LOS GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FREDY RONALDO REINA ERIRA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2019

LOS GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FREDY RONALDO REINA ERIRA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Fernando Andrés Benavides Agredo
Ph. D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2019

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Fernando Andrés Benavides Agredo

Asesor

Wilson Fernando Mutis Cantero

Jurado 1

Catalina María Rúa Álvarez

Jurado 2

San Juan de Pasto, 26 de noviembre de 2019

Este trabajo está dedicado a:

Mi padres, Arcesio Reina y Cecilia Erira, por ser un ejemplo en mi vida y por su apoyo incondicional, los amo infinitamente.

Ronaldo.

Agradecimientos

A Dios por haberme dado la fuerza suficiente para enfrentar cada desafío presente en la carrera y permitirme hacer realidad este sueño.

A mis padres Arcesio y Cecilia, por su confianza y apoyo incondicional en todo momento, sobre todo en las situaciones más difícles.

A mis hermanos Yazmín y Albeiro, por acompañarme y compartir conmigo estos largos años de estudio.

A mi abuelito Olmedo Erira, por sus oraciones, por estar pendiente de mí y recibirme siempre con mucha alegría.

A mi asesor Dr. Fernando Andrés Benavides, por su tiempo invertido para guiar el desarrollo de este trabajo, por sus sugerencias y recomendaciones para culmianr con éxito esta Tesis.

Al grupo de docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística por todo el conocimiento brindado, quienes hicieron parte de mi formación tanto académica como integral y me ayudaron a crecer como persona.

Finalmente, infinitas gracias a la Universidad de Nariño, por darme la oportunidad de acceder a la educación superior. Lugar donde aprendí a estudiar con dureza y disciplina, además por enseñarme a valorar cada instante y cada persona que tengo a mi lado. También por apoyarme para participar en distintos eventos con los cuales conocí hermosos lugares. De ella me llevo grandes recuerdos y bonitas experiencias que estarán siempre en mi mente.

Resumen

Diversas situaciones cotidianas aunque parezcan no tener alguna relación con las matemáticas, no siempre es así. Muchos de estos problemas están relacionados con ella y se pueden resolver mediante sus propiedades y operaciones. Este trabajo está enfocado en la resolución de problemas mediante el uso de grafos y está dirigido a docentes y estudiantes de educación básica y media. En general, la teoría de grafos no es un tema de estudio en la educación, aun así existe una gran variedad de aplicaciones de esta teoría.

En este documento, se presenta una recopilación teórica de algunos aspectos fundamentales de la teoría de grafos y su aplicación en la resolución de problemas. Se exponen diversas situaciones cotidianas que se resuelven usando procedimientos propios de los grafos y otras se plantean luego de modificar las condiciones de los problemas ya resueltos. Los modelos de Polya, Schoenfeld y Guzmán fueron la base principal en el diseño de un procedimiento para guiar la solución de los problemas abordados en esta tesis.

Palabras clave: teoría de grafos, modelación matemática, resolución de problemas, educación matemática.

Abstract

Different situations of daily life may not to have any relation with mathematics, however it is not always true. Many of this problems are related to it and can be resolved by mean its properties and operations. This document is focused on solving problems using graphs, and it is aimed at teachers and students of basic and middle education. In general, graph theory is not a subject of study in the education, in spite of there are many applications of this theory.

In this document, a theoretical compilation of some fundamental aspects of graph theory and their application in solving problems is presented. Many simple situations of daily life are included which are solved using graphical procedures, as others problems after modifying its initial conditions. Polya, Schoenfeld and Guzmán models on solving problems were the main ingredient in order to design a procedure to guide the solution of the problems included in this thesis.

Keywords: graph theory, mathematical modeling, problem solving, mathematics education.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

En los últimos 30 años, la resolución de problemas ha sido un campo de investigación muy importante en la educación matemática, Braicovich y Caro (2015) mencionan que George Polya en una de sus conferencia en 1968 justifica el hecho de que todos los textos de matemáticas contengan problemas, pues estos se consideran la parte más esencial de las matemáticas. La resolución de problemas es un proceso que invita a reflexionar sobre la importancia de las matemáticas, pues son los problemas los que le dan sentido, además contribuyen a desarrollar habilidades y destrezas en el área mediante la exploración de conceptos y la puesta en juego del conocimiento. A esto se suma el proceso de modelación, mediante el cual se establece una relación entre la matemática y el mundo real de modo que una situación dada se pueda transformar en un problema matemático. Es por ello que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 1998, propuso la inclusión de la modelación y resolución de problemas como procesos generales de la actividad matemática en Colombia. Al respecto, Zamora (2016) manifiesta que las situaciones planteadas en el aula deben estar contextualizadas en entornos cotidianos que generen interés en los alumnos y estimulen el desarrollo de sus capacidades para enfrentar y resolver problemas.

Por otra parte, diversas investigaciones como la de Socas et al. (2014) ponen de manifiesto que los estudiantes tienen serias dificultades en la resolución de problemas, pues les resulta difícil proponer razonamientos propios y relacionar los problemas con las matemáticas. En Socas (2001) examinan algunas procedencias de estas dificultades, las cuales se deben principalmente a la falta de experiencia en este campo, el desarrollo cognitivo y las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia las matemáticas. Por esta razón, se debe tener presente que la idea de plantear problemas puede producir un impacto negativo en los estudiantes si no se hace de forma adecuada. En este sentido, Polya (1965) en su libro "Cómo plantear y resolver problemas", propone cuatro fases que pueden guiar el proceso de resolución de problemas, a él se suman autores como Schoenfeld (1985) y De Guzmán (1995) quienes también han trabajado y contribuido con sus propias modelos de gran utilidad al momento de resolver un problema en matemáticas.

El eje central de este trabajo es la resolución de problemas con grafos, los cuales en sus inicios estaban relacionados a juegos y pasatiempos, no obstante hoy en día la teoría de grafos es una rama de la matemática que se encuentra en pleno desarrollo, gracias a la gran cantidad de aplicaciones en el campo de la informática, la computación y las telecomunicaciones. En lo referente a la educación, Teresa Braicovich junto a otros docentes han trabajado e investigado sobre la pertinencia de introducir esta teoría en las instituciones educativas, ellos están convencidos de que los grafos son una buena herramienta para conceptualizar situaciones, las cuales permitan generar conocimiento matemático a través de la exploración de problemas, la generación de hipótesis y la búsqueda de resultados. Por ejemplo, en Cognigni et al. (2008) se recopilan los resultados obtenidos de las experiencias realizadas con alumnos de distintos niveles educativos, en talleres relacionados con recorridos, árboles y coloración de grafos, de los cuales concluyen que no se necesita ser expertos en esta teoría para utilizarla en la resolución de problemas y sacar el mayor provecho de ella.

Por otro lado, numerosas investigaciones como la de Braicovich y Caro (2015) afirman que el tema de grafos no se encuentra presente en los planes curriculares en todos los niveles educativos, al menos no de forma directa, dando a entender que no es un tema muy conocido y aunque algunos docentes poseen algún conocimiento al respecto, no lo presentan a sus alumnos porque no hace parte del plan de estudios. Por tal motivo, en este trabajo se resaltan algunos aspectos importantes de la teoría de grafos y su aplicación en la resolución de situaciones problema, las cuales se pueden modelar mediante grafos y resolver usando estrategias que involucran conceptos y procedimientos propios de esta teoría. Los problemas resueltos en esta tesis, van dirigidos a estudiantes de educación básica y media por lo que las soluciones propuestas se caracterizan por la construcción y observación de diagramas. Entre los aportes de este trabajo se resaltan: el diseño de un procedimiento propio para guiar el proceso de resolución de los problemas abordados en este documento, la cual se compone por cuatro fases que surgieron luego de agrupar y analizar los modelos propuestos por Polya, Schoenfeld y Guzmán para la resolución de problemas matemáticos en general; por otra parte, se mejoró la redacción de los enunciados presentados en algunos problemas, pues estaban abiertos a varias interpretaciones, así mismo se modificaron sus condiciones iniciales para generar nuevas situaciones, algunas fueron resueltas y otras dejadas como sugerencias de trabajo, al mismo tiempo se propone y resuelve un problema basado en ideas anteriores.

El contenido de este trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el primero, denominado modelación y resolución de problemas, se resalta la importancia de estos procesos en la educación matemática, así como las dificultades de los alumnos al afrontar problemas matemáticos, a la vez se describen algunos modelos para la resolución de problemas. En el segundo capítulo denominado teoría de grafos, se hace una breve reseña histórica de esta teoría y una introducción a la misma, además aparece el componente teórico y formal de algunos conceptos. Ya en el tercer capítulo, se presentan problemas tomados de diversas fuentes y su respectiva solución con detalle, en donde se resalta a los grafos como una herramienta potencial en la resolución de problemas, además se sugieren actividades derivadas de cada problema resuelto. Finalmente, en el último capítulo aparecen recopiladas otras situaciones problema que se pueden modelar y resolver mediante grafos, con las cuales se espera que el lector al desarrollarlas adquiera más habilidades y destrezas en la resolución de problemas relacionados con teoría de grafos.

Capítulo 1

Modelación y Resolución de Problemas

1.1. Ejercicio y problema

En una clase de matemáticas por lo general se complementa el estudio de conceptos a través de actividades, donde el estudiante pone en práctica lo aprendido. Dichas actividades, son asumidas comúnmente como ejercicios o problemas sin haber una clara distinción entre estos, Pérez (2008) argumenta que los textos de matemáticas hacen uso de los términos problema y ejercicio de forma ambigua y poco precisa. Esto sucede ya que una actividad, mientras es un ejercicio para el profesor bien puede ser un problema para el alumno. Por ello, es importante detenerse a describir claramente lo que significa un ejercicio y un problema en matemáticas.

Ejercicio Matemático

Algunas definiciones de ejercicio matemático son:

- Consiste en trabajar sobre ejemplos idénticos o casi idénticos a los que ha resuelto el profesor o se han explicado en el texto, es decir una cuestión matemática cuyo método de solución es inmediatamente accesible al sujeto porque dispone de un algoritmo para resolverlo. Llivina (1998) citado en Pérez (2008).

- Aquella exigencia para actuar donde la vía de solución es conocida para el estudiante. Jiménez (2000) citado en Pérez (2008).

Según lo anterior, se puede inferir que un ejercicio matemático es una actividad que consiste en realizar acciones repetitivas, donde la persona sabe de antemano los pasos que debe seguir para resolverlas.

Problema Matemático

Algunas definiciones de problema matemático son:

- Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata. Polya (1965).
- La presencia de una situación desconocida para el sujeto, no se conoce la vía de solución, la persona que se enfrenta a ella está motivada para trabajar en ella, y se poseen los elementos necesarios para darle solución. Mazarío (2002) citado en Pérez (2008).

Según lo anterior, se puede inferir que un problema matemático es una actividad en la cual no se identifica de inmediato un medio o camino para resolverla, por ello requiere que la persona relacione dicha actividad con lo aprendido y además determine una forma de proceder para llegar a la respuesta.

En la Tabla 1, mostrada en Pérez (2008), aparecen otras diferencias entre problema y ejercicio, las cuales se presentan con respecto a: comprensión, referida a la acción de entender la situación y tener claridad sobre lo que solicita la actividad; objetivos, en cuanto a los propósitos que se desea alcanzar con esa actividad; aplicación, referida a la generación de nuevas situaciones e interrogantes que pueden surgir con el desarrollo de la actividad; tiempos, en cuanto al espacio que se dispone para la actividad en base a experiencias previas.

Tabla 1: Diferencias entre problema y ejercicio. Tomada de: Pérez (2008).

	Problema	**Ejercicio**
Comprensión	No se sabe a primera vista cómo atacarlo y resolverlo; a veces ni siquiera se ve claro en qué consiste el problema.	Se entiende de inmediato en qué consiste la cuestión y cuál es el medio para resolverlo.
Objetivos	Es que el alumno utilice la intuición, organice y relacione sus conocimientos y experiencias anteriores para elaborar una estrategia de resolución.	Es que el alumno aplique de forma mecánica conocimientos y algoritmos ya adquiridos y fáciles de identificar.
Aplicación	Están abiertos a posibles variantes, generalizaciones y a nuevos problemas.	Son cuestiones perfectamente definidas y cerradas.
Tiempos	Exige un tiempo que es imposible de prever de antemano.	Exige poco tiempo y este se puede prever de antemano.

Para hacer evidente la diferencia entre un ejercicio y un problema en matemáticas, considere a un estudiante que hasta el momento tiene conocimiento sobre las fracciones y las reglas de sus operaciones, al él se le asignan las siguientes actividades:

- Calcular

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$$

Esta primera actividad se considera un ejercicio, pues de acuerdo al conocimiento que posee el alumno, le basta con operar de forma mecánica estas fracciones para dar el resultado.

- En una fiesta, Karen ha comido la tercera parte del pastel, su primo Anderson ha consumido tres quintas partes del resto. ¿Qué porción queda del pastel?

Esta segunda actividad se considera un problema para ese alumno, pues aunque ya conoce como operar fracciones, aun no ha trabajado con actividades donde debe traducir el enunciado del lenguaje verbal al algebraico y determinar la manera de operar con esos datos para dar una respuesta.

Al respecto, Badger et al. (2012) afirman que: "para darles a los estudiantes un aprendizaje razonable en matemáticas, debemos ponerlos en situaciones desconocidas con problemas que para ellos son nuevos, con la expectativa de que deben abordarlos seriamente por sí mismos". A su vez argumentan que la característica definitoria de los problemas cuando hablamos de ellos es la novedad, y en respuesta a esta novedad se requiere creatividad, es por ello que los problemas trabajados en el aula deben poseer elementos y características que sean de interés para los alumnos.

Lo anterior evidencia la importancia que tienen los problemas matemáticos, pues permiten reforzar el conocimiento adquirido mediante su aplicación a situaciones de razonamiento matemático, las cuales conllevan a desarrollar en los estudiantes sus habilidades y destrezas en el área. Por tal razón, en el presente documento se ha optado por trabajar solamente con *problemas matemáticos.*

Por otra parte, en los problemas es muy frecuente encontrar enunciados que no son muy claros, quedando abiertos a varias interpretaciones, lo cual genera confusión en las personas que deseen abordarlos. De modo que, si el enunciado no se interpreta como lo supone quien asigna el problema, la respuesta hallada no se va a considerar válida generando así desconcierto y desinterés por continuar. En el siguiente ejemplo se presenta un problema bajo un enunciado confuso.

- En un grupo de 9 personas, ¿es posible que cada uno conozca a 3 personas de las demás?

Aunque a simple vista parece estar bien redactado, al analizar con mayor detalle su enunciado se generan las siguientes confusiones: el problema no aclara si cada uno debe conocer exactamente a 3 personas o si ese número es una cota inferior de conocidos. Además la acción de conocer no es mutua, ya que *(si x conoce a y, no necesariamente y conoce a x)*, lo mejor sería enunciar que x se conoce con y. En este sentido, la manera más adecuada de enunciar el problema es:

- En un grupo de 9 personas, ¿es posible que cada uno se conozca con exactamente 3 personas de las demás?

Dada la situación anterior, se ha optado por modificar brevemente algunos enunciados de los doce problemas estudiados en el Capítulo 3, esto con el fin de evitar confusiones respecto a la información proporcionada, pues sus enunciados originales estaban abiertos a varias interpretaciones.

1.2. Modelación matemática

En los Lineamientos Curriculares, MEN (1998) propuso la inclusión de la modelación matemática y la resolución de problemas como procesos generales de la actividad matemática en Colombia. “En general se entiende que la modelación vincula la matemática y el mundo real, esta se focaliza en la dirección que va de la realidad hacia la matemática” (Villarreal & Esteley, 2010). En otras palabras, la modelación es un proceso mediante el cual se establece una relación entre una situación real y las matemáticas, de modo que dicha situación se transforme en un problema matemático. En este sentido, MEN (1998) manifiesta:

> *La modelación es el punto de partida de una situación problemática real, de manera que las situaciones cotidianas y problemáticas, son un acercamiento a las matemáticas en contexto, en donde se pueda poner en práctica el aprendizaje activo, el desarrollo de pensamiento y que contribuyan a dar sentido a las matemáticas, para que los estudiantes modelen situaciones cotidianas.*

A la vez, MEN (1998) afirma que: “la modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa”.

Pues bien, este proceso implica establecer un modelo matemático que represente la situación dada, aquí es importante destacar a Londoño y Muñoz (2011) quienes manifiestan lo siguiente: “no es el problema real el que se ajusta al modelo, es la construcción del modelo la que necesita ajustarse a ese problema y por tanto, debe evaluarse su formulación a la luz del problema en el mundo real”. Así pues, para definir un modelo matemático, primero se debe hacer un reconocimiento de la situación identificando sus propiedades y condiciones, luego evaluar distintas formas de representación y finalmente elegir el mejor modelo que se ajuste al problema en cuestión, dicho modelo puede ser una expresión algebraica, una secuencia e incluso un diagrama. De ahí que, “un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución para un problema y darse cuenta de si una aparente solución es significativa o no tiene sentido”(MEN, 2006).

Por otra parte, MEN (2006) menciona que desde 1977 en didáctica de las matemáticas se ha hablado con frecuencia sobre “la matematización”, término introducido por Hans Freudenthal, la cual consiste en expresar un problema común en el lenguaje matemático con el fin de buscar alternativas de solución. Al respecto, Rico (2006) afirma que el proceso de matematización implica tres fases importantes y secuenciadas descritas a continuación:

- Matematización horizontal: Consiste en traducir el enunciado del mundo real al matemático, lo cual implica: reconocer los conceptos matemáticos, propiedades o condiciones que sean relevantes para la solución del problema; comprender la relación existente entre el lenguaje cotidiano y el formal, establecer un modelo matemático que represente la situación.
- Matematización vertical: Requiere hacer uso de los conceptos y habilidades matemáticas para solucionar el problema en matemáticas. Esto implica, evaluar diferentes tipos de representación y hacer uso de un lenguaje simbólico y formal.
- Reflexión: Consiste en interpretar los resultados y averiguar qué tan efectivo fue el proceso realizado.

Del proceso anterior, es importante destacar de manera puntual a la matematización horizontal, pues una de sus finalidades es encontrar un modelo matemático que represente la situación, pero este propósito corresponde al proceso de modelación matemática descrito anteriormente. En este sentido, se puede inferir que la modelación matemática representa solo una fracción del proceso de matematización descrito por Rico (2006), ya que según él, dicho proceso a través de las tres fases no sólo implica determinar un modelo matemático, sino también buscar una solución matemática e interpretarla dentro del problema inicial.

