

Barras galácticas de tipo “boxy” debidas a órbitas periódicas estables de familias planares de alta multiplicidad impar ($m > 3$)

Físico: William O. Eraso Garzón.

Asesor: Dr. Leonardo Chaves-Velasquez

Universidad de Nariño
Departamento de Física

20 de marzo de 2026

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Marco Referencial
- 3 Potenciales gravitacionales
- 4 Formulación matemática, unidades y modelos galácticos
- 5 Cálculos y Códigos Usados
- 6 Resultados
- 7 Conclusiones
- 8 Bibliografía

Introducción

Clasificación de Galaxias

- Galaxias: Enormes objetos astronómicos compuestos por estrellas, gas y polvo, ligados gravitacionalmente por halos de materia oscura.
- Desde el punto de vista dinámico la componente más importante es la estelar.
- Galaxias con disco y sin disco.

Clasificación de galaxias

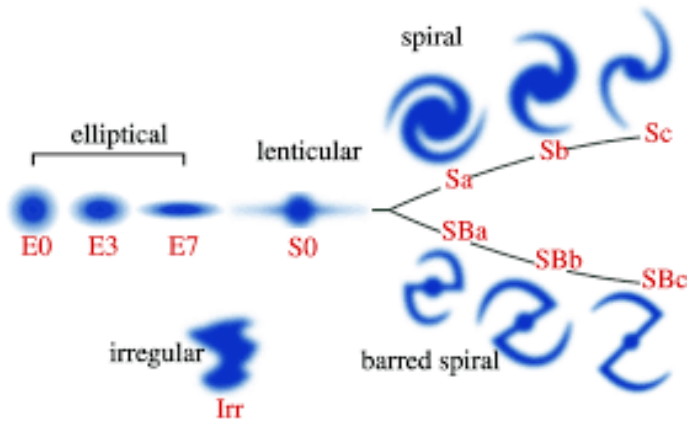


Figura: Esquema de clasificación de Hubble.

- 1 Formación de estructuras en galaxias de disco: las inestabilidades gravitacionales sobre el disco generan ondas de densidad. Esto conlleva a la formación de estructuras en galaxias de disco (barras, brazos espirales y anillos) (Lin & Shu, 1964).
- 2 Desde el punto de vista dinámico, las barras son más importantes que los brazos espirales.



Figura: Galaxia espiral barrada NGC1300

Parámetros de las barras galácticas:

- Tamaño: longitud de la barra dentro de la galaxia.
- Fuerza: se describe por medio de la densidad estelar y la masa concentrada en la barra. Este parámetro determina la influencia dinámica de esta estructura sobre el entorno.
- Velocidad patrón (Ω_b): velocidad angular con la que rota la barra. Es el parámetro dinámico más importante.

Modelo simplificado de dinámica de barras

- En general, las barras evolucionan en el tiempo.
- Un modelo en dónde los parámetros estructurales y dinámicos de la barra se mantengan constantes, nos ayuda a entender la dinámica fundamental.
- Para la Vía Láctea Ω_b es aproximadamente constante por cinco periodos de rotación de la barra.
- Sistema de referencia: Rota con la barra.
- Sistema Hamiltoniano Autónomo: $\Omega_b = \text{constante}$, potencial gravitacional independiente del tiempo.

Trayectorias estelares

Las trayectorias de las estrellas son el esqueleto de las estructuras galácticas (barras, brazos espirales, anillos).

Las órbitas periódicas de la familia x1 son consideradas como los bloques fundamentales de barras elípticas estableciendo así la teoría estándar de la formación de barras.

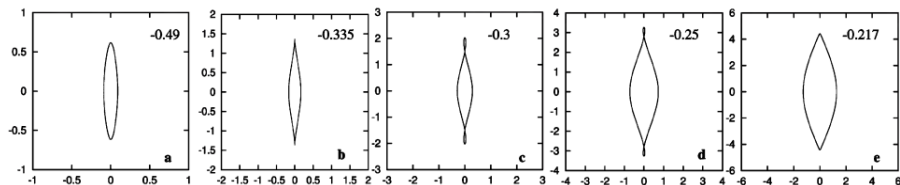


Figura: Miembros de la familia x1 (Figura tomada de Skokos et al. 2002).

Morfologías de tipo 'Boxy'

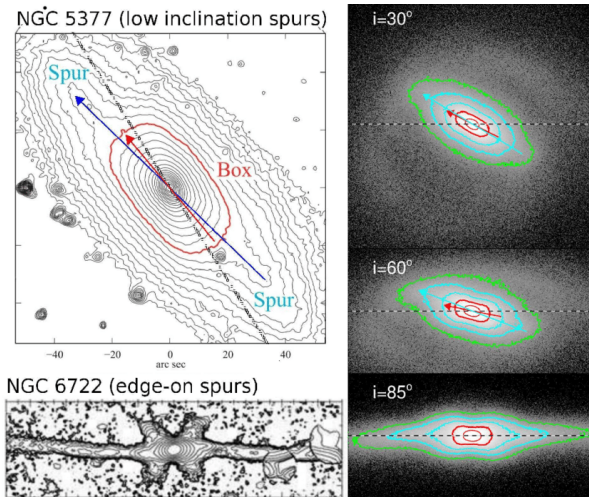


Figura: Estructuras de barra boxy (Figura tomada de Erwin & Debattista 2013).

- La barra de la Vía Láctea es boxy (Robin et al. 2012, Martinez-Valpuesta & Gerhard, 2013)
- El modelo estándar para la formación de barras no puede explicar este tipo de morfologías.
- Se necesita hacer un estudio que vaya más allá del modelo estándar.

Órbitas de ($m > 3$) y Modelos galácticos

- Estudio de órbitas estables de alta multiplicidad impar ($m > 3$).
- Cuatro Modelos galácticos de: Manos & Machado (2013) y Chaves-Velasquez et al. (2017).
- Modelos 1 y 3 (lentos) son idénticos a los estudiados en Chaves-Velasquez et al. (2017).
- Modelos 2 y 4 (rápidos) contienen los mismos parámetros de estructura que los Modelos 1 y 3 pero con mayor Ω_b .

