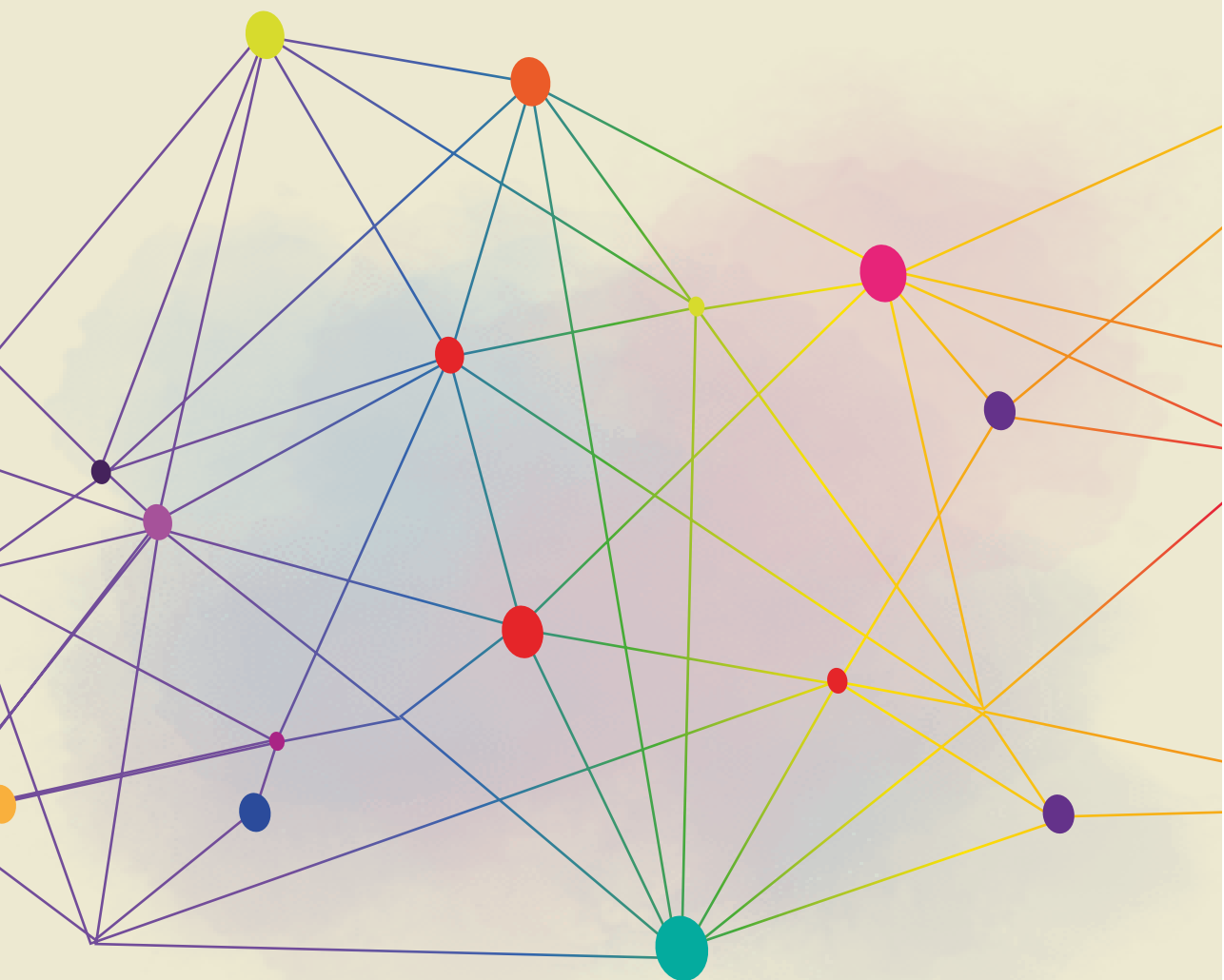


Conjuntos producto, grafos y el problema de Cauchy



Fernando Andrés Benavides Agredo
Wilson Fernando Mutis Cantero
Ricardo Córdoba Gómez


Editorial
Universidad de Nariño

êditorial

Universidad de **Nariño**

Conjuntos producto, grafos
y el problema de Cauchy

Conjuntos producto, grafos y el problema de Cauchy

Fernando Andrés Benavides Agredo
Wilson Fernando Mutis Cantero
Ricardo Córdoba Gómez

editorial
Universidad de Nariño

Benavides Agredo, Fernando Andrés

Conjuntos producto, grafos y el problema de Cauchy / Fernando Andrés Benavides Agredo, Wilson Fernando Mutis Cantero, Ricardo Córdoba Gómez —1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026.

109 páginas : ilustraciones

Incluye Referencias bibliográficas p. 102 - 106

ISBN: 978-628-7864-61-0 Impreso

ISBN: 978-628-7864-62-7 Digital

1. Álgebra 2. Teoría de números 3. Teoría de grafos algebraicos 4. Conjuntos producto 5. Problema de Cauchy 6. Análisis matemático. I. Mutis Cantero, Wilson Fernando II. Córdoba Gómez, Ricardo

510 B456co – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Conjuntos producto, grafos y el problema de Cauchy

© Editorial Universidad de Nariño

© Fernando Andrés Benavides Agredo

Wilson Fernando Mutis Cantero

Ricardo Córdoba Gómez

ISBN Impreso: 978-628-7864-61-0

ISBN Digital: 978-628-7864-62-7

DOI: <https://doi.org/10.22267/lib.udn.059>

Primera edición

Corrección de estilo: Ricardo Erazo Mera

Diseño de portada: Angie Gabriela Ordoñez Chaves

Diagramación: Fernando Andrés Benavides Agredo

Fecha de publicación: Marzo 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus Autores o de la Editorial Universidad de Nariño

Índice general

Introducción	8
---------------------	----------

Capítulo 1 Presente y futuro de la función μ_G

1.1	Introducción	12
1.2	Conjuntos producto pequeños	13
1.2.1	La función μ_G	14
1.3	La función μ_G en grupos abelianos	18
1.4	La función μ_G en grupos no abelianos	23
1.4.1	Notación	24
1.4.2	La función μ_G en grupos solubles finitos	25
1.4.3	La función μ_G en grupos finitos no abelianos : Desafíos	33

Capítulo 2 Deza grafos y algunas construcciones

2.1	Introducción	34
2.2	Preliminares	36
2.2.1	Grafos simples	37
2.2.2	Dígrafos	43
2.3	Parámetros de Deza grafos	46
2.4	Algunas construcciones de Deza grafos	51
2.4.1	Construcción 1	52
2.4.2	Construcción 2	54

2.4.3	Construcción 3	55
2.4.4	Construcción 4	57
2.5	Problemas de investigación	60

**Capítulo 3 Problemas de Cauchy para la ecuación
Rosenau-Kawahara-RLW**

3.1	Introducción	63
3.2	El problema de Cauchy	70
3.3	El problema de Cauchy periódico	83

Capítulo 4 Conclusiones 97

Bibliografía 102

Índice de figuras y tablas 107



Introducción

El libro “Conjuntos Producto, Grafos y el Problema de Cauchy” se concibe como un puente formativo entre la teoría matemática avanzada y la investigación inicial. Está dirigido principalmente a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, así como a estudiantes de pregrado y posgrado de otras universidades colombianas interesados en iniciar o consolidar su trayectoria investigativa.

La obra reúne tres capítulos de investigación que presentan contenidos especializados en álgebra, teoría de grafos y análisis matemático, con el propósito de servir como base para la formulación de trabajos de grado y futuras investigaciones universitarias.

Cada capítulo aborda un problema matemático con un enfoque accesible y riguroso, presentando métodos contemporáneos que permiten abordar diferentes problemas matemáticos. El enfoque adoptado combina rigor matemático con una exposición accesible, de modo que el lector pueda familiarizarse progresivamente con el lenguaje y las técnicas propias de la investigación.

1. El primer capítulo, Presente y futuro de la función μ_G , explora el denominado problema de los conjuntos producto pequeños, un desafío clásico de la teoría de números, pero ahora estudiado en la teoría de grupos, presentando resultados completos en el caso abeliano y avances recientes en grupos solubles finitos no abelianos. Este trabajo

introduce al estudiante en técnicas de teoría de grupos y combinatoria algebraica, fundamentales para estudiar problemas de investigación contemporáneos en esta área.

2. El segundo, Deza grafos y algunas construcciones, realiza una introducción a la teoría de grafos mediante un tipo especial de estos denominado Deza grafos, que son estructuras combinatorias con aplicaciones en redes, ciencias de la computación y modelación de sistemas. Ofrece demostraciones novedosas y plantea preguntas abiertas, incentivando la exploración de problemas tanto teóricos como aplicados desde esta perspectiva.
3. El tercero, Problemas de Cauchy para la ecuación Rosenau-Kawahara-RLW, estudia el problema de Cauchy y el problema de Cauchy periódico, asociados con la ecuación Rosenau-Kawahara-RLW que modela la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud, integrando herramientas analíticas y métodos modernos para el estudio de la existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones.

La articulación de estos tres ejes temáticos, álgebra y teoría de números, teoría de grafos y análisis, en un libro de investigación pretende reflejar la interdisciplinariedad propia de la investigación matemática actual y ofrecer a los estudiantes una visión integrada de cómo problemas en un área pueden inspirar soluciones en otra. Este enfoque holístico convierte al libro en una herramienta pedagógica y motivacional, orientada a que los estudiantes de la Universidad de Nariño identifiquen líneas de investigación viables para sus trabajos de grado, ya sea en problemas puramente teóricos o en aplicaciones concretas.

Más allá de su contenido teórico, esta obra busca fomentar la investigación desde los primeros niveles de formación, proporcionando ejemplos claros de cómo se formula, desarrolla y comunica una investigación matemática. Se incluyen, además, sugerencias de problemas abiertos y posibles direcciones para continuar los estudios presentados, lo que la convierte en un recurso ideal para seminarios, cursos de iniciación a la investigación y asesorías de trabajo de grado.

En síntesis, Conjuntos Producto, Grafos y el Problema de Cauchy, es un texto diseñado para inspirar, guiar y capacitar a la nueva generación de matemáticos nariñenses y colombianos, ofreciéndoles las bases teóricas, metodológicas y temáticas necesarias para emprender sus propios proyectos de investigación con rigor, creatividad y relevancia científica.

Universidad de Nariño
Enero de 2026



Capítulo 1

Presente y futuro de la función μ_G

Wilson Fernando Mutis - Fernando Andrés Benavides
wilsonmutis@udenar.edu.co fandresbenavides@udenar.edu.co

Resumen

Uno de los problemas clásicos de la teoría de números, que ha sido estudiado en teoría de grupos, es el denominado “problema de los conjuntos producto pequeños”, el cual consiste en lo siguiente: dado un grupo G , hallar una expresión aritmética que permita calcular de forma eficiente el mínimo del conjunto producto AB , donde A y B son subconjuntos finitos no vacíos de G . En el contexto de grupos abelianos, Eliahou, Kervaire y Plagne resolvieron el problema de forma completa. En contraste, para grupos no abelianos aún no se dispone de una solución general; no obstante, diversos autores han obtenido avances significativos en ciertas clases de grupos solubles finitos no abelianos. Estas notas tienen como propósito presentar de manera sistemática los resultados más relevantes sobre este problema en el ámbito abeliano, así como exponer los progresos alcanzados en algunas familias de grupos solubles finitos no abelianos. Con ello se busca ofrecer una introducción clara y accesible a un tema de investigación especializado, desarrollado en revistas de alto impacto, con el fin de motivar a estudiantes de licenciatura en matemáticas a profundizar en esta línea y fomentar futuras investigaciones en el área.

1.1 Introducción

Dados un grupo G y dos enteros positivos r y s , en teoría combinatoria de números es de interés determinar el mínimo de los cardinales $|AB|$, donde A y B son subconjuntos de G tales que $|A| = r$ y $|B| = s$. Esta problemática, conocida como el problema de los conjuntos producto pequeños, puede enunciarse formalmente de la siguiente manera: Sea G un grupo, se quiere encontrar una fórmula que permita calcular los valores de la función aritmética $\mu_G : [1, |G|]^2 \rightarrow \mathbb{Z}^+$,¹ definida por

$$\mu_G(r, s) = \min \{ |AB| : A, B \subseteq G, |A| = r, |B| = s \}. \quad (1.1)$$

Además, se define

$$\mu_G(0, s) = \mu_G(r, 0) = \mu_G(0, 0) = 0,$$

y se dirá que los subconjuntos $A, B \subseteq G$ realizan $\mu_G(r, s)$ si $|A| = r$, $|B| = s$ y $|AB| = \mu_G(r, s)$. Para el caso $G = \mathbb{Z}_p$, con p un número primo, el famoso teorema de Cauchy-Davenport implica que

$$\mu_G(r, s) = \min \{ p, r + s - 1 \}.$$

En Plagne (2003) se encuentra el valor de $\mu_G(r, s)$ para el grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_n$, con n un entero positivo arbitrario. Eliahou et al. (2003), determinan la función μ_G para la clase de grupos abelianos finitos y en Eliahou and Kervaire (2005), resuelven el problema de los conjuntos producto pequeños en grupos abelianos arbitrarios. Ellos muestran que si G es un grupo abeliano arbitrario, entonces $\mu_G(r, s)$ coincide con el valor de la función aritmética κ_G definida por

$$\kappa_G(r, s) = \min_{n \in \mathcal{H}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{n} \right\rceil - 1 \right) n \right\},$$

¹Para un entero $n > 0$, con $[1, n]^2$ se denota el producto cartesiano $[1, n] \times [1, n]$, del intervalo entero $[1, n] = \{1, \dots, n\}$.

donde $H(G) = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es el orden de un subgrupo finito de } G\}$. Para la clase de grupos finitos no abelianos aún no se conoce una solución general. Investigaciones de diversos autores han permitido avances importantes en esta problemática. Eliahou and Kervaire (2006) determinan la función μ_G para el caso en que G es un grupo diédral. Deckelbaum (2009) consigue la solución para grupos no abelianos de orden $3p$, con p un primo impar. Por su parte, Mutis et al. (2010) demostraron que la función μ_G , en p -grupos finitos, satisface la misma solución encontrada para grupos abelianos finitos. En otro avance, Mutis et al. (2012) resuelven el problema para la clase de grupos hamiltonianos finitos. Además, Berchenko-Kogan (2012) generaliza el resultado de Deckelbaum para la clase de grupos no abelianos de orden pq , con p y q primos impares. Kaur and Singh (2023) consiguen el resultado más reciente dentro de esta problemática, ellos dan una cota superior para $\mu_G(r, s)$ en los casos en que $G = Q_{4n}$, el grupo dicíclico de orden $4n$ y $G = U_{m,n} = \langle a, b : a^{2n} = b^m = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.

En la primera sección de este artículo, se presenta una revisión histórica de los resultados más relevantes sobre la función μ_G en grupos abelianos, destacando los teoremas clásicos de la teoría de números que han permitido los avances más significativos. La segunda sección está dedicada al estudio de la función μ_G en grupos solubles, siguiendo el trabajo de Eliahou and Kervaire (2010), el cual, según el autor, representa el avance más destacado en el estudio de la función μ_G en grupos no abelianos finitos. Finalmente, en la última sección, se proporciona un listado de trabajos que podrían desarrollarse en investigaciones futuras sobre esta problemática.

1.2 Conjuntos producto pequeños

El problema de los conjuntos producto pequeños es un ejemplo de que una pregunta combinatoria, aparentemente simple, puede requerir para su solución de la aplicación de complejas herramientas teóricas de diversas áreas de la matemática. Las investigaciones en este campo han aportado importantes resultados teóricos, adicionalmente, han abierto diferentes líneas de investigación en teoría aditiva, combinatoria y teoría de grupos. En

esta sección se presenta el problema de los conjuntos producto pequeños, algunas propiedades básicas de la función μ_G y se exponen los resultados más importantes obtenidos en el estudio de la función μ_G en grupos abelianos.

1.2.1. La función μ_G

Definición 1.1 (Conjunto producto). Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un grupo G . El conjunto producto AB es el subconjunto de G cuyos elementos se pueden expresar de la forma ab , donde $a \in A$ y $b \in B$, esto significa que

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

En particular, si el grupo G es abeliano con operación binaria $+$, se habla de conjunto suma en lugar de conjunto producto.

Ejemplo 1.1 (Traslación de un conjunto). El ejemplo más básico de conjunto producto es la traslación de un conjunto. Sean G un grupo y $A \subseteq G$, con $A \neq \emptyset$. Para cada $g \in G$, la traslación derecha de A con respecto al elemento g es el subconjunto Ag definido como sigue

$$Ag = \{ag : a \in A\} = A\{g\}.$$

De forma similar se define la traslación izquierda gA del subconjunto A con respecto al elemento $g \in G$. El lector puede verificar que dado cualquier $g \in G$, las funciones $\phi_g : A \rightarrow Ag$ y $\varphi_g : A \rightarrow gA$ definidas por

$$\phi_g(a) = ag \quad \text{y} \quad \varphi_g(a) = ga, \quad \text{para toda } a \in A,$$

son biyectivas y por tanto $|Ag| = |A| = |gA|$. Ahora, dados dos subconjuntos no vacíos A y B del grupo G y considere los elementos $a \in A$ y $b \in B$. Por las igualdades anteriores, se tiene

$$|AB| = \left| \left(a^{-1}A \right) \left(Bb^{-1} \right) \right|,$$

pero $1 \in (a^{-1}A) \cap (Bb^{-1})$, en consecuencia, al calcular $|AB|$, no se pierde generalidad en suponer $1 \in A \cap B$.

Definición 1.2 (Conjunto producto pequeño). Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un grupo G . Se dice que el conjunto producto AB es pequeño si cumple

$$|AB| < |A| + |B|.$$

En teoría de números el estudio de los conjunto producto pequeños se puede hacer desde dos enfoques: Cuando el interés es analizar características del conjunto producto AB sujeto a información conocida de los conjuntos A y B se dice que se estudia un problema directo y cuando el objetivo es obtener información de los conjuntos A y B conociendo características del conjunto producto AB se dice que se trabaja un problema inverso.

Sea G un grupo, uno de los problemas directos, denominado el problema de los conjuntos producto pequeños, es determinar una fórmula que permita calcular el mínimo de los cardinales $|AB|$ sujeto a que $|A| = r \geq 1$ y $|B| = s \geq 1$, es decir, se quiere encontrar una fórmula que permita calcular los valores de la función μ_G definida en la ecuación (1.1).

En el siguiente teorema se enuncian algunas de las propiedades de la función μ_G en grupos finitos. Estas propiedades aparecen en Eliahou and Kervaire (2007b).

Teorema 1.1 (Propiedades básicas de la función μ_G). Sea G un grupo finito. Si r y s son enteros tales que $1 \leq r, s \leq |G|$, entonces

1. La función μ_G es simétrica, es decir, $\mu_G(r, s) = \mu_G(s, r)$.
2. La función μ_G es acotada, de hecho

$$\max\{r, s\} \leq \mu_G(r, s) \leq |G|.$$

3. El grupo G contiene un subgrupo H de orden r , si y solo si, $\mu_G(r, r) = r$.

Demostración. Para probar el primer enunciado, escoja subconjuntos

$A, B \subseteq G$ tales que A y B que realizan $\mu_G(r, s)$. Entonces $|A| = r$, $|B| = s$ y se tiene

$$\mu_G(r, s) = |AB| = \left| (AB)^{-1} \right| = \left| B^{-1}A^{-1} \right| \geq \mu_G(s, r).$$

De formade similar, se prueba la desigualdad $\mu_G(r, s) \leq \mu_G(s, r)$. Para mostrar el segundo enunciado, por lo expuesto en el ejemplo (1.1), es posible seleccionar subconjuntos A y B de G tales que $|AB| = \mu_G(r, s)$ y $1 \in A \cap B$, pero en este caso $A, B \subseteq AB$, por tanto

$$|AB| \geq \text{máx} \{|A|, |B|\} = \text{máx}\{r, s\}.$$

La otra desigualdad es obvia porque $AB \subseteq G$. Para terminar, suponga que $H \leq G$ y $|H| = r$, entonces

$$\mu_G(r, r) \leq |HH| = |H| = r,$$

pero el ítem anterior implica $r \leq \mu_G(r, r)$, en consecuencia, $\mu_G(r, r) = r$. Para mostrar el recíproco, sean $A, B \subseteq G$ que realizan $\mu_G(r, r)$ y escoja elementos $a \in A$ y $b \in B$. Por el ejemplo (1.1) se tiene

$$\left| \left(a^{-1}A \right) \left(Bb^{-1} \right) \right| = |AB| = \mu_G(r, s),$$

Dado que

$$|a^{-1}A| = |A| = r \quad \text{y} \quad |Bb^{-1}| = |B| = r.$$

Se sigue que los conjuntos $a^{-1}A$ y Bb^{-1} realizan $\mu_G(r, r)$. Ahora, sea $H = (a^{-1}A) (Bb^{-1})$ y note que $1 \in (a^{-1}A) \cap (Bb^{-1})$, entonces

$$a^{-1}A \subseteq H \quad \text{y} \quad Bb^{-1} \subseteq H,$$

observe que

$$|H| = \left| \left(a^{-1}A \right) \left(Bb^{-1} \right) \right| = \mu_G(r, r) = r.$$

En consecuencia,

$$a^{-1}A = H = Bb^{-1},$$

así que $H = (a^{-1}A) (Bb^{-1}) = HH$, esto significa que H es cerrado bajo el

producto del grupo G y dado que G es finito se obtiene $H \leq G$. \square

Proposición 1.1. Sean A y B dos subconjuntos de un grupo finito G , ambos no vacíos. Entonces $|AB| = |B|$, si y solo si, existe un subgrupo H de G tal que $A \subseteq H$ y B es unión de clases laterales derechas módulo H .