En relación con esto, "el marco matemático del estudio PISA sostiene que aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes" (Rico, 2006). Dentro de ese marco, Patiño y Charry (2013) afirman que: "el proceso de matematización o hacer matemáticas formaliza la metodología de resolución de problemas; en pocas palabras, la matematización consiste en la resolución de problemas".

De acuerdo con los anteriores argumentos, es claro que los estudiantes de todos los niveles educativos necesitan experimentar el proceso de modelación matemática, con el cual aprendan a construir correspondencias entre los elementos que constituyen un problema real y los objetos matemáticos que se ajustan a tal problema. Imaoka et al. (2015) consideran que este tipo de problemas deben tener características que el estudiante pueda usar para modelarlos y que a la vez deben motivar múltiples representaciones.

Por último, se presenta el siguiente esquema que resume las tres fases del proceso de matematización descritas por Rico (2006).

Figura 1: Proceso de Matematización. Tomada de Patiño y Charry (2013).

1.3. Resolución de problemas

La resolución de problemas matemáticos es un campo de estudio con una larga historia y apoyo de numerosos programas de investigación en educación matemática en todos los niveles. Resolver un problema en matemáticas implica idear una estrategia que permita llegar a la solución, la persona que se enfrente a tal problema necesita tener claro los conceptos implicados y poner a prueba sus habilidades, creatividad e ingenio. Es así que, "el desafío presentado por la resolución de problemas es tanto emocional (o afectivo) como intelectual; ayuda al docente a saber si los estudiantes han estado expuestos a él antes y si han aprendido a negociarlo con éxito" (Badger et al., 2012).

Al respecto, Villa y Ruiz (2011) afirman: "la resolución de problemas es una parte fundamental de la matemática, le brinda la posibilidad al estudiante de construir conocimiento y pensamiento matemático a partir de situaciones en contextos significativos". Así pues, "un principio fundamental en la resolución de problemas es la importancia de formular preguntas relevantes como medio para entender, representar, explorar y resolver problemas" (Polya, 1965).

Según Braicovich y Caro (2015), ."en una conferencia de 1968, George Polya justifica el hecho de que todos los textos de matemática contengan problemas. Estos se pueden considerar como la parte más esencial de la educación matemática". Por ello, MEN (2006) considera a la resolución de problemas como un proceso que debe estar presente en todas las actividades de matemáticas, inclusive podría convertirse en el eje principal para organizar el currículo de matemáticas. Esto lo justifica en los siguientes términos: "las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden están ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos" (MEN, 2006).

De manera semejante, Braicovich y Caro (2015) asegura que no hay duda que uno de los pilares fundamentales de la enseñanza de matemática es que los estudiantes resuelvan problemas. En este sentido, se hacen la pregunta: "¿Qué problemas son los que debemos dar a nuestros alumnos?", para tratar de responder en parte a esta pregunta, ella junto a otros docentes se inclinan por aquellos problemas destacados por Callejo de la Vega (1997) mencionados a continuación:

- Problemas accesibles: que presenten enunciados claros y requieran conocimientos al alcance de los alumnos.
- Problemas interesantes: relacionados con juegos, situaciones reales o con la historia de las matemáticas.
- Problemas relevantes: útiles para introducir conceptos, propiedades o presentar estrategias de solución.
- Problemas que se presten para introducir variantes, es decir actividades abiertas que permitan explotarlas y sacar el mayor provecho de ellas.

Todo lo anterior, nos deja claro la importancia de la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, "el análisis de los resultados obtenidos en diversas evaluaciones, ha puesto de manifiesto que la mayoría de los alumnos tienen serias dificultades al enfrentarse a la resolución de problemas de Matemáticas" (Socas et al., 2014). Dicha dificultad se presenta cuando los estudiantes no han tenido experiencia en el campo de la resolución de problemas. Al respecto Badger et al. (2012) argumentan:

> *Si un estudiante nunca antes ha lidiado con un problema matemático sustancial, solo y sin guía, entonces la experiencia de tener que analizar y descomprimir una pregunta, extraer su significado significativo, idear una estrategia, ir por callejones sin salida, atascarse, tomar riesgos, y esperar inspiración, puede combinarse para producir tal impacto que el estudiante simplemente se da por vencido. Puede ser una experiencia totalmente negativa, que si no se aborda sería muy contraproducente.*

A esto se suma la preocupación de Socas et al. (2014) quienes en su investigación manifiestan que: "los alumnos utilizan como estrategia general, la tendencia a operar con los datos del problema, sin mostrar una clara comprensión del mismo y sin identificar las relaciones operacionales o conceptuales que se dan". A la vez, refiriéndose a su trabajo anterior, Socas (2001) menciona que los estudiantes muchas veces aportan soluciones que no son válidas para las condiciones del problema, lo que evidencia una falta de pensamiento crítico.

Estas dificultades han impulsado que un gran número de investigaciones a lo largo de la historia se centren en la resolución de problemas, las cuales buscan introducir a los alumnos a resolver problemas de manera eficiente y consciente del uso de las matemáticas. Entre los trabajos que más han contribuido en este campo se encuentran aquellos realizados por los matemáticos George Polya (1887 – 1985), Miguel de Guzmán (1936 – 2004) y Alan Schoenfeld, (1947 – . . .), quienes establecen una serie de fases o pasos útiles para guiar el proceso de resolución de problemas. A continuación se describen los modelos propuestos por cada uno, los cuales fueron recopilados por Zamora (2016) y Patiño y Charry (2013)

Modelo de George Polya (1965)

El libro del matemático George Polya: *"Cómo plantear y resolver problemas"*, está dividido en cuatro partes: *"En el salón de clases"*, *"cómo resolver problemas"*, *"un breve diccionario de heurística"* y *"problemas, sugerencias, soluciones"*. En la segunda parte referida a los problemas de matemáticas, él establece un modelo útil para guiar el proceso de resolución de problemas. El propósito de este modelo es conseguir que una persona pueda enfrentar y resolver un problema de matemáticas. En su modelo, Polya propone cuatro fases a tener en cuenta, las cuales se muestran en la Figura 2 y se describen en seguida.

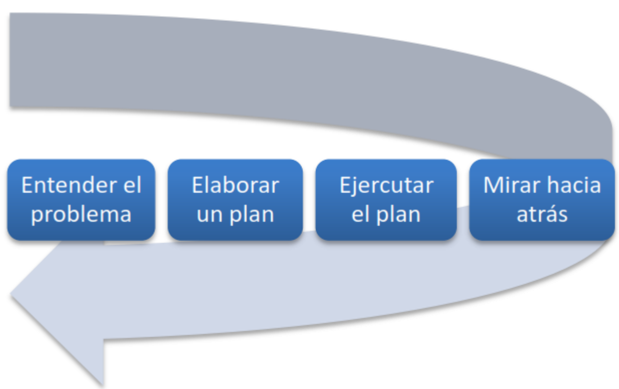


Figura 2: Resolución de problemas según Polya. Tomada de: Patiño y Charry (2013)

.

1. Entender el problema: Invita a identificar la información relevante y a tener claridad sobre lo que pide el problema a través de preguntas como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál y cómo es la condición?

2. Elaborar un plan: Sugiere buscar estrategias usadas en la solución de un problema similar que pueden ser útiles aunque el problema actual sea algo diferente. Cuando no se pueda solucionar el problema propuesto, intentar resolver un problema análogo un poco más sencillo.

3. Ejecutar el plan: Es en donde se coloca en práctica el conocimiento alcanzado y llevara a cabo el plan para dar una solución.

4. Mirar hacia atrás: Hacer una revisión de los pasos ejecutados, verificar si la respuesta es correcta y tiene sentido, de lo contrario pensar en otro plan. Luego, realizar cambios en las condiciones o propiedades iniciales, los cuales permitan profundizar en el problema y contemplar la posibilidad de crear uno diferente.

Modelo de Alan Schoenfeld (1985)

Zamora (2016) menciona que: "el norteamericano Schoenfeld publicó su libro *"Mathematical Problem",* basado en los trabajos realizados con estudiantes y profesores en los que les proponía problemas a resolver siguiendo las ideas de Polya". En su libro argumenta la importancia de las siguientes dimensiones en la resolución de problemas: Recursos, haciendo referencia a conceptos y procesos matemáticos; Heurística, conjunto de estrategias y técnicas para abordar problemas; Control, la habilidad para utilizar las heurísticas en el problema; Sistema de creencias, conjunto de ideas que tiene el estudiante relacionadas a los problemas matemáticos. Patiño y Charry (2013) presentan las tres fases propuestas por Guzmán para la resolución de problemas:

1. Análisis: Realizar un diagrama cuando sea posible, simplificar el problema sin pérdida de generalidad y estudiar casos particulares para familiarizarse con el problema.

2. Exploración: Considerar problemas equivalentes modificando algunas condiciones del problema, usar elementos auxiliares, dividir el problema y estudiarlo caso por caso.

3. Verificación: Comprobar la solución obtenida teniendo en cuenta si se usaron todos los datos pertinentes y cuando sea posible confirmar la respuesta usando un método distinto.

Modelo de Miguel de Guzmán (1991)

Zamora (2016) escribe: "Guzmán señala que la actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza, la tranquilidad, la curiosidad y la disposición para aprender". A la vez, citando a Blanco (1996) explica que el trabajo de Guzmán: "se basa en las observaciones realizadas en su propia actividad, en el intercambio de experiencias con sus compañeros, en la exploración de las formas de pensar de sus alumnos en la universidad y en el estudio de las obras de otros autores". Finalmente, describe el modelo de Guzmán para la resolución de problemas, el cual consiste en cuatro fases:

1. Familiarizarse con el problema: Consiste en entender con detalle el problema, identificar si los datos son suficientes o no y si existe relación entre ellos.

2. Búsqueda de estrategias: Propone empezar por lo más fácil, experimentar, hacer esquemas, figuras o diagramas que representen la situación, elegir un lenguaje adecuado y notación apropiada, buscar problemas semejantes.

3. Desarrollo de la estrategia: Ejecutar la mejor estrategia a llevar a cabo, si no es viable, elegir otra alternativa que permita llegar a la solución.

4. Revisión del proceso: Examinar los pasos realizados, en caso de no llegar a la respuesta, encontrar la falla en el procedimiento y sacar el mejor provecho al problema.

Un aspecto a destacar el cual aparece en los tres modelos es, que mientras sea posible se realice un diagrama o figura de la situación, ya que una representación gráfica en muchas ocasiones aporta información vital para entender y resolver el problema. Pues Aguilar y Reyes (2016) señalan que: "comúnmente, cuando se resuelven problemas de forma tradicional (con papel y lápiz) el estudiante no se plantea la tarea de reconstruir las figuras que aparecen en el enunciado del problema", causando así que los alumnos tengan dificultades en la comprensión del problema.

Luego de estudiar los tres modelos de resolución de problemas, se ha tomado como referente principal el modelo de Polya para hacer una comparación entre las fases propuestas en cada uno. Tras analizar las sugerencias descritas en los modelos de Schoenfeld y Guzmán se dedujo que estas fases se pueden encajar en el modelo de Polya, pues sus propuestas guardan cierta similitud, por ello fue posible agruparlos como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Modelos de resolución de problemas. Fuente: Esta investigación.

<table>
<tr><th>Autor</th><th>Fase 1</th><th>Fase 2</th><th>Fase 3</th><th>Fase 4</th></tr>
<tr><td>Polya (1965)</td><td>Entender el problema</td><td>Elaborar un plan</td><td>Ejecutar el plan</td><td>Mirar hacia atrás</td></tr>
<tr><td>Schoenfeld (1985)</td><td>Análisis</td><td colspan="2">Exploración</td><td>Verificación</td></tr>
<tr><td>Guzmán (1991)</td><td>Familiarizarse con el problema</td><td>Búsqueda de estrategias</td><td>Desarrollo de la estrategia</td><td>Revisión del proceso</td></tr>
</table>

Con base en la Tabla 2, se ha diseñado un diagrama el cual aparece en la Figura 3 con el propósito de mostrar la idea general de cómo abordar y resolver un problema en matemáticas, este tiene como punto de partida una situación problema, también aparecen enumeradas cada una de las fases y se indica lo que se obtiene luego de efectuar cada una de ellas. En dicho diagrama se observa que el proceso inicia con la fase 1, la cual permite tener claridad sobre el problema, seguido de la fase 2 con la que se busca una estrategia de solución, ya con la fase 3 se obtiene una solución matemática del problema, por último la fase 4 permite volver a la situación inicial para examinar la solución encontrada y contemplar la posibilidad de modificar sus enunciados para crear nuevos problemas.

Figura 3: Diagrama sobre los modelos de resolución de problemas. Fuente: Esta investigación.

Es importante anotar que la agrupación hecha en la Tabla 2, tiene como fin mostrar que los tres modelos guardan cierta semejanza en las fases que proponen mas no son iguales. Por ejemplo, en los tres modelos descritos anteriormente se observa que en la fase 4, todos concuerdan en que ahí se debe hacer la revisión del proceso realizado para tener seguridad de la seguridad de la solución encontrada. Pero en el modelo de Polya, esta fase es la que más enriquece al estudiante, pues además de revisar el proceso se contempla la posibilidad de generar nuevos problemas.

En el siguiente capítulo, se presenta una breve reseña histórica de la teoría de grafos y se definen de manera formal algunos conceptos que serán de utilidad más adelante. También se resalta la importancia de los grafos en la resolución de problemas.

Capítulo 2

Teoría de Grafos

2.1. Historia

Existen grandes motivaciones históricas sobre la teoría de grafos, Chiappa (1989) hace referencia a "algunos problemas cuya resolución llevó a introducir o utilizar conceptos que ahora se incluyen en la teoría de Grafos". Entre ellos se encuentran: el problema de los puentes de Königsberg, a partir del cual se introdujo los ciclos y caminos eulerianos, con la resolución de este problema surgieron las principales bases que dieron origen a esta teoría; los juegos del dodecaedro regular, que dieron inicio a los caminos y ciclos hamiltonianos; y el problema de los cuatro colores del cual nació la coloración de vértices y aristas de grafos. A continuación se presenta una breve reseña histórica de cada uno.

El problema de los puentes de Königsberg

La Teoría de grafos surgió en 1736 con el planteamiento del famoso problema de los puentes de Königsberg. Hudson (2002) relata que Heinrich Kuhn, profesor de matemáticas del gimnasio académico de Danzig, gracias a Carl Ehler alcalde de dicha ciudad, pudo comunicarse con Leonhard Euler (1707 – 1783), jefe de matemáticas en la Academia de San Petersburgo a través de una carta enviada el 9 de marzo de 1736. En esta, Kuhn presentaba un problema respecto a los puentes de Königsberg, ciudad de Prusia Oriental (actualmente Kaliningrado, Rusia) la cual es atravesada por el río Pregel dividiendo su terreno en cuatro islas, unidas en aquel entonces por siete puentes llamados: *puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel.* "El problema consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos" (Murga, 2012).

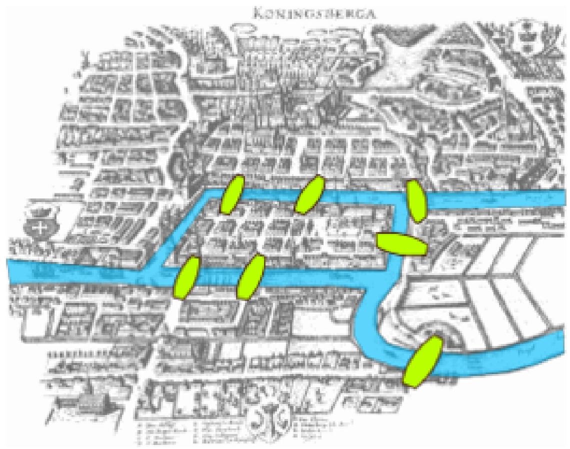


Figura 4: Mapa de los puentes de Königsberg. Tomada de: Pena (2016).

A principios de abril de 1736, Euler respondió a dicha carta diciendo que la pregunta sobre los puentes de Königsberg "guarda poca relación con las matemáticas... y su descubrimiento no depende de ningún principio matemático"(Sachs et al., 1988). Aun así, en el mismo año, él mismo produjo un documento al respecto que fue publicado en la Academia de San Petersburgo (1736) en el cual, según Lloyd (1976), citado en Hudson (2002):

> *Euler generalizó el problema de los puentes de Königsberg a cualquier número de regiones terrestres y puentes, y declaró una condición necesaria y suficiente para que un paseo a través de cada puente tenga lugar. La condición fue que o bien ninguna región o sólo dos regiones con un número impar de puentes permiten que se lleve a cabo la caminata.*

Ahora bien, en el mapa de Königsberg mostrado en la Figura 4, se observa que a la región del norte se podía llegar por tres puentes, la región central estaba conectada a las demás mediante cinco puentes, las regiones del sur y del oriente disponían igualmente de tres puentes para comunicarse. Dado que las cuatro regiones estaban unidas por un número impar de puentes, de acuerdo con la condición de Euler se concluye que no es posible recorrer los siete puentes en la forma solicitada.

Sin embargo, "Euler solo demostró correctamente la condición necesaria. Su correspondiente prueba de suficiencia era deficiente"(Lloyd, 1976). Aun así, "tuvo razón al asumirlo, ya que casi 140 años después, Carl Hierholzer, en 1873 publicó un artículo que detallaba una prueba de la suficiencia del argumento de Euler" (Hudson, 2002).

Es importante anotar que: "el trabajo de Euler aunque contiene los conceptos teóricos de las aristas y vértices de un grafo, no proporcionó dibujos gráficos en su documento. El artículo contenía solo dos bocetos de mapas de Königsberg" (Hudson, 2002). Pues Euler no resolvió este problema utilizando figuras, "Rouse Ball fue la primera persona que representó gráficamente el problema de los puentes de Königsberg en un libro sobre matemáticas recreativas en 1892" (Kruja et al., 2002). Para ello, tomó cada isla y la representó con un punto, mientras que los puentes los reemplazó con líneas que tenían como extremos dichos puntos. A continuación se muestra un modelo similar al diseñado por Ball:

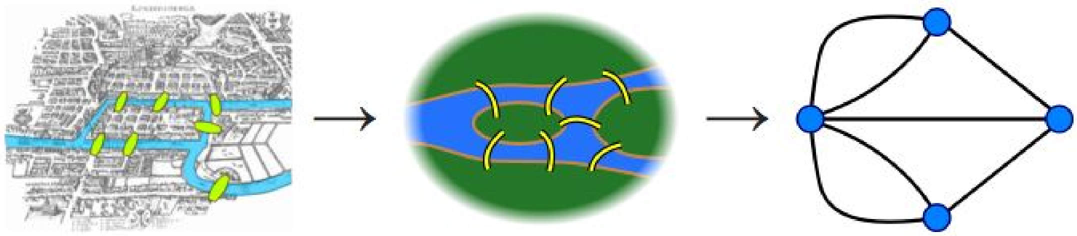


Figura 5: Descripción gráfica del problema. Tomada de: Pena (2016).