Marco Referencial

Referencias principales:

- Machado y Athanassoula (2010) “ Loss of halo triaxiality due to bar formation”
- Manos y Machado (2014) “Chaos and dynamical trends in barred galaxies: bridging the gap between N-body simulations and time-dependent analytical models”
- Chaves-Velasquez et al. (2017) “Boxy Orbital Structures in Rotating Bar Models”

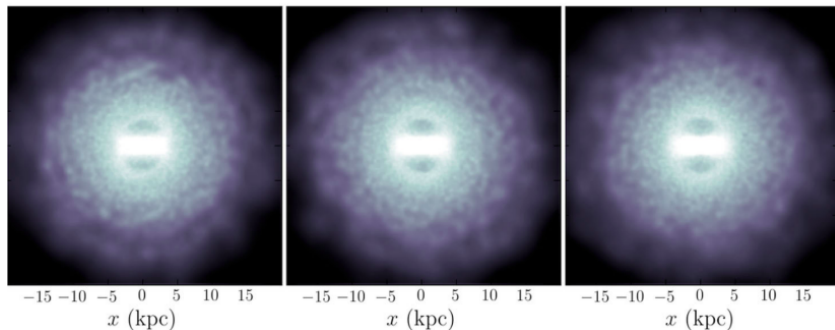


Figura: Tres snapshots de las simulaciones de Machado & Athanassoula (2010) y reportados en Manos & Machado (2014)

Órbitas sticky de tipo boxy

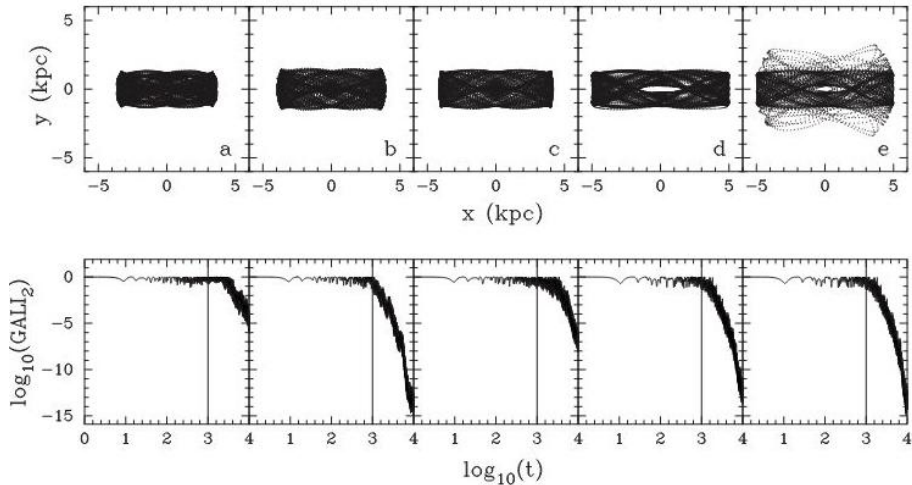


Figura: Órbitas sticky de tipo boxy e índice de estabilidad GALI2 presentados en Chaves-Velasquez et al. (2017)

Potenciales gravitacionales

- El potencial del disco: Modelo de Miyamoto-Nagai

$$\Phi_D = - \frac{GM_D}{\sqrt{x^2 + y^2 + (A + \sqrt{z^2 + B^2})^2}} \quad (1)$$

- El potencial del Halo: El modelo de Dehnen

$$\Phi_H = - \frac{GM_H}{a_h(2 - \gamma)} \left[1 - \left(\frac{r}{r + a_h} \right)^{2-\gamma} \right] \quad (2)$$

- El potencial de la barra: El elipsoide de Ferrers

$$\Phi_B = -\pi Gabc \frac{\rho_c}{n+1} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta(u)} (1 - \mu^2(u))^{(n+1)} \quad (3)$$

Con distribución de densidad de la forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c (1 - \mu^2)^n & \mu < 1 \\ \rho &= 0 & \mu \geq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mu^2(u) = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}$$
$$\Delta(u)^2 = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)$$

λ es la única solución positiva de la ecuación $u(\lambda) = 1$ fuera de la barra, y $\lambda = 0$ dentro de la barra.

$$\Phi_B = \pi Gabc\rho_c \sum_{i+j+k+l=n+1} \frac{n!}{i!j!k!l!} (-1)^{n-i} x^{2j} y^{2k} z^{2l} W_{jkl} \quad (5)$$

donde W_{jkl} son los coeficientes de Pfenniger los cuales se calculan por medio de la integral:

$$W_{jkl} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta(u)} \left(\frac{1}{a^2 + u} \right)^j \left(\frac{1}{b^2 + u} \right)^k \left(\frac{1}{c^2 + u} \right)^l \quad (6)$$

Formulación matemática, unidades y modelos galácticos

- Formulación Hamiltoniana.
- Sistema de referencia que rota con la barra.
- Ω_b constante y positivo.
- La barra rota en contra de las manecillas del reloj.
- Potencial gravitacional independiente del tiempo.
- Sistemas Hamiltonianos Autónomos.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi(x, y, z) - \Omega_b(xp_y - yp_x) = E_J \quad (7)$$

p_x, p_y, p_z : Velocidades en el sistema inercial, x, y, z : coordenadas en el sistema no inercial, $\Phi(x, y, z) = \Phi_D + \Phi_H + \Phi_B$, Ω_b : velocidad patrón de la barra, E_J : constante e Jacobi.

Formulación matemática

- Ecuaciones de movimiento derivadas a partir del Hamiltoniano 7 por medio de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

$$\dot{x} = p_x + \Omega_b y \quad (8)$$

$$\dot{y} = p_y - \Omega_b x \quad (9)$$

$$\dot{z} = p_z \quad (10)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_b p_y \quad (11)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Omega_b p_x \quad (12)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (13)$$

Sistema de seis ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de primer orden

- $G = 1$
- Longitud (1 kpc)
- Masa ($10^{10} M_{\odot}$)
- Tiempo (4.718 Myr)
- Energía de Jacobi ($0.212 \text{ kpc}^2/\text{Myr}^2$)

Modelos galácticos

- 2 Modelos lentos tomados de Chaves-Velasquez et al. (2017) + 2 Modelos artificiales rápidos.

Cuadro: Modelos galácticos.

