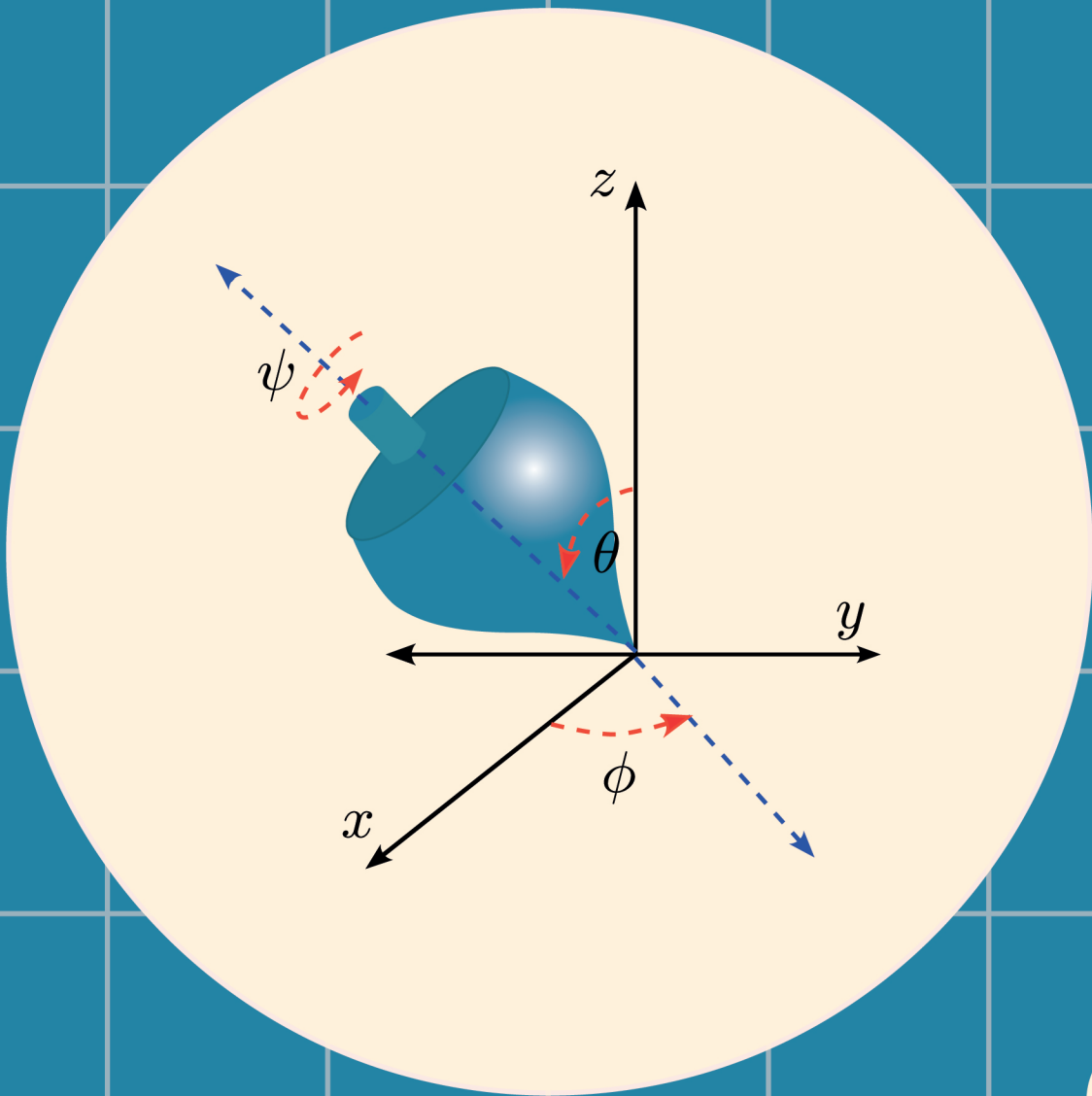


# Mecánica clásica

## Notas de clase

Eduardo Rojas Peña  
Yithsbey Giraldo Úsuga  
Juan Carlos Salazar Montenegro



**Editorial**  
Universidad de Nariño

# èditorial

Universidad de **Nariño**

# **Mecánica Clásica**

## **Notas de Clase**

# **Mecánica Clásica**

## **Notas de Clase**

Eduardo Rojas Peña  
Yithsbey Giraldo Úsug  
Juan Carlos Salazar Montenegro

Rojas Peña, Eduardo

Mecánica clásica : notas de clase / Eduardo Rojas Peña, Yithsbey Giraldo Úsuga, Juan Carlos Salazar Montenegro—1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026.

182 páginas : ilustraciones, gráficas

Incluye referencias bibliográficas p. 178

ISBN: 978-628-7864-39-9 Impreso

ISBN: 978-628-7864-40-5 Digital

1. Mecánica clásica 2. Mecánica Lagrangiana 3. Principio de Hamilton 4. Fuerzas centrales 5. Teorema de Euler 6. Teoría de Hamilton - Jacobi I. Giraldo Úsuga, Yithsbey II. Salazar Montenegro, Juan Carlos

531 R741m – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Mecánica Clásica. Notas de clase  
© Editorial Universidad de Nariño  
© Eduardo Rojas Peña  
Yithsbey Giraldo Úsuga  
Juan Carlos Salazar Montenegro

ISBN impreso: 978-628-7864-39-9  
ISBN digital: 978-628-7864-40-5  
DOI: <https://doi.org/10.22267/lib.udn.041>  
Primera edición

Corrección de estilo: German Chaves Jurado  
Diagramación: Eduardo Rojas Peña  
Diseño de cubiertas: Liseth Motta Realpe  
Contacto: [lizalejammotta@gmail.com](mailto:lizalejammotta@gmail.com)  
Transcripción y edición en LaTeX:  
Sara Rut Castiblanco Mongui  
Fecha de publicación: Marzo de 2026  
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Mecánica Lagrangiana</b> .....	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Mecánica de una Partícula</b>	<b>10</b>
1.1.1	Conservación de la Energía Para una Partícula .....	14
<b>1.2</b>	<b>Mecánica de un Sistema de Partículas</b>	<b>15</b>
1.2.1	Momento Angular de un Sistema de Partículas .....	16
1.2.2	Teorema Trabajo Energía Cinética para un Sistema de Muchas Partículas	19
1.2.3	Energía Cinética Respecto al Centro de Masa para un Sistema de Muchos Cuerpos .....	20
1.2.4	Teorema de la Conservación de la Energía para un Sistema de Muchos Cuerpos .....	21
<b>1.3</b>	<b>Ligaduras</b>	<b>24</b>
1.3.1	Disco Rodante .....	25
<b>1.4</b>	<b>Principio de D'Alembert y las Ecuaciones de Euler-Lagrange.</b>	<b>27</b>
1.4.1	Aplicaciones- Ley de Hooke .....	33
1.4.2	Problemas con Coordenadas Cilíndricas .....	34
1.4.3	Barra que se Desliza .....	36
1.4.4	Péndulo Doble Coplanar .....	38
<b>2</b>	<b>Principio de Hamilton</b> .....	<b>41</b>
2.0.1	Cálculo de Variaciones .....	42
<b>2.1</b>	<b>Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del Principio de Hamilton</b>	<b>47</b>

<b>2.2</b>	<b>Extensión del Principio de Hamilton a Sistemas no Holónomos</b>	<b>47</b>
2.2.1	Cilindro en un Plano Inclinado . . . . .	50
<b>2.3</b>	<b>Simetrías y Cantidades Conservadas</b>	<b>51</b>
<b>2.4</b>	<b>Teorema the Noether para variables discretas</b>	<b>55</b>
2.4.1	Conservación del momento lineal . . . . .	56
2.4.2	Conservación del momento angular . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Fuerzas Centrales.</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>3.1</b>	<b>El movimiento en el tiempo en el problema de Kepler</b>	<b>67</b>
3.1.1	Ecuación general del tiempo . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Cuerpo Rígido</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>4.1</b>	<b>Operaciones Algebraicas en Notación Indicial</b>	<b>72</b>
4.1.1	Propiedades de las Matrices . . . . .	73
4.1.2	Transformaciones Ortogonales . . . . .	74
<b>4.2</b>	<b>Ángulos de Euler</b>	<b>78</b>
<b>4.3</b>	<b>Teorema de Euler</b>	<b>79</b>
4.3.1	Trazas . . . . .	82
4.3.2	Rotaciones Infinitesimales . . . . .	84
<b>4.4</b>	<b>Vectores Polares</b>	<b>89</b>
<b>4.5</b>	<b>Rotaciones de Vectores</b>	<b>90</b>
<b>4.6</b>	<b>Derivada de un Vector</b>	<b>91</b>
4.6.1	Derivada de las componentes de un vector . . . . .	92
4.6.2	Derivada de un vector como objeto geométrico . . . . .	93
<b>4.7</b>	<b>Velocidad Angular en un Cuerpo Rígido</b>	<b>95</b>
<b>4.8</b>	<b>Momento Angular de un Cuerpo Rígido</b>	<b>95</b>
4.8.1	Tensor de Inercia y Momento de Inercia . . . . .	97
4.8.2	Ecuaciones de Euler . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Formalismo Hamiltoniano</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>5.1</b>	<b>Transformada de Legendre y Ecuaciones de Hamilton</b>	<b>111</b>
<b>5.2</b>	<b>Representación Simpléctica de las Ecuaciones de Hamilton</b>	<b>114</b>
<b>5.3</b>	<b>Formulación Hamiltoniana de la Relatividad.</b>	<b>118</b>
<b>5.4</b>	<b>Ecuaciones de Hamilton de Principios Variacionales</b>	<b>119</b>

<b>6</b>	<b>Transformaciones Canónicas</b> .....	<b>125</b>
6.0.1	El Oscilador Armónico .....	130
<b>6.1</b>	<b>Formalismo Simpléctico para las TC</b>	<b>132</b>
6.1.1	Transformaciones Canónicas Infinitesimales .....	134
<b>6.2</b>	<b>Corchetes de Poisson e Invariantes Canónicos</b>	<b>136</b>
6.2.1	Invarianza del Corchete de Poisson bajo Transformaciones Canónicas	137
6.2.2	Identidad de Jacobí .....	138
6.2.3	Invarianza del Elemento de Volumen en el Espacio de Fase .....	139
<b>6.3</b>	<b>Transformaciones Canónicas y Teoremas de Conservación</b>	<b>140</b>
6.3.1	Momento Angular y los Corchetes de Poisson .....	147
6.3.2	Teorema de Liouville .....	150
<b>7</b>	<b>Teoría de Hamilton-Jacobi</b> .....	<b>156</b>
<b>7.1</b>	<b>Ecuaciones de Hamilton-Jacobi (JH)</b>	<b>156</b>
7.1.1	Oscilador Armónico .....	158
7.1.2	Oscilador Armónico Anisotrópico .....	160
7.1.3	Oscilador Armónico Isotrópico .....	161
7.1.4	Función Característica de Hamilton .....	162
7.1.5	Separación de Variables .....	163
7.1.6	Problema de una Fuerza Central en Coordenadas Polares .....	163
7.1.7	Problema de Fuerza Central en Coordenadas Esféricas .....	164
<b>7.2</b>	<b>Variables Acción-Ángulo</b>	<b>165</b>
7.2.1	Variables Acción-Ángulo y el Problema de Kepler .....	171

# Prologo

Estas notas de clase están basadas en el curso de Mecánica Analítica del programa de Física de la Universidad de Nariño. La estructura general del curso sigue la exposición clásica presentada en el libro de Goldstein [Gol80], aunque también se han incorporado contribuciones relevantes de otras fuentes reconocidas, como [JS98; LL76; MUV23; TM04].

El objetivo principal de estas notas es presentar con rigor y claridad los procedimientos matemáticos involucrados, de modo que los estudiantes de pregrado puedan comprender los desarrollos y reproducir los cálculos. Este material está concebido como un complemento a las clases presenciales, y busca apoyar el proceso de aprendizaje autónomo y la profundización en los conceptos tratados durante el curso.

# 1. Mecánica Lagrangiana

La Mecánica Analítica establece la semántica de la Física Teórica al introducir conceptos como el lagrangiano, el hamiltoniano, el espacio de fase, entre otros, ampliamente utilizados en textos básicos de Física Moderna. Es bien sabido que las variables acción-ángulo fueron la base para la cuantización del átomo de hidrógeno por el método de Wilson-Sommerfeld, mucho antes de conocerse la ecuación de Schrödinger. Uno de los formalismos básicos para cuantizar un modelo clásico consiste en convertir un corchete de Poisson entre variables dinámicas en una relación de conmutación entre los operadores correspondientes. En 1933, en un artículo en el que se propuso una formulación lagrangiana de la Mecánica Cuántica, Dirac conjeturó que la contribución a la amplitud de probabilidad de un camino es proporcional a  $e^{iS/\hbar}$ , donde  $S$  es la acción. Este resultado es el punto de partida del formalismo de las integrales de camino de Richard-Feynman. Asimismo, la Mecánica Analítica proporciona el lenguaje de los sistemas dinámicos, una rama de las Matemáticas con aplicaciones relevantes en todas las áreas del conocimiento.

## 1.1 Mecánica de una Partícula

Si  $\vec{r}$  es el vector posición de una partícula en un sistema de referencia inercial, definimos el momento lineal como:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt},$$

y la fuerza:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

Si  $\vec{F} = 0$ , entonces  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ , lo cual implica que el momento lineal  $\vec{p}$  es constante en el tiempo. Este resultado corresponde a la conservación del momento lineal para una partícula y es

consistente con la primera Ley de Newton.

Para una partícula, el Momento Angular se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k}.$$

El Momento de la Fuerza, o Torque, se define como:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Le podemos adicionar el término nulo  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \left(m \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ , ya que  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  y  $m \frac{d\vec{r}}{dt}$  son paralelos, y por lo tanto su producto cruz es cero. Así, se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{r} \times \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \left(m \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \\ \vec{N} &= \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{d}{dt} \vec{L}. \end{aligned}$$

Si  $\vec{N} = 0$ , entonces

$$\frac{d}{dt} [\vec{L}] = 0,$$

lo que implica que el momentum angular se conserva.

El trabajo sobre una partícula se define como la integral de trayectoria:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Aquí utilizamos el hecho de que un incremento en la magnitud del vector posición,

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

es equivalente a lo que se conoce como una variación en la longitud de arco. Es decir,  $ds = |d\vec{r}|$ , por lo que podemos emplear la longitud de arco para parametrizar la curva. Dado que  $\vec{r}$  describe la trayectoria de la partícula, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\Delta \vec{r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Delta t \simeq \vec{v} \Delta t \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt.$$

Entonces, el trabajo puede reescribirse como:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt.$$

En adelante, para un vector  $\vec{A}$ , denotaremos su magnitud como  $A \equiv |\vec{A}|$ .

A partir de la siguiente expresión:

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt},$$

podemos reescribir la integral de línea de la siguiente manera:

$$W_{12} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left( \frac{dv^2}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} m \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2.$$

Del cálculo básico para una variable arbitraria,  $\square$ , tenemos que:

$$\int_{\square_1}^{\square_2} d\square = \square; \quad \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} dx = x$$

Esta propiedad nos permite obtener una expresión que sólo depende del cuadrado de la velocidad inicial y final, es decir:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m \int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1, \quad \text{donde} \quad T = \frac{1}{2} mv^2, \quad (1.1)$$

Este resultado indica que el trabajo sobre la partícula, en el camino parametrizado por  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , es igual a la diferencia entre las energías cinéticas en las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Este resultado es general y se conoce como el *Teorema Trabajo Energía Cinética*.

Si  $W_{12}$  es independiente del camino, es decir, la integral no depende de la parametrización  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , entonces decimos que la fuerza es conservativa y para un camino cerrado, es decir un camino que empieza en  $\vec{r}_1$  y termina en el mismo punto, se cumple:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_1^2) = 0.$$

Una forma usual de expresar este resultado es,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

### Ejemplo

- Calcular el trabajo que hace una fuerza constante sobre un bloque en un plano inclinado para que suba a una velocidad constante, Figura 1.1.
- Calcular el trabajo que hace la fuerza de gravedad.

La integral de línea debe evaluarse a lo largo de la recta que une los puntos  $(0, h)$ ,  $(X, 0)$ .

Para una fuerza constante y uniforme  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &= (F_x, F_y) \cdot [(0, h) - (X, 0)] = (F_x, F_y) \cdot (-X, h). \end{aligned}$$

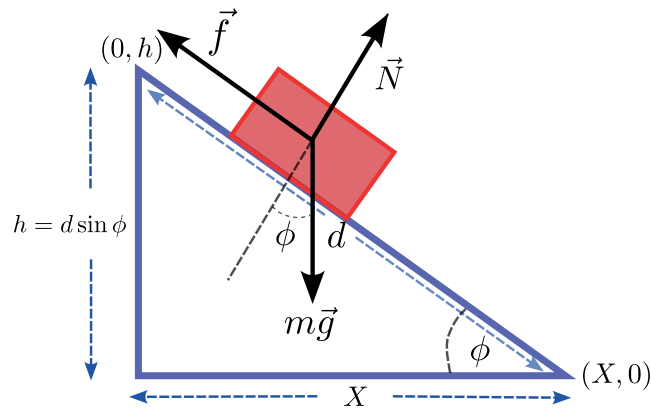


Figura 1.1: Bloque Desliza sin Fricción.

Cerca de la superficie terrestre, la fuerza de gravedad puede considerarse aproximadamente constante y está dada por el vector  $\vec{F} = (0, -mg)$ , con  $g \approx 9,8m/s^2$ . A partir de esta expresión, podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza de gravedad al mover el bloque:

$$W = (0, -mg) \cdot (-X, h) = -mgh.$$

De forma similar, consideramos ahora el trabajo realizado por una fuerza constante  $\vec{f}$  que empuja al cuerpo para que suba con velocidad constante sobre un plano inclinado de ángulo  $\phi$ :

$$\begin{aligned} -|\vec{f}| \hat{i}' + mg \sin \phi \hat{i}' &= ma_x \hat{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = mg \sin \phi \\ +|\vec{N}| \hat{j}' - mg \cos \phi \hat{j}' &= ma_y \hat{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos \phi. \end{aligned}$$

Dado que:

$$\sin \phi = \frac{h}{d}, \quad \cos \phi = \frac{X}{d},$$

considerando la fuerza  $\vec{f} = -mg \sin \phi \hat{i}'$  y teniendo en cuenta que  $\hat{i}' = (-\cos \phi, +\sin \phi)$

$$\vec{f} = f(-\cos \phi, \sin \phi) = mg \sin \phi \left( -\frac{X}{d}, \frac{h}{d} \right) = mg \frac{h}{d^2} (-X, h).$$

Así, el trabajo hecho por la fuerza  $f$  es:

$$W = (f_x, f_y) \cdot (-X, h) = \frac{mgh}{d^2} (-X, h) \cdot (-X, h),$$

donde  $d = \sqrt{X^2 + h^2}$  es la longitud del plano inclinado. Realizando el producto se obtiene:

$$W = \frac{mgh}{d^2} (X^2 + h^2) = +mgh.$$

De este modo, el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{f}$  es exactamente igual en magnitud (pero de signo opuesto) al trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

El trabajo total sobre la partícula es la suma del trabajo realizado por la fuerza de gravedad y el trabajo realizado por la fuerza de empuje, por lo que:

$$W = \sum_l \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_l \cdot d\vec{r} = -mgh + mgh = 0.$$

Se concluye, entonces, que el trabajo neto es cero. Este resultado es consistente con el Teorema Trabajo Energía, el cual establece que el trabajo sobre una partícula es igual a la diferencia entre las energías cinéticas  $W_{12} = T_2 - T_1$ . En este caso, el bloque se mueve con una velocidad constante, su energía cinética inicial es igual a la energía cinética final, y en consecuencia, el trabajo neto es cero.

### 1.1.1 Conservación de la Energía Para una Partícula

El Análisis Vectorial nos indica que, si la fuerza es el gradiente de un potencial, esta es una condición necesaria y suficiente para tener una fuerza conservativa, es decir,

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}),$$

en componentes,

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} V \equiv -\partial_i V.$$

Si  $s = s(t)$  es una función monótona del tiempo, podemos utilizarlo para parametrizar el camino, es decir,  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i} dx^i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} ds, \quad (1.2)$$

por Regla de la Cadena tenemos

$$-\sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} = -\frac{dV}{ds}. \quad (1.3)$$

En general, tenemos que la Regla de la Cadena está dada por,

$$\frac{df(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t}.$$

Si la función  $f$  depende explícitamente del tiempo, entonces

$$\frac{df(x_1, \dots, x_n, t)}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial x^i}{\partial t} = 0.$$

Teniendo en cuenta (1.2) y (1.3), obtenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{dV}{ds} ds = -dV.$$

Integrando, llegamos a la expresión

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{V_1}^{V_2} dV = -(V_2 - V_1).$$

Del Teorema Trabajo Energía Cinética (1.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= -(V_2 - V_1) \\ T_2 + V_2 &= V_1 + T_1 \end{aligned}$$

que es el teorema de la *Conservación de la Energía para una Partícula*.

## 1.2 Mecánica de un Sistema de Partículas

La Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas es:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j F_{ji} + F_i^{(e)},$$

donde  $F_{ji}$  es la fuerza de la partícula  $j$  sobre la partícula  $i$  y  $F_i^{(e)}$  es la fuerza total externa sobre la partícula  $i$ . Sumando sobre todas las partículas

$$\sum_i \frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)}.$$

El primer término lado derecho de esta ecuación lo podemos reescribir como:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij}.$$

Donde definimos:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \equiv \sum'_{i,j}. \quad (1.4)$$

Redefiniendo  $i \leftrightarrow j$ , ya que los índices sobre los cuales se suma son mudos, es decir,  $\sum_{i,j} \vec{F}_{ji} = \sum_{j,i} \vec{F}_{ji}$ , tenemos que

$$\sum'_{i,j} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum'_{j,i} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) = 0,$$

la última igualdad se obtiene a partir de la Tercera Ley de Newton. Es importante notar que la conservación del momento lineal es una consecuencia directa de dicha ley. De esta expresión, la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}. \quad (1.5)$$

Si las fuerzas externas  $F_i^{(e)}$  son cero,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \\ \sum_i m_i \vec{v}_i &= \text{Cantidad Conservada,} \end{aligned}$$

es decir que, la suma de todos los momentos se conserva. La expresión (1.5), puede reescribirse utilizando la definición de centro de masa. Para ello, definimos:

$$M = \sum_i m_i,$$

que representa la masa total del sistema. De este modo, la Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas puede expresarse como:

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = M \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \right) = \sum_i \vec{F}_i^{\vec{e}} = M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)},$$

donde

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \text{Coordenadas del Centro de Masa}$$

y

$$\vec{F}^{(e)} = \text{Fuerza Total Externa Sobre el Sistema.}$$

Con estas definiciones, la Segunda Ley de Movimiento para un sistema de partículas se puede escribir de forma semejante a la Segunda Ley de Newton para una partícula, es decir,

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}. \quad (1.6)$$

La analogía con el caso de una partícula es evidente. Como veremos más adelante, estas definiciones resultarán muy convenientes para el estudio de la dinámica de un cuerpo rígido.

### 1.2.1 Momento Angular de un Sistema de Partículas

En esta Sección, demostraremos una versión restringida de la conservación del momento angular, que solo considera fuerzas centrales. Partimos nuevamente de la Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas,

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + F_i^{(e)}.$$

Tomando el producto cruz con el vector posición en ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\Rightarrow \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + r_i \times F_i^{(e)}.$$

Sumando sobre todas las partículas,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \sum_i r_i \times F_i^{(e)}. \quad (1.7)$$

El primer término al lado derecho se puede reescribir como,

$$\sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}.$$

Renombrando las variables  $i \leftrightarrow j$ , conseguimos la expresión

$$\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{j,i} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}, \quad (1.8)$$

de esta forma,

$$\sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum'_{j,i} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}, \quad (1.9)$$

en el último paso utilizamos la tercera ley de Newton  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ . De esto obtenemos la igualdad,

$$\sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji},$$

donde  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ . Asumiendo que la fuerza entre dos partículas está en la misma dirección que la diferencia de sus respectivas posiciones, es decir,

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel F_{ji},$$

el producto cruz es cero, es decir,  $\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0$  y por tanto, el lado izquierdo de (1.9) también es cero,

$$\sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = 0,$$

de esta forma la ecuación (1.7) se reduce a,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}. \quad (1.10)$$

El lado izquierdo de esta ecuación, puede reescribirse como,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{\vec{v}_i \times m\vec{v}_i=0} = \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{dL}{dt}.$$

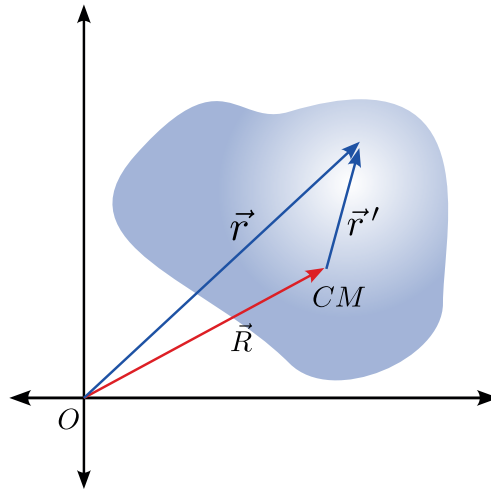


Figura 1.2: Descomposición del Vector Posición Respecto al Vector Centro de Masa.

Reemplazando este resultado en (1.10), obtenemos la ecuación diferencial para el momento angular,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i N_i^{(e)} = N^{(e)},$$

donde  $N^{(e)}$  es el torque total externo. Si  $N^{(e)} = 0$ , entonces  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , el momento angular se conserva. Resulta muy conveniente escribir las coordenadas respecto al centro de masa (ver figura 1.2),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$$

derivando esta expresión,

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}. \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en el momento angular obtenemos,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times (m_i \vec{v}_i' + m_i \vec{V}_{cm}) \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i') + \underbrace{\vec{r}_i' \times (m_i \vec{V}_{cm})}_{(1)} + \underbrace{\vec{R} \times (m_i \vec{v}_i')}_{(2)} + \vec{R} \times (m_i \vec{V}_{cm}). \end{aligned}$$

Se puede mostrar que los términos (1) y (2) son cero. En el término (1), podemos identificar fácilmente las coordenadas del centro de masa,

$$(1) = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{V}_{cm} = \left( \sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{V}_{cm},$$

donde:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = M \left( \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} \right) = 0.$$

Esta expresión corresponde al centro de masa en un sistema de referencia, donde el centro de masa coincide con el origen, por esta razón es cero. De igual forma, para el término (2)

$$\vec{R} \times \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \vec{R} \times \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0} = 0.$$

Así, finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i') + \left( \sum_i m_i \right) \vec{R} \times \vec{V}_{cm} \\ &= \vec{R} \times M \vec{V}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i' \times p_i'. \end{aligned}$$

Esta expresión indica que el momento angular total es la suma del momento angular respecto a un origen en el centro de masa y el momento angular de una masa  $M$  puntual con coordenadas  $\vec{R}$  respecto al origen.

### 1.2.2 Teorema Trabajo Energía Cinética para un Sistema de Muchas Partículas

Calculemos el trabajo realizado por todas las fuerzas, para llevar el sistema desde una configuración inicial, en la que las posiciones y masas están definidas por el conjunto  $\{(r_i^{(1)}, m_i)\}$ , hasta una nueva configuración  $\{(r_i^{(2)}, m_i)\}$ , es decir,

$$W_{12} = \sum_i \int_{\vec{r}_i^{(1)}}^{\vec{r}_i^{(2)}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Como en el caso del sistema de una partícula tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i \int_1^2 \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} \cdot \overbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}^{\vec{v}} dt \\ &= \sum_i m_i \int_1^2 d\vec{v}_i \cdot \vec{v} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \int_1^2 dv_i^2. \end{aligned}$$

Recordemos que,

$$\begin{aligned}\frac{dv_i^2}{dt} &= \frac{d(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{dt} = 2\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv_i^2}{dt} &= \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} dv_i^2 &= (d\vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,\end{aligned}$$

reemplazando este resultado en la integral, obtenemos,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{i2}^2 - v_{i1}^2) = T_2 - T_1. \quad (1.11)$$

donde  $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ .

### 1.2.3 Energía Cinética Respecto al Centro de Masa para un Sistema de Muchos Cuerpos

Para muchas aplicaciones, resulta conveniente expresar la energía cinética de un sistema en términos de la energía cinética respecto al centro de masa.  $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$ ,  $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}$  y

$$\begin{aligned}T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{V}_{cm} + \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{V}_{cm} \cdot \vec{V}_{cm} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \sum_i 2m_i \vec{v}_i' \right)}_{(1)} \cdot \vec{V}_{cm} + \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) V_{cm}^2,\end{aligned}$$

donde,

$$(1) = 2 \sum_i m_i \vec{v}_i' = 2 \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \overbrace{\left( \sum_i m_i \vec{r}_i' \right)}^{\text{Centro de masa en } O'}$$

=0

Por lo tanto, (1) = 0 y

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (v_i')^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2. \quad (1.12)$$

Es decir, la energía cinética es la suma de la energía cinética respecto al centro de masa y la energía de una masa puntual  $M$  que se mueve con una velocidad  $\vec{V}_{cm}$ .

### 1.2.4 Teorema de la Conservación de la Energía para un Sistema de Muchos Cuerpos

Para obtener una expresión de la energía para un sistema de muchas partículas, es necesario asumir que todas las interacciones entre ellas pueden obtenerse de un potencial. Para esto, es fundamental integrar las fuerzas externas y las fuerzas internas del sistema en la ecuación

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum'_{i,j} \int_1^2 F_{ji} \cdot d\vec{r}_i.$$

En primer lugar, integremos las fuerzas externas,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_1^2 (-\vec{\nabla}^{(i)} V^{e(i)}) \cdot d\vec{r}_i,$$

donde  $i$  se refiere, en este caso, a la partícula  $i$ -ésima y no a la coordenada. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,k} \int_1^2 -\frac{\partial V^{e(i)}}{\partial x_k^{(i)}} dx_k^{(i)} = -\sum_i \int_1^2 \frac{\partial V^{e(i)}}{\partial x_k^{(i)}} \frac{dx_k^{(i)}}{ds} ds = -\sum_i \int_1^2 \frac{dV^{e(i)}}{ds} ds \\ &= -\int_1^2 dV^e = -\sum_i (V_2^{e(i)} - V_1^{e(i)}) \equiv -(V_2^e - V_1^e), \end{aligned}$$

aquí utilizamos la regla de la cadena, es decir,

$$\sum_k \frac{\partial V^{e(i)}}{\partial x_k^{(i)}} \frac{dx_k^{(i)}}{ds} = \frac{dV^{e(i)}}{ds},$$

también definimos  $V^e = \sum_i V^{e(i)}$ . De forma similar, asumiendo que todas las fuerzas son conservativas, debemos obtener un potencial para la fuerza de interacción  $V_{ij}$  entre las partículas del sistema  $\vec{F}_{ji}$ , es decir,

$$F_{ji} \equiv -\nabla^{(i)} V^{(ij)} = (F_{ji})_k = -\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} V^{(ij)} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

Donde el potencial  $V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$  sólo depende de la magnitud de la distancia entre las dos partículas. Esto es válido para muchas de las interacciones conocidas. Para manipular apropiadamente las expresiones primero vamos a demostrar que:

$$-\nabla^{(i)} V^{(ij)} = +\nabla^{(j)} V^{(ij)}.$$

Esta propiedad, es importante si se espera que la fuerza entre la partícula  $i$ -ésima y la partícula  $j$ -ésima sea generada por un potencial que sólo depende de la magnitud de la distancia entre ellas. Esta igualdad equivale a la Tercera Ley de Newton. Cabe señalar que,

al proponer un potencial para generar la fuerza no está garantizado, en general, que este potencial satisfaga la tercera ley. Por ejemplo, la fuerza de Lorentz y la fuerza Coriolis no satisfacen la tercera ley: en el primer caso, se debe a que en la dinámica del sistema requiere introducir el campo electromagnético, y en el segundo, se debe a que la fuerza Coriolis es un efecto en sistemas no inerciales. En la literatura podemos encontrar otros ejemplos de fuerzas o potenciales que no satisfacen la tercera ley de Newton. Sea  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ , entonces,

$$\nabla^{(i)} V^{(ij)} = \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial x_k^{(i)}} (r_{ij}) = \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k^{(i)}}.$$

Necesitamos determinar a qué es equivalente la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k^{(i)}} &= \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} |\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}| = \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} [(\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}) \cdot (\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)})]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [(\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}) \cdot (\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)})]^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} [(\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}) \cdot (\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)})]}_{(1)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En esta expresión,

$$(1) = (x^{(i)} - x^{(j)})^2 + (y^{(i)} - y^{(j)})^2 + (z^{(i)} - z^{(j)})^2 = \sum_{l=1}^3 (x_l^{(i)} - x_l^{(j)})^2,$$

así que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (1)}{\partial x_k^{(i)}} &= \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} \sum_{l=1}^3 (x_l^{(i)} - x_l^{(j)})^2 = \sum_{l=1}^3 2(x_l^{(i)} - x_l^{(j)}) \frac{\partial x_l^{(i)}}{\partial x_k^{(i)}} \\ &= \sum_{l=1}^3 2(x_l^{(i)} - x_l^{(j)}) \delta_{lk} = 2(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

En el penúltimo paso, tuvimos en cuenta que  $\frac{\partial x_l^{(j)}}{\partial x_l^{(i)}} = 0$ , ya que  $j \neq i$ . Reemplazando este resultado en (1.13), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} |\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}| = \frac{1}{2} |\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}|^{-1} \times 2(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}).$$

Si en lugar de derivar respecto a  $x_k^{(i)}$  lo hacemos respecto a  $x_k^{(j)}$ , tendremos un resultado similar, intercambiando  $j$  por  $i$ , es decir,

$$\frac{\partial (1)}{\partial x_k^{(j)}} = -2(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}).$$

Este es exactamente el mismo resultado que (1.14) pero con signo opuesto; esto es suficiente para demostrar que  $-\nabla^{(i)}V^{(ij)} = +\nabla^{(j)}V^{(ij)}$ . Ya derivamos la expresión (1) parcialmente respecto a  $x_k^{(i)}$  y  $x_k^{(j)}$ , demostrando que estas derivadas tienen signos opuestos; la expresión (1) también puede derivarse respecto a  $x_k^{(i)} - x_k^{(j)}$

$$\frac{\partial(1)}{\partial(x_k^{(i)} - x_k^{(j)})} = 2(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}).$$

Este resultado, es idéntico al que se obtiene cuando se deriva respecto a  $x_k^{(i)}$ . Denotaremos esta derivada como:

$$\frac{\partial V^{(ij)}}{\partial(x_k^{(i)} - x_k^{(j)})} \equiv \nabla^{(ij)}V^{(ij)}.$$

De estos resultados, se obtiene que

$$\nabla^{(i)}V^{(ij)} = \nabla^{(ij)}V^{(ij)} = -\nabla^{(j)}V^{(ij)}.$$

Para llegar a nuestro resultado final, vamos a obtener una expresión que será útil para demostrar el Teorema de Conservación de la Energía. Consideremos la integral:

$$\begin{aligned} \sum'_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i &= -\sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(i)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}_i \\ &= -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(i)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}_i - \frac{1}{2} \sum'_{j,i} \int_1^2 \nabla^{(j)}V^{(ji)} \cdot d\vec{r}_j \\ &= -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(i)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum'_{j,i} \int_1^2 \nabla^{(i)}V^{(ji)} \cdot d\vec{r}_j \\ &= -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(i)}V^{(ij)} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(ij)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}_{ij}, \end{aligned}$$

donde  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}^{(ij)} = \vec{r}^i - \vec{r}^j$  y  $V^{(ij)} = V^{(ji)}$ . Así que finalmente obtenemos

$$\sum'_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \int_1^2 \nabla^{(ij)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}^{(ij)}.$$

Esta expresión puede reescribirse, utilizando la Regla de la Cadena

$$\begin{aligned} -\int_1^2 \nabla^{(ij)}V^{(ij)} \cdot d\vec{r}^{(ij)} &= -\sum_k \int_1^2 \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial(x_k^{(i)} - x_k^{(j)})} d(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}) \\ &= -\int_1^2 \sum_k \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial(x_k^{(i)} - x_k^{(j)})} \frac{d(x_k^{(i)} - x_k^{(j)})}{ds} ds \\ &= -\int_1^2 \frac{dV^{(ij)}}{ds} ds = -\int_1^2 dV^{(ij)} = -[V_2^{(ij)} - V_1^{(ij)}]. \end{aligned}$$

Recapitulemos, teníamos el resultado:

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum'_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i.$$

En la Sección anterior, demostramos el Teorema Trabajo Energía Cinética,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = T_2 - T_1, \quad \text{donde} \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

después mostramos,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i = -(V_2^e - V_1^e),$$

y finalmente, mostramos que el término de interacción entre partículas del sistema se puede escribir como:

$$\sum'_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i = -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} [V_2^{(ij)} - V_1^{(ij)}].$$

Juntando estos resultados, finalmente, obtenemos:

$$T_2 - T_1 = -[V_2^e - V_1^e] - \frac{1}{2} \sum'_{i,j} [V_2^{(ij)} - V_1^{(ij)}],$$

$$T_2 + V_2^e + \frac{1}{2} \sum'_{i,j} V_2^{(ij)} = T_1 + V_1^e + \frac{1}{2} \sum'_{i,j} V_1^{(ij)}.$$

Este es el Teorema de la Conservación de la Energía, para un sistema mecánico de muchos cuerpos.

### 1.3 Ligaduras

Es cierto, que la forma más general de la Segunda Ley de Newton está dada por la expresión

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}.$$

Sin embargo, en muchos casos resulta conveniente agregar ecuaciones de ligaduras, las cuales son relaciones entre las coordenadas y el tiempo, que pueden expresarse como ecuaciones entre las coordenadas (sin incluir derivadas). Este tipo de ligaduras se clasifican como Holonómicas, es decir,

$$f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \dots, t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, k. \quad (1.15)$$

Por ejemplo, para un cuerpo rígido

$$\begin{aligned} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - C_{ij}^2 &= 0, \\ (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - C_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

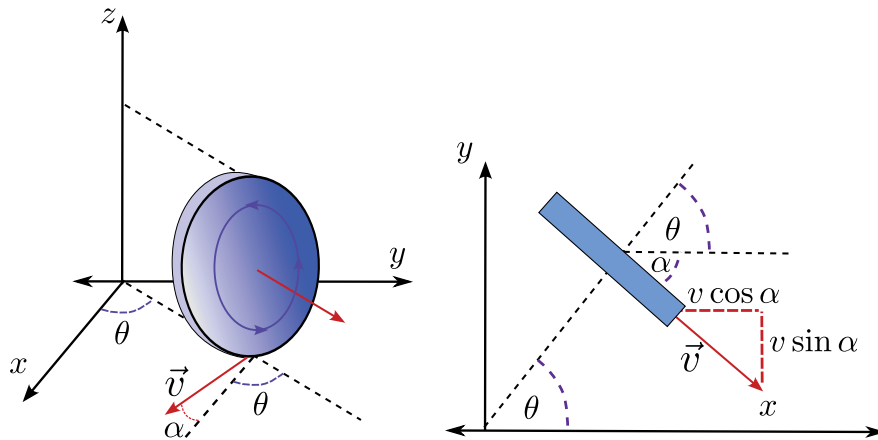


Figura 1.3: Disco Rodante.

Toda ligadura que no pueda expresarse de esta forma, se llama simplemente No Holonómica. Por ejemplo, si un cuerpo se mueve en la región externa a una esfera sólida de radio  $a$ , esta ligadura se escribe como una desigualdad,

$$r^2 - a^2 \geq 0.$$

Un sistema con  $N$  partículas tiene  $3N$  grados de libertad. Si existen  $k$  ecuaciones, como en la ecuación (1.15), tiene  $3N - k$  grados de libertad. Si hay  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$  variables tales que,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \end{aligned}$$

de forma que estas relaciones contienen las ligaduras de manera implícita, entonces decimos que las  $\{q_i\}$  son las *coordenadas generalizadas*. Es decir, cuando el problema se expresa en términos de las  $q$ 's el número de grados de libertad del problema corresponde al número de coordenadas generalizadas. Por ejemplo, para parametrizar las trayectorias de las partículas sobre la superficie de una esfera se requieren tres coordenadas cartesianas  $x, y, z$  y la ligadura  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . En cambio, en coordenadas esféricas bastan las coordenadas angulares  $(\theta, \varphi)$ , ya que el radio es constante.

### 1.3.1 Disco Rodante

Consideremos ahora el movimiento de un disco de espesor finito rodando sobre una superficie plana como se muestra en la Figura 1.3. A partir de la geometría del sistema, tenemos:  $s = a\phi$ ,  $\dot{s} = a\dot{\phi} = v$ ;  $v = |\vec{v}|$ . Además,  $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ , es decir,  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

Como se muestra en la Figura 1.3, la velocidad del centro de masa, está dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= v \cos \alpha \hat{i} + v \sin(-\alpha) \hat{j} \\
 &= v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{i} + v \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) \hat{j} \\
 &= v \left( \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} \cos \theta + \cancel{\sin \frac{\pi}{2}} \sin \theta \right) \hat{i} + v \left( -\cancel{\sin \frac{\pi}{2}} \cos \theta + \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} \sin \theta \right) \hat{j} \\
 &= v \sin \theta \hat{i} - v \cos \theta \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}.
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{dx}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dy}{dt} = -v \cos \theta$$

Dado que  $v = a\dot{\phi} = a \frac{d\phi}{dt}$ , se tiene que  $v dt = a d\phi$  y por lo tanto, se puede escribir  $dt = \frac{a}{v} d\phi$ .

