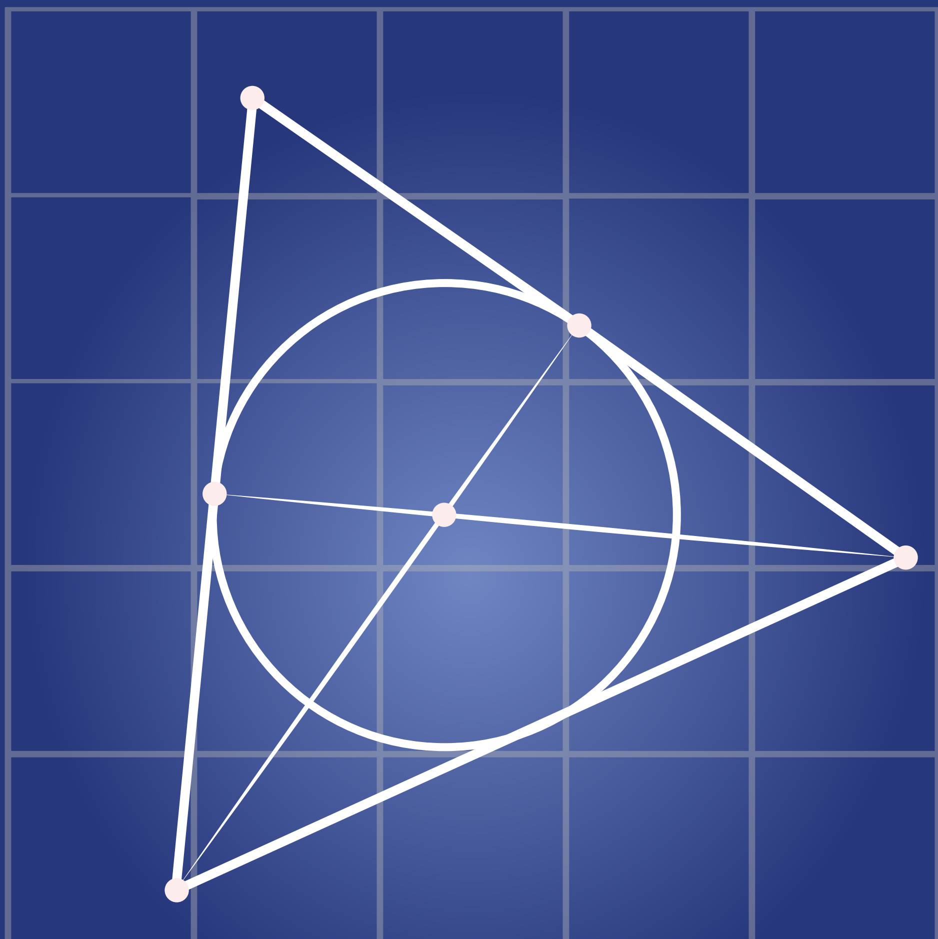
TRISECCIÓN DE FIGURAS
GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS



Libardo Manuel Jácome
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Leonel Eraso Delgado

Editorial
Universidad de Nariño

editorial
Universidad de **Nariño**

Trisección de figuras geométricas con regla y compás

Trisección de figuras geométricas con regla y compás

Libardo Manuel Jácome
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Leonel Erazo Delgado

êditorial
Universidad de **Nariño**

Jácome, Libardo Manuel
Trisección de figuras geométricas con regla y compás / Libardo Manuel Jácome, Segundo Javier Caicedo Zambrano, Leonel Eraso Delgado—1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026.

105 páginas : ilustraciones, gráficas

Incluye Referencias bibliográficas p. 99 y reseña de los autores p. 103
ISBN: 978-628-7864-50-4 Impreso
ISBN: 978-628-7864-52-8 Digital

1. Trisección del ángulo 2. Trisección del triangulo 3. Trisección de segmento de recta. I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier II. Eraso delgado, Leonel

516.204 J179 – SCDD-Ed. 22

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 • ENERO 11 DE 2023

SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Trisección de figuras geométricas con regla y compás

ISBN impreso: 978-628-7864-50-4
ISBN digital: 978-628-7864-52-8
DOI:
Primera edición

Corrección de estilo: Germán Chaves
Diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira
Diseño de cubiertas: Alejandra Daniela Garzón
Fecha de publicación: marzo de 2026
San Juan de Pasto – Nariño – Colombia

Contenido

CAPÍTULO 2.
Trisección de un segmento de recta **57**

CAPÍTULO 3.
Trisección del triángulo **71**

Introducción

“Donde se ve la Lira de nueve cuerdas sube la madre Musa con sus nueve hijas: Aritmética, Geometría, Música, Lógica, Poesía, Astrología, Física, Metafísica, Ética.”

(Frases de famosos, s.f.)

(Wikipedia, s.f.)

Desde los griegos hasta la era moderna, los problemas geométricos han despertado la curiosidad y el ingenio de matemáticos y científicos. Uno de los desafíos más emblemáticos es la trisección del ángulo, un problema clásico de la Geometría Griega, que, aunque imposible de resolver utilizando únicamente regla y compás, como lo demuestra el Teorema de Wantzel (Wikipedia, 2021), ha servido como punto de partida para múltiples exploraciones en la Teoría Geométrica.

Cabe mencionar que varias de las construcciones geométricas relacionadas con la trisección de segmentos presentadas en este libro serán publicadas en la *Revista Sigma* de la Universidad de Nariño, como resultado de un trabajo conjunto de investigación de dos de los coautores, entregadas antes de la elaboración de este libro. No obstante, algunas se han incluido en esta obra porque son fundamentales para abordar la trisección de otras figuras geométricas, en particular, del triángulo y, además, porque facilitan su referencia al formar parte del mismo libro.

Este libro está escrito para un segundo curso de geometría ya que las construcciones son una aplicación de los conceptos adquiridos en un primer curso.

Este libro se estructura en tres capítulos, que van desde los fundamentos geométricos hasta la exploración de métodos de trisección de segmentos y de triángulos; para próximas ediciones se adicionarán capítulos que incluyan trisecciones de otras figuras geométricas.

En general, las figuras que se incluyen en esta obra fueron creadas por los autores de este libro, por lo cual, salvo contadas excepciones se incluirá la fuente señalando los lugares de donde se hayan tomado o adaptado.

En el Capítulo 1: *Preliminares*, se presentan conceptos básicos requeridos para la comprensión de la trisección de segmentos y figuras geométricas. Se introducen definiciones esenciales como segmentos, puntos medios, ángulos, polígonos y circunferencias, además de teoremas fundamentales de la geometría euclidiana.

El Capítulo 2: *Trisección de un segmento de recta*, se centra en el problema de dividir un segmento en tres partes iguales, mediante diferentes métodos geométricos. A través de una colección de construcciones, se emplean herramientas como el Teorema del Paralelismo, triángulos equiláteros, semejanza de triángulos y propiedades de las circunferencias; asimismo, se exploran estrategias utilizando medianas, cuadrados, hexágonos regulares y otras figuras geométricas que permiten obtener la trisección. Como se indicó antes, las construcciones presentadas en este capítulo forman parte de un conjunto más amplio de construcciones que serán publicadas en la Revista Sigma de la Institución, sin embargo, dado que son requeridas en algunas construcciones del capítulo 3, se incorporan en este capítulo.

El Capítulo 3: *Trisección del triángulo,* trata el problema de la división del área de un triángulo en tres triángulos de la misma área o, en otros casos, en tres regiones de la misma área, de tal manera que la suma corresponda al área del triángulo objeto de la trisección.

El libro se destaca por su enfoque novedoso y sistemático, en el que cada caso de trisección se aborda en dos etapas bien diferenciadas: primero, se presenta un procedimiento detallado que describe paso a paso la construcción geométrica para dividir el segmento o el triángulo en tres partes iguales; y luego, se realiza una demostración sintética o analítica, según el caso, que justifica matemáticamente la validez del procedimiento empleado. Esta metodología facilita la comprensión del proceso y permite a los lectores profundizar en los fundamentos teóricos de cada construcción.

Desde el punto de vista de su clasificación, los autores consideran que se trata de un libro de texto que contiene varias construcciones inéditas, las cuales son producto de un trabajo inductivo, basado en "prueba y error", el cual finaliza con formalización de los procedimientos para la construcción y con la prueba geométrica o analítica que valida los resultados.

El libro está dirigido a estudiantes y profesores, principalmente de matemáticas, interesados en la Geometría Clásica y sus aplicaciones. Es una invitación a explorar la precisión y la belleza de la geometría, siguiendo la tradición de los antiguos geómetras, pero, esta vez, con apoyo de las herramientas tecnológicas modernas que permiten pensar y dibujar con exactitud.

Los autores
Universidad de Nariño
Enero de 2025

CAPÍTULO 1.
Preliminares

1.1 Definiciones y notaciones

Términos indefinidos

Según *Los Elementos de Euclides, punto* es lo que no tiene partes; línea *recta* es la que yace por igual sobre sus puntos.

En el enfoque moderno, se aceptan ciertos objetos básicos como términos indefinidos, no se hace intento alguno por definirlos, así se evita que dos conceptos se definan cada uno en términos del otro.

Modernamente es mejor tener una idea intuitiva de estos objetos y pensar un *punto* como la huella que deja en un papel un lápiz muy afilado. La idea de *recta* se puede tomar como el borde del tablero de un salón de clase.

Los puntos se denotan con letras mayúsculas, como $A, B, C, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$; las rectas con letras minúsculas, así $l, m, n, \ldots, l_1, l_2, l_3$; la recta que pasa por los puntos A, B se denota por $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$ (Figura 1).

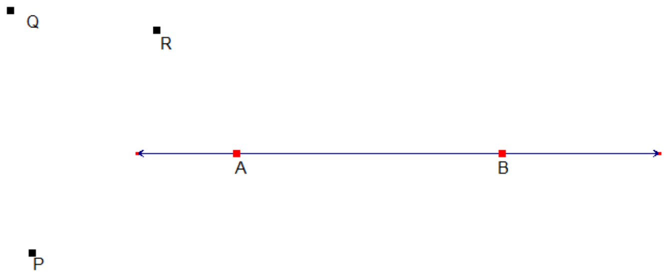


Figura 1. Términos Indefinidos Punto y Recta

Segmento

El segmento AB (Figura 2) se denota por $\overline{AB}$ y se define como sigue:

$$\overline{AB} = \{X \in \overleftrightarrow{AB} \mid \text{X está entre } A \text{ y } B, \text{incluidos } A, B\}.$$

Figura 2. Segmento AB

La distancia de A a B se escribe $d\overline{AB}$ o simplemente como AB.

Punto medio de un segmento

El punto medio del segmento AB (Figura 3) es M si A, M, B están en la misma recta y $AM = MB$.

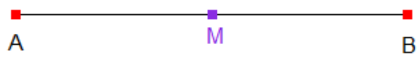


Figura 3. Punto Medio del Segmento AB

Rayo

El rayo AB (Figura 4) se denota por $\overrightarrow{AB}$ y se define, así:

$$\overrightarrow{AB} = \{X \in \overleftrightarrow{AB} \mid X \text{ está del mismo lado de } A \text{ que } B, \text{incluido } A\}.$$

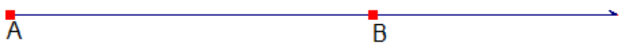


Figura 4. Rayo AB

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas, si y solo si, no se intersectan.

Rectas secantes

Dos rectas son secantes si se cortan en un punto.

Las definiciones presentadas están de conformidad con Hemmerling (2000).

Ángulo

Un ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, se denota como $\angle ABC$ y se define, así: $\angle ABC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

Los rayos son los lados y el punto común el vértice; la medida del ángulo $\angle ABC$, se denota por $m\angle ABC$ o también por $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$.

Para medir un ángulo, se puede seguir el método utilizado en Babilona, que consiste en trazar una circunferencia de centro O y radio r y se divide la circunferencia en 360 arcos de igual longitud, comenzando en un punto A. Cada arco representa un ángulo de un grado. Si el arco de un grado se divide en 60 partes, cada uno representa un minuto, y si uno de estos arcos se divide en 60 partes iguales se obtiene un ángulo de un segundo (Hemmerling, 2005).

Triángulo

Sean los puntos A, B, C no colineales (Figura 5).

El triángulo ABC se denota por ΔABC y se define así: $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ (Hemmerling, 2005).

La frase, sea el triángulo ABC es equivalente a decir, sea el ΔABC.

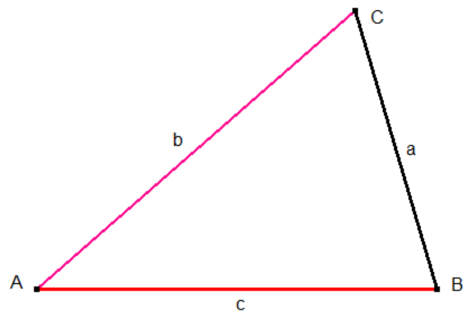


Figura 5. Triángulo ABC.

Los puntos A, B, C se llaman *vértices* y cada segmento, se denomina *lado*. El lado opuesto a cada vértice se lo denota con la misma letra del vértice, pero en minúscula (Figura 5).

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si los respectivos ángulos son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales (Figura 6).

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

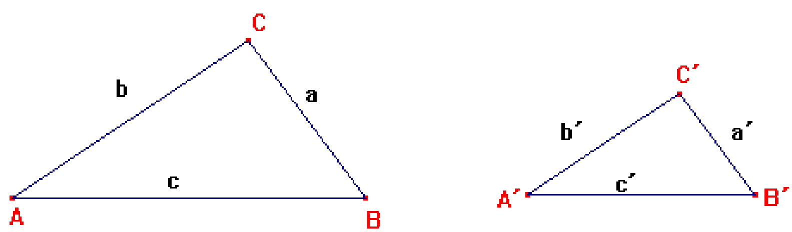


Figura 6. Dos Triángulos Semejantes

Congruencia de Triángulos

Se debe recordar que un triángulo tiene 3 lados y 3 ángulos.

Sean $\Delta ABC, \Delta PQR$ y una función biyectiva f (f es una traslación o una rotación) tal que $f(A) = P, f(B) = Q, f(C) = R$.