Demostración. Suponga que $|AB| = |B|$ y note que se puede asumir que $1 \in A$ porque en caso contrario, para cada $a \in A$, se puede sustituir el conjunto A por la traslación $a^{-1}A$. Luego $B \subseteq AB$, esto junto con la hipótesis implican que $AB = B$. Ahora, sea

$$H = \{x \in G : xB = B\}.$$

Claramente $A \subseteq H$ y para $x, y \in H$ se tiene

$$(xy)B = x(yB) = xB = B.$$

Luego $xy \in H$, es decir, H es finito y cerrado bajo la operación del grupo G , por tanto $H \leq G$. Además,

$$B = HB = \bigcup_{b \in B} Hb.$$

Para el recíproco, sea $H \leq G$ tal que $A \subseteq H$ y sean $b_1, \dots, b_r \in G$ tales que

$$B = (Hb_1) \cup \dots \cup (Hb_r),$$

entonces,

$$|AB| = \left| A \left(\bigcup_{j=1}^r Hb_j \right) \right| = \left| \bigcup_{j=1}^r (AH)b_j \right| = \left| \bigcup_{j=1}^r Hb_j \right| = |B|.$$

\square

El subgrupo H descrito en la prueba de la proposición anterior es el estabilizador del subconjunto B , este subgrupo es una herramienta útil para

describir estructuras invariantes dentro de un grupo.

Corolario 1.1 (Estabilizador). Sean G un grupo. Si A es un subconjunto no vacío de G , entonces

$$Est_G(A) = \{g \in G : gA = A\}$$

es un subgrupo de G denominado **estabilizador** de A en G . Además, el subconjunto A es unión de clases laterales derechas módulo $Est_G(A)$.

Demostración. Se realizó durante el proceso de prueba de la proposición (1.1). \square

En el ámbito de los grupos abelianos se conoce una fórmula explícita para la función μ_G . A continuación se presentan los resultados más significativos que permitieron resolver el problema de los conjuntos producto pequeños en la clase de grupos abelianos.

1.3 La función μ_G en grupos abelianos

El primer resultado dentro del estudio de la función μ_G en grupos abelianos es una consecuencia directa del famoso teorema de Cauchy - Davenport probado por el matemático francés Augustin Louis Cauchy en 1813 y redescubierto de forma independiente por el matemático inglés Harold Davenport en 1935. Actualmente se conoce como el teorema de Cauchy-Davenport.

Teorema 1.2 (Cauchy - Davenport). Si p es un número primo y $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$, ambos no vacíos, entonces

$$|A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

Demostración. Note que no se pierde generalidad en suponer $|A| \leq |B|$ y $0 \in A \cap B$, es decir, $A, B \subseteq A + B$. Además, en el caso $|A| = 1$ se tiene

$A = \{0\}$ y se sigue

$$|A + B| = |B| = |B| + 1 - 1 = |B| + |A| - 1 \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}. \quad (1.2)$$

Ahora suponga que $|A + B| = |B|$, en esta situación la proposición (1.1) garantiza que existe $H \leq \mathbb{Z}_p$ tal que $A \subseteq H$ y B es unión de clases laterales módulo H . Dado que p es primo, se sigue $H = \{0\}$ o $H = \mathbb{Z}_p$.

Para el caso $H = \{0\}$ se tiene $A = \{0\}$ y el enunciado se cumple por lo expuesto en la ecuación (1.2). El caso $H = \mathbb{Z}_p$ implica $B = \mathbb{Z}_p$ porque B es unión de clases laterales módulo H y se obtiene

$$|A + B| = |B| = p \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

Para finalizar, suponga que $|A + B| > |B|$. Esta desigualdad implica que existen $a_1 \in A$ y $b_1 \in B$ tales que $a_1 + b_1 \notin B$. Considere el conjunto no vacío

$$C_1 = \{a \in A : a + b_1 \notin B\}$$

Ahora defina los conjuntos no vacíos $A_1 = A - C_1$ y $B_1 = B \cup (b_1 + C_1)$. Estos dos conjuntos satisfacen las siguientes enunciados:

1. $0 \in A_1 \cap B_1$, esto implica $A_1, B_1 \subseteq A + B_1$.
2. $|A_1| + |B_1| = (|A| - |C_1|) + (|B| + |C_1|) = |A| + |B|$.
3. $1 \leq |A_1| < |A|$.
4. $|B| < |B_1| \leq |A + B|$.

Además, $A_1 + B_1 \subseteq A + B$. En efecto, sean $w \in A_1 = A - C_1$ y $z \in B_1$ y note que de la definición del conjunto C_1 , se sigue $w + b_1 \in B$. Para el caso $z \in B$, claramente se tiene $w + z \in A + B$ y en caso contrario, $z \in b_1 + C_1$, así que debe existir $x \in C_1 \subset A$ tal que $z = x + b_1$. Entonces

$$w + z = w + x + b_1 = x + (w + b_1) \in A + B.$$

Si $1 < |A_1|$ y $|A + B| > |B_2|$, se puede repetir el proceso anterior utilizando los conjuntos A_1 y B_1 para obtener un par de conjuntos no vacíos A_2 y B_2 que cumplen los mismos enunciados descritos arriba para los conjuntos A_1 y B_1 , y se tienen las secuencias

$$1 \leq |A_2| < |A_1| < |A| \quad \text{y} \quad |B| < |B_1| < |B_2| \leq |A + B|.$$

Dado que la sucesión de los $|A_i|$ es estrictamente decreciente y la sucesión de los $|B_i|$ es estrictamente creciente, en una cantidad finita de iteraciones se deben obtener dos conjuntos A_k y B_k tales que $|A_k| = 1$ o $|B_k| = |A + B|$ y por lo hecho al principio de esta prueba, en cualquiera de estas situaciones, se concluye $|A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}$. \square

Una consecuencia inmediata del teorema de Cauchy - Davenport es el corolario que se enuncia abajo

Corolario 1.2. Sean p un número primo. Si A y B son subconjunto del grupo cíclico \mathbb{Z}_p tales que $|A| = r \geq 1$ y $|B| = s \geq 1$, entonces

$$\mu_G(r, s) = \min\{r + s - 1, p\}$$

En 1953 el matemático alemán Martin Kneser da una generalización del teorema de Cauchy-Davenport que extiende el estudio del tamaño del conjunto suma de dos subconjuntos a la clase de grupos abelianos.

Teorema 1.3 (Kneser). Sean A y B dos subconjuntos finitos no vacíos de un grupo abeliano G . Si $H = \text{Est}_G(A + B)$, entonces

$$|A + B| \geq |A + H| + |B + H| - |H|.$$

La prueba del teorema de Kneser esta por fuera de los propósitos de este artículo. El lector interesado puede consultar la demostración dada por DeVos (2014) en 2014. Sin embargo, se puede notar que es suficiente mostrar que el enunciado es válido para el caso $H = \text{Est}_G(A + B) =$

$\{0\}$, porque suponiendo que el teorema de Kneser se cumple siempre que $Est_G(A + B) = \{0\}$ y asumiendo que $H = Est_G(A + B) \neq \{0\}$, entonces al considerar el homomorfismo canónico $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H} = \overline{G}$, se tiene $Est_{\overline{G}}(\pi(A) + \pi(B)) = \{H\}$, luego

$$|\pi(A + B)| = |\pi(A) + \pi(B)| \geq |\pi(A)| + |\pi(B)| - 1,$$

pero $|\pi(A + B)| = |(A + B) + H| = |A + B|$, en consecuencia

$$|A + B| \geq |A + H| + |B + H| - |H|.$$

Lema 1.1. Sea G un grupo abeliano. Si A y B son subconjuntos finitos no vacíos de G y $|A| \leq |B|$, entonces existe un subconjunto no vacío $D \subseteq A + B$ tal que

$$|D| + |Est_G(D)| \geq |A \cap B| + |(A \cup B) + Est_G(D)|.$$

Demostración. No se pierde generalidad en suponer $0 \in A \cap B$, luego $A, B \subseteq A + B$. Si $|A + B| = |B|$, entonces

$$A \subseteq A + B = B.$$

Lo anterior implica que

$$|A \cap B| + |(A \cup B) + Est_G(B)| = |A| + |B + Est_G(B)| = |A| + |B|. \quad (1.3)$$

Además, $A \subseteq Est_G(B)$, por ende

$$|B| + |Est_G(B)| \geq |B| + |A|.$$

Esta desigualdad, junto con la igualdad dada en la ecuación (1.3) confirman que el lema se satisface tomando $D = B$. Note que en el caso $|A| = 1$, está considerado en la situación anterior porque $A = \{0\}$. Ahora, suponga que

$$1 < |A| \leq |B| < |A + B|,$$

en este caso, utilizando un proceso de prueba similar al expuesto en el teorema de Cauchy-Davenport (1.2) se pueden definir secuencias de subconjuntos $\{A_j\}_{j \geq 1}$ y $\{B_j\}_{j \geq 1}$ tales que para toda $j \geq 1$ se tiene

$$A_j + B_j \subseteq A + B \quad \text{y} \quad |A_j| + |B_j| = |A| + |B|.$$

Además,

$$1 \leq |A_j| < \dots < |A_1| < |A| \quad \text{y} \quad |B| < |B_1| < \dots < |B_j| \leq |A + B|.$$

En consecuencia, en una cantidad finita de iteraciones se deben obtener dos conjuntos A_k y B_k tales que $|A_k| = 1$ o $|B_k| = |A + B|$ y por lo hecho al principio de esta prueba, se obtiene el resultado deseado. \square

En la prueba del teorema de Kneser dada por DeVos, se muestra que en el caso que $H = \text{Est}_G(A + B) = \{0\}$, entonces existe un subconjunto no vacío $D \subseteq A + B$ tal que $\text{Est}_G(D) = \{0\}$, esto junto con el lema (1.1), implican

$$|A + B| + 1 \geq |D| + 1 \geq |A \cap B| + |(A \cup B) + \{0\}|,$$

por tanto,

$$|A + B| \geq |A| + |B| - 1 = |A + H| + |B + H| - |H|.$$

Observe que el teorema de Kneser da una cota inferior para el valor de $\mu_G(r, s)$, cuando G es un grupo abeliano, porque tomando subconjuntos $A, B \subseteq G$ tales que $|A| = r$, $|B| = s$ y $\mu_G(r, s) = |A + B|$, se tiene

$$\mu_G(r, s) \geq |A + H| + |B + H| - |H| = |H| \left(\frac{|A + H|}{|H|} + \frac{|B + H|}{|H|} - 1 \right),$$

en la cual $H = \text{Est}_G(A + B)$. Pero $\frac{|A + H|}{|H|}$ es un entero, entonces

$$\frac{|A + H|}{|H|} \geq \left\lceil \frac{|A + H|}{|H|} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{r}{h} \right\rceil, \quad \text{con } |H| = h.$$

Por tanto,

$$\mu_G(r, s) \geq \left(\left\lceil \frac{r}{h} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{h} \right\rceil - 1 \right) h.$$

En 2005, Eliahou and Kervaire (2005), utilizan la anterior desigualdad para demostrar que en todo grupo abeliano se cumple el siguiente teorema:

Teorema 1.4. Sea G es un grupo abeliano arbitrario. Si r y s son enteros tales que $1 \leq r, s \leq |G|$, entonces

$$\mu_G(r, s) = \min_{n \in \mathcal{H}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{n} \right\rceil - 1 \right) n \right\}.$$

donde $\mathcal{H}(G)$ denota el conjunto de ordenes de subgrupos finitos del grupo G .

El teorema anterior da solución completa al problema de determinar una fórmula explícita para la función $\mu_G(r, s)$ en grupos abelianos. El problema de los conjuntos producto pequeños en grupos no abelianos aún está abierto, no obstante, se conoce que la función μ_G en algunas clases de grupos no abelianos finitos, esto se presentará en la siguiente sección.

1.4 La función μ_G en grupos no abelianos

Por los trabajos de Eliahou y Kervaire, el problema de los conjuntos producto pequeños tiene solución completa en grupos abelianos. En contraste, para grupos no abelianos, el problema sigue abierto, y solo se conocen soluciones en algunas clases particulares de grupos finitos no abelianos, cuyos resultados dependen fuertemente de la estructura del grupo. Sin embargo, gracias a investigaciones de Eliahou and Kervaire (2006), Mutis et al. (2010) y Mutis et al. (2012), hoy se sabe que la solución obtenida para grupos abelianos se puede extender a ciertas familias de grupos solubles no abelianos finitos. En particular, se ha establecido que dicha solución es válida para grupos diédricos, p -grupos finitos y algunos grupos hamiltonianos finitos. Es decir, si G es un grupo de alguna de estas tres clases, entonces la función

μ_G es igual a la función aritmética $\kappa_G : [1, |G|]^2 \rightarrow \mathbb{Z}^+$, definida por

$$\kappa(r, s) = \min_{d \in \mathcal{H}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{d} \right\rceil - 1 \right) d \right\}.$$

en la cual $\mathcal{H}(G)$ denota el conjunto de ordenes de subgrupos finitos del grupo G . Sin embargo, esta solución no se puede extender a todo grupo no abeliano finito, de hecho, por Eliahou and Kervaire (2007b), se conoce que en el producto semidirecto $G = C_7 \rtimes C_3$, se tiene

$$\mu_G(r, s) \neq \kappa_G(r, s), \text{ cuando } (r, s) \in \{(6, 8), (5, 9), (6, 9), (8, 9), (9, 9)\}.$$

A continuación se enuncian los resultados más importantes en el estudio de la función μ_G en grupos no abelianos finitos.

1.4.1. Notación

Sea G un grupo finito, en lo que sigue se utilizará la siguiente notación:

1. El conjunto de divisores positivos de $|G|$ se denota con $\mathcal{D}(G)$, entonces

$$\mathcal{D}(G) = \{d \in \mathbb{Z}^+ : d \text{ divide a } |G|\}.$$

2. El conjunto ordenes de subgrupos del grupo G se denota con $\mathcal{H}(G)$, entonces

$$\mathcal{H}(G) = \{d \in \mathbb{Z}^+ : \text{Existe } H \leq G \text{ tal que } |H| = d\}.$$

3. El conjunto ordenes de subgrupos normales del grupo G se denota con $\mathcal{N}(G)$, entonces

$$\mathcal{N}(G) = \{d \in \mathbb{Z}^+ : \text{Existe } N \trianglelefteq G \text{ tal que } |N| = d\}.$$

4. Dados enteros positivos r, s y d , con $r, s \leq |G|$, se define

$$f_d(r, s) = \left(\left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{d} \right\rceil - 1 \right) d$$

Note que $\mathcal{N}(G) \subseteq \mathcal{H}(G) \subseteq \mathcal{D}(G)$. Además, se tienen las funciones aritméticas κ_G , \mathcal{N}_{κ_G} y \mathcal{D}_{κ_G} , dadas por

$$\kappa_G(r, s) = \text{mín} \{ f_d(r, s) : d \in \mathcal{H}(G) \}.$$

$$\mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s) = \text{mín} \{ f_d(r, s) : d \in \mathcal{N}(G) \}.$$

$$\mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s) = \text{mín} \{ f_d(r, s) : d \in \mathcal{D}(G) \}.$$

Por definición, para todo par de enteros positivos $r, s \leq |G|$, se tiene

$$\mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s) \leq \kappa_G(r, s) \leq \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s)$$

Los avances en torno del estudio de la función μ_G en grupos no abelianos finitos se han obtenido comparando μ_G con alguna de las tres funciones κ_G , \mathcal{N}_{κ_G} y \mathcal{D}_{κ_G} .

1.4.2. La función μ_G en grupos solubles finitos

El teorema principal de Eliahou and Kervaire (2010) es el resultado más relevante obtenido en el estudio de la función μ_G en grupos no abelianos finitos. En esta sección se exponen las bases teóricas sobre las que Eliahou y Kervaire construyen la prueba de este teorema.

Definición 1.3 (Descomposición). Sea $\pi : G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos y sea $A \subseteq G$, con $A \neq \emptyset$. La descomposición de A inducida por el epimorfismo π es la colección $\{A_h\}_{h \in H}$, de subconjuntos de G , definida por

$$A_h = A \cap \pi^{-1}(h), \text{ para cada } h \in H.$$

Note que $A_{h_1} = A_{h_2}$, si y solo si, $h_1 = h_2$. De aquí, si A es finito de

cardinal $|A| = r$, entonces

$$r = |A| = \sum_{h \in H} |A_h|,$$

y en este caso, $A_h \neq \emptyset$, para a lo más una cantida finita de elementos $h \in H$. Además, dados $h \in H$, $x \in A_h$ y un elemento $g_h \in \pi^{-1}(h^{-1})$, se tiene

$$\pi(g_h x) = \pi(g_h) \pi(x) = h^{-1} h = 1,$$

$$\pi(x g_h) = \pi(x) \pi(g_h) = h h^{-1} = 1,$$

esto significa que para todo $g_h \in \pi^{-1}(h^{-1})$, $g_h A_h$ y $A_h g_h$ son subconjuntos de K , en consecuencia,

$$\bigcup_{h \in H} g_h A_h \subseteq K \quad \text{y} \quad \bigcup_{h \in H} A_h g_h \subseteq K,$$

y por el ejemplo (1.1), se cumple

$$|A| = \sum_{h \in H} |A_h| = \sum_{h \in H} |g_h A_h| = \sum_{h \in H} |A_h g_h|.$$

Lema 1.2. Sea $\pi : G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos con $\text{Ker}(\pi) = K$ y sean A y B dos subconjuntos de G , no vacíos, de cardinales r y s , respectivamente. Si $\{A_h\}_{h \in H}$ y $\{B_h\}_{h \in H}$ son, respectivamente, las descomposiciones de A y B inducidas por el epimorfismo π , entonces

$$|AB| \geq \sum_{h \in H} \text{máx} \{ \mu_K(r_\alpha, s_{\alpha h^{-1}}) : \alpha \in H \}, \quad (1.4)$$

en la cual, $r_h = |A_h|$ y $s_h = |B_h|$, para cada $h \in H$.

Demostración. Sea $\{C_h\}_{h \in H}$ la descomposición de AB inducida por el epimorfismo π , es decir, para cada $h \in H$, se tiene

$$C_h = AB \cap \pi^{-1}(h).$$

No es difícil comprobar que

$$C_h = \bigcup_{\alpha \in H} A_\alpha B_{\alpha^{-1}h}. \quad (1.5)$$

Entonces,

$$|AB| = \left| \bigcup_{h \in H} C_h \right| = \sum_{h \in H} |C_h|. \quad (1.6)$$

Por la ecuación (1.5), para toda $h \in H$, se tiene

$$|C_h| \geq \text{máx} \{ |A_\alpha B_{\alpha^{-1}h}| : \alpha \in H \}.$$

Ahora, para cada par de elementos $h, \alpha \in H$, sean $g_\alpha \in \pi^{-1}(\alpha^{-1})$ y $q_\alpha \in \pi^{-1}(h^{-1}\alpha)$, por lo expuesto al principio de la prueba, se sigue

$$(g_\alpha A_\alpha)(B_{\alpha^{-1}h} q_\alpha) \subseteq K,$$

además,

$$|A_\alpha B_{\alpha^{-1}h}| = |(g_\alpha A_\alpha)(B_{\alpha^{-1}h} q_\alpha)| \geq \mu_K(r_\alpha s_{\alpha^{-1}h}).$$

En consecuencia, para toda $h \in H$, se tiene

$$|C_h| \geq \text{máx} \{ \mu_K(r_\alpha s_{\alpha^{-1}h}) : \alpha \in H \},$$

y sustituyendo en la ecuación (1.6), se obtiene la desigualdad (1.4), que es el resultado deseado. \square

Proposición 1.2. Sea p un número primo y sea $\pi : G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos finitos, con Kernel un p -grupo abeliano finito P . Si para todo grupo abeliano X y todo par de enteros positivos $r, s \leq |X \times H|$, se cumple

$$\mu_{X \times H}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times H}}(r, s),$$

entonces $\mu_G(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s)$.