La gráfica de la derecha en la Figura 5 es un diagrama compuesto por líneas (o curvas) y puntos. Si a los puntos se les denomina *vértices* y a las líneas se las denomina *aristas*, entonces el diagrama corresponde a un *grafo.* "El término "grafo" fue introducido por J.J. Sylvester en 1878, en un artículo donde estudia la relación entre el álgebra y los diagramas moleculares" (Murga, 2012). Dado que Euler fue quien encontró una solución general para aquellos recorridos que pasan una sola vez por cada arista del grafo, hoy en día estos se conocen como *ciclos y caminos eulerianos.*

Uno de los tantos desafíos matemáticos relacionados con el anterior concepto y que todos alguna vez enfrentamos, es aquel donde dada una figura se propone dibujarla sin levantar el lápiz y sin repetir segmentos. Un ejemplo de tal reto es el problema del sobre, el cual si puede ser dibujado bajo las condiciones antes mencionadas.

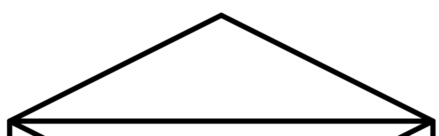


Figura 6: Problema del sobre. Tomada de: Braicovich y Caro (2015).

La Figura 6 puede ser vista como un grafo, pues los segmentos del sobre corresponden a las aristas, mientras que los puntos donde se unen dichos segmentos corresponden a los vértices. En este sentido, el trazo realizado para dibujar este sobre corresponde a un recorrido euleriano.

Juegos del dodecaedro regular

Por otra parte, el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) mientras realizaba sus trabajos sobre el "Cálculo Icosiano: álgebra no conmutativa que involucra rutas de representación gráfica del dodecaedro regular, inventa un juego llamado *"Icosian Game"* el cual presentó en una reunión de la Asociación Británica en Dublín en 1857" (Hudson, 2002).

Este juego, al cual Hamilton llamaba: *"el dodecaedro del viajero"* o *"un viaje alrededor del mundo"*, consistía en un dodecaedro regular hecho de madera, con sus veinte vértices marcados con nombres de ciudades importantes de la época como París, Londres, etc. El objetivo del jugador según Braicovich y Caro (2015) era: "elegir un recorrido a lo largo de las aristas del dodecaedro, el cual pase exactamente una vez por cada ciudad y vuelva a la ciudad de la cual partió". Para ello, se debía insertar un alfiler en cada vértice visitado, luego se conectaban con un hilo para evitar pasar dos o más veces por un mismo sitio. Hamilton a la vez ideó algunas variaciones al juego que lo hacían más interesante, por ejemplo hacer el recorrido pasando por todas las ciudades pero sin finalizar en la ciudad de la cual partió, o agregando la condición de iniciar sobre una cierta ciudad o visitar primero algunas ciudades acordadas. "Un proveedor interesado de juegos y rompecabezas compró el juego por 25 libras y comenzó a comercializar el juego dos años más tarde. Desafortunadamente, el juego no fue tan exitoso como uno hubiera esperado" (Wilson, 1999).

Braicovich y Caro (2015) relata que: "al no ser cómodo trabajar sobre el dodecaedro, Hamilton desarrolló una versión del juego más práctica, en la cual dicho poliedro regular se reemplazaba por un grafo". Ahora, el objetivo era buscar y trazar un ciclo en el grafo (camino que pasa por cada vértice una sola vez excepto el primero). A continuación se muestra el grafo que representa al dodecaedro con un ciclo ahí encontrado.

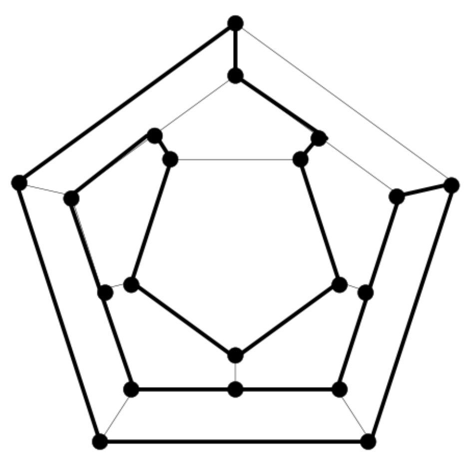


Figura 7: Grafo del Dodecaedro. Tomada de: Braicovich y Caro (2015).

Al ser Hamilton quien propuso aquellos recorridos que pasan una sola vez por cada arista del grafo, hoy en día estos se conocen como *ciclos y caminos hamiltonianos.* Pero según Hudson (2002): "Hamilton, no fue el primero en publicar sobre el tema, Thomas Penyngton Kirkman, un clérigo inglés, había discutido el problema en un artículo sobre poliedros de 1856". El principal aporte de Kirkman fue: "identificar una clase general de grafos sin ciclos. Él determinó que los poliedros con un número impar de vértices y un número par de aristas en cada cara no tienen tal ciclo" Hudson (2002).

El problema de los cuatro colores

Por otra parte, en el año 1852, Francis Guthrie (1831 – 1899) mientras se encontraba "coloreando un mapa de los condados de Inglaterra, se dio cuenta de que solo cuatro colores eran necesarios para asegurar que todos los condados vecinos se asignaban a colores diferentes" (Pena, 2016). Tras su observación, "Francis demostró fácilmente que el uso de cuatro colores era necesario, pero no pudo presentar una prueba válida de suficiencia" (Holton & Purcell, 1979). Por tanto, Guthrie le presenta la conjetura a su hermano Frederick Guthrie (1833 – 1886) quien la hace llegar a su profesor de matemáticas Augustus De Morgan (1806 – 1871) de la University College de Londres, este último a pesar de sus intentos por buscar un contraejemplo al tratar de dibujar un mapa que necesitara de cinco colores, no logró encontrarlo. En octubre de 1852, De Morgan envía una carta a Hamilton diciendo que un estudiante había indicado que: "si una figura se divide de alguna manera y los compartimentos se colorean de manera diferente para que las figuras con cualquier porción de la línea de límite común tengan un color diferente, es posible que se requieran cuatro colores, pero no más"(Holton & Purcell, 1979). Hamilton por su parte, respondió que por el momento no estaba interesado en el problema.

Según Murga (2012), durante el verano de 1878, Arthur Cayley presenta la conjetura de los cuatro colores a la *London Mathematical Society* bajo el siguiente enunciado:

"Dada cualquier división de un mapa plano en regiones, éste puede ser coloreado, únicamente con cuatro colores, de manera que regiones con frontera común tengan colores distintos."

Un año después, Alfred Bray Kempe un abogado de Londres anuncia en la revista británica *Nature* los resultados de una prueba que había encontrado para la conjetura. Ese mismo año, Cayley, que había sido profesor suyo, le sugiere presentar el teorema en la revista recién fundada *American Journal of Mathematics*, en su demostración se apoya en el Método de las Cadenas de Kempe, (más información al respecto en (Hudson, 2002)). "William Story, adjuntó algunas adiciones al artículo de Kempe que detalla algunos casos especiales que Kempe no había mencionado. Luego, Story presentó el documento con las adiciones a la Asociación Científica de la Universidad Johns Hopkins en Noviembre de 1879" (Hudson, 2002). Sin embargo, dicha demostración fue válida sólo por once años hasta que en 1890, Percy John Heawood publica el artículo: Map colouring theorem, en el cual menciona un fallo encontrado en los argumentos de Kempe. De modo que el teorema de los cuatro colores vuelve a ser considerado una conjetura.

Desde la primera mención de esta conjetura en 1852 a cargo de Guthrie, pasó más de un siglo sin que algún matemático pudiera encontrar una demostración con argumentos que no pusieran en duda la eficiencia de la prueba. Finalmente en 1976, los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken presentaron una demostración, en la cual afirman que no puede existir un contraejemplo para el Teorema de los cuatro colores. Según Pena (2016): "ellos redujeron el número de configuraciones a 1936 mapas, los cuales fueron comprobados individualmente con ayuda del ordenador. Utilizaron 1200 horas de tiempo computacional para obtener la prueba final". De este modo, "Appel y Haken llegaron a la conclusión de que no existen contraejemplos más pequeños, ya que cualquiera debe contener uno de estos 1936 mapas" (Murga, 2012), el teorema de los cuatro colores se considera el primer resultado de la coloración de grafos.

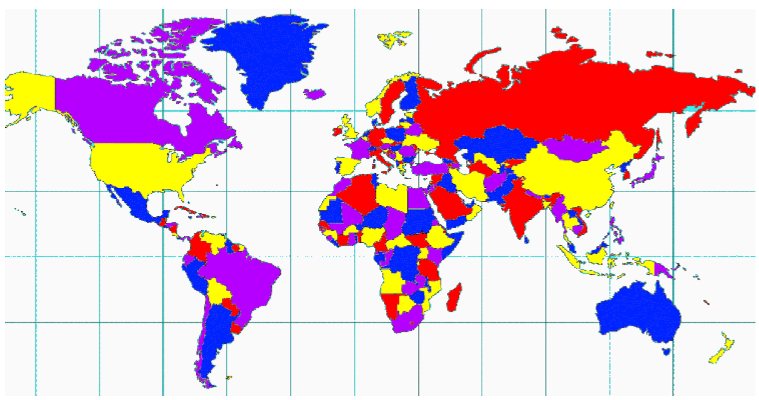


Figura 8: Teorema de los cuatro colores. Tomada de: Andrea Sanz (n.d).

Para colorear un mapa, este se debe identificar como un grafo plano (aquel cuyas aristas se intersectan únicamente en los vértices del grafo). Para ello, se dibuja un vértice por cada país o región, y una arista une dos vértices si sus correspondientes países tienen una frontera común (esta debe ser un segmento y no sólo un punto). Luego, a cada vértice se le asigna un color de modo que dos vértices adyacentes (unidos por una arista) no sean coloreados igual. A este proceso se le conoce como *coloración de vértices de un grafo.*

De este asunto histórico surgen cantidad de aplicaciones, por ejemplo la asignación de horarios a un docente de modo que no se crucen sus clases, la distribución de animales en un zoológico donde no pueden convivir ciertas especies, entre otras. Estas situaciones, al igual que en la coloración de mapas se pueden modelar y resolver mediante coloración de grafos, donde una parte esencial es determinar el número mínimo de colores que pueden usarse, pues esta cantidad permitirá optimizar espacio y tiempo. En la Figura 9 se muestra un mapa bajo el proceso de coloración descrito en el párrafo anterior.

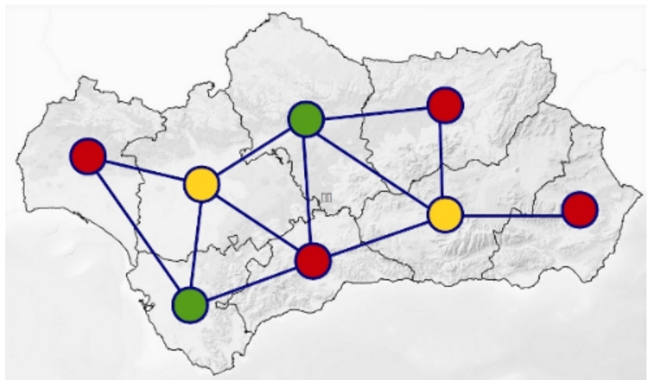


Figura 9: Grafo asociado a un mapa. Tomada de: Murga (2012).

Otro tipo de coloración de grafos es la coloración de aristas, la cual consiste en colorear todas las aristas del grafo de modo que dos aristas con el mismo vértice como extremo, no pueden llevar el mismo color. Al respecto, "el primer documento que trata sobre el problema de la coloración de aristas fue escrito por P. Guthrie Tait en el año 1880 y también surge a partir del teorema de los cuatro colores" (Murga, 2012).

2.2. Conceptos básicos

Muchas situaciones de la vida cotidiana se pueden llevar al lenguaje matemático, para ello se debe hacer una correspondencia entre los elementos que conforman la situación y los conceptos matemáticos que se ajustan a esta. Para tal efecto, observe el escenario de la Figura 10 que refleja el contexto urbano de algún pueblo o ciudad, en este aparece la casa de Camila y algunos sitios de interés para visitar, tales como la librería, la tienda de música, entre otros. Estos se encuentran conectados a través de calles de doble sentido, es decir que Camila puede ir de un sitio a otro y regresar por las mismas vías.

Ahora bien, este escenario se puede llevar al lenguaje matemático mediante una notación adecuada de los objetos que lo conforman. En este sentido, la casa de Camila y los sitios de interés se pueden representar mediante *puntos* etiquetados en el plano. Por ejemplo, la librería se puede etiquetar como el punto L. De esta manera, todos los puntos de la Figura 10 son:

$C =$ casa de Camila, $H =$ heladería, $I =$ iglesia, $L =$ librería, $M =$ tienda de música, $P =$ panadería, $Q =$ peluquería, $R =$ tienda de ropa.

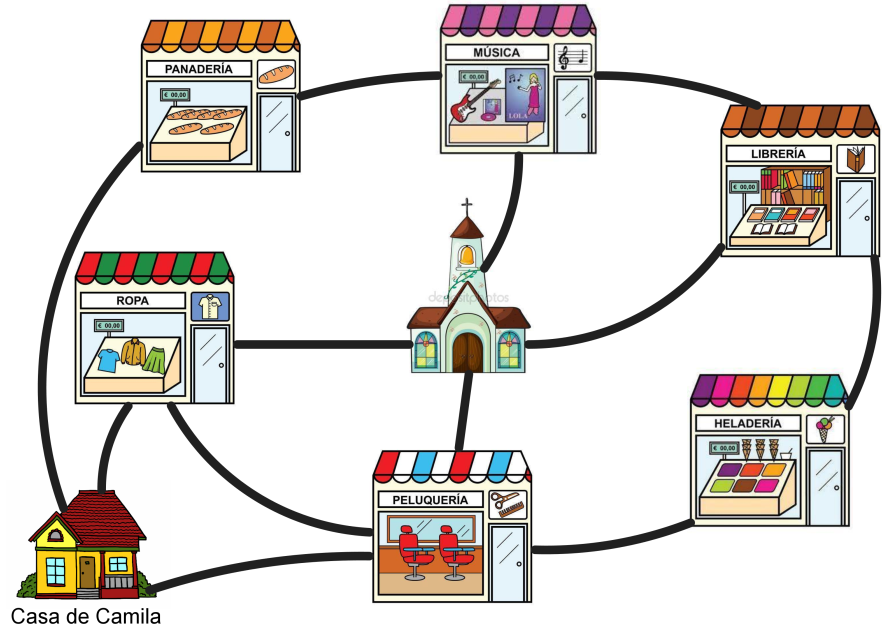


Figura 10: Contexto urbano de una ciudad. Fuente: Esta investigación.

De igual manera las calles del sector se pueden representar mediante *segmentos (de recta o curva)*, para este fin se toman dos sitios conectados por una calle y se asumen como los extremos de un segmento. Por ejemplo, la casa de Camila *(punto C)* está comunicada con la panadería *(punto P)* a través de una calle, observe entonces que ese segmento tiene dos extremos, los cuales dado el doble sentido de las calles, ambos son tanto punto inicial como final del segmento. Así, el segmento que une los sitios C y P se denota por $\{C, P\}$. Luego, todos los segmentos de la Figura 10 son:

$$\{C, P\}, \{C, Q\}, \{C, R\}, \{H, L\}, \{H, Q\}, \{I, L\}, \{I, M\}, \{I, Q\}, \{I, R\}, \{L, M\}, \{M, P\}, \{Q, R\}$$

Una vez denotados todos los objetos, ahora se ha construido un diagrama de puntos y segmentos el cual representa al escenario urbano inicial.

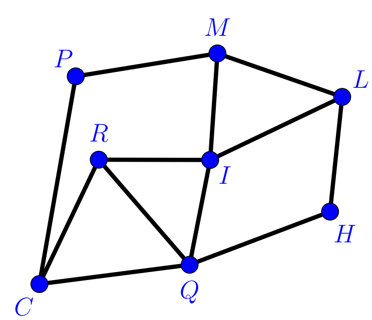


Figura 11: Diagrama de puntos y segmentos. Fuente: Esta investigación.

Dentro de la formalidad matemática de la teoría de grafos, el diagrama de la Figura 11 corresponde a un *grafo* el cual se compone por *vértices* y *aristas*. En este, las aristas no se caracterizan por ser segmentos de recta o de curva o menos por su longitud, pues al tratarse de una representación, la importancia radica en conservar la relación que existe entre cada arista y los dos vértices que conecta.

Note además, que algunos sitios disponen de más calles de conexión con otros lugares. Por ejemplo, desde la peluquería *(punto Q)* Camila puede visitar cuatro sitios de interés recorriendo solo una calle, mientras que desde la heladería *(punto H)* solo dispone de dos opciones. Ahora bien, si al número de calles existentes desde cada lugar se le denomina *grado*, entonces la peluquería y la heladería tienen grados 4 y 2 respectivamente.

Todo lo mencionado en la situación anterior, permite tener un acercamiento a la idea general del grafo y sus elementos. A continuación se describen de manera formal algunos conceptos de la teoría de grafos, los cuales fueron consultados en los textos de Wilson (1996), Bondy y Murty (2008) y Murga (2012).

Definición 2.1. Un *grafo no dirigido* es una terna $G = (V, A, \varphi)$ donde V y A son conjuntos disjuntos, V es no vacío y φ es una función que a cada elemento a de A le asigna un subconjunto de dos elementos $\{v_1, v_2\}$ de V. A los elementos de V se les denomina *vértices* y a los de A se les denomina *aristas*.

La manera más usual de representar un grafo es dibujando (en el plano) un punto por cada vértice, y si existe una arista asignada a dos de ellos, entonces se dibuja un segmento (de recta o curva) que los una. En el caso en que dos vértices estén unidos por más de una arista, estas se denominan *aristas múltiples*.

Cuando la función φ es inyectiva, es decir que los vértices unidos no poseen más de una arista entre ellos, el grafo se denomina *simple*. Este grafo, es un par $G = (V, A)$, en donde cada arista a de A es un subconjuntos de dos elementos $\{v_1, v_2\}$, estas se denotan de la forma $a = v_1v_2$; se dice que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes y que son incidentes en la arista a y viceversa. A v_1 y v_2 se les denomina extremos de a.