Barra						
Modelo	$T-\Omega_b$	$a(\text{kpc})$	$b(\text{kpc})$	$c(\text{kpc})$	Ω_b km/(s kpc)	$M_b(10^{10}) M_\odot$
1	Lenta	5,40	1,76	1,13	24	2,36
2	Rápida	5,40	1,76	1,13	50	2,36
3	Lenta	7,98	2,76	1,93	9	3,30
4	Rápida	7,98	2,76	1,93	33	3,30

Disco			Halo		
$A(\text{kpc})$	$B(\text{kpc})$	$M_d (10^{10}) M_\odot$	$a_H(\text{kpc})$	γ	$M_h (10^{10}) M_\odot$
0,95	0,53	2,64	5,21	0,71	25
0,95	0,53	2,64	5,21	0,71	25
0,71	0,59	1,70	5,95	0,89	25
0,71	0,59	1,70	5,95	0,89	25

En un modelo galáctico, la región de corrotacion depende del valor de Ω_b . La definición para que un modelo sea rápido o lento se define por el parámetro:

$$R = \frac{R_c}{a} \quad (14)$$

Según Athanassoula (1992) una barra se define como lenta si $R > 1,4$

- Modelo 1: $R = 2,00$.
- Modelo 2: $R = 1,08$
- Modelo 3: $R = 2,87$
- Modelo 4: $R = 1,03$

Todos los códigos usados en este trabajo, fueron implementados originalmente en el Research Center for Astronomy and Applied Mathematics - Academy of Athens, y modificados por Chaves-Velasquez.

- Curvas de velocidad cero (ZVC), zvc.f

Energía de Jacobi en términos de las componentes no inerciales de la velocidad:

$$E_J = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(x, y, z) - \frac{\Omega_b^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (15)$$

Ecuaciones de transformación entre coordenadas inerciales y no inerciales.

$$v_x = p_x + \Omega_b y, \quad v_y = p_y - \Omega_b x, \quad v_z = p_z \quad (16)$$

$v = 0, x = 0$ par (E_J, y) . Define la región en donde el movimiento es permitido.

- Integración numérica de las órbitas, integrator.f
 - Órbitas planas (x, y) , $z = 0$, $p_z = v_z = 0$.
 - Se asigna un valor para la energía de Jacobi que esté por dentro de la curva de velocidad cero.
 - Se hace $x = 0$ y se asigna un valor para la coordenada y con $v_y = 0$ y se calcula v_x a partir de la ecuación (15) considerando la solución negativa (órbitas prógradas).
 - Se calcula las componentes inerciales de la velocidad con las ecuación (16).
 - De esta forma se han establecido las seis condiciones iniciales:
 $x_0, y_0, z_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}$.
 - El sistema de ecuaciones diferenciales es integrado usando un método de Rungge-Kutta 45 con un paso adecuado para conservar la energía en un orden menor de 10^{-10} .
 - La trayectoria de la órbita se mantiene en el plano (x, y) y se integra hasta un tiempo establecido.

- Superficies de Poincaré (PSS), pss.f
 - Una PSS, representa un método cualitativo de estudiar caos y estabilidad en sistemas dinámicos. Esta es una herramienta fundamental en el estudio de sistemas dinámicos, especialmente en sistemas Hamiltonianos conservativos.
 - Se calcula la curva de velocidad cero del modelo galáctico.
 - Se escoge la energía dónde se desea calcular la superficie de Poincaré.
 - Se asigna $z = 0$, $p_z = 0$.
 - Se asigna $x = 0$, $v_x < 0$.
 - Las condiciones anteriores definen la PSS.
 - Se calcula el par (y, p_y) cada vez que la órbita cruza la PSS.
 - Cada órbita se integra por 40.718 Gyr registrando así los puntos sobre la PSS.
 - El proceso se repite para varios valores de y hasta que se alcanza la curva de velocidad cero.

- Órbitas Periódicas y Estabilidad, `stability.f`
 - Se analiza las superficies de Poincaré, hasta localizar curvas invariantes. Esto nos da una aproximación a las condiciones iniciales en dónde se encuentra una órbita periódica.
 - Lanzamos la partícula desde la vertical ($x = 0$) con velocidad inicial $v_x < 0$. Las demás coordenadas se mantienen nulas, de esta manera tenemos un conjunto de condiciones iniciales.
 - Se integra la órbita usando el integrador RK45 hasta que la partícula intercepta nuevamente la superficie de Poincaré.
 - Se aplica un método iterativo de Newton-Raphson con el fin de comparar los valores iniciales y final de los vectores de estado. Si el error es menor a 10^{-7} se registra la órbita como periódica.

- La relación entre los vectores de estado variacionales inicial y final está dada por

$$\xi = M\xi_0 \quad (17)$$

donde M es la matriz monodrómica. La ecuación característica de esta matriz es

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0 \quad (18)$$

las soluciones de esta ecuación obedecen las relaciones $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $\lambda_3\lambda_4 = 1$ y por cada par podemos escribir

$$\lambda_i, 1/\lambda_i = \frac{1}{2}[-b_i \pm (b_i^2 - 4)^{1/2}] \quad (19)$$

$$b_i = \frac{1}{2}(\alpha \pm \Delta^{1/2}) \quad (20)$$

$$\Delta = \alpha^2 - 4(\beta - 2) \quad (21)$$

- Si $\Delta > 0$, $|b_1| < 2$ y $|b_2| < 2$ Órbita completamente estable.
- Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ y $|b_2| < 2$ o $|b_1| < 2$ y $|b_2| > 2$ Inestable simple.
- Si $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ y $|b_2| > 2$ Inestable doble.
- $\Delta < 0$ Inestable compleja.

La calidad del cálculo, está determinado por el valor unitario que debe tener el determinante de la matriz monodrómica ($\Delta_M = 1$). En todos los cálculos se reportaron valores adecuados con variación menores a 10^{-10} respecto a la unidad.

El código `stability.f`, entrega un archivo de datos con las condiciones iniciales de las órbitas periódicas, los índices de estabilidad b_1 , b_2 , los periodos de las órbitas y Δ_M .

Resultados

Superficies de Poincaré modelo 1

Modelo 1: débil y lento.

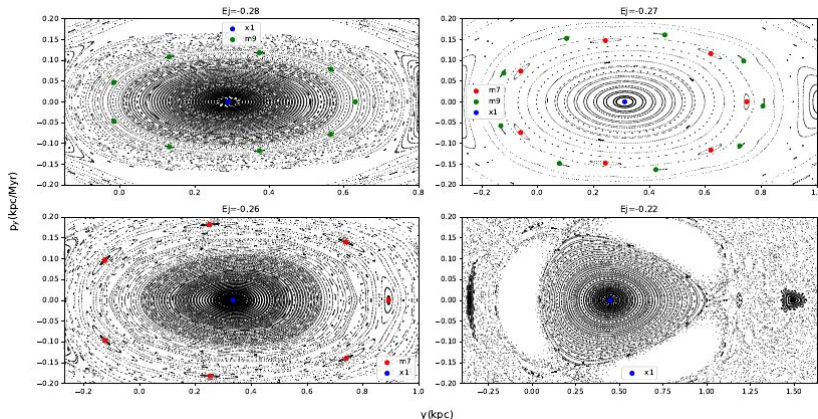


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 1 a energías: -0.280, -0.270, -0.260, -0.220