Demostración. Para comenzar seleccione subconjuntos $A, B \subseteq G$, tales que

A y B realizan $\mu_G(r, s)$, es decir, $|A| = r$, $|B| = s$ y $|AB| = \mu_G(r, s)$. Ahora, sean $\{A_h\}_{h \in H}$ y $\{B_h\}_{h \in H}$ las descomposiciones de A y B inducidas por el epimorfismo π , respectivamente, y para cada $h \in H$, denote $r_h = |A_h|$ y $s_h = |B_h|$. Por el lema anterior (1.2), se obtiene

$$|AB| \geq \sum_{h \in H} \text{máx} \{ \mu_P(r_\alpha, s_{\alpha^{-1}h}) : \alpha \in H \}. \quad (1.7)$$

Tomando el grupo abeliano

$$X = (\mathbb{Z}_p)^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}_p \},$$

entonces X está totalmente ordenado por medio del orden lexicográfico, es decir, para $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ en X , se tiene, $x < y$, si y solo si, existe $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que, $x_j < y_j$ y $x_i = y_i$, para toda $i \in \{1, \dots, j-1\}$. Luego,

$$X = \{ 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{p^n} = (p-1, \dots, p-1) \},$$

y para cada entero positivo $r \leq p^n = |X|$, el subconjunto $I(r) = \{x_1, \dots, x_r\} \subseteq X$, se denomina segmento inicial de longitud r , además, por definición, $I(0) = \emptyset$. Note que para todo par de enteros positivos $r, s \leq p^n$ se cumple

$$I(r) \cup I(s) = I(\text{máx}\{r, s\}), \quad (1.8)$$

también, por el lema 3 de Eliahou and Kervaire (2010), se obtiene

$$I(r) + I(s) = I(\kappa_X(r, s)). \quad (1.9)$$

Además,

$$|X \times H| = |P \times H| = |G|,$$

y por hipótesis, se cumple

$$\mathcal{D}_{\kappa_{X \times H}}(r, s) = \mathcal{D}_{\kappa_{P \times H}}(r, s) = \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s).$$

Ahora, considere los subconjuntos $U, W \subseteq X \times H$, definidos por

$$U = \bigcup_{h \in H} I(r_h) \times \{h\} \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{h \in H} I(s_h) \times \{h\}.$$

Observe que

$$|U| = \sum_{h \in H} |I(r_h) \times \{h\}| = \sum_{h \in H} r_h = r = |A|,$$

también, $|W| = s = |B|$. Esto, junto con la hipótesis, implican que

$$|UW| \geq \mu_{X \times H}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times H}}(r, s) = \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s). \quad (1.10)$$

Pero

$$\begin{aligned} UW &= \left(\bigcup_{h \in H} I(r_h) \times \{h\} \right) \left(\bigcup_{\alpha \in H} I(s_\alpha) \times \{\alpha\} \right) \\ &= \bigcup_{h \in H} \left(\bigcup_{\alpha \in H} (I(r_\alpha) + I(s_{\alpha^{-1}h})) \times \{h\} \right). \end{aligned}$$

lo anterior, junto con las ecuaciones (1.8) y (1.9), implican

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s) \leq |UW| &= \sum_{h \in H} \left| \bigcup_{\alpha \in H} (I(r_\alpha) + I(s_{\alpha^{-1}h})) \times \{h\} \right| \\ &= \sum_{h \in H} \text{máx} \{ \kappa_X(r_\alpha, s_{\alpha^{-1}h}) : \alpha \in H \}, \end{aligned}$$

pero P es abeliano y $|P| = |X|$, entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s) &\leq \sum_{h \in H} \text{máx} \{ \kappa_P(r_\alpha, s_{\alpha^{-1}h}) : \alpha \in H \} \\ &= \sum_{h \in H} \text{máx} \{ \mu_P(r_\alpha, s_{\alpha^{-1}h}) : \alpha \in H \}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.7) se obtiene $\mu_G(r, s) = |AB| \geq \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s)$. \square

Definición 1.4 (Grupo adecuado). Un grupo G es adecuado si para todo

grupo abeliano X y todo par de enteros positivos $r, s \leq |X \times G|$, se cumple

$$\mu_{X \times G}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times G}}(r, s).$$

Proposición 1.3. Sea $\pi : G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos finitos con Kernel un grupo abeliano K . Si H es adecuado, entonces G es adecuado.

Demostración. Sea X un grupo abeliano y sean P_1, \dots, P_t los p -subgrupos de sylow del grupo abeliano K , entonces

$$K = P_1 \times \dots \times P_t.$$

Cada p -grupo P_j es normal en G porque $H \trianglelefteq G$ y cada P_j es invariante bajo todo automorfismo de H . Para $j = 1, \dots, t$, considere el grupo

$$G_j = X \times \left(\frac{G}{P_j \times \dots \times P_t} \right), \text{ además, sea } G_{t+1} = X \times G.$$

Se probará por inducción que todos los grupos G_j son adecuados. Para $j = 1$, se tiene

$$G_1 = X \times \left(\frac{G}{P_1 \times \dots \times P_t} \right) = X \times \frac{G}{K} \cong X \times H,$$

dado que H es adecuado y X es abeliano, se sigue que G_1 es adecuado. Para continuar, supoga que para algún $j = 1, \dots, t$, el grupo G_j es adecuado y considere la secuencia exacta corta

$$\{1\} \longrightarrow P_j \xrightarrow{\alpha} X \times G_{j+1} \xrightarrow{i \times \pi} X \times G_j \longrightarrow \{1\},$$

en la cual

$$\alpha(a) = \left(0, a + (P_{j+1} \times \dots \times P_t) \right), \text{ para todo } a \in P_j.$$

Además,

$$\pi : G_{j+1} \longrightarrow \frac{G_{j+1}}{P_j} \cong G_j,$$

es la proyección natural. Dado que $\{1\} \times P_j = \text{Ker}(i \times \pi)$ es un p -grupo abeliano y G_j es adecuado, por la proposición (1.2), se tiene $\mu_{X \times G_{j+1}}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times G_{j+1}}}(r, s)$. Por tanto, G_{j+1} es adecuado y la prueba está completa. \square

Proposición 1.4. Todo grupo soluble finito es adecuado.

Demostración. Sea $G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \dots \supseteq G^{(t)} \supseteq \dots$ la serie derivada del grupo G , es decir, para todo $j \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $G^{(j)} = [G^{(j-1)}, G^{(j-1)}]$. Dado que G sea soluble, existe la longitud n de la serie derivada, esto es, n es el menor entero positivo tal que $G^{(n)} = \{1\}$. La prueba se hará por inducción sobre la longitud de la serie derivada. En el caso $t = 1$, el grupo G es abeliano, en consecuencia, para todo grupo abeliano X , el grupo $X \times G$ es abeliano y por el resultado principal de Eliahou and Kervaire (2005), para todo par de enteros positivos $r, s \leq |X \times G|$ se cumple

$$\mu_{X \times G}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times G}}(r, s). \tag{1.11}$$

Ahora suponga que el enunciado se satisface para todo grupo soluble cuya serie derivada tenga longitud n , y sea G un grupo soluble con serie derivada de longitud $n + 1$. Observe que $G^{(n)}$ es abeliano y normal en el grupo G , en consecuencia, el grupo cociente $H = \frac{G}{G^{(n)}}$ es soluble y la serie derivada tiene longitud n , por hipótesis de inducción, H es adecuado. Considere la proyección natural $\pi : G \rightarrow H$, luego $\text{Ker}(\pi) = G^{(n)}$ es abeliano y por la proposición (1.3), se sigue que G es adecuado. \square

Teorema 1.5 (Eliahou-Kervaire). Si G es un grupo soluble finito, entonces para todo par de enteros positivos $r, s \leq |G|$, se tiene $\mu_G(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s)$.

Demostración. Tomando el grupo $X = \{1\}$ y aplicando la proposición anterior, se tiene $\mu_G(r, s) = \mu_{X \times G}(r, s) \geq \mathcal{D}_{\kappa_{X \times G}}(r, s) = \mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s)$. \square

Por el Teorema de Feit-Thompson, demostrado por los matemáticos estadounidenses Walter Feit y John G. Thompson en 1963, se sabe que todo grupo finito de orden impar es soluble, en consecuencia, para todo grupo G de orden impar se cumple la desigualdad dada en el teorema (1.5).

Corolario 1.3. Si G es un grupo soluble finito, entonces para todo par de enteros positivos $r, s \leq |G|$, se tiene

$$\mathcal{D}_{\kappa_G} \leq \mu_G(r, s) \leq \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s).$$

Demostración. Dados dos enteros positivos $r, s \leq |G|$, por el teorema 8 de Eliahou and Kervaire (2007a), se tiene la cota superior $\mu_G(r, s) \leq \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s)$. \square

El corolario anterior generaliza los resultados obtenidos en el estudio de la función μ_G en Mutis et al. (2010) para p -grupos finitos y Mutis et al. (2012) en ciertos grupos hamiltonianos finitos, sin embargo, en el momento en que estos artículos fueron sometidos a publicación, no se conocían las cotas para el valor de $\mu_G(r, s)$ dadas por Eliahou y Kervaire en grupos solubles finitos.

Corolario 1.4. Si G es un p -grupo finito o un grupo hamiltoniano finito, entonces para todo par de enteros positivos $r, s \leq |G|$, se tiene

$$\mu_G(r, s) = \kappa_G(r, s) = \min \{f_d : d \in \mathcal{H}(G)\}.$$

Demostración. Dado que G es un p -grupo finito o un grupo hamiltoniano finito, se obtiene

$$\mathcal{N}(G) = \mathcal{H}(G) = \mathcal{D}(G),$$

entonces, para todo par de enteros positivos $r, s \leq |G|$, se tiene

$$\mathcal{D}_{\kappa_G}(r, s) = \kappa_G(r, s) = \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s).$$

Pero los p -grupos finitos y los grupos hamiltonianos finitos son solubles, esto junto con el corolario (1.3), implican

$$\kappa_G(r, s) \leq \mu_G(r, s) \leq \kappa_G(r, s).$$

Por tanto, $\mu_G(r, s) = \kappa_G(r, s)$. \square

1.4.3. La función μ_G en grupos finitos no abelianos : Desafíos

La función μ_G ha sido determinada en el contexto de grupos abelianos, pero su estudio en grupos no abelianos finitos presenta desafíos que aún no han sido superados. La incapacidad de generalizar la solución obtenida en el caso abeliano ha impulsado la búsqueda de posibles soluciones y métodos de análisis que permitan una comprensión más profunda de esta función en el contexto no conmutativo. Una posible línea de investigación que surge de esta situación es caracterizar aquellos grupos no abelianos finitos en los que se cumple la igualdad $\mu_G = \kappa_G$, este enfoque podría arrojar luz sobre cuáles propiedades estructurales y operativas deben poseer los grupos no abelianos para que la función μ_G tenga un comportamiento similar a como lo hace en el caso abeliano.

Se sabe que, en general, $\mu_G \neq \kappa_G$, cuando G es el producto semidirecto de dos grupos cíclicos, en este sentido, otra posible línea de investigación es caracterizar los pares de enteros r y s tales que $\mu_G(r, s) = \kappa_G(r, s)$ o $\mu_G(r, s) = \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s)$ cuando G es el producto semidirecto de dos grupos cíclicos. En el trabajo de grado (Erazo and Benavides, 2024) se estudió la función μ_G en productos semidirectos de la forma $G = C_p \rtimes C_q$ y $G = C_{p^2} \rtimes C_q$, en la cual, p y q son primos impares y $q \mid p - 1$, en este trabajo se consigue caracterizar los pares de enteros positivos (r, s) para los cuales se satisface la igualdad $\mu_G(r, s) = \mathcal{N}_{\kappa_G}(r, s)$.

Mientras que el análisis de la función μ_G en la clase de grupos solubles finitos ha dado lugar a avances significativos, los grupos no solubles, como los grupos alternantes, representan un territorio mucho menos explorado y repleto de desafíos. El nivel de complejidad estructural de estos grupos plantea problemas matemáticos que, en muchos casos, superan las herramientas y métodos actuales de análisis, lo que hace que este estudio sea un proyecto difícil y, tal vez, aún prematuro, en términos de resultados alcanzables. En este sentido, el estudio de μ_G en grupos no solubles es un desafío que actualmente puede estar más allá de nuestras capacidades, no solo por la falta de herramientas analíticas adecuadas, sino también por la naturaleza intrínsecamente compleja de estos grupos.



Capítulo 2

Deza grafos y algunas construcciones

Fernando Andrés Benavides - Wilson Fernando Mutis
fandresbenavides@udenar.edu.co wilsonmutis@udenar.edu.co

Resumen

Una de las áreas de la matemática que se puede considerar más atractivas por su simplicidad y sus distintas aplicaciones es la teoría de grafos. Este objeto combinatorio lo tenemos presente en los planos de las estaciones de una red urbana, en los mapas conceptuales, en circuitos eléctricos, en las redes sociales, entre otros. En este sentido, la teoría de grafos es de gran importancia por sus diversas aplicaciones. En este documento, se realiza una introducción a esta área mediante un tipo particular denominado Deza grafo. El objetivo del presente capítulo es exponer nuevas pruebas a resultados relacionados con estos grafos, así como plantear algunos problemas de investigación.

2.1 Introducción

Desde sus orígenes en 1736, la teoría de grafos ha surgido como un medio para modelar problemas de la vida real, por lo cual esta rama de la matemática juega un papel fundamental en nuestro mundo, debido a sus

múltiples aplicaciones. Un grafo es un objeto combinatorio, el cual básicamente es un conjunto de puntos o vértices y enlaces o aristas que definen las relaciones entre los puntos. Existen distintas maneras de representar un grafo, la más simple es mediante una gráfica formada por puntos en el plano que representan los vértices, y segmentos de recta (o de curva) que representan las aristas que unen los puntos en el plano. Sin embargo, una de las más usadas, que permite realizar un estudio más a fondo de las distintas propiedades del grafo, es a través de su matriz denominada de adyacencia. Las componentes de esta matriz describen las relaciones que existen entre los vértices del grafo.

Existen distintos tipos de grafos, como por ejemplo, simples, dirigidos, con múltiples aristas, con bucles, entre otros. También en esta teoría se incluyen distintas clases de grafos, cada uno de las cuales tiene sus aplicaciones dependiendo de sus características. Entre las clases más conocidos están los grafos completos, bipartitos, regulares, fuertemente regulares, Deza grafos, y en cada uno de ellos encontramos sus versiones tanto simples como dirigidas.

Algunas de las áreas en las que se aplica la teoría de grafos son: química, computación cuántica, teoría de códigos entre otros. El lector interesado puede consultar los textos de Trinajstić (1992) y Bernasconi et al. (2008). Según el tipo de grafo, este tiene una aplicación; por ejemplo, en el caso particular de los grafos fuertemente regulares, de acuerdo con el trabajo de Wang et al. (2023), estos se utilizan en la construcción de *codebooks*. En el trabajo de Crnković and Švob (2024) los Deza dígrafos se utilizan con el fin de construir códigos auto-ortogonales. Por lo cual, tener construcciones de algunos casos particulares de grafos es de importancia en las distintas aplicaciones.

Muchas de las construcciones que se conocen de grafos surgen a partir de estructuras algebraicas como son los grupos, anillos o campos. Por ejemplo, en los trabajos de Wang and Quan Feng (2006), Wang and Li (2008), Wang et al. (2011) se encuentran construcciones de Deza dígrafos a partir de Cayley dígrafos, productos de grafos lexicográfico, espacios lineales singulares,

y estructuras de incidencia asociadas a espacios vectoriales. Uno de los conjuntos importantes en la construcción de Deza grafos (o dígrafos) son los conjuntos diferencia o casi-diferencia. Estos conjuntos tienen aplicaciones en ciencias de la computación, procesamiento de señales, computación cuántica, lo cual se puede evidenciar en los trabajos de Colbourn and van Oorschot (1989), Xie et al. (2013) y Roetteler (2016). La existencia de dichos conjuntos ha sido estudiada por varios investigadores, por ejemplo Daza et al. (2022) estudian la no existencia de un tipo particular de conjunto diferencia para muchos valores de sus parámetros.

Históricamente, los Deza grafos definidos en su versión simple por Erickson et al. (1999a), son una generalización de los grafos fuertemente regulares introducidos por Bose (1963). Actualmente, se conocen distintas versiones dirigidas de Deza grafos; sin embargo, en este documento se considera la versión de Wang and quan Feng (2006).

En este capítulo, en su segunda sección, se hace una presentación de los conceptos básicos de los Deza grafos, tanto en su versión simple como dirigida. En la siguiente sección, se presentan propiedades de los parámetros que definen a los Deza grafos (o dígrafos) utilizando la matriz de adyacencia correspondiente, en particular, se presentan nuevas pruebas a las Proposiciones 1.1 y 1.2 de los artículos de Erickson et al. (1999b) y Wang and quan Feng (2006), respectivamente. En la sección 4, se presentan algunas construcciones básicas, a fin de que el lector comprenda muchos de los conceptos presentados. Estas construcciones están basadas a partir de conjuntos con ciertas características, como son los conjuntos de Sidon o conjuntos diferencias o casi-diferencia; también se presenta una construcción a partir de ecuaciones sobre campos finitos. En la última sección se presentan problemas de investigación que relacionan los Deza grafos con distintas áreas de la matemática, como son las ecuaciones diofánticas y el número de Turán.

2.2 Preliminares

Un grafo básicamente es una pareja de conjuntos disjuntos, en la cual a los elementos del primer conjunto se les denominan los vértices y a los

demás las aristas. Estos últimos definen las relaciones que existen entre cada par de vértices del grafo. En la literatura se encuentran distintos tipos de grafos: simples, dirigidos, con múltiples aristas o con bucles entre otros. Sin embargo, en este documento se abordan dos tipos: los grafos simples y los grafos dirigidos. En cada uno de ellos se permiten bucles o *loops*, los cuales son aristas formadas por dos vértices iguales.

2.2.1. Grafos simples

Definición 2.1 (Grafo simple). Un grafo simple G es una pareja de conjuntos finitos $(V(G), E(G))$ en la cual los elementos de $E(G)$ son subconjuntos de dos elementos (no necesariamente distintos) de $V(G)$. A los elementos de $V = V(G)$ se les denominan los vértices del grafo, y a los elementos de $E = E(G)$ sus aristas.

En el caso de que dos vértices u y v de un grafo G formen una arista e se dice que estos son adyacentes y se denota por $u \sim_G v$ (o simplemente $u \sim v$), además, se dice que tanto u como v son incidentes a la arista e . Note que la relación de “adyacencia” en este tipo de grafos es simétrica,

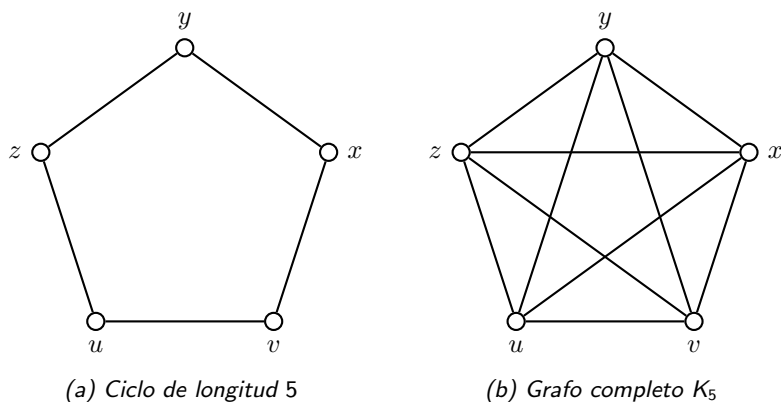


Figura 2.1: Grafos C_5 y K_5

sin embargo, no es necesariamente transitiva. Por ejemplo, al considerar el grafo de la Figura 2.1a se observa que $u \sim v$ y $v \sim x$, pero $u \not\sim x$. Un caso en el cual la relación de adyacencia es transitiva es en el grafo en el que todo par de vértices son adyacentes, este tipo de grafo se denomina completo y se denota por K_n como el que se muestra en la Figura 2.1b.

La relación de adyacencia permite definir dos conceptos básicos en la teoría de grafos.

Definición 2.2 (Camino y trayectoria). En un grafo simple $G = (V, E)$ un k -camino entre dos vértices u y v es una secuencia de vértices $c = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ tales que $u = v_0$, $v = v_k$ y $v_{i-1} \sim v_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. En caso que todos los vértices del camino sean distintos se dice que c es una k -trayectoria entre los vértices u y v .

Observe que los grafos de la Figura 2.1 satisfacen que para cualquier par de vértices existe al menos una trayectoria que los une. A los grafos que satisfacen con esta propiedad se les denomina conexos.

Por otro lado, se define la vecindad de un vértice v y se denota por $N_G(v)$ o simplemente $N(v)$, como el conjunto de vértices adyacentes con este, es decir

$$N_G(v) = \{u \in V : u \sim v\}.$$

Por ejemplo, en el grafo de la Figura 2.1a se tiene que $N(x) = \{y, v\}$, $N(y) = \{x, z\}$, $N(z) = \{y, u\}$, $N(u) = \{z, v\}$, y $N(v) = \{x, u\}$. Para cada par de vértices u, v del grafo G el conjunto denotado por $N_G(u, v)$ (o simplemente $N(u, v)$) está formado por todos los vértices adyacentes tanto a u como a v , es decir

$$N(u, v) = N(u) \cap N(v).$$

La definición de vecindad permite introducir el concepto de grado de un vértice, el cual es igual al número de vértices adyacentes al vértice. Es decir, si $u \in V(G)$ entonces el grado se denota por $\deg_G(u)$ o simplemente $\deg(u)$ y es igual a:

$$\deg(u) = |N_G(u)|.$$

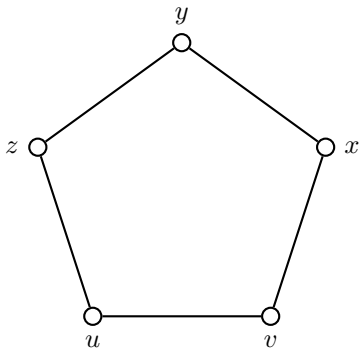
Observe que cada uno de los vértices de los grafos de la Figura 2.1 tienen grado constante, en el caso del primer grafo los vértices tienen grado 2 mientras que en el segundo caso los vértices tienen grado 4. Un grafo simple

G se denomina k -regular si para todo vértice u del grafo se cumple que

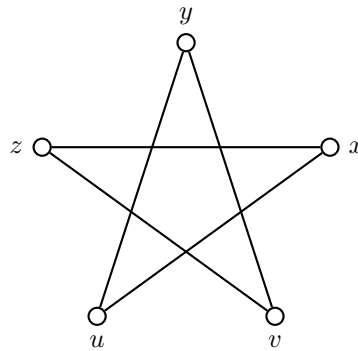
$$\text{deg}(u) = k.$$

El complemento de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo \overline{G} en el cual $V(\overline{G}) = V$ y dos vértices u, v son adyacentes, si no son adyacentes en G , es decir

$$u \sim_{\overline{G}} v \text{ si y solo si } u \not\sim_G v.$$



(a) Ciclo C_5



(b) Grafo complemento de C_5

Figura 2.2: Grafos C_5 y $\overline{C_5}$

Por ejemplo, en la Figura 2.2 se muestran tanto el ciclo C_5 como su complemento. Note que el complemento de K_5 es el grafo sobre 5 vértices si aristas.