Por ejemplo, en la Figura 12.a se ha representado un grafo simple, mientras que en la Figura 12.b aparece un grafo donde a, b, f y g son aristas múltiples.

Es importante anotar que un grafo puede tener distintas representaciones. Por ejemplo, el grafo G de la Figura 12.a, el cual está dado por $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5\}$, otra de sus posibles representaciones se muestra en la Figura 13.

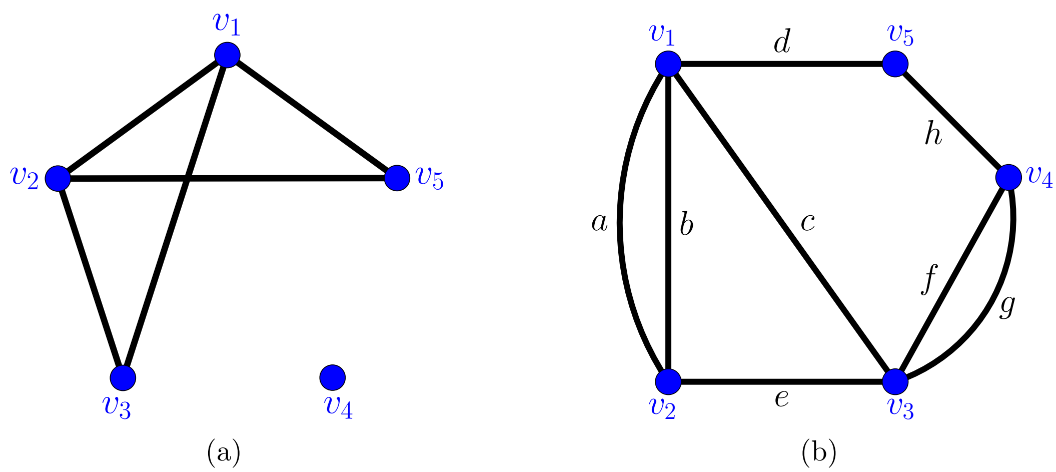


Figura 12: Un grafo simple y uno con aristas múltiples. Fuente: Esta investigación.

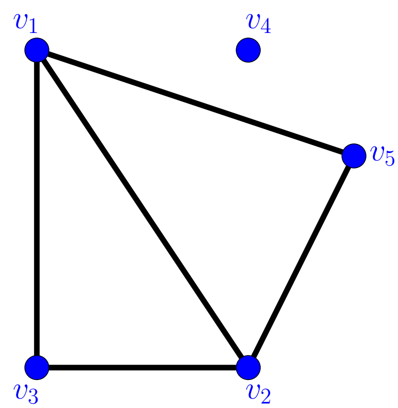


Figura 13: Otra representación para el grafo de la Figura 12.a. Fuente: Esta investigación.

Definición 2.2. Un grafo G es *plano* si puede ser representado en el plano, de manera que sus aristas se intersecten únicamente en los vértices del grafo. Esta representación gráfica de G se denomina *representación planar de* G.

Por ejemplo, la representación del grafo de la Figura 12.a no es planar, mientras que la representación del mismo grafo mostrada en la Figura 13 si es planar, luego el grafo G es plano.

Definición 2.3. Dado un grafo G y un vértice v, se define el *grado* de v como el número de aristas de G que inciden en v, este se denota por $d(v)$. Un vértice con ninguna arista incidente en él, es decir de grado cero, se denomina *vértice aislado de* G. Como el grado de un vértice no depende de la representación del grafo, entonces se denota por $\delta(G)$ al grado mínimo de G y por $\Delta(G)$ al grado máximo de G.

Por ejemplo, en el grafo G de la Figura 13, sus vértices poseen los siguientes grados:

$$d(v_1) = 3,\ d(v_2) = 3,\ d(v_3) = 2,\ d(v_4) = 0,\ d(v_5) = 2.$$

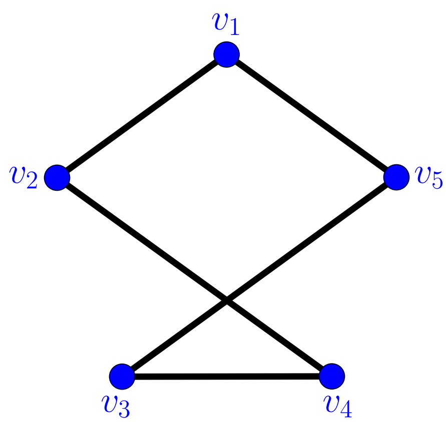
Como $d(v_4) = 0$, entonces v_4 es un vértice aislado de G. El grado mínimo de G es $\delta(G) = 0$ y el grado máximo es $\Delta(G) = 3$.

Existen muchos tipos de grafos que reciben nombres especiales, a continuación se definen algunos.

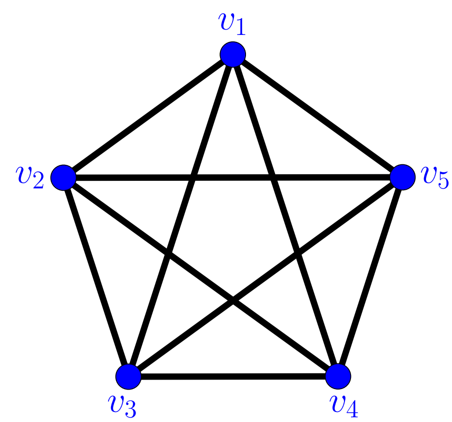
Definición 2.4. El *grafo vacío* es un par $G = (V, A)$, donde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{\}$, es decir, aquel formado por n vértices y ninguna arista. Al caso particular donde $V = \{v_1\}$ se le denomina *grafo trivial.*

Definición 2.5. Un grafo G es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado, es decir, $\delta(G) = \Delta(G)$. Un grafo con todos sus vértices de grado k se denomina *k-regular* o *grafo regular de grado k*. En particular, en un grafo simple de n vértices, donde cada uno tiene grado $n-1$, es decir que cualquier par de vértices son adyacentes, se denomina *grafo completo* y se denota K_n.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 14.a es regular de grado 2 y el grafo de la Figura 14.b es un K_5.



(a)



(b)

Figura 14: Grafos regulares. Fuente: Esta investigación.

Leonhard Euler, en 1736 descubrió un hecho que relaciona los grados de los vértices de un grafo con el número de aristas, dando como resultado el siguiente lema.

Lema del Apretón de manos. *La suma de los grados de todos los vértices de un grafo, es igual al doble de su número de aristas, es decir:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|A|\,, \tag{2.1}$$

en donde $|A|$ representa el cardinal (número de elementos) del conjunto A.

La demostración consiste en una prueba de conteo, pues en la suma se cuenta el número de aristas que inciden en cada vértice (pero una arista incide en dos vértices) por lo que cada arista ha sido contada dos veces. Como resultado, la sumatoria de grados de los vértices será dos veces el número de aristas. Note que esta igualdad implica que en un grafo no puede existir un solo vértice de grado impar.

El nombre del lema se debe a la siguiente interpretación: los vértices representan personas reunidas en una fiesta y una arista representa un saludo de mano entre dos de ellas (apretón de manos). Así pues, al sumar los saludos de cada asistente, en realidad se están contando dos veces, uno por cada persona que intervino en el apretón de manos, por tanto se obtendrá el doble del número de saludos ejecutados en el evento.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 13 tiene el conjunto de aristas: $A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5\}$. Al hacer la suma de los grados se tiene:

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 3 + 2 + 0 + 2 = 10.$$

Note que 10 es el doble del número de aristas, ya que en dicho grafo: $|A| = 5$.

Para el caso de un grafo regular con n vértices de grado k, se sumaría n veces k, por tanto la sumatoria es igual a nk. Luego al despejar $|A|$ de la Ecuación 2.1 se tiene:

$$|A| = \tfrac{nk}{2},$$

Por ejemplo, el número de aristas en el grafo regular de la Figura 14.a es: $|A| = \frac{5(2)}{2} = 5$, y el número de aristas del K_5 de la Figura 14.b es: $|A| = \frac{5(4)}{2} = 10$.

Definición 2.6. Un *recorrido* en un grafo G es una sucesión alternada de vértices y aristas de la forma $W = v_0a_1v_1a_2v_2 \cdots a_kv_k$, donde a_i es la arista con extremos v_{i-1} y v_i para $1 \leq i \leq k$, además se dice que v_0 es el origen y v_k es el final de W. Esta definición admite la repetición de vértices y aristas.

Un recorrido se denomina *camino* cuando todas sus aristas son distintas. Cuando en un camino todos sus vértices son distintos, salvo el origen y el final, el camino se denomina *simple*. Un camino en el cual v_0 y v_k son iguales, se denomina *cerrado*.

Definición 2.7. Un *ciclo* es un camino simple y cerrado. Un ciclo de n vértices tiene n aristas y se denota por C_n.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 15.a es un C_6 y el grafo de la Figura 15.b es un C_7.

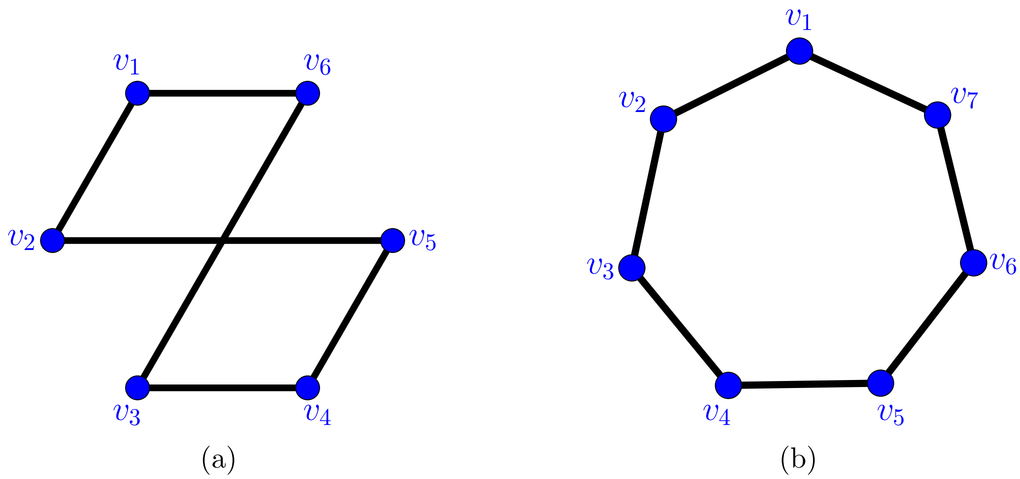


Figura 15: Ciclos. Fuente: Esta investigación.

Definición 2.8. Un grafo G es *conexo* si para cualquier par de vértices v_1 y v_2 siempre existe un camino que los une.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 12.a no es conexo, ya que no existen caminos que unan al vértice v_4 con los demás. Si a dicho grafo se le agrega la arista v_1v_4, entonces se transforma en un grafo conexo, este se muestra en la Figura 16.

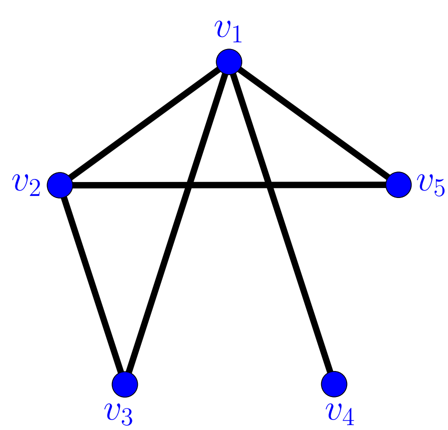


Figura 16: Grafo conexo. Fuente: Esta investigación.

Definición 2.9. Sea G un grafo y C un conjunto de colores, una coloración de vértices de G con k colores $(k \geq 1)$ de C es una correspondencia tal que, a cada vértice v se le asigna un color de C, de manera que dos vértices adyacentes no queden con igual color. A este proceso se le denomina una *k-coloración de vértices de* G y se dice que el grafo G es *k-coloreable.*

El *número cromático* de G se define como el mínimo valor $k \in \mathbb{N}$ tal que G es k-coloreable y se denota por $\chi(G)$. Si $k = \chi(G)$ se dice que el grafo G es *k-cromático*. En particular, en un grafo completo de n vértices, $\chi(G) = n$ ya que todos sus vértices son adyacentes entre sí.

Por ejemplo, en la Figura 17.a aparece una coloración de vértices para el grafo de la Figura 16, y en la Figura 17.b se muestra que el K_5 de la Figura 14.b es *5-cromático*.

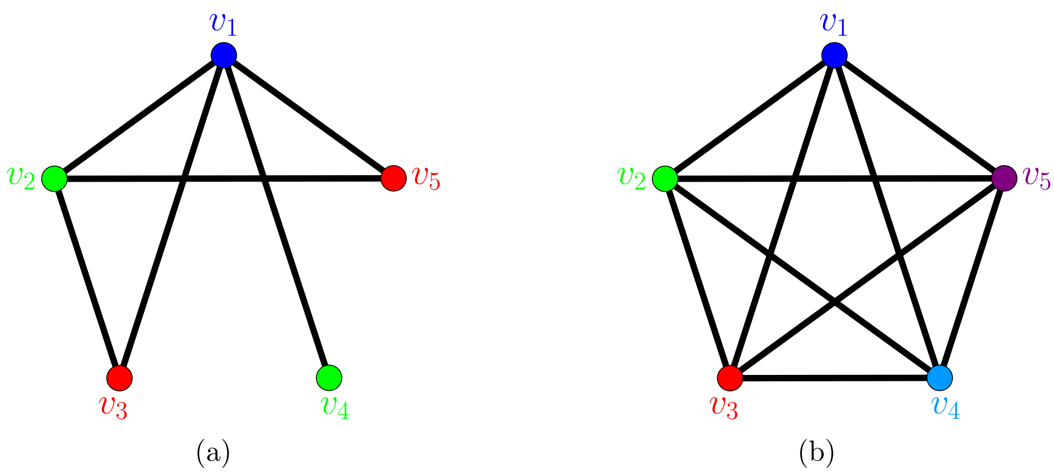


Figura 17: Ejemplos de coloración de vértices de un grafo. Fuente: Esta investigación.

A continuación se presentan dos clases especiales de caminos y ciclos.

Caminos y ciclos eulerianos

Definición 2.10. Un camino en un grafo G se denomina *euleriano* si este contiene todas las aristas del grafo. En particular, si el camino es cerrado, entonces se denomina *ciclo euleriano*. Un grafo con un ciclo euleriano se denomina *grafo euleriano*.

A partir de los hallazgos encontrados por Euler (1736), se originaron dos teoremas que en el lenguaje de grafos responden a la siguiente pregunta: *¿En cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez?*

Teorema 2.11. *(Euler, 1736). Un grafo conexo contiene un ciclo euleriano si y solamente si todos sus vértices tienen grado par.*

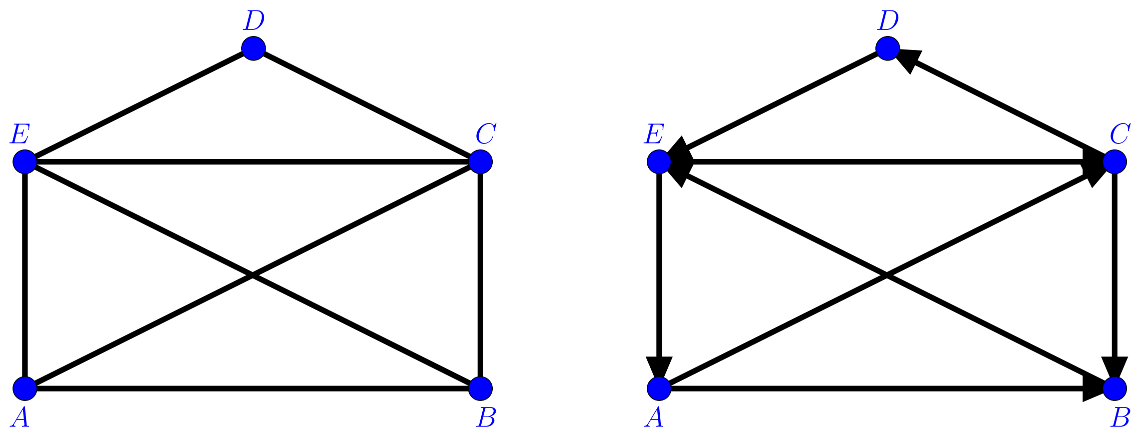
Teorema 2.12. *(Euler, 1736). Un grafo conexo contiene un camino euleriano si y solamente si tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

En la demostración del Teorema 2.12, se probó que el camino euleriano debe iniciar su recorrido en uno de los vértices de grado impar y finalizar en el otro.

Las demostraciones de estos teoremas se pueden encontrar con detalle en Wilson (1996).

En el caso de los grafos simples, un camino euleriano $v_0a_1v_1a_2v_2 \cdots a_kv_k$ es equivalente a la secuencia de aristas: $v_0v_1 - v_1v_2 - v_2v_3 - \cdots - v_{k-1}v_k$, donde $v_{i-1}v_i$ para $1 \leq i \leq k$, son las aristas con extremos en v_{i-1} y v_i. Por ejemplo, en la Figura 18.a se muestra el grafo del sobre, el cual corresponde a un grafo conexo con solo dos vértices de grado impar *(A y B)*. Por el Teorema 2.12, un camino euleriano es aquel que inicia en A y finaliza en B. Como el grafo es simple, entonces dicho camino aparece en la Figura 18.b trazado en el siguiente orden de aristas:

$$AB - BE - EC - CD - DE - EA - AC - CB.$$



(a) (b)

Figura 18: Camino euleriano en el grafo del sobre. Fuente: Esta investigación.

Caminos y ciclos hamiltonianos

Definición 2.13. Un camino simple en un grafo G se denomina *hamiltoniano* si este contiene todos los vértices del grafo. En particular, si el camino es cerrado, entonces se denomina *ciclo hamiltoniano*. Un grafo con un ciclo hamiltoniano se denomina *grafo hamiltoniano*.

Wilson (1999) manifiesta que a diferencia de los caminos y cilos eulerianos, "no se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para decidir si un grafo general tiene o no un camino o ciclo hamiltoniano, aunque las condiciones *suficientes* fueron descubiertas por Dirac en 1952 y Ore en 1960". Estas aparecen a continuación.