Los triángulos $\Delta ABC, \Delta PQR$ son congruentes (ver Figura 7)

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{PQ}, \overline{AC} \cong \overline{PR}, \overline{BC} \cong \overline{QR} \\ \angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q, \angle C \cong \angle R \end{cases}$$

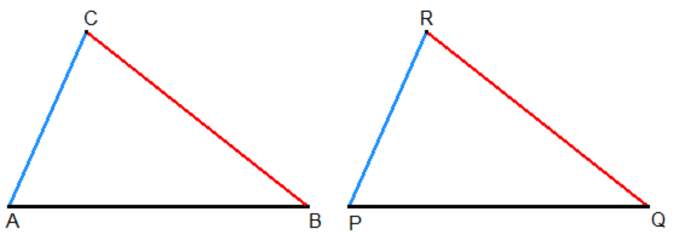


Figura 7. Dos Triángulos Congruentes

Para probar que dos triángulos sean congruentes no es necesario probar que los seis elementos de un triángulo sean congruentes a los seis elementos correspondientes del otro triángulo. Basta con probar que tres elementos específicos del uno sean congruentes a tres elementos correspondientes del otro triángulo. Entre los tres elementos específicos debe haber al menos un lado.

Criterios de Congruencia de Triángulos

Criterio de Congruencia LAL

Dos triángulos son congruentes cuando dos lados y el ángulo que forman entre ellos en uno de los triángulos son, respectivamente, congruentes a dos lados y el ángulo que estos forman en el otro triángulo (L-A-L).

Criterio de Congruencia LLL

Si los lados de un triángulo son congruentes a los de otro, los triángulos son congruentes entre sí (L-L-L).

Criterio de Congruencia ALA

Si un triángulo tiene dos ángulos y el lado incluido entre ellos congruentes a dos ángulos y el lado incluido entre ellos del otro triángulo, los triángulos son congruentes. (A-L-A)

Postulados de Euclides

A lo largo del libro se deben trazar rectas dados dos puntos, circunferencias dado un centro y un radio.

También se traza una recta perpendicular a otra, una recta paralela a otra, lo cual se puede realizar a partir de los cinco postulados de Euclides (Vera, 1970).

Postulado 1

Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta

Postulado 2

Las líneas rectas se pueden extender indefinidamente.

Postulado 3

Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.

Postulado 4

Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado 5

Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulo internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado que estén los ángulos menores que dos rectos.

Teoremas

Los teoremas que siguen, se formulan tomando como referencia a Hemmerling (2000).

Las demostraciones se dejan como ejercicios al lector.

Teorema 1. Coordenadas de un segmento en una división proporcional

Sea un segmento de recta delimitado por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, y sea un punto $M(x, y)$ en el segmento AB donde $M \neq A, B$ que divide a este segmento en la razón $r = \frac{AM}{MB}, r > 0$ (Lehmann, 1989, p.12), entonces, las coordenadas del punto M son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, r \neq -1.$$

Explicación

Este teorema es comúnmente utilizado cuando se trabaja con problemas geométricos, en los cuales, las figuras estén definidas por sus coordenadas en un Sistema Coordenado Cartesiano.

Para el caso $A(-3, -2)$, $B(9,1)$ se halla el punto M en el segmento AB tal $\frac{AM}{MB} = r = \frac{1}{2}$ (Figura 8):

$$x = \frac{-3 + \frac{1}{2}(9)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1, y = \frac{-2 + \frac{1}{2}(1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1.$$

Las coordenadas del punto M son $x = 1, y = -1$.

Para el caso $A(-3, -2)$, $B(9,1)$ se determina el punto N en el segmento AB tal $\frac{AN}{NB} = r = 2$ (Figura 8):

$$x = \frac{-3 + 2(9)}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5, y = \frac{-2 + 2(1)}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0.$$

Las coordenadas del punto N son $x = 5, y = 0$.

Para las demostraciones de las construcciones, se empleará teoremas de Geometría Euclídea y fórmulas de Geometría Analítica.

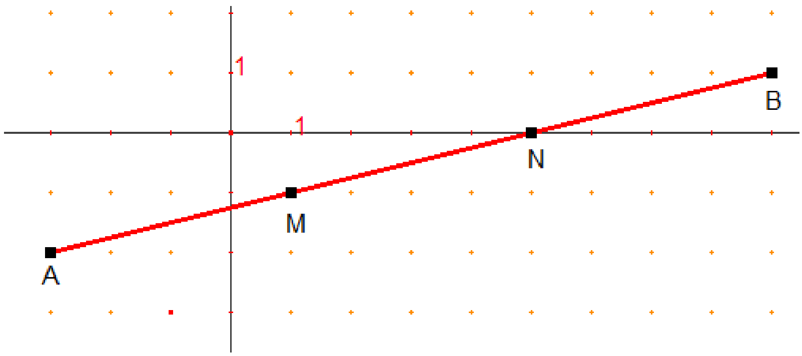


Figura 8. Representación Geométrica Teorema 1

Teorema 2. Teorema fundamental del paralelismo

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier secante (Figura 9).

Explicación

En la Figura 9, sean las rectas m y n secantes a las rectas p, q y r; además, $p \parallel q \parallel r$, entonces, $AB = BC \Longrightarrow DE = EF$.

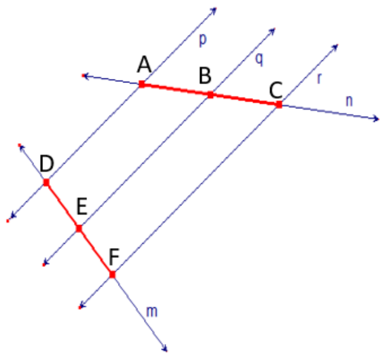


Figura 9. Representación Geométrica Teorema 2

Teorema 3. Centroide de un triángulo

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado centroide, que está a dos tercios a partir del vértice.

Explicación

En la Figura 10, se tiene que,

$$AR = RC = \frac{1}{2}AC$$

$$AP = PB = \frac{1}{2}AB$$

$$BQ = QC = \frac{1}{2}BC$$

$$CO = \frac{2}{3}CP; AO = \frac{2}{3}AQ; BO = \frac{2}{3}BR.$$

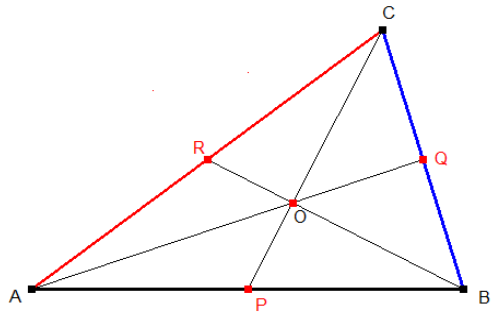


Figura 10. Representación Geométrica Teorema 3

Teorema 4. Cortes perpendiculares y rectas paralelas

Dos rectas perpendiculares a una recta dada son paralelas entre sí.

Explicación

En la Figura 11, se tiene que,

$$r \perp t \ \wedge \ s \perp t \Longrightarrow r \parallel s.$$

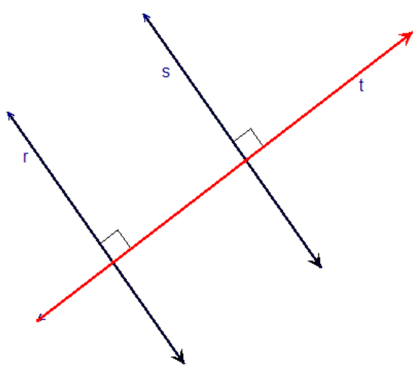


Figura 11. Representación Geométrica Teorema 4

Teorema 5. Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.

Explicación

En la Figura 12, se tiene que,

$$\angle CAB \text{ congruente con } \angle C'A'B' \wedge \angle ABC \text{ congruente con } \angle A'B'C'$$
$$\Longrightarrow \triangle ABC \text{ semejante con } \triangle A'B'C'.$$

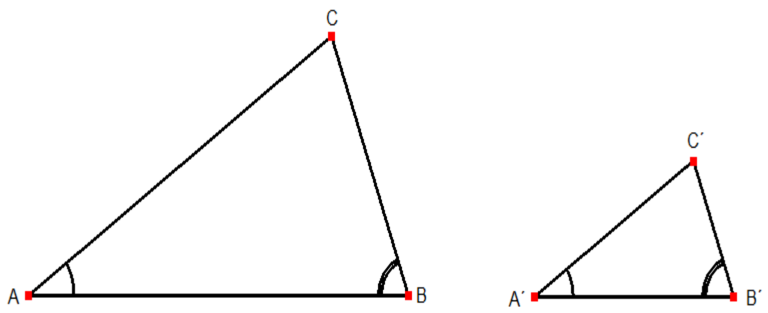


Figura 12. Representación Geométrica Teorema 5

Teorema 6

El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Explicación

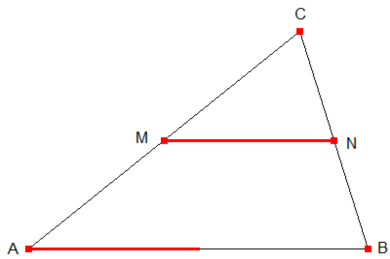


Figura 13. Representación Teorema 6

En la Figura 13, se tiene que,

$$(BN = NC = \frac{1}{2}BC \ \wedge AM = MC = \frac{1}{2}AC) \Longrightarrow (\overline{MN} \parallel \overline{AB} \ \wedge MN = \frac{1}{2}AB.$$

Clasificación de Ángulos

Ángulo Agudo

Es aquel cuya medida es menor de 90° (Figura 14).

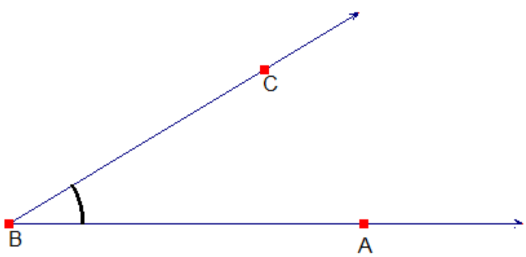


Figura 14. Ángulo Agudo

Ángulo Recto

Es aquel cuya medida es 90° (Figura 15).

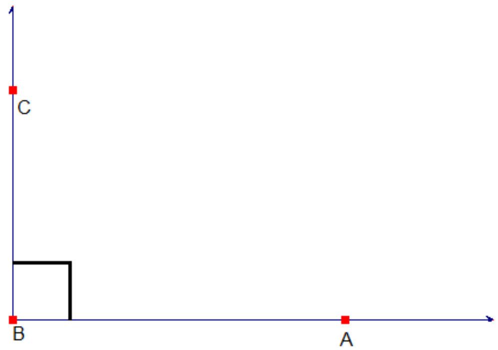


Figura 15. Ángulo Recto

Ángulo Obtuso

Es aquel cuya medida es mayor que 90° pero menor que 180° (Figura 16).

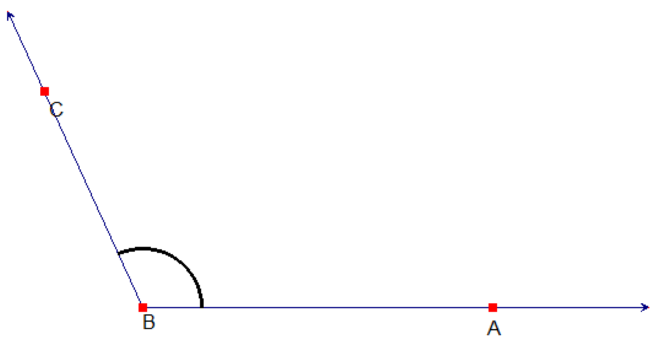


Figura 16. Ángulo Obtuso

Ángulo Llano

Es aquel cuya medida es igual a 180° (Figura 17).

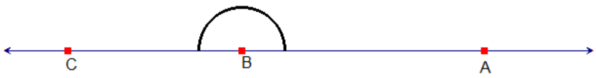


Figura 17. Ángulo Llano

Ángulos Adyacentes

Son aquellos que tienen el vértice y un lado común (Figura 18).

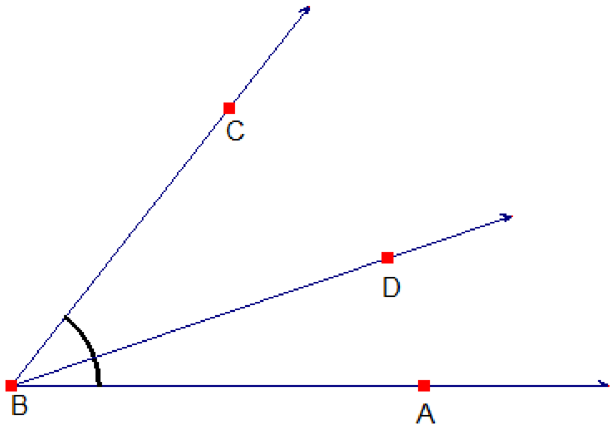


Figura 18. Ángulos Adyacentes

Ángulos Opuestos por el Vértice

Cuando dos rectas se interceptan, son los ángulos no adyacentes (Figura 19).

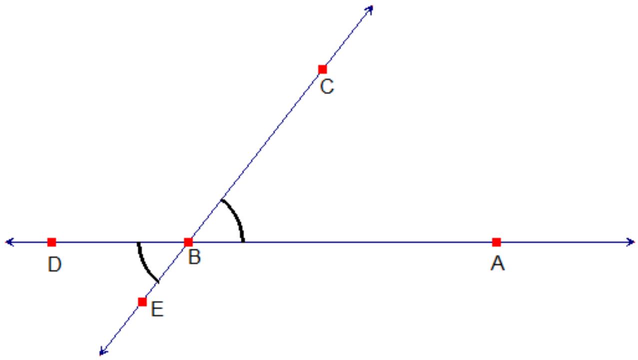


Figura 19. Ángulos Opuestos por el Vértice

Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180° (Figura 20).

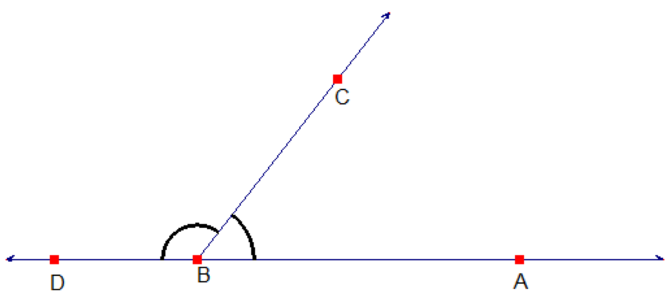


Figura 20. Ángulos Suplementarios

Ángulos Complementarios

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90° (Figura 21).

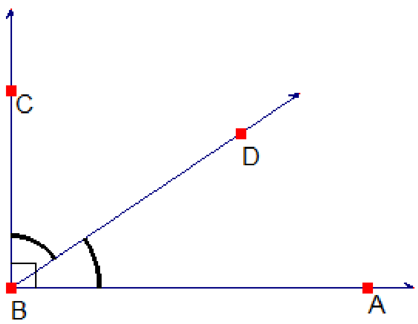


Figura 21. Ángulos Complementarios

Ángulos Congruentes

Dos ángulos son congruentes si sus medidas son iguales (Figura 22).