En las Figuras 2.1 y 2.2 se muestran representaciones graficas de algunos tipos de grafos. Sin embargo, otra forma de representar este objeto combinatorio es mediante su matriz de adyacencia, es decir, si G es un grafo con n vértices, entonces su matriz de adyacencia $A = A(G)$ es la matriz binaria de tamaño $n \times n$ en la cual

$$A_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{si } u \text{ y } v \text{ son adyacentes} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo en la Figura 2.3 se presentan las matrices de adyacencia de los grafos de la Figura 2.1.

$$A(C_5) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & u & v \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(a) Matriz de adyacencia de C_5

$$A(K_5) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & u & v \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b) Matriz de adyacencia de K_5

Figura 2.3: Matrices de adyacencia

El siguiente resultado evidencia la relación que existe entre los caminos de un grafo y las potencias de su matriz de adyacencia asociada.

Teorema 2.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo en el que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces la componente (i, j) -ésima de la matriz A^k es igual al número de caminos de longitud k que existen en G del vértice v_i al v_j .

Demostración. La prueba se desarrollará por inducción sobre k . Para $k = 1$ es claro a partir de las definiciones de camino y de matriz de adyacencia. Suponga que la afirmación se cumple para todo camino de longitud $k - 1$ y sea $B = (b_{ij}) = A^{k-1}$. Entonces la componente (i, j) de la matriz A^k esta dada por el producto punto entre la i -ésima fila de B y la j -ésima columna de A . Observe que la multiplicación $b_{il}a_{lj}$ con $1 \leq l \leq n$ cuenta el número de caminos desde el vértice v_i hasta el vértice v_j pasando por v_l , donde los caminos que comienzan en v_i y terminan en v_l son de longitud $k - 1$ y los que comienzan en v_l y terminan en v_j son de longitud 1. Por lo tanto,

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = \sum_{l=1}^n b_{il}a_{lj}$$

cuenta el número de caminos de longitud k del vértice v_i al vértice v_j . \square

Otra de las propiedades importantes de la matriz de adyacencia asociada

a un grafo simple es su simétrica de la cual se obtiene que

$$|\theta| \leq \Delta$$

en la que Δ es el grado máximo de G y θ es cualquier valor propio de A . En particular, si el grafo es k -regular, se tiene que

$$|\theta| \leq k.$$

De hecho, el valor de k es un valor propio de la matriz con el vector compuesto de 1's como vector propio.

El estudio de los valores propios de la matriz de adyacencia permite deducir si el grafo es conexo o el número de componentes conexas; en caso contrario, estas dos propiedades del grafo están relacionadas con la multiplicidad algebraica o geométrica del valor propio máximo. El lector interesado en la Teoría Espectral de Grafos puede consultar el texto de Cvetković et al. (2009).

Definición 2.3. Sean $b, c \in \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Un grafo k -regular simple G se denomina un Deza grafo con parámetros (n, k, b, c) si $V(G) = n$, y para todo par de vértices u, v , se tiene que

$$|N(u, v)| = |N(u) \cap N(v)| = \begin{cases} b \text{ o } c, & \text{si } u \neq v \\ k, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Sea G es un Deza grafo de parámetros (n, k, b, c) en el que $b \neq c$. Entonces los Deza hijos de G son los grafos G_b y G_c , definidos por

$$V(G) = V(G_b) = V(G_c),$$

los vértices u, v son adyacentes en G_b si $|N_G(u, v)| = b$ y son adyacentes en G_c si $|N_G(u, v)| = c$. Observe que si A es la matriz de adyacencia del grafo G , entonces la componente uv de la matriz A^2 es igual al número de

caminos de longitud 2 que existen entre los vértices u y v . Es decir,

$$A_{uv}^2 = \begin{cases} N_G(u, v), & \text{si } u \neq v \\ \deg(u), & \text{si } u = v. \end{cases}$$

En consecuencia, si B y C son las matrices de adyacencia de los grafos G_b y G_c , respectivamente, entonces

$$A^2 = kI + bB + cC. \quad (2.1)$$

Note que las matrices B y C satisfacen que $B + C = J - I$ donde I es la matriz identidad y J es la matriz compuesta de 1's.

Proposición 2.1. Si G es un Deza grafo con parámetros (n, k, b, c) , entonces su complemento \overline{G} es un Deza grafo con parámetros $(n, n - k, n - 2k + b, n - 2k + c)$.

Demostración. Para cada vértice u se tiene que

$$N_{\overline{G}}(u) = V \setminus N_G(u)$$

con lo cual se garantiza que el grafo complemento \overline{G} tiene regularidad $n - k$. Por otro lado, para los vértices u, v se tiene

$$N_{\overline{G}}(u, v) = N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(v) = (V \setminus N_G(u)) \cap (V \setminus N_G(v)) = V \setminus (N_G(u) \cup N_G(v)).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |N_{\overline{G}}(u, v)| &= n - |(N_G(u) \cup N_G(v))| \\ &= n - (|N_G(u)| + |N_G(v)| - |N_G(u) \cap N_G(v)|) \\ &= n - 2k + |N_G(u) \cap N_G(v)|, \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. □

2.2.2. Dígrafos

Definición 2.4 (Dígrafo). Un dígrafo (o grafo dirigido) Γ es una pareja de conjuntos finitos $(V(\Gamma), R(\Gamma))$ en la que $R(\Gamma)$ es un subconjunto de $V^2 = V \times V$. Los elementos de $V = V(\Gamma)$ se denominan los vértices y los de $R = R(\Gamma)$ las aristas del dígrafo.

En el caso que los vértices u y v formen una arista $e = (u, v)$, se dice que u domina a v o que v es dominado por u , y se denota por $u \rightarrow v$. De manera similar como sucede con los grafos simples, en dígrafos se tienen caminos y trayectorias. Es decir, un k -camino de u a v es una secuencia de vértices $c = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ en el que $u = v_0$, $v = v_k$ y $v_{i-1} \rightarrow v_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Las trayectorias se definen de manera similar al caso de los grafos simples.

Puesto que cada arista de un dígrafo es un elemento del producto cartesiano $V \times V$, se tiene que en su representación grafica cada una de ellas tiene una dirección, como se muestra en el grafo dirigido de la Figura 2.4a. Note que en la grafica de la Figura 2.4b se muestran dos caminos de longitud 2 del vértice x al vértice z .

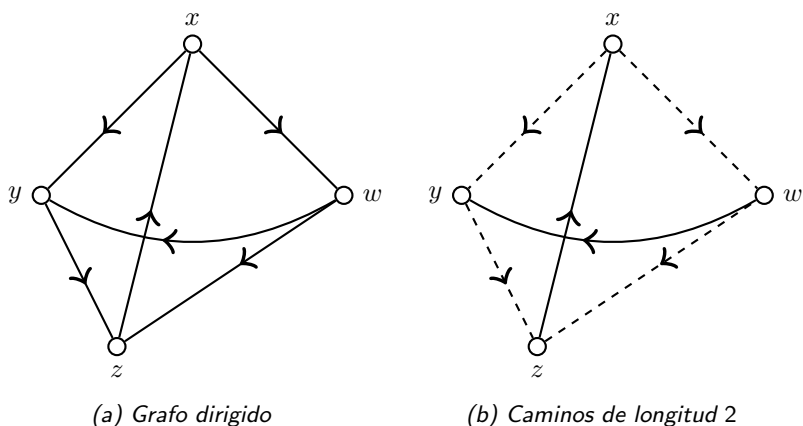


Figura 2.4: Grafos dirigidos y caminos

Cada dígrafo también tiene una matriz de adyacencia asociada, la cual se define ligeramente distinta al caso simple. Esto es, si Γ es un dígrafo

sobre n vértices, entonces su matriz de adyacencia $A = A(\Gamma)$ es la matriz binaria de tamaño $n \times n$ en la cual

$$A_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{si } u \rightarrow v \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que en este caso no necesariamente A es una matriz simétrica. Sin embargo, el Teorema 2.1 es aplicable, es decir, el valor de la (u, v) -ésima componente de la matriz A^k es igual al número de caminos (dirigidos) de longitud k que existen de u a v . Por ejemplo, en la Figura 2.5a se muestra la matriz de adyacencia del grafo dirigido Γ de la Figura 2.4a. Note que la matriz de la Figura 2.5b contiene el número de caminos de longitud 2 del grafo Γ , en particular, note que la (x, z) -coordenada de esta matriz indica que existen 2 caminos de longitud 2 de x a z , tal como se muestra en la Figura 2.4b.

$A(\Gamma) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$A^2(\Gamma) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$
<p>(a) Matriz de adyacencia de Γ</p>	<p>(b) Número de caminos de longitud 2</p>

Figura 2.5: Matriz de adyacencia y su potencia

Por otro lado, para cada vértice u se define la vecindad externa como el conjunto formado por aquellos vértices del dígrafo que son dominados por u , y se denota por $N_F^+(u)$ o simplemente $N^+(u)$, es decir

$$N^+(u) = \{x \in V : u \rightarrow x\}.$$

Igualmente, el conjunto de vértices que dominan al vértice u se denomina la vecindad interna de u , y se denota por $N_F^-(u)$ o simplemente por $N^-(u)$, esto es

$$N^-(u) = \{x \in V : x \rightarrow u\}.$$

El concepto de grado en un dígrafo es similar al de grado en grafos simples. Sin embargo, se tienen dos tipos de grados, el interno y el externo, los cuales se denotan por deg^- y deg^+ , y están definidos por

$$\text{deg}^-(u) = |N^-(u)| \quad \text{y} \quad \text{deg}^+(u) = |N^+(u)|.$$

Un dígrafo Γ se denomina k -regular si para todo vértice u del digrafo se satisface que

$$k = \text{deg}^-(u) = \text{deg}^+(u).$$

Note que la suma de las componentes de una fila (o columna) de la matriz de adyacencia de un dígrafo k -regular es igual a k . Esto implica que dicha matriz tiene a k como un valor propio, de hecho, para todo valor propio θ de A se cumple que su módulo es menor o igual a k .

Definición 2.5. Sean $b, c \in \mathbb{Z}_0^+$. Un dígrafo k -regular Γ se denomina un Deza dígrafo con parámetros (n, k, b, c) si $V(\Gamma) = n$, y para todo par de vértices u, v se tiene que

$$|N_\Gamma^+(u, v)| = |N_\Gamma^+(u) \cap N_\Gamma^+(v)| = \begin{cases} b \text{ o } c, & \text{si } u \neq v \\ k, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Note que si Γ es un dígrafo, entonces $|N_\Gamma^+(u, v)|$ es igual al número de vértices que son dominados por u y v , como se muestra en la Figura 2.6a. Mientras que $|N_\Gamma^-(u, v)|$ es igual al número de vértices que dominan a u y v , ver Figura 2.6b.

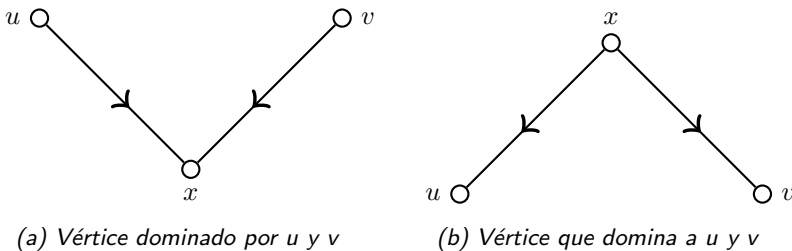


Figura 2.6: Vecinda interna y externa

Es importante observar que si A es la matriz de adyacencia de Γ , entonces la componente (u, v) -ésima de AA^T y de $A^T A$, con A^T la matriz transpuesta, son iguales a $|N_{\Gamma}^+(u, v)|$ y $|N_{\Gamma}^-(u, v)|$, respectivamente. Además, si se conoce que Γ es k -regular se obtiene que

$$(AA^T)_{uv} = \sum_{x \in V} A_{ux}A_{vx} = \sum_{x \in V} A_{xu}A_{xv} = (A^T A)_{uv}.$$

Esto implica que la matriz asociada a un dígrafo k -regular es normal, es decir $AA^T = A^T A$.

Igual que sucede en el caso no dirigido, cada Deza dígrafo con parámetros (n, k, b, c) tiene asociado dos grafos simples denominados los Deza hijos Γ_b y Γ_c definidos por

$$V(\Gamma_b) = V(\Gamma_c) = V(\Gamma),$$

y dos vértices distintos u y v forman una arista en Γ_b si $|N^+(u, v)| = b$. De manera similar se define la relación de adyacencia en el grafo simple Γ_c . Note que los Deza hijos son grafos regulares y simples, y en este sentido un Deza dígrafo también cuenta con una expresión similar a la de la igualdad 2.1, la cual se presenta en el Teorema 2.4.

2.3 Parámetros de Deza grafos

En esta sección se estudian algunos parámetros asociados a un Deza grafo. En particular, se presentan nuevas pruebas, en las cuales se utiliza la matriz de adyacencia, de la Proposición 1.1 del artículo de Erickson et al. (1999b) y de la Proposición 1.2 del artículo de Wang and quan Feng (2006). Por otro lado, se presenta una cota superior del segundo valor propio de un Deza grafo.

Teorema 2.2. Sea G un Deza grafo con parámetros (n, k, b, c) . Para cada vértice u se definen los conjuntos

$$V_b = \{x \in V : |N(u, x)| = b\} \text{ y } V_c = \{x \in V : |N(u, x)| = c\}$$

y los valores $\alpha = |V_b|$ y $\beta = |V_c|$. Entonces α y β son constantes para todo vértice u y además

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c(n-1) - k(k-1)}{c-b}, & \text{si } b \neq c \\ \frac{k(k-1)}{b}, & \text{si } b = c \end{cases}$$

y

$$\beta = \begin{cases} \frac{b(n-1) - k(k-1)}{b-c}, & \text{si } b \neq c \\ \frac{k(k-1)}{c}, & \text{si } b = c. \end{cases}$$

Demostración. Suponga que $b \neq c$, y considere los Deza hijos G_b y G_c del grafo G . Si A es la matriz de adyacencia del grafo G , entonces

$$A^2 = kI + bB + cC,$$

donde B y C son las matrices de adyacencia de los grafos G_b y G_c , respectivamente. Sea $\mathbf{1}$ el vector cuyas componentes son iguales a 1, el cual es un vector propio de A asociado al valor propio k . Entonces,

$$A^2\mathbf{1} = k^2\mathbf{1},$$

de lo cual se obtiene

$$\sum_{v \in V} A_{uv}^2 = \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq u}} A_{uv}^2 + A_{uu}^2 = \sum_{\substack{v \in V \\ v \neq u}} A_{uv}^2 + k = k^2. \quad (2.2)$$

Note que los conjuntos V_b y V_c cumplen

$$V = V_b \cup V_c \cup \{u\}$$

y así se obtiene la ecuación

$$\alpha + \beta = n - 1. \quad (2.3)$$

Por otro lado, de la igualdad 2.2 se sigue que

$$\sum_{\substack{v \in V_b \\ v \neq u}} A_{uv}^2 + \sum_{\substack{v \in V_c \\ v \neq u}} A_{uv}^2 = k^2 - k$$

de la cual se obtiene la ecuación

$$b\alpha + c\beta = k^2 - k. \quad (2.4)$$

El sistema conformado por las Ecuaciones 2.3 y 2.4 tiene solución única si $b \neq c$, con lo cual se llega a que

$$\alpha = \frac{c(n-1) - k(k-1)}{c-b} \text{ y } \beta = \frac{b(n-1) - k(k-1)}{b-c}.$$

En el caso que $b = c$, entonces

$$n-1 = \alpha = |V_b| = |V \setminus \{u\}| = \beta,$$

y de la Igualdad 2.2 se sigue

$$b|V_b| = k^2 - k,$$

lo cual completa la prueba. \square

Sea G un Deza grafo de parámetros (n, k, b, c) con $b \neq c$. Entonces el Teorema 2.2 implica que los Deza hijos de G son regulares, las regularidades de los grafos G_b y G_c son α y β , respectivamente.

Teorema 2.3. Sea G un Deza grafo de parámetros (n, k, b, c) con $b < c$. Si θ es un valor propio de G distinto a k , entonces

1. $\theta^2 \leq c(n-2) - k(k-2)$.
2. $\theta^2 \leq k^2 - bn$.

Demostración. Sean A , B y C las matrices de adyacencia de los grafos G ,

G_b y G_c , respectivamente. Entonces se cumple que

$$A^2 = kI + bB + cC = kI + bB + c(J - I - B) = (k - c)I + cJ + (b - c)B.$$

Sea x un vector propio asociado al valor propio θ con $\theta \neq k$. Entonces, por un lado, se conoce que x es ortogonal al vector $\mathbf{1}$, y por otro

$$\theta^2 x = A^2 x = (k - c)Ix + cJx + (b - c)Bx = (k - c)x + (b - c)Bx,$$

con lo cual se obtiene que

$$Bx = \frac{\theta^2 - k + c}{b - c}x.$$

Por tanto, un valor propio de B es

$$\frac{\theta^2 - k + c}{b - c}.$$

Puesto que G_b es un grafo regular se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{k - c - \theta^2}{c - b} \right| &\leq \frac{c(n - 1) - k(k - 1)}{c - b} = \alpha \\ \theta^2 + c - k &\leq c(n - 1) - k(k - 1) \\ \theta^2 &\leq c(n - 2) - k(k - 2). \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que

$$\theta^2 \leq k^2 - bn,$$

con lo cual se concluye la prueba. \square

Teorema 2.4. Sea Γ un Deza dígrafo con parámetros (n, k, b, c) . Para cada vértice u se definen los conjuntos

$$V_b = \{x \in V : |N^+(u, x)| = b\} \text{ y } V_c = \{x \in V : |N^+(u, x)| = c\}$$

y los valores $\alpha = |V_b|$ y $\beta = |V_c|$. Entonces α y β son constantes para todo

vértice u , y además

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c(n-1) - k(k-1)}{c-b}, & \text{si } b \neq c \\ \frac{k(k-1)}{b}, & \text{si } b = c \end{cases}$$

y

$$\beta = \begin{cases} \frac{b(n-1) - k(k-1)}{b-c}, & \text{si } b \neq c \\ \frac{k(k-1)}{c}, & \text{si } b = c. \end{cases}$$

Demostración. Sean Γ_b y Γ_c los Deza hijos del dígrafo Γ . Si A es la matriz de adyacencia de Γ y B, C las matrices de adyacencia de los Deza hijos, entonces

$$AA^T = kI + bB + cC \quad (2.5)$$

donde $B + C = J - I$. En efecto, para los vértices u y v , se tiene que

$$(AA^T)_{uv} = \sum_{w \in V} A_{uw}A_{vw}.$$

Recuerde que si u y v son distintos, $(AA^T)_{uv}$ cuenta el número de tripletas (u, w, v) para las cuales $(u, w), (v, w) \in R(\Gamma)$. Es decir,

$$(AA^T)_{uv} = |N^+(u, v)| = bB_{uv} + cC_{uv}.$$

Sin embargo, si $u = v$ entonces

$$(AA^T)_{uu} = \sum_{w \in V} A_{uw}^2 = \sum_{\substack{(u,w) \in R \\ w \in V}} 1 = k = kI_{uu}.$$

Por tanto, de la igualdad 2.5 se obtiene que

$$(AA^T) \cdot \mathbf{1} = k^2 \cdot \mathbf{1}$$

y así para $u \in V$

$$(AA^T \cdot \mathbf{1})_u = \sum_{v \in V} (AA^T)_{uv} = k^2$$

de lo cual se obtiene

$$\sum_{\substack{v \in V_b \\ u \neq v}} (AA^T)_{uv} + \sum_{\substack{v \in V_c \\ u \neq v}} (AA^T)_{uv} = \alpha b + \beta c = k^2 - k \quad (2.6)$$

En caso de que $b \neq c$, note que los conjuntos V_b y V_c cumplen

$$V = V_b \cup V_c \cup \{u\}$$

y así se obtiene la ecuación

$$\alpha + \beta = n - 1. \quad (2.7)$$

El sistema conformado por las Ecuaciones 2.6 y 2.7 tiene solución única, ya que $b \neq c$, con lo cual se obtiene

$$\alpha = \frac{c(n-1) - k(k-1)}{c-b} \text{ y } \beta = \frac{b(n-1) - k(k-1)}{b-c}.$$

En el caso de que $b = c$, entonces

$$n - 1 = \alpha = |V_b| = |V \setminus \{u\}| = \beta,$$

y así

$$b|V_b| = k^2 - k$$

lo cual completa la prueba. □

2.4 Algunas construcciones de Deza grafos

En esta sección se presentan cuatro construcción de Deza grafos, las dos primeras se originan a partir de conjuntos de Sidon definidos en grupos abelianos. En la segunda se tienen en cuenta ecuaciones sobre campos finitos, y la última se fundamenta en los conjuntos diferencia o casi-diferencia.