De estas relaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{\left(\frac{a}{v}\right) d\phi} = v \sin \theta \\
 dx &= \left(\frac{a}{v}\right) v \sin \theta d\phi \\
 dx - a \sin \theta d\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

de igual forma, se muestra

$$dy + a \cos \theta d\phi = 0. \tag{1.17}$$

En caso de que estas ligaduras sean holonómicas, estas se deben poder escribir en la forma

$$\Phi_1(x, \phi) = 0, \quad \Phi_2(y, \phi) = 0,$$

El diferencial de una función, está dado por:

$$\begin{aligned}
 d\Phi_1 &= d\Phi_1(x, \phi) \\
 &= \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{\phi} dx + \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right|_x d\phi,
 \end{aligned}$$

de tal forma que, se debe satisfacer,

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \phi \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \phi}. \tag{1.18}$$

Si los diferenciales en las ecuaciones (1.16) y (1.17) provienen de la diferencial de una función, entonces,

$$d\Phi_1 = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{\phi} dx + \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right|_x d\phi = dx - a \sin \theta d\phi.$$

Esto es equivalente a

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{\phi} = 1; \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right|_x = -a \operatorname{sen} \theta.$$

Si aplicamos la relación (1.18), se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial \phi} 1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (-a \operatorname{sen} \theta) = -a \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

donde  $\theta = \theta(x, \phi)$ , así que, las derivadas parciales cruzadas no son iguales y por lo tanto, la ligadura  $dx - a \operatorname{sen} \theta d\phi = 0$ , no es holonómica. Un tratamiento similar se debe hacer para  $\Phi_2 = \Phi_2(y, \phi)$ . Una posible forma de resolver el problema consiste en multiplicar por un factor integrante. Sin embargo, como se demostrará en uno de los ejercicios, en este caso no es posible construir esta función.

## 1.4 Principio de D'Alembert y las Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Comenzamos definiendo los desplazamientos virtuales. Un *desplazamiento virtual* (infinitesimal) de un sistema, se refiere a un cambio en la configuración del sistema, como resultado de cualquier cambio infinitesimal arbitrario de las coordenadas  $\delta \vec{r}_i$ , consistente con las fuerzas y restricciones impuestas sobre el sistema en el instante dado  $t$ . Este tipo de desplazamiento se denomina *virtual* para distinguirlo de un desplazamiento real del sistema, que ocurre en un intervalo de tiempo  $\delta t$ , durante el cual las fuerzas y ligaduras pueden estar cambiando. Para un sistema en equilibrio, la fuerza neta sobre cada partícula es

$$\vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.19)$$

Si  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ , donde  $\vec{F}_i^{(a)}$  representa las fuerzas aplicadas y  $\vec{f}_i$  las ligaduras (por ejemplo las fuerzas normales), entonces

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Si asumimos que las fuerzas de ligadura no hacen trabajo, como sucede con las fuerzas normales, ya que son perpendiculares al movimiento, es decir,  $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ , entonces

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.20)$$

Esta relación se conoce como *Principio del Trabajo Virtual*, y es no trivial, ya que en general las fuerzas aplicadas  $F^{(a)}$  son diferentes de cero. Los  $\delta \vec{r}_i$  no son linealmente independientes,

debido a las ligaduras. El principio general, se obtiene de la Segunda Ley de Newton

$$\begin{aligned}\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i &\Rightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \\ \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0.\end{aligned}$$

Si  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ , entonces

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.21)$$

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.22)$$

Este es el Principio de D'Alembert. Para obtener un sistema libre de ligaduras, escribimos estas expresiones en términos de las coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned} \quad (1.23)$$

En el curso utilizaremos con frecuencia la Regla de la Cadena para una función  $f$ . En general, si  $f = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ , utilizando la regla de la cadena podemos escribir la derivada total respecto al tiempo como:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \frac{dx^{(1)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^{(1)}} \frac{dy^{(1)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z^{(1)}} \frac{dz^{(1)}}{dt} \\ &+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(N)}} \frac{dx^{(N)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^{(N)}} \frac{dy^{(N)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z^{(N)}} \frac{dz^{(N)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k^{(i)}} \frac{dx_k^{(i)}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}$$

donde  $\vec{r}_i = (x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) := x_k^{(i)}$ . En esta última expresión, en lugar de utilizar el símbolo de igualdad, utilizamos el símbolo de equivalencia  $:=$  para indicar una notación alternativa. Un desplazamiento virtual no incluye la derivada parcial respecto al tiempo, es decir,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.24)$$

En términos de las  $q_j$  el trabajo virtual es

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left( \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

En esta expresión, hemos definido la fuerza generalizada

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (1.25)$$

que utilizaremos más adelante.

Consideremos el Principio de D'Alembert  $\sum \left( F_i^{(a)} - \dot{p}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ , aquí el término

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i,$$

puede reescribirse conveniente. Para esto, vamos a demostrar que

$$\sum_i m \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (1.26)$$

Esta expresión se obtiene de la siguiente derivada

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = m \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \underbrace{m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{(2)}.$$

Moviendo el término (2) al lado izquierdo obtenemos el resultado (1.26). Si las variables son  $q_1, \dots, q_n, t$ , por la Regla de la Cadena tenemos que

$$\frac{d}{dt} = \sum_k \frac{dq_k}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Parte del propósito del desarrollo formal de la Mecánica Clásica es obtener un principio que permita obtener las ecuaciones de movimiento, a partir de un conjunto de variables  $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ . En este sentido, consideramos a las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  como variables independientes de las  $q_i$ , y por lo tanto, deben considerarse en la Regla de la Cadena, es decir,

$$\frac{d}{dt} = \sum_k \frac{dq_k}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{dq_k}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Si suponemos que las coordenadas  $\vec{r}_i$  sólo dependen de  $(q_i, t)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \left( \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \Big|_{(q_{k \neq j}, \dot{q}_k, t)} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Consideremos la dependencia de la velocidad con las coordenadas y las velocidades generalizadas,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

En esta expresión,  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$  y  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$  sólo dependen de las coordenadas generalizadas  $q_i$ , así que la única dependencia con las velocidades generalizadas es el factor  $\dot{q}_i$ , de tal forma que

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \rightarrow \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.27)$$

Como se mencionó anteriormente  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \right) = 0$ . Reemplazando (1.27) y  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$  en (1.26), obtenemos:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (1.28)$$

Estas expresiones pueden reescribirse, si tomamos en cuenta que

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T_i.$$

De forma similar, el segundo término en el lado derecho de (1.28) puede escribirse como

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}_{T_i}.$$

Remplazando estos resultados en (1.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i T_i - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i T_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si en el principio de D'Alembert  $\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i - \dot{p}_i \cdot \delta \vec{r} = 0$ , tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{p}_i \cdot \delta \vec{r} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \overbrace{\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}^{\delta \vec{r}_i} \\ \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_j Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\sum_j \left( Q_j - \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.29), conseguimos el resultado

$$\sum_j \left[ Q_j - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \quad (1.30)$$

Si las  $q_j$  son coordenadas generalizadas, entonces ellas son independientes, es decir, no hay ligaduras de la forma  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$  o cualquier otra ligadura, entonces cada uno de los términos debe ser cero, es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.31)$$

Si las fuerzas son conservativas ( $\vec{F}_i^{(a)} = -\nabla^{(i)} V$ ), entonces tenemos:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i,k} \frac{\partial V}{\partial x_k^{(i)}} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Donde se tuvo en cuenta que las derivadas parciales de la posición respecto a las coordenadas generalizadas están dadas por:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}),$$

$$\nabla^{(i)} V = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1^{(i)}}, \frac{\partial V}{\partial x_2^{(i)}}, \frac{\partial V}{\partial x_3^{(i)}} \right).$$

Contrayendo estas cantidades  $Q_j$  se convierte en:

$$\begin{aligned} - \sum_i \nabla^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= - \left( \frac{\partial V}{\partial x_1^{(i)}}, \frac{\partial V}{\partial x_2^{(i)}}, \frac{\partial V}{\partial x_3^{(i)}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x_1^{(i)}}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2^{(i)}}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3^{(i)}}{\partial q_j} \right) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial x_1^{(i)}} \frac{\partial x_1^{(i)}}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial x_2^{(i)}} \frac{\partial x_2^{(i)}}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial x_3^{(i)}} \frac{\partial x_3^{(i)}}{\partial q_j} = - \sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k^{(i)}} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Remplazando este resultado en (1.31) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (1.32)$$

Si  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ , entonces podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (1.33)$$

donde  $L = T - V$  se conoce como el lagrangiano y es una función de los caminos en el espacio  $(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Las relaciones anteriores se conocen como las Ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales son invariantes bajo la transformación:

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{dF}{dt},$$

donde  $F = F(q, t)$ . Es fácil comprobar que  $L'$  también satisface las Ecuaciones de Euler-Lagrange (1.33). Para esto, definimos un nuevo lagrangiano  $L' = L + \frac{dF}{dt}$ , y se tiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (L + \dot{F}) - \frac{\partial}{\partial q_j} (L + \dot{F}) \quad (1.34)$$

donde

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ya que  $F = F(a, t)$  no depende de  $\dot{q}$ , se sigue que  $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0$ ,

$$\dot{F} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Reemplazando este resultado en (1.34)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ L + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ L + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right] \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=0} + \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\delta_{ij}} - \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

En esta expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned} \quad (1.36)$$

reemplazando (1.36) en (1.35) obtenemos que (1.35) es cero, es decir,

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} = 0.$$

Esta última expresión demuestra que el lagrangiano  $L'$  también satisface las Ecuaciones de Euler-Lagrange.

### 1.4.1 Aplicaciones- Ley de Hooke

$$\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{i}$$

Habiamos demostrado que:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(V_2 - V_1).$$

Si elegimos  $V_1$  de tal forma que sea cero, entonces podemos construir nuestra función potencial

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

si nos limitamos a una dimensión

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1).$$

El potencial para el oscilador armónico estará dado por

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} [-k(x - x_0)\hat{i}] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} k(x - x_0)dx = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 - \frac{k}{2}(x_0 - x_0)^2 = +\frac{k}{2}(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

De este resultado, el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - x_0)^2.$$

Veamos que, en efecto, reproduce la ecuación de la que partimos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - x_0)^2 \right) = m\dot{q}, \quad x = q, \quad \dot{x} = \dot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - x_0)^2 \right] = -\frac{k}{2} \cdot 2(q - x_0), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}. \end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en la Ecuación de Euler-Lagrange, conseguimos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} - [-k(q - x_0)] = m\ddot{q} + k(q - x_0) = 0,$$

esta ecuación es la de un oscilador armónico, como se esperaba.

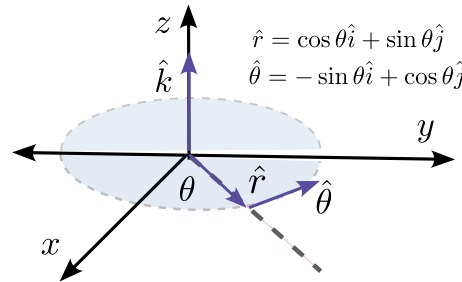


Figura 1.4: Coordenadas Cilíndricas.

### 1.4.2 Problemas con Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  están definidas implícitamente por las relaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

donde  $r = |\vec{r}|$ . A partir de la Figura 1.4, se pueden definir los vectores unitarios:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}.$$

En el plano, el vector posición estará dado por  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} = r\hat{r}$ . La velocidad está dada por,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r\hat{r} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}(\theta)}{dt},$$

donde la derivada del vector unitario  $\hat{r}$  es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] = -\sin \theta \dot{\theta} \hat{i} + \cos \theta \dot{\theta} \hat{j} \\ &= [-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}] \dot{\theta} = \hat{\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

De igual forma, podemos calcular la derivada del vector  $\hat{\theta}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d}{dt} [-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}] = -\cos \theta \dot{\theta} \hat{i} - \sin \theta \dot{\theta} \hat{j} \\ &= -[\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] \dot{\theta} \\ &= -\hat{r} \dot{\theta} = -\dot{\theta} \hat{r}. \end{aligned}$$

Resumiendo estos resultados, tenemos:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r}.$$

Con estas expresiones, la velocidad en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r [\dot{\theta}\hat{\theta}] = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Procediendo de forma similar, podemos obtener la aceleración en coordenadas polares,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}] \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}[-\dot{\theta}\hat{r}] \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

Las coordenadas cilíndricas corresponden a las coordenadas polares, en dos dimensiones, más la coordenada  $z$ , es decir,  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r\hat{r} + z\hat{k}$ . En muchas aplicaciones, es necesario calcular el diferencial del vector posición en un sistema de coordenadas. En coordenadas cilíndricas, este diferencial se puede obtener multiplicando la velocidad por el diferencial de tiempo  $dt$ , es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{Pol}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = [\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}] + \dot{z}\hat{k} \\ \frac{d\vec{r}}{dt}dt &= \frac{dr}{dt}dt\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}dt\hat{\theta} + \frac{dz}{dt}dt\hat{k} \\ &= dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + dz\hat{k} = d\vec{r}.\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (1.25), tenemos la expresión más general para la fuerza generalizada,

$$Q_j = \sum_i F_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Si  $(r, \theta, z)$  son las coordenadas generalizadas para un problema con simetría cilíndrica, entonces para una partícula  $i = 1$

$$\begin{aligned}Q_r &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [r\hat{r} + z\hat{k}] \Big|_{\theta, z} = \vec{F} \cdot \hat{r} \equiv Q_r = F_r \\ Q_\theta &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [r\hat{r} + z\hat{k}] \Big|_{r, z} = \vec{F} \cdot r \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \\ &= r\vec{F} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) \right] \\ &= r\vec{F} \cdot [-\text{sen}\theta\hat{i} + \text{cos}\theta\hat{j}] = r \underbrace{\vec{F} \cdot \hat{\theta}}_{F_\theta} \equiv rF_\theta.\end{aligned}$$

La energía cinética esta dada por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{2}m \left[ \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \right] \cdot \left[ \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \right] \\ &= \frac{1}{2}m [\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2], \quad \text{ya que } \hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{r} \cdot \hat{k} = \hat{\theta} \cdot \hat{k} = 0.\end{aligned}$$

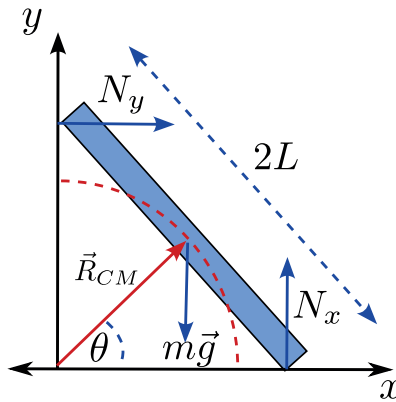


Figura 1.5: Barra que Desliza sin Fricción. La Línea Azul es la Trayectoria del Centro de Masa.

Los momentos generalizados  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Remplazando estas expresiones en las Ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Para la coordenada  $r$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dm\dot{r}}{dt} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \right] &= F_r = Q_r \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= F_r = \vec{F} \cdot \hat{r}. \end{aligned}$$

Para la coordenada  $\theta$  la ecuación correspondiente es:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = Q_\theta = r\vec{F} \cdot \hat{\theta}. \quad (1.37)$$

### 1.4.3 Barra que se Desliza

Una barra de longitud  $2L$  se desliza sobre una pared sin fricción, como se muestra en la Figura 1.5. Se quiere demostrar que la parte superior de la barra pierde contacto con la pared cuando está a dos tercios de su altura inicial. Para resolver este problema, se plantea el lagrangiano, considerando que la energía cinética corresponde a la suma de la energía de traslación del centro de masa y la energía de rotación respecto al centro de masa, como se demostró en la Ecuación (1.12), es decir,

$$L = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - MgL \sin \theta,$$

donde para una barra de longitud  $2L$  el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a su eje de simetría y que pasa por su centro de masa, está dado por  $I_{CM} = \frac{1}{12}M(2L)^2$ . Las coordenadas del centro de masa son  $\vec{R}_{cm} = L(\cos \theta, \sin \theta)$ , la velocidad del centro de masa es  $V_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm} = L(-\sin \theta, \cos \theta)\dot{\theta}$ , de forma que  $V_{cm}^2 = L^2\dot{\theta}^2$ . Remplazando en el lagrangiano obtenemos:

$$L = \frac{2}{3}ML^2\dot{\theta}^2 - MgL \sin \theta.$$

Con este lagrangiano, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{4}{3}ML^2\ddot{\theta} + MgL \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{3g}{4L} \cos \theta.$$

Para determinar el momento en el que la barra se separa de la pared, es necesario escribir las ecuaciones de movimiento del centro de masa (1.6)

$$\begin{aligned} M\ddot{R}_{cmx} &= N_x \\ M\ddot{R}_{cmy} &= N_y - Mg, \end{aligned}$$

donde  $N_x$  es la fuerza normal que ejerce la pared sobre la barra y  $N_y$  es la fuerza normal que ejerce el piso. La aceleración del centro de masa es

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{R}_{cmx}, \ddot{R}_{cmy}) = L(-\sin \theta, \cos \theta)\ddot{\theta} + L(-\cos \theta, -\sin \theta)\dot{\theta}^2,$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} -ML(\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) &= N_x \\ ML(\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) &= N_y - Mg. \end{aligned}$$

Cuando la barra se separe de la pared, se cumple que  $N_x = 0$ . Para utilizar la ecuación anterior, se necesita el valor de  $\dot{\theta}$ . Este valor puede determinarse considerando que la energía inicial del sistema es  $MgL$ , correspondiente a la posición del centro de masa. Por lo tanto:

$$MgL = \frac{2}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL \sin \theta.$$

A partir de esta expresión, es posible despejar el valor del cuadrado de la velocidad angular

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L}(1 - \sin \theta). \quad (1.38)$$

Imponiendo la condición  $N_x = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) = \left( -\sin \theta \frac{3g}{4L} \cos \theta + \cos \theta \frac{3g}{2L} (1 - \sin \theta) \right) \\ &= \frac{3g}{4L} \cos \theta (2 - 3 \sin \theta) = 0. \end{aligned}$$

De esta expresión, se obtiene que  $\sin \theta = \frac{2}{3}$ , lo cual indica que la barra se separa cuando está a una altura igual a dos tercios de la inicial.

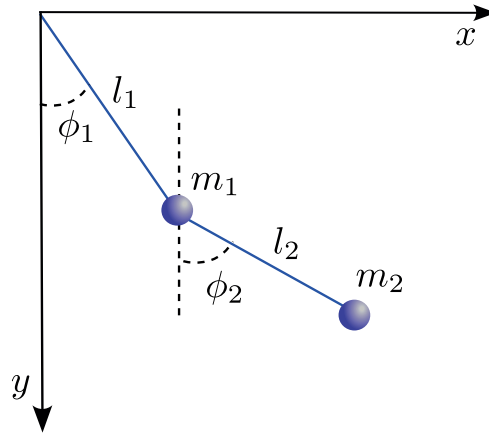


Figura 1.6: Péndulo Doble Oscilando en un Plano.

#### 1.4.4 Péndulo Doble Coplanar

El péndulo doble consiste de dos péndulos rígidos acoplados por una articulación, como se muestra en la Figura 1.6. Asumiendo  $y$  positivo “hacia abajo”, la posición de la masa  $m_1$  es

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x_1, y_1) = [\ell_1 \sin \phi_1, \ell_1 \cos \phi_1] \\ \vec{r}_2 &= [\ell_1 \sin \phi_1 + \ell_2 \sin \phi_2, \ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2].\end{aligned}$$

Para la masa  $m_1$ , la energía cinética está dada por:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{2} m_1 [\ell_1 \cos \phi_1 \dot{\phi}_1, -\ell_1 \sin \phi_1 \dot{\phi}_1]^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 [\ell_1^2 \cos^2 \phi_1 \dot{\phi}_1^2 + \ell_1^2 \sin^2 \phi_1 \dot{\phi}_1^2] \\ &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 (\cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_1) \dot{\phi}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2.\end{aligned}$$

De igual forma, para la masa  $m_2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{r}_2^2 &= \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 = [\ell_1 \cos \phi_1 \dot{\phi}_1 + \ell_2 \cos \phi_2 \dot{\phi}_2, -\ell_1 \sin \phi_1 \dot{\phi}_1 - \ell_2 \sin \phi_2 \dot{\phi}_2]^2 \\ &= [\ell_1^2 \cos^2 \phi_1 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \cos^2 \phi_2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \\ &\quad + \ell_1^2 \sin^2 \phi_1 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \sin^2 \phi_2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2] \\ &= \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 [\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2] \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \\ &= \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2.\end{aligned}$$

La energía cinética es la suma de la energía de cada una de las masas

$$\begin{aligned}T &= T_1 + T_2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2].\end{aligned}$$

Para calcular la energía potencial, es necesario tener en cuenta que en este sistema de coordenadas  $F = +mg\hat{j}$ , es positiva. Para la masa  $m_1$ , la energía potencial está dada por:

$$\begin{aligned} U_1 &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} mg\hat{j} \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j}] \\ &= - \int mg dy \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{j}}_1 + 0 = -mg \int_0^{\ell_1 \cos \phi_1} dy \\ &= -mg\ell_1 \cos \phi_1. \end{aligned}$$

De forma similar, para la masa  $m_2$  se tiene:

$$U_2 = -mg(\ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2).$$

Con estos resultados, es posible escribir el lagrangiano del problema como:

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2,$$

a partir del cual se pueden escribir las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, dejamos esto como ejercicio.

## Problemas capítulo 1

- P1:** Una partícula se mueve sobre la superficie de una esfera de radio  $R$  bajo la acción de la gravedad. Plantee las coordenadas generalizadas y escriba la forma explícita del lagrangiano.
- P2:** Un disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Identifique las restricciones holónomas y no holónomas, y determine el número de grados de libertad.
- P3:** Una partícula está restringida a moverse sobre la superficie de un cono circular recto bajo la acción de la gravedad. Escriba la condición de restricción y determine el número de coordenadas generalizadas necesarias.
- P4:** Dos masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una varilla rígida de longitud  $l$ , que puede girar libremente en un plano. Formule el sistema en términos de coordenadas generalizadas.
- P5:** Un cilindro sólido rueda sin deslizar sobre un plano inclinado. Determine las restricciones, los grados de libertad y el conjunto adecuado de coordenadas generalizadas.
- P6:** Una partícula se mueve en un plano sujeto a la restricción  $x^2 + y^2 = a^2$ . Determine la fuerza de reacción asociada a la restricción mediante multiplicadores de Lagrange.
- P7:** Un péndulo doble consiste en dos barras rígidas de longitud  $l_1$  y  $l_2$ , unidas en serie y con masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  en sus extremos. Escriba las coordenadas generalizadas y plantee el lagrangiano del sistema.
- P8:** Una partícula se mueve bajo un potencial central  $V(r)$ . Use coordenadas polares para expresar el lagrangiano y determine el número de constantes del movimiento.
- P9:** Una barra homogénea de longitud  $l$  está articulada en un extremo y puede oscilar en un plano vertical. Determine el lagrangiano usando el ángulo como coordenada generalizada.

- P10:** Un cuerpo rígido en el plano está descrito por tres coordenadas generalizadas. Identifique estas coordenadas y explique su relación con los grados de libertad del sistema.
- P11:** Una partícula de masa  $m$  se mueve en un plano bajo la acción de un potencial  $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + 4y^2)$ . Determine las coordenadas generalizadas más convenientes para simplificar el lagrangiano.
- P12:** Una partícula se mueve bajo la restricción  $\dot{x} - y = 0$ . Clasifique la restricción y determine cuántos grados de libertad tiene el sistema.
- P13:** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . El sistema puede moverse libremente en una línea recta. Escriba el lagrangiano y determine las ecuaciones de movimiento.
- P14:** Una partícula está restringida a moverse sobre la superficie de un cilindro  $x^2 + y^2 = R^2$ , bajo un campo gravitacional. Formule el problema en coordenadas cilíndricas y obtenga el lagrangiano.
- P15:** Una partícula de masa  $m$  se mueve en un plano bajo un potencial  $V(r, \theta) = \alpha r^2 \sin^2 \theta$ . Encuentre las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares.
- P16:** Una varilla homogénea de longitud  $l$  y masa  $M$  puede deslizarse sin fricción en un plano horizontal, con un extremo siempre en contacto con un círculo fijo de radio  $R$ . Determine las restricciones y los grados de libertad.
- P17:** Una partícula se mueve en un espacio con coordenadas  $(x, y, z)$  bajo la restricción  $z = f(x, y)$ . Escriba la forma general del lagrangiano en términos de  $x$  y  $y$ .
- P18:** Un péndulo de longitud  $l$  está montado sobre un soporte que se mueve con aceleración horizontal constante  $a$ . Formule el lagrangiano en coordenadas adecuadas.
- P19:** Una partícula se mueve en un potencial dependiente del tiempo  $V(x, t) = \frac{1}{2}k(t)x^2$ . Escriba el lagrangiano y derive las ecuaciones de movimiento.
- P20:** Una cadena flexible de masa lineal  $\lambda$  está en equilibrio colgando de dos puntos a la misma altura. Modele el problema con coordenadas generalizadas y discuta la naturaleza de la restricción.

## 2. Principio de Hamilton

Uno de los grandes logros de la Mecánica Clásica fue la obtención de las ecuaciones de movimiento a partir de un principio variacional. Esta interpretación de la mecánica genera una interpretación y una visión de la Mecánica Cuántica sobre la que Paul Dirac y Richard Feynman desarrollaron la formulación de las integrales de camino. El Principio de Hamilton establece que la evolución de las coordenadas generalizadas  $\vec{q}(t) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , de una configuración inicial  $\vec{q}(t_1)$  a una configuración final  $\vec{q}(t_2)$ , es un punto estacionario de la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

donde  $L = T - V$  es el lagrangiano. Un punto estacionario debe entenderse como una trayectoria  $\vec{q}^{\text{cl}}(t)$  en el espacio de configuración, es decir, el espacio de las coordenadas generalizadas, tal que una pequeña variación en dicha trayectoria produce un cambio nulo o muy pequeño en la funcional acción  $S$ . La curva solución  $\vec{q}^{\text{cl}}(t)$ , definida en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , minimiza la integral de acción (ver figura 2.1). Esta condición se puede expresar como:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

Cabe destacar que la integral  $S$  no es una función de las variables  $q_i$ , ya que estas se integran. La acción  $S$  tiene un valor distinto para cada trayectoria  $\vec{q}$  en el espacio de configuración. Por eso, se dice que la acción es una funcional, es decir, una función que asigna un número real a cada trayectoria continua  $\vec{q}$  en el espacio de configuración:  $S : C \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $C$  es el conjunto de los caminos continuos en dicho espacio [Lan86].

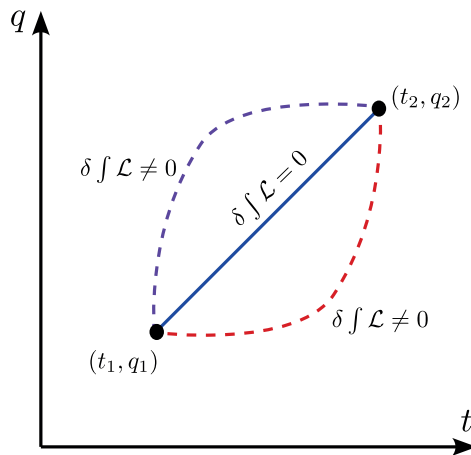


Figura 2.1: La Variación de la Acción es Cero por el Camino Clásico.

## 2.0.1 Cálculo de Variaciones

Consideremos el problema en una dimensión, que consiste en encontrar los puntos estacionarios de la siguiente funcional:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx.$$

donde  $x$  es la variable que parametriza  $y = y(x)$ , en lugar del tiempo, y se define  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ . Las condiciones de frontera se establecen de tal forma que para  $x = x_1$ , la variable  $y$  toma el valor  $y_1$ , y para  $x = x_2$ , se fija  $y = y_2$ . Es habitual parametrizar linealmente el espacio de funciones las posibles soluciones  $y(x)$  que satisfacen las condiciones de frontera. Para eso, se define:

$$y = y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x),$$

donde  $y(x, 0)$  representa el camino que minimiza  $J$  y satisface las condiciones de frontera. Bajo esta parametrización,  $J$  se convierte en una función de  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \int_1^2 f[y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x] dx.$$

y la búsqueda de los puntos estacionarios se reduce a minimizar  $J(\alpha)$ . Como  $y(x_1, 0) = y_1$  y  $y(x_2, 0) = y_2$ , se requiere que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , de modo que  $y(x, \alpha)$  satisfaga las condiciones de frontera. La condición de punto estacionario es:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

donde

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx. \quad (2.1)$$

En el segundo término del lado derecho, es posible intercambiar el orden de las derivadas; es decir,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dy}{dx} dx \quad (2.2)$$

Aplicando las derivadas sobre este factor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (y(x,0) + \alpha \eta) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} (y(x,0) + \alpha \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{dy(x,0)}{dx} + \alpha \frac{d\eta}{dx} \right] = \frac{d\eta}{dx}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right).$$

Así que, aplicando integración por partes, obtenemos en (2.2):

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Dado que, por las condiciones de frontera  $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) = 0$  en  $x_1 = x$  y  $x_2$ , el primer término evaluado en los extremos se anula. Sustituyendo en la expresión (2.1), llegamos a:

$$\frac{dJ}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

El lema fundamental del cálculo de variaciones establece lo siguiente: dada una función  $M(x)$ , si la convolución de  $M(x)$  con una función arbitraria  $\eta(x)$  es cero en un intervalo  $(x_1, x_2)$ , entonces debe cumplirse que  $M(x) = 0$ , para todo  $x$  en dicho intervalo. Es decir,

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0, \text{ para todo } \eta(x) \Rightarrow M(x) = 0.$$

Para demostrar este resultado, se utiliza el hecho de que  $\eta(x)$  es arbitraria. Supongamos  $\eta(x) = \delta(x - x_0)$ , donde  $\delta(x - x_0)$  es la función delta de Dirac, la cual se define mediante la propiedad:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0), \text{ si } x_0 \in (x_1, x_2).$$

Por hipótesis, la integral del producto  $M(x)\eta(x)$  es cero para toda  $\eta(x)$ , en particular para  $\eta(x) = \delta(x - x_0)$ . Por lo tanto,

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx M(x)\delta(x - x_0) = M(x_0) = 0.$$

Como  $x_0$  es arbitrario en el intervalo  $(x_1, x_2)$ , se concluye que  $M(x) = 0$  en todo el intervalo de integración. En nuestro caso, esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0,$$

lo cual corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange para un problema variacional arbitrario.

### Distancia más Corta entre Dos Puntos

Con el fin de afianzar conceptos, apliquemos el resultado de la Sección anterior a problemas concretos. El elemento longitud de arco  $ds$  de una curva sobre un plano está dado por  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ . Una pregunta clásica, cuya respuesta es bien conocida, es la siguiente: ¿cuál es el camino que pasa por los puntos dados,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , y que minimiza la longitud de arco? La longitud de arco entre estos dos puntos fijos está dada por la integral:

$$I = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (\dot{y})^2}.$$

Comparando con las expresiones que tenemos para el problema variacional, se tiene:

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}, \quad \text{donde } \dot{y} = \frac{dy}{dx}.$$

Las derivadas parciales de  $f$  son:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \frac{1}{\dot{y}^2} [1 + \dot{y}^2]^{-1/2} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

De este modo, la ecuación de Euler-Lagrange para este problema se escribe como:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

lo que implica que:

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C, \quad \text{constante.}$$

Despejando  $\dot{y}$  de esta expresión, se tiene:

$$\dot{y}^2 = C^2 (1 + \dot{y}^2) \Rightarrow (1 - C^2) \dot{y}^2 = C^2 \Rightarrow \dot{y} = \pm \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = a.$$

Integrando esta ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = a \Rightarrow y = ax + b,$$

lo cual corresponde al resultado esperado, una línea recta.

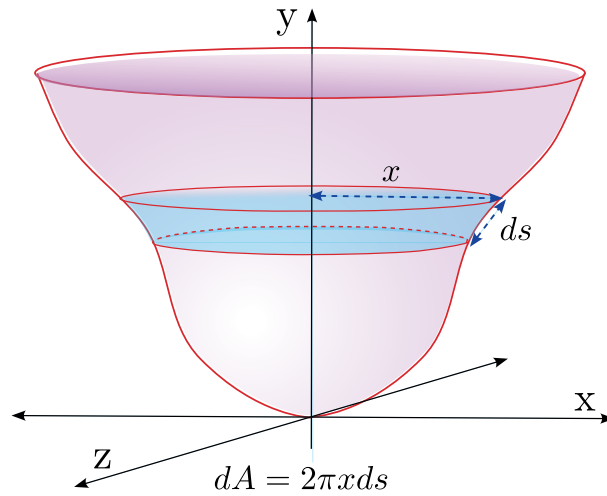


Figura 2.2: Elemento de Área Generada por una Curva que Rota.

### Superficie Mínima de Rotación

De forma similar al problema anterior, utilizando los métodos variacionales podemos calcular la superficie mínima de un sólido de revolución. De la Figura 2.2 se tiene que el elemento de área está dado por:

$$\Delta A = (ds)2\pi x \Rightarrow A = 2\pi \int x ds = 2\pi \int x \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi \int x \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx.$$

En este caso, el integrando de la funcional a minimizar está dado por:

$$f(y, \dot{y}, x) = x \sqrt{1 + (\dot{y})^2}, \quad \text{donde } \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

Las derivadas parciales de  $f$  son:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} = C.$$

Despejando  $\dot{y}$  de esta expresión, se tiene:

$$x^2 \dot{y}^2 = C^2 (1 + \dot{y}^2) \Rightarrow (x^2 - C^2) \dot{y}^2 = C^2 \Rightarrow \dot{y} = \pm \frac{C}{\sqrt{x^2 - C^2}}.$$

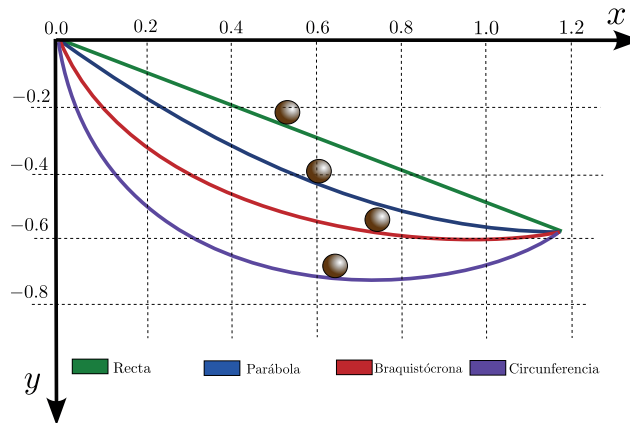


Figura 2.3: Braquistocrona Posibles Caminos entre los Puntos 1 y 2. Existe sólo un Camino que Corresponde al Mínimo del Tiempo.

Integrando esta expresión, se obtiene finalmente :

$$\int dy = \pm \int \frac{C}{\sqrt{x^2 - C^2}} dx \Rightarrow y = \pm a \cosh^{-1} \left( \frac{x}{C} \right) + b,$$

la cual corresponde a la ecuación de la catenaria.

### El Problema de la Braquistocrona

Uno de los primeros problemas que requirió el uso del cálculo de variaciones fue planteado en 1696 por Johann Bernoulli. El problema consistía en determinar la trayectoria que minimiza el tiempo de descenso de una partícula entre dos puntos que no se encuentran alineados ni vertical ni horizontalmente, en presencia de un campo gravitacional constante.

En términos generales, el intervalo de tiempo  $dt$  necesario para recorrer un elemento de arco  $ds$  a una velocidad  $v$  está dado por:

$$dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow t = \int \frac{ds}{v}.$$

Para un sistema coordinado como el que se muestra en la Figura 2.3, la energía potencial esta dada por  $-mgy$ . Si el cuerpo parte del reposo desde la posición  $y_i = 0$ , al aplicar el principio de conservación de la energía se obtiene:

$$E = mgy_i = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}.$$

De esta forma, el tiempo está dado por:

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{1 + (\dot{y})^2}{2gy}}.$$

Resolver este problema y sus ecuaciones es un ejercicio.

## 2.1 Derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange del Principio de Hamilton

En este caso, se desea minimizar la acción  $S$ . El integrando corresponde al lagrangiano, es decir:  $f = L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ ,

$$\delta S = \delta \int_1^2 L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt.$$

utilizando el formalismo del cálculo de variaciones, se parametrizan las soluciones mediante un parámetro  $\alpha$  y una función  $\eta$ , de tal forma que la acción se convierte en una función de dicho parámetro,

$$\frac{dS}{d\alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dt,$$

donde

$$\int dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$$

reemplazando este resultado en (2.1)

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 d\alpha \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right), \quad \text{donde} \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha = \delta q_i.$$

y si los  $\delta q_i$  son linealmente independientes, se concluye que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## 2.2 Extensión del Principio de Hamilton a sistemas no holónomos - Multiplicadores de Lagrange

La forma final de las ecuaciones de Euler-Lagrange depende del hecho que las coordenadas generalizadas  $q_i$  son variables independientes, es decir, no hay ligaduras entre ellas. Sin embargo, en muchos problemas no es posible encontrar un conjunto de variables que satisfaga esta condición. Cuando las ligaduras son no-holonómicas pero pueden expresarse como ecuaciones de la forma:

$$f_\alpha(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

entonces podemos utilizar el formalismo de los multiplicadores de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento. Para esto, es necesario quitar las ligaduras de tal forma que:

$$\sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \neq 0, \quad (2.4)$$

donde los  $\lambda_\alpha$  son variables auxiliares que extienden el conjunto de coordenadas del espacio de configuración de  $q_1, \dots, q_n$  a  $q_1, \dots, q_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . En este contexto, las ligaduras van a ser consecuencia directa de las ecuaciones de movimiento.

Para este sistema extendido de variables, el lagrangiano modificado  $L'$  se define como la suma del lagrangiano original  $L$  y (2.4). Aplicando el principio de Hamilton al sistema extendido se tiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt = 0.$$

Este nuevo lagrangiano depende de:

$$L' = L' [q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dot{\lambda}_1, \dots, \dot{\lambda}_m, t] = L + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha.$$

El espacio de configuración ahora contiene  $n+m$  variables y  $n+m$  velocidades generalizadas. Si asumimos que este conjunto de variables es linealmente independiente, es posible obtener las ligaduras como ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_\beta} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \lambda_\beta} = 0 - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \lambda_\beta} f_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^m \delta_{\alpha\beta} f_\alpha = -f_\beta = 0,$$

donde  $f_\beta = 0$  es una ligadura, obtenida como una de las ecuaciones de movimiento. A partir de las ecuaciones de movimiento para las coordenadas iniciales  $q_i$ , tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ L + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha f_\alpha \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ L + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha f_\alpha \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dt} \left[ \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = 0 \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} + \lambda_\alpha \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right] - \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} \right]. \end{aligned}$$

Esta expresión puede escribirse de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k = 0,$$

de modo que el efecto de las ligaduras es equivalente al efecto de unas fuerzas generalizadas  $Q_k$ , definidas como:

$$Q_k = \sum \lambda_\alpha \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right] \right] - \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k}.$$

Dado que el término  $\lambda_\alpha f_\alpha$  forma parte del lagrangiano extendido, este debe tener unidades de energía. Cuando la ligadura  $f_\alpha$  tiene dimensiones de longitud, el multiplicador de Lagrange  $\lambda_\alpha$  debe tener unidades de fuerza. Así, los multiplicadores pueden interpretarse como las fuerzas necesarias para implementar la ligadura.

Consideremos el ejemplo:

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - V(x, y, z)$$

con la ligadura no holónomica  $\dot{x}y + ky = 0$ . El lagrangiano extendido estará dado por:

$$L' = L + \lambda[\dot{x}y + ky].$$

Calculando las derivadas respecto a  $\dot{x}$  y  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + \lambda y \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} + \lambda \dot{y} + \dot{\lambda} y \\ \frac{\partial L'}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}.\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos la ecuación para  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L'}{\partial x} = m\ddot{x} + \lambda \dot{y} + \dot{\lambda} y + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Procedemos de forma similar para la coordenada  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} + \lambda \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} \right] &= m\ddot{y} + \dot{\lambda} \dot{x} + \lambda \ddot{x} \\ \frac{\partial L'}{\partial y} &= \lambda k - \frac{\partial V}{\partial y}.\end{aligned}$$

La ecuación de Euler-Lagrange en  $y$  es entonces:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L'}{\partial y} = m\ddot{y} + \dot{\lambda} \dot{x} + \lambda \ddot{x} - \lambda k + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

La ecuación en  $z$ :

$$m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Todo esto se debe resolver junto a la ecuación de la ligadura:

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}y + ky = 0.$$

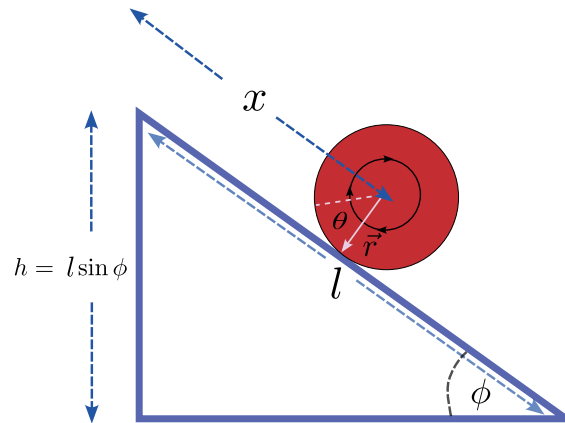


Figura 2.4: Cilindro Sólido Rodando por un Plano Inclinado.

### 2.2.1 Cilindro en un Plano Inclinado

Analicemos el caso de un cilindro que rueda sobre un plano inclinado. Este problema es bien conocido del primer curso de mecánica, y por esto es útil para comprender diversos aspectos del formalismo de los Multiplicadores de Lagrange.