Superficies de Poincaré modelo 1

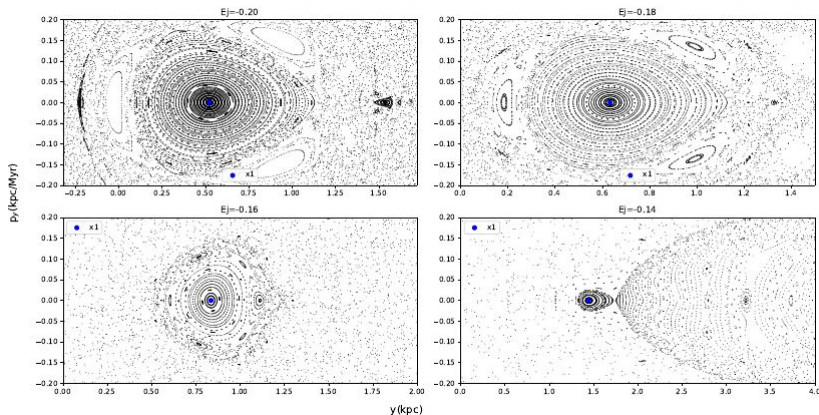


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 1 a energías: -0.200, -0.180, -0.160, -0.140

Orbitas y conservación de energía

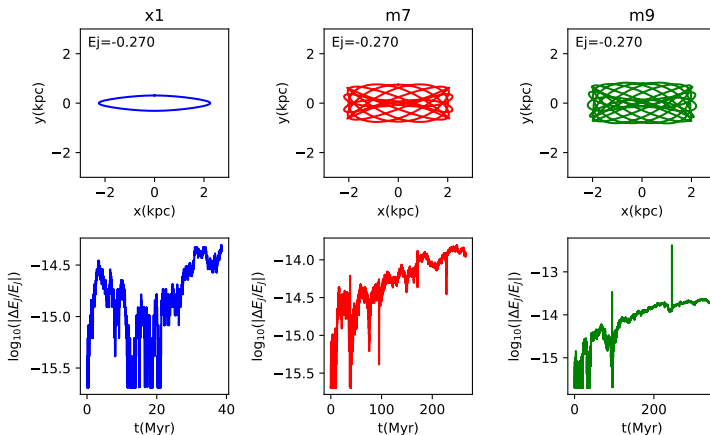


Figura: Orbitas de las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1 con energía de Jacobi -0.270 y su respectiva conservación de energía

Curva característica

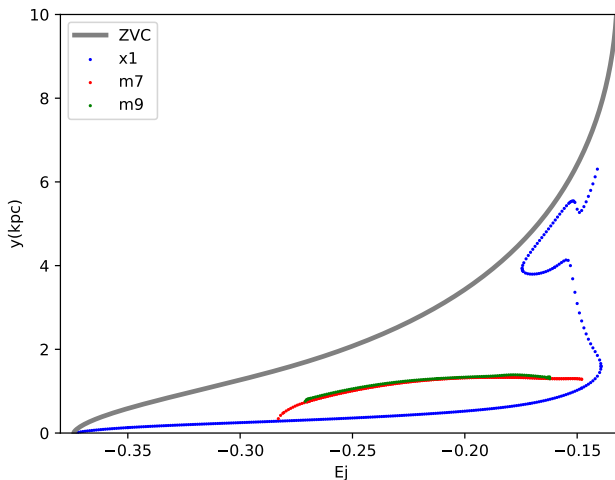


Figura: Curva característica para las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1

Diagrama de estabilidad

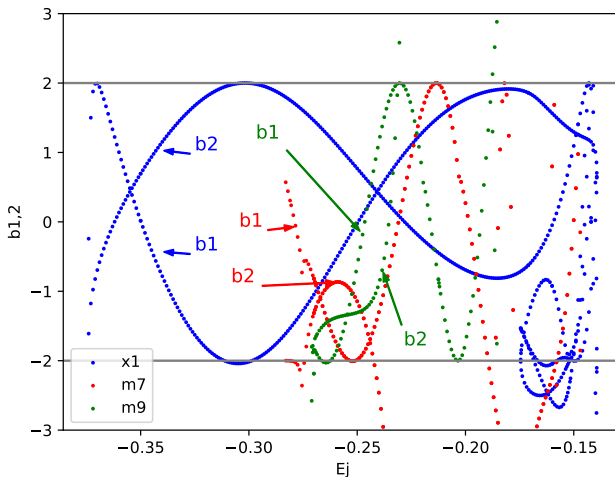


Figura: Diagrama de estabilidad para las familias x1, m7 y m9 para el modelo 1

Estructura de barra boxy

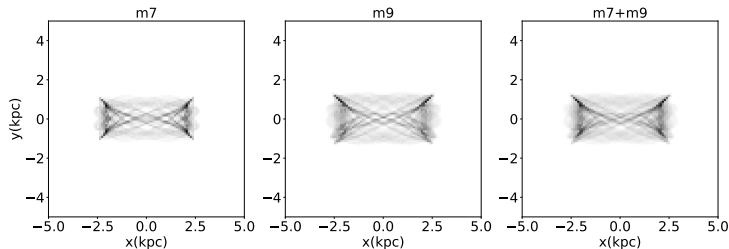


Figura: Estructura de barra boxy construida por las familias de alta multiplicidad m7 y m9

Superficies de Poincaré modelo 2

Modelo 2: estructuralmete idéntico al Modelo 1 pero con Ω_p rápido.

