS, podría constituir una estrategia prometedora para optimizar y sistematizar el análisis, y de esta manera reducir la dependencia de la inspección visual y permitiendo mejorar considerablemente la eficiencia del método.

Finalmente, es importante destacar que la inclusión de una tercera coordenada en el estudio de las trayectorias orbitales, así como el análisis de la componente inestable, representan líneas de investigación prometedoras que podrían abordarse en trabajos de tesis futuros, tanto a nivel de pregrado como de posgrado. Dichos estudios incluyen análisis teóricos, simulaciones computacionales y observaciones astronómicas.

En el ámbito observacional, se propone un análisis similar a los realizados en [22] y [23],

en donde se llevó a cabo un estudio observacional y posteriormente dinámico de la barra contenida en la galaxia NGC 4314 a partir de imágenes en el Infrarrojo Cercano (NI, por sus siglas en Inglés).

Un trabajo de este tipo requiere imágenes del Universo cercano ($z \leq 0.1$)², de galaxias de disco barradas observadas con una orientación cercana a la “vista de cara” (en inglés: *face-on*) en el plano del cielo. En particular, se necesitan imágenes de galaxias con estas características en las bandas J ($1.25 \mu\text{m}$), H ($1.65 \mu\text{m}$) y K ($2.20 \mu\text{m}$). Estas bandas son sensibles principalmente a la emisión de estrellas frías, como gigantes y enanas de baja masa, que contribuyen de manera significativa a la luminosidad bolométrica de las galaxias de disco. En el caso de las galaxias espirales, este tipo de poblaciones estelares constituye un trazador mucho más confiable de la distribución de masa que las estrellas azules y calientes [24]. En el Cuadro 6.1 se presentan los principales *surveys* que resultan más adecuados para la obtención de imágenes públicas con las características necesarias para desarrollar una investigación del tipo descrito anteriormente.

Tabla 6.1: Principales observatorios y *surveys* con imágenes públicas en las bandas J , H y K del infrarrojo cercano, adecuados para el estudio de galaxias de disco barradas en el universo cercano ($z \leq 0.1$).

Survey	Bandas	Resol. (arcsec)	Archivo
2MASS	J, H, K_s	$\sim 2-3$	IRSA
VISTA (VHS/VIKING)	J, H, K_s	$\sim 0.8-1.0$	ESO
UKIDSS (UKIRT)	J, H, K	~ 0.8	WFCAM
CFHT (WIRCam)	J, H, K_s	$\sim 0.7-0.9$	CADC
VLT (HAWK-I)	J, H, K	$\lesssim 0.6$	ESO

²Este valor de redshift corresponde aproximadamente a distancias en el rango de 400–450 Mpc.

Capítulo 7

Conclusiones

Las conclusiones principales de este trabajo de grado se describen a continuación

Modelo 1:

- Las superficies de Poincaré a energías de Jacobi de $E_J = -0.280$, $E_J = -0.270$ y $E_J = -0.260$, mostraron la existencia de órbitas periódicas de multiplicidad 7 y multiplicidad 9. Se graficaron dos miembros de estas órbitas, cuya morfología indica que ambos pueden contribuir a la construcción de una barra de tipo boxy.
- El análisis de las órbitas periódicas mostró que ambas familias existen en largos intervalos de la energía de Jacobi y que evolucionan una muy junta a la otra.
- El análisis de estabilidad permitió calcular los diagramas correspondientes a los índices de estabilidad b_1 y b_2 , los cuales exhiben una trayectoria compleja. Este análisis permitió identificar y seleccionar los miembros puramente estables de estas familias.
- El patrón orbital construido por los miembros estables de ambas familias mostró una barra de tipo *boxy* bien definida, con una estructura en forma de “X” inmersa dentro de la misma.

Modelo 2

- La PSS a una energía de $E_J = -0.275$ mostró la existencia de una familia orbital de multiplicidad $m = 8$. Una inspección preliminar de esta órbita indica que su trayectoria es excesivamente cuadrada para ser considerada una candidata adecuada a la formación de una barra galáctica.