Como se observa en la Figura 2.4, si la rampa tiene altura  $h$  y longitud  $l$ , se cumple que  $h = l \sin \phi$ . La distancia recorrida por el cilindro está dada por  $x = r\theta$ , donde  $\theta$  está en radianes. Es decir, la distancia  $x$  es igual al ángulo de rotación del cilindro multiplicado por su radio:

$$x = r\theta \quad \Rightarrow \quad dx = r d\theta.$$

La energía cinética es la suma de la energía respecto a un sistema de referencia del centro de masa y la energía de traslación. La energía potencial es la asociada a la fuerza de la gravedad en la superficie terrestre. Así las energías del sistema son:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \quad \text{con } \omega = \dot{\theta}, \quad I = Mr^2$$

$$V = Mg(l - x) \sin \phi.$$

De la relación  $x = r\theta$ , se deduce que  $\dot{x} = r\dot{\theta}$ . Este problema puede resolverse fácilmente utilizando esta relación; sin embargo, en este caso esta condición se introducirá como una ligadura, es decir, mediante un término de la forma  $\lambda(\dot{x} - r\dot{\theta})$ . Teniendo en cuenta estas consideraciones, el lagrangiano está dado por

$$L' = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \sin \phi + \lambda(r\dot{\theta} - \dot{x}).$$

Las derivadas parciales de  $L'$  están dadas por

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} - \lambda, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Mr^2}{2} \dot{\theta} + \lambda r, \quad \frac{\partial L'}{\partial x} = Mg \sin \phi.$$

Remplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L'}{\partial x} = M\ddot{x} - \dot{\lambda} - Mg \sin \phi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

De esta última ecuación se tiene que:

$$\frac{Mr^2\ddot{\theta}}{2} + \dot{\lambda}r = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = -\frac{M}{2}r\ddot{\theta} = -\frac{M}{2}\ddot{x}.$$

Recordemos que podemos utilizar la ligadura  $r\dot{\theta} = \dot{x}$ , ya que esta se obtiene de la derivada parcial del lagrangiano respecto a  $\lambda$ . Remplazando  $\dot{\lambda}$  en la primera ecuación:

$$M\ddot{x} - \left[-\frac{M\ddot{x}}{2}\right] - Mg \sin \phi = 0, \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \phi.$$

### 2.3 Simetrías y Cantidades Conservadas

En las ecuaciones de Euler-Lagrange, se acostumbra a definir el momento canónico  $p_{q_i}$  asociado a una coordenada generalizada  $q_i$ , como:  $p_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Si el lagrangiano no depende explícitamente de  $q_i$ , entonces, de la ecuación de Euler-Lagrange se tiene que:

$$\frac{dp_{q_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Es decir, el momento canónico  $p_{q_i}$  es una constante.

#### Conservación del Momento Lineal

Supongamos que  $\vec{r} = \vec{r}(q^j) = q^j \hat{n}_{q^j}$  (aquí no hay suma sobre j), es decir  $\vec{r}$  está en la dirección  $\hat{n}_{q^j}$  para cualquier  $q^j \in \mathbb{R}$ . En ese caso,

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial q^j \hat{n}_{q^j}}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{n}_{q^j},$$

que es exactamente la magnitud de la fuerza en la dirección  $\hat{n}_{q^j}$ . Aquí  $q^j$  tiene dimensiones de  $\vec{r}$ . Así por ejemplo:

$$\begin{aligned} p_{q_j} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (\text{aquí utilizamos (1.27)}) \\ &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \hat{n} = \hat{n}_{q^j} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \hat{n}_{q^j} \cdot \vec{P}_{\text{Total}} \end{aligned}$$

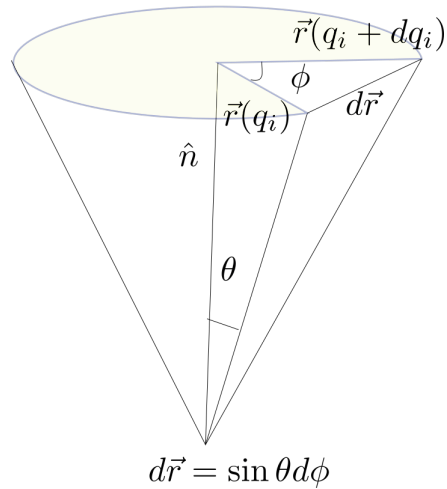


Figura 2.5: Variación del Vector Posición bajo un Incremento de las Variables Generalizadas  $dq_i$ .

donde  $P_{\text{Total}}$  es el momento lineal del sistema. Si además tenemos que

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j = 0,$$

entonces de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \hat{n}_{q_j} \cdot \vec{P}_{\text{Total}} = \text{Constante}.$$

Es decir la componente del momento en la dirección  $\hat{n}_{q_j}$  se conserva.

### Conservación del Momento Angular

Podemos hacer un análisis similar al del caso lineal, pero aplicado a rotaciones. Supongamos que un vector  $\vec{r}_i$ , que forma un ángulo  $\theta$  con un vector vertical unitario  $\hat{n}$ , como se muestra en la Figura 2.5, es rotado alrededor de  $\hat{n}$  un ángulo infinitesimal  $d\phi$ .

La magnitud de la variación debida a esta rotación es igual a la longitud del arco descrito, así que  $|\vec{d}\vec{r}_i| = \text{longitud de arco} = \text{radio} \times \text{ángulo}$ , donde,  $\text{radio} = |\vec{r}_i \sin \theta|$ , por lo tanto:

$$|\vec{d}\vec{r}_i| = |\vec{r}_i| \sin \theta d\phi.$$

Ahora, consideremos el vector  $\hat{n} \times \vec{r}_i$ . La magnitud de este producto es:

$$|\hat{n} \times \vec{r}_i| = |\hat{n}| |\vec{r}_i| \sin \theta = |\vec{r}_i| \sin \theta$$

Este vector tiene la misma magnitud (al multiplicarlo por  $d\phi$ ) que  $d\vec{r}_i$  y están en la misma dirección, por lo que podemos escribir:

$$d\vec{r}_i = d\phi (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

Si  $d\phi = dq_j$ , entonces

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.5)$$

Podemos incrementar  $\phi$ , es decir  $q_j$ , manteniendo constante la magnitud del vector posición  $r_i = |\vec{r}_i|$  y el ángulo con la normal,  $\theta$ . En ese caso, la variación del vector posición es:

$$d\vec{r}_i = d\phi (\hat{n} \times \vec{r}_i) = d\phi r_i (\hat{n} \times \hat{r}_i) = d\phi r_i \sin \theta \hat{\phi}$$

En general, tenemos que:

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial r_i} dr_i.$$

Si  $\theta$  y  $r_i$  son constantes, entonces:

$$\frac{d\vec{r}_i}{d\phi} = \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} \right)_{r_i, \theta} = \hat{n} \times \vec{r}_i = \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)_{r_i, \theta}.$$

Reemplazando este resultado en (2.5):

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot [\hat{n} \times \vec{r}_i].$$

Utilizando la propiedad del producto triple escalar:

$$A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B),$$

podemos calcular la fuerza generalizada:

$$Q_j = \sum_i \hat{n} \cdot [\vec{r}_i \times \vec{F}] = \hat{n} \cdot \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}] = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{N}_i = \hat{n} \cdot \vec{N} = \hat{n} \cdot \vec{\tau}_{total}.$$

Vemos que, en este caso, la fuerza generalizada es la componente del torque total en la dirección  $\hat{n}$ .

De forma similar, podemos calcular el momento canónico conjugado:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \hat{n} \cdot [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] = \hat{n} \cdot \left[ \sum_i \vec{r}_i \times \underbrace{m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\vec{P}_i} \right] = \hat{n} \cdot \vec{L}_{total}. \end{aligned}$$

Es decir, el momento canónico conjugado es la componente del momento angular total en la dirección  $\hat{n}$ . Si el lagrangiano no depende de  $q_j = \phi$ , entonces  $p_j$  es una constante de movimiento.

### Conservación de la Energía

Hasta el momento, hemos visto que, si el lagrangiano no depende explícitamente de la variable canónica, entonces su momento canónico conjugado es una cantidad conservada. Exactamente lo mismo ocurre con el tiempo  $t$ : cuando esta variable no aparece en el lagrangiano, la energía se conserva. Desde este punto de vista, la energía puede interpretarse como el momento canónico conjugado del tiempo.

Consideremos la derivada total del lagrangiano respecto al tiempo:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.6)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right],$$

reemplazando en la ecuación (2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left[ \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Reescribiendo esta ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

$$h = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.8)$$

es decir, la derivada total de la cantidad  $h$ , que más adelante identificaremos con el hamiltoniano, es igual a la derivada parcial del lagrangiano respecto al tiempo.

Si  $L$  no depende explícitamente de  $t$ , entonces:

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

lo que implica que  $h$  es una cantidad conservada. Supongamos ahora que el lagrangiano depende cuadráticamente de las velocidades generalizadas

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t),$$

donde:

$$L_1 = \sum_i \dot{q}_i M_i^1, \quad L_2 = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{q}_j M_{ij} \dot{q}_j.$$

$L_1$  tiene la siguiente propiedad:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L_1 = \sum_k \dot{q}_k \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} M_i^1 = \sum_k \dot{q}_k \sum_i \delta_{ik} M_i^1 = \sum_k \dot{q}_k M_k^1 = L_1.$$

De forma similar, para  $L_2$

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L_2 &= \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{q}_j M_{ij} \dot{q}_j \\ &= \sum_k \dot{q}_k \left[ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \delta_{ik} M_{ij} \dot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{q}_i M_{ij} \delta_{jk} \right] \\ &= \sum_k \dot{q}_k \sum_j \frac{1}{2} M_{kj} \dot{q}_j + \sum_k \dot{q}_k \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}_i M_{ik} \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j = 2L_2. \end{aligned}$$

Aquí asumimos que la matriz  $M_{ij}$  es simétrica. Aplicando estas propiedades en la definición de  $h$ , tenemos:

$$\begin{aligned} h &= \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \\ &= \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} [L_0 + L_1 + L_2] - [L_0 + L_1 + L_2] \\ &= \cancel{L_1} + 2L_2 - [L_0 + \cancel{L_1} + L_2] = L_2 - L_0. \end{aligned}$$

Es decir, la función  $h$  no depende de los términos lineales en las velocidades generalizadas.

## 2.4 Teorema de Noether para variables discretas

El teorema de Noether (1918) relaciona las simetrías de un sistema físico con leyes de conservación. Aunque ampliamente tratado en teoría cuántica de campos, su versión en mecánica clásica merece una presentación clara y pedagógica [Mar06]. En este capítulo se demuestra el teorema imponiendo la invarianza del *accion* bajo transformaciones infinitesimales, incluyendo la conservación de la energía. Consideremos el Lagrangiano

$$L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

con coordenadas generalizadas  $q_i(t)$ . Sea la transformación infinitesimal

$$q_i(t) \mapsto q_i^\varepsilon(t) = q_i(t) + \varepsilon G_i(q, t) + O(\varepsilon^2),$$

donde  $G_i(q, t)$ , como veremos más adelante, estará asociado al generador de la transformación. Si esta transformación deja invariante el Lagrangiano, o lo que es equivalente, sólo cambia el Lagrangiano en una derivada total respecto al tiempo de la forma  $\frac{dF(q, t)}{dt}$ , entonces:

$$\delta L \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q^\varepsilon, \dot{q}^\varepsilon, t) = \frac{dF(q, t)}{dt}.$$

Donde

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \varepsilon G_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon \dot{G}_i.$$

Podemos reescribir el segundo término usando:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{G}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} G_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) G_i.$$

Therefore

$$\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} G_i \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) G_i.$$

De las ecuaciones de Euler–Lagrange tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

De tal forma que la ecuación (2.4) se puede escribir como:

$$\delta L - \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon G_i - F \right) = 0.$$

O lo que es igual

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon G_i - F = p_i \varepsilon G_i - F = \text{constante}.$$

Es decir, cualquier transformación sobre las coordenadas generalizadas que deje invariante el Lagrangiano, módulo una derivada total respecto al tiempo, implica una cantidad conservada.

### 2.4.1 Conservación del momento lineal

Para una partícula libre de masa  $m$ :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_i.$$

Bajo traslación  $q'_i = q_i + a_i$ , se tiene  $\delta q_i = a_i$ ,  $\delta \dot{q}_i = 0$ , y  $\delta L = 0 = \frac{d}{dt} F$  con  $F = \text{constante}$ . Entonces,

$$J = p_i a_i - F \implies p_i = \text{constante},$$

esto es, se conserva el momento lineal  $p_i$ .

### 2.4.2 Conservación del momento angular

Para una partícula en el plano:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2.$$

Bajo rotación infinitesimal  $\theta$ ,  $\delta x = \theta y$ ,  $\delta y = -\theta x$ ,  $\delta L = 0$ . Con  $F = \text{constante}$ ,

$$J = p_x \delta x + p_y \delta y - F \implies (xp_y - yp_x)\theta = \text{constante},$$

de donde se reconoce que el momento angular  $L_z = xp_y - yp_x$  es conservado.

## Problemas Capítulo 2

- P1: Geodésicas planas y equivalencia con partícula libre.** Demuestre que extremizar  $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  produce líneas rectas y relacione el funcional con el lagrangiano de una partícula libre en 2D reparametrizada.
- P2: Coordenadas cíclicas** Una partícula en potencial central  $V(r)$  tiene  $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$ . (i) Identifique la coordenada cíclica. (ii) Obtenga la constante asociada. (iii) Reduzca el problema a un Lagrangiano efectivo 1D y escriba la ecuación radial.
- P3: Invariancia de Galileo y momento lineal.** Para  $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$  con  $V$  invariante bajo traslaciones espaciales, use Noether para derivar la conservación del momento total de  $N$  partículas interactuantes por potencial  $V(\{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\})$ .
- P4: Partícula sobre círculo (multiplicador).** Una partícula de masa  $m$  está restringida a  $x^2 + y^2 = R^2$  y se mueve bajo gravedad  $V = mgy$ . Formule  $\mathcal{L} = L + \lambda(t)(x^2 + y^2 - R^2)$ , derive las ecuaciones y halle la fuerza de reacción (tensión) en función de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .
- P5: Cuenta en alambre prescrito.** Una partícula se desliza sin fricción sobre la curva  $y = f(x)$  en un plano vertical. Escriba el problema con un multiplicador de Lagrange imponiendo la restricción holónoma y obtenga la ecuación de Euler-Lagrange (E-L) reducida a una sola coordenada generalizada.
- P6: Disco rodando sin deslizar (versión holónoma).** En el caso de rodadura pura de un cilindro de radio  $R$  sobre una recta, imponga la restricción  $x_{CM} - R\phi = 0$  con multiplicador y obtenga las ecuaciones. Identifique la reacción de la ligadura.
- P7: Isoperimétrico simple.** Extremice  $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [y'^2 + \alpha y^2] dx$  sujeto a  $\int_{x_0}^{x_1} y dx = K$ . Deduzca la ecuación modificada de Euler-Lagrange y discuta las condiciones de contorno. (pista, agregue el término  $\int_{x_0}^{x_1} y dx$  a la acción que va a minimizar. Luego reemplace la ligadura en la ecuación diferencial para hallar  $\lambda$ .)
- P8: Braquistócrona con rozamiento lineal leve (aprox.).** Plantee la braquistócrona para partícula con fuerza de rozamiento  $-\gamma \dot{s}$  pequeña. Escriba el funcional de tiempo a primer orden en  $\gamma$  y obtenga la ecuación de Euler-Lagrange efectiva.
- P9: Simetría de escala aproximada.** Considere  $L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - kr^{-2}$  en 1D radial efectiva. Estudie la transformación de escala  $r \rightarrow \lambda r$ ,  $t \rightarrow \lambda^2 t$ . Determine si hay una corriente cuasi-conservada y bajo qué condiciones.

- P10: Traslaciones temporales con  $L$  no explícitamente dependiente de  $t$ .** Demuestre que  $E = \sum_i \dot{q}_i \partial L / \partial \dot{q}_i - L$  es constante y calcule  $E$  para un oscilador 2D anisótropo.
- P11: Centro de masa y coordenadas relativas (Noether).** Dos masas  $m_1, m_2$  interactúan con  $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ . Use la invariancia por traslación para separar el movimiento del centro de masa y mostrar conservación del momento total. Obtenga el Lagrangiano relativo.
- P12: Partícula con restricción móvil.** Un anillo de masa  $m$  se desliza sin fricción sobre una varilla rígida que rota con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje vertical. Emplee coordenada a lo largo de la varilla y multiplicador si lo requiere para incorporar la geometría; halle la integral de energía.
- P13: Extremos móviles en tiempo.** Para  $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$  con  $t_0, t_1$  fijos pero  $q(t_0), q(t_1)$  libres, derive las condiciones naturales en los extremos y aplíquelas al oscilador con  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$ .
- P14: Rodadura en plano inclinado (no-holónoma).** Un cilindro sólido de radio  $R$  rueda sin deslizar por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$ . Trate la ligadura  $\dot{x} - R\dot{\phi} = 0$  como no holónoma lineal en velocidades en el sentido de D'Alembert. Compare con el enfoque de multiplicadores y discuta diferencias.
- P15: Boosts de Galileo.** Para  $L = \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\})$ , considere  $\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_0 t$ . Discuta la corriente de Noether asociada (centro de masa) y derive el teorema del *centro de inercia*.
- P16: Noether con parámetro dependiente del tiempo.** Un oscilador 1D con  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$  sufre una transformación  $\delta x = \epsilon(t)x$ ,  $\delta t = 0$ . Obtenga la identidad de Noether (de tipo virial) y discuta su utilidad para integrales de movimiento.
- P17: Acción reparametrizada.** Estudie  $S = \int d\tau \left[ \frac{m}{2e} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right)^2 - eV(\mathbf{r}) \right]$  con campo auxiliar  $e(\tau) > 0$ . Varíe respecto de  $\mathbf{r}$  y  $e$  y muestre (i) reparametrización y (ii) cómo se recupera la acción estándar al fijar el *gauge*  $e = \text{const}$ .
- P18: Péndulo doble con varillas inextensibles.** Formule con multiplicadores las 4 ecuaciones (dos coordenadas angulares  $\theta_{1,2}$  y dos  $\lambda_{1,2}$  que imponen longitudes fijas). Identifique coordenadas cíclicas si existen y la energía conservada cuando  $V$  no depende de  $t$ .
- P19: Partícula en superficie general.** Para una superficie  $\Phi(x, y, z) = 0$ , considere  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) + \lambda\Phi(\mathbf{r})$ . (i) Obtenga la fuerza de reacción  $\mathbf{R} = -\lambda \nabla\Phi$ . (ii) Aplique al caso de un toro de radios  $(R, a)$  con gravedad uniforme.
- P20: Noether inverso (reconstrucción de simetría).** Dado un primer integral  $I(q, \dot{q}) = \sum_i a_i(q) \dot{q}_i$  lineal en las velocidades que se conserva para todas las trayectorias, muestre que existe una simetría continua que lo genera (bajo condiciones regulares). Aplique a la conservación de  $\theta$ -momento en potencial central.
- P21: Ligadura isoperimétrica en tiempo mínimo con velocidad dependiente de posición.** Un móvil se desplaza en un plano con rapidez  $v(\mathbf{r}) = v_0/(1 + \beta y^2)$ . Plantee y derive la ecuación de Euler-Lagrange para la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos, imponiendo una restricción isoperimétrica adicional sobre la longitud total recorrida.

### 3. Fuerzas Centrales.

Comprender cómo la luna se mantiene rotando alrededor de la Tierra, sin detenerse y sin nada que la sostenga, fue uno de los problemas que motivó el desarrollo del cálculo y de las leyes de la mecánica. En este capítulo, aplicaremos el formalismo lagrangiano al problema de dos cuerpos que interactúan por medio de una fuerza central. En el Capítulo Uno vimos que, para este tipo de fuerzas, el momento angular se conserva. Como veremos más adelante, esta conservación implica que los cuerpos rotarán en un plano perpendicular al momento angular del sistema, describiendo órbitas circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas, según la energía cinética del sistema.

Consideremos un sistema de dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , Figura 3.1, donde la única fuerza se debe a una fuerza central entre ambas, generada por un potencial que depende de la magnitud del vector diferencia de sus posiciones  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , o de la velocidad relativa  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$ , es decir,  $U = U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ . En este caso, el lagrangiano tiene la forma:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots).$$

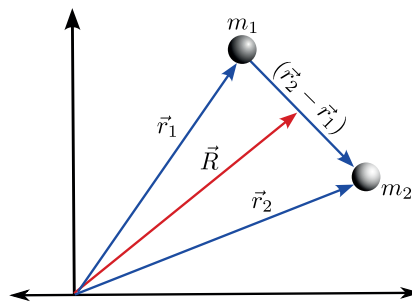


Figura 3.1: Centro de Masa  $\vec{R}$  y Posición Relativa de  $m_2$  Respecto a  $m_1$ , es decir,  $\vec{r}$ .

Como vimos en la ecuación (1.12), la energía cinética puede expresarse como la suma de la energía respecto al centro de masa y la energía de traslación del sistema:

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}'_i)^2, \quad (3.1)$$

donde  $M$  es la masa total del sistema y  $v'$  la velocidad respecto al centro de masa. En nuestro caso,  $M = m_1 + m_2$  y  $v_{cm} = \dot{\vec{R}}$ . La energía respecto al centro de masa es:

$$T' = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{r}}'_2)^2.$$

La posición del centro de masa, esta dado por la expresión:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

y dado que  $\vec{r}'_1$  es el vector posición relativo al centro de masa, tenemos que  $\vec{r}'_1 + \vec{R} = \vec{r}_1$ , de donde:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \left[ \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right] = \vec{r}_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right] - \frac{m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\vec{r}_1 [m_1 + m_2 - m_1]}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} [\vec{r}_1 - \vec{r}_2]. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos la relación entre  $\vec{r}'_1$  y  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  dada por:

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

De igual forma, se muestra que:

$$\vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Reemplazando estos valores en la energía cinética respecto al centro de masa  $T'$  obtenemos

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m_1 \left[ \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} (\dot{\vec{r}})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} (\dot{\vec{r}})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{[m_2 + m_1]}{(m_1 + m_2)} (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (\dot{\vec{r}})^2. \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.1), se tiene que:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{\vec{R}})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{\vec{r}})^2.$$

Definimos la masa reducida como:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]^{-1}.$$

Es decir,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Esto permite reducir el problema de dos cuerpos a un sistema de una sola masa  $\mu$  en movimiento debido a una fuerza central. Ya que se trata de un sistema con fuerzas centrales, el momento angular se conserva.

En coordenadas esféricas, podemos trabajar el problema haciendo  $\psi$  el ángulo polar y  $\theta$  el ángulo azimutal (cabe notar que, en algunas convenciones, estos se toman intercambiados). Gracias a la conservación del momento angular, se puede reducir el movimiento de la partícula al plano  $\psi = \pi/2$ , sin pérdida de generalidad. En este caso, el lagrangiano de una partícula se reduce al obtenido en coordenadas polares:

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - V(r).$$

donde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Como se mostró en el capítulo anterior:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$

El momento conjugado asociado a  $\theta$  es:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta},$$

así que el momento  $p_\theta$  se conserva, ya que  $\theta$  no aparece en el lagrangiano, es decir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_\theta = 0 \Rightarrow p_\theta = l,$$

donde la constante  $l$  representa la magnitud del momento angular del sistema.

Como se ve en la Figura 3.2, el área de un sector barrido es:

$$dA = \frac{r(r d\theta)}{2},$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{m r^2 \dot{\theta}}{2m} = l = \frac{p_\theta}{m}.$$

Si  $l$  es constante, significa que  $\frac{dA}{dt}$  es constante, lo cual corresponde a la segunda ley de Kepler: el área barrido por unidad de tiempo es siempre igual.

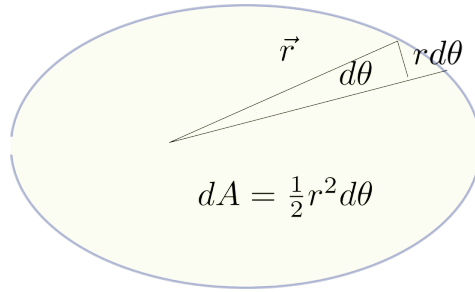


Figura 3.2: Área Barrida por un Cuerpo Orbitando.

La ecuación de movimiento para  $r$  es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left[ mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right] = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Usando que  $l = mr^2\dot{\theta}$  y  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ , esta expresión puede escribirse como:

$$m\ddot{r} - \frac{m^2 r^4}{m r^3} \dot{\theta}^2 = m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} = f(r).$$

Como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la cantidad  $h$ , ecuación (2.8), debe satisfacer  $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , es decir,  $h$  es una constante de movimiento:

$$h = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j q_j p_{\dot{q}_j} - L,$$

En este caso, utilizando  $p_\theta = l = mr^2\dot{\theta}$  y  $p_r = m\dot{r}$ , se obtiene:

$$h = \dot{\theta} p_\theta + \dot{r} p_r - \frac{1}{2} \left[ \frac{p_r^2}{m} + \frac{l^2}{m r^2} \right] + V(r),$$

aquí utilizamos:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} = \frac{l}{m r^2}, \quad r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{m^2 r^2}.$$

Con estas definiciones obtenemos:

$$\begin{aligned}
 h &= \left( \frac{l}{mr^2} \right) l + \left( \frac{p_r}{m} \right) p_r - \frac{1}{2} \left[ \frac{p_r^2}{m} + \frac{l^2}{mr^2} \right] + V(r) \\
 &= \frac{l^2}{mr^2} + \frac{p_r^2}{m} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \\
 &= \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m} + V(r) \\
 &= \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{2mr^2} + \frac{(m\dot{r})^2}{2m} + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = \text{Energía del sistema.}
 \end{aligned}$$

En el capítulo anterior demostramos que, si  $h$  no depende explícitamente del tiempo, es una constante de movimiento. Este es precisamente el caso para el lagrangiano de una fuerza central. A menudo es conveniente demostrar, a partir de las ecuaciones de movimiento, que se puede obtener una constante. Por ejemplo, para fuerzas centrales tenemos:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[ -\frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right],$$

ya que:

$$\frac{l^2}{mr^3} = \frac{d}{dr} \left( -\frac{l^2}{2m} r^{-2} \right).$$

Así, se tiene que:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left[ V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \right] = -\frac{d}{dr} g(r).$$

De igual forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \right) = m\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dt} = m\dot{r}\ddot{r}.$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \right) = m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{dg(r)}{dr} \dot{r} = -\frac{dg(r)}{dt},$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena, de modo que podemos escribir el lado izquierdo como una derivada respecto al tiempo:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + g(r) \right),$$

lo que implica que el término entre paréntesis es constante. Es decir:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + g(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \equiv E,$$

donde  $E$  es la energía total del sistema. Esta expresión permite obtener  $r$  como una función del tiempo al despejar  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}.$$

Podemos separar variables, escribiendo  $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\quad}} = dt$ . Por lo tanto, el tiempo se expresa como:

$$t = \int_{t_0}^t dt = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}. \quad (3.2)$$

La solución para  $r = r(t)$  se puede obtener invirtiendo esta ecuación, es decir  $t = t(r)$ . Para la coordenada angular  $\theta$ , utilizamos la expresión  $l = p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$ , lo que nos da:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{l}{mr^2} dt. \quad (3.3)$$

Dado que de (3.2) conocemos  $r = r(t)$ , podemos sustituir esta expresión en (3.3) para obtener  $\theta$ . Además, usando  $d\theta = \frac{l}{mr^2} dt$  y  $dt = \frac{dr}{\sqrt{\quad}}$ , se obtiene:

$$\theta(r) - \theta_0 = \int d\theta = \frac{l}{mr^2} \int dt = \frac{l}{mr^2} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}. \quad (3.4)$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ , se tiene:

$$\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr} r^{-1} = -r^{-2} \Rightarrow du = -r^{-2} dr = -\frac{dr}{r^2},$$

lo que permite reescribir la ecuación (3.4) como:

$$\theta = \theta_0 + \int_{u_0}^u \frac{l}{m} (-du) \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - V - \frac{l^2}{2m} u^2 \right]}}.$$

Este cambio de variable es útil para potenciales centrales de la forma  $V = ar^{(n+1)} = au^{-(n+1)}$ , lo que lleva a:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{m^2}{l^2} \left[ E - au^{-(n+1)} - \frac{l^2}{2m} u^2 \right]}}.$$

Los potenciales que decrecen con el inverso de la distancia son un caso particular, dado por <sup>1</sup>

$$V = -\frac{k}{r} = -kr^{-1},$$

es decir, con  $a = -k$  y  $n + 1 = -1$ , se obtiene:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}E + \frac{2m}{l^2}ku - u^2}},$$

definiendo:

$$\alpha = \frac{2m}{l^2}E, \quad \beta = \frac{2m}{l^2}k, \quad \gamma = -1.$$

Estas ecuaciones son de la forma:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u_1} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \theta_0 - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left[ -\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right]_{u_0}^u,$$

donde la variable  $q$  está dada por:

$$\begin{aligned} q &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \frac{4m^2k^2}{l^4} - 4 \left( \frac{2mE}{l^2} \right) (-1) \\ &= \frac{4m^2k^2}{l^4} \left[ 1 + \frac{l^4}{4m^2k^2} \frac{4(2mE)}{l^2} \right] \\ &= \left( \frac{2mk}{l^2} \right)^2 \left[ 1 + \frac{2El^2}{mk^2} \right]. \end{aligned}$$

De forma similar, la combinación lineal en el argumento del arco coseno es:

$$\begin{aligned} -(\beta + 2\gamma x) &= - \left[ \frac{2mk}{l^2} + 2(-1)\frac{1}{r} \right] \\ &= -\frac{2mk}{l^2} \left[ 1 + \frac{l^2}{2mk} \cdot \frac{-2}{r} \right] \\ &= -\frac{2mk}{l^2} \left[ 1 - \frac{l^2}{mkr} \right]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En la ley de gravitación de Newton,  $k = -G m_g M_g$ , donde el subíndice  $g$  indica masas gravitacionales. Estas se asumen iguales a las masas inerciales que aparecen en la segunda ley de Newton. Esta igualdad se conoce como *principio de equivalencia*, y establece que no es posible distinguir, mediante experimentos locales, entre un sistema acelerado y un sistema sometido a un campo gravitatorio que produce la misma aceleración.

Sustituyendo estos valores en el valor de la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 - \arccos \left[ \frac{-(\beta + 2\gamma x)}{\sqrt{q}} \right] \\ &= \theta_0 - \arccos \left[ -\frac{2mk}{l^2} \left[ 1 - \frac{l^2}{mkr} \right] \frac{1}{\left( \frac{2mk}{l^2} \right) \left[ 1 + \frac{2El^2}{mk^2} \right]^{1/2}} \right] \\ &= \theta_0 - \arccos \left[ \frac{\frac{l^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right]_{r_0}^r.\end{aligned}$$

Dado que la función coseno es par, se obtiene:

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{l^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}.$$

De este resultado despejamos  $\frac{1}{r}$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right].$$

Aquí, la constante de integración de la integral en  $u$  se ha absorbido en  $\theta_0$ .

En coordenadas polares, la ecuación de una cónica es:

$$\frac{1}{r} = C [1 + e \cos(\theta - \theta')],$$

donde uno de los focos coincide con el origen. Comparando esta expresión con nuestra ecuación, vemos que:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}.$$

De acuerdo con la geometría cartesiana, se deduce que:

$$\begin{aligned}e > 1, E > 0 &: \text{ Hipérbola,} \\ e = 1, E = 0 &: \text{ Parábola,} \\ e < 1, E < 0 &: \text{ Elipse,} \\ e = 0, E = -\frac{mk^2}{2l^2} &: \text{ Círculo.}\end{aligned}$$

Así, podemos concluir que las órbitas de un cuerpo alrededor del Sol son cónicas. En particular, si una órbita es cerrada, la cónica es un círculo o una elipse con el Sol en uno de sus focos. Esto corresponde exactamente a la primera ley de Kepler.

### 3.1 El movimiento en el tiempo en el problema de Kepler

Hasta ahora se ha demostrado que el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia conduce a trayectorias cónicas: elipses, parábolas o hipérbolas. Conocemos, por tanto, la ecuación de la órbita en forma polar, así como las constantes del movimiento. Sin embargo, resta aún un aspecto esencial: describir el **movimiento en función del tiempo**, es decir, determinar la relación entre la posición del cuerpo y el instante en que se encuentra en ella.

#### 3.1.1 Ecuación general del tiempo

En el problema de Kepler, la conservación del momento angular

$$l = mr^2\dot{\theta}, \quad (3.5)$$

permite expresar el elemento de tiempo diferencial como

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta. \quad (3.6)$$

La ecuación de la órbita se conoce como

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (3.7)$$

donde  $p = \frac{l^2}{mk}$  es el parámetro de la cónica y  $e$  su excentricidad. Sustituyendo  $r^2$  en (3.6), se obtiene la relación general entre el tiempo y el ángulo polar:

$$t - t_0 = \frac{mp^2}{l} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e \cos \theta')^2}. \quad (3.8)$$

Esta integral constituye el punto de partida para analizar el movimiento temporal en las diferentes clases de órbitas.

### Ejercicios Capítulo 3

**P1: Movimiento bajo una fuerza inversa al cuadrado.** Una partícula de masa  $m$  está sometida a una fuerza central  $F(r) = -k/r^2$ .

- Demuestre que el movimiento ocurre en un plano.
- Obtenga la ecuación de la órbita en coordenadas polares.

**P2: Potencial efectivo.** Para una fuerza  $F(r) = -k/r^2 + \beta/r^3$ , exprese el potencial efectivo y gráfiquelo. Determine las condiciones para la existencia de órbitas circulares estables.

**P3: Fuerza armónica central.** Considere  $F(r) = -kr$ .

- Deduzca la ecuación de la órbita.
- Muestre que el movimiento es elíptico y determine la relación entre los ejes de la elipse.

- P4: Órbitas parabólicas e hiperbólicas.** Para  $F(r) = -k/r^2$  con energía positiva, demuestre que la trayectoria es una hipérbola. Calcule el ángulo de dispersión.
- P5: Potenciales de la forma**  $F(r) = -k/r^n$ . Demuestre que las órbitas cerradas solo son posibles para  $n = 2$  o  $n = -1$ .
- P6: Conservación del momento angular.** Dada una partícula con momento angular  $L$ , pruebe que  $r^2\dot{\theta} = L/m$  y use esta relación para reescribir la ecuación radial en términos de  $u = 1/r$ .
- P7: Órbitas elípticas y energía.** Para una órbita elíptica bajo  $F(r) = -k/r^2$ , determine la relación entre  $a$ ,  $e$ ,  $L$  y la energía total  $E$ .
- P8: Perturbación cuadrática [Avanzado].** Considere  $V(r) = -k/r + \alpha/r^2$ , con  $\alpha \ll 1$ . Determine el corrimiento del perihelio por revolución.
- P9: Tercera ley de Kepler.** Muestre que el período orbital para  $F = -k/r^2$  es

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- P10: Potencial efectivo y regiones de movimiento.** Grafique  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  para  $V(r) = -k/r$  y  $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ . Discuta las regiones de movimiento permitido según la energía total.
- P11: Ecuación general de la órbita.** Derive la ecuación diferencial para  $u(\theta)$ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} F\left(\frac{1}{u}\right),$$

y resuélvala para los casos  $F(r) = -kr$  y  $F(r) = -k/r^2$ .

- P12: Precesión del perihelio.** Para  $F(r) = -\frac{k}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$ , determine la precesión del perihelio por revolución a primer orden en  $\alpha$ .
- P13: Dispersión por un centro repulsivo.** Para  $F(r) = +k/r^2$ , determine el ángulo de dispersión en función de la energía  $E$  y el parámetro de impacto  $b$ .
- P14: Relación entre parámetros orbitales.** Demuestre que para  $F = -k/r^2$ ,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}.$$

- P15: Condición de estabilidad de una órbita circular.** Para un potencial central  $V(r)$ , muestre que la órbita circular en  $r = r_0$  es estable si

$$\left. \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0.$$

- P16: Corrección relativista aproximada.** Para  $V(r) = -k/r - \beta/r^2$  con  $\beta \ll 1$ , determine la precesión de la órbita a primer orden en  $\beta$ .

- P17: Potencial atractivo generalizado.** Considere  $V(r) = -k/r + \frac{1}{2}\gamma r^2$ . Estudie la existencia y estabilidad de órbitas cerradas.
- P18: Dispersión de Rutherford.** Derive la relación entre el ángulo de dispersión  $\theta$  y el parámetro de impacto  $b$  para  $V(r) = k/r$ . Obtenga la sección diferencial de dispersión.
- P19: Movimiento con fricción radial.** Si una partícula se mueve bajo  $F(r) = -k/r^2 - \alpha\dot{r}$ , analice cómo varían el momento angular y la energía en el tiempo.

## 4. Cuerpo Rígido

Un sistema de  $N$  partículas puede tener, como máximo,  $3N$  grados de libertad. En el caso de un cuerpo rígido tenemos las ligaduras:

$$r_{i,j} = \left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| = C_{ij}. \quad (4.1)$$

Para  $N$  cuerpos, el primer cuerpo puede tener  $N - 1$  ecuaciones del tipo (4.1), el siguiente  $N - 2$  y así sucesivamente. De tal manera que se tienen

$$\sum_{k=1}^{N-1} N - k = \frac{N(N-1)}{2}$$

ligaduras. Sin embargo, para  $N > 7$ , se cumple que  $\frac{N(N-1)}{2} > 3N$ , y por lo tanto no es correcto contar únicamente ecuaciones, ya que la mayoría de ellas no son independientes. Cada cuerpo necesita tres ligaduras para permanecer fijo respecto a un sistema de referencia que se mueva con el sólido. Lo mismo ocurre con cada uno de los cuerpos que integran el sólido, así que estas ligaduras están en igual número que los posibles grados de libertad, con respecto al sistema de referencia en el sólido.

Este tipo de restricciones no puede restringir la orientación del objeto ni el movimiento del centro de masa. Por lo tanto, en un cuerpo rígido, basta con definir las posiciones de tres puntos  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  respecto a un sistema inercial para determinar completamente la orientación

$$r_{12} = C_{12}, \quad r_{23} = C_{23}, \quad r_{13} = C_{13}.$$

El número de grados de libertad de un cuerpo rígido está dado por los tres ángulos que pueden cambiar en una rotación respecto al centro de masa, más las tres coordenadas de centro de masa, en total seis grados de libertad.

Consideremos la orientación de un sistema de coordenadas respecto a otro sistema de coordenadas con el mismo origen:

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \rightarrow \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}',$$

esto puede pasar cuando, un cuerpo rota respecto a un punto dado y se desea ver la orientación de unos ejes sobre el cuerpo respecto a los ejes en un sistema inercial. Aquí utilizaremos los llamados cosenos directores:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{11} &= \hat{i}' \cdot \hat{i}, & \cos \theta_{22} &= \hat{j}' \cdot \hat{j}, & \cos \theta_{33} &= \hat{k}' \cdot \hat{k} \\ \cos \theta_{12} &= \hat{i}' \cdot \hat{j}, & \cos \theta_{21} &= \hat{j}' \cdot \hat{i}. \end{aligned}$$

Es conveniente denotar la base del sistema como  $(e_1, e_2, e_3) = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  y para el sistema primado como  $(e'_1, e'_2, e'_3) = (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ , entonces los cosenos directores se definen como:

$$\cos \theta_{ij} = e'_i \cdot e_j.$$

Podemos escribir a  $\hat{i}'$  como una combinación lineal de  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , donde los  $\cos \theta_{ij}$  corresponden a las componentes. Es decir, si:

$$\hat{i}' = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k},$$

entonces, multiplicando por el elemento de la base sobre el que deseamos proyectar, obtenemos:

$$\hat{i}' \cdot \hat{i} = (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}) \cdot \hat{i} = \alpha \hat{i} \cdot \hat{i} + 0 + 0 = \alpha = \cos \theta_{11}.$$

De igual forma, se obtiene  $\hat{i}' \cdot \hat{j} = \beta = \cos \theta_{12}$ . Este procedimiento, se generaliza para encontrar las bases en el sistema primado, de manera que:

$$\begin{aligned} \hat{i}' &= \cos \theta_{11} \hat{i} + \cos \theta_{12} \hat{j} + \cos \theta_{13} \hat{k}, \\ \hat{j}' &= \cos \theta_{21} \hat{i} + \cos \theta_{22} \hat{j} + \cos \theta_{23} \hat{k}, \\ \hat{k}' &= \cos \theta_{31} \hat{i} + \cos \theta_{32} \hat{j} + \cos \theta_{33} \hat{k}. \end{aligned}$$

La diferencia entre las posiciones de dos puntos es igual en todos los sistemas coordenados. En Matemáticas, esto se conoce como un objeto geométrico; en Física, se denomina un invariante, y en este caso en particular, un invariante de Galileo. Si consideramos la diferencia entre el origen y la posición de un punto, esta distancia no cambia bajo rotaciones alrededor de este origen. Por lo tanto, el vector posición será igual en ambos sistemas coordenados:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'.$$

multiplicando  $\vec{r}$  por  $\hat{i}'$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \hat{i}' &= x\hat{i} \cdot \hat{i}' + y\hat{j} \cdot \hat{i}' + z\hat{k} \cdot \hat{i}' = x'\hat{i}' \cdot \hat{i}' + 0 + 0 \\ \vec{r} \cdot \hat{i}' &= x \cos \theta_{11} + y \cos \theta_{12} + z \cos \theta_{13} = x'. \end{aligned}$$

Este procedimiento permite encontrar las componentes de los vectores en el sistema primado. De forma similar, se obtienen  $y'$  y  $z'$ :

$$\begin{aligned}y' &= \vec{r} \cdot \hat{j}' = \cos \theta_{21}x + \cos \theta_{22}y + \cos \theta_{23}z, \\z' &= \vec{r} \cdot \hat{k}' = \cos \theta_{31}x + \cos \theta_{32}y + \cos \theta_{33}z.\end{aligned}$$

Para muchas aplicaciones resulta útil escribir este resultado en términos matriciales. Si definimos la matriz de rotación  $R$  como:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix},$$

entonces las componentes del vector posición y las bases transforman de manera idéntica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}.$$

Esto también se cumple para otros vectores que se obtienen del vector posición, ya sean derivadas, como la velocidad y la aceleración, o productos de cantidades escalares con estos vectores, por ejemplo, el momento lineal o el flujo de carga. Diremos que las componentes contravariantes de un vector transforman de la misma forma que las coordenadas. Si un vector dado

$$\vec{G} = G_x \hat{i} + G_y \hat{j} + G_z \hat{k},$$

representa una cantidad Física y es la misma en cualquier sistema de referencia, es decir, es un objeto geométrico, debe satisfacer que:

$$\vec{G}' = G'_x \hat{i}' + G'_y \hat{j}' + G'_z \hat{k}' = G_x \hat{i} + G_y \hat{j} + G_z \hat{k} = \vec{G}.$$

Sin embargo, aunque las componentes y las bases si rotan,  $G$  permanece invariante,

$$\vec{G}' = R\vec{G}, \quad e' = Re,$$

donde  $e$  es la base. En tres dimensiones, la métrica es la identidad (para espacios planos), aunque en general estas propiedades dependen de la métrica  $g_{ij}$

$$g_{ij} = e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}.$$

## 4.1 Operaciones Algebraicas en Notación Indicial

En muchas aplicaciones en Física Teórica, resulta muy útil expresar productos matriciales y, en general, tensoriales en términos de índices. Para comprender esta notación, consideremos el producto de un vector de dos componentes por una matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Esto es equivalente a:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j.$$

De igual forma,

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j.$$

Por lo tanto,

$$x'_1 = \sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j, \quad x'_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j,$$

lo que se puede resumir como

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j.$$

#### 4.1.1 Propiedades de las Matrices

En esta Sección, resulta conveniente introducir la convención de suma de Einstein: *Si hay dos índices repetidos, entonces hay una suma sobre ellos.* Por ejemplo:

1.  $\sum_i x_i^2 = \sum x_i x_i \equiv x_i x_i,$
2.  $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \equiv a_{ij} x_j.$

Supongamos que el vector posición se transforma por la matriz  $B$ , es decir,  $\vec{r}' = B\vec{r}$ . Si escribimos este producto en términos de las componentes de la matriz  $B$ , es decir  $b_{ij}$ , y de las componentes del vector  $x_j$ , obtenemos:

$$x'_k = b_{kj}x_j.$$

Si después multiplicamos nuevamente el vector  $\vec{r}'$  por medio de una matriz  $A$ , es decir,  $\vec{r}'' = A\vec{r}'$ , con componentes  $a_{ik}$ , se obtiene:

$$x''_i = a_{ik}x'_k = a_{ik}b_{kj}x_j = c_{ij}x_j,$$

donde  $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$ . La matriz resultante es el producto matricial de las dos matrices:

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj} = \sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

Este resultado es bien conocido en la forma matricial  $C = AB$ .