2.4.1. Construcción 1

En esta construcción se considera un grupo abeliano X y un subconjunto no vacío S del grupo. El grafo asociado a S se denotará por G_S y tiene como conjunto de vértices a los elementos del grupo; es decir $V(G_S) = X$, y dos vértices $u, v \in X$ son adyacentes si $u + v \in S$. En este sentido, para cada vértice $u \in X$, se tiene que

$$N(u) = \{s - u : s \in S\},$$

y así $\deg(u) = k$. Por tanto, el grafo G_S es k -regular donde $k = |S|$.

Con el fin de construir Deza grafos se considera aquellos conjuntos denominados de Sidon, en los cuales se cumple que para todo $a, b, c, d \in S$

$$a + b = b + c \text{ si y solo si } \{a, b\} = \{c, d\}.$$

En otras palabras, si todas las sumas de dos elementos de S son distintas. A este tipo de conjuntos también se les conoce como conjuntos B_2 . Una de las particularidades de los conjuntos B_2 es que los grafos asociados son libres de ciclos de longitud 4. Esto implica que para cada par de vértices a lo más existe un camino de longitud 2, y en consecuencia G_S es un Deza grafo con parámetros $(n, k, 0, 1)$ donde $n = |X|$.

Entre las construcciones más conocidas de conjuntos de Sidon están la de Bose Chowla y la de Singer, el lector interesado puede consultar los trabajos de Caicedo (2016) y Daza (2022). Sean q una potencia prima, $h \geq 2$ un entero, \mathbb{F}_q el campo finito con q elementos, α un elemento algebraico de grado h y sea θ un elemento primitivo de \mathbb{F}_{q^h} .

Teorema 2.5. El conjunto

$$\mathcal{B} = \log_\theta(\alpha + \mathbb{F}_q) = \{\log_\theta(\alpha + a) : a \in \mathbb{F}_q\}.$$

es un conjunto de Sidon en el grupo \mathbb{Z}_{q^h-1} con q elementos.

A la construcción del conjunto de Sidon del teorema anterior se le conoce

como la construcción de Bose-Chowla.

Teorema 2.6. Sea \mathcal{B} un conjunto de Sidon tipo Bose-Chowla en el grupo \mathbb{Z}_{q^3-1} , y considere el conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{B} \pmod{q^2 + q + 1}$. Entonces $\mathcal{S} \cup \{0\}$ es un conjunto de Sidon en el grupo \mathbb{Z}_{q^2+q+1} con $q + 1$ elementos.

Por ejemplo, para $q = 5$ y $h = 3$ se tiene $\mathcal{B} = \{1, 11, 19, 26, 28\}$ es un conjunto de Sidon tipo Bose-Chowla en \mathbb{Z}_{q^3-1} . Por tanto, $\mathcal{S} = \{0, 1, 11, 19, 26, 28\}$ es un conjunto de Sidon tipo Singer en el grupo \mathbb{Z}_{31} . En la Figura 2.7 se muestra el grafo $G_{\mathcal{S}}$ asociado al conjunto \mathcal{S} en el cual se han coloreado las aristas de acuerdo con los elementos de \mathcal{S} . Note que cada conjunto de aristas de un solo color forman un conjunto independiente de aristas, lo cual sucede en general para este tipo de grafos. Por otro lado, $G_{\mathcal{S}}$ es un Deza grafo con parámetros $(31, 6, 0, 1)$.

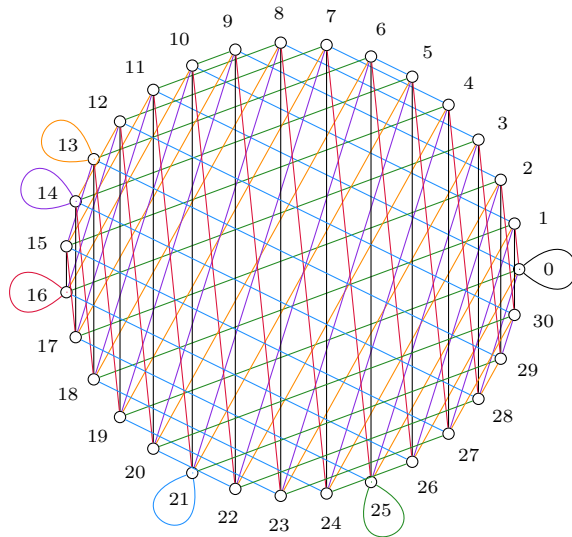


Figura 2.7: Grafo asociado conjunto Singer

Considere el grafo $G_{\mathcal{S}}$ asociado a un conjunto de Sidon tipo Singer \mathcal{S} . Entonces si se suprimen los bucles del grafo, se obtiene que el número de

aristas que no son bucles es igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{u \in V \\ u \in P}} \deg(u) + \sum_{\substack{u \in V \\ u \notin P}} \deg(u) \right) = \frac{1}{2} ((|S|-1)|P| + |S|(N-|P|)),$$

donde P es el conjunto de vértices sobre los cuales existe un bucle; en otras palabras, $u \in P$ si $u + u \in S$. Se puede probar que $|P| = q + 1$ y, por tanto, este número de aristas es igual a

$$\frac{1}{2}(q(q+1) + (q+1)(q^2 + q + 1 - q - 1)) = \frac{1}{2}q(q+1)^2.$$

2.4.2. Construcción 2

Sean $h > 2$ un entero y \mathbb{F}_q un campo finito de característica $p > h$. Entonces Ruiz and Trujillo (2016) construyen un conjunto B_h definido por

$$S_h = \{(x, x^2, \dots, x^h) : x \in \mathbb{F}_q\}.$$

Un conjunto B_h es aquel en el que todas las sumas de h elementos del conjunto son distintas. Considere el grafo G_h definido por $V(G_h) = \mathbb{F}_q^h$, y dos vértices $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_h)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_h) \in V(G_h)$ son adyacentes si

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_h) + (b_1, b_2, \dots, b_h) \in S_h.$$

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_h) \in N(\mathbf{a}) \cap N(\mathbf{b})$. Entonces existen $c, d \in \mathbb{F}_q$, tales que para todo $1 \leq i \leq h$ se cumple

$$\begin{aligned} x_i + a_i &= c^i \\ x_i + b_i &= d^i. \end{aligned}$$

Esto implica que $c^i - a_i = d^i - b_i$ para todo i , con lo cual se obtiene que

$$(c - d, c^2 - d^2, \dots, c^h - d^h) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_h - b_h).$$

Por tanto, cuando todas las diferencias de dos elementos diferentes del conjunto S_h son distintas se obtiene que

$$|N(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq 1,$$

y, en consecuencia, G_h es un Deza grafo de parámetros $(q^h, q, 0, 1)$.

Por ejemplo, para $q = 5$ y $h = 3$ el conjunto

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(x, x^2, x^3) : x \in \mathbb{F}_5\} \\ &= \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 4, 3), (3, 4, 2), (4, 1, 4)\} \end{aligned}$$

es un conjunto B_3 , y G_3 es un Deza grafo con parámetros $(125, 5, 0, 1)$. Dado que un conjunto B_3 es también un conjunto B_2 se tiene que este tipo de grafos son también libres de ciclos de longitud 4.

2.4.3. Construcción 3

Sea \mathbb{F}_q un campo finito con $q = p^n$ una potencia prima, y considere una matriz simétrica M de tamaño $d \times d$ sobre \mathbb{F}_q , tal que $\det M \neq 0$. Para λ un elemento no cero del campo se considera la función

$$f_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{y} - \lambda$$

en la cual $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^d$. Sea G_λ el grafo en el que $V(G_\lambda) = \mathbb{F}_q^d \setminus \{(0, 0, \dots, 0)^T\}$ y dos vértices \mathbf{a}, \mathbf{b} son adyacentes si

$$f_\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Note que si $\mathbf{y} \in V(G_\lambda)$, entonces la ecuación $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene solución única, puesto que $\det M \neq 0$. Esto implica que la igualdad

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y} = \lambda$$

tiene q^{d-1} soluciones. Por tanto, la ecuación

$$f_\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0.$$

tiene q^{d-1} soluciones y así el grafo G_λ es q^{d-1} -regular. Ahora, para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(G_\lambda)$ distintos se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0 \\ f_\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

con $\mathbf{x} \in V(G_\lambda)$. Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}^T = \lambda \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T = \lambda \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Note que en el Sistema 2.8 no puede suceder que $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ con $k \neq 0, 1$, ya que en caso contrario se obtiene que

$$\begin{aligned} k\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T &= \lambda \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T &= \lambda \end{aligned}$$

y así $\lambda = k\lambda$ de la que se deduce que $k = 1$. Por tanto, al considerar $\mathbf{a} \neq k\mathbf{b}$ se tiene que el Sistema 2.8 posee $d - 2$ variables libres y 2 variables básicas, lo cual conlleva a afirmar que su número de soluciones es q^{d-2} . En consecuencia,

$$|N(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = q^{d-2}.$$

Por tanto, el grafo G_λ es un Deza grafo con parámetros $(q^d - 1, q^{d-1}, 0, q^{d-2})$.

Por ejemplo, si se considera $q = 5$, $\lambda = 1$ y

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces $|V(G_1)| = 24$ y los vértices $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in V(G_1)$ son adyacentes si

$$\mathbf{a}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + 2a_2 b_2 = 1.$$

En la grafica 2.8 se muestra la representación geométrica de G_1 . Note que

este es un Deza grafo con parámetros (24, 5, 0, 1).

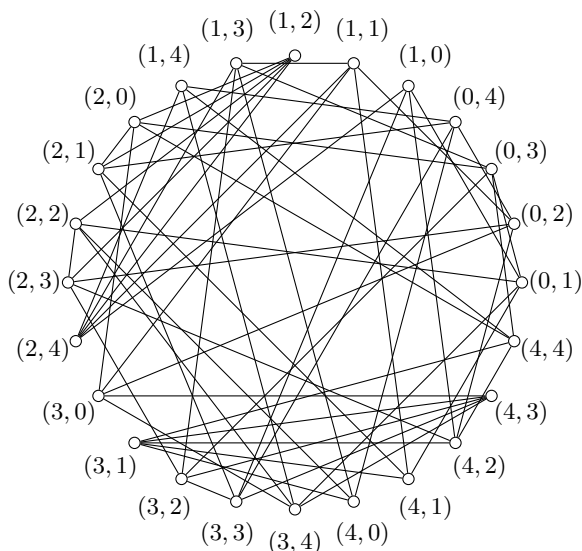


Figura 2.8: Grafo asociado a forma bilineal

2.4.4. Construcción 4

Definición 2.6. Sea X un grupo multiplicativo de orden n . Un conjunto diferencia D con parámetros (n, k, λ) es un subconjunto de k elementos del grupo X , tal que cada elemento $x \neq 1$ del grupo tiene exactamente λ representaciones $x = d_1 d_2^{-1}$ con $d_1, d_2 \in D$.

Dados X un grupo finito de orden n y D un conjunto diferencia de parámetros (n, k, λ) se le asocia el dígrafo $\Gamma(D, X)$, el cual tiene por conjunto de vértices a $V(\Gamma) = X$ y $(u, v) \in R(\Gamma)$ si $uv^{-1} \in D$. Esto implica que existe $d \in D$, para el cual $v = d^{-1}u$. Por tanto, para $u \in V(\Gamma)$ se cumple que

$$N^+(u) = \{d^{-1}u : d \in D\} \text{ y } N^-(u) = \{du : d \in D\}.$$

En consecuencia, se tiene que el dígrafo $\Gamma(D, X)$ es k -regular puesto que

$$k = |N^+(u)| = \deg^+(u) = \deg^-(u) = |N^-(u)|.$$

Además, observe que para todo $u, v \in V(\Gamma)$ distintos se tiene que el elemento uv^{-1} tiene λ representaciones de la forma $uv^{-1} = d_1d_2^{-1}$ con $d_1, d_2 \in D$. Esto implica que $d_1^{-1}u = d_2^{-1}v$, y así

$$|N^+(u, v)| = \begin{cases} \lambda, & \text{si } u \neq v \\ k, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Por tanto, $\Gamma(D, X)$ es un Deza dígrafo con parámetros (n, k, λ, λ) . Por ejemplo, el subconjunto $D = \{1, 2, 4\}$ del grupo abeliano \mathbb{Z}_7 es un conjunto diferencia con parámetros $(7, 3, 1)$. En la Figura 2.9 se muestra el grafo asociado $\Gamma(D, \mathbb{Z}_7)$, el cual es un Deza dígrafo con parámetros $(7, 3, 1, 1)$.

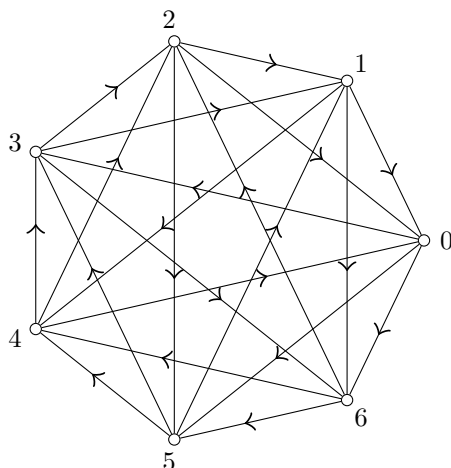


Figura 2.9: Dígrafo asociado a conjunto diferencia

Existe un objeto combinatorio que generaliza a los conjuntos diferencia, dado en la siguiente definición.

Definición 2.7. Sea X un grupo multiplicativo de orden n . Un conjunto casi-diferencia D con parámetros (n, k, λ, t) es un subconjunto de k elementos del grupo X , tal que el multiconjunto

$$\mathcal{D} = \{d_1d_2^{-1} : d_1, d_2 \in D\}$$

contiene t elementos del grupo distintos de la identidad de multiplicidad

λ cada uno, y los restantes (distintos de la identidad) tienen cada uno multiplicidad $\lambda + 1$.

Para un conjunto casi-diferencia D de parámetros (n, k, λ, t) se aplica la construcción utilizada en el caso de un conjunto diferencia, se obtiene el dígrafo $\Gamma(D, X)$, el cual es un dígrafo de parámetros $(n, k, \lambda, \lambda + 1)$. Observe que el Teorema 2.4 implica que

$$t = (\lambda + 1)(n - 1) - k(k - 1).$$

Por ejemplo, el subconjunto $D = \{0, 1, 3, 4\}$ del grupo \mathbb{Z}_9 es un conjunto casi-diferencia de parámetros $(9, 4, 1, 2)$. Su grafo asociado se muestra en la Figura 2.10, el cual es un Deza dígrafo de parámetros $(9, 4, 1, 2)$.

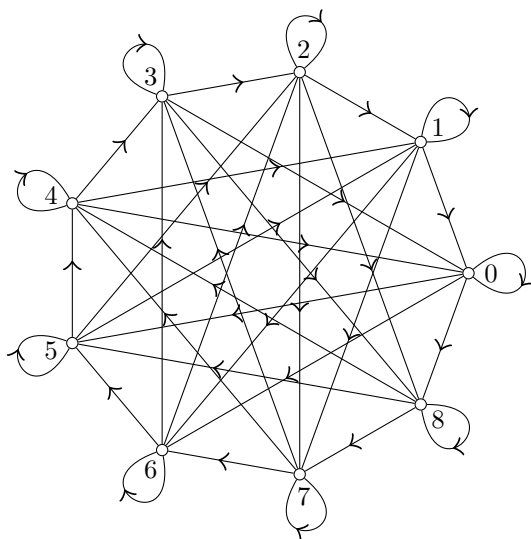


Figura 2.10: Dígrafo asociado a conjunto casi-diferencia

Note que en los casos particulares $t = 0$ o $t = n - 1$ se obtiene que un conjunto casi-diferencia es un conjunto diferencia. Si se considera un conjunto casi-diferencia D en el grupo X de parámetros (n, k, λ, t) entonces con la misma construcción anterior del grafo $\Gamma(D, X)$ se obtiene un Deza dígrafo de parámetros $(n, k, \lambda, \lambda + 1)$.

Por otro lado, observe que de acuerdo con la Proposición 2.1, si D es un conjunto casi diferencia definido en un grupo abeliano X con parámetros (n, k, λ) , entonces su complemento $\bar{D} = X \setminus D$ es nuevamente casi-diferencia de parámetros $(n, n - k, n - 2k + \lambda, t)$.

2.5 Problemas de investigación

Según los Teoremas 2.2 y 2.4, la existencia de Deza grafos (o dígrafos) con parámetros (n, k, b, b) depende de la relación

$$k(k - 1) = b(n - 1).$$

Esta igualdad implica que

$$k^2 - k - b(n - 1) = 0$$

y así

$$k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b(n - 1)}}{2}.$$

De la que se obtiene la ecuación

$$x^2 + 4b - 1 = 4nb$$

con $x = 2k - 1$. En particular, si se considera $n = p^m$ y $b = q^m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ se obtiene la ecuación diofántica

$$x^2 + 4q^m - 1 = 4(pq)^m. \quad (2.9)$$

En consecuencia, la solubilidad de la Ecuación diofántica 2.9 es una condición necesaria en la existencia de Deza grafos o dígrafos.

Luca et al. (2009) estudiaron las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + C = 4y^n$ bajo las condiciones que $C \equiv 3 \pmod{4}$, $1 \leq C \leq 100$ y x, y son primos relativos. Sin embargo, de acuerdo con el autor, hasta el momento se desconoce información acerca de la solubilidad de la ecuación diofántica en general.

Tal como sucede con la existencia de Deza grafos (o dígrafos), este es un problema de investigación en el caso de los conjuntos diferencia o casi-diferencia. En distintas investigaciones se estudian valores de los parámetros n , k y λ para los cuales no existe un conjunto diferencia. Por ejemplo, Arasu (1986) garantiza la no existencia de conjuntos diferencia en grupos abelianos con parámetros $(81, 16, 3)$; por otro lado, Hufford (2015) prueba la no existencia de conjuntos diferencia en grupos abelianos con parámetros $(261, 105, 42)$ y $(231, 70, 21)$. Benavides and Trujillo (2025) prueban la no existencia de grafos fuertemente regulares y Deza dígrafos con parámetros $(p^m, k, 2^m, 2^m)$ con $m = 3, 4$ y p cualquier primo impar, como una consecuencia de su resultado garantizan la no existencia de conjuntos diferencia con parámetros $(p^m, k, 2^m)$.

En caso de que el grupo X sea abeliano y $\lambda = 1$, al conjunto D se le denomina un conjunto diferencia plano. En este sentido y tomando $n = p^m$, Daza et al. (2022) prueban la no existencia de conjuntos diferencia con parámetros $(p^m, k, 1)$. Por lo cual, se tiene una de las famosas conjeturas denominada de la potencia prima, la cual afirma que no existen conjuntos diferencia planos cuyo orden del grupo no sea potencia de un primo. Note que la construcción de Singer, presentada en la Subsección 2.4.1, garantiza la existencia de este tipo de conjuntos diferencia. Sin embargo, hasta el momento no se cuenta con una respuesta a la conjetura. Actualmente, se conoce que la conjetura es cierta para conjuntos diferencia en grupos cíclicos de orden menor o igual a 1.600, hecho probado por Evans and Mann (1951). Posteriormente, Gordon (1994) extendió este resultado para grupos cíclicos de orden a lo más 2.000.000.

Finalmente, otro de los problemas de investigación es el cálculo del número de Turán $ex(n, H)$, el cual denota el número máximo de aristas que un grafo sobre n vértices puede tener sin que contenga un subgrafo isomorfo a H . Este número ha sido determinado para algunos valores de n , por ejemplo Clapham et al. (1989) mediante una búsqueda computacional calculó $ex(n, C_4)$ para $n \leq 21$, luego Rowlinson and Yuansheg (1992) extendieron esta búsqueda para $n \leq 31$. Aquellos grafos asociados a conjuntos de Sidon permiten determinar cotas inferiores al número de Turán $ex(n, C_4)$, en el

caso que $n = q^2 + q + 1$ con q una potencia prima Füredi (1983) probó que $\text{ex}(q^2 + q + 1, C_4) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2$. Note que el grafo asociado a la construcción de Singer tiene $\frac{1}{2}q(q+1)^2$ aristas, por lo cual

$$\text{ex}(q^2 + q + 1, C_4) = \frac{1}{2}q(q+1)^2.$$

Esto implica que el grafo asociado al conjunto de Sidon tipo Singer es extremal.



Capítulo 3

Problemas de Cauchy para la ecuación Rosenau-Kawahara-RLW

Ricardo Córdoba Gómez
rcordoba@udenar.edu.co

Resumen

En esta investigación se estudia el problema de Cauchy y el problema de Cauchy periódico, asociados con la ecuación Rosenau–Kawahara-RLW que modela la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud. Para tal propósito se usa un argumento contractivo basado en el conocido teorema de punto fijo de Banach, combinado con estimativos lineales y no lineales apropiados.