Teorema 2.14. *(Dirac, 1952). Si G es un grafo simple con n vértices $(n \geq 3)$ y si $d(v) \geq \frac{n}{2}$ para cada vértice v, entonces G es hamiltoniano.*

Teorema 2.15. *(Ore, 1960). Si G es un grafo simple con n vértices $(n \geq 3)$ y si $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ para cada par de vértices v_1 y v_2 no adyacentes, entonces G es hamiltoniano.*

Las demostraciones de estos teoremas se pueden encontrar con detalle en Wilson (1996).

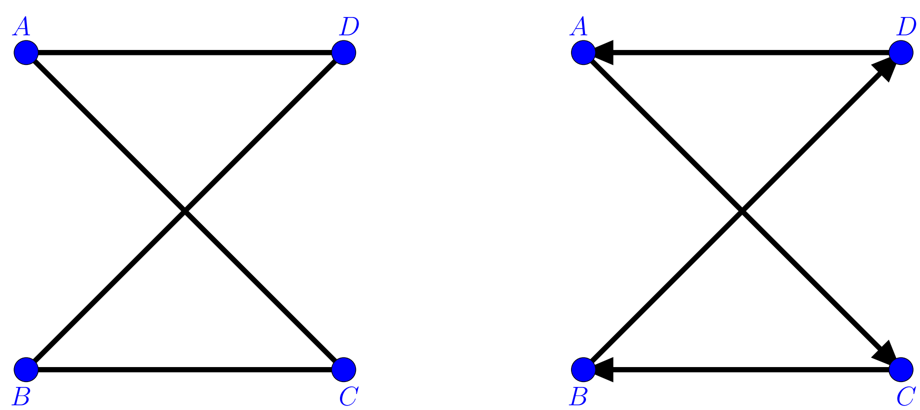
Es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones a la hora de buscar caminos y ciclos hamiltonianos en un grafo.

1. Si un grafo tiene un vértice de grado uno, entonces no puede tener un ciclo hamiltoniano.
2. Si un vértice tiene grado dos, entonces las dos aristas incidentes tienen que ser parte del ciclo hamiltoniano.
3. Si un vértice tiene grado mayor que dos, y dos de las aristas incidentes pertenecen al camino o ciclo hamiltoniano, entonces el resto de las aristas incidentes no pertenecen.

En el caso de los grafos simples, un camino hamiltoniano $v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \cdots a_k v_k$ es equivalente a la secuencia de vértices: $v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_k$, donde v_{i-1} y v_i para $1 \leq i \leq k$, son los extremos de cada arista.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 19.a cumple con los requisitos del Teorema 2.14, por tanto un ciclo hamiltoniano es el que aparece en la Figura 19.b trazado en el siguiente orden de vértices:

$$A - C - B - D - A.$$



(a) (b)

Figura 19: Grafo hamiltoniano. Fuente: Esta investigación.

Por otro lado, el grafo de la Figura 20.a no cumple con los requisitos del Teorema 2.14 ni del Teorema 2.15, pero como no son condiciones necesarias, aún no se descarta la posibilidad de que exista un ciclo hamiltoniano. Dado que el vértice C tiene grado uno, entonces de acuerdo con la consideración 1, el grafo en definitiva no tiene tal ciclo. Aunque si posee caminos hamiltonianos, uno de ellos aparece en la Figura 20.b trazado en el siguiente orden de vértices:

$$C - A - B - D.$$

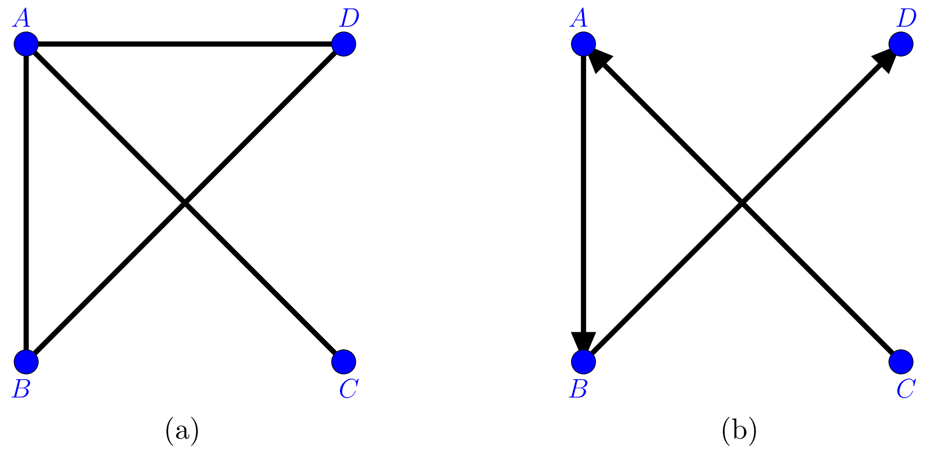


Figura 20: Camino hamiltoniano en el grafo. Fuente: Esta investigación.

2.3. Los grafos en la resolución de problemas

La teoría de grafos tiene sus fundamentos en las matemáticas discretas y matemáticas aplicadas. Esta requiere de diversos conceptos de áreas como aritmética, álgebra, geometría, probabilidad, combinatoria y topología dependiendo del nivel de complejidad en que se la estudie. En los últimos años, ha tenido gran influencia en el campo de la informática, la computación y las telecomunicaciones gracias a la cantidad de aplicaciones que se derivan de esta teoría. Los grandes avances de la matemática y sus aplicaciones en distintos campos, han impulsado a esta teoría a ser actualmente una rama de las matemáticas que se encuentra en pleno desarrollo.

Sin embargo, numerosas investigaciones manifiestan que la teoría de grafos se encuentra ausente en los currículos de educación primaria, secundaria e incluso en la formación profesional. Por ejemplo, Cognigni et al. (2008) según su estudio realizado en España afirman que: “a partir de la observación de distintos programas de la asignatura Matemáticas de las provincias de Río Negro y Neuquén, notan que el tema Grafos brilla por su ausencia”. Ellos creen que en las instituciones educativas siempre se tiende a estudiar los mismos contenidos por tradición y por hábitos culturales. Además, la mayoría de los docentes desconocen el tema, y aunque algunos tienen un mínimo conocimiento de grafos o manejan algunos conceptos, no lo presentan a sus alumnos pues no hace parte del plan de estudios.

Para tener una idea si ocurre lo mismo en Colombia, en este trabajo se hizo una breve observación a los planes curriculares de los programas de Licenciatura en Matemáticas ofertados por algunas universidades a nivel nacional. De estos se observó que solo una universidad oferta el curso llamado “teoría de grafos”, por lo que se puede suponer que este tema no es muy común en los planes de formación de los docentes de matemáticas.

Por otra parte, muchas investigaciones sobre educación matemática se han centrado en analizar qué tan pertinente resulta introducir la teoría de grafos en los distintos niveles educativos. En particular, se resalta a Teresa Braicovich, docente de matemáticas quien se ha destacado por sus diversos talleres y cursillos en el marco de la resolución de problemas con grafos, los cuales ha realizado tanto con estudiantes como con docentes en formación y en ejercicio de la profesión. Entre estos trabajos aparece aquel dedicado a la modelación de situaciones problema con grafos, del cual Braicovich (2005) concluye:

> *El trabajo con grafos permite que los alumnos modelicen matemáticamente distintas situaciones de la vida real. Se pudo comprobar que los grafos permitieron modelizar matemáticamente muchas situaciones de la vida real, dando a la información una forma sencilla e incluso, muchas veces, intuitiva. Esto quedó de manifiesto durante las distintas experiencias áulicas realizadas, cuando lograron modelizar las situaciones propuestas y cuando fueron capaces de proponer diferentes situaciones que podrían ser modelizadas utilizando grafos.*

La modelación al ser una parte fundamental para la resolución de problemas, lo ideal es que los estudiantes tras modelar una situación real mediante grafos, ellos puedan continuar con el proceso de resolver el problema en el mundo matemático. Por tal motivo, sería muy positivo introducir algunos conceptos de grafos en los currículos de distintos niveles educativos, pues resulta útil para hacer que los alumnos despierten su interés por la matemática y además contribuye al desarrollo del pensamiento lógico matemático, Braicovich y Caro (2015) cita el texto de Rosenstein et al. (1997), para resaltar algunos argumentos hacen viable la introducción de los grafos al aula, pues ellos afirman que la teoría de grafos:

- Es aplicable, actualmente sus temas son muy utilizados en distintas disciplinas para modelar situaciones problema.
- Es accesible, no necesita de una base matemática fuerte para introducirla en el aula.
- Es atractiva, se pueden proponer situaciones sencillas y muy motivadoras para los alumnos.
- Es adecuada, permite reforzar los conocimientos adquiridos en el aula e introducir nuevos conceptos y propiedades.

A su vez, Braicovich y Caro (2015) afirman que: “el trabajo con grafos es sumamente rico en contenidos transferibles al aula en los primeros niveles; que conducen a la valoración de la matemática como una herramienta útil y también que es posible generar situaciones que interesen a los alumnos”. En este tipo de situaciones donde centramos nuestra atención, pues la recomendación del MEN (2006) es: “preparar situaciones problema adaptadas al contexto, pues se busca una relación cercana de los estudiantes con el contexto extraescolar o sociocultural; dicha relación es importante para despertar su interés y permitirles acceder a las actividades con una cierta familiaridad y comprensión previa". Esto es importante ya que diversos problemas de la vida cotidiana se pueden representar a través del lenguaje matemático, permitiendo así obtener soluciones matemáticas que posteriormente se traducen al problema original. En este caso, el interés radica en aquellas situaciones problema que los alumnos puedan representar y resolver mediante grafos, pues esto permite destacar los grafos como una herramienta potencial en la resolución de problemas.

Tal como se indicó en el Capítulo 1, los modelos planteados por Polya, Schoenfeld y Guzmán son un gran apoyo en el proceso de la resolución de problemas, por tal razón se ha tomado como base algunas pautas que ellos exponen en cada una de sus fases y con ellas se ha diseñado una procedimiento propio, útil para guiar el proceso de resolución de los problemas abordados en este trabajo así como los propuestos para el lector, cabe anotar que desde nuestro punto de vista, es muy probable que este procedimiento sea aplicable a todo problema que pueda modelarse mediante grafos. Este consiste de cuatro fases descritas a continuación:

Procedimiento de resolución de problemas con grafos

1. Estudiar y modelar: Consiste en leer con detalle el enunciado, identificar con claridad lo que solicita el problema, cuando sea posible clasificar la información en tablas. Luego, relacionar los elementos que constituyen el problema con los conceptos de grafos, usando el lenguaje y notación propios de esta teoría, acto seguido realizar un diagrama que represente la situación.

2. Plantear un objetivo: Consiste en revisar las propiedades del grafo que modela la situación y exponer una meta para solucionar al problema.

3. Diseñar un plan: En esta fase se debe llevar a cabo un procedimiento apropiado con los grafos, el cual permita alcanzar el objetivo propuesto.

4. Interpretar la solución: Consiste en revisar la solución obtenida con los grafos e indicar lo que significa en el contexto del problema inicial.

En la Figura 21, se presenta un diagrama que resume la procedimiento anterior, en este aparecen enumeradas las cuatro fases a tener en cuenta para solucionar un problema que se pueda relacionar con grafos y lo que se obtiene luego de efectuar cada fase. Para ello se debe partir de una situación problema, tras efectuar la fase 1 dicha situación se va a convertir en un problema de grafos, la fase 2 permite tener claro un objetivo que resuelva el problema, tras llevar a cabo la fase 3 se va a conseguir una solución dentro del mundo matemático, finalmente con la fase 4 se tendrá la solución o respuesta al problema inicial.

Figura 21: Diagrama de resolución de problemas con grafos. Fuente: Esta investigación.

No obstante, es importante aclarar que las fases sugeridas en los modelos de resolución de problemas aquí estudiados así como las fases del procedimiento propuesto para abordar problemas relacionados con grafos, no deben memorizarse o aplicarse mecánicamente, ya que el estudiante es quien debe identificar cuál/es pasos y recomendaciones son las que puede seguir conforme el problema propuesto se lo permita.

Por otro lado, cabe aclarar que el procedimiento planteado para la resolución de problemas con grafos, aún no se ha probado su eficiencia más allá de la experiencia propia, pues en este documento fue diseñado como guía para solucionar los problemas abordados más adelante.

En el siguiente capítulo se presenta una recopilación y desarrollo de 12 problemas, en los cuales se resalta la ventaja que ofrecen los grafos para modelar y resolver distintas situaciones cotidianas.

Capítulo 3

Problemas Resueltos

En este capítulo se presenta una recopilación de diversas situaciones problema que se pueden relacionar con grafos. En los documentos de donde se las extrajo, algunas de ellas presentan una solución sin mucho detalle, otras solo sugieren ideas para resolverlas y en otros casos aparecen como problemas propuestos. Por tal motivo, el propósito de este capítulo es resolver cada problema con mayor detalle y cuando sea posible dividirlo y estudiarlo por casos. Es importante mencionar que las fases sugeridas en la procedimiento de resolución de problemas con grafos planteado en el capítulo anterior, solo se harán explícitas en los primeros problemas, luego ya no será necesario especificar el lugar de cada una, pues durante el desarrollo del problema ya se hace evidente la aplicación de cada fase.

Aunque muchos de estos problemas se pueden resolver de forma analítica mediante operaciones algebraicas, los procedimientos llevados a cabo en este trabajo se caracterizan por la construcción y observación de diagramas, salvo algunos casos donde se acude al lema del apretón de manos o algunos teoremas para obtener una solución más precisa o evitar realizar procesos arbitrarios. Por tal motivo, los diagramas de grafos se crearon en GeoGebra y se ajustaron en Látex para disponer de una buena visualización, pues los procedimientos se realizan en torno a ellos.

Los siguientes problemas van dirigidos principalmente a estudiantes de educación básica y media, por ello cada problema se procura desarrollarlo de una manera práctica y entendible para ellos.

3.1. Problema 1: Las postales de los amigos

Cuatro amigos: Andrés, Britney, Carlos y Diana salen de viaje al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino, cada uno enviará una postal a dos de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los dos amigos a los que envió las suyas? Tomado de: Núñez et al. (2016).

Solución

Fase 1. Estudiar y modelar: El problema propone averiguar si es posible que cada persona reciba las dos postales de aquellos dos amigos a los que les escribió. Esta situación se puede modelar mediante grafos, para ello cada amigo se denota como un vértice de la siguiente manera: $A =$ Andrés, $B =$ Britney, $C =$ Carlos y $D =$ Diana. Por otra parte, el hecho de que el amigo x envíe una postal a y se representa mediante una arista en dirección de x a y. Ahora bien, si y también envía una postal a x entonces habrá una arista en dirección de y a x; en este caso, el intercambio de postales entre dos amigos se representa mediante una arista sin direcciones.

Fase 2. Plantear un objetivo: Construir un grafo donde cada vértice tenga justamente dos aristas no dirigidas incidentes en él. Pues esto indica que cada persona ha enviado y recibido dos postales de exactamente los mismos dos amigos.

Fase 3. Diseñar un plan: A continuación se presentan algunas situaciones, en las cuales se busca construir por tanteo un grafo con las características deseadas.

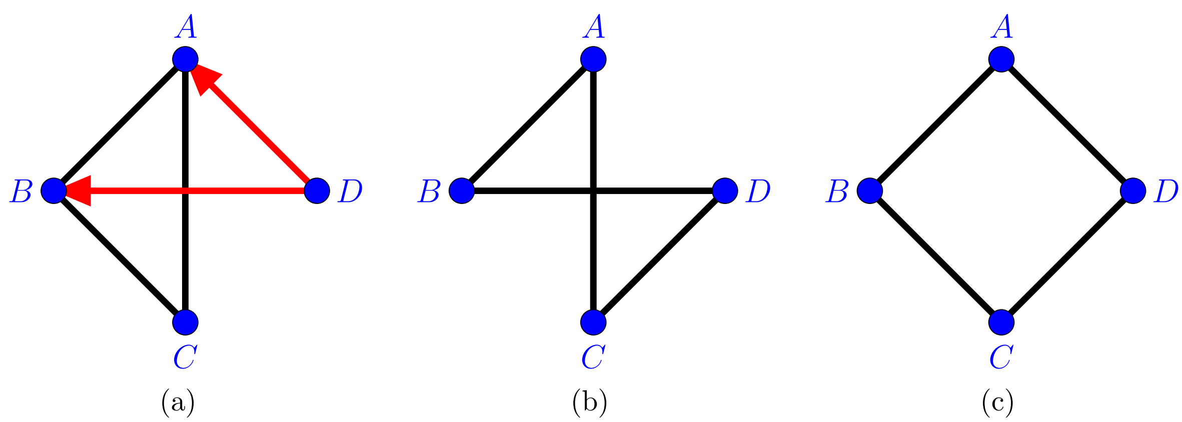


Figura 22: Casos 1, 2 y 3. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: En la Figura 22.a, el amigo A intercambia postales con B y C, el amigo B a su vez intercambia una postal con C y como resultado, A, B y C han intercambiado postales entre sí. Luego, si D envía sus dos postales por ejemplo a A y B *(aristas DA y DB)* no recibirá ninguna de ellos, por tanto el objetivo no se puede completar.

Caso 2: En la Figura 22.b, el amigo A intercambia postales con B y C, el amigo B también intercambia una postal con D *(Del caso 1 se sabe que no se debe construir un triángulo)*. Ahora, si D envía su segunda postal a A, no recibe respuesta puesto que A ya ha enviado sus dos postales. Pero, si D intercambia postales con C entonces se obtiene el grafo buscado, siendo esta una solución al objetivo propuesto.

Caso 3: En la Figura 22.c, el amigo A intercambia postales con B y D, quienes a su vez intercambian postales con C. Como resultado, cada amigo recibe dos postales de exactamente los dos amigos a los que les envió las suyas. Siendo esta otra solución para el objetivo del problema.

Fase 4. Interpretar la solución: La existencia del grafo con las característiccas buscadas confirma que **si** es posible que cada amigo intercambie postales en la forma deseada. Ahora se introducen variantes al enunciado con el fin de generar nuevas situaciones problema.

Problema 1.1: Si los cuatro amigos del problema 1 deciden enviar tres postales en lugar de dos. ¿Es posible que cada uno reciba postales de precisamente los 3 amigos a los que envió las suyas?

Solución

En este caso, cada amigo remitiría postales a los tres restantes, generando así un grafo simple único en el cual cada vértice es adyacente a todos los demás. Esto confirma que la situación planteada **si** es posible, el grafo de la Figura 23 muestra la solución.