Aquí estableceremos otra convención importante: *para promover una expresión escrita en términos de las componentes de las matrices, con los índices explícitos, a un producto matricial, los índices deben ser consecutivos.*

Veamos el caso de 2 matrices  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Al multiplicarlas, se obtiene:

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^2 a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^2 a_{1k}b_{k2} \\ \sum_{k=1}^2 a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^2 a_{2k}b_{k2} \end{bmatrix} := a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

### Multiplicación de un Número Arbitrario de Matrices

Sea  $A, B, C$  matrices  $n \times n$  con elementos  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ . Entonces, el producto:

$$ABC \rightarrow a_{ij}b_{jk}c_{kl} = (ABC)_{il},$$

donde el elemento  $il$  de  $(ABC)_{il}$  está dado por:

$$(ABC)_{il} = \sum_{j,k} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

De forma general, para  $N$  matrices  $A, B, \dots, D$

$$(AB \dots D)_{im} = a_{ij} \underbrace{b_{jk} \dots c_{kl}}_{\text{Todos los índices contraídos (se suman sobre ellos)}} d_{lm}$$

Todos los índices contraídos (se suman sobre ellos)

### 4.1.2 Transformaciones Ortogonales

Bajo rotaciones, la magnitud de un vector permanece invariante. Si representamos esta rotación por medio del producto matricial:

$$x'_i = a_{ij}x_j,$$

el cuadrado de la magnitud debe ser igual en ambos sistemas de coordenadas:

$$x'_i x'_i = x_i x_i = x_l x_l$$

donde los índices son mudos. Reemplazando  $x'_i = a_{ij}x_j$  en esta expresión obtenemos:

$$x'_i x'_i = (a_{ij}x_j)(a_{ik}x_k) = a_{ij}a_{ik}x_j x_k.$$

Imponiendo la condición de invarianza  $x'_i x'_i = x_k x_k$ , se tiene que:

$$x'_i x'_i = \underbrace{a_{ij} a_{ik}}_{(1)} x_j x_k = x_k x_k = \underbrace{x_j \delta_{jk}}_{(2)} x_k$$

comparando (1) y (2),

$$x_j (a_{ij} a_{ik}) x_k = x_j \delta_{jk} x_k$$

implica que:

$$\delta_{jk} = a_{ij} a_{ik} = a_{ji}^T a_{ik} := a^T a = \mathbb{1} \quad \text{En notación matricial.}$$

Una matriz que satisface esta condición, es decir,  $a^T a = \mathbb{1}$  se denomina ortogonal.

Un ejemplo bien conocido de esta tipo de matrices es la que representa una rotación de un ángulo  $\phi$  alrededor del eje z. Esto se consigue definiendo:

$$\cos \theta_{11} = \cos \phi = \cos \theta_{22}, \quad \cos \theta_{12} = \sin \phi, \quad \cos \theta_{21} = -\sin \phi, \quad \cos \theta_{33} = 1$$

y las demás componentes iguales a cero. Esta elección es equivalente a definir:

$$\theta_{12} = \phi - \pi/2, \quad \theta_{21} = \phi + \pi/2, \quad \theta_{33} = 0, \quad \theta_{11} = \theta_{22} = \phi$$

y los restantes  $\theta_{ij} = \pi/2$ , entonces:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Hay dos formas de interpretar la rotación: Asumiendo que son las bases las que rotan, como lo hicimos anteriormente, o considerando que es el vector el que rota, esta se llama transformación activa.

### Matrices Ortogonales dejan Invariante el Producto Punto

Las matrices ortogonales no sólo dejan invariante la magnitud de un vector, sino que también dejan invariante los ángulos entre dos vectores, o lo que es igual, dejan invariante el producto escalar:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{x}' \cdot \vec{y}'.$$

Un producto punto puede escribirse como el producto matricial de:

$$\vec{x}^T \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

donde  $\vec{x}^T$  es una matriz fila y  $\vec{y}$  es una matriz columna. Esta representación del producto escalar es muy conveniente para ver lo que sucede cuando estos vectores transforman a otro sistema de referencia.

Si los dos vectores transforman con una matriz ortogonal  $A$ , es decir  $\vec{x}' = A\vec{x}$  y  $\vec{y}' = A\vec{y}$ , entonces su producto escalar en el sistema primado estará dado por:

$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x}'^T \vec{y}' = (A\vec{x})^T (A\vec{y}) = \vec{x}^T A^T A \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}, \quad \text{si } A^T A = \mathbb{1}.$$

Este análisis se puede hacer de forma totalmente equivalente utilizando índices:

$$x'_i y'_i = (a_{ij} x_j)(a_{ik} y_k) = x_j a_{ij} a_{ik} y_k = x_j a_{ji}^T a_{ik} y_k = x_j \delta_{jk} y_k = x_j y_j.$$

Esta forma de manipular expresiones es muy útil para el cálculo tensorial, como veremos después.

### Invarianza de la Métrica

Supongamos que bajo una transformación ortogonal  $R$ , las bases transforman de la forma  $e' = R e$  o de forma equivalente  $e'_i = \sum_j R_{ij} e_j$ . Podemos ver que la cantidad

$$g_{ij} = e'_i \cdot e'_j,$$

mejor conocida como la métrica, es una cantidad invariante bajo transformaciones ortogonales

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= e'_i \cdot e'_j = \sum_k R_{ik} e_k \cdot \sum_l R_{jl} e_l = \sum_k \sum_l R_{ik} R_{jl} \underbrace{e_k \cdot e_l}_{\delta_{kl}} \\ &= \sum_k R_{ik} R_{jk} = \sum_k R_{ik} R_{kj}^T = \delta_{ij} = g_{ij}. \end{aligned}$$

Recordando que  $R_{ik} = \cos \theta_{ik}$ , entonces:

$$\sum_k R_{ik} R_{kj}^T = \delta_{ij} = \sum_k \cos \theta_{ik} \cos^T \theta_{kj} = \sum_k \cos \theta_{ik} \cos \theta_{jk} = \delta_{ij}.$$

### Transformación de un Tensor Bajo un Cambio de Coordenadas

Un vector transforma de la forma

$$x'_i = a_{ij} x_j.$$

Podemos tener objetos matemáticos que transforman de igual manera  $V'_i = a_{ij} V_j$ . En un producto de estos objetos, cada factor transforma de forma independiente. Consideremos el producto tensorial de tres vectores:

$$A'_i B'_m C'_n = a_{li} A_l a_{mj} B_j a_{nk} C_k = a_{li} a_{mj} a_{nk} A_l B_j C_k.$$

Este resultado se puede generalizar para un objeto matemático con tres índices:

$$T'_{lmn} = a_{li} a_{mj} a_{nk} T_{ijk}.$$

De hecho se puede generalizar para objetos con un número arbitrario  $n$  de índices:

$$T'_{lm\dots n} = a_{li} a_{mj} \dots a_{nk} T_{ij\dots k}.$$

Cada índice transforma con un  $a$ . Un objeto con  $n$  índices, se denomina un tensor de rango  $n$ .

Un ejemplo muy útil, es el caso de una matriz que corresponde a un tensor de rango 2, sea  $B = b_{ij}$  las componentes de una matriz cuyos índices transforman con la matriz  $A = a_{ij}$ , entonces:

$$b'_{nm} = a_{ni} a_{mj} b_{ij} = a_{ni} b_{ij} a^T_{jm} := A B A^T = B'.$$

Es decir, recuperamos la forma bien conocida de como transforma una matriz. En esta expresión, el símbolo " := " no significa igualdad, debe leerse como una equivalencia.

### Determinantes

Los determinantes son esenciales para el estudio de algunas propiedades de las matrices ortogonales. Una propiedad importante es que el determinante de un producto es el producto de los determinantes,

$$\det |AB| = (\det A) \times (\det B).$$

Otra propiedad útil es que el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz transpuesta,

$$\det A^T = \det A.$$

Con el tensor de Levi-Civita se puede dar la expresión más general para el determinante de una matriz en  $n$  dimensiones:

$$\det A = \epsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Por ejemplo, si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , una matriz  $2 \times 2$ , de acuerdo con la formula anterior, su determinante está dado por:

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{i_1 i_2} a_{1i_1} a_{2i_2} \\ &= \epsilon_{11}^0 a_{11} a_{21} + \epsilon_{12}^1 a_{11} a_{22} + \epsilon_{21}^{-1} a_{12} a_{21} + \epsilon_{22}^0 a_{12} a_{22} \\ &= [a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}], \end{aligned}$$

que corresponde a la expresión usual del determinante. Otra expresión útil para manipular expresiones matemáticas es:

$$\det A = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} a_{\mu_1 \nu_1} a_{\mu_2 \nu_2} \dots a_{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}.$$

Esta expresión la utilizaremos cuando hablemos de vectores polares.

## Producto Cruz

Se puede definir el producto cruz como una función que asigna a dos vectores en  $\mathbb{R}^3$  un vector adicional en  $\mathbb{R}^3$ , es decir

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Si se impone la condición de que sea antisimétrico, sólo hay una posibilidad:

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k.$$

Esta definición corresponde a la definición tradicional de producto cruz.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \hat{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \hat{k}.$$

Por ejemplo, consideremos la primera componente

$$(x \times y)_1 = \epsilon_{1jk} x_j y_k = \epsilon_{123} x_2 y_3 + \epsilon_{132} x_3 y_2 + 0 + \dots = x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Aquí, los términos indicados por puntos suspensivos corresponden a aquellos con índices repetidos, que son nulos, por ejemplo,  $\epsilon_{113} = 0$ , y se utiliza la propiedad  $\epsilon_{132} = -\epsilon_{123} = -1$ .

## 4.2 Ángulos de Euler

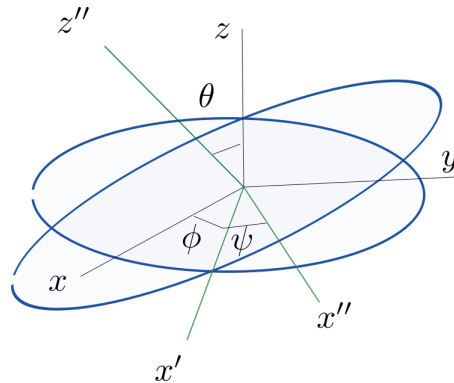


Figura 4.1: Ángulos de Euler.

La aplicación sucesiva de matrices ortogonales produce una matriz ortogonal. Es decir, si  $A$  y  $B$  son ortogonales, entonces  $C = AB$  también es ortogonal. En efecto, se tiene que:

$$CC^T = AB(AB)^T = AB B^T A^T = AA^T = \mathbb{1},$$

y por inducción, esto es válido para un producto arbitrario de matrices ortogonales.

Este resultado implica que el producto de varias matrices de rotación representa, en sí mismo, una rotación. En tres dimensiones, demostraremos que la aplicación sucesiva de varias rotaciones sobre un origen dado es equivalente a una única rotación respecto a un eje.

Un resultado igualmente importante, es que una rotación arbitraria se puede escribir mediante tres rotaciones alrededor de ejes no paralelos. Euler usó tres rotaciones  $B, C, D$ , que resultan muy convenientes para analizar el movimiento de giróscopos. Denotaremos como  $A$  el producto de las tres matrices correspondientes  $A = BCD$

$$D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rotación alrededor del eje } z$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{Rotación alrededor del eje } x$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rotación alrededor de un eje } z'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = (BCD)\vec{x}$$

### 4.3 Teorema de Euler

*El desplazamiento de un cuerpo rígido con uno de sus puntos fijo, es una rotación respecto a un eje.*

El teorema es equivalente a decir que hay un vector  $\vec{v}$ , alineado con el eje de rotación, que bajo la rotación general  $A$  no cambia, es decir,

$$\vec{v}' = A\vec{v} = \vec{v}. \quad (*)$$

Esta ecuación de autovalores  $\lambda$  donde uno de ellos es igual a 1. Una matriz  $A$  de dimensión  $3 \times 3$  tiene 3 eigenvalores y 3 eigenvectores

$$A\vec{x}_k = \lambda_k \vec{x}_k \quad (\star)$$

En nuestro caso debe haber un  $\lambda_k = 1$  para que se satisfaga (\*). A nivel de componentes

$$a_{ij}(x_k)_j = \lambda_k(x_k)_i.$$

En nuestro caso tenemos tres autovectores  $\{x_1, x_2, x_3\}$  con componentes  $(x_k)_j$ . Con los tres autovectores y sus componentes es posible definir una matriz  $X$  con componentes

$$\tilde{x}_{jk} \equiv (x_k)_j$$

utilizando esta definición en la ecuación de autovalores obtenemos

$$a_{ij}\tilde{x}_{jk} = \lambda_k\tilde{x}_{ik} = \tilde{x}_{ij}\delta_{jk}\lambda_k = \tilde{x}_{ij}\delta_{jk}\lambda_k.$$

Aquí los índices son consecutivos por tanto podemos promover esta ecuación a una ecuación matricial

$$A\tilde{X} = \tilde{X}\lambda,$$

donde la matriz  $\lambda$  es diagonal

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} := \delta_{jk}\lambda_k.$$

De esta expresión podemos despejar  $\lambda$  multiplicando por  $\tilde{X}^{-1}$

$$\tilde{X}^{-1}A\tilde{X} = \lambda.$$

Este resultado lo conocemos bien del Álgebra Lineal. Allí construíamos  $\tilde{X}$  con los autovectores de  $A$ . Para probar el teorema de Euler consideremos la identidad

$$(A - \mathbb{1})A^T = AA^T - A^T = \mathbb{1} - A^T.$$

Tomando el determinante a ambos lados

$$\det(A - \mathbb{1})\det(A^T) = \det(\mathbb{1} - A^T).$$

Para matrices ortogonales propias  $\det(A^T) = 1$  entonces

$$\det(A - \mathbb{1}) = \det(\mathbb{1} - A^T)$$

pero

$$\det(\mathbb{1} - A^T) = \det(\mathbb{1} - A^T)^T = \det(\mathbb{1}^T - A^{TT}) = \det(\mathbb{1} - A).$$

así obtenemos

$$\det(A - \mathbb{1}) = \det(\mathbb{1} - A). \quad (4.2)$$

Vemos que la diferencia entre los dos determinantes es un factor  $-1$  en las matrices. ¿Como cambia el determinante de una matriz cuando la multiplicamos por un número?. Consideremos por facilidad el caso de una matriz diagonal

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es importante tener claro que si la matriz es diagonalizable el determinante es el producto de los autovalores,  $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  así nuestro análisis aplicará para esta clase de operadores. Si multiplicamos  $B$  por un  $-1$  el determinante estará dado por

$$\det(-B) = (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \det B.$$

es decir

$$\det(-B) = (-1)^n \det B.$$

En nuestro caso  $n = 3$  y habrá un factor  $-1$ . Aplicando este resultado a la ecuación (4.2) tenemos

$$\begin{aligned} \det |A - \mathbb{1}| &= \det(\mathbb{1} - A) \\ &= \det [-(A - \mathbb{1})] \\ &= (-1)^3 \det(A - \mathbb{1}). \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \det(A - \mathbb{1}) &= -\det(A - \mathbb{1}) \quad \Rightarrow \quad \det(A - \mathbb{1}) + \det(A - \mathbb{1}) = 0, \\ \text{de esto tenemos} \quad \det(A - \mathbb{1}) &= 0. \end{aligned}$$

Si comparamos con la ecuación para los valores propios

$$\det |A - \lambda_k| = 0,$$

la expresión anterior significa que, existe un  $\lambda_k = 1$  tal que  $\det(A - \mathbb{1}) = 0$ , es decir, existe un eigenvector  $\vec{v} = (\vec{x}_k)$  tal que  $A\vec{v} = v$  y respecto a este vector se hace la rotación, ya que el determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante de la matriz, es decir

$$\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det(\mathbb{1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(A)\det(A^{-1}) = 1, \\ \text{, es decir,} \quad \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)}. \end{aligned}$$

De esta propiedad tenemos que si  $\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1$ . Estos resultados nos permiten decir que para una matriz ortogonal de dimensión  $3 \times 3$  con determinante 1 el producto de los tres autovalores debe ser 1, es decir,

$$\det(A) = \det \underbrace{(X \lambda X^{-1})}_A = (\det X)(\det \lambda)(\det X^{-1}) = \det \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

si uno de los autovalores es 1, por ejemplo  $\lambda_3 = 1$  entonces el producto de los dos autovalores restantes debe ser 1

$$\Rightarrow \det(A) = 1 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Para  $A$  real, en la ecuación de autovalores  $\det(A - \lambda_k \mathbb{1}) = 0$ , si  $\lambda_k$  es una solución el autovalor conjugado  $\lambda_k^*$  también es una solución

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda_k \mathbb{1}) &= 0 \\ \text{conjugando en ambos lados, } \det(A^* - \lambda_k^* \mathbb{1}) &= 0^* \\ \text{ya que } A \text{ es real, } \det(A - \lambda_k^* \mathbb{1}) &= 0. \end{aligned}$$

De este resultado podemos concluir que, si  $\lambda_1$  es un eigenvalor, entonces es segundo eigenvalor debe ser su conjugado, es decir,  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ , y además el producto debe ser igual a 1

$$\lambda_1 \lambda_1^* = |\lambda_1|^2 = 1.$$

Hemos demostrado este resultado para el caso de matrices de dimensión 3, sin embargo esto es válido en general. Consideremos el producto de dos eigenvectores

$$\begin{aligned} \vec{v}' \cdot \vec{v}'^* &= v'^T v'^* = (Av)^T (Av)^* \\ &= v^T A^T A^* v^*, \quad \text{pero } A^* = A \\ &= v^T \underbrace{A^T A}_{\mathbb{1}} v^* = v^T v^* = \vec{v} \cdot \vec{v}^*. \end{aligned}$$

Es decir  $\vec{v} \cdot \vec{v}^*$  es invariante. En esta misma expresión podemos tener en cuenta que  $v$  es un eigenvector entonces

$$\vec{v}' \cdot \vec{v}'^* = (Av)^T (Av)^* = (\lambda_k v)^T (\lambda_k v)^* = \lambda_k v^T \lambda_k^* v^* = \lambda_k \lambda_k^* v^T v^* = |\lambda_k|^2 \vec{v} \cdot \vec{v}^* = \vec{v} \cdot \vec{v}^*.$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{v}' \cdot \vec{v}'^* = \vec{v} \cdot \vec{v}^*$  demostramos nuestro resultado

$$|\lambda_k|^2 = 1,$$

que es válido para cualquier matriz ortogonal de dimensión arbitraria.

### 4.3.1 Trazas

La traza de una matriz se define como la suma de elementos en la diagonal  $\text{Tr } A = \sum_i A_{ii}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[AB] &= \text{Tr}[BA] \\ \text{Tr}[AB] &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_{i,j} (A_{ij} B_{ji}) \\ &= \sum_j \left( \sum_i B_{ji} A_{ij} \right) = \sum_j (BA)_{jj} \\ &= \text{Tr}[BA]. \end{aligned}$$

Traza es invariante bajo transformaciones del tipo  $A \rightarrow XAX^{-1}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[XAX^{-1}] &= \text{Tr}[(AX^{-1})X] \\ &= \text{Tr}[A(X^{-1}X)] = \text{Tr}[A].\end{aligned}$$

Si elegimos un sistema de coordenadas en el que el eje z coincida con el eje de rotación, entonces

$$A' = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \text{sen } \Phi & 0 \\ -\text{sen } \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este sistema de referencia

$$\text{Tr}[A'] = 1 + 2 \cos \Phi.$$

Si  $A'$  tiene como valores propios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_1^*$  y 1

$$A' = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1^* & \\ & & 1 \end{pmatrix} X^{-1},$$

la traza

$$\begin{aligned}\text{Tr}[A'] &= \text{Tr}[X \lambda X^{-1}] = \text{Tr}[\lambda] \\ &= \lambda_1 + \lambda_1^* + 1 = 1 + 2 \cos \Phi \\ \lambda_1 + \lambda_1^* &= 2 \cos \Phi.\end{aligned}$$

Es fácil ver que si

$$\lambda_1 = e^{i\Phi},$$

se consigue el mismo valor para la traza

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_1^* &= e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} \\ &= \cos \Phi + i \text{sen } \Phi + \cos \Phi - i \text{sen } \Phi = 2 \cos \Phi.\end{aligned}$$

De estas propiedades también tenemos que si  $A = BCD$ , es decir, las tres matrices para las rotaciones que definen los ángulos de Euler, entonces

$$A = \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - c_\theta s_\phi s_\psi & c_\psi s_\phi + c_\theta c_\phi s_\psi & s_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\phi - c_\theta s_\phi c_\psi & -s_\psi s_\phi + c_\theta c_\phi c_\psi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

En esta representación la traza de  $A$  es

$$\text{Tr } A = c_\psi c_\phi - c_\theta s_\phi s_\psi - s_\psi s_\phi + c_\theta c_\phi c_\psi + c_\theta \quad (4.4)$$

$$= (c_\psi c_\phi - s_\psi s_\phi) + c_\theta [c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi] + c_\theta \quad (4.5)$$

$$= \cos(\psi + \phi) + \cos\theta [\cos(\phi + \psi)] + \cos\theta \quad (4.6)$$

$$= (1 + \cos\theta) \cos(\psi + \phi) + \cos\theta \quad (4.7)$$

$$= 2 \frac{[1 + \cos\theta]}{2} \cos(\psi + \phi) + (1 + \cos\theta) - 1 \quad (4.8)$$

$$= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\psi + \phi) + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \quad (4.9)$$

$$= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(\psi + \phi) + 1] - 1 \quad (4.10)$$

$$= 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left[\frac{(\psi + \phi)}{2}\right] - 1. \quad (4.11)$$

De otro lado tenemos

$$1 + 2 \cos \Phi = 1 + 1 + 2 \cos \Phi - 1 \quad (4.12)$$

$$= 2(1 + \cos \Phi) - 1 = 4 \cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) - 1, \quad (**)$$

comparando la ecuación (4.4) y la ecuación (4.12) tenemos

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right).$$

Sacando la raíz y escogiendo el signo de tal forma que ambos lados sean iguales en el límite  $\Phi \rightarrow 0$  y  $(\phi, \psi, \theta) \rightarrow 0$  obtenemos

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right).$$

### 4.3.2 Rotaciones Infinitesimales

Cuando deseamos obtener expresiones para las velocidades angulares las rotaciones infinitesimales resultan muy útiles, estas rotaciones se definen como pequeñas variaciones del vector posición, o en general de cualquier vector, respecto a una configuración inicial, imponiendo que la magnitud del vector debe ser invariante Si  $x'_i = x_i + \epsilon_{ij} x_j$  con  $\epsilon_{ij} \ll 1$  ( $\epsilon_{ij}$  no es el tensor de Levi-Civita). Escribiendo  $x_i = x_j \delta_{ij} \Rightarrow$

$$x'_i = x_j \delta_{ij} + \epsilon_{ij} x_j = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) x_j.$$

A partir de esta definición para las rotaciones infinitesimales podemos obtener algunas propiedades, por ejemplo, dos transformaciones infinitesimales conmutan

$$(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)\vec{x} = (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2)\vec{x} = (1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_1)\vec{x}.$$

El inverso de  $(1 + \epsilon_1)$  es  $(1 - \epsilon_1)$

$$(1 + \epsilon_1)(1 - \epsilon_1)\vec{x} = (1 + \cancel{\epsilon_1} - \cancel{\epsilon_1} + \mathcal{O}(\epsilon^2))\vec{x} = (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))\vec{x} = \vec{x}.$$

Si  $A = 1 + \epsilon$  y  $A^T = 1^T + \epsilon^T = 1 + \epsilon^T$

$$AA^T = \mathbb{1} = (1 + \epsilon)(1 + \epsilon^T) = 1 + \epsilon + \epsilon^T + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbb{1}.$$

Para que esto se cumpla  $\epsilon + \epsilon^T = 0$

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ij}^T \Rightarrow \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$$

Los ángulos de Euler son

$$D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi \rightarrow d\phi} \begin{bmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procediendo de forma similar para la rotación  $C$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta \rightarrow d\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix} \\ \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

La forma de la matriz  $B$  corresponde a una rotación alrededor de un eje  $z$ ,

$$B = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & d\psi & 0 \\ -d\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El producto de las tres matrices es

$$A = BCD = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & d\phi + d\psi & 0 \\ -(d\phi + d\psi) & 0 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

El cambio en un vector debido a una rotación infinitesimal en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la Figura 4.2

$$\vec{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ},$$

en esta expresión  $\overrightarrow{ON} = (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$  y  $\overrightarrow{OV} = (\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n} = |\vec{r}| \cos \theta \vec{n}$ . Donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\vec{n}$ . De la figura  $\overrightarrow{NV}$  debe ser proporcional a  $\overrightarrow{NP} = \vec{r} - \overrightarrow{ON} = \vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}$ . Sabemos que

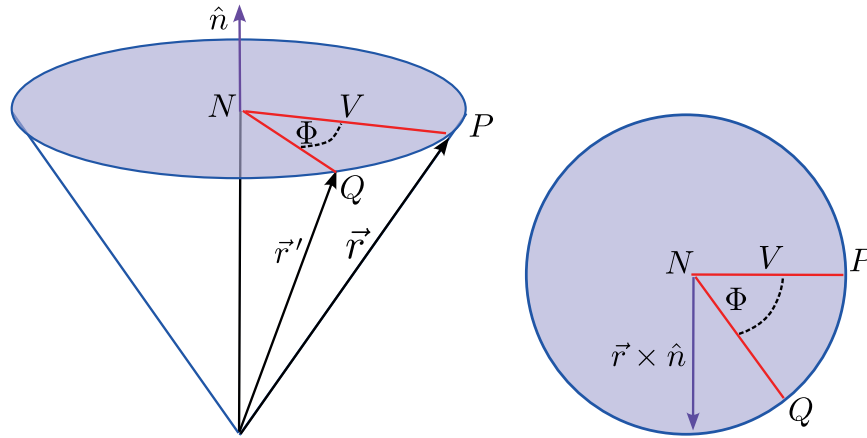


Figura 4.2: Incremento en el Vector Posición debido a una Rotación Infinitesimal en el Sentido de las Manecillas del Reloj.

$\|\overline{NP}\| = \|\overline{NQ}\|$  y que la magnitud de  $\|\overline{NV}\| = \|\overline{NQ}\| \cos \Phi = \|\overline{NP}\| \cos \Phi$ , así  $\|\overline{NV}\| = \|\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}\| \cos \Phi$ . El vector que da la magnitud correcta y la dirección es:

$$\overline{NV} = [\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}] \cos \Phi.$$

Solo nos falta  $\overline{VQ}$ . Sabemos que  $\overline{VQ}$  está en la misma dirección  $\vec{r} \times \vec{n}$ , pero tienen magnitudes diferentes. La magnitud de  $\|\vec{r} \times \vec{n}\| = \|\vec{r}\| \|\vec{n}\| \sin \theta$  es el radio de la circunferencia. Así  $\|\vec{r} \times \vec{n}\| = \|\overline{NQ}\|$ . La magnitud de  $\|\overline{VQ}\|$  es  $\|\overline{NQ}\| \sin \Phi = \|\vec{r} \times \vec{n}\| \sin \Phi$ . El vector que tiene la misma dirección y magnitud es:

$$\overline{VQ} = (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi.$$

Juntando los tres resultados obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \overline{ON} + \overline{NV} + \overline{VQ} \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{n} + [\vec{r} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{r})] \cos \Phi + (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Esta expresión puede reescribirse cómo

$$\vec{r}' = \vec{r} - (\vec{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{n}) + [\vec{r} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{r})] \cos \Phi + (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi \quad (4.14)$$

$$= \vec{r} + [\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{n} \cdot \vec{n}] (1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi \quad (4.15)$$

$$= \vec{r} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) (1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi. \quad (4.16)$$

### Vector de Velocidad Angular

Si un cuerpo gira alrededor de un eje  $\vec{n}$  definimos el vector

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n},$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular. Para una matriz de rotación

$$A_z = \begin{bmatrix} \cos \Omega_z & \text{sen} \Omega_z & 0 \\ -\text{sen} \Omega_z & \cos \Omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \approx \begin{bmatrix} 1 & \Omega_z & 0 \\ -\Omega_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_z & 0 \\ -\Omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De igual forma

$$A_x \cong \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_x \\ 0 & -\Omega_x & 0 \end{bmatrix} \\ A_y = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega_y \\ 0 & 0 & 0 \\ +\Omega_y & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  son pequeñas, suponiendo que son infinitesimales, las rotaciones permutan entre sí de tal forma que

$$\mathbb{1} + \epsilon = A_x A_y A_x = (\mathbb{1} + \epsilon_x)(\mathbb{1} + \epsilon_y)(\mathbb{1} + \epsilon_z).$$

En estas expresiones

$$\epsilon_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\Omega_x \\ 0 & -d\Omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d\Omega_y \\ 0 & 0 & 0 \\ d\Omega_y & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\Omega_z \\ 0 & -d\Omega_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando y conservando términos lineales en  $\epsilon$  obtenemos

$$\mathbb{1} + \epsilon = \mathbb{1} + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En esta última expresión hicimos el remplazo  $x, y, z \rightarrow 1, 2, 3$ . Definiendo el diferencial de la velocidad angular como

$$d\vec{\Omega} = d\Omega_1 \hat{i} + d\Omega_2 \hat{j} + d\Omega_3 \hat{k}.$$

La velocidad angular estará dada por

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left( \frac{d\Omega_1}{dt}, \frac{d\Omega_2}{dt}, \frac{d\Omega_3}{dt} \right) \\ = \dot{\Omega}_1 \hat{i} + \dot{\Omega}_2 \hat{j} + \dot{\Omega}_3 \hat{k}.$$

Ya vimos anteriormente que para los ángulos de Euler

$$A = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & d\phi + d\psi & 0 \\ -(d\phi + d\psi) & 0 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\Omega = d\theta\hat{i} + 0\hat{j} + (d\phi + d\psi)\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} = (1 + \epsilon)\vec{x} \\ &= \left[ \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ x_1' &= x_1 + x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 = x_1 + dx_1 \\ x_2' &= x_2 - x_1 d\Omega_3 + x_3 d\Omega_1 = x_2 + dx_2 \\ x_3' &= x_3 + x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1 = x_3 + dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1 \end{aligned} \quad (\star)$$

Esto se puede escribir de forma compacta como:

$$\begin{aligned} d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ d\Omega_1 & d\Omega_2 & d\Omega_3 \end{vmatrix} = \star \\ &= (x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2)\hat{i} + (x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3)\hat{j} + (x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1)\hat{k} \end{aligned}$$

A pesar de que se puede escribir como un vector,  $d\Omega = d\Omega_1\hat{i} + d\Omega_2\hat{j} + d\Omega_3\hat{k}$  es un vector polar. La única forma en que  $d\Omega'$  no genera inconsistencias es que  $d\Omega' = d\Omega$ . Es lo que llamamos un vector polar. Es importante recordar que  $d\Omega$  se definió como elementos de una matriz, es decir

$$\begin{aligned} d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega} &=: \epsilon_{ijk} x_j d\Omega_k \\ &= x_j [\epsilon_{ijk} d\Omega_k] \end{aligned}$$

$\epsilon_{ijk} d\Omega_k$  es una matriz con dos índices  $i, j$

Fila	Columna	
1	2	$\epsilon_{123} d\Omega_3 = d\Omega_3$
1	3	$\epsilon_{132} d\Omega_2 = -d\Omega_2$
2	3	$\epsilon_{231} d\Omega_1 = +d\Omega_1$

con estos elementos podemos saber como es la matriz, ya que  $\epsilon_{ijk}d\Omega_k$  es antisimétrica. Si  $M$  es antisimétrica, entonces

$$M_{ij} = -M_{ji} \quad \text{así que para } i = j$$

$$M_{ii} = -M_{ii} \Rightarrow 2M_{ii} = 0 \Rightarrow M_{ii} = 0$$

los elementos de la diagonal son cero. Basta con determinar los elementos a un lado de la diagonal porque los otros se obtienen por transposición

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}d\Omega_k \Rightarrow M_{ji} = -M_{ij}$$

$$\epsilon_{ijk}d\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \epsilon_{ij}$$

esta matriz la habíamos llamado anteriormente  $\epsilon_{ij}$  (no confundir con el Levi-Civita de dos dimensiones)

$$\vec{x}' = (\mathbb{1} + \epsilon)\vec{x}$$

## 4.4 Vectores Polares

Supongamos que bajo una transformación del sistema las coordenadas transforman con una matriz  $B$  de tal forma que  $\vec{x}' = B\vec{x}$ . En un tensor debemos transformar cada índice

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}d\Omega_k \rightarrow M'_{ij} = B_{il}B_{jn}\epsilon_{lnk}d\Omega_k$$

$$= B_{il}(\underbrace{\epsilon_{lnk}d\Omega_k}_{\epsilon_{ln}})B_{nj}^T$$

$$=: B\epsilon B^T = \epsilon_{ijr}d\Omega'_r.$$

En esta Sección vamos a demostrar que:

$$\begin{pmatrix} d\Omega'_1 \\ d\Omega'_2 \\ d\Omega'_3 \end{pmatrix} = B \begin{bmatrix} d\Omega_1 \\ d\Omega_2 \\ d\Omega_3 \end{bmatrix}.$$

Si  $B$  es ortogonal con determinante 1. Si se demuestra Ec. (4.4), el tensor  $d\Omega_k$  será como un vector de rango 1 para toda matriz  $B$  con determinante 1. De la expresión

$$M'_{ij} = B_{il}B_{jn}\epsilon_{lnk}d\Omega_k.$$

Podemos reescribir  $d\Omega_k = \delta_{km}d\Omega_m = \underbrace{B_{kr}^T B_{rm}}_{\delta_{km}}d\Omega_m$ . Reemplazando esto en  $M'_{ij}$

$$M'_{ij} = B_{il}B_{jn}\epsilon_{lnk} \underbrace{B_{rk} B_{rm}}_{(1)}d\Omega_m$$

$$(1) = \epsilon_{lnk}B_{il}B_{jn}B_{rk}.$$

Si  $(ijr) = (123)$  la expresión (1) corresponde a  $\det B$ . Si  $(ijr)$  es otra combinación, por ejemplo  $(213)$ , se deben reorganizar los tres factores  $B_{il} B_{jn} B_{rk}$  para que  $ijr \rightarrow 1, 2, 3$ , en ese caso el  $lnk$  ya no queda ordenado y hay que permutar los índices de  $\epsilon_{lnk}$ . En resumen tenemos la identidad.

$$\epsilon_{lnk} B_{il} B_{jn} B_{rk} = \det B \epsilon_{ijr}.$$

Remplazando  $\Rightarrow$  (1) en  $A'_{ij}$  obtenemos

$$M'_{ij} = \det B \epsilon_{ijr} \underbrace{B_{rm} d\Omega_m}_{d\Omega'_r} = (\det B) \epsilon_{ijr} d\Omega'_r = \epsilon_{ijr} d\Omega'_r.$$

Esta expresión demuestra que la transformación de un tensor, con la forma de  $M_{ij}$  es equivalente a transformar un vector  $d\Omega_k \rightarrow d\Omega'_r = B_{rm} d\Omega_m$  si  $\det B = 1$ . Por ejemplo, la

inversión  $B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ , tiene determinante  $(-1)^3 = -1$  y es un ejemplo de una transformación ortogonal con determinante  $-1$ .

## 4.5 Rotaciones de Vectores

La formula (4.13) se obtuvo para rotaciones en el mismo sentido de las manecillas del reloj. La ecuación correspondiente para rotaciones en sentido contrario está dada por

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} \cos \Phi + \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{r}) (1 - \cos \Phi) - (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi \\ &= \vec{r} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) (1 - \cos \Phi) + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (4.17)$$

a primer orden

$$\begin{aligned} &\text{Serie de Taylor del coseno} \\ 1 - \cos \Phi &= 1 - \left[ 1 - \frac{\Phi^2}{2!} + \dots \right] \\ &\approx 0 + \mathcal{O}(\Phi^2) \end{aligned}$$

$\cos \Phi \approx 1$  a primer orden y  $\sin \Phi \approx \Phi$ . Si  $\Phi \Rightarrow d\Phi$

$$\vec{r}' \cong \vec{r} + (\vec{n} \times \vec{r}) d\Phi$$

de esto vemos que

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + (\vec{n} \times \vec{r}) d\Phi = -(\vec{r} \times \vec{n}) d\Phi$$

recordemos que  $d\vec{r} = \vec{r} \times d\Omega$  para rotaciones positivas.

$$\begin{aligned} (d\vec{r})_i &= -\epsilon_{ijk} r_j n_k d\Phi = -(\epsilon_{ijk} n_k) r_j d\Phi \\ \frac{dx_i}{d\Phi} &= -N_{ij} r_j = -N_{ij} x_j, \quad N_{ij} = \epsilon_{ijk} n_k \end{aligned}$$

Si hacemos

$$d\vec{r} = \epsilon_{ij} r_j, \quad \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} n_k d\Phi = \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon = n_k (-\epsilon_{ijk}) d\Phi = n_k M_k d\Phi \quad \text{con } M_k = (-\epsilon_{ijk})$$

$$M_1 = (-\epsilon_{ij1}) = -\epsilon_{1ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = (-\epsilon_{ij2}) = +\epsilon_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = -\epsilon_{ij3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = [M_1, M_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_3$$

$$[M_1, M_2] = M_3$$

en general tendremos  $[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k$

## 4.6 Derivada de un Vector

Definimos un vector como un objeto físico invariante bajo rotaciones, es decir,

$$G = G_i \hat{e}_i = G_i R_{ij}^T R_{jk} \hat{e}_k = G'_j \hat{e}'_j$$

donde

$$G_i R_{ij}^T = R_{ji} G_i = G' \quad \text{y} \quad \hat{e}'_j = R_{jk} \hat{e}_k$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG'_j}{dt} \hat{e}'_j + G'_j \frac{d\hat{e}'_j}{dt} \tag{4.18}$$

Pero

$$\frac{d\hat{e}'_j}{dt} = \frac{d}{dt} R_{jl} \hat{e}_l = \hat{e}_l \frac{d}{dt} R_{jl} \tag{4.19}$$

En esta expresión es necesario conocer la derivada de la matriz de rotación.