3.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de evolución no solo surgen de las matemáticas, también de otras ramas de la ciencia como la física, la mecánica y la ciencia de los materiales. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler surgen de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de reacción-difusión no lineales surgen de las ciencias biológicas y del estudio

del fenómeno de la transferencia de calor, las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon y las ecuaciones no lineales de Schrödinger que nacen de la mecánica cuántica, son ecuaciones especiales de este tipo. En particular, las ecuaciones diferenciales parciales no lineales son usadas para modelar la evolución de ondas de agua largas con pequeña amplitud. Es conocido que estas ecuaciones no lineales relacionadas con modelos de ondas de agua son derivadas del *problema completo de ondas de agua* (full problem of water waves) mediante un proceso de aproximación, con la imposición de algunas restricciones para los parámetros que afectan la propagación de las ondas.

El ingeniero John Scott Russell (1808-1882), al realizar experimentos para determinar un diseño más eficiente de botes para viajar a lo largo de un canal, descubrió el fenómeno de onda solitaria u onda viajera. J. S. Russel observó en la superficie de un canal de Edinburgh-Glasgow la propagación de una ondulación que viajaba aparentemente a una velocidad constante, sin cambiar su forma y que su trayectoria describía una curva suave. La siguió por varios kilómetros y notó que esta onda no parecía debilitarse al remontar la corriente. Desde entonces el estudio de la evolución de la superficie generada por una onda ha llamado la atención de matemáticos, físicos e ingenieros.

Hoy en día se conocen muchos modelos unidimensionales de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas en un fluido, en términos de la elevación superficial de la onda bajo diferentes consideraciones, entre las cuales se destaca la ecuación KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

y la ecuación BBM, deducida por Benjamin et al. (1972),

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0,$$

además, la ecuación Camassa-Holm derivada por Bona and Tzvetkov (2009)

$$u_t - u_{xxt} + u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

y la ecuación de Boussinesq (1872)

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2 + u_{xx})_{xx} = 0.$$

En esta investigación centra la atención en el modelo Rosenau–Kawahara-RLW,

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x - \gamma u_{xxt} + \epsilon u_{xxx} + \lambda u_{xxxxt} + \mu u_{xxxxx} = 0, \quad (3.1)$$

el cual se obtiene acoplado la ecuación Rosenau-RLW, estudiada por Pan and Zhang (2012), Xintian Pan and Zhang (2013) y Atouani and Omrani (2013),

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x - \gamma u_{xxt} + \lambda u_{xxxxt} = 0,$$

que describe la evolución de ondas no lineales y la ecuación Rosenau–Kawahara, la cual ha sido estudiada por Zuo (2009),

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x + \epsilon u_{xxx} + \lambda u_{xxxxt} + \mu u_{xxxxx} = 0,$$

que modela la evolución de ondas de agua, al considerar términos adicionales a los de la ecuación KdV, lo que permiten una mejor descripción del fenómeno. Aquí, α , β , γ , ϵ , λ y μ son parámetros relacionados con las condiciones físicas del modelo.

Ahora bien, cuando se estudia una ecuación diferencial relacionada con un modelo físico es importante mostrar la existencia de soluciones especiales, como las denominadas soluciones de onda viajera (caso continuo y periódico), así como es importante demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado.

En este sentido, en el artículo de Zuo (2015), usando los métodos de Sech y Tanh Ansatz, se probó la existencia de soluciones de onda viajera para la ecuación (3.1). Exactamente se demostró para el modelo (3.1) la existencia de soluciones de la forma

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^p \xi,$$

donde $\xi = k(x - ct)$, A es la amplitud de la onda viajera, k es el perfil de la onda, c representa la velocidad de la onda y el exponente p es una constante apropiada. En los trabajos de He and Pan (2015) y Ak et al. (2018), se han realizado diferentes estudios numéricos relacionados con las soluciones del modelo Rosenau–Kawahara-RLW.

Al respecto esta investigación considera el estudio del problema de Cauchy y el problema de Cauchy periódico para la ecuación (3.1). En la primera parte de este trabajo se estudia la existencia y la unicidad de la solución local del problema de valor inicial asociado a la ecuación

$$u_t + \alpha u_x + \beta uu_x - \gamma u_{xxt} + \epsilon u_{xxx} + \lambda u_{xxxxt} + \mu u_{xxxxx} = 0, \quad (3.2)$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.3)$$

Específicamente se considera u_0 en el espacio de Sobolev usual de orden s , $H^s = H^s(\mathbb{R})$, definido con respecto a la norma

$$\|w\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

donde \widehat{w} es la transformada de Fourier de w en la variable espacial x y ξ es la variable en el espacio de frecuencia relacionado con la variable x ,

$$\widehat{w}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} w(x) dx.$$

Note que la ecuación (3.2) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u + (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} (\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u + \frac{\beta}{2} (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x (u^2) = 0,$$

en la cual el operador $(I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1}$ le puede dar sentido, vía transformada de Fourier. Entonces la ecuación en consideración se puede escribir de la forma

$$\partial_t u + M(u) + F(u) = 0, \quad (3.4)$$

en la que M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u, \quad A(u) = (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)(u),$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x (u^2).$$

Es conocido del Principio de Duhamel que si $S(t)(u_0)$ es la solución en t del problema lineal asociado con (3.4),

$$\begin{cases} \partial_t u + M(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

entonces el problema de Cauchy asociado con (3.4) con la condición inicial (3.3) puede reformularse por medio de la ecuación integral

$$u(t) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau) F(u(\tau)) d\tau, \quad (3.6)$$

en la que $S(t)$ es el semigrupo asociado con el problema lineal (3.5). Ahora, suponga que existen dos espacios de Banach $Y \hookrightarrow X$, en el cual la inclusión es continua, tales que M y F son funciones continuas. Suponga además que para cada $u_0 \in Y$ existe un número real $T > 0$ y una única función $u \in C([0, T], Y)$ que satisface la ecuación integral (3.6). Adicionalmente, suponga que la aplicación dato solución $u_0 \rightarrow u$ es continua de Y en $C([0, T], Y)$. En este caso se dice que el problema de Cauchy posee *solución local* en Y . Si T puede elegirse arbitrariamente grande, el problema de Cauchy se dice que posee *solución global* en Y . Recuerde que si E es un espacio de Banach, entonces $C([0, T], E)$ denota el espacio de funciones continuas definidas en $[0, T]$ con valores en E .

En la presente investigación se muestra la existencia de soluciones locales para el modelo (3.4) con la condición inicial (3.3) en un espacio de Banach de funciones, para esto note que si se define, en un espacio adecuado, el

operador Φ :

$$\Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau)) d\tau,$$

entonces mostrar la existencia de soluciones para la ecuación integral (3.6) es equivalente a mostrar la existencia de un punto fijo para el operador Ψ .

En la segunda parte de esta investigación se considera el estudio del problema de Cauchy periódico para la ecuación Rosenau–Kawahara-RLW. En particular, se estudia la existencia y la unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación (3.1) con la condición inicial,

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3.7}$$

en la que u_0 es una función periódica, que por comodidad se considera de periodo 2π . Específicamente se considera u_0 en el espacio de Sobolev periódico de orden s , $H_{per}^s[-\pi, \pi]$, definido con respecto a la norma

$$\|f\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2},$$

donde \widehat{f} es el coeficiente de Fourier de f .

Note que la ecuación (3.2) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u + (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} (\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u + \frac{\beta}{2} (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x (u^2) = 0,$$

donde el operador $(I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1}$ se le puede dar sentido vía series de Fourier para funciones periódicas. Entonces la ecuación en consideración se puede escribir de la forma

$$\partial_t u + M(u) + F(u) = 0, \tag{3.8}$$

donde M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u, \quad A(u) = (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)(u),$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(u^2).$$

Por el conocido del Principio de Duhamel se tiene que si $S(t)(u_0)$ es la solución en t del problema lineal asociado con (3.8),

$$\begin{cases} \partial_t u + M(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.9)$$

entonces el problema de Cauchy asociado con (3.8) con la condición inicial (3.7) puede reformularse por medio de la ecuación integral

$$u(t) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau) F(u(\tau)) d\tau, \quad (3.10)$$

en la que $S(t)$ es el semigrupo asociado con el problema lineal (3.9). Ahora, suponga que existen dos espacios de Banach $Y \hookrightarrow X$, donde la inclusión es continua, tales que M y F son funciones continuas de Y en X . Asuma además que para cada $u_0 \in Y$ existe un número real $T > 0$ y una única función

$$u \in C([0, T], Y)$$

que satisface la ecuación integral (3.10). Adicionalmente, suponga que la aplicación dato solución $u_0 \rightarrow u$ es continua de Y en $C([0, T], Y)$. En este caso se dice que el problema de Cauchy posee *solución local* en Y . Si T puede elegirse arbitrariamente grande, el problema de Cauchy expresa que posee *solución global* en Y .

En este trabajo se prueba la existencia de soluciones locales para el problema de Cauchy asociado con (3.8) con la condición inicial (3.7) en un espacio de Banach de funciones periódicas. Para esto note que si se define, en un espacio adecuado, el operador Ψ :

$$\Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau) F(u(\tau)) d\tau,$$

entonces mostrar la existencia de soluciones para la ecuación integral (3.10) es equivalente a demostrar la existencia de un punto fijo para el operador Ψ .

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente forma. En la Sección 3.2, se muestra que el problema de Cauchy asociado a la ecuación (3.4) con la condición inicial (3.3) posee soluciones locales. Para tal propósito, se usa un estimativo bilineal en específico llamado *Ley multiplicativa de Sobolev*, combinado con un argumento de punto fijo y estimativos lineales apropiados. En la Sección 3.3 se demuestra que el problema de Cauchy periódico, asociado a la ecuación (3.8) con la condición inicial (3.7), tiene soluciones locales de tipo periódico. Para esto, se utiliza un argumento de punto fijo combinado con estimativos lineales apropiados y el hecho de que el espacio de Sobolev periódico $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ es un álgebra para $s > 1/2$.

3.2 El problema de Cauchy

Esta sección se estudia el problema de Cauchy asociado con la ecuación Rosenau- Kawahara-RLW,

$$\partial_t u + (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} (\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u + \frac{\beta}{2} (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x (u^2) = 0, \quad (3.11)$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.12)$$

donde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$.

En esta investigación se demuestra que el problema de Cauchy (3.11)-(3.12) posee soluciones locales en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 0$. Para ello se utilizan algunos estimativos lineales, algunos estimativos no lineales y el Teorema de punto fijo de Banach que se enuncia y demuestra a continuación.

Definición 3.1. Sea X un espacio normado. Un operador $\Phi : X \rightarrow X$, se

dice una *contracción* si existe k , $0 < k < 1$, tal que

$$\|\Phi u - \Phi v\| \leq k\|u - v\|, \quad \text{para todo } u, v \in X.$$

Teorema 3.1. Si X un espacio de Banach y $\Phi : X \rightarrow X$ una contracción, entonces Φ tiene un único *punto fijo*, es decir, existe un único $u \in X$, tal que

$$\Phi u = u.$$

Demostración. Sea $u_0 \in X$ un punto arbitrario. Defina u_n por

$$u_{n+1} = \Phi u_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

y pruebe que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X . En efecto, como Φ es una contracción, existe $0 < k < 1$, tal que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &= \|\Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\| \\ &= k\|\Phi(u_{n-1}) - \Phi(u_{n-2})\| \leq k^2\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq k^n\|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la desigualdad triangular y la fórmula de la suma para la serie geométrica, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\ &\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \dots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\| \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1})\|u_1 - u_0\| \\ &\leq k^n(1 + k + k^2 + \dots + k^{m-1} + \dots)\|u_1 - u_0\| \\ &= k^n(1 - k)^{-1}\|u_1 - u_0\|, \end{aligned}$$

de donde,

$$\|u_n - u_{n+m}\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X ; además, como X es un espacio de Banach, existe $u \in X$, tal que

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Ahora se debe probar que u es un punto fijo de Φ . Como

$$\|\Phi u_n - \Phi u\| \leq k \|u_n - u\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = \Phi u.$$

Luego,

$$\Phi u = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = u.$$

Por otra parte, si u y u' son puntos fijos de Φ , entonces

$$\|u - u'\| = \|\Phi u - \Phi u'\| \leq k \|u - u'\|,$$

y como $0 < k < 1$, se concluye que $\|u - u'\| = 0$, de donde $u = u'$. Por tanto, se ha demostrado que Φ tiene un único punto fijo en X . \square

Ahora, note que si se define el operador $A : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^{s-4}(\mathbb{R})$ con $s \in \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$Au = (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)u,$$

entonces se tiene que

$$\widehat{Au}(\xi) = (1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4) \widehat{u}(\xi).$$

Por tanto,

$$Au = \int_{\mathbb{R}} \widehat{Au}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4) \widehat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Por consiguiente, si se define el operador $A^{-1} : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^{s+4}(\mathbb{R})$ con $s \in \mathbb{R}$, por medio de la fórmula

$$A^{-1}u = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{u}(\xi) e^{ix\xi}}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4} d\xi,$$

entonces

$$\widehat{A^{-1}u}(\xi) = \frac{\widehat{u}(\xi)}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4}.$$

Así la ecuación (3.11) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u + M(u) + F(u) = 0, \quad (3.13)$$

en la cual M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x (u^2).$$

A continuación se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2. $M : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R})$ es un operador lineal acotado para $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $u \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(A^{-1} \partial_x) u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s-1} |\widehat{A^{-1} \partial_x u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4)^2} |\widehat{\partial_x u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2 (1 + |\xi|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4)^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_1(\gamma, \lambda) \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_1(\gamma, \lambda) \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que

$$\begin{aligned} \|(A^{-1} \partial_x^3) u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s-1} |\widehat{A^{-1} \partial_x^3 u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4)^2} |\widehat{\partial_x^3 u}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^6(1+|\xi|^2)^{s-1}}{(1+\gamma\xi^2+\lambda\xi^4)^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq C_2(\gamma, \lambda) \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= C_2(\gamma, \lambda) \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.
 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
 \|(A^{-1}\partial_x^5)u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\widehat{A^{-1}\partial_x^5 u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|^2)^{s-1}}{(1+\gamma\xi^2+\lambda\xi^4)^2} |\widehat{\partial_x^5 u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{10}(1+|\xi|^2)^{s-1}}{(1+\gamma\xi^2+\lambda\xi^4)^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq C_3(\gamma, \lambda) \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= C_3(\gamma, \lambda) \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.
 \end{aligned}$$

En las cuentas anteriores, $C_j(\gamma, \lambda)$ es una constante positiva que depende de γ y λ , $j = 1, 2, 3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \|M(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \|A^{-1}(\alpha\partial_x + \epsilon\partial_x^3 + \mu\partial_x^5)u\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\leq C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) \left(\|(A^{-1}\partial_x)u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|(A^{-1}\partial_x^3)u\|_{H^s(\mathbb{R})} \right. \\
 &\quad \left. + \|(A^{-1}\partial_x^5)u\|_{H^s(\mathbb{R})} \right) \\
 &\leq C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) \|u\|_{H^s(\mathbb{R})},
 \end{aligned}$$

donde $C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) > 0$. Entonces de lo anterior se ha demostrado que M es un operador lineal acotado. \square

Enseguida se determina la solución u del siguiente sistema lineal asociado a (3.13),

$$\begin{cases} \partial_t u + M(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.14)$$

Tomando transformada de Fourier en la primera ecuación del sistema de

ecuaciones (3.14) con respecto a la variable espacial x , se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_t u}(\xi, t) &= -\frac{\alpha \widehat{\partial_x u}(\xi, t) + \epsilon \widehat{\partial_x^3 u}(\xi, t) + \mu \widehat{\partial_x^5 u}(\xi, t)}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4} \\ &= -\frac{i\xi(\alpha - \epsilon \xi^2 + \mu \xi^4)}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4} \widehat{u}(\xi, t).\end{aligned}$$

Además, usando la regla de Leibniz puesto que tanto $u(x, t)$ como su derivada parcial $\partial_t u$ son continuas en x y t , es posible ver que

$$(\partial_t \widehat{u})(\xi, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t) e^{-i\xi x} dx = \widehat{\partial_t u}(\xi, t).$$

Por tanto

$$(\partial_t \widehat{u})(\xi, t) = -\frac{i\xi(\alpha - \epsilon \xi^2 + \mu \xi^4)}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4} \widehat{u}(\xi, t), \quad \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi).$$

Lo anterior es una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 tipo $z' + cz = 0$, en consecuencia

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-i\phi(\xi)t},$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(\xi) = \frac{\xi(\alpha - \epsilon \xi^2 + \mu \xi^4)}{1 + \gamma \xi^2 + \lambda \xi^4}.$$

Así,

$$u(t) = S(t)(u_0),$$

donde

$$S(t)(u) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi) e^{-i\phi(\xi)t} e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.15)$$

Por tanto, si u es solución del sistema (3.14) con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

entonces $u(t) = S(t)(u_0)$, donde S está definido por (3.15). Inversamente, a través de algunos cálculos, tales como calcular las diferentes derivadas parciales a $u(x, t)$ con respecto a x o t y reemplazar, dichos resultados en el sistema (3.14), se puede ver que si $u(t) = S(t)(u_0)$, entonces u es

solución del sistema (3.14). Por consiguiente se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3. La única solución del problema (3.14) está dada por

$$u(t) = S(t)(u_0),$$

donde $S(t)(u)$ está definida por

$$S(t)(u) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi) e^{-i\phi(\xi)t} e^{i\xi x} d\xi$$

y la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(\xi) = \frac{\xi(\alpha - \epsilon\xi^2 + \mu\xi^4)}{1 + \gamma\xi^2 + \lambda\xi^4}.$$

A continuación se presentan algunos estimativos. El operador $S(t)$ cumple con la siguiente propiedad.

Lema 3.1. Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ es un operador lineal acotado de $H^s(\mathbb{R})$ en sí mismo. Más aún, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\|S(t)(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} \|S(t)(u)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{S(t)(u)}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi) e^{-i\phi(\xi)t}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \quad \square \end{aligned}$$

A continuación se establece un estimativo para el operador F . En la demostración de tal resultado se da un estimativo bilineal denominado *Ley Multiplicativa de Sobolev*. No se presenta la prueba de este resultado, debido a que se deben usar herramientas avanzadas del análisis funcional, y el estudio de este tema está fuera de los objetivos de la presente investigación; sin embargo la prueba se puede consultar en el artículo de Tao (2000).

Teorema 3.4. (Ley Multiplicativa de Sobolev) Sean $s_1, s_2, s \in \mathbb{R}$, tales que

$$s_1 + s_2 \geq 0, \quad s \leq s_1, s_2, \quad s < s_1 + s_2 - \frac{1}{2}$$

ó

$$s_1 + s_2 > 0, \quad s < s_1, s_2, \quad s \leq s_1 + s_2 - \frac{1}{2},$$

entonces existe $C > 0$, tal que

$$\|\phi\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\|\phi\|_{H^{s_1}(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{H^{s_2}(\mathbb{R})}.$$

Lema 3.2. Sea $s \geq 0$, entonces existen constantes $K_1(\beta, \gamma, \lambda), K_2(\beta, \gamma, \lambda) > 0$, tales que

1. $\|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_1\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2$.
2. $\|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2\|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})}(\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})})$.

Demostración. De la definición del espacio $H^s(\mathbb{R})$ se puede ver que

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \frac{|\beta|}{2} \|A^{-1}\partial_x(u^2)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |A^{-1}\widehat{\partial_x(u^2)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + \gamma\xi^2 + \lambda\xi^4)^2} |\widehat{\partial_x(u^2)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^s \xi^2}{(1 + \gamma\xi^2 + \lambda\xi^4)^2} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s-3} \frac{(1 + |\xi|^2)^3 \xi^2}{(1 + \gamma\xi^2 + \lambda\xi^4)^2} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K(\beta, \gamma, \lambda) \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s-3} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &= K(\beta, \gamma, \lambda) \|u^2\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Entonces usando el estimativo del Teorema 3.4 con $s_1 = s$ y $s_2 = s$, se

tiene que para $s \geq 0$,

$$\|u^2\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})} = \|uu\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})} \leq K\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Así,

$$\|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K\|u^2\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})} \leq K_1(\beta, \gamma, \lambda)\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.$$

Finalmente, observe que

$$F(u) - F(v) = \frac{\beta}{2}A^{-1}\partial_x(u^2) - \frac{\beta}{2}A^{-1}\partial_x(v^2) = \frac{\beta}{2}A^{-1}\partial_x(u^2 - v^2).$$

Por tanto, usando argumentos similares a los anteriores, utilizando de nuevo el Teorema 3.4 con $s_1 = s$ y $s_2 = s$ se tiene que para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \frac{|\beta|}{2}\|A^{-1}\partial_x(u^2 - v^2)\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq K(\beta, \gamma, \lambda)\|u^2 - v^2\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})} \\ &= K(\beta, \gamma, \lambda)\|(u - v)(u + v)\|_{H^{s-3}(\mathbb{R})} \\ &\leq K_2(\beta, \gamma, \lambda)\|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})}\|u + v\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq K_2(\beta, \gamma, \lambda)\|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} \left(\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})} \right). \end{aligned}$$

Luego, existe una constante $K_2(\beta, \gamma, \lambda) > 0$, tal que

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2(\beta, \gamma, \lambda)\|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} \left(\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})} \right).$$

□

A continuación se demuestra el primer resultado principal de esta investigación.