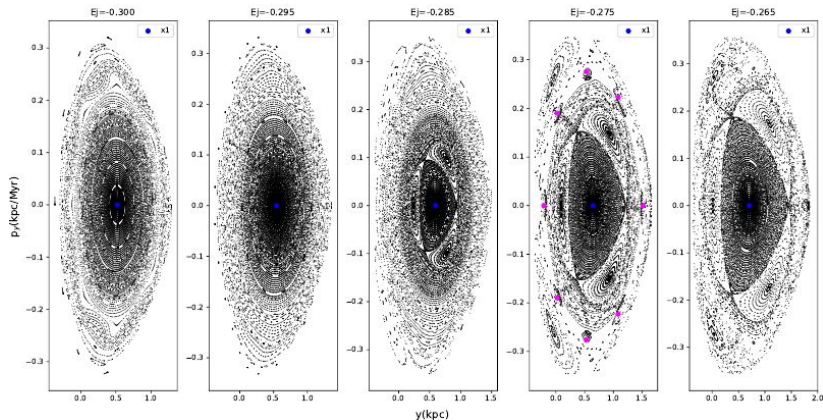


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 2 a energías: -0.300, -0.295, -0.285, -0.275, -0.265

Superficies de Poincaré modelo 2

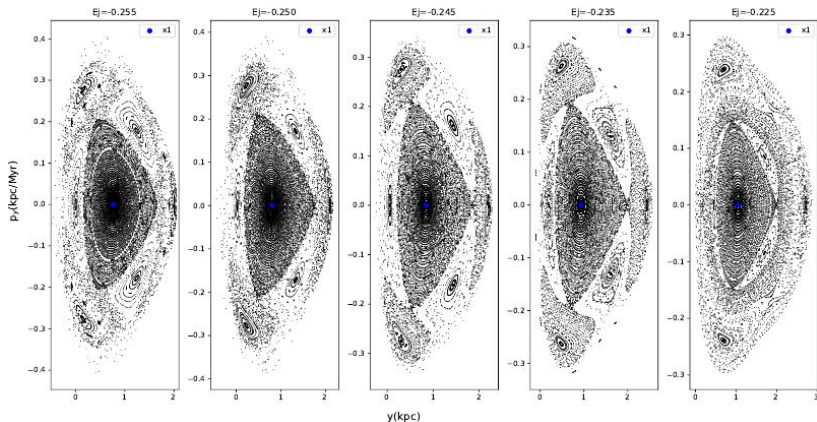


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 2 a energías: -0.255, -0.250, -0.245, -0.235, -0.225

Orbita y conservación de energía

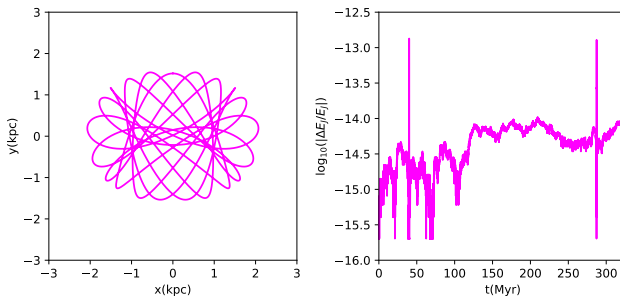


Figura: Orbita de la familia m8 para el modelo 2 con energías de Jacobi -0.275 y su respectiva conservación de energía.

Curva característica

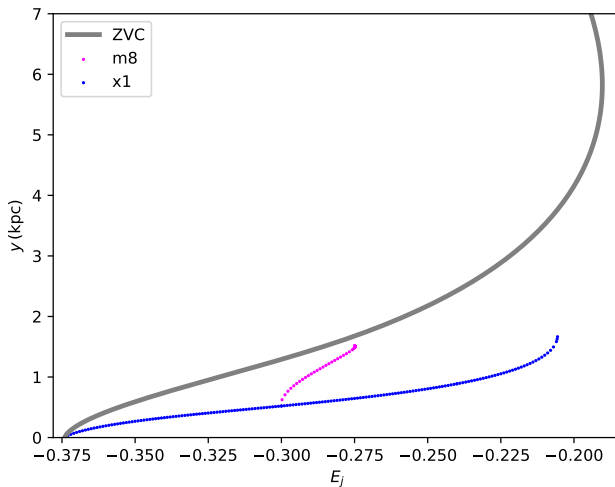


Figura: Curva característica para las familias x1 y m8 para el modelo 2.

Diagrama de estabilidad

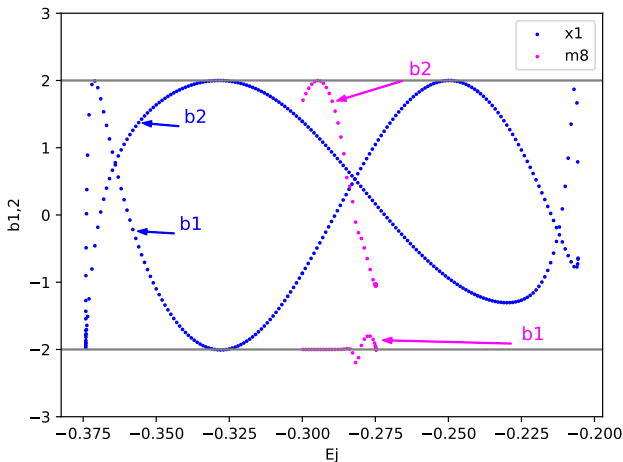


Figura: Diagrama de estabilidad para las familias x1 y m8 para el modelo 2.

Patrón Orbital

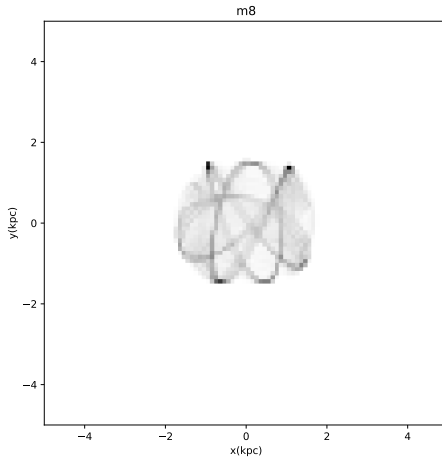


Figura: Patrón orbital debido a la familia de alta multiplicidad par m8.

Superficies de Poincaré modelo 3

Modelo 3: Fuerte y lento

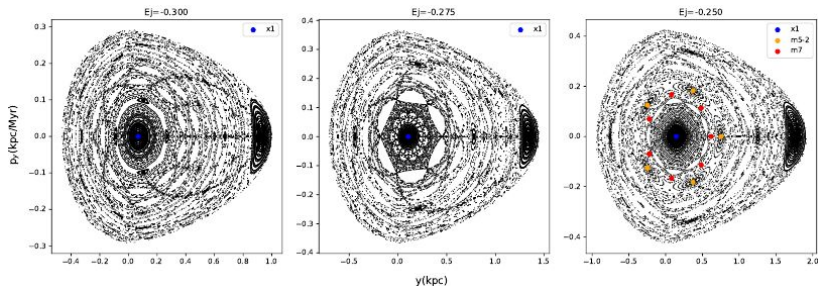


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 3 a energías: -0.300, -0.275, -0.250