### 4.6.1 Derivada de las componentes de un vector

De la expresión (4.17) obtenemos

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})(1 - \cos \Omega) + (\vec{n} \times \vec{r}) \operatorname{sen} \Omega.$$

Aquí asumimos la interpretación pasiva de las transformaciones, que coincide con la convención para los ángulos de Euler. En este caso, rotan las bases y el punto físico es invariante. Esto genera un signo menos respecto al ángulo de rotación, y por lo tanto coincide con las expresiones (4.16) que se obtuvieron rotando en sentido contrario a las manecillas del reloj. Podemos obtener de esta relación la expresión correspondiente con índices explícitos

$$x'_i = R_{ij} x_j = (\delta_{ij} + \epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m (1 - \cos \Omega) + \epsilon_{ikj} n_k \operatorname{sen} \Omega) x_j = R_{ij} x_j.$$

La derivada de la matriz de rotación es

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = + (\epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \operatorname{sen} \Omega + \epsilon_{ikj} n_k \cos \Omega) \dot{\Omega}.$$

De esta expresión tenemos

$$\frac{dx'_i}{dt} = R_{ij} \frac{dx_j}{dt} + \frac{dR_{ij}}{dt} x_j = R_{ij} \frac{dx_j}{dt} + (\epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \operatorname{sen} \Omega + \epsilon_{ikj} n_k \cos \Omega) \dot{\Omega} x_j.$$

Si asumimos  $\Omega = \omega t$ , con  $\omega$  constante, en el límite  $t \rightarrow 0$   $\frac{dR_{ij}}{dt} = \cos(0) \epsilon_{ikj} \omega n_k \equiv \epsilon_{ikj} \omega_k$ . Obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dx'_i}{dt} = R_{ij}(0) \frac{dx_j}{dt} + \epsilon_{ikj} n_k \omega x_j := \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{x},$$

donde  $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$

La segunda derivada de la base respecto al tiempo es

$$\frac{d^2 x'_i}{dt^2} = R_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + 2 \frac{dR_{ij}}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \frac{d^2 R_{ij}}{dt^2} x_j. \quad (4.20)$$

Sólo nos queda por calcular la segunda derivada de la matriz de rotación, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{ij}}{dt^2} &= (\epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \operatorname{sen} \Omega + \epsilon_{ikj} n_k \cos \Omega) \ddot{\Omega} \\ &\quad + (\epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \cos \Omega - \epsilon_{ikj} n_k \operatorname{sen} \Omega) \dot{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Si  $\Omega = \omega t$ ,

$$\frac{d^2 R_{ij}}{dt^2} = (\epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \cos \Omega - \epsilon_{ikj} n_k \operatorname{sen} \Omega) \omega^2.$$

En el límite  $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2 R_{ij}}{dt^2} = \epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \omega^2.$$

Remplazando este resultado en (4.20)

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= R_{ij}(0) \frac{d^2 x_j}{dt^2} + 2\epsilon_{ikj} n_k \omega \frac{dx_j}{dt} + \epsilon_{ikl} n_k \epsilon_{lmj} n_m \omega^2 x_j \\ &:= \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}).\end{aligned}\quad (4.21)$$

#### 4.6.2 Derivada de un vector como objeto geométrico

Podemos obtener este resultado para un vector arbitrario  $G = G_i e_i$ . Para esto necesitamos conocer la derivada de las bases respecto al tiempo en el límite cuando  $t \rightarrow 0$  y  $\Omega = \omega t$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\hat{e}'_j}{dt} = \hat{e}_l \frac{d}{dt} R_{jl} = \epsilon_{jkl} \omega_k \hat{e}_l. \quad (4.22)$$

Podemos utilizar este resultado para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} G'_j \frac{d\hat{e}'_j}{dt} = G'_j(0) \hat{e}_l \frac{d}{dt} R_{jl} = G'_j(0) \epsilon_{jkl} \omega_k \hat{e}_l = -\hat{e}_l \epsilon_{lkj} \omega_k G'_j(0) = -\hat{e}_l (\omega \times G'(0))_l$$

Reemplazando en (4.18) obtenemos

$$\frac{dG}{dt} = \left( \frac{dG'_j}{dt} \right) \hat{e}'_j - \left( \frac{d\Omega}{dt} \times G' \right)_k \hat{e}_k = \left( \frac{dG'_j}{dt} \right) \hat{e}'_j - (\omega \times G')_k \hat{e}_k.$$

O de forma equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dG'}{dt} \hat{e}'_j = \left( \frac{dG'_j}{dt} \right) \hat{e}_j + (\omega \times G'(0))_j \hat{e}_j = \left( \frac{dG'_j}{dt} \right) \hat{e}_j + (\omega \times G(0))_j \hat{e}_j. \quad (4.23)$$

De forma similar podemos obtener la derivada segunda de un objeto físico

$$\frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{d^2 G_i e_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [G_k R_{ki}^T R_{ij} e_j] \quad (4.24)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} [(R_{ik} G_k) \hat{e}'_i] = \frac{d^2}{dt^2} (G'_i \hat{e}'_i) \quad (4.25)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{dG'_i}{dt} \hat{e}'_i + G'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \right] \quad (4.26)$$

$$= \frac{d^2 G'_i}{dt^2} \hat{e}'_i + 2 \frac{dG'_i}{dt} \frac{d\hat{e}'_i}{dt} + G'_i \frac{d^2 \hat{e}'_i}{dt^2} \quad (4.27)$$

De forma similar

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} G'_j \frac{d^2 \hat{e}'_j}{dt^2} &= G'_j(0) \epsilon_{jkl} n_k \epsilon_{lmi} n_m \omega^2 \hat{e}_i \\ &= \hat{e}_i \epsilon_{iml} \omega_m \epsilon_{lkj} \omega_k G'_j(0) = \hat{e} \cdot (\omega \times (\omega \times G'(0))).\end{aligned}$$

Para  $\vec{\omega}$  constante alrededor de un eje  $z$ , donde  $G' = R_{ij}(t)G_j$  para  $t = 0$  (podemos elegir el origen de coordenadas en el  $t$  de interés)

$$G'_j(0) = G_j$$

y así

$$\left(\frac{d^2 G_j}{dt^2}\right)_{t=0} e_j = \left(\frac{d^2 G'_i}{dt^2}\right)_{t=0} \hat{e}'_i - 2 \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{G}'}{dt}\right) \Big|_{t=0} \hat{e}_j + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times G)]_j \hat{e}_j.$$

Teniendo en Cuenta (4.23)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 G'_i}{dt^2}\right)_{t=0} \hat{e}'_i &= \left(\frac{d^2 G_j}{dt^2}\right)_{t=0} \hat{e}_j + 2 \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{G}}{dt} + \vec{\omega} \times G\right)\right) \Big|_{t=0} \hat{e}_j - [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times G)]_j \hat{e}_j \\ &= \left(\frac{d^2 G_j}{dt^2}\right)_{t=0} \hat{e}_j + 2 \left(\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)\right) \Big|_{t=0} \hat{e}_j + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times G)]_j \hat{e}_j. \end{aligned}$$

Que se puede comparar con la relación correspondiente en el Goldstein [Gol80]

$$\frac{d^2 G_s}{dt^2} = \frac{d^2 G_r}{dt^2} + 2 \left(\vec{\omega} \times \frac{dG_r}{dt}\right) + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times G_r)].$$

Allí deducen heurísticamente ésta relación para  $\vec{V} = \frac{dr}{dt}$  partiendo de la relación

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \omega \times ,$$

donde el subíndice  $s$  es por *space* y el subíndice  $r$  por el sistema de referencia en rotación.

De esta forma si  $\vec{V}_s = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV_s}{dt}\right)_s &= \left[\frac{dV_s}{dt}\right]_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_s \\ &= \frac{d}{dt} [\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}]_r + \vec{\omega} \times [\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}] \\ &= \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r}_{2m(\omega \times V_r)} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}). \end{aligned}$$

De la segunda ley de Newton tenemos

$$\vec{F} = m\vec{a}_s = m \left[ a_r + 2m(\omega \times \vec{V}_r) + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right].$$

La aceleración en el sistema que rota y por lo tanto la fuerza efectiva en ese sistema de referencia es

$$F_{eff} = ma_r = \vec{F} - 2m(\omega \times V_r) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

El segundo término en el lado derecho es la fuerza Coriolis y el último término es la aceleración centrípeta.

## 4.7 Velocidad Angular en un Cuerpo Rígido

En el Primer Capítulo vimos que

$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T'(\phi, \theta, \phi),$$

donde  $T'$  es la energía respecto al centro de masa. En un cuerpo rígido el ángulo de rotación y por tanto la velocidad angular instantánea, es independiente del origen del sistema de coordenadas en el sólido. Para ver esto supongamos que hay dos orígenes del sistema de coordenadas en el cuerpo rígido, con coordenadas  $\vec{R}_1$  y  $\vec{R}_2$ . La posición del segundo origen respecto al primero es

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R} \quad (4.28)$$

$$\left( \frac{d\vec{R}_2}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \right)_S - \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S \quad (4.29)$$

$$= \left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \right)_S + \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_r + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}, \quad (4.30)$$

donde  $\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$  es la diferencia entre los dos orígenes,  $\left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_r$  es la derivada de  $\vec{R}$  respecto a unos ejes fijos en el cuerpo rígido, ya que  $\vec{R}$  es fijo su derivada respecto al tiempo es cero, y  $\omega_1$  es la velocidad angular respecto a  $O_1$ . De forma similar podemos escribir la posición del primer origen respecto al segundo, de tal forma que

$$\left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{R}_2}{dt} \right)_S - \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{R}_2}{dt} \right)_S - \vec{\omega}_2 \times \vec{R},$$

donde  $\vec{\omega}_2$  es la velocidad angular respecto a  $O_2$ . De esta expresión tenemos:

$$\left( \frac{d\vec{R}_1}{dt} \right)_S + \vec{\omega}_2 \times \vec{R} = \left( \frac{d\vec{R}_2}{dt} \right)_S, \quad (4.31)$$

Comparando (4.30) y (4.31), vemos que  $\vec{\omega}_2 \times \vec{R} = \vec{\omega}_1 \times \vec{R}$ , de forma equivalente

$$(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \times \vec{R} = 0,$$

así que  $\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 = c \vec{R}$ . Ya que los vectores  $\vec{R}_1$  y  $\vec{R}_2$  son arbitrarios,  $c = 0 \Rightarrow \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1$ .

## 4.8 Momento Angular de un Cuerpo Rígido

El momento angular respecto a un origen en el cuerpo es

$$L = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (\text{Convenio de suma sobre índices repetidos}).$$

En este caso el punto es estacionario respecto a algún sistema de referencia. Si fijamos  $\vec{r}_i$  al cuerpo, es decir,  $\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_r = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_s = 0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{v}_i.$$

Esto es muy natural, ya que si  $\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$  y  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$   $\theta = \omega_z t$ .

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r(-\sin(\omega_z t)\omega_z, \cos(\omega_z t)\omega_z, 0),$$

y

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega_z y, \omega_z x, 0) = \omega_z(-r \sin \theta, r \cos \theta, 0),$$

así

$$\begin{aligned} L &= m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = m_i(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= m_i[(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i]. \end{aligned}$$

De esta expresión la componente  $x$  del momento angular es

$$\begin{aligned} L_x &= m_i[r_i^2 \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)x_i] \\ &= m_i(r_i^2 - x_i^2)\omega_x - x_i y_i m_i \omega_y - x_i z_i m_i \omega_z. \end{aligned}$$

Definiendo

$$I_{xx} = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2), \quad I_{xy} = \sum_i -x_i y_i m_i, \quad I_{xz} = \sum_i -x_i z_i m_i.$$

Podemos generalizar estas definiciones

$$\begin{aligned} I_{kk} &= \sum_i m_i(r_i^2 - (x_k^i)^2) \\ I_{kl} &= -\sum_i m_i x_k^i x_l^i. \end{aligned}$$

Que puede resumirse en el tensor de inercia

$$I_{kl} = \sum_i m_i(r_i^2 \delta_{kl} - x_k^i x_l^i). \quad (4.32)$$

Por compontes el momento angular es

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned}$$

De forma matricial esta expresión es

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

En notación indicial

$$L_l = I_{x^l x^k} \omega_k \equiv I_{lk} \omega_k = L_l. \quad (4.33)$$

De igual forma para los elementos diagonales del tensor de inercia

$$I_{ll} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - (x_i^l)^2).$$

En el límite  $m_i \rightarrow dm_i$  y  $N \rightarrow \infty$

$$I_{ll} = \int dm (r^2 - (x^l)^2),$$

donde  $dm = \rho dV \Rightarrow$ . De igual forma para elementos fuera de la diagonal tenemos

$$I_{ll} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 - (x^l)^2) dV$$

$$I_{lk} = - \sum_i m_i x_i^l (x_i^k) \quad l \neq k.$$

En el límite al continuo

$$I = - \int dm x^l x^k = - \int \rho(\vec{x}) x^l x^k dV.$$

Podemos escribir ambos resultados como

$$I_{lk} = \int \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{lk} - x^l x^k) dV.$$

### 4.8.1 Tensor de Inercia y Momento de Inercia

Es posible escribir la energía cinética en términos del tensor de inercia y la velocidad angular, esto resulta muy útil para describir un sistema dinámico de un cuerpo rígido. Si

$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , con  $v_i = (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$ , entonces

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_i v_i \cdot v_i \\ &= \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ &= \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ &= \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{2} = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot (I \vec{\omega}) \\ &= \frac{\omega_i (I \vec{\omega})_i}{2} = \frac{\omega_i (I_{ij} \omega_j)}{2} = \frac{\omega_i I_{ij} \omega_j}{2} \\ T &= \frac{\omega_i I_{ij} \omega_j}{2} \equiv \frac{\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}}{2}. \end{aligned}$$

Si  $\vec{\omega} = \omega \vec{n} \Rightarrow$

$$T = \frac{\omega^2 (\vec{n} \cdot I \cdot \vec{n})}{2},$$

donde  $I_{kl} = \sum_i m_i [r_i^2 \delta_{kl} - x_i^k x_i^l]$ , entonces

$$n_k I_{kl} n_l = \sum_i m_i [r_i^2 n_k \delta_{kl} n_l - (n_k x_i^k) (n_l x_i^l)].$$

Como  $n_k \delta_{kl} n_l = n_k n_k = n_k^2 = \sum_k n_k^2 = 1$  y  $(n_k x_i^k) = (n_l x_i^l) = (n \cdot x) \Rightarrow$

$$n_k I_{kl} n_l = \sum_i m_i [r_i^2 - (\vec{n} \cdot \vec{x}_i)^2] = I.$$

El escalar  $I = n \cdot I \cdot n$  representa el momento de inercia respecto a un eje  $\vec{n}$ . No se debe confundir con  $I_{ij}$ . Así

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Donde

$$I = m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2].$$

Podemos reescribir el producto

$$\begin{aligned} (\vec{r}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \vec{n}) &= \vec{n} \cdot [(\vec{r}_i \times \vec{n}) \times \vec{r}_i] \\ &= -\vec{n} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{n})] = -\vec{n} \cdot [(\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{r} - (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{n}] \\ &= r_i^2 \hat{n} \cdot \hat{n} - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2 = (\vec{r}_i)^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2 \end{aligned}$$

así  $I = m_i (\vec{r}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \vec{n})$ . De esta expresión obtenemos

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

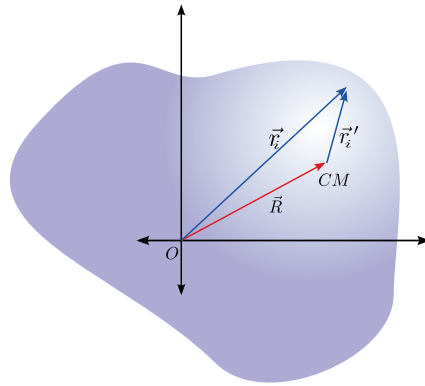


Figura 4.3: Teorema de Ejes Paralelos.

### Teorema de Ejes Paralelos

El teorema de ejes paralelos permite calcular el momento de inercia de un cuerpo respecto a cualquier eje si conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masa. En este caso, no se requiere que el eje de rotación sea perpendicular con el vector que va desde el origen al centro de masa. Como vimos anteriormente, si  $r_i = R + r_i'$

$$\begin{aligned} I &= m_i (\vec{r}_i \times \vec{n})^2 = m_i [(\vec{r}_i' + \vec{R}) \times \vec{n}]^2 \\ &= m_i [\vec{r}_i' \times n + \vec{R} \times \vec{n}]^2 = [\vec{r}_i' \times n + \vec{R} \times \vec{n}] \cdot [\vec{r}_i' \times n + \vec{R} \times \vec{n}] \\ &= m_i [(\vec{r}_i' \times n)^2 + (\vec{R} \times \vec{n})^2 + 2(\vec{r}_i' \times n) \cdot (\vec{R} \times \vec{n})]. \end{aligned}$$

el segundo término  $m_i (\vec{R} \times \vec{n})^2 = M (\vec{R} \times \vec{n})^2$  (Recuerde que  $m_i (\vec{R} \times \vec{n})^2 = \sum m_i (R \times n)^2 = (\sum m_i) (R \times n)^2$ ) y el último término

$$2(m_i \vec{r}_i' \times n) \cdot (\vec{R} \times n) = 2 \left( \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{M} \times n \right) \cdot (\vec{R} \times n) \times M,$$

donde  $\frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{M} = 0$ , ya que esta es la coordenada de centro de masa en unas coordenadas con origen en el CM. Así que

$$I = m_i (\vec{r}_i' \times n)^2 + M (\vec{R} \times \vec{n})^2.$$

Cuando  $\vec{R}$  es perpendicular a  $\vec{n}$  obtenemos un resultado bastante conocido  $\sum_i m_i r_i^2 + MR^2$ . Como vimos anteriormente

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \\ &= \frac{1}{2} m_i [r_i^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})^2] = \frac{1}{2} m_i [r_i^2 \omega_\alpha \omega_\alpha - (r_{i\alpha} \omega_\alpha)^2], \end{aligned}$$

donde  $(r_{i\alpha} \omega_\alpha)^2 = (r_{i\alpha} \omega_\alpha)(r_{i\beta} \omega_\beta)$  y  $\omega_\alpha \omega_\alpha = \omega_\alpha \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_i [r_i^2 \omega_\alpha \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta - \omega_\alpha (r_{i\alpha} r_{i\beta}) \omega_\beta] \\ &= \frac{1}{2} m_i \omega_\alpha [r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta}] \omega_\beta \\ &= \frac{1}{2} \omega_\alpha I_{\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}, \end{aligned}$$

donde  $I_{\alpha\beta} = m_i [r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta}]$ , donde podemos tomar el límite al continuo

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= \sum m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - r_{i\alpha} r_{i\beta}) \\ &= \int dm [\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta] \\ &= \int_V \rho(\vec{r}) [\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta] dV. \end{aligned}$$

Por ejemplo el momento de inercia de una caja de lado  $a$ . EL origen lo elegimos en la esquina

$$I = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho (\delta_{\alpha\beta} (x^2 + y^2 + z^2) - x_\alpha x_\beta) dx dy dz.$$

Para  $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho (\delta_{\alpha\beta} (x^2 + y^2 + z^2) - x^2) dx dy dz \\ &= \rho \int_0^a dz \int_0^a dy [y^2 + z^2] \int_0^a dx \\ &= \rho \int_0^a dz \int_0^a dx \int_0^a y^2 dy + \rho \int_0^a dy \int_0^a dx \int_0^a z^2 dz \\ &= \rho a^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^a + \rho a^2 \frac{z^3}{3} \Big|_0^a \\ &= a^2 \rho a^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = a^2 \frac{2}{3} \rho a^3 = \frac{2}{3} M a^2. \end{aligned}$$

Para elementos fuera de la diagonal  $I_{ij} = -\frac{1}{4}Ma^2$ ,  $i \neq j$ . De la expresión

$$\frac{\omega_i I_{ij} \omega_j}{2} = T,$$

se puede escribir en notación matricial

$$\begin{aligned} T &= \frac{\vec{\omega}^T I \vec{\omega}}{2} = \vec{\omega}^T S^T S I S^T S \vec{\omega} \\ &= (S \vec{\omega})^T (S I S^T) S \vec{\omega} = (S \vec{\omega})^T I_D (S \vec{\omega}) \\ &= (\vec{\omega}')^T I_D \vec{\omega}', \end{aligned}$$

donde  $S$  y  $S^T$  son matrices unitarias que diagonalizan  $I$ . En esta nueva base

$$\begin{aligned} T &= \vec{\omega}'^T I_D \vec{\omega}' \\ &= \frac{1}{2} (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z) \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1'^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3'^2, \end{aligned}$$

donde  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , los valores propios de  $I$ , se denominan momentos principales del tensor de inercia, y la base donde  $I$  es la diagonal debe coincidir con los ejes de simetría del cuerpo.

### 4.8.2 Ecuaciones de Euler

En el Primer Capítulo obtuvimos de la segunda ley de Newton una ecuación para el momento angular. Cuando el cuerpo rígido tiene tres ejes de simetría perpendiculares entre sí, de esta ecuación es posible obtener una ecuación para la velocidad angular en el sistema en reposo del cuerpo rígido. De la ecuación (4.6.2) La derivada del momento angular es

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_S = \vec{N} = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times L,$$

donde  $b$  se refiere a body. En notación indicial tenemos

$$\left( \frac{dL_i}{dt} \right) + \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i.$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de  $L$ , relativos a los ejes en el cuerpo rígido. (Recuerden que para  $t = 0$ ,  $L' = L$ , las coordenadas del momento angular son idénticas en los dos sistemas). Considerando el sistema de referencia que coincide con los ejes principales del cuerpo rígido  $L = I_i \omega_i$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = N_i.$$

Es importante tener en cuenta que en esta expresión no hay suma sobre  $i$ . Para  $i = 1$

$$\begin{aligned}\epsilon_{1jk} \omega_j \omega_k I_k &= \epsilon_{123} \omega_2 \omega_3 I_3 + \epsilon_{132} \omega_3 \omega_2 I_2 \\ &= \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_3 \omega_2 I_2 \\ &= \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2).\end{aligned}$$

Procediendo de forma similar para para cada  $i = 2, 3$  obtenemos

$$\begin{aligned}I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Estas son las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido con un punto fijo.

### Movimiento de un Cuerpo Rígido Libre de Torques

Para este caso las ecuaciones de Euler se reducen a

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3), \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1), \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2).\end{aligned}$$

Es importante notar que

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S &= \left(\frac{d\vec{\omega}'}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \overset{0}{}, \\ \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S &= \left(\frac{d\vec{\omega}'}{dt}\right)_r.\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  son iguales en los dos sistemas cuando  $t \rightarrow 0$ . De igual forma  $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}'_1$ . Así que hemos escrito una ecuación para  $\vec{\omega}$  en cualquiera de los dos sistemas pero con  $I_1, I_2, I_3$  los momentos de inercia respecto a los ejes principales del cuerpo.

Si  $I_1 = I_2, \omega_3 = \text{Constante} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_2, \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0.\end{aligned}$$

De la última ecuación tenemos que  $\omega_3$  es una constante.

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= - \left[ \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \omega_3 \right] \omega_2 = -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= + \left[ \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \omega_3 \right] \omega_1 = +\Omega \omega_1.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Derivando (4.35)

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega \dot{\omega}_2 = -\Omega[\Omega \omega_1] = -\Omega^2 \omega_1.$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico simple y tiene solución  $\omega_1 = A \cos(\Omega t)$ . Es fácil ver que satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -A\Omega \text{sen}(\Omega t) \quad \text{y} \\ \ddot{\omega}_1 &= -A\Omega^2 \cos(\Omega t) = -\Omega^2 \underbrace{[A \cos \Omega t]}_{\omega_1} \\ \ddot{\omega}_1 &= -\Omega^2 \omega_1. \end{aligned}$$

De este resultado podemos hallar la solución para  $\omega_2$

$$\omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = -\frac{1}{\Omega}[-A\Omega \text{sen}(\Omega t)] = A \text{sen} \Omega t.$$

Podemos interpretar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  como un movimiento de precesión alrededor del eje z, para esto veamos que resulta de la suma vectorial de las velocidades angulares

$$\begin{aligned} \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k} &= A \cos(\Omega t) \hat{i} + A \text{sen}(\Omega t) \hat{j} + \omega_3 \hat{k} \\ \|\omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j}\| + \omega_3 \hat{k} &= A^2 \cos^2(\Omega t) + A^2 \text{sen}^2 \Omega t + \omega_3^2 = \|A\|^2. \end{aligned}$$

De esto podemos ver que  $\omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j}$  es un vector girando alrededor del eje z. Como el momento angular se calcula en el sistema de referencia que coincide con los ejes de simetría del cuerpo rígido  $L = \omega_i I_i$ , de tal forma que la magnitud de momento angular está dada por

$$\begin{aligned} \|\vec{L}\| &= \omega_1^2 I_1 + \underbrace{\omega_2^2 I_1}_{I_1=I_2} + \omega_3^2 I_3^2 \\ &= \|A\|^2 + \omega_3^2 I_3^2. \end{aligned}$$

Es decir, el momento angular total es una constante de movimiento y preciso alrededor del eje z.

### Trompo Simétrico con un Punto Fijo

Los ángulos de Euler son particularmente útiles para analizar el problema del trompo. Ya que es necesario transformar cada una de las velocidades,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\Psi}$  al sistema de coordenadas que coincide con los ejes de simetría del cuerpo (ESC), es necesario multiplicar cada una de estas velocidades angulares por las transformaciones generadas por los ángulos de Euler para obtener la velocidad angular del cuerpo en el sistema de referencia de los ESC, ya que es precisamente en este sistema de referencia donde se escriben las ecuaciones de Euler (ver figura 4.4).

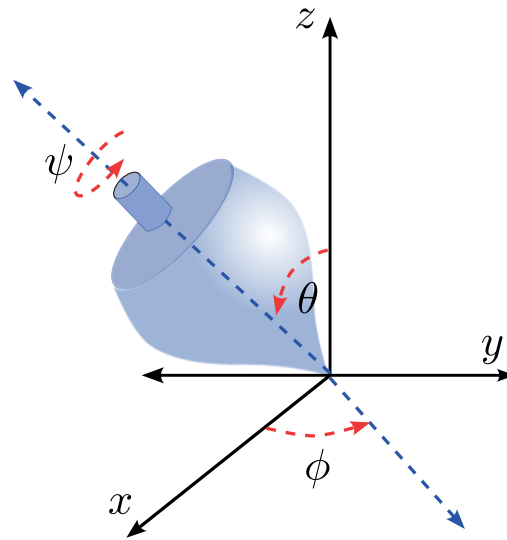


Figura 4.4: Trompo y Ángulos de Euler.

Para un trompo tenemos  $I_1 = I_2 \neq I_3$

$$I_1 \dot{\omega}'_1 + \omega'_2 \omega'_3 (I_3 - I_1) = N_1,$$

$$I_1 \dot{\omega}'_2 + \omega'_1 \omega'_3 (I_1 - I_3) = N_2,$$

$$I_3 \dot{\omega}'_3 = N_3.$$

Para esto necesitamos conocer los componentes de  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  en el sistema coordenado  $(x', y', z')$ . De los ángulos de Euler  $\phi$  describe el movimiento de precesión del trompo. Es necesario cambiar del sistema de referencia inercial a un sistema no inercial que gira con el trompo. El vector velocidad angular  $\vec{\dot{\phi}}$  está en dirección del eje  $z$  del espacio inercial, para cambiarlo al sistema no inercial donde el trompo está en reposo hay que aplicar las tres rotaciones de Euler. Sea  $\vec{\dot{\phi}}' = \vec{\omega}_\phi = A\vec{\dot{\phi}}$ ;  $A = BCD$

$$\vec{\omega}_\phi = A\vec{\dot{\phi}} = (BCD)\vec{\dot{\phi}} = BC\vec{\dot{\phi}}, \text{ ya que } D\vec{\dot{\phi}} = \vec{\dot{\phi}}.$$

haciendo la multiplicación

$$\vec{\omega}_\phi = \omega_{\phi x'} \hat{i}' + \omega_{\phi y'} \hat{j}' + \omega_{\phi z'} \hat{k}' = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \hat{i}' + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \hat{j}' + \dot{\phi} \cos \theta \hat{k}'.$$

donde  $\dot{\theta}$  es el ángulo que se rota alrededor del eje  $x$  e después de haber rotado alrededor de  $z$ , por lo tanto esta rotación se hace en el sistema de referencia que precesa alrededor del eje  $z$ . Esto implica que el vector  $\vec{\dot{\theta}}$  está en ese sistema de referencia y por lo tanto para llevarlo al sistema de reposo del cuerpo rígido sólo es necesario aplicar las rotaciones de Euler  $B$  y  $C$ , es decir,

$$\dot{\theta}' = \vec{\omega} = BC\vec{\dot{\theta}}.$$

Como  $C\dot{\theta} = \dot{\theta} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}' &= \vec{\omega}_\theta = B\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta} \cos \psi \hat{i}' - \dot{\theta} \sin \psi \hat{j}' + 0\hat{k}'.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\dot{\psi}' = \vec{\omega}_\psi = B\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{k} = \vec{\omega}_\psi.$$

Sumando las tres velocidades angulares en el sistema de reposo del cuerpo rígido

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi &= \\ &= (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{i}' + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{j}' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{k}' \\ &= \omega'_x \hat{i}' + \omega'_y \hat{j}' + \omega'_z \hat{k}'.\end{aligned}$$

La energía cinética es

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} [I_1 \omega_1'^2 + I_2 \omega_2'^2 + I_3 \omega_3'^2] \\ &= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi} s_\theta s_\psi + \dot{\theta} c_\psi)^2 + (\dot{\phi} s_\theta c_\psi - \dot{\theta} s_\psi)^2] + \frac{1}{2} I_3 [(\dot{\phi} c_\theta + \dot{\psi})^2] \\ T &= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi})^2 s_\theta^2 s_\psi^2 + (\dot{\theta})^2 c_\psi^2 + \cancel{2\dot{\phi}\dot{\theta} s_\theta s_\psi c_\psi} \\ &\quad + (\dot{\phi})^2 s_\theta^2 c_\psi^2 + (\dot{\theta})^2 s_\psi^2 - \cancel{2\dot{\phi}\dot{\theta} s_\theta s_\psi c_\psi}] + \frac{1}{2} I_3 [(\dot{\phi} c_\theta + \dot{\psi})^2] \\ T &= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi})^2 s_\theta^2 + \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} c_\theta + \dot{\psi})^2.\end{aligned}$$

La energía potencial en un campo gravitacional constante  $\vec{g} = -g\hat{k}$  esta dado por

$$\begin{aligned}V &= - \int_{\vec{r}_0=0}^{\vec{r}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\vec{F}_i \cdot \int_0^{\vec{r}_i} d\vec{r}_i \\ &= -m_i \vec{g} \cdot \vec{r}_i - 0 \\ &= -\vec{g} \cdot (m_i \vec{r}_i) \\ &= -\vec{g} \cdot \underbrace{\frac{(m_i \vec{r}_i)}{M}}_R M = -M \vec{g} \cdot \vec{R}\end{aligned}$$

donde  $\vec{R}$  es el centro de masa y  $M = \sum_i m_i$

Si  $|\vec{R}| = l$

$$-M \vec{g} \cdot \vec{R} = -M (-g\hat{k} \cdot \hat{k}' l) = M g l \cos \theta.$$

De estas expresiones podemos obtener el lagrangiano

$$L = \frac{I_1}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta] + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - M g l \cos \theta.$$

Es importante notar que  $\psi$  y  $\phi$  no aparecen explícitamente en el lagrangiano, y por lo tanto  $p_\psi$  y  $p_\phi$  son constantes de movimiento

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 \equiv I_1 a, \quad (4.36)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta, \quad (4.37)$$

$$= (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \equiv I_1 b. \quad (4.38)$$

La energía se conserva así que

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta] + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} + Mgl \cos \theta,$$

donde  $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ . De (4.36) tenemos que

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta$$

Este resultado se puede reemplazar en (4.38) para obtener  $\dot{\phi}$ , como función de  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} I_1 b &= (I_1 s_\theta^2 + I_3 c_\theta^2) \dot{\phi} + (I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= I_1 s_\theta^2 \dot{\phi} + I_1 a c_\theta = p_\phi \end{aligned}$$

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (5.57)$$

que da  $\dot{\phi}$  como una función de  $\theta$ . Reemplazando este resultado en la expresión para  $I_3 \dot{\psi}$

$$\begin{aligned} I_3 \dot{\psi} &= I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta \\ &= I_1 a - I_3 \cos \theta \left[ \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

que da  $\dot{\psi}$  como una función de  $\theta$ . utilizando  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\phi}$  en la expresión para la energía,

$$E = \frac{I_1}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 s_\theta^2] + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} c_\theta)^2 + Mgl \cos \theta$$

donde

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} c_\theta = \frac{I_1}{I_3} a - c_\theta \left[ \frac{b - a c_\theta}{s_\theta^2} \right] + \left[ \frac{b - a c_\theta}{s_\theta^2} \right] c_\theta = \frac{I_1}{I_3} a$$

así que la energía es

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2} \left[ \dot{\theta}^2 + \left[ \frac{b - a c_\theta}{s_\theta^2} \right]^2 s_\theta^2 \right] + \frac{I_3}{2} \left[ \frac{I_1 a}{I_3} \right]^2 + mgl \cos \theta \\ &= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \left[ \frac{b - a c_\theta}{s_\theta^2} \right]^2 s_\theta^2 + \frac{I_1^2 a^2}{2I_3} + mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

De tal forma que

$$E' = \frac{I_2 \dot{\theta}^2}{2} + V'(\theta).$$

$$V'(\theta) = \frac{I_1 (b - ac_\theta)^2}{2 s_\theta^2} + mgl \cos \theta,$$

con

$$E' = E - \frac{I_1^2 a^2}{2I_3}.$$

De las definiciones

$$\alpha = \frac{2E - I_3 \omega_3^2}{I_1}; \quad \beta = \frac{2mgl}{I_1}$$

$$a = \frac{p_\psi}{I_1} \quad \text{y} \quad b = \frac{p_\phi}{I_1}.$$

La ecuación para la energía se puede escribir como (aquí  $\omega_3 = \frac{I_1}{I_3} a$ )

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{2E - I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{I_1 \alpha}{2}$$

$$\frac{I_1 \alpha}{2} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1 (b - ac_\theta)^2}{2 s_\theta^2} + \frac{\beta I_1}{2} \cos \theta$$

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(b - ac_\theta)^2}{s_\theta^2} + \beta \cos \theta \tag{5,62}$$

haciendo el cambio de variables

$$u = \cos \theta \quad \dot{u} = -\text{sen} \theta \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\text{sen} \theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{-\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\alpha = \frac{(\dot{u})^2}{1 - u^2} + \frac{(b - au)^2}{1 - u^2} + \beta u.$$

Despejando

$$(\dot{u})^2 = \alpha(1 - u^2) - (b - au)^2 - \beta u(1 - u^2).$$

Obtenemos

$$\dot{u} = \sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}.$$

De esta expresión podemos despejar el diferencial del tiempo

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}.$$

O de forma equivalente

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \quad (4.39)$$

Esta ecuación se puede invertir para obtener el radio como una función del tiempo y por tanto permite resolver el problema del trompo.

## Ejercicios Capítulo 4

1. **Cinemática de rotación.** Una partícula en un cuerpo rígido gira con una velocidad angular  $\omega$ . Demuestre que la velocidad de la partícula respecto a un punto fijo  $O$  es  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ .
2. **Composición de rotaciones.** Dos rotaciones infinitesimales  $\delta\theta_1$  y  $\delta\theta_2$  alrededor de ejes no paralelos, se aplican sucesivamente. Demuestre que la composición no es conmutativa y determine la rotación resultante hasta primer orden.
3. **Derivada temporal en un marco rotante.** Demuestre que para cualquier vector  $\mathbf{A}$ ,

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{inercial}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{rotante}} + \omega \times \mathbf{A}.$$

4. **Tensor de inercia de una barra delgada.** Calcule el tensor de inercia respecto a su centro de masa y a un extremo para una barra homogénea de longitud  $L$  y masa  $M$ .
5. **Teorema de Steiner.** Verifique el teorema de los ejes paralelos para un sólido arbitrario y úselo para calcular el momento de inercia de un disco respecto a un eje tangente.
6. **Elipsoide uniforme.** Determine los momentos principales de inercia de un elipsoide homogéneo de semiejes  $a, b, c$ .
7. **Rotación pura alrededor de un eje fijo.** Un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo con velocidad angular  $\omega(t)$ . Demuestre que la energía cinética rotacional es  $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ .
8. **Ejes principales.** Muestre que el tensor de inercia puede diagonalizarse y que en los ejes principales no existe acoplamiento entre componentes de rotación.
9. **Rotación compuesta de un cuerpo simétrico.** Considere un cuerpo simétrico con  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Determine la ecuación de la trayectoria de  $\omega$  en el espacio de cuerpo.
10. **Top sin torque (peonza libre).** Derive las ecuaciones de Euler para un cuerpo simétrico libre y muestre que la componente de  $\omega$  en el eje de simetría es constante.
11. **Energía cinética general.** Demuestre que la energía cinética de un cuerpo rígido se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}_C \omega,$$

donde  $v_C$  es la velocidad del centro de masa y  $\mathbf{I}_C$  el tensor de inercia respecto a dicho punto.

12. **Ecuaciones de Euler con torque.** Para un cuerpo rígido con torques externos  $(N_1, N_2, N_3)$  en el sistema de ejes principales, derive:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = N_1,$$

y sus dos ecuaciones análogas.

13. **Precesión libre de un cuerpo simétrico.** Un cuerpo simétrico libre tiene  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Demuestre que la punta del vector  $\boldsymbol{\omega}$  describe un cono alrededor del eje de simetría.
14. **Peonza simétrica bajo torque gravitacional.** Considere una peonza de masa  $M$ , longitud  $l$  y momento de inercia  $I_3$  respecto a su eje de simetría. Encuentre las ecuaciones de movimiento y las condiciones para la precesión uniforme.
15. **Energía y constantes de movimiento.** Demuestre que en ausencia de torque externo, tanto la energía cinética  $T$  como el momento angular  $\mathbf{L}$  son constantes.
16. **Inestabilidad del eje intermedio.** Muestre que la rotación alrededor del eje con momento de inercia intermedio es inestable. Analice el caso de un libro lanzado al aire (problema del “tumbling book”).
17. **Precesión y nutación .** Derive la ecuación de la nutación para una peonza pesada usando las ecuaciones de Euler y exprese la condición para precesión estable.
18. **Rotación libre en el espacio.** Determine las trayectorias de  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{L}$  en el espacio del cuerpo y en el espacio inercial. Discuta la geometría de Poinsot.
19. **Pequeñas oscilaciones del giroscopio.** Linealice las ecuaciones de Euler para pequeñas desviaciones de una precesión uniforme y determine la frecuencia de las oscilaciones.
20. **Energía cinética en términos de ángulos de Euler [Desafío].** Exprese  $T$  para un cuerpo rígido en función de los ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  y sus derivadas temporales. Identifique los momentos canónicos conjugados y discuta la formulación lagrangiana del cuerpo rígido.

## 5. Formalismo Hamiltoniano

### 5.1 Transformada de Legendre y Ecuaciones de Hamilton

A partir del lagrangiano es posible definir una nueva función que depende del momento canónico  $p_i$  pero ya no depende de la velocidad generalizada  $\dot{q}_i$ . Esta nueva función se conoce como el hamiltoniano y tiene como principal ventaja que borra las diferencias entre las variables generalizadas y sus respectivos momentos. Eventualmente el formalismo canónico permitirá definir las así llamadas transformaciones canónicas sobre el espacio de fase  $(q_i, p_i) \rightarrow (q'_i, p'_i) = (q'_i(q, p), p'_i(q, p))$ . Para entender este formalismo partimos de las transformadas de Legendre. Sea  $f = f(x, y)$  una función real o compleja de dos variables, con diferencial

$$df = udx + vdy, \quad u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A partir de esta función es posible definir una nueva función  $g$

$$g = f - ux = f - \frac{\partial f}{\partial x}x,$$

tal que

$$\begin{aligned} dg &= d \left[ f - \frac{\partial f}{\partial x}x \right] = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}dx} + \frac{\partial f}{\partial y}dy - \underbrace{\left[ \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}dx} + d \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] x \right]}_{d \left[ \frac{\partial f}{\partial x}x \right] = d[ux]} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}dy - dux = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy - xdu, \end{aligned}$$

vemos que  $g$  es una función que se puede escribir como función de  $y$  y  $u$ , es decir,  $g = g(y, u)$  donde

$$\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_u = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_x \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -x.$$

En nuestro caso

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.1)$$

Si  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  de la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

De tal forma que (5.1) se puede escribir como

$$dL = \dot{p}_i dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

La Hamiltoniana es generada por la transformada de Legendre es

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \\ dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \left[ \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right] \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Esta expresión debe ser igual al

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

comparando coeficientes obtenemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Como vimos en el Capítulo Dos la forma más general para un lagrangiano está dado por

$$L = L_0(q, t) + \dot{q}_i a_i(q, t) + \frac{1}{2} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j,$$

donde  $T_{ij} = T_{ij}(q, t)$ . Por ejemplo, para partícula libre en coordenadas cartesianas tenemos

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{q}})^T T \dot{\vec{q}}.$$

En general podemos mantener el tensor  $T$  como una función arbitraria de las coordenadas generalizadas. El termino lineal con la velocidad generalizada está dado por

$$\dot{q}_i a_i = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a}).$$

En forma matricial esto puede escribirse como

$$\begin{aligned} H &= \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} - L \\ &= \dot{\vec{q}}^T \vec{p} - L_0 - \dot{\vec{q}}^T \vec{a} - \frac{1}{2} (\dot{\vec{q}})^T T \dot{\vec{q}} \\ &= (\dot{\vec{q}})^T (\vec{p} - \vec{a}) - \frac{1}{2} (\dot{\vec{q}})^T T \dot{\vec{q}} - L_0. \end{aligned}$$

El momento canónico conjugado se obtiene del lagrangiano.