- El análisis de órbitas periódicas, mostró que la curva característica de esta familia m_8 no abarca un gran intervalo en términos de la energía de Jacobi. Además alcanza valores muy altos del eje y a medida que se incrementa la energía. Esto fue un indicativo de que no es una buena candidata para ser constructora de barra galáctica.
- El análisis de estabilidad, permitió escoger nuevamente los miembros puramente estables de esta familia orbital.
- El patrón orbital construido por la familia $m = 8$ resultó ser excesivamente cuadrado, lo que indica que, para este modelo, dicha familia no es una candidata adecuada para la construcción de barras de tipo *boxy*.

Modelo 3

- Las superficies de Poincaré para este modelo mostraron un “enjambre” de órbitas de alta multiplicidad impar a energías de $E_J = -0.250, -0.225, -0.200$. En particular se encontraron dos tipos de órbitas de multiplicidad 5 (m_5 y m_{5-2}), dos órbitas de multiplicidad 7 (m_7 y m_{7-2}), y una órbita de multiplicidad 11 (m_{11}). La morfología de las órbitas m_5 , m_7 , m_{7-2} , y m_{11} mostrarán que estas son buenas candidatas a ser constructoras de barras *boxy*. Por otra parte, la familia m_{5-2} no es una buena candidata.
- Las curvas características de estas familias mostraron que m_5 , m_{5-2} , m_7 , y m_{7-2} recorren intervalos largos de la energía de Jacobi, mientras que la familia m_{11} recorre un intervalo corto. Los diagramas de estabilidad de estas familias muestran curvas complejas, en donde la mayor parte corresponde a intervalos de inestabilidad. En el caso de la familia m_{11} esta es inestable para todos los valores de la energía de Jacobi.
- Dada la completa inestabilidad de la familia $m = 11$, esta no se consideró para la construcción del patrón orbital.
- El patrón orbital construido por la familia $m = 5$ resultó ser muy débil, ya que solo consiste en algunos miembros estables.

- El patrón orbital debido a los miembros estables de la familia $m = 5-2$ consistió en una barra de tipo *boxy* pequeña con una estructura en forma de “X” en su interior.
- El patrón orbital debido a los miembros estables de la familia $m = 7$ consistió en una barra de tipo *boxy* pequeña con una estructura en forma de “X” en su interior.
- El patrón orbital de la familia $m = 7-2$ es similar al construido por la familia $m = 5$.
- Para este modelo, las familias $m = 5-2$ y $m = 7$ son las que mejor construyen un patrón de barra; sin embargo, este consiste en una barra de tamaño reducido.

Modelo 4

- Para este modelo, las superficies de Poincaré a energías de $E_J = -0.260$ y $E_J = -0.220$ permitieron identificar familias orbitales de multiplicidad $m = 5$ y $m = 9$.
- Una inspección preliminar de la morfología de estas órbitas permitió observar que ninguna de estas familias es candidata a la construcción de barras, dado que presentan trayectorias excesivamente cuadradas.
- El análisis de órbitas periódicas indicó que las curvas características correspondientes a estas dos familias recorren intervalos de energía cortos y, además, alcanzan valores elevados de intersección con la vertical a medida que aumenta la energía de Jacobi.
- Los miembros estables de estas familias no construyen patrones de barra adecuados, dadas sus morfologías.

Comparación de modelos

- Los modelos más lentos mostraron una mayor recurrencia de familias orbitales de alta multiplicidad impar ($m > 3$), siendo el modelo 3 el que presenta la mayor cantidad de estas órbitas. Sin embargo, los miembros estables del modelo 1 forman un patrón de barra más claro que el del modelo 3 cuando se consideran únicamente órbitas puramente estables. Esto no implica que el modelo más lento sea menos propenso a la formación de barras de tipo *boxy*, ya que se requiere un análisis de las órbitas inestables, tal como se realizó en [4].

- Ambos modelos rápidos muestran que sus órbitas de alta multiplicidad no son candidatas adecuadas para la construcción de barras de tipo *boxy*.
- En general, se puede concluir que las condiciones más favorables para la generación de barras galácticas, en el caso de órbitas puramente estables, se dan para órbitas periódicas de alta multiplicidad impar ($m > 3$) en modelos barrados lentos.