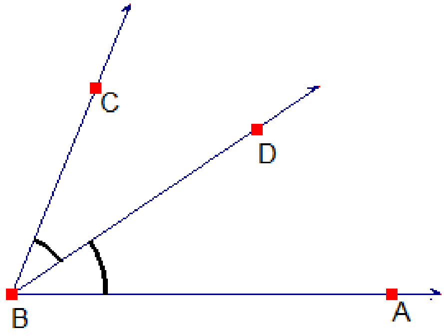


Figura 22. Ángulos Congruentes

Clasificación de Triángulos

En general, las definiciones son tomadas de Landaverde (s.f.).

Triángulo Escaleno

No tiene dos lados que sean congruentes (Figura 23).

Aquí se cumple que, $a \neq b, b \neq c, a \neq c$.

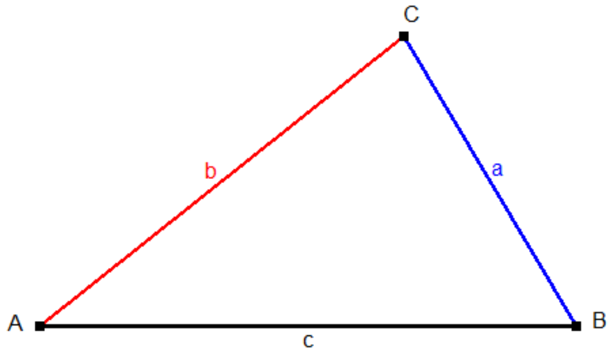


Figura 23. Triángulo Escaleno.

Triángulo Isósceles

Tiene dos lados congruentes (Figura 24).

Aquí se cumple que, $a = b, b \neq c$.

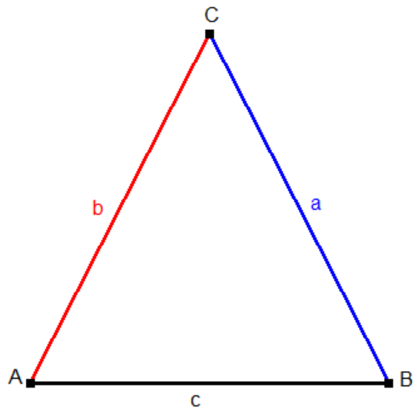


Figura 24. Triángulo Isósceles.

Triángulo Equilátero

Tiene los tres lados congruentes (Figura 25).

Aquí se cumple que, $a = b = c$.

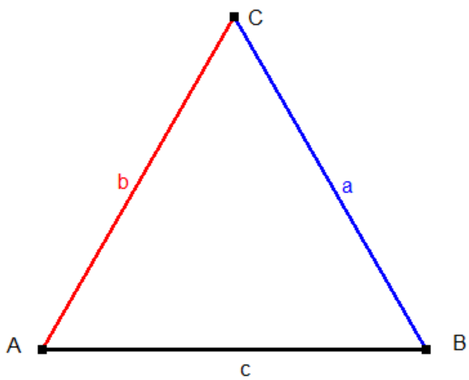


Figura 25. Triángulo Equilátero.

Triángulo Rectángulo

Tiene un ángulo recto (Figura 26).

El ángulo BAC es recto.

El lado opuesto al ángulo recto se denomina Hipotenusa, los otros dos lados se llaman Catetos.

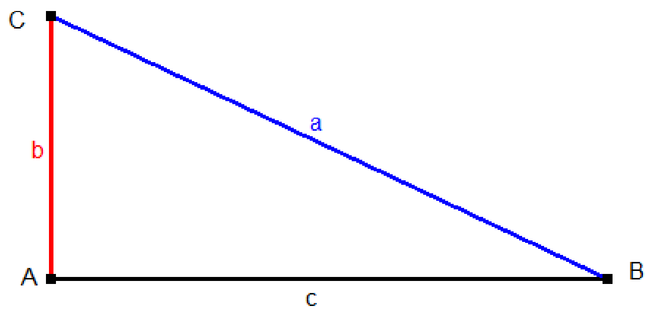


Figura 26. Triángulo Rectángulo.

Triángulo Acutángulo

Tiene los tres ángulos agudos (Figura 24).

Triángulo Obtusángulo

Tiene un ángulo obtuso (Figura 27).

El ángulo ABC es obtuso.

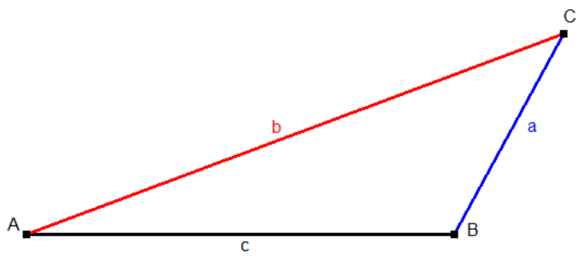


Figura 27. Triángulo Obtusángulo

Triángulo Equiángulo

Tiene los tres ángulos congruentes (Figura 25).

Mediana de un Triángulo

Es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto (Figura 28). El segmento CM es mediana del lado AB respecto al ángulo ACB.

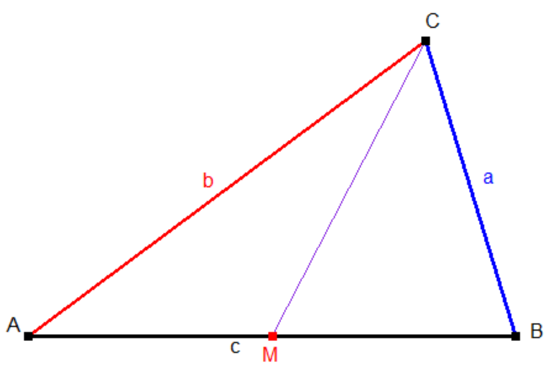


Figura 28. Mediana de un Triángulo

Altura

Una altura de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice de un triángulo a la recta que contiene al lado opuesto (Figura 29).

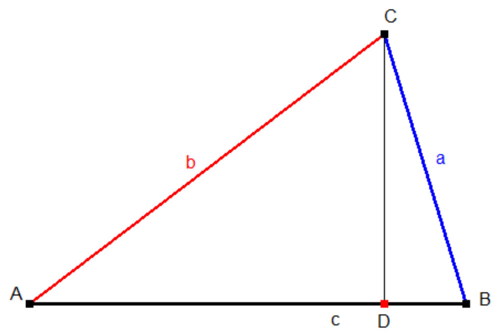


Figura 29. Altura de un Triángulo

Mediatriz

Es la perpendicular en el punto medio de un lado (Figura 30).

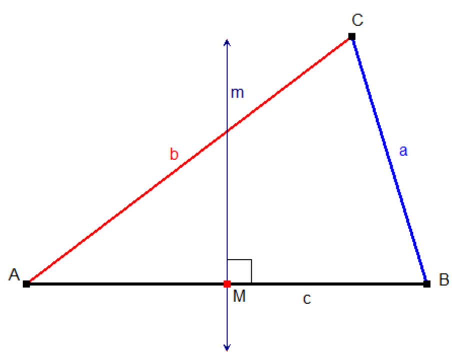


Figura 30. Mediatriz de un Triángulo

Bisectriz de un Ángulo

Es un rayo que tiene punto extremo en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes (Figura 31).

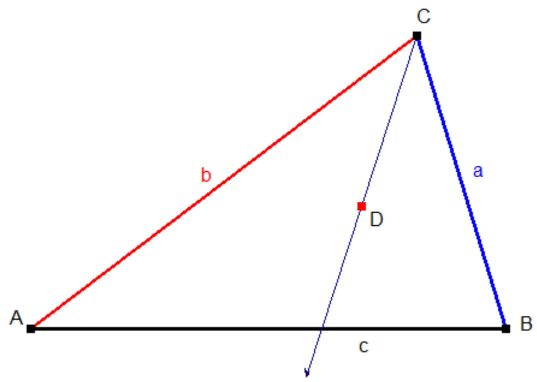


Figura 31. Bisectriz de un Ángulo

Baricentro

Es el punto de corte de las medianas de un triángulo (Figura 32).

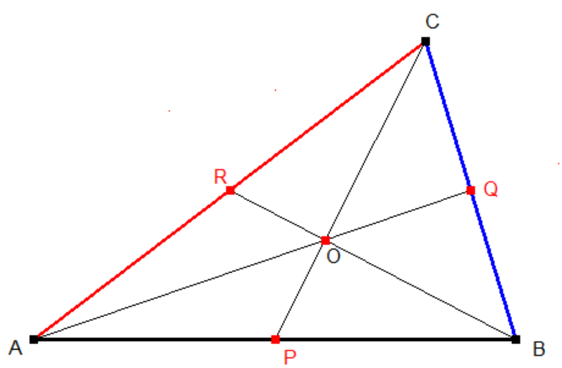


Figura 32. Baricentro

Circuncentro

Punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo (Figura 33). También se dice que es el centro de la circunferencia circunscrita.

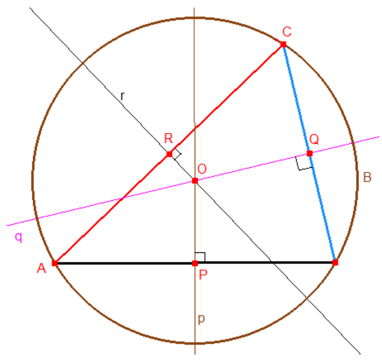


Figura 33. Circuncentro

Incentro

Es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo. También se dice que es el centro de la circunferencia inscrita (Figura 34).

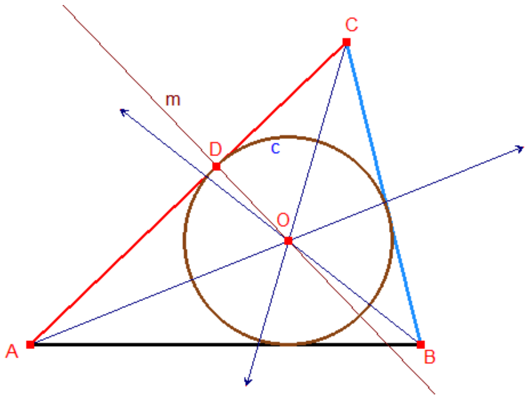


Figura 34. Incentro

Ortocentro

Es el punto de intersección de las alturas de un triángulo (Figura 35).

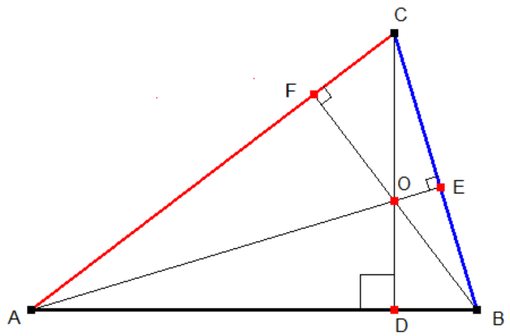


Figura 35. Ortocentro

Circunferencia y Círculo

Las definiciones se presentan con referencia a la Figura 36.

Circunferencia

Conjunto de puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro.

Circulo

Superficie plana limitada por la circunferencia que incluye el centro.

Círculos Concéntricos

Son círculos con el mismo centro y diferente radio.

Radio

Segmento de recta uno de cuyos extremos es el centro y el otro es cualquier punto de la circunferencia.

Ejemplo

$\overline{OC}, \overline{OB}$ (Figura 36).

Cuerda

Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

Ejemplo

$\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ (Figura 36).

Diámetro

Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

Ejemplo

$\overline{AB}$ (Figura 36).

Arco

Es una parte determinada de la circunferencia.

Ejemplo:

En la Figura 36: dos arcos son: $arco(CGA), arco(BEG)$.

Ángulo Central

Es aquel que tiene como lados radios de una circunferencia y, cuyo vértice, está en el centro de la circunferencia.

Ejemplo

$\angle AOC, \angle BOC$ (Figura 36).

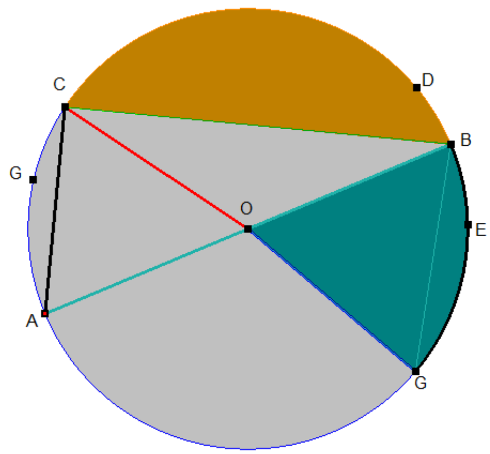


Figura 36. Elementos de Circunferencia y Círculo

Otros Elementos Asociados al Círculo

Los conceptos son tomados de Landaverde (s.f.) y los ejemplos se refieren a la Figura 36 y Figura 37.

Sector Circular

Parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco interceptado por ellos.

Ejemplo

En la Figura 36, dos sectores circulares son:$OBEG, OBDC$.

Área del círculo: $A = \pi r^2$.

Si la circunferencia se divide en 360 partes y se unen los puntos de división con el centro de la circunferencia, quedan 360 sectores circulares, donde el área de cada sector será $\frac{\pi r^2}{360}$.

Por lo tanto, si se tienen k sectores circulares el área de los k sectores es: $\frac{\pi r^2}{\mathrm{k}}$.

$Área\ (OBEG) = \frac{\pi r^2}{360} \times m$, donde m es el número de grados del sector (Figura 36).

Segmento Circular

Parte del círculo comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente.

Ejemplo:

En la Figura 36, las regiones CBD, BGE son segmentos circulares.

$Área\ (CBD) = Área\ (OBDC) - Área\ (\Delta OBC)$ (Figura 36).

En la Figura 37: $Área\ (ABC) = Área(ACBO) + Área(\Delta ABO)$.

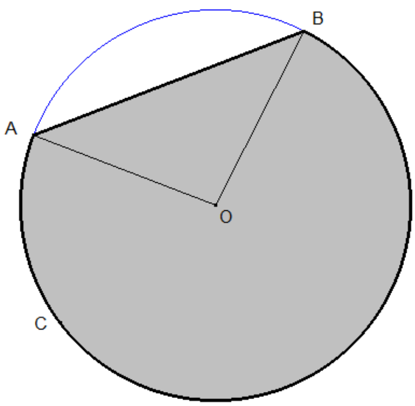


Figura 37. Otros Elementos del Círculo

Corona Circular

Es la parte del círculo comprendida entre dos círculos concéntricos.

En la Figura 38: Área de una corona circular de radios a y b $(a > b)$: $\pi(a^2 - b^2)$.