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = a_k + \delta_{ki} \frac{T_{ij}}{2} \dot{q}_j + \dot{q}_i \frac{T_{ij}}{2} \delta_{kj} \\ &= a_k + \frac{T_{kj}}{2} \dot{q}_j + \frac{\dot{q}_i T_{ij}}{2} \\ &= a_k + T_{kj} \dot{q}_j =: \vec{a} + T \dot{\vec{q}} = \vec{p}. \end{aligned}$$

De este resultado obtenemos

$$\vec{p} - \vec{a} = T \dot{\vec{q}} \quad \Rightarrow \quad T^{-1}(\vec{p} - \vec{a}) = \dot{\vec{q}}.$$

Si  $T$  es simétrica, al igual que  $T^{-1}$ , entonces

$$(\dot{\vec{q}})^T = [T^{-1}(\vec{p} - \vec{a})]^T = (\vec{p} - \vec{a})^T (T^{-1})^T = (\vec{p} - \vec{a})^T T^{-1}.$$

Aquí tuvimos en cuenta que  $(T^{-1})^T = T^{-1}$ . Reemplazando estos resultados en  $H$

$$\begin{aligned} H &= (\dot{\vec{q}})^T (\vec{p} - \vec{a}) - \frac{1}{2} (\dot{\vec{q}})^T T \dot{\vec{q}} - L_0 \\ &= (\vec{p} - \vec{a})^T T^{-1} (\vec{p} - \vec{a}) - \frac{1}{2} (\vec{p} - \vec{a})^T T^{-1} T T^{-1} (\vec{p} - \vec{a}) - L_0 \\ &= \frac{1}{2} (\vec{p} - \vec{a})^T T^{-1} (\vec{p} - \vec{a}) - L_0. \end{aligned}$$

Podemos ver el caso de una partícula de masa  $m$ , como vimos anteriormente

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V.$$

En este caso el tensor  $T$  se puede invertir fácilmente

$$T = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

En general el inverso de una matriz diagonal  $\lambda_i \delta_{ij}$  (no suma sobre  $i$ ) es  $(\lambda_i^{-1}) \delta_{ij}$ . Fácil de ver  $\lambda_i \delta_{ij} (\lambda_k^{-1} \delta_{jk}) = \lambda_i \lambda_k^{-1} \delta_{ik} = \delta_{ik}$ , ya que  $\lambda_i \lambda_k^{-1} = 1$  para  $k = i$ .

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (p_x, p_y, p_z) \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + V \\ &= \frac{1}{2} (p_x, p_y, p_z) \begin{bmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ p_z/m \end{bmatrix} + V \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} \right) + V \\ &= \frac{(\vec{p})^2}{2m} + V = V. \end{aligned}$$

Para  $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ . Es el lagrangiano en esféricas

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

La inversa de  $T$  está dada por

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{mr^2} \end{bmatrix}.$$

Con esta matriz podemos obtener el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= (p_r, p_\phi, p_\theta) \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{mr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ p_\phi \\ p_\theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Como un tercer ejemplo consideremos el lagrangiano de una partícula cargada. Bajo la influencia de un campo eléctrico y un campo magnético el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + q A_i \dot{x}_i - q\phi.$$

De este lagrangiano obtenemos el momento canónico y la velocidad generalizada

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{1}{m}(p_i - qA_i), \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i.\end{aligned}$$

En este caso  $a = qA_i$ , reemplazando en  $H = (p - a)^T T^{-1} (p - a)/2 + q\phi$  donde

$$T = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \mathbb{1}.$$

De tal forma que el hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned}H &= \frac{(p - qA)^T (p - qA)}{2m} + q\phi. \\ H &= \frac{(p - qA)^2}{2} + q\phi.\end{aligned}$$

## 5.2 Representación Simpléctica de las Ecuaciones de Hamilton

Si  $q_i = \eta_i$  y  $p_i = \eta_{i+n}$  es decir  $\vec{\eta} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \text{para } i \leq n \\ \frac{\partial H}{\partial \eta_{n+i}} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \text{para } i \geq 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_i = \dot{\eta}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial \eta_{n+i}} \\ \dot{p}_i = \dot{\eta}_{n+i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i} \quad i \leq n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\eta}_i \\ \dot{\eta}_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \eta_{n+i}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \eta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \eta_i} \\ \frac{\partial H}{\partial \eta_{n+i}} \end{bmatrix} \\ \dot{\vec{\eta}} &= J \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{\eta}} \right); \quad J =: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La matriz  $J$  tiene varias propiedades

$$\begin{aligned} J^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ J^T J &= J J^T = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}, \\ J^T &= J^{-1} = -J, \\ J^2 &= J(-J)(-1) = J J^{-1}(-1) = -\mathbb{1}, \\ J^2 &= -\mathbb{1}. \end{aligned}$$

La matriz  $J$  es una matriz ortogonal con determinante  $\det J = 1$ . Fácil ver para el caso  $2 \times 2$   $\det \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = +1$ . Para  $n = 2$ , tenemos  $\dot{\eta} = J \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta}$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación matricial es equivalente a las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \dot{p}_2 &= \frac{\partial H}{\partial q_2}, \end{aligned}$$

La existencia de una cantidad que se conserve en un sistema de referencia depende de la dependencia explícita del lagrangiano y del hamiltoniano con el tiempo. Para esto debemos partir de la identidad

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left[ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right]}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente ejemplo. En un sistema de referencia el hamiltoniano dependerá explícitamente del tiempo, pero al cambiarnos de sistema esta dependencia desaparece. Supongamos que tenemos una masa sujeta a un resorte que oscila horizontalmente sobre un

vehículo que se mueve a una velocidad constante. La posición de la masa desde un sistema de referencia en reposo está dada por  $x = vt + l_0$ . La energía potencial del resorte está dada por  $V = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k\Delta(x - (vt + l_0))^2$ . De esta forma obtenemos

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - vt - l_0)^2.$$

En este caso el lagrangiano depende explícitamente del tiempo y por tanto de nuestro análisis el hamiltoniano no debe ser una constante de movimiento. Las derivadas parciales del lagrangiano son

$$p_r = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2}{2}k(x - vt - l_0).$$

La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{x} - \left[-\frac{2}{2}k(x - vt - l_0)\right] \\ 0 &= m\ddot{x} + k(x - vt - l_0). \end{aligned}$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico simple. La solución general está dada por

$$\begin{aligned} x &= bt + k + A \cos \omega t \\ \dot{x} &= b + A(-\text{sen } \omega t)\omega \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Remplazando esta solución en la ecuación de movimiento  $m\ddot{x} + k(x - vt - l_0) = 0$  obtenemos

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t) + k(bt + k + A \cos \omega t - vt - l_0) = 0.$$

Si en esta ecuación hacemos  $b = v$  y  $k = l_0$  es posible obtener el valor de la frecuencia

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

La energía es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - vt - l_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(bt - \omega A \text{sen } \omega t)^2 + \frac{1}{2}k(\cancel{vt} + l_0 + A \cos \omega t - \cancel{vt} - l_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}m[b^2 - 2b\omega A \text{sen } \omega t + \omega^2 A^2 \text{sen}^2 \omega t] + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

como  $m\omega^2 = k \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2}k \text{sen}^2 \omega t$  así que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m[b^2 - 2b\omega A \text{sen } \omega t] + \frac{1}{2}kA^2 \text{sen}^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}m[b^2 - 2b\omega A \text{sen } \omega t] + \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

Es decir, la energía depende del tiempo. Este resultado se debe a la ligadura que mantiene un extremo del resorte viajando a velocidad  $v$ . Si la masa se mueve a la derecha una fuerza debe mantener la otra punta del resorte fijo. Como es sistema se está moviendo, la fuerza de ligadura se aplica mientras se desplaza a una velocidad  $v$ . En el sistema de referencia donde el extremo está el reposo, la fuerza se aplica pero no hace trabajo. Para trabajar en el sistema primado, el que se mueve con el carro, hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned}x' &= x - vt - l_0 \quad \Rightarrow \quad x = x' + vt + l_0, \\ \dot{x}' &= \dot{x} - v, \quad \ddot{x}' = \ddot{x}.\end{aligned}$$

En este caso el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}' + v)^2 - \frac{1}{2}k(x')^2 \\ &= \frac{1}{2}m((\dot{x}')^2 + 2v\dot{x}' + v^2) - \frac{1}{2}k(x')^2,\end{aligned}$$

por tanto el hamiltoniano debe ser una cantidad conservada. Para calcular el hamiltoniano necesitamos el momento canónico

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}' + mv = m(\dot{x}' + v) = p, \\ \Rightarrow \quad \dot{x}' &= \frac{p - mv}{m} = \frac{p}{m} - v = \frac{(p - mv)}{m}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{q} = T^{-1}(p - a)$

$$T^{-1} = \mathbb{1} \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad a = mv,$$

el hamiltoniano estará dado por

$$\begin{aligned}H &= \frac{(p - a)^T (T^{-1})(p - a)}{2} - L_0 \\ &= (p - mv) \frac{\mathbb{1}}{2m} (p - mv) - \left( -\frac{1}{2}k(x')^2 \right) \\ &= \frac{(p - mv)^2}{2m} + \frac{k}{2}(x')^2.\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener del lagrangiano (o del hamiltoniano)

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} &= m(\dot{x}' + v), \quad \frac{\partial L}{\partial x'} = -kx' \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} - \frac{\partial L}{\partial x'} &= m\ddot{x}' - (-kx') = 0.\end{aligned}$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación de un oscilador armónico, con las soluciones que ya conocemos de análisis anteriores

$$\begin{aligned}m\ddot{x}' + kx' &= 0 \\ x' &= A \cos \omega t, \quad \dot{x}' = -\omega A \sin \omega t, \quad \ddot{x}' = -\omega^2 A \cos \omega t.\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento

$$\ddot{x}' + \frac{k}{m}x' = 0$$

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \frac{k}{m}A \cos \omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

El momento canónico es  $p = m(\dot{x}' + v) = m(-\omega A \sin \omega t + v)$ . Reemplazando esta expresión en el hamiltoniano obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{(p - mv)^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x')^2 \\ &= \frac{(-m\omega A \sin \omega t + mv - mv)^2}{2m} + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{\overbrace{m^2 \omega^2}^k A^2 \sin^2 \omega t}{2m} + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t. \\ \Rightarrow \quad H &= \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

Esta cantidad es la cantidad conservada y corresponde a la energía en el sistema para el cual el extremo izquierdo del resorte está en reposo. En este punto es necesario aclarar que la energía es una cantidad que se conserva en un sistema de referencia, sin embargo; la conservación de la energía de un sistema físico puede depender del sistema de referencia desde el cual se hace el análisis.

### 5.3 Formulación Hamiltoniana de la Relatividad.

En muchas aplicaciones es necesario conocer el lagrangiano y el hamiltoniano de la relatividad especial. Sea  $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V$  donde  $\beta = \frac{v^2}{c^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial v_i} = -m_0 c^2 \frac{1}{2} [1 - \beta^2]^{-1/2} \times \left[ \frac{-2v_i}{c} \right] \times \frac{1}{c} \\ &= \frac{+m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \vec{p} = m_0 \gamma v_i. \end{aligned}$$

En este caso el momento canónico coincide con el momento lineal. El hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned}
 H &= \dot{q}^i p_i - L = v' \times \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} - [-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V] \\
 &= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - \beta^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V \\
 &= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V \\
 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = m_0 \gamma c^2 + V.
 \end{aligned}$$

En relatividad especial se tiene que

$$T^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{con } c = 1 \quad T^2 = P^2 + m_0^2).$$

De tal forma que el hamiltoniano estará dado por

$$H = T + V = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V.$$

Donde  $p$  es la magnitud del momento lineal en tres dimensiones. Si  $L = -m c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + q A_i v_i - q \phi$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m_0 \gamma v_i + q A_i.$$

En el formalismo general para calcular para calcular un hamiltoniano  $a_i = q A_i$

$$(p_i - q A_i) = m_0 \gamma v_i = \text{momento lineal}$$

Para el momento lineal tenemos

$$\begin{aligned}
 H &= \sqrt{p_{\text{lin}}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + V \\
 &= \sqrt{(\vec{p}_{\text{can}} - q \vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + V \\
 &= c \sqrt{(\vec{p}_{\text{can}} - q \vec{A})^2 + m^2 c^2} + V.
 \end{aligned}$$

Es claro de este ejemplo que el momento lineal es muy diferente del momento canónico.

## 5.4 Ecuaciones de Hamilton de Principios Variacionales

Si aplicamos el Principio de Hamilton al lagrangiano escrito en términos de la función Hamiltoniana, es posible obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton por medios

variacionales. Esta formulación tiene varias ventajas, ya que si imponemos unas condiciones de frontera adecuadas sobre las variables del espacio de fase, es posible borrar la diferencia entre las coordenadas generalizadas y sus respectivos momentos canónicos. Del Principio de Hamilton tenemos

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0.$$

Sea  $f = f(q, \dot{q}, P, \dot{P}, t) = (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t))$  el integrando de la funcional a minimizar en el formalismo desarrollado para el cálculo de variaciones en el Segundo Capítulo, si

$$\delta I = \delta \int f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) d = 0,$$

las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0.$$

Las derivadas parciales del integrando son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] = p_j \\ \frac{\partial f}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

De este resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas  $q_i$  son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial f}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} p_j - \left[ -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = 0 \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

De forma similar las derivadas parciales respecto a los momentos canónicos  $p_i$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{p}_j} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] = \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

Así las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a los momentos canónicos están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right] - \frac{\partial f}{\partial p_j} &= - \left[ \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right] = 0 \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

Sobre  $q_j$  hay condiciones de frontera,  $q(t_f) = q_2$  y  $q(t_0) = q_1$ , que son necesarias para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange. En el caso de los momentos canónicos generalizados  $p_j$ , de forma similar, podemos variar la acción

$$\delta I = \int \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{dp_j}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \frac{d\dot{p}_j}{d\alpha} \right).$$

El término de frontera es cero, ya que

$$\int \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial p_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \frac{dp_j}{d\alpha} - \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right) \frac{dp_j}{dt} = 0 \text{ porque } \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} = 0.$$

En general, podemos fijar los momentos canónicos en la frontera, al igual que con las coordenadas generalizadas, con el fin de hacer equivalentes los momentos canónicos con las coordenadas generalizadas en el formalismo hamiltoniano. Estas condiciones son suficientes para hacer cero cualquier término de frontera.

### Invarianza de las Ecuaciones de Hamilton

Sea  $f = f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t)$  la función que me genera las ecuaciones de Hamilton, entonces

$$f' = f + \frac{dF(q, p, t)}{dt}$$

genera las mínimas ecuaciones. Esto se demostró en el Capítulo Uno, y no es necesaria una demostración adicional; sin embargo, hay un argumento que aclara bastante la demostración original. Consideremos la variación de la funcional  $I$

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( f + \frac{dF}{dt} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} f dt + F \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} f dt + \delta(F(2) - F(1)).$$

$F(2) = F(q(t_2), p(t_2))$  y  $F(1) = F(q(t_1), p(t_1))$  no varían, es decir, tienen el mismo valor para cualquier parametrización de  $q = q(t)$  y  $p = p(t)$ , las coordenadas generalizadas  $q(t_{1,2})$  como los momentos  $p(t_{1,2})$  están fijos por condiciones de frontera. Como veremos en el siguiente capítulo podemos usar la función  $F$  para inducir in cambio de variables y por lo tanto se le conoce en la literatura como función generatriz. Por ejemplo, si definimos la función generatriz como  $F(p, q, t) = q_i p_i$ , el nuevo integrando de la funcional estará dado por

$$\begin{aligned} f' &= f - \frac{dF}{dt} = (p_i \dot{q}_i - H) - \dot{q}_i p_i - q_i \dot{p}_i \\ &= -q_i \dot{p}_i - H. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de este integrando son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial \dot{q}_i} &= 0 - 0, & \frac{\partial f'}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f'}{\partial \dot{p}_i} &= -q_i, & \frac{\partial f'}{\partial p_i} &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

De tal forma que las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial f'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f'}{\partial q_i} &= \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f'}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial f'}{\partial p_i} &= -\dot{q}_i - \left[ -\frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

## Ejercicios Capítulo 5

**P1:** A partir del Lagrangiano de una partícula en coordenadas cartesianas

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

obtenga el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton correspondientes. Verifique que las ecuaciones coinciden con la segunda ley de Newton.

**P2:** Para el Lagrangiano de una partícula de masa  $m$  en coordenadas polares

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r),$$

obtenga los momentos canónicos, el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton. Discuta las constantes de movimiento del sistema.

**P3:** Considere el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

correspondiente a una partícula cargada en un campo magnético uniforme. Halle el Hamiltoniano y determine si alguna coordenada es cíclica.

**P4:** Demuestre que la energía total  $E$  coincide con el Hamiltoniano  $H$  únicamente cuando el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo.

**P5:** Una partícula se mueve en una dimensión bajo la influencia de un potencial dependiente del tiempo  $V(x, t)$ . Derive las ecuaciones de Hamilton y discuta bajo qué condiciones se conserva la energía.

**P6:** A partir del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + ar\dot{\theta} - V(r, \theta),$$

obtenga el Hamiltoniano mediante la transformación de Legendre. Analice las condiciones bajo las cuales la transformación es invertible.

**P7:** Considere el sistema de dos partículas unidas por un resorte ideal:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Expresé el Hamiltoniano en términos de coordenadas del centro de masa y relativas. ¿Qué cantidad es conservada?

**P8:** Para un péndulo simple con

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta),$$

obtenga las ecuaciones de Hamilton y analice el comportamiento para pequeñas oscilaciones.

**P9:** Demuestre que las ecuaciones de Hamilton se pueden obtener a partir del principio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0.$$

**P10:** Considere un sistema con dos grados de libertad descrito por

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \lambda xy.$$

Derive las ecuaciones de Hamilton y discuta las condiciones para el acoplamiento de los modos normales.

**P11:** Una partícula se mueve bajo la acción de un potencial central  $V(r)$ . Escriba el Hamiltoniano en coordenadas esféricas y demuestre que el momento angular  $\mathbf{L}$  se conserva.

**P12:** Muestre que si el Hamiltoniano no depende explícitamente de una coordenada  $q_i$ , entonces el momento conjugado  $p_i$  es una constante de movimiento. Aplique este resultado a una partícula en un campo gravitatorio uniforme.

**P13:** Considere el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \alpha xp + \frac{1}{2}kx^2,$$

con  $\alpha$  y  $k$  constantes. Obtenga las ecuaciones de Hamilton y analice si la energía se conserva.

**P14:** Sea el Lagrangiano de un rotor simétrico

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2),$$

obtenga el Hamiltoniano en términos de las variables conjugadas  $(p_\theta, p_\phi)$  y determine las cantidades conservadas.

**P15:** Demuestre que las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo una transformación puntual

$$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_n, t),$$

siempre que el Jacobiano de la transformación sea distinto de cero.

**P16:** Considere un sistema con Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + kqt.$$

Obtenga las ecuaciones de movimiento y determine si el sistema posee alguna constante de movimiento.

- P17:** Para un oscilador armónico unidimensional, calcule explícitamente las trayectorias en el espacio de fases  $(q, p)$  y discútalas geoméricamente.
- P18:** Una partícula está sujeta a un potencial unidimensional  $V(x) = \frac{1}{4}\lambda x^4$ . Obtenga las ecuaciones de Hamilton y discuta cualitativamente el movimiento en el espacio de fases.
- P19:** Demuestre que para sistemas con un solo grado de libertad y Hamiltoniano independiente del tiempo, las trayectorias en el espacio de fases son curvas cerradas.
- P20:** Calcule el Hamiltoniano de un péndulo doble (masas  $m_1, m_2$ , longitudes  $l_1, l_2$ ) en el plano y escriba las ecuaciones de Hamilton. (No es necesario resolverlas.)

## 6. Transformaciones Canónicas

Como se mencionó en la introducción del capítulo anterior, la principal ventaja del formalismo hamiltoniano es que permite definir transformaciones sobre el espacio de fase  $(q_i, p_i)$ , de tal forma que las nuevas coordenadas generalizadas  $Q_i$  y los nuevos momentos canónicos  $P_i$  son funciones no triviales de las antiguas coordenadas, es decir,  $Q_i = Q_i(q, p)$  y  $P_i = P_i(q, p)$ . Podemos utilizar estos cambios de variables para situarnos en un nuevo conjunto de coordenadas cuya solución sea trivial, por ejemplo, consideremos el problema donde todas las coordenadas  $q_i$  son cíclicas. En este caso

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \alpha_i,$$

donde  $\alpha_i$  es una constante de movimiento. Como el hamiltoniano sólo depende de los momentos, ya que todas las  $q_i$  son cíclicas, entonces

$$H(p_i, t) = H(\alpha_i, t).$$

Si  $H$  es independiente del tiempo  $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$

$$H = H(\alpha_i) = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

En este caso las ecuaciones de movimiento se simplifican

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i.$$

En esta expresión  $\omega_i$  es una constante, ya que  $H$  sólo depende de los  $\alpha_i$  de tal forma que podemos hacer separación de variables

$$\frac{dq_i}{dt} = \omega_i \quad \Rightarrow \quad dq_i = \omega_i dt.$$

Integrando ambos lados

$$\int dq_i = q_i = \int \omega_i dt = \omega_i t + \beta_i; \quad \text{con } \beta_i \text{ una constante de integración.}$$

En la práctica ningún problema tiene todas las coordenadas cíclicas, pero mediante un cambio de variables apropiadas es posible conseguir este resultado. En este caso resolver el problema es equivalente a encontrar estas transformaciones. Para este fin en lugar de considerar sólo cambios de variables sobre el espacio de configuración, haremos transformación de coordenadas sobre el espacio de fase y el tiempo, es decir,

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (6.1)$$

$$P_i = P_i(q, p, t). \quad (6.2)$$

El conjunto pares ordenados  $(q_i, p_i)$  se denomina espacio de fase (no incluye el tiempo). Como vimos anteriormente el espacio de los  $q_i$ , es decir,  $q_1, \dots, q_n$ , es el espacio de configuración y las transformaciones puntuales involucraban sólo coordenadas generalizadas y el tiempo. Las nuevas  $Q_i, P_i$  debe ser coordenadas canónicas para los cuales hay un hamiltoniano  $K$  (Kamiltoniano) tal que:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (6.3)$$

Si  $Q_i$  y  $P_i$  son canónicos, deben satisfacer el principio modificado de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0. \quad (6.4)$$

Lo mismo debe cumplirse para las coordenadas originales

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (6.5)$$

Las ecuaciones (6.3) y (6.4) son simultáneamente válidas y equivalentes desde un punto de vista físico si

$$\lambda[\dot{q}_i p_i - H] = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \quad (6.6)$$

donde  $F = F(q, p, Q, P, t)$ . Teniendo en cuenta (6.2) esta función se puede escribir como una función de las  $(q_i, p_i, t)$  solamente, o de las nuevas variables y del tiempo,  $(Q_i, P_i, t)$ , de tal forma que aplica el teorema que dice que dos lagrangianos son equivalentes si difieren por una derivada total respecto a una función  $F$ , que sólo depende de las coordenadas generalizadas y el tiempo. Respecto al factor de escala  $\lambda$ , este puede originarse en cambios de coordenadas que resultan de multiplicar por una constante, por ejemplo

$$Q'_i = \mu q_i; \quad P'_i = \nu p_i,$$

Para  $F = 0$ , esto implica que el nuevo hamiltoniano estará dado por

$$\Rightarrow \lambda(\dot{q}_i p_i - H(q, p, t)) = P'_i \dot{Q}'_i - K'.$$

Ahora  $q_i = \frac{Q'_i}{\mu}$ ;  $p_i = \frac{P'_i}{v}$ ; reemplazando en el lado izquierdo obtenemos

$$\lambda \left( \frac{\dot{Q}'_i P'_i}{\mu v} - H \left[ \frac{Q'}{\mu}, \frac{P'}{v}, t \right] \right) = P'_i \dot{Q}'_i - K'.$$

Que se satisface si  $\lambda = \mu v$  y

$$\lambda H \left[ \frac{Q'}{\mu}, \frac{P'}{v}, t \right] = K' [Q', P', t].$$

Para  $\lambda \neq 1$  esta clase de transformaciones se llaman transformaciones de escala y por ahora no son de nuestro interés. Asumiendo que  $\lambda = 1$  podemos limitarnos a transformaciones del tipo

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (6.7)$$

Supongamos que la función generatriz  $F$  se puede escribir como una función de  $q, Q$  y del tiempo (Las transformaciones canónicas (TC) que no incluyen el tiempo se denominan TC-Restringidas), es decir

$$F = F(q, Q, t),$$

de tal forma que

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \quad (6.8)$$

$$= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i. \quad (6.9)$$

Ya que las coordenadas son independientes, los coeficientes de  $\dot{q}_i$  y  $\dot{Q}_i$  debe ser cero. <sup>1</sup>

$$\dot{q}_i \left[ p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right] - H + K = \dot{Q}_i \left[ P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right] + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Es decir,

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (6.10)$$

$$P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (6.11)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6.12)$$

<sup>1</sup>Las variables todavía no satisfacen ecuaciones de movimiento, las variaciones de  $Q$  y  $q$  (o  $\dot{Q}$  y  $\dot{q}$ ) son independientes.

En caso de que estas ecuaciones sean invertibles de la ecuación (6.10) es posible despejar  $Q$  como una función de  $q$ ,  $p$  y del tiempo, es decir,  $Q_j = Q_j(q, p, t)$ . La ecuación (6.11) da a  $P_i$  como función de  $q_j$ ,  $Q_j$  y  $t$ . Como ya conocemos la dependencia de  $Q_j$  como función de  $q, p$  y  $t$  entonces también podemos obtener el nuevo momento canónico como una función de estas variables, es decir,  $P_j = P_j(q, p, t)$ . Es claro que una función generatriz de la forma  $F = F(q, P, t)$  determina una transformación de coordenadas en el espacio de fase. Con las ecuaciones de transformación determinadas por (6.10) y (6.11). De forma similar si elegimos una función generatriz con una dependencia funcional diferente respecto a las variables canónicas, obtendremos transformaciones de coordenadas a partir de la ecuación (6.9). Consideremos el caso en el que la función generatriz depende de la coordenada  $q$  y del nuevo momento canónico  $P$ , de la siguiente forma

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i.$$

De la ecuación (6.7) tenemos

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \\ &= \cancel{P_i \dot{Q}_i} - K + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} + [-\cancel{Q_i \dot{P}_i} - Q_i \dot{P}_i]. \end{aligned}$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\dot{P}_i \left[ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i \right] + \dot{q}_i \left[ \frac{\partial F_2}{\partial q_i} - p_i \right] + \left( H + \frac{\partial F_2}{\partial t} - K \right) = 0.$$

De la independencia lineal de cada uno de los términos tenemos que

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}; \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Los resultados anteriores y un par de casos adicionales que hasta el momento no hemos considerado, pueden resumirse de la siguiente forma:

$$\text{Si } F = F_1(q, Q, t) \Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}.$$

$$\text{Caso trivial } F_1 = q_i Q_i \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i.$$

$$\text{Si } F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i \Rightarrow p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}.$$

$$\text{Caso trivial } F_2 = q_i P_i \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i.$$

$$\text{Si } F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i \Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}.$$

$$\text{Caso trivial } F_3 = p_i Q_i \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i.$$

$$\text{Si } F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i \Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}.$$

$$\text{Caso trivial } F_4 = p_i P_i \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i.$$

Para fijar ideas veamos algunos ejemplos de transformaciones canónicas. Sea  $F_2 = q_i P_i$ , las ecuaciones para este caso son:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}.$$

Que en nuestro caso se reducen a:

$$Q_j = \frac{\partial}{\partial P_j}(q_i P_i) = q_j, \quad p_j = \frac{\partial}{\partial q_j}(q_i P_i) = P_j, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + 0.$$

Esta es la transformación identidad, esta será muy útil cuando consideremos transformaciones infinitesimales. Otro caso importante es la función generatriz de las transformaciones puntuales en el espacio de configuración, en este caso  $F_2 = f(q_1, \dots, q_n, t) P_i$  y las ecuaciones asociadas están dadas por

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right) P_i, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q_1, \dots, q_n, t).$$

En este caso vemos que momentos y coordenadas generalizadas transforman de forma separada (En este caso  $Q_j$  es una función de las  $q_j$  y del tiempo, es decir, una transformación puntual), como es de esperarse, y demuestra que las transformaciones puntuales son una transformación canónica. En general esto es cierto si

$$F_2(q, P, t) = f_i(q_1, \dots, q_n, t) P_i + g(q_1, \dots, q_n, t).$$

Las ecuaciones de transformación estarán dadas por

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_j} = \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_{ji} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_j} = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial q}} \right) \vec{P} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial q}. \quad (6.13)$$

Esta ecuación puede invertirse para obtener los momentos canónicos en el nuevo sistema coordinado de tal forma que

$$\left( \vec{p} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial q} \right) = \left( \overline{\frac{df}{dq}} \right) \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial q}} \right)^{-1} \left[ \vec{p} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial q} \right].$$

En dos dimensiones la ecuación (6.13) se ve como:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \frac{\partial g}{\partial q_2} \end{bmatrix}.$$

Otro ejemplo útil es la transformación canónica que se obtiene de la función generatriz

$$F_1 = q_k Q_k.$$

Las ecuaciones de transformación son:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} q_k Q_k = Q_i$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -\frac{\partial}{\partial Q_i} q_k Q_k = -q_i.$$

Es decir:

$$\Rightarrow p_i \rightarrow Q_i \text{ y } P_i = -q_i.$$

Esta transformación de coordenadas intercambia posiciones y momentos y demuestra que en el formalismo hamiltoniano la distinción entre la variable generalizada y su respectivo momento canónico no es fundamental. Esta transformación también se puede obtener con  $F_4 = p_i P_i$ . Hay ejemplos que mezclan algunos de los casos que hemos visto, por ejemplo si deseamos una transformación del tipo

$$Q_1 = q_1 \quad P_1 = P_1 \quad \text{y} \quad Q_2 = P_2 \quad \text{y} \quad P_2 = -q_2$$

La transformación  $Q_1 = q_1$  y  $P_1 = P_1$  se puede obtener con la función generatriz de la identidad. La transformación  $Q_2 = P_2$ ,  $P_2 = -q_2$  se puede obtener con la función  $F_1$  que vimos en el ejemplo anterior. Así la función generatriz es

$$F = \underbrace{q_1 P_1}_{F_2} + \underbrace{q_2 Q_2}_{F_1}.$$

### 6.0.1 El Oscilador Armónico

El oscilador armónico es un ejemplo de gran interés, ya que es útil para entender varios conceptos. El hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m}[p^2 + m^2 \omega^2 q^2]; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Es conveniente hacer el siguiente cambio de variables

$$p = f(P) \cos Q \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q. \quad (6.14)$$

En estas nuevas variables el hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{(f(P))^2}{2m} \left[ \cos^2 Q + \cancel{m^2 \omega^2} \frac{\sin^2 Q}{\cancel{m^2 \omega^2}} \right]$$

$$= \frac{(f(P))^2}{2m} \quad Q \text{ es cíclica,}$$

esta TC es generada por la función generatriz

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q.$$

Para ver que esto remplazamos la función generatriz en las ecuaciones para  $F_2$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q = \frac{m\omega q^2}{2 \operatorname{sen}^2 Q}.$$

Despejando  $q^2$

$$q^2 = \frac{2 \operatorname{sen}^2 Q}{m\omega} P.$$

De igual forma

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q = m\omega \sqrt{q^2} \frac{\cos Q}{\operatorname{sen} Q} \\ &= m\omega \sqrt{\frac{2 \operatorname{sen}^2 Q}{m\omega} \times \frac{P}{\operatorname{sen}^2 Q}} \cos Q = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \end{aligned}$$

En resumen

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q \quad \text{y} \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (6.15)$$

Comparando con (6.14)  $f(P) = \sqrt{2m\omega P}$ . De esta relación vemos que el hamiltoniano es proporcional a la frecuencia

$$H = \frac{[f(P)]^2}{2m} = \frac{2m\omega P}{2m} = \omega P.$$

De este hamiltoniano vemos que  $Q$  es una variable cíclica y por tanto su momento canónico conjugado  $P$  es constante y está dado por Si

$$H = E = \omega P \quad \Rightarrow \quad P = \frac{E}{\omega}.$$

De las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \alpha.$$

Remplazando este resultado en (6.15) obtenemos

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ p &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

aquí  $q$  y  $p$  describen una elipse en el espacio de fase (ver figura 6.1)

$$q = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad p = b \cos(\omega t + \alpha),$$

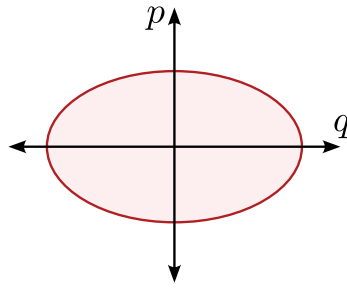


Figura 6.1: Trayectoria en el Espacio de Fase del Oscilador Armónico.

donde  $a$  y  $b$  corresponden a la longitud de los semiejes. El área de la elipse está dada por  $\pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}$  donde  $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$   $b = \sqrt{2mE}$ . En la Mecánica Cuántica  $E = n\hbar\omega = n\frac{h}{2\pi}\omega$ , así

$$A = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \times \left[ \frac{nh}{2\pi} \omega \right] = nh,$$

que corresponde a la cuantización de Wilson-Sommerfeld.

## 6.1 Formalismo Simpléctico para las TC

Parte del propósito de la Mecánica Analítica es identificar la estructura simpléctica subyacente en la Mecánica Clásica. Las transformaciones canónicas (TC) preservan las ecuaciones de Hamilton bajo transformaciones de coordenadas en el espacio de fase. En este capítulo veremos que el elemento diferencial de volumen se conserva bajo transformaciones canónicas, o de forma equivalente el Jacobiano de la transformación es 1, y que esta propiedad se obtiene si pedimos que los elementos del tensor  $J$  sean los mismos en cualquier sistema de coordenadas canónicas. En este sentido  $J$  actúa como una métrica del espacio de fase. La forma de visualizar esta estructura es por medio del formalismo simpléctico, sean

$$Q_i = Q_i(q, p) \text{ y } P_i = P_i(q, p) \quad (6.16)$$

TC restringidas, es decir, que no dependen del tiempo, entonces

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \quad (6.17)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}}_1 \frac{\partial H}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}}_2 \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{Q}_i. \quad (6.18)$$

De otro lado, la inversa de (6.16) es

$$q_j = q_j(Q, P), \quad p_j = p_j(Q, P),$$

de tal forma que podemos considerar a  $H = H(q, p) = K(Q, P)$  (la diferencia entre el Kamiltoniano y el hamiltoniano es la derivada parcial de la función generatriz respecto al tiempo, ya que las transformaciones son restringidas la función generatriz debe ser independiente del tiempo).

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial P_i}}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial P_i}}_2 = \dot{Q}_i. \quad (6.19)$$

Comparando (6.18) con (6.19)

$$\left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left( \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}; \quad \left( \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \right)_{q,p} = - \left( \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}.$$

De igual forma comparando  $\dot{P}$  obtenemos

$$\left( \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left( \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}; \quad \left( \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left( \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}.$$

Si utilizamos la notación simpléctica, estas relaciones se pueden obtener de la ecuación de Hamilton.

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \rightarrow \dot{\eta}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j}.$$

Haciendo el cambio de coordenadas  $\zeta_i = \zeta_i(\eta)$

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dt}, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

En notación matricial  $\dot{\zeta} = \overline{M} \dot{\eta}$ ;  $M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}$ . Como  $\frac{d\eta_j}{dt} = J_{jl} \frac{\partial H}{\partial \eta_l}$  entonces

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} J_{jl} \frac{\partial H}{\partial \eta_l} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} J_{jl} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_l} \quad (6.20)$$

$$= \left[ \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} J_{jl} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_l} \right] \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}. \quad (6.21)$$

De la ecuación de movimiento en el sistema primado tenemos

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = J_{ik} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}. \quad (6.22)$$

Si comparamos las ecuaciones (6.21) y (6.22) tenemos la relación

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} J_{jl} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_l} = J_{ik}.$$

Recordando la definición  $\frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} = M_{ij}$

$$\begin{aligned} M_{ij} J_{jl} M_{kl} &= J_{ik} \\ M_{ij} J_{jl} M_{lk}^T &= J_{ik} \rightarrow M J M^T = J. \end{aligned}$$

También es posible demostrar que  $M^T J M = J$ , para esto partimos de la expresión

$$M J = J (M^T)^{-1}.$$

Multiplicando por  $(-J)$  a la derecha y por  $J$  a la izquierda obtenemos

$$J M \underbrace{J(-J)}_1 = \underbrace{J^2}_{-1} (M^T)^{-1} (-J),$$

así que  $J M = (M^T)^{-1} J$  o de forma equivalente  $M^T J M = J$ . Habíamos visto la TC  $(q_1, p_1) \rightarrow (Q'_1, P'_1) = (q_1, p_1)$  y  $(q_2, p_2) \rightarrow (Q_2, P_2) = (p_2, -q_2)$  a nivel de derivadas esto implica

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 \\ -\dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} := M \eta.$$

En este caso la matrix corresponde a  $M$ , podemos verificar fácilmente que  $M J M^T = J$ .

### 6.1.1 Transformaciones Canónicas Infinitesimales

La relación  $M J M^T = J$  se demostró para TC restringidas y se puede demostrar que es válida en general. Para esto mostraremos que la evolución temporal de una variable en el espacio de fase corresponde a una TC. Para ver esto resulta muy útil definir las TC infinitesimales. Sea  $Q_i = q_i + \delta q_i$  y  $P_i = p_i + \delta p_i$  o de forma equivalente  $\vec{\zeta} = \vec{\eta} + \delta \vec{\eta}$ . Supongamos que esta transformación tiene como función generatriz  $F_2 = q_k p_k + \epsilon G(q, P, t)$  donde  $\sum q_k p_k$  es la función generatriz de la identidad. Las ecuaciones de transformación son:

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial}{\partial P_j} G(q, P, t) = q_j + \delta q_j,$$

donde

$$\delta q_j = \epsilon \frac{\partial}{\partial P_j} G(q, P, t) \approx \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}(q, p, t).$$

Al utilizar  $p$  en lugar de  $P$  en esta expresión hay una diferencia de orden dos en  $\epsilon$ , que podemos despreciar a nivel infinitesimal. De igual forma,

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}(q, P, t),$$

o de forma equivalente

$$P_j \approx p_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}(q, p, t) = p_u + \delta p_u.$$

Podemos resumir estas expresiones en notación simpléctica

$$\delta\eta = \begin{pmatrix} \delta q_j \\ \delta p_j \end{pmatrix} = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} = \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial q_j} \\ \frac{\partial G}{\partial p_j} \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial p_j} \\ -\frac{\partial G}{\partial q_j} \end{bmatrix}.$$

Podemos definir  $\zeta = \eta + \delta\eta$  de tal forma que

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} = \frac{\partial}{\partial \eta_j} [\eta_i + \delta\eta_i] = \delta_{ij} + \frac{\partial \delta\eta_i}{\partial \eta_j}.$$

Como vimos anteriormente  $\delta\eta_i = \epsilon J_{ik} \frac{\partial G}{\partial \eta_k}$  entonces

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[ \epsilon J_{ik} \frac{\partial G}{\partial \eta_k} \right] \\ &= \delta_{ij} + J_{ik} \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_j \partial \eta_k}, \\ \Rightarrow M^T &= \mathbf{1}^T + \left[ \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \right]^T \\ &= \mathbf{1}^T + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J^T. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $J^T = -J \Rightarrow J_{ki}^T = -J_{ki}$ , de tal forma que

$$M^T = \delta_{ij} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_j \partial \eta_k} J_{ki}.$$

Con estos resultados

$$\begin{aligned} MJM^T &= \left[ \mathbb{1} + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \right] \times J \left[ \mathbb{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J \right] \\ &= J - \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= J + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Podemos tomar a  $\epsilon$  como cualquier variable real que parametrice las coordenadas generalizadas, por ejemplo el tiempo,  $\epsilon = t$ , de tal forma que la evolución temporal es una TCI.

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t_0 + dt).$$

Aquí hemos demostrado que si se mantiene fijo el tiempo de tal forma que la TC no depende explícitamente de  $t$ , entonces la transformación es canónica. De igual forma, se mostró que la evolución temporal también es canónica. Se puede mostrar que las TC tienen las propiedades de un grupo y por tanto la aplicación sucesiva de TC también es una transformación canónica.

## 6.2 Corchetes de Poisson e Invariantes Canónicos

Los corchetes de Poisson se definen como

$$[u, v]_{q,P} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \quad (\text{suma sobre } i).$$

En notación simpléctica

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \left( \frac{\partial u}{\partial q_i}, \frac{\partial u}{\partial p_i} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial p_i} \\ \frac{\partial v}{\partial q_i} \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial q_i}, \frac{\partial u}{\partial p_i} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial v}{\partial q_i} \end{bmatrix} = [u, v]. \end{aligned}$$

En este caso  $u$  y  $v$  pueden ser funciones arbitrarias del espacio de fase, en particular  $u$  puede ser  $q_j$  y  $v = p_k$

$$\begin{aligned} [q_j, p_k] &= \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \\ &= \delta_{ji} \delta_{ki} = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

De forma similar podemos calcular el corchete de Poisson entre dos coordenadas generalizadas o dos momentos canónicos

$$\begin{aligned} [q_j, q_k] &= [p_j, p_k] = 0 \\ \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial q_k}{\partial q_i} &= 0. \end{aligned}$$

El corchete de Poisson es antisimétrico, es decir,

$$[v, u] = \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} = -[u, v].$$

En notación simpléctica también se puede hacer estas demostraciones

$$\begin{aligned} [v, u] &= \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial u}{\partial \eta} = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J^T \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^{TT} \right]^T \\ &= \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T (-J) \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right]^T. \end{aligned}$$

Pero  $[v, u]$  es un número, es decir, una matriz de dimensión  $1 \times 1$ , así que el transpuesto es el mismo, entonces

$$[v, u] = - \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] = -[u, v].$$

Otro resultado muy útil:

$$[\eta_l, \eta_m] = \frac{\partial \eta_l}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial \eta_m}{\partial \eta_j} = \delta_{li} J_{ij} \delta_{mj} = J_{lm}.$$

Si  $\left( \frac{\partial}{\partial p} \right) = \zeta \Rightarrow$  si  $\zeta$  es una TC de  $\eta$ .