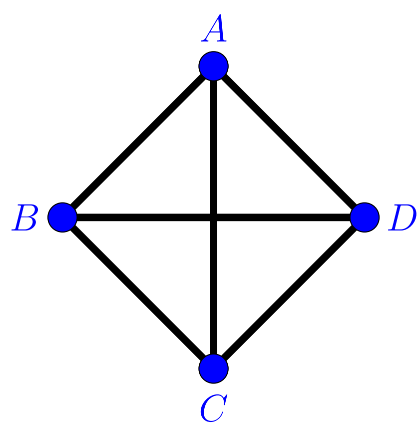


Figura 23: Grafo completo K_4. Fuente: Esta investigación.

Problema 1.2: Suponga que el grupo ahora está conformado por cinco amigos: Andrés, Britney, Carlos, Diana y Esteban. Si cada uno decide enviar dos postales, ¿es posible que cada uno reciba postales de precisamente los dos amigos a los que envió las suyas?

Solución

El quinto amigo se etiqueta como un nuevo vértice E. Una forma de solucionar el problema es como se muestra en la Figura 24, la cual consiste en ubicar a los cinco vértices en mesa redonda y luego conectarlos mediante aristas sin direcciones. De este modo cada vértice tendrá grado dos, lo cual significa que **si** es posible que cada amigo reciba postales de aquellos dos a los que envió las suyas.

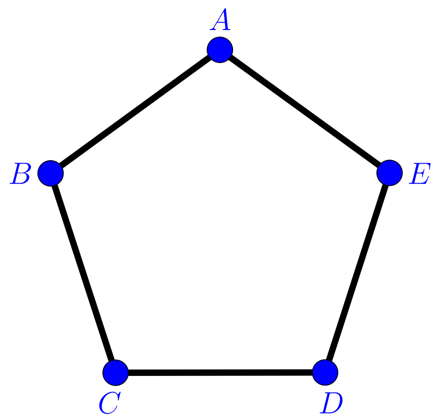


Figura 24: Grafo regular de grado 2. Fuente: Esta investigación.

Problema 1.3: Si los 5 amigos ahora deciden enviar cada uno tres postales en lugar de dos. ¿Aún es posible que cada uno reciba tres postales de precisamente los 3 amigos a los que envió las suyas?

Solución

Siguiendo la estrategia anterior, ahora se debe construir un grafo con 5 vértices de grado 3, pues este reflejaría la solución al problema. A continuación se muestran tres posibles casos al intentar graficar la situación:

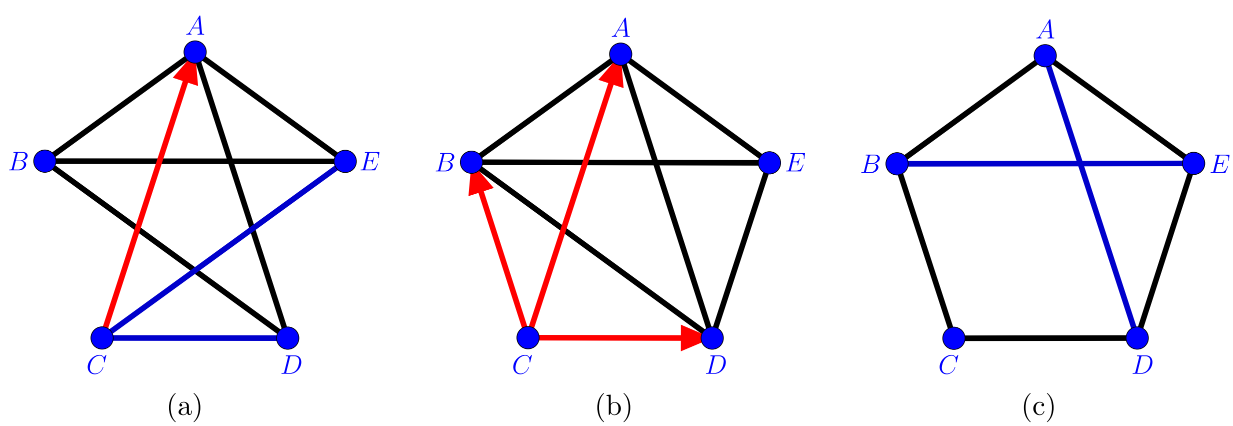


Figura 25: Casos 1, 2 y 3. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: En la Figura 25.a los amigos A y B han enviado y recibido sus tres postales. Ahora el amigo C sólo puede intercambiar postales con D y E *(aristas CD y CE)*. En este punto, todos excepto C completan su intercambio, de ahí que la tercera postal de C enviada por ejemplo a A *(arista CA)*, no obtiene respuesta.

Caso 2: En la Figura 25.b los amigos A, B, D y E han intercambiado sus postales entre sí. Por tanto, el amigo C aunque envíe sus tres postales, no recibe ninguna de ellos.

Caso 3: Observe que este problema retoma el anterior de 5 amigos con dos postales, solo que ahora con una postal adicional. Esto lleva a pensar se podría partir del grafo de la Figura 24 y completar sus aristas hasta obtener el grafo con 5 vértices de grado 3. Sin embargo, note en la Figura 25.c que luego de trazar dos aristas, nuevamente el amigo C no puede intercambiar su tercera postal, pues los demás vértices ya tienen grado 3.

Los casos presentados inducen a creer que la propuesta para cinco amigos con tres postales no es posible. Ahora note que la situación presentada en este problema se relaciona con el Lema del apretón de manos, el cual afirma que la suma de los grados de los vértices en un grafo es igual al doble del número de aristas *(número par)*.

Dado que en este problema, el grado de cada vértice representa las postales intercambiadas, entonces el grafo que se pretende construir debe tener 5 vértices de grado 3. Así pues la suma de los grados de los cinco vértices sería:

$$\sum d(v) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

Pero 15 es un número impar, de manera que no es posible construir un grafo bajo las condiciones dadas. En consecuencia la situación planteada para cinco amigos con tres postales **no** puede suceder.

Sugerencias de Trabajo

Problema 1.4: Si el Problema 1 se extiende a un grupo de 7 amigos que deciden enviar cada uno 4 postales a los demás. ¿Será posible que cada persona reciba cuatro postales de precisamente los 4 amigos a los que envió las suyas? De ser así, construye un grafo que represente la situación.

3.2. Problema 2: Las personas que se conocen

En un grupo de 9 personas, ¿es posible que cada uno se conozca con exactamente 3 personas de las demás? Tomado de: Seminario Resolución de Problemas, Udenar.

Solución

Fase 1. Estudiar y modelar: Para relacionar esta situación con grafos, se toma a $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ como el conjunto de vértices que representan a las 9 personas. Por otra parte, se sabe que el hecho de conocerse es recíproco *(Si x conoce a y, entonces y conoce a x)*, de ahí que, dos personas que se conozcan se conectan mediante una arista sin direcciones.

Fase 2. Plantear un objetivo: Determinar si es posible construir un grafo con 9 vértices de grado 3. Este grafo mostrará que cada persona se conoce con exactamente tres más.

Fase 3. Diseñar un plan: A continuación se muestran tres intentos por construir el grafo por tanteo con las características expuestas.

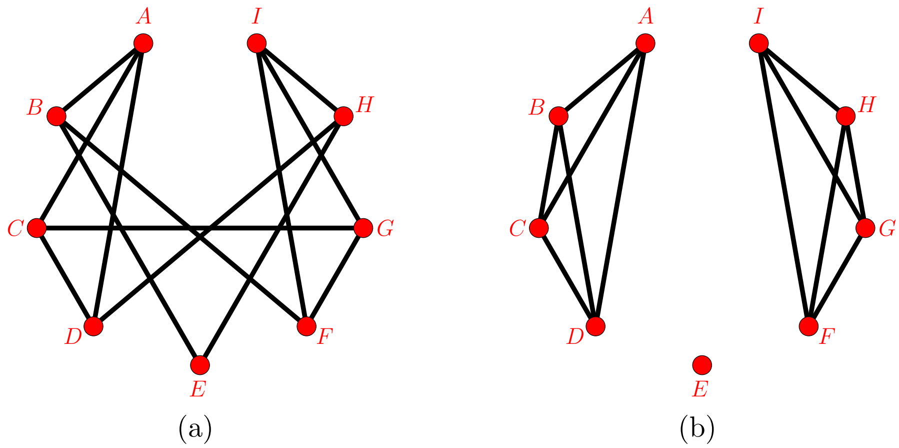


Figura 26: Casos 1 y 2. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: En la Figura 26.a, todos los vértices tienen grado 3 excepto E, el cual queda con grado 2, esto significa que la persona representada por dicho vértice solo se conoce con dos del grupo.

Caso 2: En la Figura 26.b, todos los vértices tienen grado tres excepto E, el cual aparece con grado cero *(vértice aislado)*, de modo que la persona simbolizada por dicho vértice no conoce a ninguno del grupo.

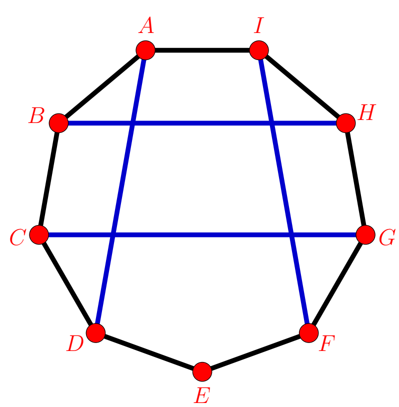


Figura 27: Caso 3. Fuente: Esta investigación.

Caso 3: En la Figura 27 se muestra otra forma de intentar graficar la situación, para ello se construye el ciclo C_9 para que cada vértice tenga grado 2. Luego se completa el grafo trazando aristas de modo que cada vértice quede con grado 3. Pero cada arista conecta a una pareja de vértices, de ahí que el vértice E al igual que en el Caso 1, queda sólo con grado 2.

Los intentos por construir un grafo con las características buscadas inducen a pensar que la situación requerida probablemente no es posible. En efecto, la situación se asemeja al Problema 1, por lo cual nuevamente se puede acudir al Lema del Apretón de manos, pues según los resultados anteriores, en el grafo buscado se debe cumplir que la suma de los grados de sus 9 vértices debe ser un número par. Sin embargo:

$$\sum d(v) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$$

La sumatoria de los grados de los 9 vértices se obtiene 27 que es un número impar. En consecuencia, el grafo buscado no se puede construir.

Fase 4. Interpretar la solución: Como el grafo regular de grado 3 no se puede construir, entonces **no** es posible que cada persona de las 9 se conozca exactamente con 3 de las demás.

Sugerencias de Trabajo

Problema 2.1: En una junta de negocios se reúnen 8 directivos, ¿es posible que 5 de ellos se conozcan exactamente con 4 de los demás, y los otros 3 se conozcan exactamente con 3 de los demás?

Problema 2.2: De los resultados obtenidos en los Problemas 1 y 2, se puede asegurar que es posible construir un grafo regular con n vértices de grado k sólo en los casos cuando:

- ¿n es par y k es impar?
- ¿n es impar y k es par?
- ¿n y k son impares?
- ¿n y k son pares?

Justifica la respuesta en cada interrogante.

3.3. Problema 3: Los amigos de las escuelas

Se tienen tres escuelas, A, B y C, cada una con dos estudiantes. Cada uno se conoce con exactamente tres estudiantes de las otras dos escuelas. Probar que existen tres estudiantes de diferentes escuelas que se conocen entre sí. Tomado de: Seminario Resolución de problemas, Udenar.

Solución

Fase 1. Estudiar y modelar: Para expresar este problema en el lenguaje de grafos, se denota a los alumnos de la siguiente forma: A_1, A_2 alumnos de la escuela A; B_1, B_2 de la escuela B y C_1, C_2 de la escuela C. Luego, el conjunto de vértices es $V = \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$. Por otra parte, si el alumno x se conoce con y, entonces y se conoce con x. Como dicha relación es mutua, entonces se representa mediante una arista no dirigida.

Fase 2. Plantear un objetivo: Probar que en cualquiera de las posibles situaciones que se presenten en su correspondiente grafo, existe un triángulo cuyos vértices se ubican en distintas escuelas. Dicha existencia demuestra que tres estudiantes de diferentes escuelas se conocen entre sí.

Fase 3. Diseñar un plan: Observe que cada alumno al conocerse con 3 de las otras dos escuelas, siempre conocerá a dos de un mismo instituto, por ejemplo: A_1 conoce a B_1, B_2 de B y a C_2 de C. Ahora, para cumplir el objetivo se puede proceder así:

En la Figura 28, tome al alumno A_1 y suponga que sus tres conocidos son B_1, B_2 y C_2, de manera que se une a ellos mediante aristas (Figura 28.a). Ahora considere a C_2 que según las condiciones del problema también conoce a tres más, note que C_2 ya conoce a A_1 y suponga que su segundo conocido es A_2. Luego su tercer conocido debe ser B_1 o B_2, de ahí se presentan los siguientes casos:

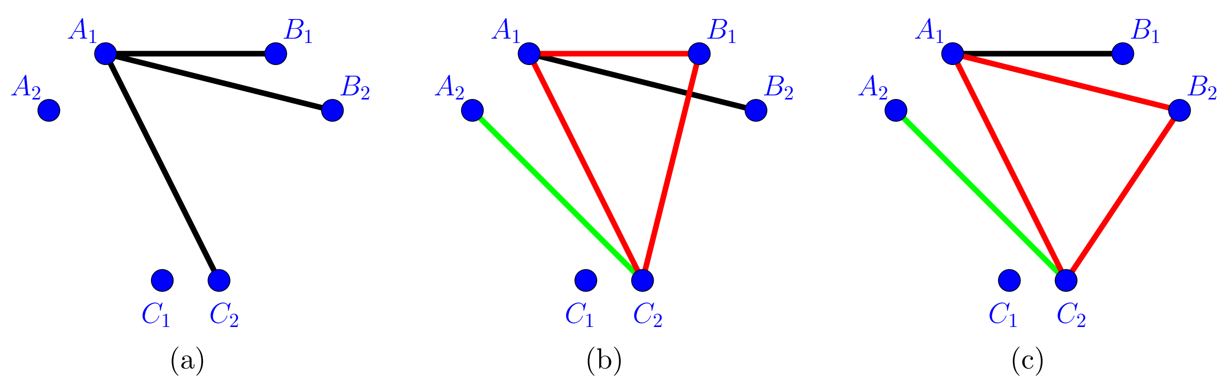


Figura 28: Casos 1 y 2. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: Si su tercer conocido es B_1 se forma el triángulo $A_1B_1C_2$ (Figura 28.b).

Caso 2: Si su tercer conocido es B_2 se forma el triángulo $A_1B_2C_2$ (Figura 28.c).

Fase 4. Interpretar la solución: Como en cualquiera de los casos siempre se forme un triángulo cuyos vértices se ubican en distintas escuelas, esto significa que existen tres alumnos de distintas escuelas que se conocen entre sí.

Problema 3.1: Considerar las escuelas anteriores ahora con tres estudiantes. Si cada uno se conoce con exactamente cuatro alumnos de las otras dos escuelas. Probar que existen tres estudiantes de diferentes escuelas que se conocen entre sí.

Solución

En este caso se toma a $V = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$ como el conjunto de vértices que simbolizan a los 9 estudiantes. Nuevamente se debe verificar que en cualquiera de los grafos que ilustran las posibles situaciones del problema, siempre existe un triángulo con vértices en distintas escuelas, esto prueba que existen tres alumnos de diferentes escuelas que se conocen entre sí.

En este problema se presentan dos situaciones respecto a los cuatro alumnos que conoce cada uno, la primera es cuando un estudiante conoce a tres alumnos de una escuela y uno de la otra, y la segunda es cuando el estudiante conoce a dos de cada una de las otras escuelas. A continuación se describe cada una de estas.

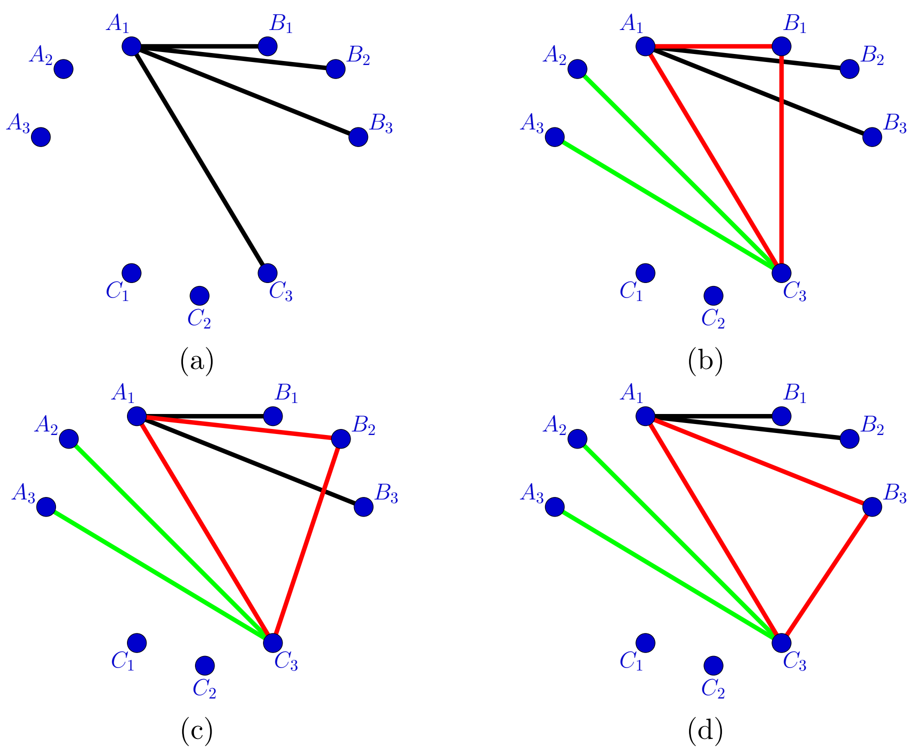


Figura 29: Situación 1. Fuente: Esta investigación.

Situación 1: En la Figura 29, suponga que los cuatro conocidos de A_1 son B_1, B_2, B_3 y C_3, así que se une a ellos mediante aristas (Figura 29.a). Ahora considere a C_3 que según el problema también conoce a cuatro más, note que C_3 ya conoce a A_1 y suponga que sus otros conocidos son A_2, A_3 y finalmente su cuarto conocido debe ser uno de los tres alumnos de la escuela B, de ahí se presentan los siguientes casos:

Caso 1: Si su cuarto conocido es B_1 se forma el triángulo $A_1B_1C_3$ (Figura 29.b).