Trapecio Circular

Es la parte de corona circular que corresponde a un ángulo central determinado (Figura 38).

$$\text{área}\left(\text{trapecio}(ABCD)\right) = \text{área}\left(\text{sector}\ (OAB)\right) - \text{área}\left(\text{sector}\ (ODC)\right)$$

$$\text{área}\left(\text{trapecio}(ABCD)\right) = \frac{\pi n}{360} a^2 - \frac{\pi n}{360} b^2 = \frac{\pi n}{360}(a^2 - b^2).$$

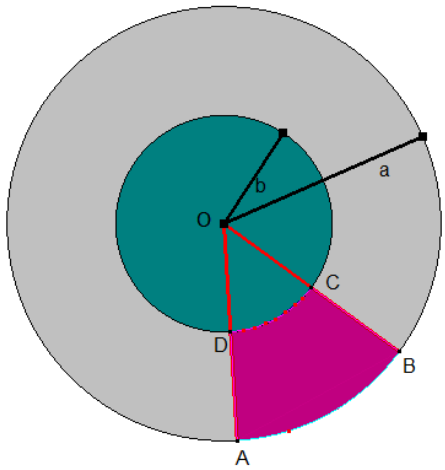


Figura 38. Trapecio circular

1.2 Polígonos

Sea π un plano y en él los puntos $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_{n-1}, V_n$, donde $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$ y tres puntos consecutivos no son colineales.

$\overline{V_1V_2} \cup \overline{V_2V_3} \cup \cdots \cup \overline{V_{n-1}V_n} \cup \overline{V_nV_1}$ se llama Polígono.

Los puntos V_i se llaman vértices y los segmentos $\overline{V_iV_{i+1}}$ se denominan lados.

Perímetro del polígono: $p = V_1V_2 + V_2V_3 + \cdots + V_{n-1}V_n + V_nV_1$

Ángulos del polígono: $\angle V_1, \angle V_2, \angle V_3, \dots, \angle V_n$

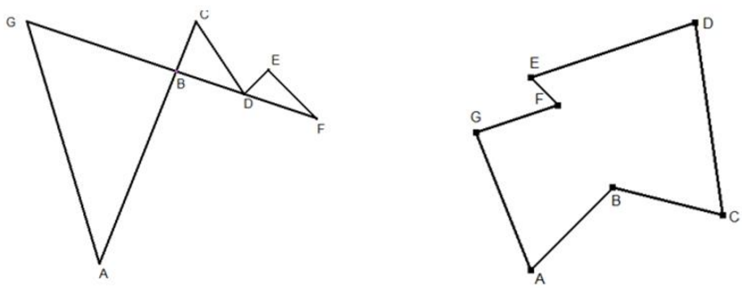
Lados adyacentes: son los pares de lados que comparten un vértice.

Vértices adyacentes: son aquellos que son extremos de un mismo segmento.

Ángulos adyacentes: son aquellos cuyos vértices son adyacentes.

Polígono Simple

Ningún lado intercepta a otro en un punto interior, ningún vértice está en el interior de un lado.



(a) (b)

Figura 39. Polígono No Simple y Simple

La parte (a) de la Figura 39 corresponde a un polígono no simple y la parte (b) a un polígono simple.

A continuación, se presentan algunos conceptos relacionados con polígonos:

- ✓ Diagonal de un polígono: es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

- ✓ Polígono equilátero; es el que tiene sus lados congruentes.
- ✓ Polígono equiángulo; es aquel que tiene los ángulos congruentes.
- ✓ Ángulo externo de un polígono: es aquel que es adyacente y suplementario de un ángulo de un polígono.
- ✓ Polígono regular: es aquel que es equilátero y equiángulo. Según el número de lados, estos polígonos pueden ser: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono heptágono, octógono, n-ágono.

Polígono Convexo

La medida de cada uno de sus ángulos internos es menor que 180°, todas sus diagonales están dentro del polígono y las rectas que contienen a los lados se cortan fuera del polígono (Figura 40).

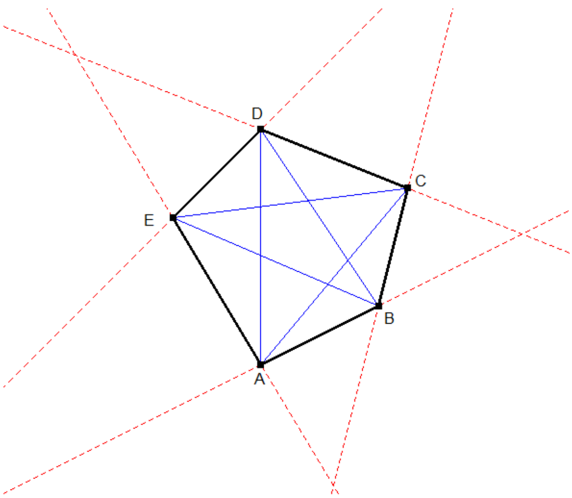


Figura 40. Polígono Convexo

Polígono Cóncavo

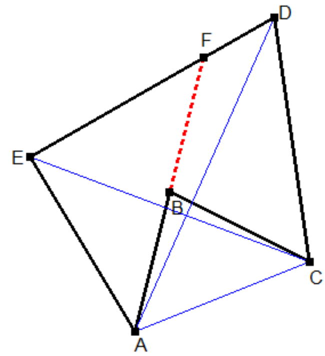


Figura 41. Polígono Cóncavo

Un polígono es cóncavo si al prolongar un lado, parte al polígono; si se traza una diagonal, queda en la parte externa o si algún ángulo interior mide más de 180 grados (Figura 41)

Regiones Conexas y Disconexas

Intuitivamente, una región conexa es aquella que está formada por una sola pieza. Una región es Disconexa si está formada por dos o más piezas disjuntas (Figura 42).

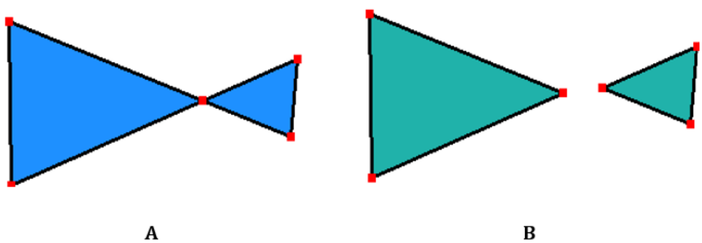


Figura 42. Regiones Conexas y Disconexas: A Conexa, B Disconexa

Área de Regiones Poligonales

Para medir el área de una región poligonal se requiere la unidad de área, que se puede tomar como un cuadrado de lado la unidad y sus puntos interiores. La unidad de medida puede ser el centímetro cuadrado, el metro cuadrado, el kilómetro cuadrado.

El área de la región poligonal es el número que indica el número de veces que la unidad de medida está contenida en la región (Hemmerling, 2005).

Postulados del Área

1) Dada una unidad de área, a cada región le corresponde un número único, llamado área de la región.

2) El área de una región poligonal es igual a la suma de las medidas de área de cualquier conjunto de regiones componentes en el cual puede dividirse.

En los tiempos de Euclides se trabaja prácticamente lo que hoy conocemos como área, con rectángulos y cuadrados. Esta forma de razonar hoy en día se la puede interpretar algebraicamente.

Es notable el hecho de que el postulado 2 del área, según Hemerling (2005), se lo pueda encontrar en el libro II de los elementos de Euclides como caso particular:

> Si una de las rectas dadas se divide en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por dichas rectas equivale a los

rectángulos comprendidos por la no dividida y por cada una y las parciales (Vera, 1970).

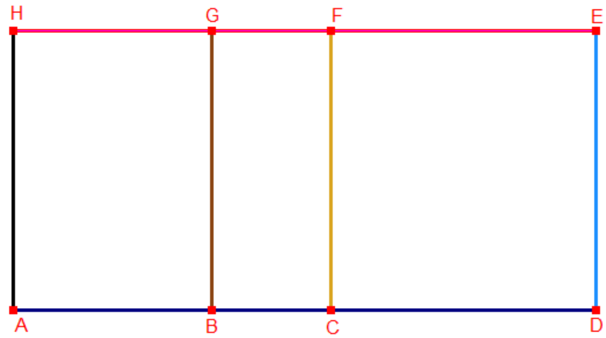


Figura 43. Área de una Regiones Poligonal

Usando nuestra notación actual tenemos (Figura 43):

$$AH = a, AD = AB + BC + CD = b$$

$$AB = c, BC = d, CD = e$$

$$ab = a(c + d + e) = ac + ad + ae$$

El área de la región poligonal en este caso es ab el área de las regiones componentes es $ac + ad + ae$. Además se puede ver que en la afirmación del libro II de Euclides está presente lo que hoy conocemos como la propiedad distributiva de los reales.

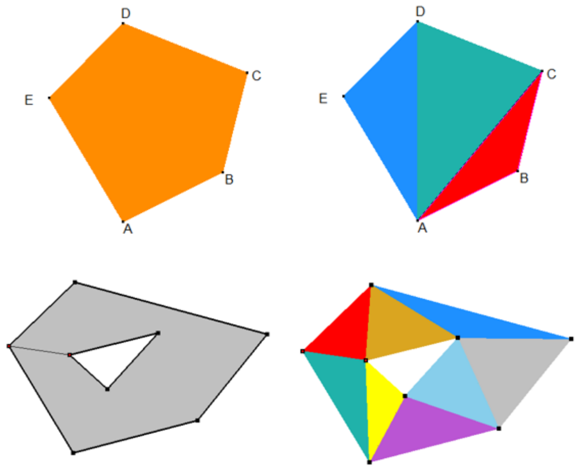


Figura 44. Área de Regiones Poligonales

En la Figura 44, cada región poligonal se ha descompuesto en triángulos.

3) Si dos polígonos son congruentes, entonces las regiones poligonales correspondientes tienen la misma área.

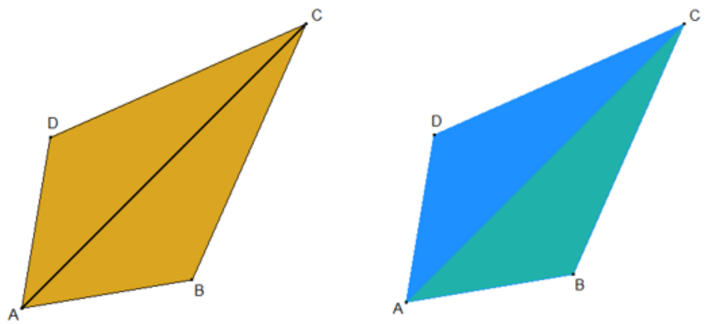


Figura 45. Polígonos Congruentes

En la Figura 45, los triángulos ABC, ADC son congruentes entonces sus áreas son iguales.

4) El área de una región rectangular es igual al producto de la longitud de su base y la longitud de su altura. Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos ángulos internos son todos rectos (Figura 46).

Figura 46. Rectángulo

En la Figura 46, base: $AB = b$, altura: $BC = h$.

Área de la región rectangular $ABCD$: $A = bh$.

Área de Polígonos

Paralelogramo

Es un cuadrilátero de lados opuestos paralelos (Figura 47).

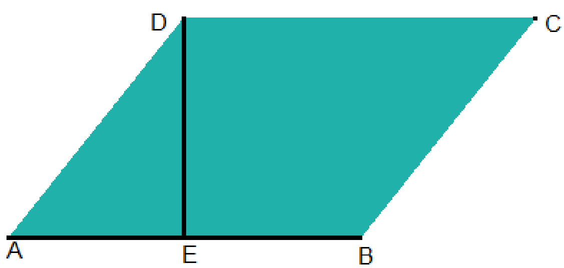


Figura 47. Paralelogramo

El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

En la Figura 47, la longitud de la base es $AB = b$,la altura es $ED = h$. De manera que, el área es: $A = bh$.

Triángulo

La definición ya fue presentada en la sección 1.1, sin embargo, para efectos de referir el de un triángulo, se retoma aquí.

Sean los puntos A, B, C no colineales (Figura 48).

$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.

Cada punto se llama vértice y cada segmento, lado. El lado opuesto a cada vértice se lo denota con la misma letra del vértice, pero minúscula.

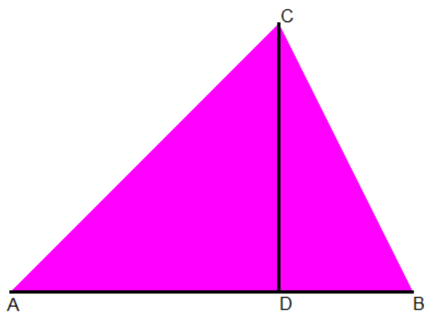


Figura 48. Triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura (Hemerling, 2005: 377).

En la Figura 48, la longitud de la base es $AB = b$, la altura es $DC = h$. De manera que, área del triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$.

Es necesario recordar que, triángulos con bases y alturas iguales, tienen áreas iguales; igualmente, que las áreas de dos triángulos que tienen bases iguales están en la misma razón que sus alturas; y las áreas de dos triángulos que tienen alturas iguales están en la misma razón que sus bases (Hemerling, 2005).

Rombo

Es un paralelogramo equilátero (Figura 49).

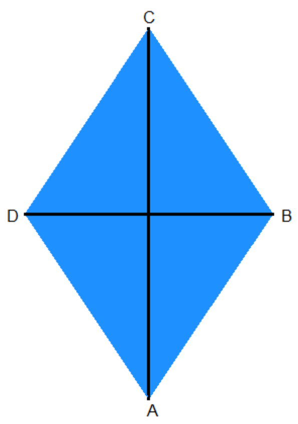


Figura 49. Rombo

El área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.

En la Figura 49, las longitudes de las diagonales son $BD = d_1, AC = d_2$. De manera que, el área es: $A = \frac{1}{2}(d_1 d_2)$.

Trapecio

Es un cuadrilátero con solo un par de lados opuestos paralelos (Figura 50).

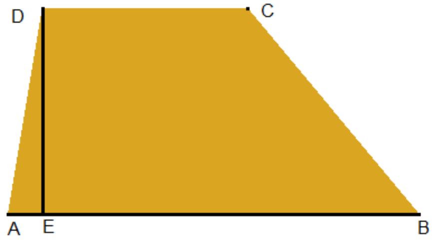


Figura 50. Trapecio

El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.

En la Figura 50, la altura es $DE = h$, $AB = b$, $CD = a$. De manera que, el área del trapecio $ABCD$ es:

$A = \frac{1}{2}(b + a)h$.

Cuadrado

Es un rectángulo de cuatro lados congruentes (Figura 51).