Superficies de Poincaré modelo 3

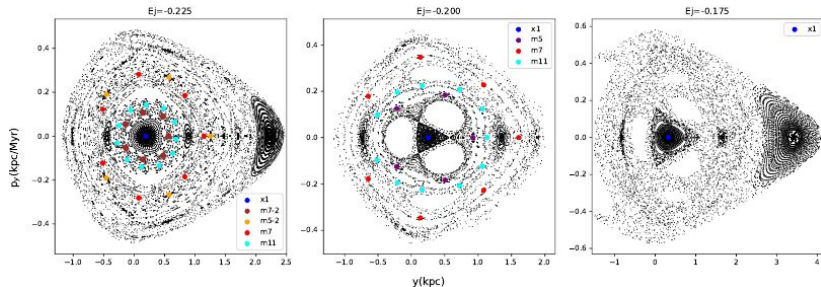


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 3 a energías: -0.225, -0.200, -0.175

Superficies de Poincaré modelo 3

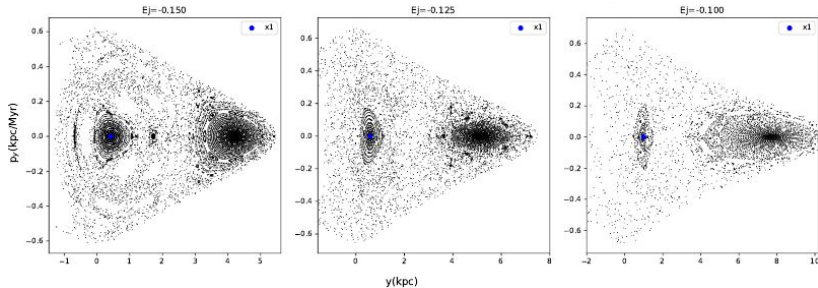


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 3 a energías: -0.150, -0.125, -0.100.

Orbitas

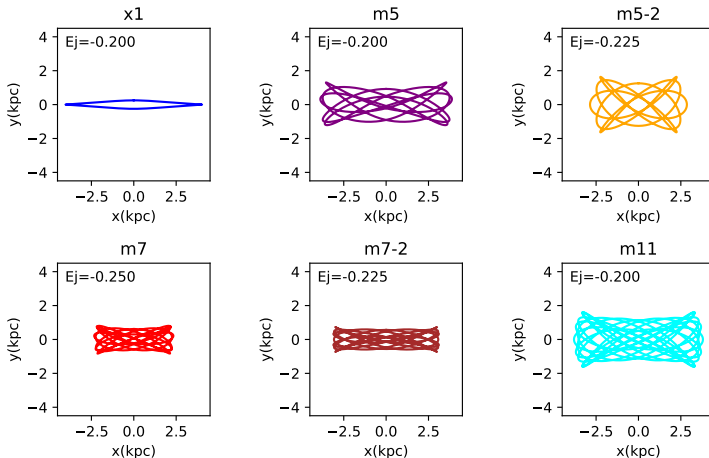


Figura: Orbitas de las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2 y m11 para el modelo 3 a diferentes energías de Jacobi.

Curva característica

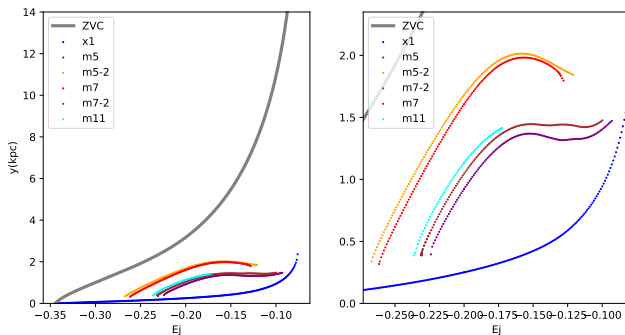


Figura: Curva característica para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2 y m11 para el modelo 3.

Diagrama de estabilidad

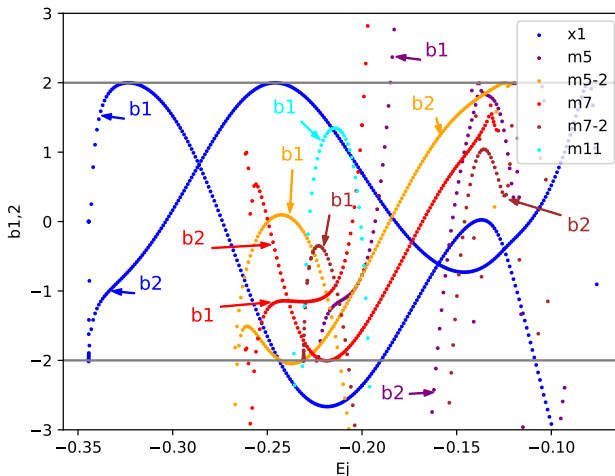


Figura: Diagrama de estabilidad para las familias x1, m5, m5-2, m7, m7-2 y m11 para el modelo 3

Estructura de barra boxy

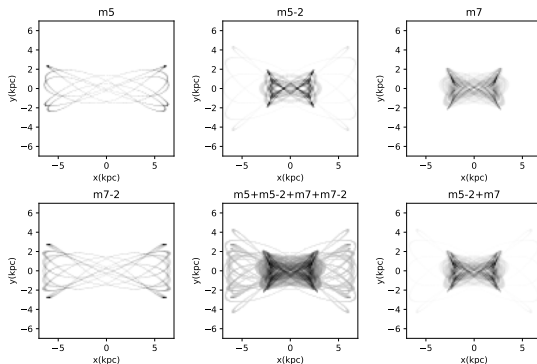


Figura: Estructuras de barra boxy construidas por las familias de alta multiplicidad $m5$, $m5-2$, $m7$ y $m7-2$.

Superficies de Poincaré modelo 4

Modelo 4: idéntico en estructura al Modelo 2 pero rápido.