Teorema 3.5. Suponga $s \geq 0$, entonces para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T > 0$, que depende solamente de $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$, tal que el problema (3.11)-(3.12) tiene una única solución que satisface

$$u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})).$$

Además, para todo $0 < T' < T$ existe una vecindad \mathbb{V} de u_0 en $H^s(\mathbb{R})$, tal que la correspondencia $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a \tilde{u}_0 la solución $\tilde{u}(\cdot)$ de la ecuación (3.11) con la condición inicial \tilde{u}_0 es una función Lipschitz de \mathbb{V} en $C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$.

Demostración. Dado $T > 0$, se define el espacio

$$X^s(T) = C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$$

equipado con la norma dada por

$$\|u\|_{X^s(T)} = \max_{t \in [0, T]} \{\|u(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{R})}\}.$$

Entonces, dado que $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach, se sigue que $X^s(T)$ también es un espacio de Banach. Ahora, sea $B_R(T)$ la bola cerrada de radio R centrada en el origen en el espacio $X^s(T)$, esto es

$$B_R(T) = \{u \in X^s(T) : \|u\|_{X^s(T)} \leq R\}.$$

Fijado $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, se define el operador $\Psi(u(t))$, con $u \in X^s(T)$, mediante la fórmula

$$\Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau)) d\tau.$$

Se debe mostrar que la correspondencia $u(t) \rightarrow \Psi(u(t))$ envía a $B_R(T)$ en sí mismo y es una contracción si R y T son escogidos adecuadamente. En efecto, si $t \in [0, T]$ y $u \in B_R(T)$, entonces usando el Lema 3.1 y el Lema 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \|S(t)(u_0)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \left\| \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau)) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \int_0^t \|S(t - \tau)F(u(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + K \int_0^t \|F(u(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1 \int_0^t \|u(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 d\tau \\
 &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1 T \|u(t)\|_{X^s(T)}^2 \\
 &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1 TR^2.
 \end{aligned}$$

Así,

$$\|\Psi(u(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1 TR^2.$$

Escogiendo $R = 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$ y $T > 0$, tal que

$$4KK_1 T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 1, \tag{3.16}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(u(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} (1 + 4KK_1 T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\
 &\leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} = R.
 \end{aligned}$$

De manera que Ψ aplica $B_R(T)$ en sí mismo. Se prueba ahora que Ψ es una contracción. Si $u_1, u_2 \in B_R(T)$, entonces, de la definición de Ψ se tiene que

$$\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t)) = \int_0^t S(t - \tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau.$$

Además, al usar el ítem 2 del Lema 3.2 se puede ver que para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 &\|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &= \left\| \int_0^t S(t - \tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\leq K \int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\
 &\leq K \int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\
 &\leq KK_2 \int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u_1(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau \\
 &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1\|_{X^s(T)} + \|u_2\|_{X^s(T)}) d\tau \\
 &\leq 2KK_2RT \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \\
 &= 4KK_2T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}.
 \end{aligned}$$

Ahora, se escoge T lo suficiente pequeño para que se cumpla (3.16), al igual que

$$4KK_2T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

De donde se concluye que

$$\|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{X^s(T)} \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}.$$

Así, Ψ es una contracción, por tanto, al usar el Teorema de punto fijo de Banach se tiene que existe un único punto fijo u de Ψ en $B_R(T)$, el cual es una solución de la ecuación integral

$$u(t) = \Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau)) d\tau. \quad (3.18)$$

Note que si u es solución de esta ecuación integral, entonces u satisface el problema (3.11)-(3.12).

La unicidad de la solución es consecuencia del siguiente argumento. Sean $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ dos soluciones de la ecuación (3.18) con condición inicial u_0 y \tilde{u}_0 respectivamente, tales que

$$u, \tilde{u} \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})).$$

Entonces, si $t \in [0, T]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\quad + KK_2 \int_0^t \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau \\
 &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + 2KK_2N \int_0^t \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau,
 \end{aligned}$$

en la cual se asume que

$$\|u\|_{X^s(T)}, \|\tilde{u}\|_{X^s(T)} \leq N.$$

Entonces, tomando $K_3 = 2KK_2$ y usando la desigualdad de Gronwall¹, se tiene que para todo $t \in [0, T']$ se satisface

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq Ke^{K_3NT} \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.19)$$

Ahora, si $u_0 = \tilde{u}_0$, entonces se concluye que $\|u - \tilde{u}\|_{X^s(T)} = 0$, lo cual implica la unicidad de la solución en el espacio $X^s(T)$. Por tanto, de la discusión de la existencia de soluciones para el problema (3.11)-(3.12), para $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene garantizada la existencia de un tiempo T para la solución asociada, caracterizada por las desigualdades (3.16) y (3.17).

Además, si $0 < T' < T$, defina

$$\mathbb{V} = \{\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) : \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} < \epsilon\},$$

con $\epsilon = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon'$ y $0 < \epsilon' < \min\left\{\frac{1}{4KK_1}, \frac{1}{16KK_1}\right\}$. Note que si $\tilde{u}_0 \in \mathbb{V}$,

$$\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.20)$$

Por tanto, se tiene que

$$4KK_1\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}T' \leq 1, \quad 16KK_2\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}T' \leq 1. \quad (3.21)$$

En efecto, usando (3.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} 4KK_1\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq 4KK_1(\epsilon + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 4KK_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 4KK_1\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq 4KK_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T} \\ &< \frac{1}{T'}. \end{aligned}$$

¹Sean $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ tales que, $0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^x f(s)ds$ para todo $x \in I$, con $A, B \geq 0$. Entonces $f(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$.

Hecho similar sucede al usar (3.17)

$$\begin{aligned}
 16KK_2\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq 16KK_2(\epsilon + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\
 &\leq 16KK_2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 16KK_2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\leq 16KK_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T} \\
 &< \frac{1}{T'}.
 \end{aligned}$$

De lo anterior, (3.21) se concluye que para cualquier $\tilde{u}_0 \in \mathbb{V}$ existe una única solución $\tilde{u}(t) \in C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$ de la ecuación (3.11) con condición inicial \tilde{u}_0 . Además, $\tilde{u} \in B_R(T')$ con $R = 2\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$. Por tanto, al usar (3.19), para $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \in \mathbb{V}$ con soluciones asociadas \tilde{u} y \tilde{v} respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{u}\|_{X^s(T)} + \|\tilde{v}\|_{X^s(T)} &\leq 2(\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{v}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\
 &\leq 4(\epsilon + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\
 &\leq 4\left(\frac{1}{4KK_1}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4KK_1T}\right) \\
 &\leq \frac{1}{KK_1T'}.
 \end{aligned}$$

Al usar (3.19) con $N = (KK_1T')^{-1}$ se obtiene que para todo $t \in [0, T']$,

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq Ke^{NK_4T'}\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

con $C = Ke^{K_2K_1^{-1}}$. Así, la correspondencia $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a \tilde{u}_0 la solución de (3.11) con la condición inicial (3.12) es una función Lipschitz de \mathbb{V} en $C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$, y esto completa la prueba. \square

3.3 El problema de Cauchy periódico

En esta sección se estudia el problema de Cauchy periódico, asociado con la ecuación Rosenau- Kawahara-RLW,

$$\partial_t u + (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} (\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u + \frac{\beta}{2} (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x (u^2) = 0, \quad (3.22)$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.23)$$

en la que $u_0 \in H_{per}^s[-\pi, \pi]$.

En esta segunda parte de la investigación se demuestra que el problema de Cauchy periódico (3.22)-(3.23) posee soluciones locales en el espacio de Sobolev periódico $H_{per}^s[-\pi, \pi]$, con $s > 1/2$. Para ello se utilizarán algunos estimativos lineales, algunos estimativos no lineales, el hecho de que $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ es un álgebra para $s > 1/2$ (ver Definición 3.2 y Teorema 3.8) y el conocido Teorema de punto fijo de Banach que se enunció y demostró en la sección anterior.

Note que si se define el operador $A : H_{per}^s[-\pi, \pi] \rightarrow H_{per}^{s-4}[-\pi, \pi]$ con $s \in \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$Au = (I - \gamma \partial_x^2 + \lambda \partial_x^4)u,$$

entonces se tiene que

$$\widehat{Au}(k) = (1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)\widehat{u}(k).$$

Por tanto,

$$Au = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{Au}(k)e^{ixk} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)\widehat{u}(k)e^{ixk}.$$

En consecuencia, si se define el operador $A^{-1} : H_{per}^s[-\pi, \pi] \rightarrow H_{per}^{s+4}[-\pi, \pi]$ con $s \in \mathbb{R}$, por medio de la fórmula

$$A^{-1}u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{u}(k)e^{ixk}}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4},$$

entonces,

$$\widehat{A^{-1}u}(k) = \frac{\widehat{u}(k)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4}.$$

Así la ecuación (3.22) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_t u + M(u) + F(u) = 0, \quad (3.24)$$

en la cual M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(\alpha I + \epsilon \partial_x^2 + \mu \partial_x^4) \partial_x u$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x (u^2).$$

Lo que permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.6. $M : H_{per}^s[-\pi, \pi] \rightarrow H_{per}^{s-1}[-\pi, \pi]$ es un operador lineal acotado para $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para $u \in H_{per}^s[-\pi, \pi]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(A^{-1} \partial_x) u\|_{H_{per}^{s-1}[-\pi, \pi]}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^{s-1} |\widehat{A^{-1} \partial_x u}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{\partial_x u}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k^2 (1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\ &\leq C_1(\gamma, \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= C_1(\gamma, \lambda) \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\|(A^{-1} \partial_x^3) u\|_{H_{per}^{s-1}[-\pi, \pi]}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^{s-1} |\widehat{A^{-1} \partial_x^3 u}(k)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{\partial_x^3 u}(k)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k^6 (1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\
 &\leq C_2(\gamma, \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\
 &= C_2(\gamma, \lambda) \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2.
 \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \|(A^{-1} \partial_x^5) u\|_{H_{per}^{s-1}[-\pi, \pi]}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^{s-1} |A^{-1} \widehat{\partial_x^5 u}(k)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{\partial_x^5 u}(k)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k^{10} (1 + |k|^2)^{s-1}}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\
 &\leq C_3(\gamma, \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\
 &= C_3(\gamma, \lambda) \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2.
 \end{aligned}$$

En las cuentas anteriores, $C_j(\gamma, \lambda)$ es una constante positiva que depende de γ y λ , $j = 1, 2, 3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \|M(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} &= \|A^{-1}(\alpha \partial_x + \epsilon \partial_x^3 + \mu \partial_x^5) u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &\leq C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) \left(\|(A^{-1} \partial_x) u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \right. \\
 &\quad \left. + \|(A^{-1} \partial_x^3) u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|(A^{-1} \partial_x^5) u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \right) \\
 &\leq C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]},
 \end{aligned}$$

donde $C(\alpha, \epsilon, \mu, \gamma, \lambda) > 0$. Lo anterior permite demostrar que M es un operador lineal acotado. \square

A continuación se determina la solución u del siguiente sistema lineal asociado con el modelo (3.24),

$$\begin{cases} \partial_t u + M(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.25)$$

Tomando transformada de Fourier en la primera ecuación del sistema de ecuaciones (3.25) con respecto a la variable espacial x , se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t u}(k, t) &= -\frac{\alpha \widehat{\partial_x u}(k, t) + \epsilon \widehat{\partial_x^3 u}(k, t) + \mu \widehat{\partial_x^5 u}(k, t)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4} \\ &= -\frac{ik(\alpha - \epsilon k^2 + \mu k^4)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4} \widehat{u}(k, t). \end{aligned}$$

Además, al usar la regla de Leibniz, y considerando que tanto $u(x, t)$ como su derivada parcial $\partial_t u$ son continuas en x y t , se obtiene que

$$(\partial_t \widehat{u})(k, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) e^{-ikx} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t u(x, t) e^{-ikx} dx = \widehat{\partial_t u}(k, t).$$

Así,

$$(\partial_t \widehat{u})(k, t) = -\frac{ik(\alpha - \epsilon k^2 + \mu k^4)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4} \widehat{u}(k, t), \quad \widehat{u}(k, 0) = \widehat{u}_0(k).$$

Lo anterior es una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 tipo $z' + cz = 0$, por tanto

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0(k) e^{-i\phi(k)t},$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(k) = \frac{k(\alpha - \epsilon k^2 + \mu k^4)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4}.$$

En consecuencia,

$$u(t) = S(t)(u_0),$$

en la que

$$S(t)(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{-i\phi(k)t} e^{ikx}. \quad (3.26)$$

Por ende si u es solución del sistema (3.25) con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

entonces $u(t) = S(t)(u_0)$, de ahí que S está definido por (3.26). Inversamente, a través de algunos cálculos, tales como calcular las diferentes derivadas parciales a $u(x, t)$ con respecto a x o t y reemplazar dichos resultados en el sistema (3.25), se puede ver que si $u(t) = S(t)(u_0)$, entonces u es solución del sistema (3.25). En consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.7. La única solución del problema (3.25) está dada por

$$u(t) = S(t)(u_0),$$

donde $S(t)(u)$ está definida por

$$S(t)(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{-i\phi(k)t} e^{ikx}$$

y la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(k) = \frac{k(\alpha - \epsilon k^2 + \mu k^4)}{1 + \gamma k^2 + \lambda k^4}.$$

A continuación se establecen algunos estimativos. El operador $S(t)$ cumple con la siguiente propiedad.

Lema 3.3. Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ es un operador lineal acotado de $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ en sí mismo. Más aún, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\|S(t)(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} = \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}.$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
 \|S(t)(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{S(t)(u)}(k)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)e^{-i\phi(k)t}|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\
 &= \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Ahora se demuestra un estimativo para el operador F . En la demostración de este resultado se usa el hecho de que el espacio de Sobolev periódico $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ es un álgebra para $s > 1/2$. La prueba de esta propiedad del espacio $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ puede verse por ejemplo en el trabajo de Muñoz (2022).

Definición 3.2. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach X junto con un producto $(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$, tal que para todo $x, y, z \in X$ y para todo $s, r \in \mathbb{C}$

1. $(xy)z = x(yz)$,
2. $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,
3. $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$,
4. $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Teorema 3.8. Si $s > 1/2$, entonces existe una constante positiva C_s que depende únicamente de s , tal que para todo $f, g \in H_{per}^s[-\pi, \pi]$,

$$\|fg\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq C_s \|f\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \|g\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}.$$

Lo anterior indica que $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ es un álgebra.

Lema 3.4. Sea $s > 1/2$, entonces existen constantes $K_1(\beta, \gamma, \lambda)$, $K_2(\beta, \gamma, \lambda) > 0$, tales que

1. $\|F(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq K_1 \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2$.
2. $\|F(u) - F(v)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq K_2 \|u - v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} (\|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]})$.

Demostración. De la definición del espacio de Sobolev periódico $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ se puede ver que

$$\begin{aligned}
 \|F(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} &= \frac{|\beta|}{2} \|A^{-1} \partial_x(u^2)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2 \\
 &= \frac{|\beta|}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |A^{-1} \widehat{\partial_x(u^2)}(k)|^2 \\
 &= \frac{|\beta|}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^s}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{\partial_x(u^2)}(k)|^2 \\
 &= \frac{|\beta|}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^s k^2}{(1 + \gamma k^2 + \lambda k^4)^2} |\widehat{u^2}(k)|^2 \\
 &\leq K(\beta, \gamma, \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u^2}(k)|^2 \\
 &= K(\beta, \gamma, \lambda) \|u^2\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}.
 \end{aligned}$$

Entonces usando el estimativo del Teorema 3.8 se tiene que para $s > 1/2$,

$$\|u^2\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} = \|uu\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq K \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}.$$

Así,

$$\|F(u)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq K_1(\beta, \gamma, \lambda) \|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2.$$

Finalmente, note que

$$F(u) - F(v) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(u^2) - \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(v^2) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(u^2 - v^2).$$

En consecuencia, con base en argumentos similares a los anteriores, y

recurriendo el Teorema 3.8, se tiene que para $s > 1/2$,

$$\begin{aligned}
 & \|F(u) - F(v)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &= \frac{|\beta|}{2} \|A^{-1} \partial_x (u^2 - v^2)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &\leq K(\beta, \gamma, \lambda) \|u^2 - v^2\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &= K(\beta, \gamma, \lambda) \|(u - v)(u + v)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &\leq K_2(\beta, \gamma, \lambda) \|u - v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \|u + v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &\leq K_2(\beta, \gamma, \lambda) \|u - v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \left(\|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \right).
 \end{aligned}$$

Luego, existe una constante $K_2(\beta, \gamma, \lambda) > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
 & \|F(u) - F(v)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\
 &\leq K_2(\beta, \gamma, \lambda) \|u - v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \left(\|u\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|v\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \right).
 \end{aligned}$$

□

A continuación se establece el segundo resultado principal de esta investigación.

Teorema 3.9. Suponga $s > 1/2$, entonces para todo $u_0 \in H_{per}^s[-\pi, \pi]$ existe $T > 0$, que depende solamente de $\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}$, tal que el problema (3.22)-(3.23) tiene una única solución que satisface

$$u \in C([0, T], H_{per}^s[-\pi, \pi]).$$

Además, para todo $0 < T' < T$ existe una vecindad \mathbb{V} de u_0 en $H_{per}^s[-\pi, \pi]$, tal que la correspondencia $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a \tilde{u}_0 la solución $\tilde{u}(\cdot)$ de la ecuación (3.22) con la condición inicial \tilde{u}_0 es una función Lipschitz de \mathbb{V} en $C([0, T'], H_{per}^s[-\pi, \pi])$.

Demostración. Dado $T > 0$, se define el espacio

$$X^s(T) = C([0, T], H_{per}^s[-\pi, \pi])$$

equipado con la norma dada por

$$\|u\|_{X^s(T)} = \max_{t \in [0, T]} \{ \|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \}.$$

Luego, ya que $H_{per}^s[-\pi, \pi]$ es un espacio de Banach, entonces $X^s(T)$ también es un espacio de Banach. Ahora, sea $B_R(T)$ la bola cerrada de radio R centrada en el origen en el espacio $X^s(T)$, esto es

$$B_R(T) = \{u \in X^s(T) : \|u\|_{X^s(T)} \leq R\}.$$

Fijado $u_0 \in H_{per}^s[-\pi, \pi]$ se define el operador $\Psi(u(t))$, con $u \in X^s(T)$, mediante la fórmula

$$\Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau)) d\tau.$$

Se debe mostrar que la correspondencia $u(t) \rightarrow \Psi(u(t))$ envía a $B_R(T)$ en sí mismo y es una contracción si R y T son escogidos adecuadamente. En efecto, si $t \in [0, T]$ y $u \in B_R(T)$, entonces usando el Lema 3.3 y el Lema 3.4 se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} &\leq \|S(t)(u_0)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \left\| \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau)) d\tau \right\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \int_0^t \|S(t - \tau)F(u(\tau))\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + K \int_0^t \|F(u(\tau))\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + KK_1 \int_0^t \|u(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}^2 d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + KK_1 T \|u(t)\|_{X^s(T)}^2 \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + KK_1 TR^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\Psi(u(t))\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + KK_1 TR^2.$$

Escogiendo $R = 2\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}$ y $T > 0$, tal que

$$4KK_1T\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \leq 1, \quad (3.27)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}(1 + 4KK_1T\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}) \\ &\leq 2\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} = R. \end{aligned}$$

De manera que Ψ aplica $B_R(T)$ en sí mismo. Se muestra ahora que Ψ es una contracción. Si $u_1, u_2 \in B_R(T)$, entonces de la definición de Ψ se tiene que

$$\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t)) = \int_0^t S(t-\tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau.$$

Luego, al aplicar el ítem 2 del Lema 3.4 se puede ver que para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} &\|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \\ &= \left\| \int_0^t S(t-\tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau \right\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \\ &\leq K \int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} d\tau \\ &\leq K \int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} d\tau \\ &\leq KK_2 \int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} (\|u_1(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} + \|u_2(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}) d\tau \\ &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} + \|u_2(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}) d\tau \\ &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1\|_{X^s(T)} + \|u_2\|_{X^s(T)}) d\tau \\ &\leq 2KK_2RT \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \\ &= 4KK_2T \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}. \end{aligned}$$

Ahora, se escoge T lo suficiente pequeño para que se cumpla (3.27), al

igual que

$$4KK_2T\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.28)$$

En consecuencia, se concluye que

$$\|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{X^s(T)} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}.$$

Así, Ψ es una contracción, por tanto, al usar el Teorema de punto fijo de Banach se tiene que existe un único punto fijo u de Ψ en $B_R(T)$, el cual es una solución de la ecuación integral

$$u(t) = \Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau. \quad (3.29)$$

Note que si u es solución de esta ecuación integral, entonces u satisface el problema (3.22)-(3.23).