Apéndice A

Cálculo de los radios de corrotación (puntos de Lagrange L5)

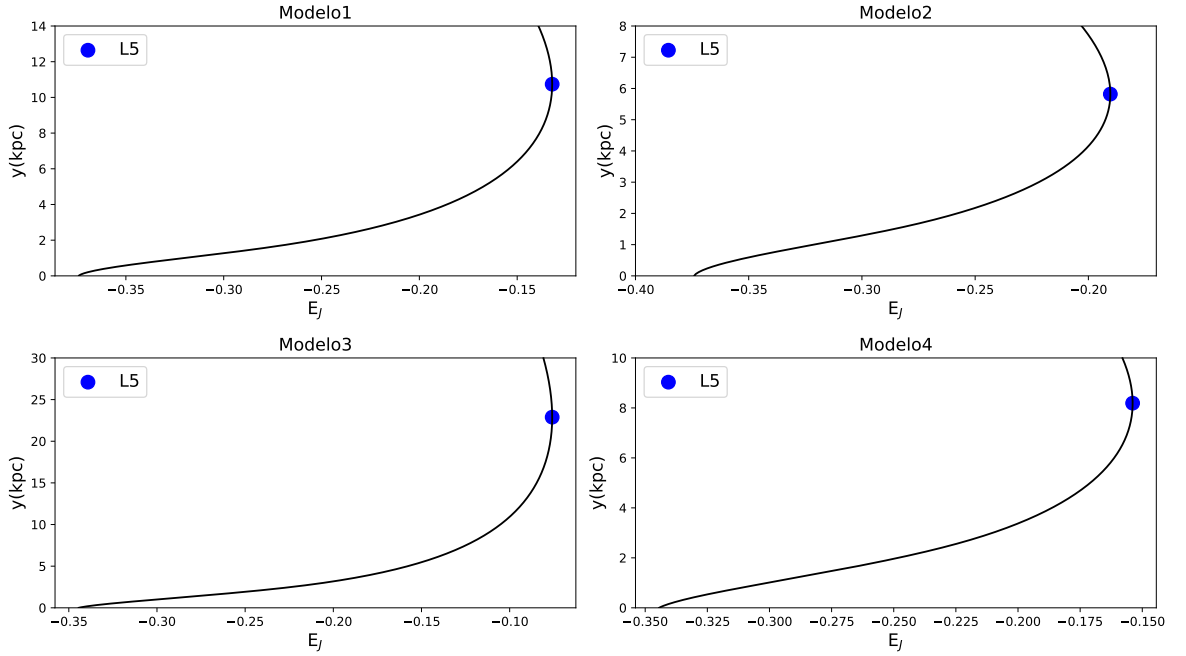


Figura A.1: Curvas de Velocidad Cero (ZVC) para los cuatro modelos estudiados. El valor de la vertical correspondiente al máximo valor de la energía de Jacobi, representa el punto Lagrangiano L5, y por lo tanto al radio de corrotación.

En la figura A.1 se muestran las Curvas de Velocidad Cero (ZVC) para los cuatro modelos estudiados, siendo los modelos 1 y 3 lentos, y los modelos 2 y 4 rápidos. Los valores máximos de la energía de Jacobi se corresponden con la ubicación del punto estable de Lagrange L5 para cada modelo, y por lo tanto su valor en el eje y representan los radios de corrotación [15]. De acuerdo a [16], una barra se clasifica como lenta si $R = R_c/a > 1.4$, donde R_c es

el radio de corrotación y a el semieje mayor de la barra. Los cálculos obtenidos para cada modelo se presentan a continuación:

Modelo	$R_c(kpc)$	R	Clasificación
Modelo1	10.74	2.00	Lenta
Modelo2	5.82	1.08	Rápida
Modelo3	22.89	2.87	Lenta
Modelo4	8.19	1.03	Rápida