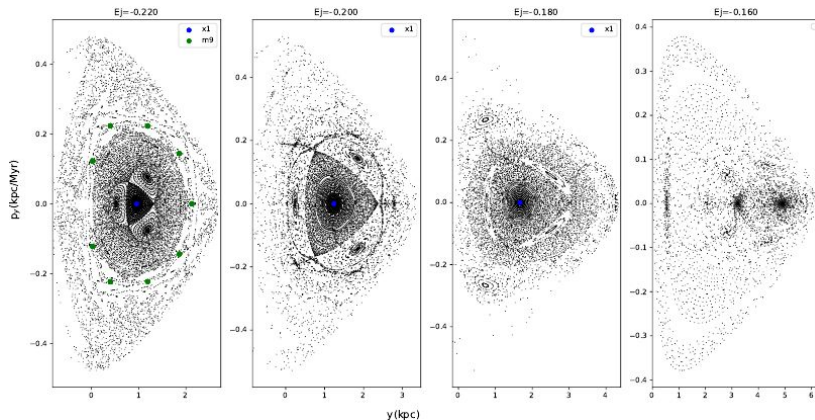


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 1 a energías: -0.220, -0.200, -0.180, -0.160

Superficies de Poincaré modelo 4

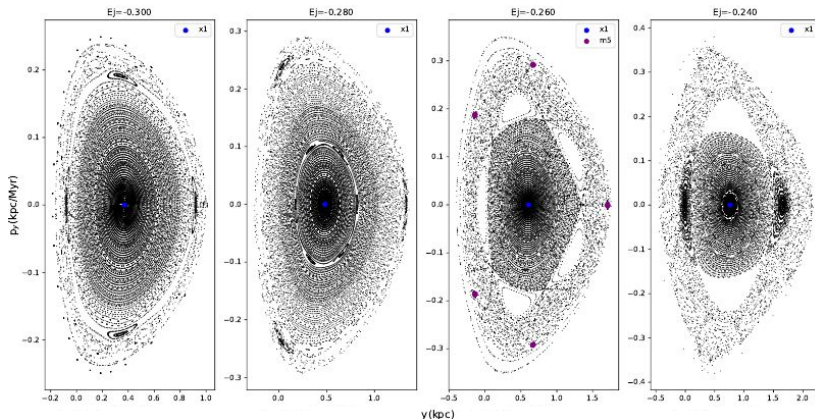


Figura: Superficies de Poincaré para el modelo 4 a energías: -0.300, -0.280, -0.260, -0.240

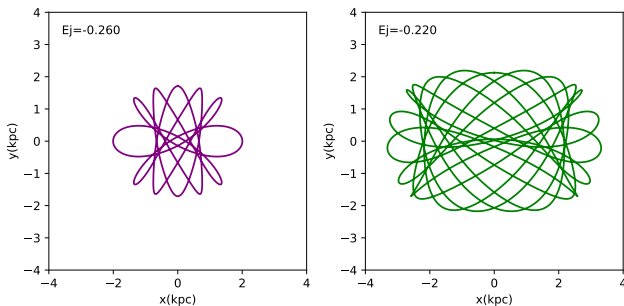


Figura: Órbitas de las familias m5 y m9 para el modelo 4 con energías de Jacobi -0.260 y -0.220 respectivamente.

Curva característica

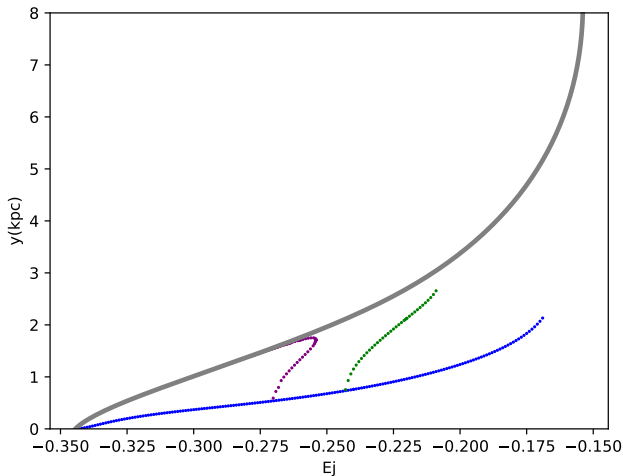


Figura: Curva característica para las familias x1, m5 y m9 para el modelo 4.

Diagrama de estabilidad

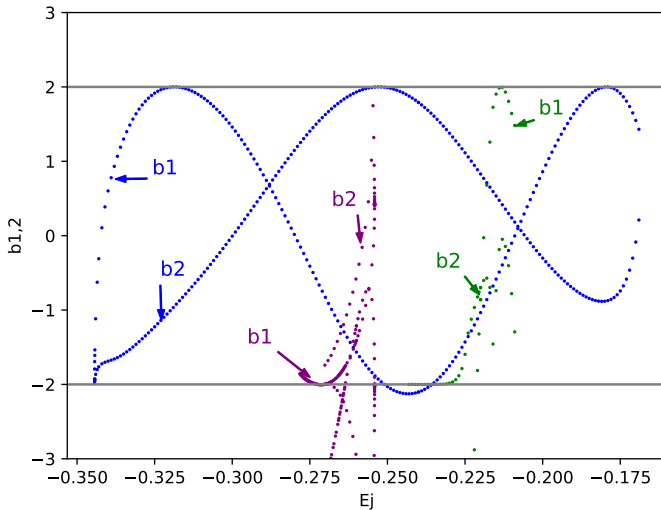


Figura: Diagrama de estabilidad para las familias x1, m5 y m9 para el modelo 4.

Patrones orbitales

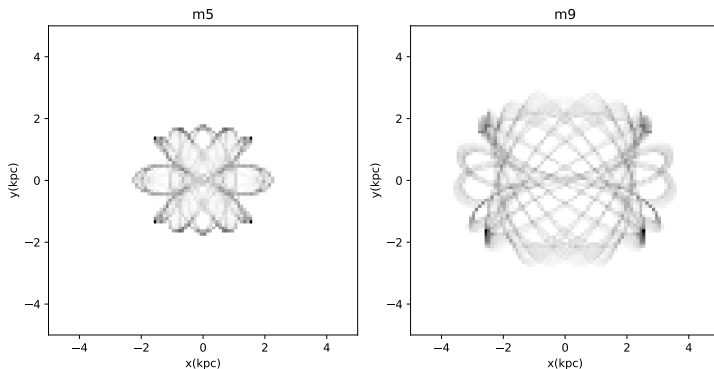


Figura: Patrones orbitales construidos por las familias de alta multiplicidad impar m5 y m9.

- Simulaciones ejecutadas en los ordenadores del INAOE e IRyA (UNAM).
- PSS de alta resolución-curvas invariantes ubicadas por inspección visual.
- Mayor poder computacional.
- Más resolución a intervalos más finos de energía-incluir IA para automatizar el proceso.
- Análisis de órbitas inestables e inclusión en 3D: Trabajo prometedor de investigación que puede incluir estudiantes de pregrado, maestría y doctorado.
- Teoría en sistemas dinámicos, simulaciones numéricas, estudios con diversos modelos galácticos.
- Observaciones: galaxias con barras boxy vistas de frente en el universo cercano ($z \leq 0,1$), en el infrarojo (Quillen et al. 1994, Patsis et al. 1997).
- Bandas: J($1,25\mu\text{m}$), H($1,65\mu\text{m}$), K($2,20\mu\text{m}$). Estrellas frías: gigantes y enanas de baja masa, son mejores trazadoras de la distribución de masa (Frogel 1988).