Caso 2: Si su cuarto conocido es B_2 se obtiene el triángulo $A_1B_2C_3$ (Figura 29.c).

Caso 3: Si su cuarto conocido es B_3 se tiene el triángulo $A_1B_3C_3$ (Figura 29.d).

Como resultado, en cualquiera de los casos que se presenten en esta situación, se obtiene un triángulo con vértices en distintas escuelas. Esto prueba lo expuesto en el problema.

Situación 2: En la Figura 30, suponga que los cuatro conocidos de A_1 son B_1, B_2, C_2 y C_3, así que se une a ellos mediante aristas (Figura 30.a). Ahora considere a C_3 que según el problema también conoce a cuatro más, aquí se presentan los siguientes casos:

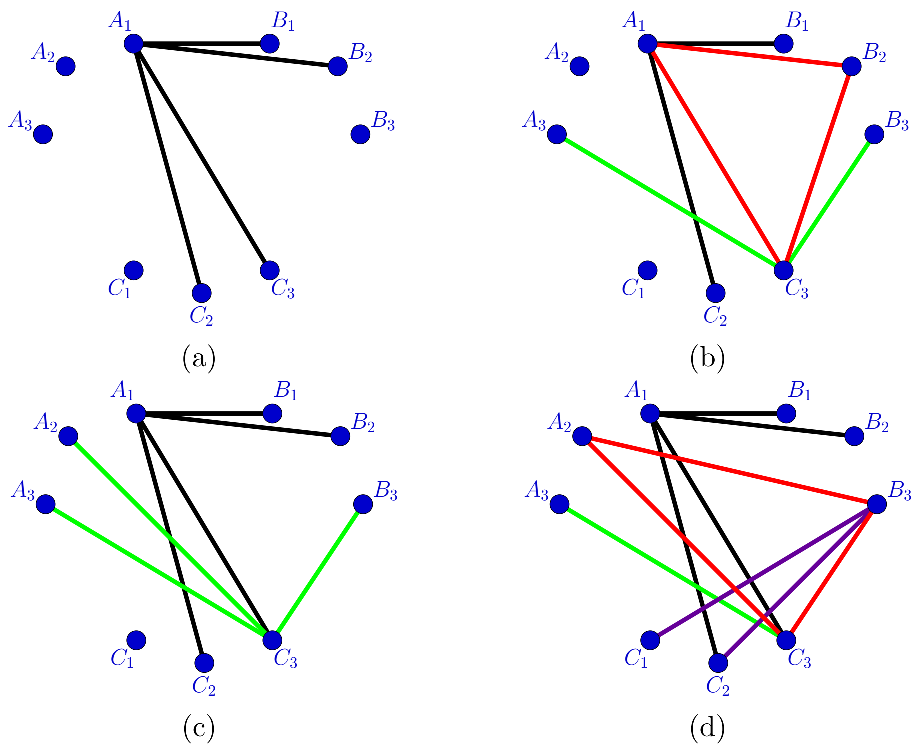


Figura 30: Situación 2. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: Si sus cuatro conocidos son dos de cada escuela, entonces en la escuela B suponer que uno de ellos es B_3, luego B_1 o B_2 será el otro conocido formando así el triángulo buscado, por ejemplo si su conocido es B_2, se obtiene el triángulo $A_1B_2C_3$ (Figura 30.b).

Caso 2: Si sus cuatro conocidos son tres de una escuela y uno de otra, entonces suponga que los conocidos de C_3 son A_1, A_2, A_3 y B_3 (Figura 30.c). Luego, considere a B_3, si sus cuatro conocidos son dos de cada escuela, basta elegir a C_1 de C para formar el triángulo pedido. Si en cambio sus cuatro conocidos son tres de una escuela y uno de otra, estos serán C_1, C_2, C_3 y su cuarto conocido debe ser A_2 o A_3 *(A_1 no es opción porque este alumno ya tiene sus cuatro conocidos)*, entonces tome por ejemplo a A_2 con el cual se forma el triángulo $A_2B_3C_3$ (Figura 30.d).

Como conclusión, en cualquiera de los casos posibles, siempre se obtiene un triángulo con sus vértices en distintas escuelas. Esto prueba que existen tres estudiantes de diferentes escuelas que se conocen entre sí.

Sugerencias de Trabajo

Problema 3.2: Realizar un grafo que ilustre la situación para los 6 alumnos del Problema 3 y otro grafo para los 9 alumnos del Problema 3.1.

Problema 3.3: ¿Cuántas configuraciones distintas de grafos se pueden obtener al graficar la situación de los 6 alumnos en el Problema 3?

Problema 3.4: Un tema muy conocido es el Principio del palomar. ¿Cómo se puede usar este principio para resolver los Problemas 3 y 3.1?

Problema 3.5: Considerar el mismo problema de tres escuelas pero con n estudiantes cada una. Si cada estudiante se conoce con $n+1$ de las otras dos escuelas. Demostrar que existen tres estudiantes de diferentes escuelas que se conocen entre sí.

3.4. Problema 4: La cena en la mesa redonda

Un grupo de 5 personas acuerdan cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda, de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. Si cada uno desea sentarse junto a todos los demás, ¿cuántos días deberán citarse para cenar? Tomado de: Núñez et al. (2016).

Solución

Fase 1. Estudiar y modelar: En esta situación, se toma a $V = \{A, B, C, D, E\}$ como el conjunto de vértices que simbolizan a las 5 personas, por otra parte dos vértices unidos con una arista representan a aquellas personas que se sientan juntas en la cena.

Observe que al graficar un ciclo, este determina la manera como se deben sentar las personas en una cena. De modo que dos ciclos no pueden tener aristas en común, ya que bajo las condiciones del problema, en cada cena las personas deben tener comensales distintos a sus lados. Por lo tanto:

Fase 2. Plantear un objetivo: Determinar el número mínimo de ciclos con 5 vértices (C_5) que se pueden organizar sin aristas en común, con la condición de que al final cada vértice sea adyacente a los demás, pues esto garantiza que cada una de las cinco personas ya se ha sentado junto a todos.

Fase 3. Diseñar un plan: En la Figura 31, cada ciclo construido se colorea de un tono distinto para diferenciar una cena de otra. Así pues, una forma de ubicar a las cinco personas en en el primer día es así: $A - B - C - D - E - A$, cuyas aristas del ciclo se han coloreado de *negro* (Figura 31.a) .

Ahora, para ubicar a las personas en la mesa para la cena del segundo día, se toma a A quien ya no puede tener a sus lados a B ni a E, entonces se coloca a su derecha a C (Figura 31.b), esta persona a su vez ya no puede sentarse con B ni con D, la única alternativa es que a su derecha se siente E (Figura 31.c). De manera similar se continúa con los siguientes vértices hasta completar el segundo ciclo el cual queda así: $A - C - E - B - D - A$, cuyas aristas se han coloreado de *azul* (Figura 31.f).

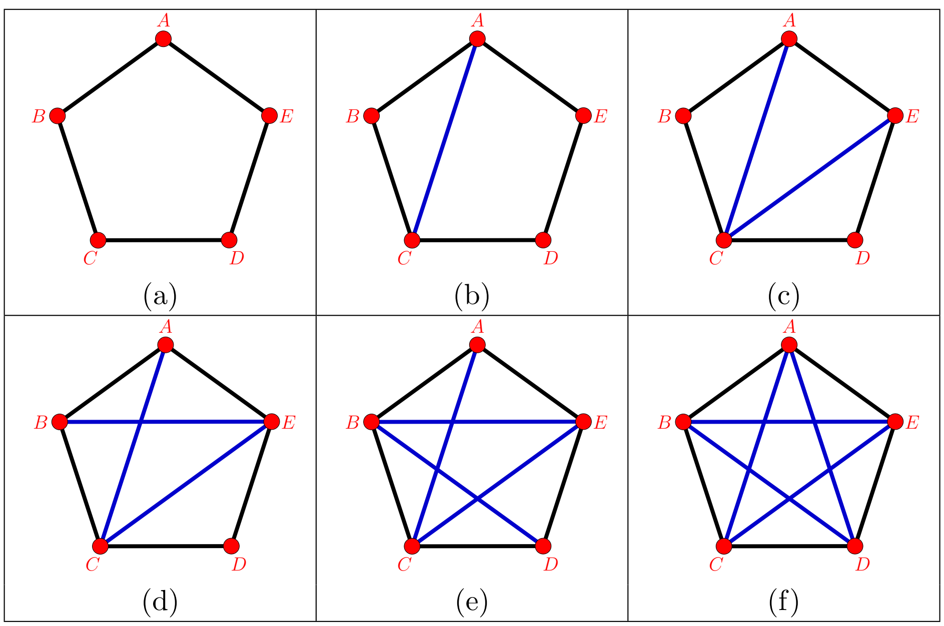


Figura 31: Ubicación de las 5 personas en el segundo día. Fuente: Esta investigación.

Fase 4. Interpretar la solución: Los dos ciclos de la Figura 31.f muestran la forma como se han sentado las 5 personas en la primera y segunda cena. El hecho de que en ese grafo cada vértice ya es adyacente a los demás, indica que cada persona ya se ha sentado junto a todos. Dado que sólo se construyeron dos ciclos, entonces el grupo necesita citarse dos días para cenar y cumplir su objetivo.

Problema 4.1: Considerar el problema anterior con la diferencia de que ahora es un grupo de 7 personas. Si cada una acuerda sentarse igualmente con todos los demás. ¿Cuántos días necesitan reunirse para cenar?

Solución

En este caso, $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ es el conjunto de vértices que representa a las 7 personas. Ahora, se debe determinar el número mínimo de ciclos con 7 vértices (C_7) que se pueden organizar sin aristas en común.

En la Figura 32, nuevamente cada ciclo construido se colorea de un tono distinto para diferenciar una cena de otra. Así pues, una forma de ubicar a las cinco personas en en el primer día es así: $A - B - C - D - E - F - G - A$, cuyas aristas del ciclo se han coloreado de *negro* (Figura 32.a).

Ahora, para organizar a las personas para la cena del segundo día, se toma a A quien ya no puede tener a sus lados a B ni a G, entonces se ubica a su derecha a C (Figura 32.b), esta persona a su vez ya no puede sentarse con B ni con D, la única alternativa es que a su derecha se siente E (Figura 32.c). Enseguida de E no puede ir D, F ni C entonces ahí se debe sentar G (Figura 32.d). De manera similar se continúa con los siguientes vértices hasta completar el segundo ciclo el cual queda así: $A - C - E - G - B - D - F - A$, cuyas aristas se han coloreado de *azul* (Figura 32.h).

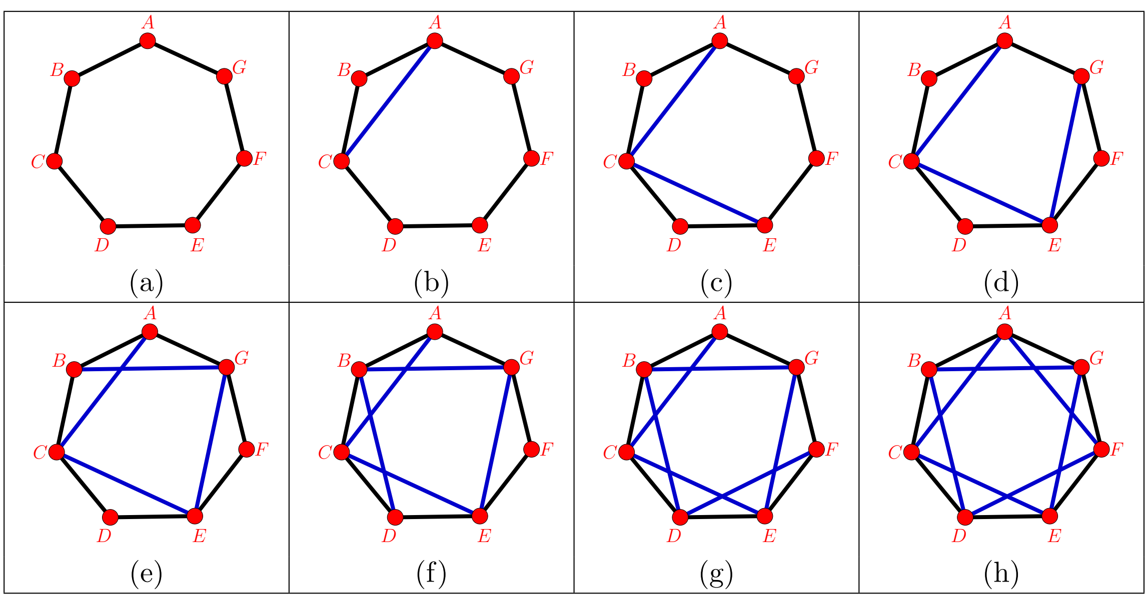


Figura 32: Ubicación de las 7 personas en el segundo día. Fuente: Esta investigación.

Los dos ciclos de la Figura 32.h muestran la forma como se han sentado las 7 personas en la primera y segunda cena. Sin embargo, cada vértice del grafo aún no es adyacente a todos, lo que indica que cada persona todavía no se ha sentado junto a todos los demás. Por tal motivo, el grupo necesita reunirse una vez más.

Para ubicar a las personas en el tercer día, observe en la Figura 33 que se toma a A quien ya no debe sentarse junto a B, G, C ni F, entonces se ubica a su derecha a D (Figura 33.b), el cual a su vez ya no puede sentarse con C, E, B ni F, por tanto la única alternativa a su derecha es G (Figura 33.c). Este último por su parte ya no puede estar junto a A, F, B ni E así que su única opción es C (Figura 33.d). De manera similar se continúa con los siguientes vértices hasta completar el tercer ciclo el cual queda así: $A - D - G - C - F - B - E - A$, cuyas aristas se han coloreado de *rojo* (Figura 33.h).

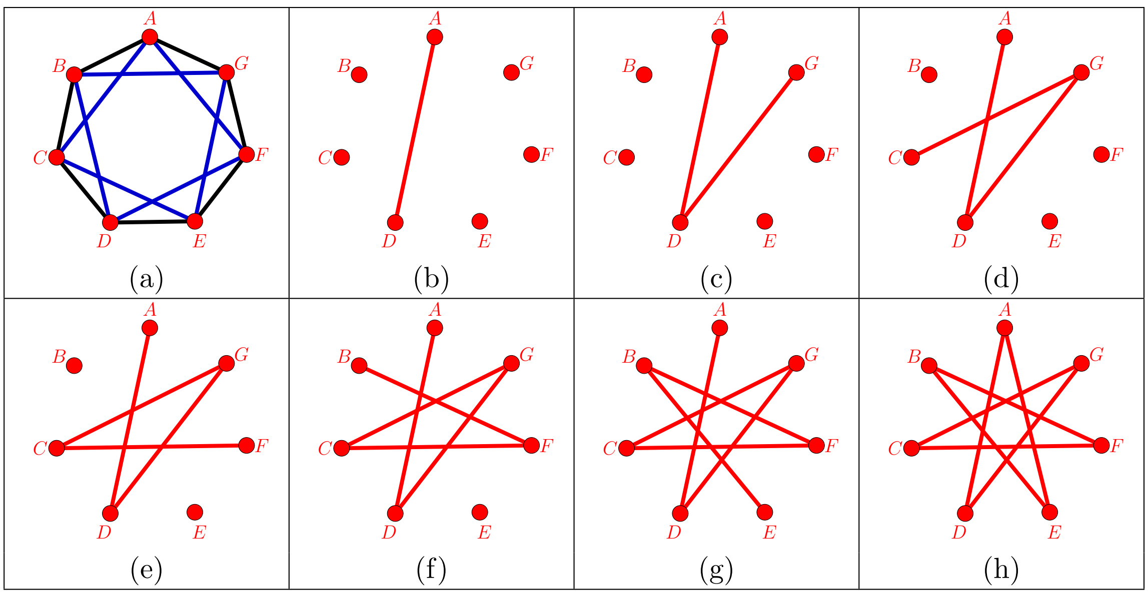


Figura 33: Ubicación de las 7 personas en el tercer día. Fuente: Esta investigación.

El ciclo de la Figura 33.h muestra la forma como se han sentado las 7 personas en la cena del tercer día. Finalmente, se ubica en un solo grafo los tres ciclos correspondientes a la forma como se han sentado las personas en cada cena durante los tres días.

Como el grafo resultante es un K_7 (Figura 34), esto significa que cada persona ya se ha sentado junto a todos los demás. Dado que se construyeron tres ciclos, entonces el grupo de 7 personas necesita citarse tres días para cenar y lograr su objetivo.

Sugerencias de Trabajo

Problema 4.2: Considerar el mismo problema con un grupo de 9 personas. ¿Cuántos días como mínimo necesitan reunirse a cenar para que cada persona se siente junto a todas las demás?

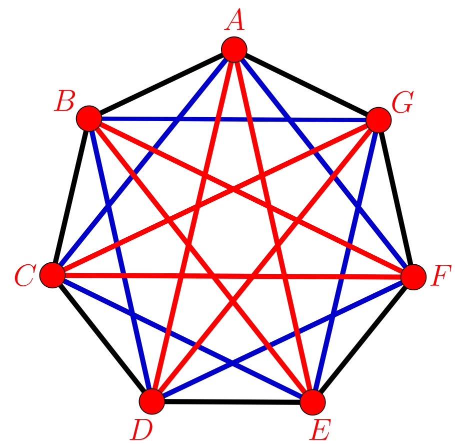


Figura 34: Grafo de la solución. Fuente: Esta investigación.

Problema 4.3: ¿Es posible determinar una fórmula que permita conocer de inmediato el número de días que necesitan reunirse cierto número impar de personas?

Problema 4.4: ¿El problema se puede abordar para un grupo con un número par de personas? ¿Qué sucede en estos casos?

3.5. Problema 5: El club de los primos

En un club de 5 personas existe la curiosa particularidad que para cada 2 de ellos existe un tercer asistente que es primo a los 2. Probar que existe una persona que es prima de todos los demás. Tomado de: Seminario Resolución de problemas, Udenar.