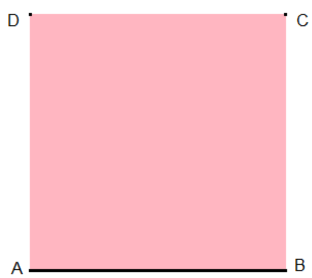


Figura 51. Cuadrado

El área es igual a la longitud del lado elevada al cuadrado. $A = l^2$ donde $l = AB$.

n-malla Triangular

Dado un triángulo arbitrario ABC, cada lado se divide en n partes iguales y dichos puntos se unen mediante segmentos de recta que sean paralelos a los lados del triángulo dado.

La Figura 52 corresponde a una *2-malla*.

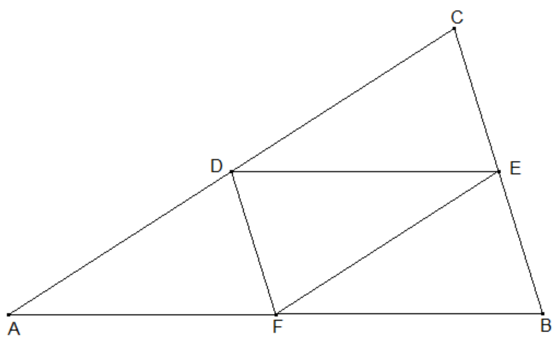


Figura 52. 2-malla triangular

La Figura 53 corresponde a una *3-malla*.

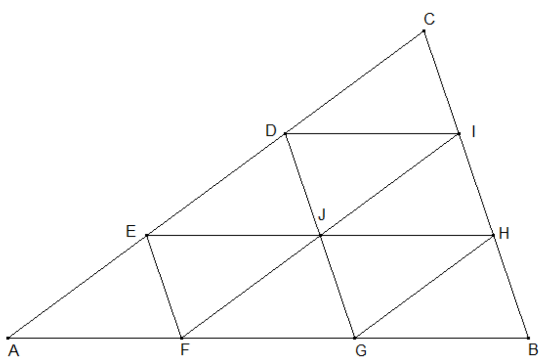


Figura 53. 3-malla triangular

La Figura 54 corresponde a una *12-malla*.

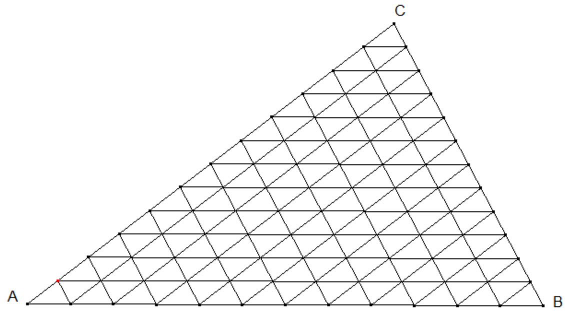


Figura 54. 12-malla triangular

Como se observa, cada *n-malla* triangular está compuesta por n^2 triángulos congruentes, lo cual, se puede ver fácilmente aplicando el Teorema Fundamental del Paralelismo.

n-malla Cuadrada

Dado un cuadrado ABCD, se trisecan los lados y se trazan los segmentos que sean paralelos a los lados del cuadrado (Figura 55).

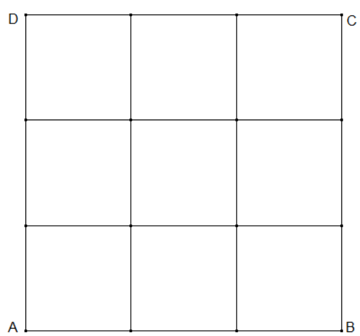


Figura 55. 3-malla Cuadrada

n-malla Paralelográmica

Dado un paralelogramo ABCD, cada lado se divide en n partes iguales y dichos puntos se unen mediante segmentos de recta que sean paralelos a los lados del paralelogramo.

La Figura 56 representa una tres-malla paralelográmica.

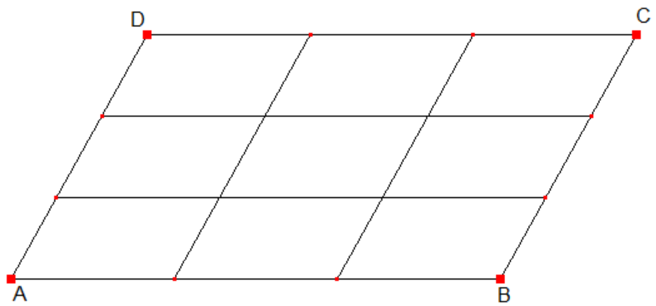
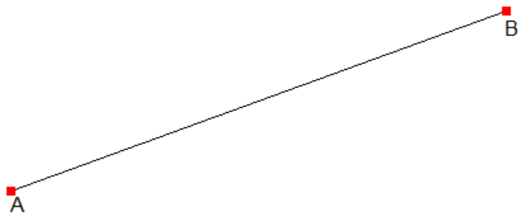


Figura 56. Tres-malla Paralelográmica

CAPÍTULO 2.

Trisección de un segmento de recta



"Oh! Punto A trázame el camino para llegar al punto B, siguiendo siempre la misma dirección para poder caminar por él y ver lo que hay más allá".

Fuente: propia

2.1 Introducción

En esta sección, se propone la Trisección de Segmentos de Recta, basada en la utilización de construcciones geométricas en GeoGebra. Se exploran (16) procedimientos que posibilitan la trisección sin necesidad de recurrir a fórmulas y análisis matemáticos, logrando resultados precisos y confiables. El estudio evidencia la versatilidad de las herramientas geométricas de GeoGebra para abordar problemas geométricos tradicionales con un enfoque práctico.

En el ámbito de la Geometría, la división de segmentos de recta constituye una temática fundamental, tanto por su significancia teórica como por sus aplicaciones prácticas. El *Teorema de Tales* ha sido una herramienta comúnmente empleada para esta tarea, permitiendo dividir un segmento en partes proporcionales de manera precisa. Adicionalmente, los métodos analíticos han brindado una alternativa para abordar este problema, ya que, permiten hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en una razón dada, ofreciendo una solución rigurosa desde una perspectiva algebraica.

Sin embargo, en el contexto actual, caracterizado por el auge de las tecnologías digitales, la incorporación de software especializado, tales como GeoGebra, Cabri, ha supuesto una revolución en la manera de abordar problemáticas geométricas. Esta sección se centra en la presentación y análisis de diversos métodos que posibilitan la trisección de un segmento en tres partes iguales, algunas construcciones fueron motivadas por el uso de GeoGebra.

Los procedimientos de trisección de segmentos incluidos en este capítulo, fueron presentados para su publicación en la Revista Sigma de la Universidad de Nariño, desconociendo a la fecha el volumen y la fecha de publicación, de llegar a aprobarse; dichos procedimientos son de autoría de dos de los tres autores de este libro.

2.2 Construcciones geométricas para la trisección de un segmento

Construcción 1. Trisección de un Segmento Aplicando el Teorema Fundamental del Paralelismo

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 57.

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Trazar $\overrightarrow{AC}$, de modo que no coincida con $\overline{AB}$.
3. Trazar la circunferencia c con centro C y radio AC, que corta al rayo $\overrightarrow{AC}$en D.
4. Trazar la circunferencia d con centro D y radio DC, que corta al rayo $\overrightarrow{AC}$ en E.
5. Trazar $\overline{EB}$.
6. Por los puntos D, E trazar rectas m, n paralelas a $\overline{EB}$ que cortan al segmento $\overline{AB}$ en los puntos G, F que dividen a $\overline{AB}$ en segmentos congruentes.

El resultado del procedimiento descrito aparece en la Figura 57.

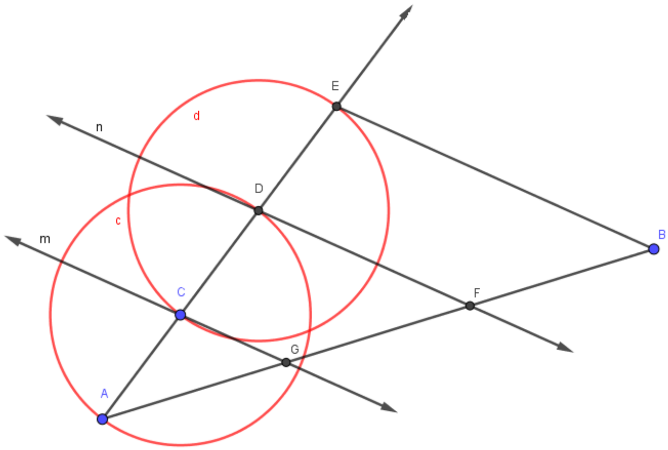


Figura 57. Trisección de un Segmento Aplicando Teorema Fundamental del Paralelismo

Demostración.

Por construcción, en la Figura 57 se tiene que, en $\overrightarrow{AC}$ se cumple la igualdad:

$$AC = CD = DE.$$

Las rectas paralelas $m, n, \overleftrightarrow{EB}$ determinan en $\overrightarrow{AC}$ segmentos congruentes, entonces, en $\overleftrightarrow{AB}$ también determinan segmentos congruentes, así:

$$AG = GF = FB.$$

■

Construcción 2. Trisección de un Segmento Mediante un Triángulo Equilátero

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 58.

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Construir el triángulo equilátero ABC
3. Trazar las bisectrices AM, BN que se cortan en G.
4. Trazar la circunferencia c, de centro en G, que corta a $\overline{BN}$ en D.
5. Trazar por D la recata m, $m \perp \overline{BN}$, la cual corta $\overline{AB}$ en E.
6. E es el punto trisector del segmento $\overline{AB}$.

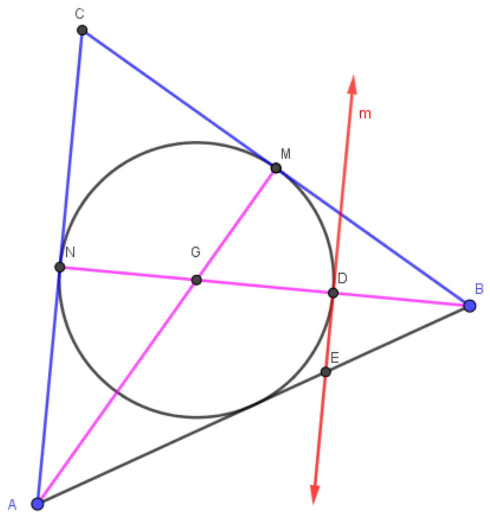


Figura 58. Trisección de un Segmento Mediante un Triángulo Equilátero

Demostración

En un triángulo equilátero la bisectriz de un ángulo es mediana, y, por tanto, los puntos G, D trisecan la mediana BN, esto es,

$$NG = GD = DB = \frac{1}{3}AB.$$

En un triángulo equilátero la bisectriz de un ángulo es altura, por lo cual, $\overline{BN} \perp \overline{AC}$, y como $m \perp \overline{BN}$, se tiene que, $m \parallel \overline{AC}$; por lo tanto, por el Teorema Fundamental del Paralelismo, siendo que $DB = \frac{1}{3}NB$, entonces $EB = \frac{1}{3}AB$ (Figura 58).

■

Construcción 3. Trisección de un Segmento Mediante Trapecios

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 59.

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Construir el triángulo equilátero ABC.
3. Los lados $\overline{AC}, \overline{BC}$ se dividen en 4 partes iguales.
4. Trazar $\overline{EI}, \overline{DG}, \overline{FH}, \overline{FG}$.
5. Trazar las diagonales del trapecio $DGHF$, $\overline{FG}, \overline{DH}$, que se cortan en J.

6. Trazar la circunferencia c, de centro en J y radio $\overline{JH}$, que corta a $\overline{FG}$ en K.
7. Trazar $n \perp \overline{FG}$ por K que corta a $\overline{AB}$ en L.
8. L es el punto que triseca el segmento $\overline{AB}$, de modo que, AL= $\frac{1}{3}AB$.

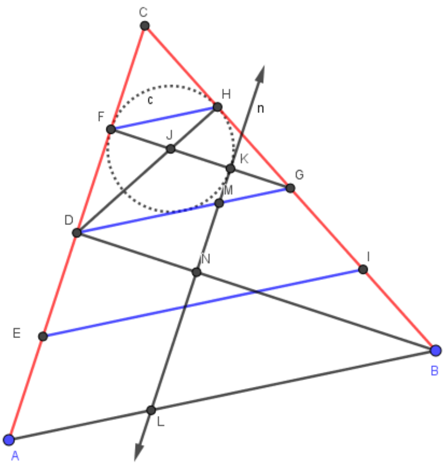


Figura 59. Trisección de un Segmento Mediante Trapecios

Demostración

Sea M el punto de corte de n con $\overline{DG}$. $\overline{GF}$ es la altura del ΔDGC y, por la definición de n, $n \perp \overline{FG}$; como $\overline{FG} \perp \overline{AC}$, se tiene que, $n \parallel \overline{AC}$ (Figura 59).

Ahora, $\overleftrightarrow{DG}$, $\overleftrightarrow{AB}$ son paralelas, lo que conduce a que $AL = DM$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que, $\overline{GF}$ es mediana del ΔDGC equilátero, $n \parallel \overline{AC}$, $\overleftrightarrow{FG}$ y $\overleftrightarrow{DG}$ son dos rectas secantes que intersecan las rectas n y $\overleftrightarrow{AC}$,y considerando que el segmento FG está trisecado, entonces por el Teorema Fundamental del Paralelismo se tiene que,

$$DM = \frac{2}{3} DG.$$

Además, por Teorema 6,

$$DG = \frac{1}{2} AB.$$

Luego,

$$AL = DM = \frac{2}{3} DG = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} AB\right) = \frac{1}{3} AB.$$

El punto de corte L de la recta $n \perp \overline{FG}$ con el segmento AB, determina la tercera parte del segmento AB, logrando así el objetivo (Figura 59).

■

Construcción 4. Trisección de un Segmento Mediante una Recta Paralela

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 60.

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Dividir $\overline{AB}$ en 4 partes iguales por medio de los puntos P, Q, R.
3. Construir el triángulo equilátero PRC.
4. Los lados $\overline{PC}, \overline{RC}$ se dividen en 4 partes iguales por medio de los puntos E, D, F e I, G, H, respectivamente.
5. Trazar $\overline{EI}, \overline{DG}, \overline{FH}$.

6. Trazar $\overline{FG}, \overline{DH}$ que se cortan en J.
7. Por J, trazar $n \parallel \overline{PC}$, que corta a $\overline{AB}$ en L.
8. $AL = \frac{1}{3}AB$, por el procedimiento descrito y el Teorema del Paralelismo, tal como se verá en la demostración que sigue.