La unicidad de la solución es consecuencia del siguiente argumento. Sean $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ dos soluciones de la ecuación (3.29) con condición inicial u_0 y \tilde{u}_0 respectivamente, tales que

$$u, \tilde{u} \in C([0, T], H_{per}^s[-\pi, \pi]).$$

Entonces, si $t \in [0, T]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} \\ &+ KK_2 \int_0^t \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} (\|u(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]}) d\tau \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} + 2KK_2N \int_0^t \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H_{per}^s[-\pi,\pi]} d\tau, \end{aligned}$$

en el cual se asume que

$$\|u\|_{X^s(T)}, \|\tilde{u}\|_{X^s(T)} \leq N.$$

Luego, tomando $K_3 = 2KK_2$ y usando la desigualdad de Gronwall, se

obtiene que para todo $t \in [0, T']$ se satisface

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq Ke^{K_3NT} \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.30)$$

Ahora, si $u_0 = \tilde{u}_0$, entonces se concluye que $\|u - \tilde{u}\|_{X^s(T)} = 0$, lo cual implica la unicidad de la solución en el espacio $X^s(T)$. Por tanto, de la discusión de la existencia de soluciones para el problema (3.22)-(3.23), para $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene garantizada la existencia de un tiempo T para la solución asociada, caracterizada por las desigualdades (3.27) y (3.28).

Además, si $0 < T' < T$, defina

$$\mathbb{V} = \{\tilde{u}_0 \in H_{per}^s[-\pi, \pi] : \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} < \epsilon\},$$

con $\epsilon = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon'$ y $0 < \epsilon' < \min\left\{\frac{1}{4KK_1}, \frac{1}{16KK_1}\right\}$. Note que si $\tilde{u}_0 \in \mathbb{V}$,

$$\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq \epsilon + \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}. \quad (3.31)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$4KK_1\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}T' \leq 1, \quad 16KK_2\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}T' \leq 1. \quad (3.32)$$

En efecto, usando (3.27) se obtiene que

$$\begin{aligned} 4KK_1\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} &\leq 4KK_1(\epsilon + \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}) \\ &\leq 4KK_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 4K^2K_1\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \\ &\leq 4KK_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T} \\ &< \frac{1}{T'}. \end{aligned}$$

Similarmente, usando (3.28)

$$\begin{aligned} 16KK_2\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} &\leq 16KK_2(\epsilon + \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}) \\ &\leq 16KK_2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 16KK_2\|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 16KK_1 \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \right) \epsilon' + \frac{1}{T} \\ &< \frac{1}{T'}. \end{aligned}$$

Luego de (3.32), se concluye que para cualquier $\tilde{u}_0 \in \mathbb{V}$ existe una única solución $\tilde{u}(t) \in C([0, T'], H_{per}^s[-\pi, \pi])$ de la ecuación (3.22) con condición inicial \tilde{u}_0 . Además, $\tilde{u} \in B_R(T')$ con $R = 2\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}$. Así usando (3.30), para $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \in \mathbb{V}$ con soluciones asociadas \tilde{u} y \tilde{v} respectivamente, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{X^s(T)} + \|\tilde{v}\|_{X^s(T)} &\leq 2(\|\tilde{u}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} + \|\tilde{v}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}) \\ &\leq 4(\epsilon + \|u_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]}) \\ &\leq 4\left(\frac{1}{4KK_1} \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4KK_1T}\right) \\ &\leq \frac{1}{KK_1T'}. \end{aligned}$$

Así, al usar (3.19) con $N = (KK_1T')^{-1}$ se tiene que para todo $t \in [0, T']$,

$$\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq Ke^{NK_4T'} \|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]} \leq C\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{H_{per}^s[-\pi, \pi]},$$

con $C = Ke^{K_2K_1^{-1}}$. Por ello la correspondencia $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$, que asocia a \tilde{u}_0 la solución de (3.22) con la condición inicial (3.23) es una función Lipschitz de \mathbb{V} en $C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$, y esto completa la demostración. \square



Capítulo 4

Conclusiones

El presente libro reúne tres líneas de investigación matemática desarrolladas desde perspectivas y herramientas distintas: la teoría de grupos y la combinatoria aditiva, la teoría de grafos algebraicos y el análisis matemático aplicado a ecuaciones diferenciales. Aunque cada capítulo aborda una problemática específica y puede leerse de manera independiente, la obra ha sido concebida como un todo coherente, cuyo objetivo central es mostrar al lector cómo se formulan, analizan y desarrollan problemas de investigación matemática en áreas contemporáneas.

Una de las principales conclusiones globales del libro es que la investigación matemática moderna se caracteriza por la interacción entre distintas áreas, tanto en el uso de herramientas como en los enfoques metodológicos. A lo largo de los capítulos se evidencia que problemas de naturaleza combinatoria, algebraica o analítica comparten estructuras conceptuales profundas, lo que justifica su estudio conjunto dentro de una misma obra.

Desde una perspectiva formativa, el libro no solo presenta resultados y técnicas específicas, sino que también expone al lector al proceso mismo de la investigación matemática: la formulación de problemas, la construcción de ejemplos, el análisis riguroso de propiedades y la identificación de nuevas líneas de trabajo.

Conclusiones capítulo 1

El primer capítulo se centra en el estudio de los conjuntos producto pequeños, un problema clásico de la teoría de números abordado desde la teoría de grupos y la combinatoria aditiva. Se analizan las clases de grupos para las que existen fórmulas aritméticas que calculan de manera eficiente el cardinal mínimo del conjunto producto AB de dos subconjuntos finitos A y B de un grupo G .

Una conclusión clave es que estos resultados se aplican principalmente a grupos solubles, mientras que el caso de los grupos no solubles permanece en gran medida inexplorado. El capítulo ilustra cómo las demostraciones existentes integran herramientas algebraicas, como el análisis de subgrupos, grupos cocientes y descomposiciones estructurales, con técnicas básicas de combinatoria, reflejando así el carácter interdisciplinario de la matemática contemporánea.

Desde un enfoque pedagógico, introduce conceptos fundamentales de ambas áreas, presenta demostraciones detalladas y propone problemas abiertos que invitan al pensamiento crítico y a la exploración autónoma del lector.

Conclusiones capítulo 2

El segundo capítulo está dedicado al estudio de los Deza grafos y Deza dígrafos, estructuras que generalizan a los grafos fuertemente regulares y que desempeñan un papel relevante dentro de la teoría de grafos algebraicos. A lo largo del capítulo se analizan sus parámetros fundamentales, se presentan nuevas demostraciones de resultados conocidos y se desarrollan diversas técnicas de construcción basadas en herramientas algebraicas y combinatorias.

Una de las conclusiones principales de este capítulo es que los Deza grafos constituyen una clase rica y flexible de estructuras combinatorias, capaces de modelar configuraciones con alto grado de regularidad y simetría. El uso sistemático de la matriz de adyacencia como herramienta de análisis permite obtener información estructural detallada y establecer relaciones entre distintos invariantes del grafo.

Las construcciones presentadas evidencian la estrecha relación entre la teoría de grafos, la teoría de grupos y la combinatoria aditiva, mostrando cómo conjuntos con propiedades aritméticas específicas pueden emplearse para generar grafos con parámetros controlados. Esta conexión refuerza la idea de que muchas estructuras combinatorias pueden entenderse de manera más profunda a través de enfoques algebraicos.

Desde una perspectiva aplicada, el capítulo destaca el potencial de los Deza grafos en áreas como la teoría de códigos, el diseño combinatorio y el análisis de redes. Asimismo, los problemas abiertos propuestos al final del capítulo constituyen una invitación explícita a continuar esta línea de investigación, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado.

En el ámbito formativo, el capítulo fortalece habilidades clave como el análisis de estructuras algebraico-combinatorias, la interpretación de parámetros invariantes y el tránsito desde resultados teóricos hacia problemas de investigación abiertos.

Conclusiones capítulo 3

El tercer capítulo aborda problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales, introduciendo herramientas del análisis matemático moderno para el estudio de ecuaciones de evolución. A lo largo del capítulo se analizan condiciones de existencia, unicidad y regularidad de soluciones, así como métodos analíticos relevantes para el tratamiento de problemas no lineales.

Una conclusión central de este capítulo es que el análisis funcional y las técnicas modernas del análisis permiten abordar problemas complejos de manera sistemática y rigurosa, proporcionando un marco sólido para el estudio de ecuaciones diferenciales con aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. El capítulo ilustra cómo conceptos abstractos se traducen en resultados concretos sobre el comportamiento de soluciones.

El desarrollo del capítulo enfatiza la importancia de las hipótesis y condiciones iniciales en la formulación de problemas bien planteados, así como el papel de los espacios funcionales y los métodos de estimación en el análisis

de soluciones. Estas ideas son fundamentales para comprender la dinámica de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales.

Desde el punto de vista pedagógico, el capítulo introduce al lector en el lenguaje y las técnicas propias del análisis avanzado, fomentando una comprensión profunda de los métodos utilizados y su relevancia en problemas actuales de investigación matemática.

Síntesis global

Aunque los tres capítulos se sitúan en áreas distintas de la matemática, una conclusión global del libro es que todos comparten un enfoque metodológico común: el uso del rigor formal, la construcción de estructuras abstractas y la búsqueda de resultados con proyección teórica y aplicada. Esta coherencia metodológica justifica la inclusión de capítulos temáticamente independientes dentro de una misma obra.

El libro muestra cómo problemas de distinta naturaleza pueden abordarse mediante herramientas específicas, pero también cómo estas herramientas dialogan entre sí a través de ideas y enfoques compartidos. En este sentido, la obra refuerza la visión de la matemática como una disciplina unificada, en la que distintas áreas se enriquecen mutuamente.

La presencia de secciones de discusión, conclusiones y problemas abiertos en cada capítulo contribuye a reforzar esta articulación, permitiendo al lector identificar conexiones conceptuales y metodológicas a lo largo del libro.

Finalmente, el libro se proyecta como un recurso académico valioso tanto para estudiantes de pregrado y posgrado como para docentes e investigadores interesados en la investigación matemática contemporánea. La combinación de resultados teóricos, ejemplos, figuras explicativas y problemas abiertos proporciona una base sólida para cursos avanzados, seminarios y trabajos de grado.

Una conclusión clave es que la obra no solo transmite conocimientos matemáticos específicos, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades

fundamentales para la investigación, tales como el razonamiento abstracto, la formulación de problemas y el análisis crítico de resultados.

En este sentido, el libro cumple un doble propósito: presentar contenidos avanzados de distintas áreas de la matemática moderna y servir como guía formativa para quienes desean iniciarse en la investigación matemática con rigor, profundidad y una visión integradora.



Bibliografía

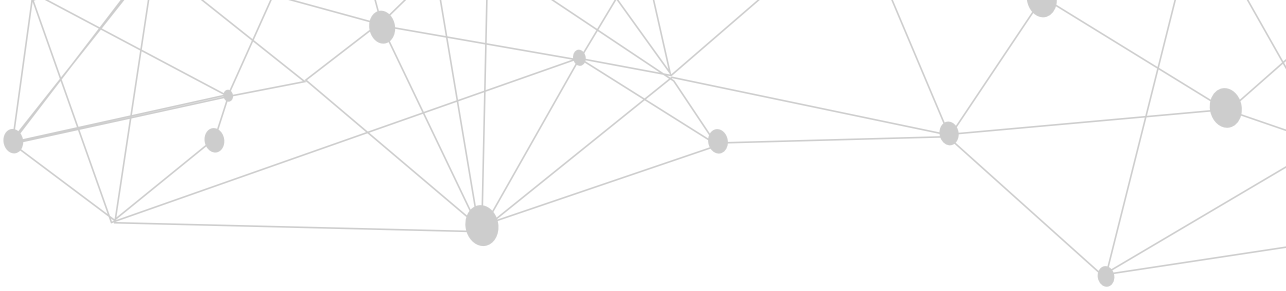
- Ak, T., Dhawan, S., and İnan, B. (2018). Numerical solutions of the generalized rosenau–kawahara–rlw equation arising in fluid mechanics via b-spline collocation method. *International Journal of Modern Physics C*, 29(11):1850116.
- Arasu, K. (1986). $(81, 16, 3)$ abelian difference sets do not exist. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 43(2):350–353.
- Atouani, N. and Omrani, K. (2013). Galerkin finite element method for the rosenau–rlw equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(3):289–303.
- Benavides, F. A. and Trujillo, C. A. (2025). A note of non-existence of strongly regular and deza graphs. *Electronics Letters*, 61(1):e70179.
- Benjamin, T. B., Bona, J. L., and Mahony, J. J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272:47 – 78.
- Berchenko-Kogan, Y. (2012). Minimum product sets sizes in nonabelian groups. *Journal of Number Theory*, 132(1):2316–2335.
- Bernasconi, A., Godsil, C., and Severini, S. (2008). Quantum networks on cubelike graphs. *Phys. Rev. A*, 78:052320.

- Bona, J. and Tzvetkov, N. (2009). Sharp well-posedness results for the BBM equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 23(4):1241–1252.
- Bose, R. C. (1963). Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific Journal of Mathematics*, 13(2):389 – 419.
- Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 55–108.
- Caicedo, N. Y. (2016). *Conjuntos de Sidon en dimensión dos*. Phd thesis, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Valle del Cauca.
- Clapham, C. R. J., Flockhart, A., and Sheehan, J. (1989). Graphs without four-cycles. *Journal of Graph Theory*, 13(1):29–47.
- Colbourn, C. J. and van Oorschot, P. C. (1989). Applications of combinatorial designs in computer science. *ACM Comput. Surv.*, 21(2):223–250.
- Crnković, D. and Švob, A. (2024). Self-orthogonal codes from deza graphs, normally regular digraphs and deza digraphs. *Graph. Comb.*, 40(2).
- Cvetković, D., Rowlinson, P., and Simić, S. (2009). *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press.
- Daza, D., Martos, C., and Trujillo, C. (2022). Non-existence of difference sets. *Electronics Letters*, 58(4):154–155.
- Daza, D. F. (2022). *Additive interpretation of the Erdos-Renyi orthogonal polarity graph*. Phd thesis, Universidad del Cauca, Popayán, Cauca.
- Deckelbaum, A. (2009). Minimum product set sizes in nonabelian groups of order pq . *Journal of Number Theory*, 129(6):1234–1245.
- DeVos, M. (2014). A short proof of Kneser's addition theorem for abelian groups. (1):39–41.

- Eliahou, S. and Kervaire, M. (2005). Minimal sumsets in infinite abelian groups. *Journal of Algebra*, 287:449–457.
- Eliahou, S. and Kervaire, M. (2006). Sumsets in dihedral groups. *European Journal of Combinatorics*, 27(4):617–628.
- Eliahou, S. and Kervaire, M. (2007a). Bounds on the minimal sumset size function in groups. *International Journal of Number Theory*, 03(04):503–511.
- Eliahou, S. and Kervaire, M. (2007b). Some results on minimal sumset sizes in finite non-abelian groups. *Journal of Number Theory*, 124(1):234–247.
- Eliahou, S. and Kervaire, M. (2010). Minimal sumsets in finite solvable groups. *Discrete Mathematics*, 310(3):471–479.
- Eliahou, S., Kervaire, M., and Plagne, A. (2003). Optimally small sumsets in finite abelian groups. *Journal of Number Theory*, 101(2):338–348.
- Erazo, L. and Benavides, F. A. (2024). Conjuntos producto pequeños en ciertos productos semidirectos. *Trabajo de grado, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño.*
- Erickson, M., Fernando, S., Haemers, W. H., Hardy, D., and Hemmeter, J. (1999a). Deza graphs: A generalization of strongly regular graph. *Journal of Combinatorial Designs*, 7(6):395–405.
- Erickson, M., Fernando, S., Haemers, W. H., Hardy, D., and Hemmeter, J. (1999b). Deza graphs: A generalization of strongly regular graph. *Journal of Combinatorial Designs*, 7(6):395–405.
- Evans, T. A. and Mann, H. B. (1951). On simple difference sets. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics (1933-1960)*, 11(3/4):357–364.
- Füredi, Z. (1983). Graphs without quadrilaterals. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34(2):187–190.
- Gordon, D. M. (1994). The prime power conjecture is true for $n < 2.000.000$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1:1–7.

- He, D. and Pan, K. (2015). A linearly implicit conservative difference scheme for the generalized rosenau–kawahara-rlw equation. *Applied Mathematics and Computation*, 271:323–336.
- Hufford, Jr., J. (2015). (261,105,42) abelian difference sets do not exist. Master's thesis, Wright State University. Available at https://etd.ohiolink.edu/acprod/odb_etd/ws/send_file/send?accession=wright1428672374&disposition=inline.
- Kaur, R. and Singh, S. (2023). Sumsets in dicyclic groups $q4n$ and um,n . *Communications in Algebra*, 52(3):1255–1259.
- Luca, F., Tengely, S., and Togbé, A. (2009). On the diophantine equation $x^2 + c = 4y^n$. *Ann. Sci. Math. Québec*, 33:171–184.
- Muñoz, A. P. (2022). *El Problema De Cauchy Periódico Para Una Ecuación Tipo Boussinesq*. Tesis de pregrado, Universidad del Cauca, Colombia.
- Mutis, W. F., Benavides, F. A., and Castillo, J. H. (2010). Conjuntos suma pequeños en p -grupos finitos. *Revista Integración, Temas De matemáticas*, 28(1):79–83.
- Mutis, W. F., Benavides, F. A., and Castillo, J. H. (2012). Conjuntos suma pequeños en grupos hamiltonianos. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 53(1):1–9.
- Pan, X. and Zhang, L. (2012). On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual rosenau-rlw equation. *Applied Mathematical Modelling*, 36(8):3371–3378.
- Plagne, A. (2003). Additive number theory sheds new light on the hopf-stiefel o function. *Enseignement Mathématique*, 49(1/2):109–116.
- Roetteler, M. (2016). Quantum Algorithms for Abelian Difference Sets and Applications to Dihedral Hidden Subgroups. In Broadbent, A., editor, *11th Conference on the Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography (TQC 2016)*, volume 61 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 8:1–8:16, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik.

- Rowlinson, P. and Yuansheg, Y. (1992). On extremal graphs without four-cycles. *Utilitas Math*, 41:204–210.
- Ruiz, D. and Trujillo, C. (2016). Construction of $bh[g]$ sets in product of groups. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 50:165 – 174.
- Tao, T. (2000). Multilinear weighted convolution of l_2 functions, and applications to nonlinear dispersive equations. *American Journal of Mathematics*, 123:839 – 908.
- Trinajstic, N. (1992). *Chemical Graph Theory*. CRC Press.
- Wang, K., Guo, J., and Li, F. (2011). Singular linear space and its applications. *Finite Fields and Their Applications*, 17(5):395–406.
- Wang, K. and Li, F. (2008). Deza digraphs ii. *European Journal of Combinatorics*, 29(2):369–378.
- Wang, K. and quan Feng, Y. (2006). Deza digraphs. *European Journal of Combinatorics*, 27(6):995–1004.
- Wang, Q., Liang, X., Jin, R., and Yan, Y. (2023). Applications of strongly regular cayley graphs to codebooks. *IEEE Access*, 11:106980–106986.
- Xie, Y., Yuan, J., and Malaney, R. (2013). Quantum stabilizer codes from difference sets. In *2013 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 524–528.
- Xintian Pan, K. Z. and Zhang, L. (2013). Finite difference discretization of the rosenau-rlw equation. *Applicable Analysis*, 92(12):2578–2589.
- Zuo, J.-M. (2009). Solitons and periodic solutions for the rosenau–kdv and rosenau–kawahara equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215(2):835–840.
- Zuo, J.-M. (2015). Soliton solutions of a general rosenau-kawahara-rlw equation. *Journal of Mathematics Research*, 7:24.



Índice de figuras y tablas

2.1	Grafos C_5 y K_5	37
2.2	Grafos C_5 y $\overline{C_5}$	39
2.3	Matrices de adyacencia	40
2.4	Grafos dirigidos y caminos	43
2.5	Matriz de adyacencia y su potencia	44
2.6	Vecinda interna y externa	45
2.7	Grafo asociado conjunto Singer	53
2.8	Grafo asociado a forma bilineal	57
2.9	Dígrafo asociado a conjunto diferencia	58
2.10	Dígrafo asociado a conjunto casi-diferencia	59

èditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2026
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El ser humano es por naturaleza curioso, lo cual conlleva a que exploremos, indagemos y comprendamos el mundo que nos rodea. Compartir nuestro conocimiento es relevante en nuestra sociedad porque contribuye a la construcción de conocimiento. En este sentido, el texto Conjuntos producto, grafos y el problema de Cauchy tiene como principal objetivo difundir en la comunidad en general avances de distintos problemas en matemáticas. Este texto es el segundo tomo de la serie de libros Alcanzar, cuyo propósito es dar a conocer distintas investigaciones que se realizan por los profesores adscritos al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

En este tomo se abordan tres problemas de investigación, el primero de ellos se caracteriza por ser accesible en su comprensión ya que busca determinar el mínimo número de elementos que puede tener el producto de dos subconjuntos contenidos en un grupo finito, sin embargo, encontrar su solución general resulta sumamente complejo. El segundo problema está relacionado con una de las áreas, que quizá, tiene muchas aplicaciones en el área de la informática, conocida como la teoría de grafos. En este sentido, se aborda la problemática de la existencia de cierto tipo de grafos los cuales son de importancia por sus aplicaciones. Finalmente, en el último se estudian problemas relacionados con la ecuación de Rosenau-Kawahara-RLW la cual modela la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud.

ISBN: 978-628-7864-62-7



9 786287 864627



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

ai

Universidad de Nariño

ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de Nariño