- Surveys:

Cuadro: Principales observatorios y *surveys* con imágenes públicas en las bandas J , H y K del infrarrojo cercano, adecuados para el estudio de galaxias de disco barradas en el universo cercano ($z \leq 0,1$).

Survey	Bandas	Resol. (arcsec)	Archivo
2MASS	J, H, K_s	$\sim 2-3$	IRSA
VISTA (VHS/VIKING)	J, H, K_s	$\sim 0.8-1.0$	ESO
UKIDSS (UKIRT)	J, H, K	~ 0.8	WFCAM
CFHT (WIRCam)	J, H, K_s	$\sim 0.7-0.9$	CADC
VLT (HAWK-I)	J, H, K	$\lesssim 0.6$	ESO

Conclusiones

Conclusiones

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Energía de Jacobi a la que se muestra existencia de orbitas periódicas.	$E_J = -0,270 E_J = -0,260$	$E_J = -0,275$	$E_J = -0,250$ $E_J = -0,225$ $E_J = -0,200$	$E_J = -0,260$ $E_J = -0,220$
Familia de alta multiplicidad que se presentan.	m7; m9	m8	m5; m5-2; m7; m7-2; m11	m5; m9
Morfología de las orbitas	Ambas familias pueden construir una barra boxy	Trayectoria muy cuadrada para ser una candidata adecuada a ser formadora de barras	Las morfologías de las orbitas m5, m7, m7-2 y m11 son buenas candidatas a ser formadoras de barras boxy	La morfología de estas orbitas permite observar que ninguna de estas familias son candidatas a construir barras ya que son demasiado cuadradas.
Análisis de orbitas periódicas.	Las dos familias existen a largos intervalos de energía de Jacobi y evolucionan una muy pegada a la otra.	La curva característica de m8 no abarca un gran intervalo en términos de la energía de Jacobi.	Las curvas características de estas familias muestran que m5, m5-2, m7 y m7-2 recorren intervalos largos de la energía de Jacobi.	La curva característica correspondiente a estas familias recorren intervalos cortos de energía de Jacobi.

Conclusiones

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Análisis de estabilidad.	Los diagramas para los índices de estabilidad b_1 y b_2 permitió seleccionar los miembros puramente estables de estas familias.	Se pudo escoger los miembros puramente estables de esta familia.	Muestra curvas complejas en donde la mayor parte corresponde a intervalos de inestabilidad, en el caso de m_{11} siempre es inestable.	No presenta un análisis claro para poder determinar miembros estables de estas familias.
Patrón orbital construido por miembros estables de las familias.	Mostró una muy bien definida barra boxy con una X sumergida dentro de la estructura.	Demasiado cuadrada, para este modelo la familia m_8 no es una candidata adecuada para la construcción de barras boxy.	El patrón orbital construido por m_5 y m_{7-2} resultó muy débil ya que solo consiste de algunos miembros estables, para m_{5-2} y m_7 son las que mejor construyen una barra boxy pequeña con una X dentro de ellas.	Los miembros estables de estas familias no construyen patrones de barra adecuadas dadas sus morfologías.

Conclusiones

- Los modelos lentos mostraron una mayor recurrencia de familias orbitales de alta multiplicidad impar ($m > 3$), siendo el modelo 3 el que presenta la mayor cantidad de estas órbitas. Sin embargo, los miembros estables del modelo 1 forman un patrón de barra más claro que el del modelo 3 cuando se consideran únicamente órbitas puramente estables. Esto no implica que el modelo más lento sea menos propenso a la formación de barras de tipo boxy, ya que se requiere un análisis de las órbitas inestables, tal como se realizó en Chaves-Velasquez et al. (2017).
- Ambos modelos rápidos mostraron que sus órbitas de alta multiplicidad no son adecuadas para construir barras boxy.
- En general, se puede concluir que las condiciones más favorables para la generación de barras galácticas, en el caso de órbitas puramente estables, se dan para órbitas periódicas de alta multiplicidad impar ($m > 3$) en modelos barrados lentos. Esto para el caso de órbitas puramente estables.

Gracias

Bibliografía I



Athanassoula, E. (1992). *MNRAS*, 259, 345.



Chandrasekhar, S. (1969). *American Journal of Physics*, 37, 577.



Chaves-Velasquez, L., Patsis, P. A., Puerari, I., Skokos, C., & Manos, T. (2017). *ApJ*, 850, 145.



Contopoulos, G. (2002). *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*.



Dehnen, W. (1993). *MNRAS*, 265, 250.



Erwin, P., & Debattista, V. P. (2013). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431, 3060.



Frogel, J. A. (1988). *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 26, 51.



Hubble, E. P. (1926). *ApJ*, 64, 321.



Knapen, J. H., Shlosman, I., & Peletier, R. F. (2000). *ApJ*, 529, 93.



Lin, C. C., & Shu, F. H. (1964). *ApJ*, 140, 646.



Machado, R. E. G., & Athanassoula, E. (2010). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406, 2386.



Manos, T., & Machado, R. E. G. (2014). *MNRAS*, 438, 2201.



Marinova, I., et al. (2007). *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, p. 97.12.



Martinez-Valpuesta, I., & Gerhard, O. (2013). *The Astrophysical Journal Letters*, 766, L3.

Bibliografía II



Miyamoto, M., & Nagai, R. (1975). *PASJ*, 27, 533.



Ott, Edward, (2002). *Chaos in Dynamical Systems*



Patsis, P. A., Athanassoula, E., Quillen, A. C. (1997). *ApJ*, 483, 731.



Pfenniger, D. (1984). *Astronomy and Astrophysics*, 134, 373.



Quillen, A. C., Frogel, J. A., Gonzalez, R. A. (1994). *ApJ*, 437, 162.



Robin, A. C., Marshall, D. J., Schultheis, M., & Reylé, C. (2012). *Astronomy and Astrophysics*, 538, A106.



Skokos, C., Patsis, P. A., & Athanassoula, E. (2002). *MNRAS*, 333, 847.



Skokos, C., Bountis, T. C., & Antonopoulos, C. (2007). *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 231, 30.



Tsiganidi, L., & Patsis, P. A. (2013). *MNRAS*, 434, 2922.



Tsiganidi, L., & Patsis, P. A. (2015). *MNRAS*, 448, 3081.