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^T J \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = M^T J M = J.$$

Ya que  $\zeta$  es una variable canónica, también debe satisfacer

$$[\zeta, \zeta]_{\zeta} = J.$$

Este es un resultado importante, el corchete de Poisson  $[\zeta, \zeta]$  es invariante, es decir, es igual respecto a cualquier conjunto de coordenadas canónicas.

### 6.2.1 Invarianza del Corchete de Poisson bajo Transformaciones Canónicas

En la Sección anterior demostramos que el corchete de Poisson entre coordenadas canónicas  $[\zeta, \zeta]_{\eta}$  es independiente del conjunto de variables canónicas  $\eta$ . Este resultado también es válido para dos funciones arbitrarias del espacio de fase  $u$  y  $v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} &= \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} = M_{ij} \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} = M_{ji}^T \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} = M^T \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_j} &= M_{ij} \frac{\partial u}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial u}{\partial \zeta_i} M_{ij} := \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^T M. \end{aligned}$$

De esta forma

$$[u, v] = \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^T \underbrace{M J M^T}_{=J} \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^T J \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right).$$

Para cualquier par de funciones del espacio fase  $u, v$ , el corchete de Poisson  $[u, v]_{\eta}$  es el mismo independiente de  $\eta$ , por esta razón podemos omitir el subíndice  $\eta$ , es decir,  $[u, v]_{\eta} = [u, v]$ . Otras propiedades de los corchetes de Poisson son:  $[u, u] = 0$  ya que

$$[u, v] = -[v, u] \Rightarrow [u, u] = -[u, u] \Rightarrow 2[u, u] = 0 \Rightarrow [u, u] = 0.$$

Linealidad: Si  $a, b$  son números complejos (independiente de  $P, q$ ), entonces

$$[au + bv, \omega] = a[u, \omega] + b[v, \omega].$$

Esta propiedad la hereda de la linealidad del operador derivada

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial[au + b\omega]}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= a \frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + b \frac{\partial v}{\partial \eta} J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ &= a[u, \omega] + b[v, \omega]. \end{aligned}$$

Otra propiedad heredada del operador derivada es la regla de Leibnitz.

$$\begin{aligned} [uv, \omega] &= \left( \frac{\partial(uv)}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) v + u \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right]^T J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] v + \left[ u \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] \\ &= [u, \omega]v + u[v, \omega]. \end{aligned}$$

## 6.2.2 Identidad de Jacobi

La identidad de Jacobi es útil para demostrar otras identidades con corchetes de Poisson. Generalmente es satisfecha no trivialmente por álgebras anti-conmutativas (operadores que conmutan la satisfacen trivialmente). Para corchetes de Poisson la identidad es

$$[u, [v, \omega]] + [v, [\omega, u]] + [\omega, [u, v]] = 0.$$

Por comodidad definimos  $u_i = \frac{\partial u}{\partial \eta_i}$ ,  $v_{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$  con esta notación  $[u, v] = u_i J_{ij} v_j$ . Veamos el primer término de (6.2.2)

$$\begin{aligned} [u, [v, \omega]] &= u_i J_{ij} [v, \omega]_j \\ &= u_i J_{ij} [v_k J_{kl} \omega_l]_j \\ &= u_i J_{ij} [\overset{1}{v_{kj}} J_{kl} \omega_l + v_k \overset{2}{J_{kl} \omega_{lj}}]. \end{aligned}$$

Procediendo de forma idéntica para los otros términos

$$\begin{aligned} [v, [\omega, u]] &= v_i J_{ij} [\overset{2}{\omega_{kj}} J_{kl} u_l + \omega_k \overset{3}{J_{kl} u_{lj}}] \\ [\omega, [u, v]] &= \omega_i J_{ij} [\overset{3}{u_{kj}} J_{kl} v_l + u_k \overset{1}{J_{kl} v_{lj}}]. \end{aligned}$$

Consideremos los términos rotulados con 1. En particular  $\omega_i J_{ij} u_k J_{kl} v_{lj}$ , haciendo

$$i \rightarrow l, \quad k \rightarrow i, \quad l \rightarrow k, \quad j \rightarrow i,$$

este término resulta en

$$\omega_l J_{lj} u_i J_{ik} v_{kj} = u_i J_{ik} v_{kj} J_{lj} \omega_l = u_i J_{ik} v_{jk} J_{lj} \omega_l.$$

Intercambiando  $j$  con  $k$  obtenemos  $u_i J_{ij} v_{kj} J_{lk} \omega_l$ , que es exactamente el primer término (1), pero con  $J_{lk}$  en lugar de  $J_{kl}$ , como  $J_{lk} = -J_{kl}$  entonces estos términos se cancelan. De igual forma se cancelan los otros dos pares, demostrando así la identidad de Jacobi.

### 6.2.3 Invarianza del Elemento de Volumen en el Espacio de Fase

Un invariante importante en el formalismo simpléctico es el elemento de volumen del espacio de fase

$$(d\eta) = dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n.$$

Si hacemos una transformación de variables en el espacio de fase  $R^{2n} \rightarrow R^{2n}$  el elemento de volumen en las nuevas variables está dado por

$$(d\zeta) = dQ_1 dQ_2 \cdots dQ_n dP_1 dP_2 \cdots dP_n.$$

Estos elementos de volumen están relacionados por medio del Jacobiano de la transformación de coordenadas, es decir,

$$(d\zeta) = \det \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| (d\eta).$$

como  $M J M^T = J$ , por las propiedades de los determinantes tenemos que

$$(\det(M))^2 \det J = \det(J) = 1.$$

Esto es consistente con la interpretación del determinante del Jacobiano como el corchete de Poisson entre las coordenadas generalizadas y el momento canónico.

$$|\det(M)|^2 = 1 = \left| \det \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right|^2 = 1.$$

En una dimensión (dos dimensiones en el espacio de fase) tenemos

$$\det \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P]_{q,p} = 1.$$

En general  $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} M_{1i_1} M_{2i_2} \cdots M_{2ni_{2n}} = 1$  donde  $M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}$ .

### 6.3 Transformaciones canónicas y teoremas de conservación

Sea  $u = u(q, p, t)$  una función definida sobre el espacio de fase, entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}}_{[u, H]} + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

En notación simpléctica

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial H}{\partial \eta}}_{[u, H]} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Por ejemplo si  $u = q$

$$\dot{q}_i = [q_i, H] + \left( \frac{\partial q_i}{\partial t} \right)_{q_i, p_i} ; \quad \dot{p}_i = [p_i, H] + \frac{\partial p_i}{\partial t}.$$

Aquí tuvimos en cuenta que  $\frac{\partial q_i}{\partial t}$  y  $\frac{\partial p_i}{\partial t}$  son cero, ya que pertenecen al mismo conjunto de variables  $(q, P, t)$ . Estos casos se pueden escribir como

$$\dot{\eta} = [\eta, H] = J \frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

En notación indicial el último paso es

$$[\eta_k, H] = \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \delta_{ki} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j} = J_{kj} \frac{\partial H}{\partial \eta_j}.$$

De esto tenemos que

$$\dot{H} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Es decir  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ , este resultado ya lo habíamos obtenido anteriormente. Si  $u$  es una constante de movimiento  $\dot{u} = 0$  tenemos

$$\dot{u} = 0 = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = [H, u].$$

Si

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [H, u] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = [H, v] = 0.$$

siendo  $u, v$  constantes de movimiento, se puede mostrar que  $[u, v]$  no depende explícitamente del tiempo.

$$[u, [v, H]] + [v, [H, u]] + [H, [u, v]] = 0.$$

En notación simpléctica las transformaciones infinitesimales están dadas por

$$\zeta = \eta + \delta\eta = \eta + \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

como

$$[u, v]_\eta = \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad [\eta, u] = \left( \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right)^T J \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad [\eta, u] = J \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Haciendo  $u = G \Rightarrow$

$$[\eta, G] = J \frac{\partial G}{\partial \eta} \Rightarrow \delta\eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} = \epsilon [\eta, G].$$

Si  $t = \epsilon$  y  $H = G$ , entonces

$$\delta\eta = dt[\eta, H] = \cancel{dt} \frac{d\eta}{\cancel{dt}} = d\eta, \quad \eta = (q, P)$$

Aquí tuvimos en cuenta  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ .

Aquí cambiamos la interpretación pasiva de los cambios de coordenadas:  $u$  tiene el mismo valor en  $(q_0, p_0)$  y  $(Q_0, P_0)$ , pero las variables  $(Q, P)$  son más adecuadas para resolver el problema. En la interpretación pasiva  $u(q_0, p_0) = u(Q_0, P_0)$ , es decir, el valor de la función es el mismo en los dos sistemas coordenados. En la interpretación activa  $u(q_0, P_0)$  evoluciona con el tiempo de tal forma que  $q_0(t + \delta t) = Q$  y  $p_0(t + \delta t) = P$ . Es decir  $(q, p)$  y  $(Q, P)$  son puntos diferentes del mismo espacio de fase. La interpretación activa es muy adecuada para parametrizar el movimiento de un sistema de partículas. Definimos el cambio bajo transformación activa como  $\partial u$ , definido de la forma

$$\partial u = u(B) - u(A) = u(\eta + \delta\eta) - u(\eta) \tag{6.23}$$

$$\cong \frac{\partial u}{\partial \eta} \delta\eta = \partial\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} = \epsilon [u, G]. \tag{6.24}$$

Si  $u = \eta$ , entonces

$$\partial\eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} = \delta\eta$$

En general, transformaciones activas dependen de un parámetro. Bajo la transformación pasiva el hamiltoniano puede cambiar su forma funcional si la funcional generatriz tiene una dependencia explícita con el tiempo

$$K(A') = H(A') + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (F_2 = q_k P_k + \epsilon G)$$

Si hacemos una transformación pasiva de un sistema de coordenadas  $A$  a un sistema de coordenadas  $A'$  el valor de las funciones no cambia, en particular,  $K(A') = K(A)$ , ya que  $A'$  y  $A$  representan el mismo punto físico, pero descrito por diferentes coordenadas. En lo que sigue definiremos  $\partial H = H(B) - K(A')$ , esta definición coincide con la definición de  $\partial H$  que vimos para transformaciones activas, cuando el hamiltoniano no cambia por la transformación pasiva, es decir, cuando  $K(A') = H(A')$ . En general tenemos que

$$\begin{aligned}\partial H &= H(B) - \left[ H(A') + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} \right] \\ &= \underbrace{H(B) - H(A')}_{H(B) - H(A)} - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} \quad (\text{donde } H(A) = H(A')) \\ &= \epsilon [H, G] - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Aquí utilizamos la ecuación (6.24). De la relación  $\frac{dG}{dt} = [H, G] + \frac{\partial G}{\partial t}$

$$\Rightarrow [G, H] = -\frac{dG}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Remplazando este resultado en la ecuación (6.25) obtenemos

$$\partial H = \epsilon \left[ -\frac{dG}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t} \right] - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} = -\epsilon \frac{dG}{dt}.$$

Es importante notar que  $\partial H$  representa el cambio del hamiltoniano, por una transformación de coordenadas (transformación pasiva), que en principio puede cambiar funcionalmente el hamiltoniano, y una diferencia entre los hamiltonianos en dos puntos diferentes del espacio de fase (transformación activa). Si  $G$  es una constante de movimiento  $\dot{G} = 0$  y el hamiltoniano es una constante de movimiento. Por definición las constantes de movimiento son las funciones generatrices que dejan  $H$  invariante. Ejemplos, si  $q_i$  es una coordenada cíclica, sea  $G(q, P) = p_i$ , habíamos visto que para TCI

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

así que

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \epsilon \delta_{ij}, \quad \delta p_j = -\epsilon \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0.$$

Es decir, bajo esta transformación el momentum lineal se conserva. Si  $q$  es cíclica  $\frac{dp_i}{dt} = 0$

$$\partial H = -\epsilon \frac{dp_i}{dt} = 0.$$

Si la función generatriz está dada por

$$G_l = (J\eta)_l = J_{lr}\eta_r.$$

Los cambios en las variables canónicas debido a esta función son

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta\eta_k &= \epsilon J_{ks} \frac{\partial G_l}{\partial \eta_s} = \epsilon J_{ks} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta_s} J_{lr}\eta_r \right] \\ &= \epsilon J_{ks} J_{lr} \delta_{rs} = \epsilon J_{ks} J_{ls} = \epsilon J_{ks} J_{sl}^T = \epsilon \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Explícitamente el generador es

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ -q_i \end{pmatrix}.$$

Es decir, para  $l = i$   $G_l = p_i$  y  $\delta\eta_l = \delta q_i = \epsilon$  y para  $l = n + i$   $G_l = -q_i$  y  $\delta\eta_{n+1} = \delta p_i = \epsilon$ . En resumen: el generador de traslaciones en la coordenada generalizada  $q_i$  es su momento conjugado  $p_i$  y el generador de traslaciones del momento canónico  $p_i$  es el negativo de su correspondiente variable generalizada  $-q_i$ . Ahora veremos cual es el generador de rotaciones, para esto consideremos la rotación alrededor del eje z

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Para rotaciones infinitesimales  $\theta \sim d\theta \Rightarrow \cos(d\theta) \sim 1$  y  $\text{sen}(d\theta) \sim d\theta$ , esta expresión se reduce a:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta \\ d\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y d\theta \\ x d\theta + y \end{bmatrix}$$

Para las coordenadas esto implica

$$x' = x - y d\theta \quad y \quad y' = y + x d\theta.$$

Para los momentos tenemos un resultado similar

$$p'_x = p_x - p_y d\theta \quad y \quad p'_y = p_y + p_x d\theta.$$

Definiendo  $G = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}$  podemos obtener los mismos resultados para las coordenadas  $x$  y  $y$ , es decir,

$$\begin{aligned} \delta x &= d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = d\theta \frac{\partial}{\partial p_{ix}} [x_j p_{jy} - y_j p_{jx}] \\ &= d\theta (-y_j) \delta_{ji} = -d\theta y_i. \end{aligned}$$

De forma identica para  $y$

$$\delta y_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i d\theta.$$

Como mencionamos anteriormente, los generadores de traslaciones en los momentos son las variables del espacio de configuración, así que por analogía también podemos definir un generador de rotaciones en espacio de momentos.

$$\delta p_{ix} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j p_{jy} - y_j p_{jx}) = -d\theta p_{jy} \delta_{ij} = -d\theta p_{iy}.$$

De igual forma tenemos

$$\delta p_{iy} = p_{ix} d\theta.$$

El generador de las rotaciones para los momentos alrededor del eje  $z$  es el negativo del respectivo generador para las coordenadas en el espacio de configuración. De estos resultados podemos definir el generador de rotaciones alrededor del eje  $z$  como

$$(x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = G = L_z = (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \cdot \hat{k}. \quad (6.26)$$

Fácilmente podemos ver que estas definiciones coinciden. En notación vectorial el producto cruz está dado por

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ p_{ix} & p_{iy} & p_{iz} \end{vmatrix} = +(y_i p_{iz} - z_i p_{iy}) \hat{i} - (x_i p_{iz} - z_i p_{ix}) \hat{j} + (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) \hat{k} = \vec{L}.$$

De esta definición tenemos que

$$L_z = \vec{L} \cdot \hat{k} = G.$$

Podemos generalizar  $G$  para una rotación alrededor de cualquier vector unitario  $\hat{n} = \vec{n}$

$$G = \vec{L} \cdot \vec{n}$$

Es importante hacer notar que  $\vec{p}$  es el momento canónico, como vimos, cuando hay términos lineales con la velocidad generalizada  $\dot{q}$ ,  $p_{\text{canónico}} \neq \vec{p}_{\text{Lineal}}$ . Como vimos anteriormente, para TCI activas

$$\partial u = \epsilon [u, G]. \quad (6.27)$$

Haciendo  $d\alpha = \epsilon$ , tenemos que  $\partial u = d\alpha [u, G]$ . La expresión en serie de Taylor de  $u(\alpha)$  está dada por

$$u(\alpha) = u \Big|_{d\alpha=0} + \alpha \frac{du}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{d^3 u}{d\alpha^3}.$$



Para un número impar de  $L_z$ , es decir,  $n = 2k + 1$ , el signo  $\pm$  va alternando  $n = 1, -$ ; para  $n = 3, +$ ; para  $n = 5, -$ .

$$\text{Si } n = 2k + 1 \Rightarrow \text{ el signo es } (-1)^{k+1}.$$

Para  $n$  par tenemos

$$[[[X_i, L_z], L_z], \dots, L_z] = (-1)^k X_i.$$

Donde el signo corresponde a  $n = 2k$ . Así la expansión en serie de Taylor tendrá términos impares proporcionales a  $y_i$  y términos pares proporcionales a  $x_i$

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i \theta - x_i \frac{\theta^2}{2!} + y_i \frac{\theta^3}{3!} + x_i \frac{\theta^4}{4!} \\ &= x_i \left[ 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right] + -y_i \left[ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right] \\ X &= x_i \cos \theta - y_i \sin \theta. \end{aligned}$$

Este resultado corresponde a una rotación. Ahora consideremos el caso en el que la función generatriz es el hamiltoniano, es decir,  $G = H$ , en este caso el parámetro infinitesimal es el tiempo y de la ecuación (6.27) tenemos

$$du = dt[u, H].$$

En este caso  $\frac{du}{dt} = [u, H]$ , con solución formal

$$u(t) = u_0 + t[u, H] \Big|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} [[u, H], H] \Big|_{t=0} + \frac{t^3}{3!} [[[u, H], H], H] \Big|_{t=0}. \quad (6.32)$$

Si aplicamos este resultado al Hamiltoniano de una partícula con una aceleración constante  $a$

$$H = \frac{p^2}{2m} - max.$$

Para la derivada de  $x$  respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [x, H] = \left[ x, \frac{p^2}{2m} - max \right] = \left[ x, \frac{p^2}{2m} \right] \\ &= \frac{p}{2m} \underbrace{[x, p]}_1 + \underbrace{[x, p]}_1 \frac{p}{2m} = \frac{p}{2m} + \frac{p}{2m} = \frac{p}{m}. \end{aligned}$$

A segundo orden tenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[ \underbrace{[x, H]}_{\frac{p}{m}}, H \right] = \left[ \frac{p}{m}, H \right] = \left[ \frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m} - max \right] = -\frac{ma}{m} [1, x] = a = \text{Constante}.$$

A orden 3

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \left[ \underbrace{[[x, H], H]}_a, H \right] = [a, H] = 0.$$

De igual forma tendremos para ordenes superiores. Reemplazando estos resultados en la ecuación (6.32) obtenemos

$$X = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{a}{2!}t^2 = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2.$$

### 6.3.1 Momento Angular y los Corchetes de Poisson

Si  $\vec{F}$  es un vector que depende de  $\alpha$  en el espacio, para una TCI en la interpretación activa tenemos que

$$\partial F_i = d\alpha[F_i, G] = d\theta[F_i, \vec{L}\vec{n}].$$

Esto de (6.24). Para una rotación infinitesimal  $d\alpha = \theta$ . En la interpretación activa, (6.3.1) rota las componentes del vector pero no las bases.  $\vec{L} \cdot \vec{n}$  solo genera rotaciones para  $F = F_i(q, P)$ , no para vectores externos (no rota los  $\hat{e}_i$ ).  $F_i$  debe ser un vector del sistema!. De la ecuación (4.5) para una rotación  $d\theta$  al rededor de un eje normal  $\vec{n}$ , el incremento en el vector posición está dado por

$$d\vec{r} = d\theta \hat{n} \times \vec{r}.$$

Por analogía podemos extrapolar este resultado para un vector  $\vec{F}$  en el espacio

$$d\vec{F} = d\theta \hat{n} \times \vec{F},$$

donde el vector gira un ángulo  $d\theta$  alrededor del eje  $\hat{n}$ . Si

$$\partial \vec{F} = d\theta [\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = d\theta \hat{n} \times \vec{F} \quad (\hat{n} = \vec{n}).$$

Ya que el  $d\theta$  es arbitrario, se debe entonces cumplir que

$$[\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \hat{n} \times \vec{F}.$$

Veamos un ejemplo

$$\begin{aligned} [p_x, L_z] &= [p_x, xp_y - yp_x] \\ &= [p_x, x]p_y - [p_x, y]p_x = -p_y. \end{aligned}$$

De igual forma se puede mostrar que  $[p_y, L_z] = p_x$  y  $[p_z, L_z] = 0$ . En resumen:

$$[\vec{p}, \vec{L} \cdot \hat{k}] = [-p_y, p_x, 0]. \quad (6.33)$$

Para entender este resultado hagamos el producto cruz

$$\hat{k} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = -p_y \hat{i} + p_x \hat{j} + 0 \hat{k}. \quad (6.34)$$

Comparando (6.33) y (6.34) obtenemos

$$[\vec{p}, \vec{L} \cdot \hat{k}] = \hat{k} \times \vec{p}.$$

Es importante mencionar aquí que esto es cierto sólo para vectores del sistema, es decir, vectores que sean funciones de  $p, q$  y el tiempo. En caso de tener un vector, como un campo magnético, que no esté escrito en términos de las variables del espacio de fase, el generador de rotaciones no actúa. Por ejemplo, sea  $\vec{F} = \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$  el potencial vector de un campo magnético con componentes  $\vec{B} = B\hat{i} = (B, 0, 0)$ , entonces

$$[\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \left[ \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B}), L_z \right].$$

Las componentes de  $A$  son

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [0\hat{i} + zB\hat{j} - yB\hat{k}].$$

De esta expresión podemos calcular el corchete de Poisson  $[\vec{A}, \vec{L}_z]$ , es decir,

$$[0, \vec{L}_z] = 0, \quad \underbrace{\left[ \frac{zB}{2}, L_z \right]}_{(1)}, \quad \underbrace{\left[ \frac{-yB}{2}, L_z \right]}_{(2)}.$$

El término (1) es:

$$\left[ \frac{1}{2}zB, xp_y - yp_x \right] = 0$$

porque el corchete de Poisson de  $z$  con  $x, p_y, y$  y  $p_x$  es cero. El segundo término (2) es:

$$\frac{1}{2}[-yB, xp_y - yp_x] = -\frac{B}{2}[y, p_y]x = -\frac{Bx}{2}.$$

En resumen

$$[\vec{A}, L_z] = [\vec{A}, \vec{L} \cdot \hat{k}] = \left[ 0, 0, \frac{-Bx}{2} \right].$$

Este resultado se puede comparar con el producto cruz

$$\hat{k} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{zB}{2} & \frac{-yB}{2} \end{vmatrix} = \hat{i} \left( \frac{-zB}{2} \right) + 0\hat{j} + 0\hat{k}.$$

Vemos que  $[\vec{A}, L_z] = [\vec{A}, \vec{L} \cdot \hat{k}] \neq \vec{k} \times A$ . El vector  $\vec{A} = \vec{r} \times \vec{B}$  debe transformar como un vector del sistema para poder satisfacer el teorema. En el ejercicio anterior  $B$  no cambia con la TCI, por lo tanto  $\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$  tampoco lo hace. La relación  $[\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{F}$  se puede escribir como:

$$[\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{F}.$$

En notación indicial

$$[F_i, L_j n_j] = \epsilon_{ijk} n_j F_k.$$

Factorizando  $n_j$

$$[F_i, L_j] - \epsilon_{ijk} n_j = 0$$

Ya que  $n_j$  es arbitrario, se tiene que

$$[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k.$$

Veamos que pasa con el producto escalar de dos vectores del sistema  $\vec{F} \cdot \vec{G}$

$$\begin{aligned} [\vec{F} \cdot \vec{G}, \vec{L} \cdot \vec{n}] &= [F_i G_i, L_j n_j] \\ &= F_i [G_i, L_j n_j] + [F_i, L_j n_j] G_i \\ &= F_i [G_i, L_j] n_j + [F_i, L_j] n_j G_i \\ &= F_i \epsilon_{ijk} G_k n_j + \epsilon_{ijk} F_k n_j G_i \\ &= \epsilon_{ijk} F_i n_j G_k + \epsilon_{ijk} G_i n_j F_k. \end{aligned}$$

En el segundo término podemos renombrar índices (Todos son mudos, es decir, se están sumando) haciendo  $k \rightarrow i$ ,  $i \rightarrow k$  de tal forma que

$$[\vec{F} \cdot \vec{G}, \vec{L} \cdot \vec{n}] := \epsilon_{ijk} F_i n_j G_k + \underbrace{\epsilon_{kji} G_k n_j F_i}_{-\epsilon_{ijk} F_i n_j G_k} = 0.$$

Aquí tuvimos en cuenta que  $\epsilon_{kji} = \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}$ . Este resultado debe tenerse, ya que  $\vec{F} \cdot \vec{G}$  es un escalar y por lo tanto debe permanecer invariante ante TCI asociadas a rotaciones. De la relación  $[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k$ , haciendo  $F_i \rightarrow L_i$  se obtiene el resultado

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k.$$

De igual forma haciendo  $F = G = L$  en  $[\vec{F} \cdot \vec{G}, L \cdot n] = 0$ , obtenemos  $[L^2, L \cdot n] = 0$ . De la ecuación (6.3.1) tenemos para  $i = x$ ,  $j = y$

$$[L_x, L_y] = L_z.$$

Si  $L_x$  y  $L_z$  son constantes de movimiento,  $L_z$  también debe ser constante de movimiento. Esto por la identidad de Jacobi. (Vimos que si  $u, v$  son constantes de movimiento, también  $[u, v]$  lo será) Si además (asumimos que  $\vec{L}$  se conserva)  $p_z$  se conserva, entonces  $p_y$  también es una cantidad conservada

$$[p_z, L_x] = +p_y.$$

(esto se tiene de hacer  $\vec{p} = F \Rightarrow [\vec{p}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{p}$ ). Siguiendo este razonamiento  $[p_z, L_y] = -p_x \Rightarrow p_x$  también se conserva. En resumen, si dos componentes de  $\vec{L}$  se conservan y una componente del momento canónico también se conserva, entonces los vectores  $\vec{L}$  y  $\vec{p}$  se conservan. Hay un caso interesante. Suponga que se conserva  $p_x, p_y$  y  $L_z$ , entonces

$$[p_x, p_y] = 0, [p_x, L_z] = -p_y \text{ y } [p_y, L_z] = p_x.$$

Sus conmutadores no involucran otros momentos, y por lo tanto no hay otras cantidades que se conserven. Este conjunto cerrado bajo los corchetes de Poisson va a corresponder a una subálgebra cuando vayamos a conmutadores.  $L_x, L_y, L_z$ , no pueden ser momentos canónicos simultáneamente, ya que los momentos canónicos conmutan entre sí. A nivel cuántico las variables canónicas cuyos corchetes de Poisson conmutan entre si, corresponden a operadores que simultáneamente son diagonalizables. Esto es posible para un  $L_j$  y el cuadrado del momento angular total  $L^2$ .

### 6.3.2 Teorema de Liouville

En esta Sección demostraremos que la densidad de estados  $\rho$  en un ensamble con un gran número de estados idénticos con condiciones iniciales diferentes es constante en cada trayectoria del espacio fase. Sea  $\vec{J} = \rho \dot{\eta}$  el flujo de estados en el espacio de fase, entonces

$$\int_U \overset{\text{La integral}}{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} (d\eta)_{2n}} = \int_{\partial U} \overset{\text{Teorema de Stokes}}{\vec{J} \cdot \vec{n} (dS)_{2n-1}},$$

donde  $(d\eta)_{2n} = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ ,  $U$  es un volumen del espacio de fase y  $\partial U$  es una "superficie" en  $2n - 1$  dimensiones, que corresponde a la frontera de  $U$ . El vector unitario en el espacio de fase  $\vec{n}$  está definido de tal forma que es normal a la superficie, es decir, si  $v \in T(\partial U)$ ,  $v$  es un vector tangente, entonces  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ . La densidad de estados es una función de las variables del espacio de fase, es decir,  $\rho = \rho(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \rho(\eta)$ , integrando  $\rho$  sobre todo el espacio obtenemos el número total de estados  $Q$  en el volumen de integración

$$Q = \int_U \rho d\eta.$$

La variación del número de estados en un volumen  $U$  debe ser igual a menos el valor de los estados que fluyen por la superficie, es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\partial U} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (6.35)$$

Esto se debe a que los puntos en el espacio fase no desaparecen. A la integral de superficie le podemos aplicar el teorema de la divergencia de tal forma que

$$\int_{\partial U} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial U} \vec{J} \cdot \vec{n} (dS)_{2n-1} = \int_U (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) (d\eta)_{2n}.$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (6.35) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int \rho d\eta + \int_U (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\eta \\ &= \int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} d\eta + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\eta \right] = 0 \end{aligned}$$

Cuando  $\frac{d}{dt}$  entra en la integral solo se aplica a la dependencia explícita de  $\rho$  con el tiempo, las otras variables se están integrando, esa es la razón de utilizar una derivada parcial en lugar de la derivada total dentro del integrando. Ya que el volumen  $U$  que estamos considerando es arbitrario, el integrando debe ser cero en todo punto, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

Esta es la ecuación de continuidad, y nos dice que el número de estados del sistema no cambia. La divergencia del flujo de estados puede reescribirse como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} (\rho \eta_i) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left[ \rho J_{ij} \frac{\partial H}{\partial n_j} \right] \quad (6.36)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial n_j} + \rho J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta_i \partial n_j}. \quad (6.37)$$

Ya que la contracción de un tensor antisimétrico con un simétrico es cero, por ejemplo: si  $S$  es simétrico,  $S_{ij} = S_{ji}$  y  $A$  antisimétrico,  $A_{ij} = -A_{ji}$ , entonces

$$S_{ij} A_{ji} = \frac{1}{2} [S_{ij} A_{ji} + \underbrace{S_{ji} A_{ij}}_{\substack{i \leftrightarrow j \\ \text{Renombrando}}} ] = \frac{1}{2} [S_{ij} A_{ji} + S_{ji} A_{ij}] = \frac{1}{2} [S_{ij} A_{ji} - S_{ij} A_{ji}] = 0.$$

Este resultado lo podemos aplicar en el segundo término del lado derecho de (6.37), ya que

$$J_{ij} = -J_{ji} \text{ y } S_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial \eta_i \partial n_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial n_j \partial \eta_i} = S_{ji}.$$

Es decir este término es cero

$$J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = 0.$$

Esto nos lleva al resultado

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \eta_j} = [\rho, H].$$

Dado que la densidad de estados  $\rho$  es una función de las variables del espacio de fase y del tiempo, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= [\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} \\ \Rightarrow [\rho, H] &= \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Este teorema nos dice que en un punto del espacio de fase la densidad de estados no cambia. El teorema de Liouville no implica que la densidad sea uniforme en todo el espacio de fase. El teorema establece que en un punto del espacio de fase la densidad de estados es constante. Si tomamos una frontera de un volumen en el espacio de fase y contamos el número de estados dentro de esa frontera ese número es constante. Con el paso del tiempo las ecuaciones de movimiento mapean la frontera en una nueva frontera y los puntos dentro de la frontera se mapean como puntos internos respecto a la nueva frontera (Un punto interno no puede convertirse en frontera ni al revés). Ya que la evolución temporal es una transformación canónica el volumen dentro de la frontera se conserva.

## Ejercicios Capítulo 6

**P1:** Pruebe que la transformación

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right), \quad P = q \cot p$$

es canónica directamente usando corchetes de Poisson, es decir, verifique que  $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ .

**P2:** Muestre que la transformación

$$Q = \arctan\left(\frac{\alpha q}{p}\right), \quad P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)$$

es canónica para una constante  $\alpha$ . (Este es un ejercicio que aparece como solución de capítulo 9 de Goldstein) :contentReference[oaicite:4]index=4

**P3:** Considere la transformación dependiente del tiempo

$$Q = q, \quad P = p + f(q, t),$$

donde  $f(q, t)$  es una función conocida. Determine qué condición debe satisfacer  $f$  para que la transformación sea canónica, y encuentre la función generadora correspondiente.

**P4:** Para el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

considere una transformación canónica que convierta este Hamiltoniano en una forma con  $P$  constante (variable cíclica). Proponga una función generadora  $F_2(q, P)$  que logre esto en el caso particular de  $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$ .

**P5:** Demuestre la condición simplicial (simpléctica) de la transformación canónica: si  $M$  es la matriz jacobiana de la transformación de  $(q, p)$  a  $(Q, P)$ , entonces debe cumplirse

$$MJM^T = J,$$

donde  $J$  es la matriz canónica estándar antisimétrica. Use esto para verificar que las transformaciones lineales de tipo escalamiento con determinante uno son canónicas.

**P6:** Considere una transformación generada por  $F_2(q, P)$ . De las relaciones

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

muestre explícitamente cómo se transforman el Hamiltoniano  $H(q, p)$  a  $K(Q, P)$  mediante

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

**P7:** Sea un generador infinitesimal  $G(q, p)$ , y considere la transformación

$$q \rightarrow q + \epsilon\{q, G\}, \quad p \rightarrow p + \epsilon\{p, G\}, \quad \epsilon \ll 1.$$

Demuestre que esta transformación es canónica a primer orden en  $\epsilon$ . Luego, interprete por qué  $G$  puede considerarse “el generador” de la transformación.

**P8:** Use una transformación canónica (específica) para resolver el oscilador armónico unidimensional sin resolver directamente las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, elija un generador que transforme el Hamiltoniano en función de  $P^2 + Q^2$  tipo círculo, y luego reinterprete las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables.

**P9:** Para el Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha qp \cdot t,$$

proponga una transformación canónica que elimine la dependencia del tiempo (o la reduzca) si es posible. Determine la función generadora adecuada.

**P10:** (Desafío) Analice una transformación que escale el tiempo junto con  $q$  y  $p$ , es decir,

$$Q = \lambda q, \quad P = \mu p, \quad t' = \nu t,$$

con constantes adecuadas  $\lambda, \mu, \nu$ . Determine las condiciones bajo las cuales esta transformación puede ser considerada “canónica extendida”. Luego, aplique esta transformación (cuando sea válida) al Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^n,$$

y verifique cómo cambia su forma.

**P11:** Para un sistema de dos grados de libertad  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$ , considere la transformación:

$$Q_1 = q_1 + p_2, \quad Q_2 = q_2, \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2 - q_1.$$

(a) Verifique que esta transformación es canónica comprobando los corchetes de Poisson.  
 (b) Encuentre una función generadora (tipo  $F_2$  o  $F_3$ ) que produzca esta transformación.

**P12:** Demuestre que la composición de dos transformaciones canónicas es nuevamente una transformación canónica. Use la propiedad de los corchetes de Poisson para argumentar la preservación de la estructura canónica.

**P13:** Sea una transformación canónica que convierte  $(q, p)$  en  $(Q, P)$ . Si una función  $F(q, p)$  es constante de movimiento (es decir  $\{F, H\} = 0$ ), muestre que la función transformada  $F'(Q, P) = F(q(Q, P), p(Q, P))$  también es constante de movimiento (con respecto al nuevo Hamiltoniano  $K$ ).

**P14:** Dado un Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{q^2},$$

proponga una transformación canónica que transforme este Hamiltoniano en uno con forma más simple (por ejemplo, reducir el problema a un Hamiltoniano libre con coordenada “radial modificada”), y explique cómo resolverías el movimiento en las nuevas variables.

**P15:** Para la transformación

$$Q = \sqrt{q} \cos p, \quad P = \sqrt{q} \sin p,$$

verifique si esta transformación es canónica o no mediante los corchetes de Poisson. En caso afirmativo, determine la función generadora correspondiente.

**P16:** Considere la transformación

$$Q = \frac{p}{q}, \quad P = q^2 p,$$

y determine las condiciones en que esta transformación puede ser canónica (por ejemplo, valores de constantes de escala). Encuentre el generador si existe.

**P17:** Considere una transformación dependiente del tiempo con generador  $F_1(q, Q, t)$ . Escriba la relación general entre los Hamiltonianos viejo y nuevo:

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

y use esta relación para construir un ejemplo explícito donde  $K$  es independiente del tiempo aunque  $H$  no lo sea.

**P18:** Para el oscilador armónico unidimensional con Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2,$$

considere la transformación generada por

$$F_2(q, P) = \frac{qP}{2} + \frac{m\omega}{4}q^2 \tan^{-1}\left(\frac{q}{P/m\omega}\right).$$

(a) Derive las relaciones entre  $(q, p)$  y  $(Q, P)$ . (b) Muestre que en las variables nuevas el Hamiltoniano adquiere la forma  $K = \omega(Q^2 + P^2)/2$ .

## 7. Teoría de Hamilton-Jacobi

Como se ha mencionado anteriormente, las transformaciones canónicas pueden utilizarse para resolver las ecuaciones de movimiento. Ya sea que en el nuevo sistema de coordenadas las nuevas variables sean cíclicas o de forma alternativa constantes de movimiento. Sin embargo, en su importancia en la Física radica en el papel crucial de este formalismo en el origen de la Mecánica Cuántica. El método de cuantización de Wilson y Sommerfeld proponía la discretización de las variables de acción para sistemas dinámicos periódicos o casi periódicos. Con este método se logró calcular la estructura fina del átomo de hidrógeno y el espectro de varias moléculas. Adicionalmente, los invariantes adiabáticos están relacionados con estas variables. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos el formalismo de las variables acción-ángulo ofrece un método para calcular las frecuencias y constantes de movimiento de un sistema físico.

### 7.1 Ecuaciones de Hamilton-Jacobi (JH)

Haciendo una TC para obtener variables que sean constantes en el tiempo es equivalente a

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0; \quad -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0, \quad (7.1)$$

donde  $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ . Es claro que si  $K = 0$  satisface automáticamente (7.1), así que imponemos esta condición

$$K = H(q, P, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (7.2)$$

Resulta conveniente tener a  $F = F_2(q, P, t)$  de tal forma que  $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ . Así nuestro problema mecánico se convierte en una ecuación en derivadas parciales

$$H \left( q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (7.3)$$

La ecuación (7.3) se conoce como ecuación de Hamilton-Jacobi; y es una ecuación en derivadas parciales en las  $(n + 1)$  variables  $(q_i, t)$ . Es costumbre definir  $S = F_2$ . Si los momentos  $P_i$  son constantes  $\alpha_i \Rightarrow$

$$F_2 = S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, t),$$

donde los  $\alpha_i$  corresponden a los  $n$  momentos de  $P_i$  y a la energía.  $S$  se conoce como la función principal de Hamilton. Es importante notar que si  $S$  es solución de 7.3 también  $S + \alpha$  es solución con  $\alpha$  una constante. Eliminando la constante aditiva  $S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, t)$ , como  $\alpha_i = P_i \Rightarrow$  de las ecuaciones para  $F_2$  tenemos

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (7.4)$$

donde los  $q$  y los  $\alpha$  refieren a los  $q_i$  y  $\alpha_i$ . Para  $t = 0$  o  $t = t_0$ , (7.4) permite determinar  $\alpha_i$  como funciones de  $q_0$  y  $t_0$ . De la segunda ecuación para los  $Q_i$

$$Q_i = \beta = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (7.5)$$

Ya vimos que  $\dot{Q}_i = 0$ , por lo tanto  $Q_i = \beta_i$  una constante. EL valor de  $\beta$  se puede obtener en términos de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t$

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t). \quad (7.6)$$

Una vez se conoce las  $q$ , podemos obtener los  $p_i$  de (7.4)

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad (7.7)$$

de tal forma que las Ecuaciones (7.6) y (7.7) representan la solución formal del problema. La función principal de Hamilton la podemos identificar con la acción.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (7.8)$$

donde  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ . Como  $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -H$  así

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (7.9)$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$S = \int dS = \int (p_i \dot{q}_i - H) dt + \text{Constante.} \quad (7.10)$$

Si  $H$  no depende explícitamente del tiempo (i.e. El hamiltoniano es una constante) de la ecuación (7.10) tenemos

$$\begin{aligned} S &= \int p_i \dot{q}_i dt - H \int dt \\ &= \int p_i \frac{dq_i}{dt} dt - \alpha t = \int p_i dq_i - \alpha t \\ S &= W(q, \alpha) - \alpha t. \end{aligned} \quad (7.11)$$

$W$  se conoce como la función característica de hamilton. Es inmediato que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i - \alpha = p_i \dot{q}_i - H.$$

Al comparar con (7.9)

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (7.12)$$

Es decir  $\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i$ . Así que  $dW = p_i \dot{q}_i dt$

$$W = \int p_i \frac{dq_i}{dt} dt = \int p_i dq_i. \quad (7.13)$$

Como habíamos visto anteriormente.

### 7.1.1 Oscilador Armónico

El oscilador armónico es el ejemplo obligatorio en todo formalismo. Del hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} [P^2 + m^2 \omega^2 q^2] = E; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

podemos escribir la ecuación de HJ

$$H \left( q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

De  $p = \frac{\partial W}{\partial q}$  la ecuación de HJ, en términos de la función principal es

$$\begin{aligned} H \left( q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}; t \right) - \alpha &= 0, \\ \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] - \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Despejando  $\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\alpha - m^2\omega^2 q^2.$$

Como  $W$  sólo depende de  $q$ , entonces la derivada parcial puede considerarse como una derivada total, es decir,  $\frac{\partial}{\partial q} = \frac{d}{dq}$

$$dW = \sqrt{2\alpha m - m^2\omega^2 q^2} dq \Rightarrow W = \int \sqrt{2\alpha m - m^2\omega^2 q^2} dq.$$

De las ecuaciones para  $F_2$  tenemos

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t \quad (S = W - \alpha t).$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^q \sqrt{2\alpha m - m^2\omega^2 q^2} dq = \int_0^q \frac{\partial}{\partial \alpha} [2\alpha m - m^2\omega^2 q^2]^{1/2} dq \\ &= - \int [2\alpha m - m^2\omega^2 q^2]^{-1/2} 2m dq = \frac{1}{2} \int_0^q \frac{2m dq}{\sqrt{2\alpha m - m^2\omega^2 q^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^q \frac{2m dq}{\sqrt{2\alpha m} \sqrt{1 - \frac{m^2\omega^2 q^2}{2\alpha m}}} = \frac{1}{2} \int_0^q \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \frac{dq}{\sqrt{1 - A^2 q^2}}. \end{aligned}$$

Esta expresión se puede integrar si hacemos el cambio de variable

$$\sin^2 \theta = A^2 q^2 \quad q = \frac{\sin \theta}{A} \quad dq = \cos \theta \frac{d\theta}{A}.$$

De tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \int \frac{\cos \theta d\theta / A}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1}{2A} \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \theta + \text{Constante}. \end{aligned}$$

Una constante de integración que puede absorber en  $\beta'$ .