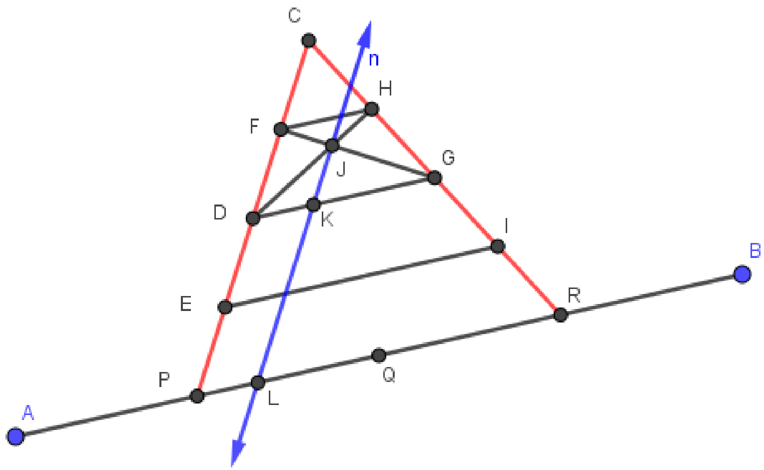


Figura 60. Trisección de un Segmento Mediante Recta Paralela

Demostración

Sea K el punto de corte de n con $\overline{DG}$ (Figura 60).

El ΔDGC es equilátero, cada lado mide $\frac{1}{2}AB$; $\overline{GF}$ y $\overline{DH}$ son bisectrices, entonces $FJ = \frac{1}{3}FG$, y como FG y DG son secantes de las rectas paralelas n y $\overline{PC}$, entonces por el Teorema del Paralelismo se tiene que $DK = \frac{1}{3}DG$.

Por la construcción de la Figura 60, se tiene que la figura $PLKD$ es un paralelogramo, por lo cual, $PL = DK$.

Por otra parte, D y G son puntos del ΔDGC, por lo cual, $DG = \frac{1}{2}PR$.

Entonces,

$$AL = AP + PL = AP + DK$$

$$= \frac{1}{4}AB + \frac{1}{3}DG$$

$$= \frac{1}{4}AB + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}PR\right)$$

$$= \frac{1}{4}AB + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}AB\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}AB\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}AB.$$

■

Construcción 5. Trisección de un Segmento por Medio de Medianas

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 61.

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Por A se traza $\overleftrightarrow{AC}$ que no coincida con $\overleftrightarrow{AB}$

3. Con centro A y radio AC se traza una circunferencia c, que corta la línea $\overleftrightarrow{AC}$ en C y en D.
4. Trazar $\overline{CB}, \overline{DB}$.
5. Se determina el punto medio de $\overline{CB}$, que se lo denota con M.
6. Trazar $\overline{DM}$ que corta a $\overline{AB}$ en P.
7. Determinar el punto medio de $\overline{PB}$, que se lo denota con Q.
8. Los puntos P, Q dividen a $\overline{AB}$ en 3 partes congruentes.

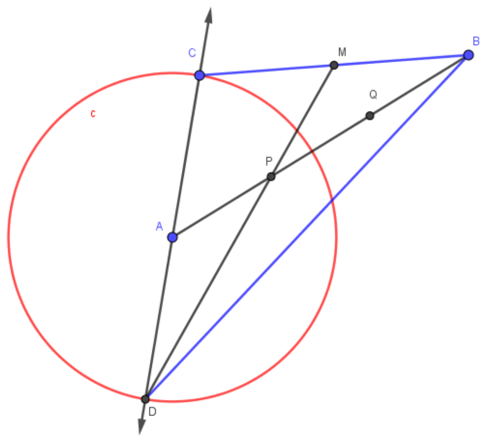


Figura 61. Trisección de un Segmento Mediante Medianas

Demostración.

En la Figura 61, CBD es un triángulo, donde $\overline{AB}$ es una mediana y $\overline{DM}$ la otra mediana.

El corte de las medianas del triángulo DBC es P, y por el Teorema de las Medianas de un Triángulo, se tiene que $AP = \frac{1}{3}AB$.

■

Construcción 6. Trisección de un Segmento Mediante un Triángulo Equilátero (Otro procedimiento)

El procedimiento y la demostración se basan en la Figura 62

Procedimiento

1. Trazar $\overline{AB}$.
2. Construir el triángulo equilátero ABC con lado $\overline{AB}$.
3. Trazar las medianas CM , BN, que se cortan en O.
4. Trazar una circunferencia c con centro O y radio $\overline{OM}$, que corta a $\overline{CM}$ en D.
5. Por D trazar $m \parallel \overline{AB}$, que corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en E, F respectivamente.
6. Por E, F trazar $p \perp \overline{AB}$, $q \perp \overline{AB}$, que cortan a $\overline{AB}$ en P, Q respectivamente.
7. Los puntos P, Q dividen al segmento $\overline{AB}$ en 3 partes congruentes.

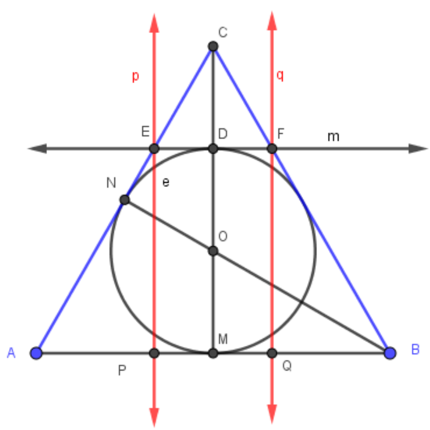


Figura 62. Trisección de un Segmento Mediante Otro Procedimiento de Triángulo Equilátero

Demostración.

En la Figura 62, se tiene que, $\Delta AMC \sim \Delta APE$, ya que $\angle MAC \cong \angle DEC$ y $\angle ACM \cong \angle ECD$.

Por Teorema 3 se tiene: $OC = \frac{2}{3}MC$, entonces $MO = \frac{1}{3}MC$; de aquí, $DC = \frac{1}{3}MC$.

De aquí se concluye que, $\frac{AC}{EC} = \frac{MC}{DE} = \frac{AM}{ED}$, pero, $\frac{MC}{DC} = \frac{MC}{\frac{1}{3}MC} = 3$, entonces $\frac{AM}{ED} = 3$, de donde, $AM = 3ED = 3PM$; así, $AM = 3PM$.

De manera similar, se demuestra que , $BM = 3QM$.

Ahora, $AB = AM + BM = 3PM + 3QM = 3(PM + MQ) = 3PQ$.

Es fácil demostrar que, $AP = BQ$, y de aquí, $AB = 2AP + PQ = 2AP + PQ = 3PQ = 2AP + PQ$, de donde $PQ = AP$.

Finalmente, $AP = BQ = QB$.

■

2.3 EJERCICIOS

1) Trisecar las diagonales de un cuadrado $ABCD$

2) Trisecar las medianas del triángulo ABC.

3) Trisecar las diagonales de un paralelogramo $ABCD$.

4) Trisecar las diagonales de un rombo $PQRS$.

5) Trisecar los lados del cuadrado teniendo los puntos de trisección de la diagonal.

6) Trisecar los lados del triángulo ABC teniendo los puntos de trisección de las medianas.

7) Trisecar las diagonales de un cuadrilátero teniendo los puntos de trisección de los lados del mismo.

CAPÍTULO 3.
Trisección del triángulo

“Si los triángulos hicieran un dios, lo idearían con tres lados”

(Akifrases, 2025).

Fuente: Shutterstock. (s.f.).

En este capítulo se presentan diversas formas de trisecar el área de un triángulo aplicando *n-mallas* y propiedades geométricas de un triángulo cualquiera, como también propiedades del triángulo equilátero.

Construcción 1. Tres triángulos de igual base

Procedimiento

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Trazar los puntos D, E de modo que trisequen el segmento AB, por lo cual,

   $AD = DE = EB = \frac{1}{3}AB.$
3. Trazar $\overline{CD}, \overline{CE}$.

El resultado de este procedimiento se presenta en la Figura 63.

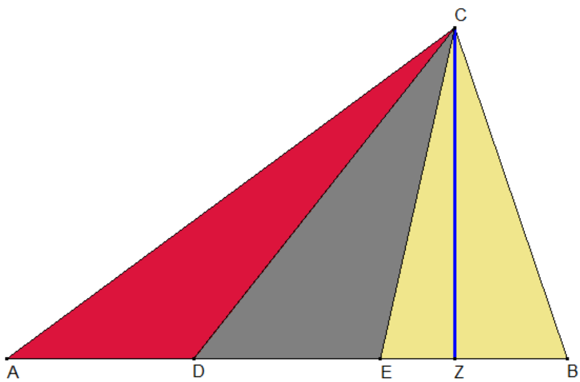


Figura 63. Resultado trisección del triángulo con tres triángulos de igual base

Demostración.

Se trata de demostrar que las áreas de los triángulos ΔADC, ΔDEC y ΔEBC son iguales entre sí y, además, por lo cual, iguales a $\frac{1}{3}(Área\ \triangle ABC)$.

$$área\ (\Delta ABC) = \frac{1}{2}(báse \times altura) = \frac{1}{2} \times AB \times CZ.$$

$$área\ (\Delta ADC) = \frac{1}{2} \times AD \times CZ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}AB\right)CZ = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB \times CZ\right)$$

$$= \frac{1}{3}(Área\ (\Delta ABC)).$$

De la misma manera, se prueba que,

$$área\ (\Delta DEC) = área(\Delta EBC) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

■

Construcción 2. Trisección y bisección

Procedimiento

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Determinar el punto D tal que $AD = \frac{1}{3}AB$.
3. Trazar el segmento CD.
4. Determinar el punto medio E del segmento CD, con lo cual, $DE = EC$.
5. Trazar el segmento BE.

El resultado de este procedimiento se presenta en la Figura 64.

Las áreas de los triángulos ADC, DBE, BCE trisecan el área del triángulo ABC.

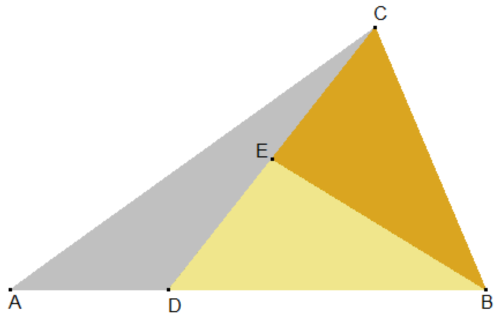


Figura 64. Resultado trisección del triángulo con tres triángulos de igual base

Demostración.

Por lo demostrado en la construcción de la Figura 63 y en relación con la Figura 64, se tiene que,

$$área\ (\Delta ADC) = \frac{1}{3}(\ área\ (\Delta ABC)).$$

$$área\ (\Delta DBC) = \frac{2}{3}(\ área\ (\Delta ABC)).$$

Demostremos que,

$$área\ (\Delta DBE) = \frac{1}{3}(\ área\ (\Delta ABC)).$$

$$\text{área}\ (\Delta DBE) = \frac{1}{2}\left(\text{área}\ (\Delta DBC)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(\text{área}\ (\Delta ABC)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ (\text{área}\ (\Delta ABC)).$$

De manera similar se demuestra que $\text{área}\ \Delta EBC = \frac{1}{3}\ (\text{área}\ (\Delta ABC))$.

De modo que,

$$\text{área}\ (\Delta ADC) = \text{área}\ (\Delta DBC) = \text{área}\ (\Delta BCE)$$
$$= \frac{1}{3}\ (\text{área}\ (\Delta ABC)).$$

■

Construcción 3. Los dos trapecios y una región poligonal

Procedimiento

1. Determinar los puntos medios de los lados del triángulo ABC, denominados D, E, F.
2. Trazar el segmento DE.
3. Trisecar el segmento DE por medio de los puntos G, H.
4. Trazar los polígonos $AFGD, FBEH, DGFHEC$.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 65.

puntos la construcción

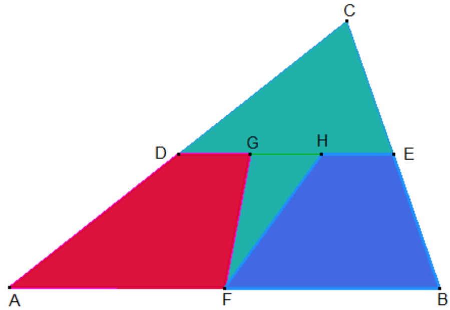


Figura 65. Dos trapecios y una región poligonal

Demostración

La demostración se realiza con referencia a la Figura 65.

Se debe demostrar que el área de cada trapecio es $\frac{1}{3}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC))$.

Por la notación del ΔABC, se tiene que,

$c = AB$.

$h = a$ltura del ΔABC.

Por construcción, $AF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$ y $DE = \frac{1}{2}AB$.

Dado que D y E son puntos medios de los segmentos AC y BC, entonces la altura de los trapecios $AFGD$ y $FBEH$ es, $h' = \frac{h}{2}$.

$$DG = \frac{DE}{3} = \frac{\frac{AB}{2}}{3} = \frac{\frac{c}{2}}{3} = \frac{c}{6}.$$

El área de cada uno de los trapecios es,

$$\frac{(AF + DG)h'}{2} = \frac{\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{6}\right)\frac{h}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{4c}{6}\right)\frac{h}{2}}{2} = \frac{1}{3}\frac{ch}{2}.$$

De modo que, el área A_r de la región $DGFHEC$, es,

$$A_r = área\ (\Delta ABC) \\ - (área\ (trapecio\ (AFGD)) + área\ (trapecio\ (FBEH)))$$

$$A_r = \frac{ch}{2} - \frac{2}{3}\frac{ch}{2} = \frac{1}{3}\frac{ch}{2} = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

■

Construcción 4. El cirio

Procedimiento

1. Trazar una *3-malla*.
2. Trazar los polígonos con vértices $EFGHJ, EJIC$ y la región formada por los triángulos AFE, GBH.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 66.

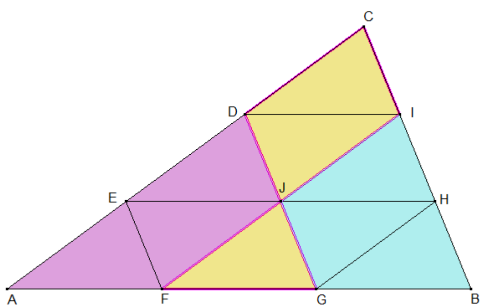


Figura 66. El cirio

Demostración

La demostración hace referencia a la Figura 66.

En este caso, la demostración es fácil. Todos los triángulos que conforman la *3-malla* del triángulo ABC son congruentes, y por ello tienen la misma área.