Tabla A.1: Clasificación dinámica para los cuatro modelos estudiados

Bibliografía

- [1] Ch. Skokos, P. A. Patsis, and E. Athanassoula. Orbital dynamics of three-dimensional bars - I. The backbone of three-dimensional bars. A fiducial case. *MNRAS*, 333(4):847–860, July 2002.
- [2] Peter Erwin and Victor P. Debattista. Peanuts at an angle: detecting and measuring the three-dimensional structure of bars in moderately inclined galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(4):3060–3086, June 2013.
- [3] T. Manos and Rubens E. G. Machado. Chaos and dynamical trends in barred galaxies: bridging the gap between N-body simulations and time-dependent analytical models. *MNRAS*, 438(3):2201–2217, March 2014.
- [4] L. Chaves-Velasquez, P. A. Patsis, I. Puerari, Ch. Skokos, and T. Manos. Boxy Orbital Structures in Rotating Bar Models. *ApJ*, 850(2):145, December 2017.
- [5] C. C. Lin and Frank H. Shu. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *ApJ*, 140:646, August 1964.
- [6] Irina Marinova, S. Jogee, D. Bacon, M. Balogh, M. Barden, F. D. Barazza, E. F. Bell, A. Boehm, J. A. R. Caldwell, M. E. Gray, B. Haussler, C. Heymans, K. Jahnke, E. van Kampen, S. Koposov, K. Lane, D. H. McIntosh, K. Meisenheimer, C. Y. Peng, H. W. Rix, S. F. Sanchez, A. Taylor, L. Wisotzki, C. Wolf, and X. Zheng. The Evolution of Bars and Disks as a Function of Environment in STAGES. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, volume 211 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 97.12, December 2007.
- [7] Johan H. Knapen, Isaac Shlosman, and Reynier F. Peletier. A Subarcsecond Resolution Near-Infrared Study of Seyfert and “Normal” Galaxies. II. Morphology. *ApJ*, 529(1):93–100, January 2000.

- [8] I. Martinez-Valpuesta and O. Gerhard. Metallicity gradients through disk instability: A simple model for the milky way's boxy bulge. *The Astrophysical Journal Letters*, 766:L3, 2013.
- [9] Rubens E. G. Machado and E. Athanassoula. Loss of halo triaxiality due to bar formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406(4):2386–2404, August 2010.
- [10] Ch. Skokos, T. C. Bountis, and Ch. Antonopoulos. Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 231(1):30–54, July 2007.
- [11] M. Miyamoto and R. Nagai. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *PASJ*, 27:533–543, January 1975.
- [12] W. Dehnen. A Family of Potential-Density Pairs for Spherical Galaxies and Bulges. *MNRAS*, 265:250, November 1993.
- [13] S. Chandrasekhar. The Richtmyer Memorial Lecture-Some Historical Notes. *American Journal of Physics*, 37(6):577–584, June 1969.
- [14] D. Pfenniger. The 3D dynamics of barred galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 134(2):373–386, May 1984.
- [15] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- [16] E. Athanassoula. The existence and shapes of dust lanes in galactic bars. *MNRAS*, 259:345–364, November 1992.
- [17] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [18] M. Henon. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 5(2-3):412–414, September 1982.
- [19] George Contopoulos. *Order and chaos in dynamical astronomy*. 2002.

- [20] L. Tsigaridi and P. A. Patsis. Morphologies introduced by bistability in barred-spiral galactic potentials. *MNRAS*, 448(4):3081–3092, April 2015.
- [21] L. Tsigaridi and P. A. Patsis. The backbones of stellar structures in barred-spiral models - the concerted action of various dynamical mechanisms on galactic discs. *MNRAS*, 434(4):2922–2939, October 2013.
- [22] A. C. Quillen, Jay A. Frogel, and Rosa A. Gonzalez. The Gravitational Potential of the Bar in NGC 4314. *ApJ*, 437:162, December 1994.
- [23] P. A. Patsis, E. Athanassoula, and A. C. Quillen. Orbits in the Bar of NGC 4314. *ApJ*, 483(2):731–744, July 1997.
- [24] Jay A. Frogel. The galactic nuclear bulge and the stellar content of spheroidal systems. *ARAA*, 26:51–92, January 1988.