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t = \sqrt{\frac{m}{2\alpha A^2}} \sin^{-1}(Aq) - t$$

donde  $\sqrt{\frac{m}{2\alpha A^2}} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha \left[\frac{m\omega^2}{2\alpha}\right]}} = \frac{1}{\omega}$

De esto tenemos

$$\beta' = \frac{\text{sen}^{-1}(Aq)}{\omega} - t.$$

O de forma equivalente

$$q = \frac{1}{A} \text{sen}(\omega t + \beta') = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \beta'). \quad (7.14)$$

Procediendo de forma similar podemos calcular el momento

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \int^q \sqrt{2\alpha m - m^2 \omega^2 q'^2} dq' = \sqrt{2\alpha m - m^2 \omega^2 q^2}.$$

De la Ec. (7.14) obtenemos

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2\alpha m - m^2 \omega^2 \left[ \frac{2\alpha}{m\omega^2} \right] \text{sen}^2(\omega t + \beta'')} = \sqrt{2\alpha m - 2\alpha m \text{sen}^2(\omega t + \beta'')} \\ &= \sqrt{2\alpha m} \cos(\omega t + \beta'') \end{aligned}$$

### 7.1.2 Oscilador Armónico Anisotrópico

Un oscilador armónico anisotrópico oscila de forma diferente respecto a cada uno de los ejes. En dos dimensiones este oscilador tiene como hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + m^2 \omega_x^2 x^2 + m^2 \omega_y^2 y^2].$$

$$\text{Con } \omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}.$$

Si  $S(x, y, \alpha, \alpha_y, t) = W(x, y) - \alpha t = W_x(x, \alpha) + W_y(y, \alpha_y) - \alpha t$  la ecuación de HJ resulta en

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + m^2 \omega_x^2 x^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + m^2 \omega_y^2 y^2 \right] = \alpha. \quad (7.15)$$

Separando variables

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 = \alpha_y \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 = \alpha_x. \quad (7.17)$$

Con  $\alpha = \alpha_x + \alpha_y$ . Aquí podemos resolver de forma automática

$$p_x = \sqrt{2m\alpha_x} \cos(\omega_x t + \beta_x), \quad x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}} \text{sen}(\omega_x t + \beta_x),$$

$$p_y = \sqrt{2m\alpha_y} \cos(\omega_y t + \beta_y), \quad y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega_y^2}} \text{sen}(\omega_y t + \beta_y).$$

### 7.1.3 Oscilador Armónico Isotrópico

El caso isotrópico se define como  $k_x = k_y$  y  $\omega_x = \omega_y = \omega$ , es decir

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$

en este caso el potencial es

$$\frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2.$$

En coordenadas polares la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2.$$

con  $p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$  y  $p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ , de esto podemos obtener  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$  y  $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$  de tal forma que podemos escribir el hamiltoniano como

$$H = \frac{1}{2} m \left( \frac{p_r^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7.18)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (7.19)$$

Para este hamiltoniano podemos hacer separación de variables

$$S(r, \theta, \alpha, \alpha_\theta) = W_r(r, \alpha) + W_\theta(\theta, \alpha_\theta) - \alpha t.$$

En el hamiltoniano (7.19)  $\theta$  es cíclica por tanto  $p_\theta$  es una constante de movimiento

$$W_\theta = \int p_\theta d\theta = p_\theta \int d\theta = p_\theta \theta.$$

Si  $p_\theta = \alpha_\theta = \text{Constante} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$  (de Eq. (7.4))  $p = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$  la ecuación de HJ se reduce a

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{2m r^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \alpha.$$

como

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$= \left[ \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \right]^2 + \left[ \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t) \right]^2$$

$$= \frac{2\alpha}{m\omega^2} [\sin^2(\omega t + \beta) + \sin^2(\omega t)].$$

Aquí tomamos  $\beta'' = 0$  para  $y$  y  $\beta'' = \beta$  para  $x$  sin perder generalidad

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{sen } \omega t}{\text{sen}(\omega t + \rho)}\right)$$

Para  $\beta = 0$

$$r = \sqrt{\frac{4\alpha}{m\omega^2}} \text{sen } \omega t \quad , \quad p_r = m \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{4\alpha}{m\omega^2}} \text{sen } \omega t \right) = \sqrt{4m\alpha} \cos \omega t$$

$$\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad p_\theta = mr^2 \dot{\theta} = 0.$$

Para  $\beta = 0$  la solución parametriza una línea recta, para  $\beta = \pi/2$  círculo. Las figuras que se generan variando  $\beta$  se conocen como figuras de Lissajous.

### 7.1.4 Función Característica de Hamilton

Para sistemas con  $H$  que no tienden explícitamente de  $t$  la ecuación HJ se puede escribir como

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1.$$

En este caso la función generatriz hereda de  $S$  las propiedades

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \quad (7.20)$$

Como  $W$  no depende explícitamente del tiempo

$$H + \frac{\partial W}{\partial t} = K = \alpha_1. \quad (7.21)$$

Es decir,  $K$  es igual a la energía. De las ecuaciones de Hamilton tenemos

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_1,$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0.$$

Resumiendo estos resultados

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \dot{Q}_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = (1) \\ 0 & \text{para } i \neq 1 \end{cases} \quad (7.22)$$

$$Q_1 = t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad Q_i = \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \quad (7.23)$$

De  $p_i = \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q_i}$  podemos obtener  $\alpha = \alpha(q_0, p_{i0})$  para  $t = t_0$ . De (7.20) y (7.23) podemos obtener  $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ .

### 7.1.5 Separación de Variables

Si  $q_1$  es una coordenada separable, entonces podemos escribir la función principal de Hamilton como

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = S_1(q_1; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + S'(q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

Si la ecuación es completamente separable, entonces

$$S = \sum_i S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \equiv S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t).$$

Suma índices repetidos

La ecuación de Hamilton es:

$$H_i\left(q_j; \frac{\partial S_j}{\partial q_j}; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t\right) + \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0.$$

Si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo

$$S_i(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = W_i(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) - \alpha_1 t.$$

Este resultado nos permite desacoplar todas las variables

$$H_i\left(q_i; \frac{\partial W_i}{\partial q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_i.$$

(no hay sumas sobre  $i$ ) Si la coordenada cíclica es  $q_1$  y su momento  $\gamma$

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \gamma, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \tag{7.24}$$

Sea

$$W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \dots, q_n; \alpha) \tag{7.25}$$

$$p_1 = \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \Rightarrow W_1 = \int \gamma dq_1 = \gamma \int_0^{q_1} dq = \gamma q_1. \tag{7.26}$$

### 7.1.6 Problema de una Fuerza Central en Coordenadas Polares

En el problema de fuerza central podemos aplicar los formalismos estudiados hasta ahora. El hamiltoniano de fuerza central está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} \right] + V(r).$$

En este hamiltoniano la variable  $\psi$  es cíclica por tanto

$$W = W_1(r) + \alpha_\psi \psi,$$

donde  $p_\psi = \alpha_\psi$  corresponde al momento angular. La ecuación de HJ es

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1.$$

Donde

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}},$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{\quad} \Rightarrow dW_1 = \sqrt{\quad} dr \quad W_1 = \int \sqrt{\quad} dr.$$

Sumando las dos expresiones obtenemos

$$W = W_1 + \alpha_\psi \psi$$

$$= \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} + \alpha_\psi \psi.$$

De la ecuación (7.23) se tiene

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \alpha_\psi^2/r^2}}. \quad (7.27)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} = - \int \frac{\alpha_\psi dr}{r^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}}.$$

### 7.1.7 Problema de Fuerza Central en Coordenadas Esféricas

En este caso el hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \left[ P_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r).$$

La función principal de Hamilton es separable y está dada por

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi).$$

Como  $\phi$  es una variable cíclica  $W_\phi = \alpha_\phi \phi$  y la ecuación de HJ es

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \underbrace{\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta}}_{\equiv \alpha_\theta^2} \right] + 2mV(r) = 2mE.$$

O de forma equivalente

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m(E - V).$$

Vemos que esta forma de las ecuaciones de HJ resulta idéntica al caso de coordenadas cilíndricas. La razón es que el movimiento de dos cuerpos sujetos a una fuerza central la dinámica se reduce a un plano.

## 7.2 Variables Acción-Ángulo

Para sistemas periódicos resulta muy convincente utilizar un conjunto de variables que se relacionan con las frecuencias del sistema. Consideremos el hamiltoniano

$$H(q, p) = \alpha_1.$$

Este puede resolverse para el momento  $p = p(q, \alpha_1)$  cuyas soluciones se pueden clasificar en dos tipos “Libración” y rotación. Por ejemplo, para el péndulo simple de longitud  $l$

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + l(1 - \cos \theta).$$

En coordenadas polares la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right].$$

Ya que el péndulo simple es inextensible

$$\text{Como } \dot{r} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\text{Como } r = l \Rightarrow p_\theta = ml^2\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}.$$

Incluyendo estas restricciones en el hamiltoniano obtenemos para la energía

$$E = \frac{mp_\theta^2 l^2}{2(ml^2)^2} + l(1 - \cos \theta)m = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{ml^2} + l(1 - \cos \theta)m.$$

De esta expresión podemos despejar el momento angular

$$p_\theta = \sqrt{2ml^2 [E - mgl(1 - \cos \theta)]}.$$

1) Asumiendo  $E < 2mgl$  tendremos la desigualdad

$$\begin{aligned} E - mgl(1 - \cos \theta) &\geq 0 \Rightarrow E \geq mgl(1 - \cos \theta) \\ \Rightarrow mgl(1 - \cos \theta) &\leq E < 2mgl \end{aligned}$$

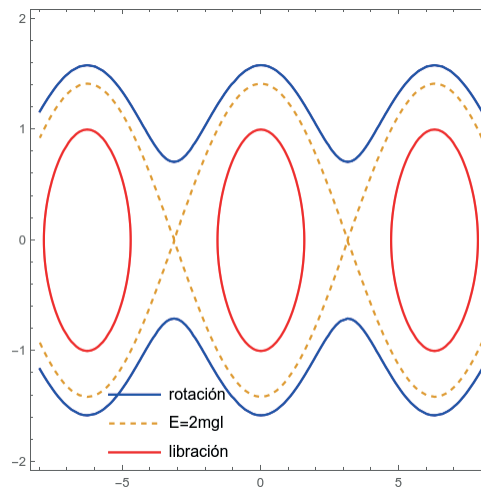


Figura 7.1: Libración y Rotación en el Espacio de Fase. Momento  $p$  (Eje Vertical) como una Función del Ángulo  $\theta$  (Eje Horizontal) para un Péndulo.

entonces habrá un  $\theta$  máximo, menor que  $\pi$ , para el cual (ver figura 7.1)

$$mgl(1 - \cos \theta_{max}) = E$$

En este caso, la energía total del sistema no permite llevar a la masa del péndulo a la máxima altura, es decir,  $2l$ , y por tanto el péndulo tendrá un movimiento oscilatorio alrededor de un mínimo. Este movimiento se conoce como libración.

- 2) Si  $E = 2mgl$ , la masa del péndulo llegará a la altura máxima  $2l$  para  $\theta = \pi$ . Para la altura máxima el péndulo no tendrá energía cinética y por tanto queda en un equilibrio inestable, puede devolverse o seguir rotando.
- 3) Finalmente si  $E > 2mgl$ , cuando la masa del péndulo llegue a la altura máxima tendrá energía cinética suficiente para continuar rotando. Este caso se conoce como rotación.

### Variable de Acción

Para analizar sistemas como el péndulo simple, o el de dos cuerpos interactuando por medio de una fuerza central, donde algunas de las variables son periódicas o cuasi periódicas, es conveniente introducir la variable

$$J = \oint pdq.$$

En esta expresión la integración se hace sobre un periodo de la variable  $q$ . La variable  $J$  tiene unidades de momento angular independiente de las coordenadas generalizadas.  $pq$  tiene unidades de momento angular. Como  $p = p(q, \alpha)$  entonces  $\oint p(q, \alpha)dq = J(\alpha)$ . Como  $\alpha_1 = H = H(J)$ , si asumimos a  $J$  como el nuevo momento  $P = J$ , entonces la función

principal de Hamilton y la función característica son funciones de  $q, J, t$ , es decir,

$$S = S(q, J, t), \quad W = W(q, J).$$

La variable  $Q$  es  $w$ , que se conoce como la variable ángulo

$$Q = \frac{\partial W}{\partial P} \Rightarrow w = \frac{\partial W}{\partial J} \quad (\star)$$

La ecuación de HJ es

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial J} \Rightarrow \dot{w} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = v(J) \quad (7.28)$$

Esto se debe a que en el formalismo de la función característica  $W$ , el nuevo hamiltoniano es  $\alpha_1 = H$ , ya que  $\frac{\partial W}{\partial t}$  es cero. La solución de (7.28) es

$$\frac{dw}{dt} = v(J) \Rightarrow dw = v(J)dt \Rightarrow w = v(J) \int dt = vt + \beta. \quad (7.29)$$

Para libración

$$\oint pdq = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq.$$

Ahora si integramos durante un periodo la variable ángulo  $\Delta w \Big|_{1\text{periodo}} = \int dw$ . De Ec. (7.29) vemos que  $w$  solo depende de  $q$  y  $J$ , así que

$$dw = \frac{\partial w}{\partial q} dq + \frac{\partial w}{\partial J} dJ.$$

Pero  $J$  es una constante de movimiento, ya que

$$J = J(\alpha) \Rightarrow \frac{dJ}{dt} = 0 \Rightarrow dJ = 0.$$

De tal forma que el diferencial de  $w$  se reduce a  $dw = \frac{\partial w}{\partial q} dq$ . En un ciclo completo

$$\begin{aligned} \Delta w &= \oint dw = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq \\ &= \oint \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial W}{\partial J} \right) dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right) dq \\ &= \frac{\partial}{\partial J} \oint pdq = \frac{\partial}{\partial J} J = 1. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Es decir  $\Delta w = 1$ , por lo tanto  $w$  cuenta los periodos. Por la Ec. (7.30) el cambio de la variable ángulo durante un periodo  $\tau$  es

$$\begin{aligned} \Delta w &= w(\tau) - w(0) = [v\tau + \beta] - [v(0) + \beta] \\ &= v\tau = 1. \end{aligned}$$

Es decir  $\nu = \frac{1}{\tau}$ . La variable  $w$  es el ángulo en vueltas ( 1 vuelta =  $2\pi$  radianes) y  $\nu$  es la frecuencia. Para el oscilador armónico tenemos

$$J = \oint p dq = \int_0^\tau p \frac{dq}{dt} dt = \int_0^{2\pi} p(\theta) \frac{dq}{d\theta} d\theta.$$

Habíamos visto que

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \quad \text{y} \quad p = \sqrt{2m\alpha} \cos(\omega t + \beta).$$

Es decir:

$$J = \int (\sqrt{2m\alpha} \cos \theta) d\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \theta\right) = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{\omega^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

De la identidad  $\cos^2 \theta = \frac{1+\sin 2\theta}{2}$  tenemos que

$$\begin{aligned} J &= \frac{2\alpha}{\omega} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \sin 2\theta] d\theta \\ &= \frac{\alpha}{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi\alpha}{\omega}, \end{aligned}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia (no confundir con la variable acción). Como  $\alpha = H \Rightarrow \frac{J\omega}{2\pi} = H$

$$\frac{J\omega}{2\pi} = H \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial J} = \dot{w} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}.$$

La relación entre la variable ángulo  $w$  y el ángulo en radianes es

$$\theta = 2\pi w.$$

### Variables Acción-Ángulo para Sistemas Separables

Para sistemas separables tendremos

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \quad (7.31)$$

Por tanto  $p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Si  $q_i$  es cíclica

$$J_i = \oint p_i dq_i = 2\pi p_i, \quad (7.32)$$

donde asumimos que el periodo de  $q_i$  es  $2\pi$ . De Ec. (7.31) tenemos

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i.$$

Ya que  $J = J(\alpha_i)$ , entonces

$$W = \sum_j W_j(q_j; J_1, \dots, J_n).$$

El hamiltoniano  $H = \alpha_1$  es una función de las  $\alpha_i$  y por tanto de las  $J$ , es decir,  $H = H(J_1, \dots, J_n)$ . Las variables ángulos son:

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i}.$$

y satisfacen la ecuación de movimiento

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i} = v_i(J_1, \dots, J_n). \quad (10,105)$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$w_i = v_i t + \beta_i,$$

En esta expresión las  $v_i$  son constantes de movimiento. Como vimos anteriormente  $w_i = w_i(q, J)$

$$\begin{aligned} dw_i &= \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial W}{\partial J_i} \right) dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j p_j(q_j, J) dq_j. \end{aligned}$$

Integrando esta expresión durante un número entero de ciclos que sea el mínimo común múltiplo de todos los periodos asociados a cada una de las  $q_i$

$$\Delta w_i = \int dw_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\text{durante } m \text{ ciclos}} p_j(q_j, J) dq_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} m_j J_j = m_i.$$

Así  $\Delta \vec{w} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Asumiendo que después de un número entero de ciclos todas las variables generalizada  $q_i$  como sus momentos canónicos  $p_i$ , tienen el mismo valor, es decir,  $\Delta \eta = (\Delta q, \Delta p) = 0$ . Ya que  $q$  es periódica, entonces

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{J_1 \dots J_n}^k e^{2\pi i(j_1 w_1 + \dots + j_n w_n)} \\ q_k &\equiv \sum_{\vec{J}} a_{\vec{J}}^k e^{2\pi i \vec{J} \cdot \vec{w}} \end{aligned}$$

donde  $\vec{w} = \vec{v}t + \vec{\beta}$  (de  $w_i = v_i t + \beta_i$ ). En general  $q_k$  no es una función periódica del tiempo (aunque es una función periódica en cada  $w_k$ ). Para que sea periódica en el tiempo se requiere

que todas las  $\nu_k$  tengan un mínimo común múltiplo. Es decir,  $\nu_k = \eta_k \nu_0$  donde  $\nu_0$  es común a todos y  $\eta_k \in \mathbb{Z}$ . Otra forma de decirlo es que  $\frac{\nu_k}{\nu_j} = \frac{\eta_k \nu_0}{\eta_j \nu_0} = q$  con  $q \in \mathbb{Q}$ ; el cociente de dos frecuencias es un racional. Cuando esto sucede decimos que los  $\nu_i$ 's son conmensurados. Para una frecuencia dada  $\nu_k$  habrá un periodo asociado  $\tau_k = \frac{1}{\nu_k}$  que corresponde al periodo de la variable  $q_k$ . Ahora la frecuencia debe ser un múltiplo entero de una frecuencia mínima  $\nu_0$  que corresponde al corte ultravioleta, es decir,  $\nu_k = n_k \nu_0$ , con un periodo  $\tau_k = \frac{1}{\nu_k} = \frac{1}{n_k \nu_0}$ . Las variables ángulo estarán dadas por  $w = \nu_k t + \beta_k$ . Si después de un tiempo de la forma  $t_m = m \frac{1}{\nu_0}$  tal que  $\frac{t_m}{\tau_k} = \frac{m}{n_k}$  es un entero para todo  $k$ , entonces el sistema completo es periódico con periodo  $t_m$ . Es importante tener en cuenta que para que esta condición se cumpla no es necesario que las fases  $\beta_k$  sean iguales. Los coeficientes  $a_{\vec{j}}^k$  se pueden obtener por análisis de Fourier, es decir,

$$a_{\vec{j}}^k = \int_0^1 \cdots \int_0^1 dw_1 \cdots dw_n q_k(\vec{w}) e^{-2\pi i \vec{j} \cdot \vec{w}}$$

donde  $q_k(\vec{w}) = \sum_{\vec{j}'} a_{\vec{j}'}^k e^{2\pi i \vec{j}' \cdot \vec{w}'}$

es fácil ver que esto es una identidad

$$\begin{aligned} a_{\vec{j}}^k &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 dw_1 \cdots dw_n \left[ \sum_{\vec{j}'} a_{\vec{j}'}^k e^{2\pi i \vec{j}' \cdot \vec{w}'} \right] e^{-2\pi i \vec{j} \cdot \vec{w}} \\ &= \sum_{\vec{j}'} a_{\vec{j}'}^k \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1 dw_1 \cdots dw_n e^{2\pi i (\vec{j}' - \vec{j}) \cdot \vec{w}}}_{= \int_0^1 dw_1 e^{2\pi i (j'_1 - j_1) \omega_1} \times \cdots \times \int_0^1 dw_n e^{2\pi i (j'_n - j_n) \omega_n}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Cada una de esas integrales se puede hacer fácilmente. Sea  $\Delta j_1 = j'_1 - j_1$

$$\int_0^1 e^{2\pi i (\Delta j_n) w_n} dw_n = \frac{e^{2\pi i \Delta j_n w_n}}{2\pi i \Delta j_n} \Big|_0^1 = \frac{e^{2\pi i \Delta j_n} - 1}{2\pi i \Delta j_n} = 0$$

Si  $\Delta j_n$  es un entero, entonces  $e^{2\pi i \Delta j_n w_n} = 1$  y por tanto la integral es cero. Si  $j'_n = j_n$ , entonces

$$\int_0^1 e^{2\pi i (0) w_n} dw_n = \int_0^1 e^0 dw_n = \int_0^1 1 dw_n = 1.$$

Resumiendo los dos resultados

$$\int_0^1 dw_n e^{2\pi i w_n (j'_n - j_n)} = \delta_{j'_n j_n}.$$

Reemplazando en Ec. (7.33) obtenemos

$$a_{\vec{j}}^k = \sum_{\vec{j}'} a_{\vec{j}'}^k \delta_{j_1' j_1} \cdots \delta_{j_n' j_n}.$$

Este resultado se tiene para libración. Si las  $q_k$  son variables tipo rotación donde en cada "periodo" la variable se incrementa en una cantidad fija  $q_{0k}$  el periodo de la variable y  $w_k$  cuenta el número de periodos, entonces la variable

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_{\vec{j}} a_{\vec{j}}^{(k)} e^{2\pi i \vec{J} \cdot \vec{w}} \quad (\text{rotación}),$$

es una función periódica. Si  $w_k = v_k t + \beta_k$ , solo nos resta determinar  $q_{0k}$ . Si los momentos  $p_k$  también son funciones periodicas cualquier función del espacio fase se puede escribir como

$$f(q, P) = \sum_{\vec{j}} b_{\vec{j}} e^{2\pi i \vec{J} \cdot \vec{W}} = \sum_{\vec{j}} b_{\vec{j}} e^{2\pi i \vec{J} \cdot (\vec{v}t + \vec{\beta})}.$$

Para muchos problemas la ecuación (7.2) se reduce a

$$W_i = \frac{\partial W_i(q_i, J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i},$$

de tal forma que  $q_k$  solo depende de  $W_k$ , es decir,

$$q_k = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j w_k} = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j (v_k + \beta_k)}.$$

### 7.2.1 Variables Acción-Ángulo y el Problema de Kepler

De las soluciones para  $W$  podemos obtener las variables acción ángulo. Así

$$J_\phi = \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \alpha_\phi \oint d\phi = 2\pi \alpha_\phi,$$

para  $\theta$

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\text{sen}^2 \theta}} d\theta,$$

y para  $r$

$$J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr,$$

para  $V(r) = -k/r$ . Para resolver la segunda integral sea  $\cos i = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}$

$$\begin{aligned} J_\theta &= \alpha_\theta \oint \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta}} d\theta = \alpha_\theta \oint \sqrt{1 - \cos^2 i \csc^2 \theta} d\theta \\ &= \alpha_\theta \int \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 i} d\theta = \alpha_\theta \int \csc \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 i} d\theta. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $\cos \theta = \sin i \sin \psi$ , el diferencial es  $d(\cos \theta) = \sin i \cos \psi d\psi \Rightarrow -\sin \theta d\theta = \sin i \cos \psi d\psi$ , es decir

$$d\theta = \frac{-\sin i \cos \psi}{\sin \theta} d\psi = \frac{-\sin i \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Remplazando en  $J_\theta$  obtenemos

$$\begin{aligned} J_\theta &= \alpha_\theta \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi}} \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi - \cos^2 i} \frac{(-\sin i \cos \psi)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= \alpha_\theta \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi}} \sin i \cos \psi \frac{(-\sin i \cos \psi)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= -\alpha_\theta \int \frac{\sin^2 i \cos^2 \psi}{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Los límites para la nueva variable dependen de los límites para  $\theta$

$$\oint d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_0} d\theta.$$

Del cambio de variable  $\cos \theta = \sin i \sin \psi$ , haciendo  $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \pm i$  tenemos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm i\right) = \mp \sin \frac{\pi}{2} \sin i = \mp \sin i = \sin i \sin \psi_0.$$

De esto tenemos que para  $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$ ,  $\sin \psi_0 = \mp 1$ . Esta condición corresponde a  $\psi_0 = \mp \frac{\pi}{2}$ . De forma similar para  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \sin 0 = \sin i \sin \psi.$$

En este caso  $\psi = 0$ , así

$$\oint d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+i} d\theta = 4 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} d\psi = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi.$$

En el último paso tuvimos en cuenta que el integrando es una función par en  $\psi$ . Reemplazando este resultado en la expresión para  $J_\theta$  obtenemos

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 i \cos^2 \psi}{1 - \text{sen}^2 i \text{sen}^2 \psi} d\psi.$$

Para obtener la expresión final es necesario otro cambio de variable

$$u = \tan \psi, \quad du = \sec^2 \psi d\psi.$$

De esto se tiene que  $\text{sen} \psi = \tan \psi \cos \psi = u \sqrt{1 - \text{sen}^2 \psi}$ , de esta expresión tenemos que

$$\text{sen} \psi^2 = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Remplazando estos resultados en  $J_\theta$  obtenemos

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \text{sen}^2 i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1 + u^2)(1 + u^2 \cos^2 i)}.$$

Aquí podemos expandir el producto utilizando sumas parciales

$$\frac{1}{(1 + u^2)(1 + u^2 \cos^2 i)} = \frac{A}{1 + u^2} + \frac{B}{1 + u^2 \cos^2 i}.$$

De esta relación obtenemos las ecuaciones

$$A + B = 1, \quad A \cos^2 i + B = 0.$$

Con soluciones

$$A = \frac{1}{\text{sen}^2 i}, \quad B = -\frac{\cos^2 i}{\text{sen}^2 i}.$$

Remplazando estos resultados en  $J_\theta$  obtenemos

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \int_0^\infty \left( \frac{du}{1 + u^2} - \frac{\cos^2 i du}{1 + u^2 \cos^2 i} \right).$$

Si en el segundo término de la derecha hacemos el cambio de variable  $u' = u \cos i$  conseguimos

$$\begin{aligned} J_\theta &= 4\alpha_\theta \int_0^\infty \left( \frac{du}{1 + u^2} - \frac{\cos i du'}{1 + u'^2} \right) = 4\alpha_\theta \int_0^\infty \left( \frac{du}{1 + u^2} - \frac{\cos i du}{1 + u^2} \right) \\ &= 4\alpha_\theta (1 - \cos i) \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = 4\alpha_\theta (1 - \cos i) \tan^{-1} u \Big|_0^\infty \\ &= 4\alpha_\theta (1 - \cos i) \frac{\pi}{2} = 2\alpha_\theta \left( 1 - \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta} \right) \pi = 2\pi (\alpha_\theta - \alpha_\phi). \end{aligned}$$

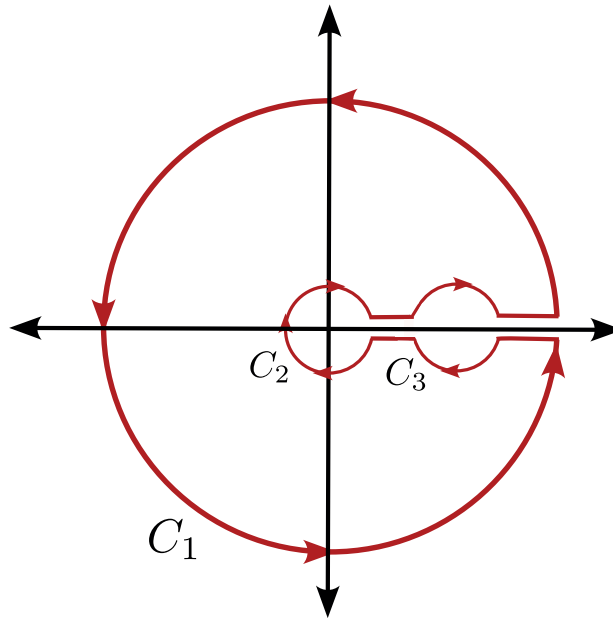


Figura 7.2: Estructura de polos del integrando de la variable de acción radial en el problema de Kepler. En el plano complejo, en el eje Vertical se indica la parte imaginaria de  $r$  y en el eje horizontal la parte real.

Finalmente calculamos  $J_r$ . Es importante fijarse que la integral

$$J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr,$$

corresponde a la integral sobre el contorno  $C_3$  en la Figura 7.2. También es claro de esta figura que la integral sobre el contorno  $C_1 + C_2 + C_3$  es igual a cero, ya que no hay polos dentro de este contorno, es decir,

$$\oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint_{C_1+C_2+C_3} \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr = 0.$$

Aquí estamos asumiendo que la variable  $r$  es compleja. La integral sobre el contorno  $C_1$  es

$$\oint_{C_1} \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint_{C_1} \sqrt{A + 2\frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = \oint_{C_1} \sqrt{A} \sqrt{1 + 2\frac{B}{Ar} - \frac{C}{Ar^2}} dr.$$

donde  $A = 2mE$ ,  $B = mk$  y  $C = \alpha_\theta^2$ . Para  $r \rightarrow \infty$  podemos utilizar el binomio de Newton para expandir el radical en potencias de  $r$  de tal forma que

$$\oint_{C_1} \frac{\partial W}{\partial r} dr = \sqrt{A} \oint_{C_1} \left(1 + \frac{B}{A} \frac{1}{r} - \frac{C}{2A} \frac{1}{r^2}\right) dr = 2\pi i \frac{B}{\sqrt{A}}.$$

En el último paso utilizamos el teorema de los residuos. En este caso sólo contribuye el segundo término del lado derecho. De forma similar podemos analizar el integrando en el límite  $r \rightarrow 0$ , en este caso la integral sobre el contorno  $C_2$  dará la contribución relevante

$$\oint_{C_2} \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint_{C_2} \sqrt{A + 2\frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = \oint_{C_1} \frac{\sqrt{-C}}{r} \sqrt{-\frac{A}{C}r^2 - \frac{2B}{A}r + 1} dr.$$

Cuando  $r \rightarrow 0$  los términos cuadráticos y lineales en  $r$  no contribuyen y podemos aproximar la integral a

$$\oint_{C_2} \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint_{C_1} \frac{\sqrt{-C}}{r} dr = -2\pi i \sqrt{-C}.$$

La suma de la integral sobre los tres contornos es cero, es decir

$$\oint_{C_1+C_3+C_2} \frac{\partial W}{\partial r} dr = 2\pi i \frac{B}{\sqrt{A}} - 2\pi i \sqrt{-C} + \oint_{C_3} \frac{\partial W}{\partial r} dr = 0.$$

De esta expresión y de los valores para  $A$ ,  $B$  y  $C$  tenemos

$$J_r = \oint_{C_3} \frac{\partial W}{\partial r} dr = -2\pi i \frac{B}{\sqrt{A}} + 2\pi i \sqrt{-C} = -2\pi i \frac{mk}{\sqrt{2mE}} + 2\pi i \sqrt{-\alpha_\theta^2}.$$

De las relaciones que obtuvimos anteriormente:  $J_\phi = 2\pi\alpha_\phi$  y  $J_\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi)$  tenemos que

$$\alpha_\theta = \frac{J_\theta + J_\phi}{2\pi}.$$

Remplazando este resultado en  $J_r$  obtenemos

$$J_r + J_\theta + J_\phi = -2\pi i \frac{mk}{\sqrt{2mE}}.$$

Elevando al cuadrado y despejando la energía finalmente obtenemos

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{J_r + J_\theta + J_\phi}.$$

Esta expresión la obtuvo Arnold Sommerfeld y permite calcular el espectro del átomo de Hidrógeno.

## Ejercicios Capítulo 7

**P1:** Derive la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa  $m$  en un potencial unidimensional  $V(q)$ . Use la función principal  $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et$ , y muestre cómo se recuperan las ecuaciones de movimiento.

- P2:** Para el \*\*oscilador armónico unidimensional\*\* con  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$ , resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi por separación de variables y obtenga la función  $W(q, \alpha)$ . A partir de ella, derive la relación entre la constante  $\alpha$  y la energía  $E$ .
- P3:** En coordenadas polares, para una partícula sometida a un potencial central  $V(r)$ , derive la forma reducida de la ecuación de Hamilton–Jacobi usando separación de variables  $S = W_r(r) + W_\theta(\theta) - Et$ . Explique cómo aparece la constante de separación asociada al momento angular.
- P4:** Use el formalismo de Hamilton–Jacobi para demostrar que la función  $S$  genera una transformación canónica hacia nuevas variables  $(\alpha_i, \beta_i)$  constantes (ángulos) que integran completamente el movimiento.
- P5:** Para el oscilador armónico bidimensional con  $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ , plantee la ecuación de Hamilton–Jacobi por separación en coordenadas polares. Identifique las acciones  $J_r$  y  $J_\theta$  y compare con las frecuencias del sistema.
- P6:** Para una partícula con Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{q^2},$$

resuelva la ecuación de Hamilton–Jacobi y encuentre la relación entre las acciones y la energía.

- P7:** Muestre que las acciones  $J_i$  se definen como

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i,$$

y calcule  $J$  para el oscilador armónico unidimensional. Luego exprese el Hamiltoniano en función de  $J$  y encuentre la frecuencia  $\omega = \partial H / \partial J$ .

- P8:** Para una partícula orbitando bajo un potencial de Coulomb  $V(r) = -k/r$ , use el enfoque Hamilton–Jacobi para expresar la acción radial  $J_r$  en términos de los parámetros orbitales (energía  $E$ , momento angular  $L$ ). Discuta cómo se relacionan  $J_r$  y  $J_\theta$  con la excentricidad de la órbita.
- P9:** Considera un sistema integrable con dos grados de libertad: escribe la ecuación de Hamilton–Jacobi completamente separable  $S = W_1(q_1) + W_2(q_2) - Et$ . Plantee las acciones  $J_1, J_2$  y las frecuencias de oscilación de cada modo, y describa el movimiento en el espacio de ángulos.
- P10:** Use el método de Hamilton–Jacobi para resolver el problema del péndulo simple para pequeñas amplitudes (aproximación cuadrática), hallando la función  $S$  correspondiente y comparando las acciones con el oscilador armónico.
- P11:** Para un Hamiltoniano dependiente explícitamente del tiempo,

$$H = \frac{p^2}{2m} + a(t)q^2,$$

intente formular una ecuación de Hamilton–Jacobi adaptada con  $S(q, \alpha, t)$ . Discuta las dificultades que surgen cuando  $H$  depende de  $t$ .

- P12:** Calcule la acción  $J$  para la partícula libre en una caja (potencial cero entre dos muros rígidos) mediante la formulación de Hamilton–Jacobi.
- P13:** Considere un potencial del tipo  $V(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{\beta}{r^2}$ . Use Hamilton–Jacobi en coordenadas polares, separe variables y exprese las acciones  $J_r$  y  $J_\theta$ . Luego determine las condiciones de degeneración de frecuencia.
- P14:** Para el oscilador unidimensional con una perturbación pequeña:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 + \lambda q^4, \quad \lambda \ll 1,$$

plantee la ecuación de Hamilton–Jacobi por expansión en pequeña  $\lambda$ . A primer orden en  $\lambda$ , calcule la corrección a la acción  $J$ .

- P15:** Use la función principal  $S$  para generar una transformación canónica que convierta un sistema mecánico en uno con coordenadas angulares constantes (es decir, de acción constante). Explica el papel de las “constantes de integración” como variables nuevas.
- P16:** Para el movimiento en un pozo radiante en dos dimensiones con simetría central, use Hamilton–Jacobi en coordenadas polares y derive la relación entre  $J_r$  y  $J_\theta$  que cumple la órbita.
- P17:** Considera un sistema con Hamiltoniano de dos grados de libertad que admite separación en coordenadas elípticas o parabólicas. Explora cómo escribir la ecuación de Hamilton–Jacobi en esas coordenadas y cómo definir las acciones correspondientes.
- P18:** Para el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0 \cos(q),$$

que describe un péndulo no lineal, intenta plantear la ecuación de Hamilton–Jacobi en forma implícita y discute la posibilidad de expansión en torno a pequeñas oscilaciones.

- P19:** Muestre la equivalencia entre el enfoque Hamilton–Jacobi y el método de separación de variables en coordenadas clásicas; es decir, comente por qué resolver la ecuación de H-J es “equivalente” a encontrar integrales del movimiento para sistemas separables.

## Bibliografía

- [Gol80] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980 (véanse páginas 13, 101).
- [JS98] J.V. José y E.J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* Cambridge University Press, 1998. ISBN: 9780521636360. URL: <https://books.google.com.co/books?id=Eq19dRQDgvQC> (véase página 13).
- [Lan86] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics* New York: Dover Publications, 1986 (véase página 47).
- [LL76] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Mechanics, Third Edition: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1976. ISBN: 0750628960. URL: <http://www.worldcat.org/isbn/0750628960> (véase página 13).
- [Mar06] Rubens de Melo Marinho Jr. “Noether’s theorem in classical mechanics revisited”. En: *arXiv preprint physics/0608264* (2006) (véase página 61).
- [MUV23] José Herman Muñoz Ñungo, Ramiro Uribe Kaffure y Carlos Eduardo Vera Aguirre. *Notas introductorias de mecánica clásica*. Editorial Universidad del Tolima, 2023. ISBN: 0750628960 (véase página 13).
- [TM04] S.T. Thornton y J.B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole, 2004. ISBN: 9780534408961. URL: <https://books.google.com.co/books?id=HOqLQgAACAA> (véase página 13).

## Índice de Figuras

1.1	Bloque Desliza sin Fricción. . . . .	13
1.2	Descomposición del Vector Posición Respecto al Vector Centro de Masa. . . . .	18
1.3	Disco Rodante. . . . .	25
1.4	Coordenadas Cilíndricas. . . . .	34
1.5	Barra que Desliza sin Fricción. . . . .	36
1.6	Péndulo Doble Oscilando en un Plano. . . . .	38
2.1	La Variación de la Acción es Cero por el Camino Clásico. . . . .	42
2.2	Elemento de Área Generada por una Curva que Rota. . . . .	45
2.3	Braquistocrona . . . . .	46
2.4	Cilindro Sólido Rodando por un Plano Inclinado. . . . .	50
2.5	Variación del Vector Posición bajo un Incremento de las Variables Generalizadas $dq_i$ . . . . .	52
3.1	Centro de Masa $\vec{R}$ y Posición Relativa de $m_2$ Respecto a $m_1$ , es decir, $\vec{r}$ . . . . .	59
3.2	Área Barrida por un Cuerpo Orbitando. . . . .	62
4.1	Ángulos de Euler. . . . .	78
4.2	Incremento en el Vector Posición debido a una Rotación Infinitesimal en el Sentido de las Manecillas del Reloj. . . . .	86
4.3	Teorema de Ejes Paralelos. . . . .	99
4.4	Trompo y Ángulos de Euler. . . . .	104
6.1	Trayectoria en el Espacio de Fase del Oscilador Armónico. . . . .	132
7.1	Libración y Rotación en el Espacio de Fase. . . . .	166

7.2 Estructura de polos del integrando de la variable de acción radial en el problema de Kepler . . . . . 174

# êditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

# Mecánica clásica

Notas de clase

---

Este libro es un texto sobre la mecánica clásica desde una perspectiva moderna y formal. Se enfoca en desarrollar la mecánica utilizando métodos analíticos como la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana, herramientas que se vuelven fundamentales en áreas como la física teórica, la mecánica cuántica y la relatividad.

Entre sus temas principales están:

- Principios de la mecánica Newtoniana
  - Mecánica Lagrangiana y principios variacionales
  - Fuerzas centrales
  - Movimiento de cuerpos rígidos
  - Mecánica Hamiltoniana
  - Transformaciones canónicas
  - Teoría Hamilton-Jacobi
- 
- **Rigor matemático:** Presenta una formulación rigurosa y profunda, ideal para estudiantes con buena base en cálculo y álgebra.
  - **Enfoque moderno:** Aporta un marco conceptual útil para la transición hacia teorías más avanzadas como la mecánica cuántica.
  - **Estructura lógica:** Organizado de manera progresiva, construyendo desde principios básicos hacia formulaciones más abstractas

ISBN: 978-628-7864-40-5



9 786287 864405



Universidad de Nariño  
FUNDADA EN 1904

ai

Universidad de Nariño

ACREDITADA EN ALTA CALIDAD  
RESOLUCIÓN MEN 000122 - ENERO 11 DE 2023

editorial

Universidad de Nariño