Cada uno de los polígonos con vértices $FICDG, ADJF, BGJI$ está compuesta por tres triángulos de igual área, por lo cual, el triángulo ABC queda trisecado por estos polígonos.

■

Construcción 5. El paralelogramo y trapecio

Esta construcción se considera interesante porque en un triángulo se pueden incorporar figuras geométricas distintas que constituyen regiones que tienen la misma área.

Procedimiento

1. Trazar la *12-malla*.
2. Trazar los polígonos de vértices $AHED, HBGF, DEFGC$.

Los dos primeros corresponden a un paralelogramo y trapecio respectivamente.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 67.

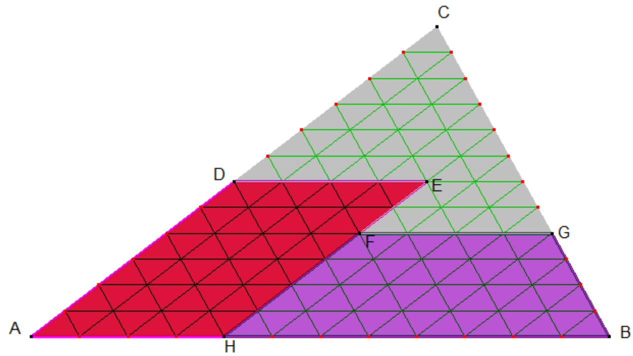


Figura 67. El paralelogramo y trapecio

Demostración

La demostración se realiza con referencia a la Figura 67.

En este caso, basta contar el número de triángulos de la *12-malla* que le corresponde a cada polígono, los cuales son congruentes, por lo cual, tienen la misma área. El número de triángulos para cada polígono es 48. Esto indica que se ha realizado la trisección requerida.

■

Construcción 6. Combinación

Procedimiento.

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Por medio de los puntos D, E dividir el segmento AB en tres partes iguales.

3. Trazar los segmentos CD, CE.
4. Determinar los puntos medios F, G de los segmentos CB, CD, respectivamente.
5. Trazar las medianas DF, BG.
6. Trazar las regiones formadas por los polígonos DHG, BHC. La formada por los polígonos DBH, CGH y la formada por el triángulo ADC.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 68.

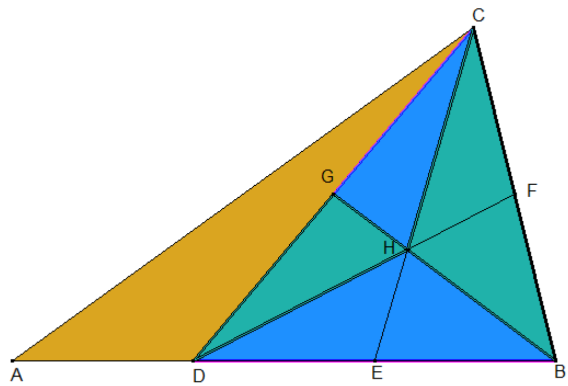


Figura 68. Combinación

Demostración

La demostración hace referencia a la Figura 68.

Por la construcción 1, del presente capítulo, se tiene que,

$$\text{área } \Delta ADC = \text{área } \Delta DEC = \text{área } \Delta EBC = \frac{1}{3}\,(\text{área}\Delta ABC).$$

Ahora, cada pareja de triángulos que siguen, tiene la misma longitud de la base y la misma altura:

$$área\ (\Delta DEC) = área\ (\Delta EBC)$$

$$área\ (\Delta DEH) = área\ (\Delta BEH)$$

$$área\ (\Delta BFH) = \ área\ (\Delta CFH)$$

$$área\ (\Delta CGH) = \ área\ (\Delta DGH)$$

Ahora,

$$área\ (\Delta DEC) = área\ (\Delta DEH) + área\ (\Delta DHG) + área\ (\Delta GHC)$$

$$área\ (\Delta EBC) = área\ (\Delta BEH) + área\ (\Delta BFH) + área\ (\Delta FHC)$$

Pero, $área\ (\Delta GHC) = área\ (\Delta EBH)$, entonces,

$$área\ (\Delta DEC) = área\ (\Delta DEH) + área\ (\Delta DHG) + área\ (\Delta EBH)$$

De manera similar, se demuestra que, $área\ (\Delta EBC) = área\ (\Delta BCH) + área\ (\Delta DHG)$.

■

Construcción 7. Montañas

Procedimiento

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Por medio de los puntos D, E, F dividir el segmento AB en cuatro partes iguales.

3. Trazar los segmentos CD, CE, CF.
4. Determinar los puntos G, H que dividen al segmento CD en tres partes iguales.
5. Trazar los segmentos EG, EH.
6. Trazar las regiones formadas por los polígonos FBC, EHC.
7. Las regiones poligonales de vértices $ADGEHC$, $DFCEG$ y $FBCHEC$ trisecan el área del triángulo ABC.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 69.

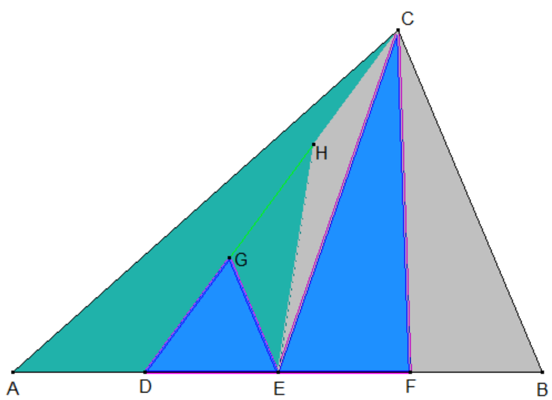


Figura 69. Montañas

Demostración

La demostración hace referencia a la Figura 69.

Por aplicación de la construcción 1 del presente capítulo, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\acute{a}rea\ (\Delta ADC) = \acute{a}rea\ (\Delta DEC) = \acute{a}rea\ (\Delta EFC) = \acute{a}rea\ (\Delta FBC)\\
= \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\acute{a}rea\ (\Delta DEG) = \acute{a}rea\ (\Delta GEH) = \acute{a}rea\ (\Delta HEC) = \frac{1}{3}(\ \acute{a}rea\ (\Delta DEC))\\
= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ (\Delta ABC))\right) = \frac{1}{12}(\ \acute{a}rea\ (\Delta ABC)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\acute{a}rea\ (\Delta ADC) + \frac{1}{3}\ (\acute{a}rea\ (\Delta DEC))\\
&\qquad = \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ (\Delta ABC)) + \frac{1}{12}\ (\acute{a}rea\ (\Delta ABC))\\
&\qquad = \frac{3+1}{12}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)) = \frac{1}{3}\ (\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).
\end{aligned}
$$

La misma conclusión se obtiene con las otras regiones.

■

Construcción 8. División con intervención de la bisectriz

Procedimiento.

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Trazar la recta CD, como caso particular CD puede ser bisectriz del vértice C.
3. Determinar los puntos E y F que trisecan a $\overline{CD}$.
4. Trazar los polígonos ABE, $AEBF$.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 70.

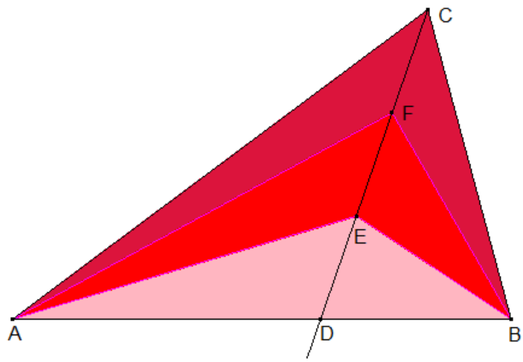


Figura 70. Trisección con intervención de la bisectriz

Demostración

La demostración hace con referencia a la Figura 70.

Por el Postulado 2 sobre el área, se tiene que,

$$área\ (\Delta ABC) = área\ (\Delta ADC) + área\ (\Delta BDC)$$

$$área\ (\Delta ABC) = área\ (\Delta ABE) + área\ (región\ (AEBF)) + área\ (región\ (AFBC))$$

Por Construcción 1, realizada en este capítulo, se tiene que,

$$área\ (\Delta ABE) = área\ (\Delta ADE) + área\ (\Delta DBE)$$

$$= \frac{1}{3}\big(área\ (\Delta ADC)\big) + \frac{1}{3}\big(área\ (\Delta BDC)\big)$$

$$= \frac{1}{3}(área\ (\Delta ADC) + área\ (\Delta DBC)) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

De manera similar, se demuestra que,

$$\acute{a}rea\ (regi\acute{o}n\ (AEBF)) = \frac{1}{3}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

$$\acute{a}rea\ (regi\acute{o}n\ (AFBC)) = \frac{1}{3}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

■

Construcción 9. Paralelogramos, hexágonos

Procedimiento.

1. Trazar una *12-malla*.
2. Trazar los paralelogramos y hexágonos, en color rojo, tal como lo muestra la Figura 71.
3. Pintar en la *12-malla* la zona en color verde, tal como como lo indica la Figura 71.
4. Pintar de color gris la zona inferior, tal como lo indica la Figura 71.

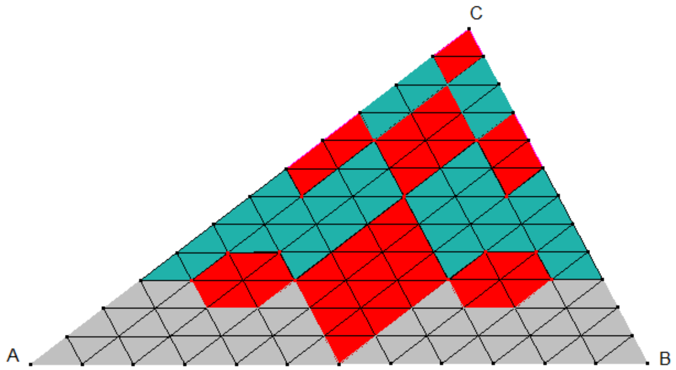


Figura 71. Paralelogramo y hexágonos

Demostración

La demostración hace referencia a la Figura 71.

Basta contar el número de triángulos que componen cada región de diferente color, teniendo en cuenta que los triángulos tienen igual área.

Se observa, en este caso que, cada región está conformada por 48 triángulos.

■

Construcción 10. Triángulos equivalentes dentro de un triángulo equilátero

Procedimiento.

1. Trazar una *2-malla* en un triángulo equilátero.
2. Trisecar los segmentos *FD, FE y DE* por medio de los puntos *G, H, K, L, I, J,* respectivamente.
3. Pintar de color amarillo los triángulos *DIC, JEC, DIF, JEF*.
4. Pintar de color verde los triángulos *FGA, HDA, FLB, KEB.*
5. Pintar de color negro los triángulos restantes.

El resultado del procedimiento se presenta en la Figura 72.

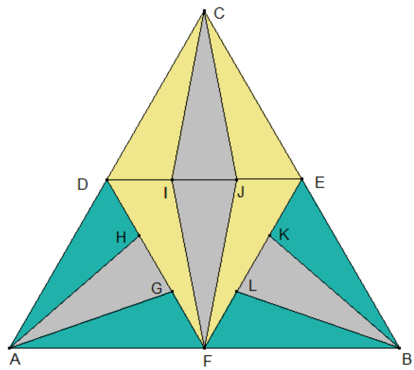


Figura 72. Triángulos equivalentes

Demostración

La demostración hace referencia a la Figura 72.

Cada triángulo tiene base y altura de la misma longitud, por lo cual tienen la misma área. Como hay 12 triángulos, basta colorear cuatro triángulos cualesquiera del mismo color y cada región tendrá la tercera parte del área del triángulo ABC.

Construcción 11. Trisección de un triángulo equilátero utilizando el baricentro: método 1

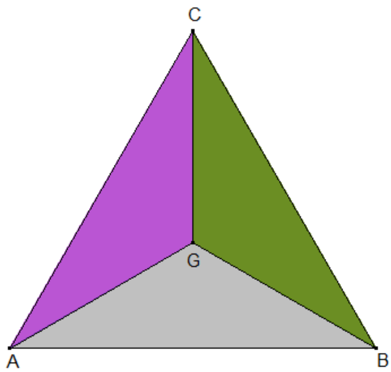


Figura 73. Trisección del triángulo equilátero utilizando el baricentro-método 1

Procedimiento

1. Trazar un triángulo equilátero ABC de lado l.
2. Determinar el baricentro G.
3. Trazar los segmentos AG, BG, CG.

El resultado se presenta en la Figura 73.

Demostración.

La demostración se realiza con referencia a la Figura 73.

Como el triángulo ABC es equilátero, sus medianas son congruentes y sus medidas son iguales.

Sea m la longitud de cada mediana, entonces $AG = BG = CG = \frac{2}{3}m$, por lo tanto, $\overline{AG} \cong \overline{BG} \cong \overline{CG}$; también se cumple que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$.

Con esto, se tiene que,

$$\Delta ABG \cong \Delta BCG \cong \Delta CAG.$$

Por lo tanto, cada uno de dichos triángulos tienen la misma área y corresponde a la tercera parte del área del triángulo ABC, esto es:

$$área\ \Delta ABG = área\ \Delta BCG = área\ \Delta CAG = \frac{1}{3}(área\ \Delta ABC).$$

Construcción 12. Trisección de un triángulo equilátero utilizando el baricentro: método 2

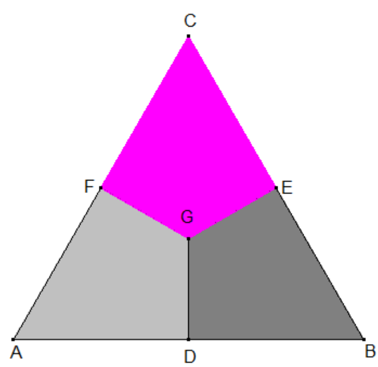


Figura 74. Trisección del triángulo equilátero utilizando el baricentro-método 2

Procedimiento.

1. Trazar un triángulo equilátero ABC de lado *l*.

2. Determinar el baricentro *G.*

3. Trazar los segmentos GD, GE, GF perpendiculares los lados AB, BC, CA, respectivamente.

El resultado se presenta en la Figura 74.

Demostración.

La demostración se desarrolla con referencia a la Figura 74.

En los cuadriláteros $ADGF, BDGE, CEGF$ se tiene:

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^0.$$

$$AD = DB = BE = EC = CF = FA = \frac{1}{2}l.$$

$$GD = GE = GF = \frac{1}{3}n.$$

Donde n es la longitud de la mediana, relativa a cualquier vértice, con lo cual, los cuadriláteros son congruentes por el caso $LLLLA$ (Lugo et al., 2019).

Así que, las áreas A_r de las regiones ADGF, DBEG y FGEC son iguales, por tanto,

$$A_r\ (ADGF) = A_r\ (DBEG) = A_r\ (FGEC) = \frac{1}{3}\big(área\ (\Delta ABC)\big).$$

■

Construcción 13. Trisección mediante paralelas a un lado de un triángulo

Procedimiento

1. Trazar un triángulo arbitrario ABC.
2. Trazar la altura $CD = h$.
3. Trazar la circunferencia c con centro D y radio h que corta a la recta AB en Y.
4. Trazar la circunferencia d con centro Y y radio h que corta a c en los puntos E, F.
5. Trazar $\overline{EF}$
6. Determinar el punto G tal que $EG = \frac{1}{3}EF$.
7. Trazar la circunferencia e con centro en C y radio EG, que corta a la altura CD del ΔABC en H.
8. Trazar por H una recta paralela a la base AB que corta al ΔABC en I y J.
9. Trazar el ΔIJC.
10. Construir un cuadrado de lado CH y trazar la diagonal CX como en la Figura 75.

11. Trazar una circunferencia f con centro en C y radio CX, que corta en K a la altura CD.

12. Trazar por K una recta paralela a la base que corta al triángulo ABC en L y M.

13. Trazar los polígonos $ABML$ y $LMJI$.

El resultado se presenta en la Figura 75.

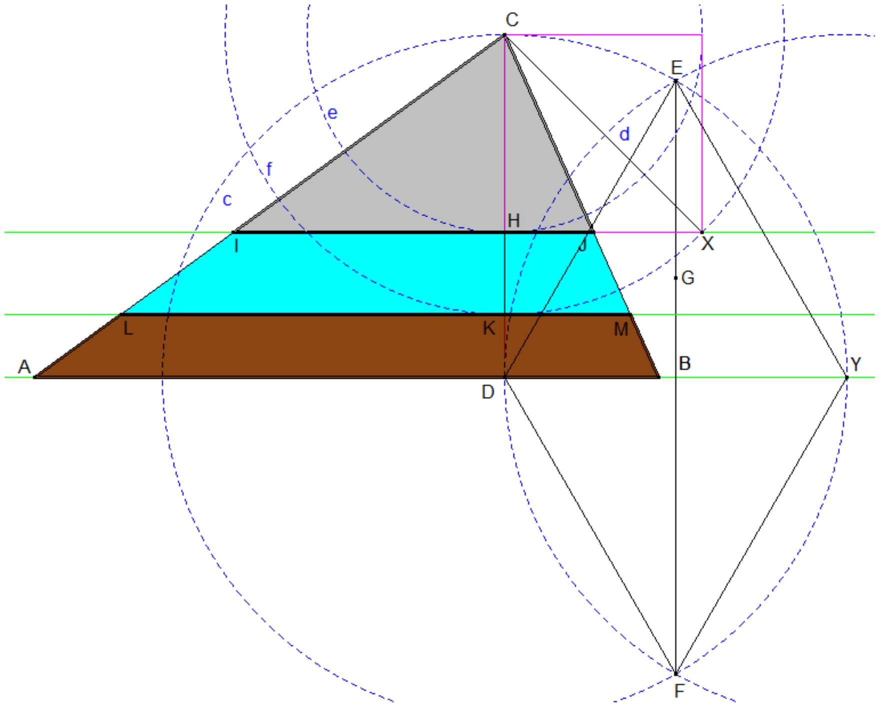


Figura 75. Trisección mediante paralelas a un lado de un triángulo

Demostración

La demostración se realiza con referencia a la Figura 75.

Sea $CD = h$.

Por la construcción, se cumple que, ΔDYE y ΔDYF son equiláteros y congruentes, porque todos sus lados miden $CD{=}h$.

Aplicando el teorema de Pitágoras se ve que la altura de longitud EB es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}h$.

Y por esto, $EF = \sqrt{3}$h.

$$EG = \frac{1}{3}EF = \frac{\sqrt{3}}{3}h.$$

Entonces,

$$\frac{área\ (\Delta IJC)}{área\ (\Delta ABC)} = \left(\frac{CH}{CD}\right)^2 = \left(\frac{\frac{h\sqrt{3}}{3}}{h}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$área\ (\Delta IJC) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

$$CX = \frac{h\sqrt{3}}{3}\sqrt{2}.$$

$$\frac{CH}{CK} = \frac{\frac{h\sqrt{3}}{3}}{\frac{h\sqrt{3}}{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{área\ (\Delta IJC)}{área\ (\Delta LMC)} = \left(\frac{CH}{CK}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$área\ (\Delta IJC) = \frac{1}{2}(área\ (\Delta LMC)).$$

Ahora, se calcula el área A_{r1} de la región delimitada por el polígono de vértices $LMJI$:

$$A_r = área\ (\Delta LMC) - área\ (\Delta IJC)$$

Entonces,

$$A_{r1} = 2(área\ (\Delta IJC)) - área\ (\Delta IJC) = área\ (\Delta IJC) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

Ahora, se calcula el área A_{r2} de la región delimitada por el polígono de vértices $ABML$:

$$A_{r2} = área\ (\Delta ABC) - 2(área\ (\Delta IJC))$$

Por lo tanto,

$$A_{r2} = área\ (\Delta ABC) - 2\left(\frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC))\right) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

Construcción 14. Trisección de un triángulo escaleno

Procedimiento

1. Trazar un ΔABC.

2. Los lados del ΔABC se trisecan mediante los puntos D, E del segmento AC; F, G del segmento AB; y H, I del segmento BC.

3. Trazar el segmento DF.

4. Determinar el punto medio J del segmento DF.

5. Trazar los polígonos FHD, $ABHFJ$, $ACHDJ$ que trisecan al triángulo inicial ABC.

El resultado se presenta en la Figura 76.

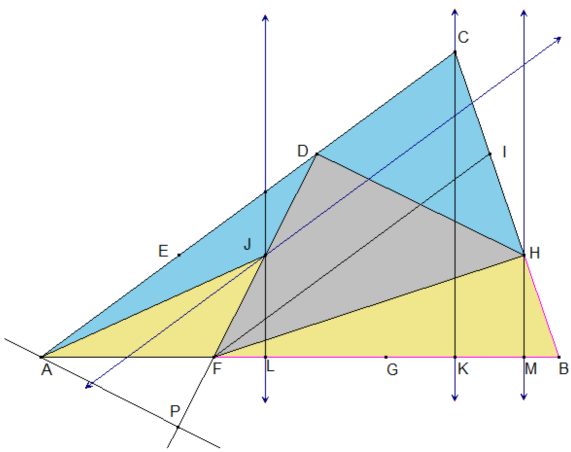


Figura 76. Trisección de un triángulo escaleno

Demostración

La demostración se realiza con base en la Figura 76.

Sea h la medida de la altura del triángulo sobre el lado AB, y sea K el punto de corte de la altura con AB, por lo cual, $CK = h$.

Por semejanza de los triángulos BCK, BHM, se tiene que,

$$h' = HM = JL = \frac{h}{3}.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} área\ (\Delta AFJ) &= \frac{AF \times h'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}c\right)\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ch}{2}\right) \\ &= \frac{1}{9}(área\ (\Delta ABC)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} área\ (\Delta FBH) &= \frac{FB.h}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c\right)\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{ch}{2}\right) \\ &= \frac{2}{9}(área\ (\Delta ABC)). \end{aligned}$$

Ahora, sea A_{r1} el área de la región $ABHFJ$, entonces,

$$A_{r1} = área\ (\Delta AFJ) + área\ (\Delta FBH).$$

Entonces,

$$A_{r1} = \frac{1}{9}(área\ (\Delta ABC)) + \frac{2}{9}\ (área\ (\Delta ABC)) = \frac{1}{3}(área\ (\Delta ABC)).$$

Ahora,

$$Área\ (\Delta AFJ) = \frac{1}{2}(FJ)(AP)$$

$$área\ (\Delta AJD) = \frac{1}{2}(JD)(AP) = \frac{1}{2}(FJ)(AP)$$

Por ello, $área\ (\Delta AFJ) = área\ (\Delta AJD)$, entonces,

$$\acute{a}rea\ (\Delta AJD) = \frac{1}{9}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

Razonando de manera semejante a la anterior, se tiene lo siguiente:

Sea h'' la longitud de la altura relativa al lado AC, entonces la altura del triángulo DHC, será:

$$h''' = \frac{2}{3}h''\ .$$

De manera que,

$$\acute{a}rea\ (\Delta DHC) = \frac{1}{2}DC \times h''' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}h''\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}bh''\right)$$
$$= \frac{2}{9}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

Ahora, sea

Ahora, sea A_{r2} el área de la región $ACHDJ$, entonces,

$$A_{r2} = \acute{a}rea\ (\Delta AJD) + \acute{a}rea\ (\Delta DHC),$$

Entonces,

$$A_{r2} = \frac{1}{9}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)) + \frac{2}{9}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)) = \frac{1}{3}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

De lo anterior se concluye que,

$$\acute{a}rea\ (\Delta FHD) = \frac{1}{3}(\acute{a}rea\ (\Delta ABC)).$$

■

De esta manera, finaliza este libro donde los autores hemos vivido una gran aventura y muchas alegrías en el arte de trisecar figuras geométricas y contar con la belleza de las matemáticas y de las figuras.

Creemos que en el futuro inmediato emprenderemos otro viaje por la geometría, esta vez estudiando la maravilla de trisecar cuadriláteros y, en un posterior esfuerzo, trisecar circunferencias y círculos.

EJERCICIOS

1. Trisecar un triángulo usando la mediana y que sea diferente al presentado en el libro.
2. Trisecar un triángulo usando la bisectriz y que sea diferente al presentado en el libro.
3. Trisecar un triángulo usando la mediatriz de un lado.
4. Trisecar un triángulo acutángulo usando la altura de un lado diferente a l presentado en el libro.
5. Trisecar un triángulo equilátero de manera diferente al presentado en el libro.
6. Trisecar un triángulo rectángulo isósceles de manera diferente al presentado en el libro.
7. Trisecar un triángulo escaleno de manera diferente al presentado en el libro.
8. Trisecar un triángulo isósceles de manera diferente al presentado en el libro.

Referencias

Akifrases. (2025). Frases y Citas Célebres de Triángulo. https://akifrases.com/frases/tri%C3%A1ngulo#google_vignette.

Frases de famosos. (s.f.). Fuente: https://citas.in/temas/geometria/

Hemmerling, E. (2000). Geometría Elemental. Limusa. México.

Hemmerling, E. (2005). Geometría Elemental. Limusa. México.

Landaverde, F.(s.f.) Curso de Geometría. Librería FTD. Bogotá.

Lehmann, Ch. (1989). Geometría Analítica. Limusa. México.

Lugo, J., Bernal, J., López, Z., Sua, C. y Ramírez, A. (2019). Estrategia para el estudio de congruencia entre cuadriláteros. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 24 (pp. 329-331). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Shutterstock. (s.f.). Montesquieu. https://www.shutterstock.com/es /editorial/image-editorial/montesquieu-1689-1755-charles-louis-de-secondat-baron-4423188a

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Tomo 1. Editorial Aguilar.

Wikipedia. (2021). Teorema de Wantzel. https://es.wikipedia.org/ wiki/Teorema_de_Wantzel

Wikipedia. (s.f.). Giordano Bruno. https://es.wikipedia.org/wiki/ Giordano_Bruno

Lista de figuras

Acerca de los autores

Libardo Manuel Jácome

Profesor adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Nariño.
Correo electrónico: elo@udenar.edu.co

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Profesor de Tiempo Completo, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima.
Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Leonel Erazo Delgado

Profesor Hora Cátedra adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas, Universidad de Nariño. Especialista en Docencia Universitaria, Universidad Cooperativa de Colombia. Especialista en Estadística, convenio Universidad de Nariño-Universidad Nacional. Magister en Investigación de Operaciones y Estadística, Convenio Universidad de Nariño, Universidad Tecnológica de Pereira.
Correo electrónico: lederudenar@gmail.com

êditorial
Universidad de Nariño

Año de publicación: 2026
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Este libro se estructura en tres capítulos, que van desde los fundamentos geométricos hasta la exploración de métodos de trisección de segmentos y de triángulos.

En el Capítulo 1: Preliminares, se presentan conceptos básicos requeridos para la comprensión de la trisección de segmentos y figuras geométricas. Se introducen definiciones esenciales como segmentos, puntos medios, ángulos, polígonos y circunferencias, además de teoremas fundamentales de la geometría euclidiana.

El Capítulo 2: Trisección de un segmento de recta, se centra en el problema de dividir un segmento en tres partes iguales, mediante diferentes métodos geométricos. A través de una colección de construcciones, se emplean herramientas como el Teorema del Paralelismo, triángulos equiláteros, semejanza de triángulos y propiedades de las circunferencias; asimismo, se exploran estrategias utilizando medianas, cuadrados, hexágonos regulares y otras figuras geométricas que permiten obtener la trisección. Como se indicó antes, las construcciones presentadas en este capítulo forman parte de un conjunto más amplio de construcciones que serán publicadas en la Revista Sigma de la Institución, sin embargo, dado que son requeridas en algunas construcciones del capítulo 3, se incorporan en este capítulo.

El Capítulo 3: Trisección del triángulo, se enfoca en el problema de dividir un triángulo en tres triángulos o, en otros casos, en tres regiones de la misma área, de tal manera que la suma corresponda al área del triángulo objeto de la trisección. Para próximas ediciones se adicionarán capítulos que incluyan trisecciones de otras figuras geométricas.

El libro de texto se destaca por su enfoque novedoso y sistemático, en el que cada caso de trisección se aborda en dos etapas bien diferenciadas: primero, se presenta un procedimiento detallado que describe paso a paso la construcción geométrica para dividir el segmento o el triángulo en tres partes iguales; y luego, se realiza una demostración sintética o analítica, según el caso, que justifica matemáticamente la validez del procedimiento empleado. Esta metodología facilita la comprensión del proceso y permite a los lectores profundizar en los fundamentos teóricos de cada construcción.

Desde el punto de vista de su clasificación, los autores consideran que se trata de un libro de texto que contiene varias construcciones inéditas, las cuales son producto de un trabajo inductivo, basado en "prueba y error", el cual finaliza con formalización de los procedimientos para la construcción y con la prueba geométrica o analítica que valida los resultados.

El libro está dirigido a estudiantes y profesores, principalmente de matemáticas, interesados en la Geometría Clásica y sus aplicaciones. Es una invitación a explorar la precisión y la belleza de la geometría, siguiendo la tradición de los antiguos geómetras, pero, esta vez, con apoyo de las herramientas tecnológicas modernas que permiten pensar y dibujar con exactitud.

ISBN: 978-628-7864-52-8
9 786287 864528

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de Nariño