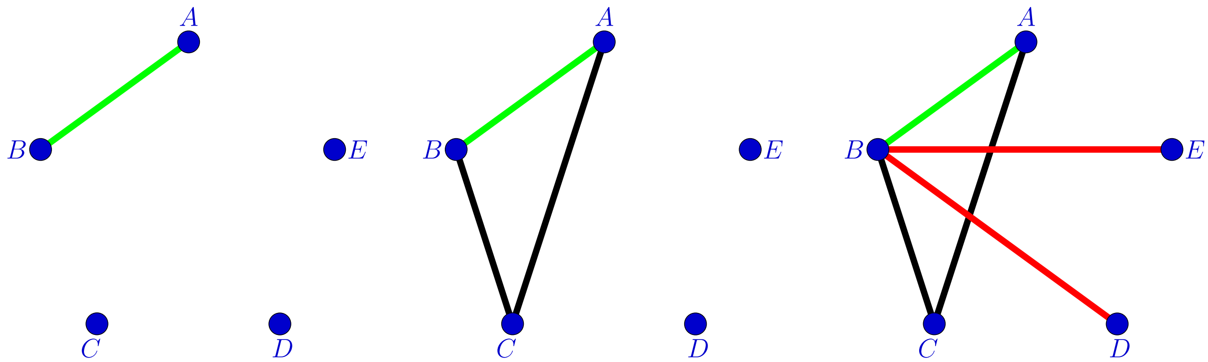
Solución

La situación indica que al elegir dos personas cualesquiera, estas tienen un primo en común. Para modelar este problema mediante grafos, se toma a $V = \{A, B, C, D, E\}$ como el conjunto de vértices que representan a las 5 personas. En los grafos, las personas que sean primas se unen mediante aristas no dirigidas, pues la relación de ser primos es recíproca (si x es primo de y entonces y es primo de x).

El **objetivo** es garantizar que bajo cualquier circunstancia, siempre existe un vértice adyacente a los otros cuatro, pues esto demuestra que la persona representada por dicho vértice es prima de todos los asistentes.

Considere a dos personas A y B de los 5 asistentes. De ahí se presentan los siguientes casos:

Caso 1: Los elegidos A y B son primos.

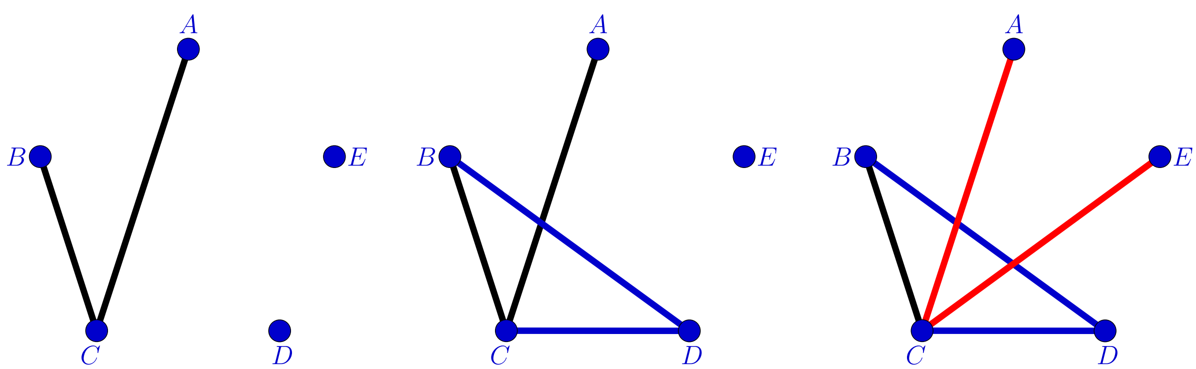


(a) (b) (c)

Figura 35: A y B son primos. Fuente: Esta investigación.

Observe en la Figura 35 que A y B al ser primos, existe una arista entre ellos (Figura 35.a). Ahora, considere a C primo común de A y B, entonces A, B y C son primos entre sí (Figura 35.b). Luego, según el problema uno de ellos debe ser primo de D y E. Si aquella persona por ejemplo es B, entonces este vértice queda adyacente a los demás (Figura 35.c), lo cual prueba que B es la persona prima de todos los asistentes. Lo mismo ocurre si el primo común de D y E fuese A o C, pues en cualquier caso se obtiene un vértice adyacente a todos.

Caso 2: Los elegidos A y B no son primos.



(a) (b) (c)

Figura 36: A y B no son primos. Fuente: Esta investigación.

En la Figura 36, sea C primo común de A y B, entonces se une a ellos mediante aristas (Figura 36.a). Luego, suponga que B y C son primos de D (Figura 36.b). Note que el caso recae sobre el anterior por la forma que toma el grafo, luego A y E deben ser el primos de C o D *(B no es opción porque no es primo de A)*, suponga entonces que aquella persona es C, en consecuencia C es el primo de todos los asistentes (Figura 36.c). Lo mismo ocurre si el primo de A y E fuese D.

Como resultado, en el club de las 5 personas con dicha particularidad, bajo cualquier circunstancia siempre existirá alguien que es primo a los cuatro restantes.

Problema 5.1: Considere un grupo de 7 personas con la característica de que por cada 3 de ellos, existe un cuarto que es primo a los 3. Probar que existe alguien que es primo de todos los asistentes.

Solución

El conjunto de vértices que representa a las 7 personas es $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Nuevamente, se debe garantizar que bajo cualquier circunstancia siempre existe un vértice adyacente a los otros seis, pues esto garantiza la existencia de alguien que es primo de todos las demás.

Considere tres personas A, B y C de los 7 asistentes. De ahí se presentan los siguientes casos:

Caso 1: Los tres elegidos A, B y C son primos entre sí.

En la Figura 37, A, B y C al ser primos entre sí se unen mediante aristas (Figura 37.a), Ahora, considere a D primo común de A, B y C (Figura 37.b). Luego, según el problema, el primo común de E, F y G debe ser A, B, C o D. Suponga entonces que esa persona es C, como resultado C queda adyacente a los demás vértices (Figura 37.c), lo cual prueba que esta persona es prima de todos los asistentes. Lo mismo ocurre si el primo común de E, F y G fuese A, B o D.

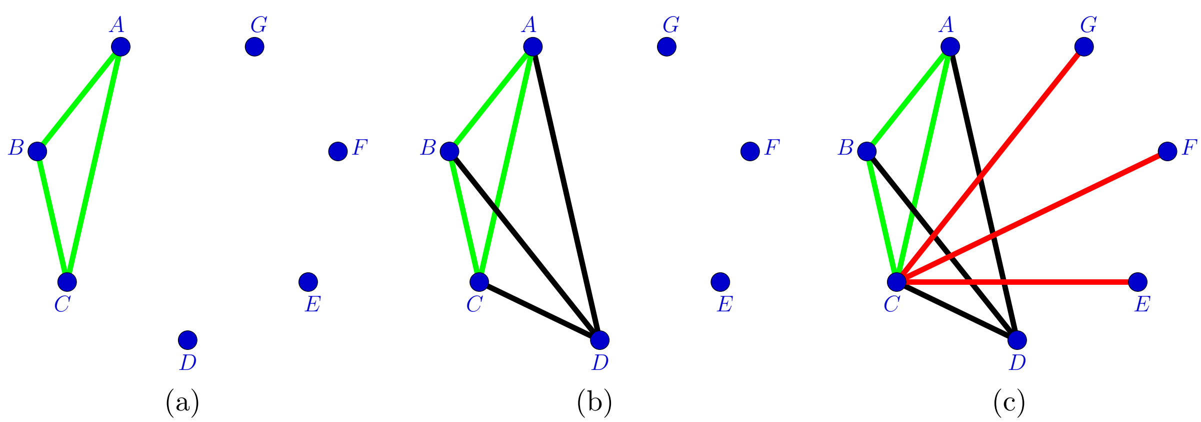


Figura 37: A, B y C son primos entre sí. Fuente: Esta investigación.

Caso 2: De los tres elegidos, sólo B es primo de A y C.

En la Figura 38, B al ser primo de A y C, se une a ellos mediante aristas (Figura 38.a). Ahora, considere a D primo común de A, B y C (Figura 38.b) y tome a E como primo común de B, C y D (Figura 38.c). De ahí, observe que B, C, D y E son primos entre sí y por las condiciones del problema, uno de ellos debe ser el primo común de A, G y F *(pero C no es opción porque no es primo de A)*. Suponga entonces que dicha persona es E, como resultado aquel es el primo común de todos los demás (Figura 38.d). Análogamente si el primo común de A, G y F fuese B o D, entonces uno de ellos sería el primo buscado.

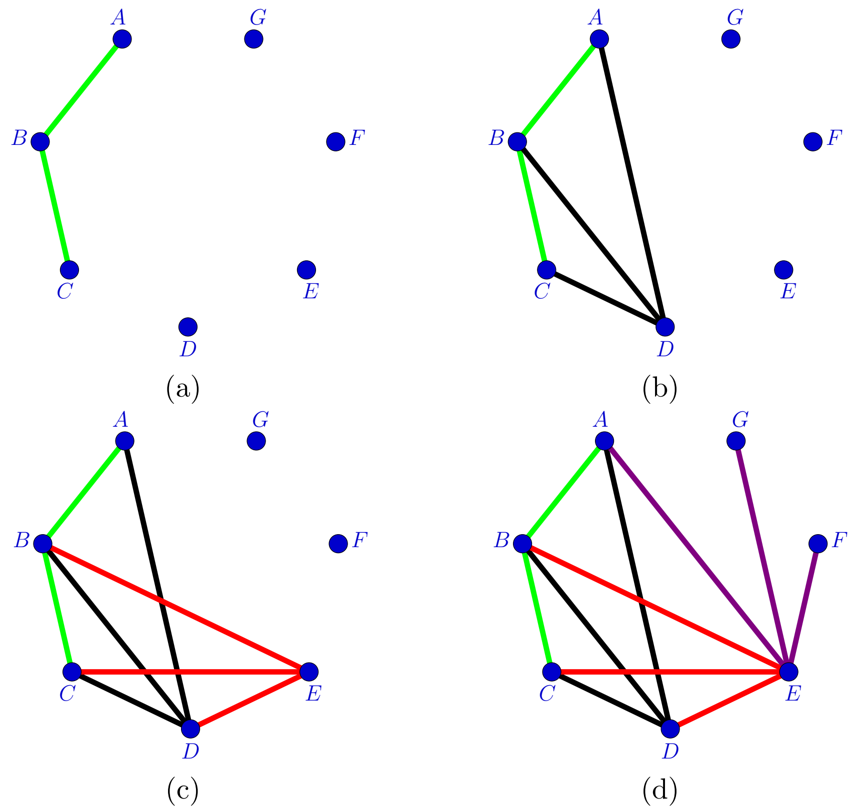


Figura 38: Sólo B es primo de A y C. Fuente: Esta investigación.

Caso 3: De los tres elegidos, sólo A y B son primos.

En la Figura 39, A y B al ser primos, existe una arista entre ellos (Figura 39.a). Ahora, sea D primo común de A, B y C (Figura 39.b) y tome a E como primo común de A, B y D (Figura 39.c) De ahí, observe que A, B, D y E son primos entre sí y por las condiciones del problema, uno de ellos debe ser el primo común de C, F y G *(pero A y B no son opción porque no son primos de C)*. Suponga entonces que dicha persona es D, como resultado aquel es primo común de todos los demás (Figura 39.d). Lo mismo ocurre si el primo común de C, G y F fuese E.

Caso 4: Los tres elegidos no son primos.

Este caso es similar al anterior, pues la idea central de este problema es buscar las cuatro personas que son primas entre sí (ver Figuras 37.c, 38.c y 39.c). Pues según el problema, una de ellas debe

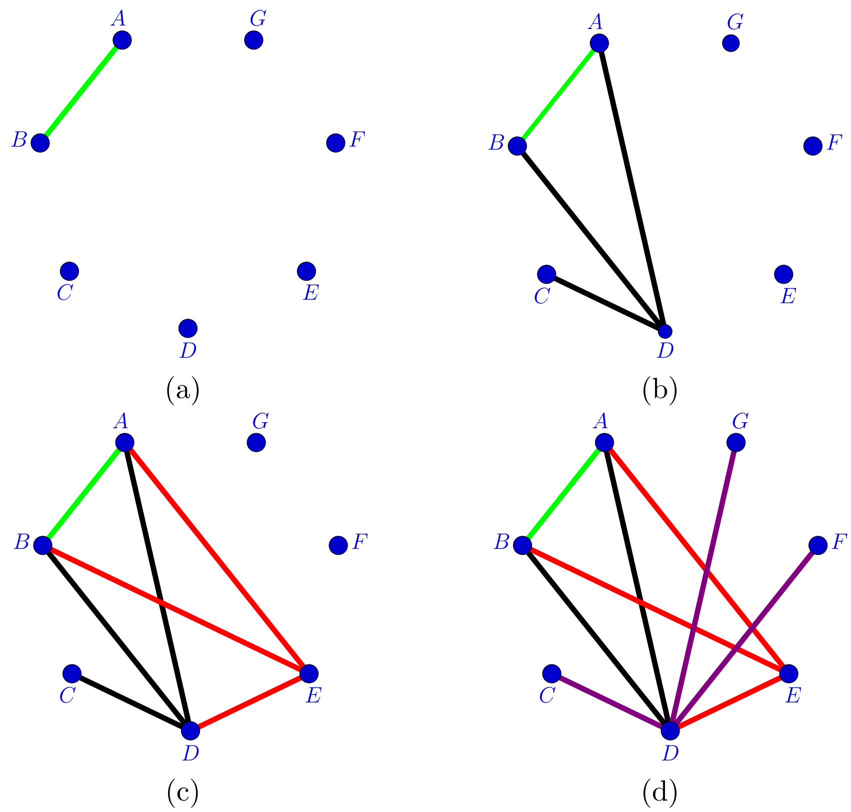


Figura 39: Sólo A y B son primos. Fuente: Esta investigación.

ser prima común de las tres restantes, obteniendo así un vértice adyacente a todos los demás.

En conclusión, en el grupo de 7 personas con la característica enunciada en el problema, siempre habrá una persona que es prima de todas las demás.

Sugerencias de Trabajo

Problema 5.2: Considere un grupo de 11 personas con la cualidad de que para cada 5 personas existe un sexto que es primo común a ellas. Realizar un análisis similar para demostrar que existe una persona prima a todos los demás.

Problema 5.3: Sea un grupo de $2n+1$ personas ($n \in \mathbb{Z}^+$) con la característica de que para cada n personas existe una persona $n+1$ que es prima común a ellas. Demostrar que existe una persona prima a todos los demás $2n$ integrantes.

Problema 5.4: ¿El problema se puede abordar en un grupo con un número par de personas? ¿Qué sucede en estos casos?

3.6. Problema 6: Los conocidos y desconocidos

Probar que en una reunión de 6 personas siempre hay 3 que se conocen entre sí o 3 que no se conocen entre sí. Tomado de: Núñez et al. (2016).

Solución

Para denotar el problema mediante grafos, se toma a $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ como el conjunto de vértices que representa a las 6 personas. En este problema, las aristas no se van a usar para conectar a las personas que se conocen o que no se conocen. Pues la situación pide probar que dado cualquier caso, siempre existen 3 asistentes que se conocen o no se conocen entre sí. En este sentido, las aristas correspondientes se van a colorear con azul cuando los respectivos asistentes se conocen, de lo contrario se colorean de rojo.

Bajo estas condiciones, el **objetivo** es probar que en cualquiera de las situaciones que se presenten con su respectiva coloración de las aristas del grafo, siempre existe un triángulo coloreado de azul o de rojo. Dicha coloración demuestra que en el grupo de seis personas, tres de ellas se conocen entre sí o tres no se conocen entre sí.

Para ello, se toma cualquier vértice por ejemplo A y se conecta a los demás. Del grafo resultante se analizan las posibles situaciones que se presentan al momento de realizar cualquier coloración de sus aristas (se colorean por estrategia, más no usando la definicón de coloración de aristas del grafo).

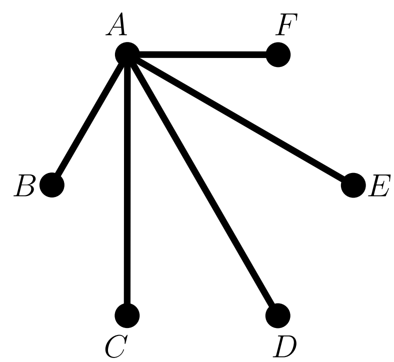


Figura 40: Conexiones de A. Fuente: Esta investigación.

Caso 1: A conoce a todos los demás.

Observe en la Figura 41 que A al conocerse con los cinco asistentes restantes, entonces todas las aristas se colorean de azul (Figura 41.a). Ahora note que si entre los cinco restantes B, C, D, E y

F existen dos de ellos que se conocen, entonces se forma un triángulo azul con un vértice en A, por ejemplo si C y E se conocen, se obtiene el triángulo azul ACE (Figura 41.b) lo cual prueba que tres personas se conocen entre sí. Ahora, si entre los restantes no hay dos que se conocen entre sí, entonces todas las aristas se colorean de rojo (Figura 41.c). Luego,solo basta con tomar el triángulo rojo CDE el cual prueba que tres personas no se conocen entre sí. Eso finaliza la prueba para este caso.

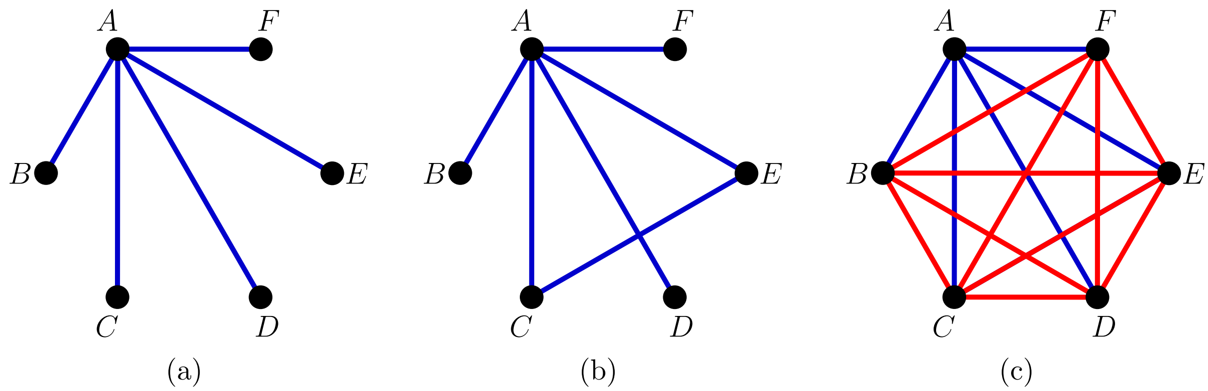


Figura 41: Caso 1. Fuente: Esta investigación.

Caso 2: A no conoce a uno de los demás.

Observe en la Figura 42 que A no se conoce con D, por eso la arista que los une se colorea de rojo (Figura 42.a). Ahora note que si dos de los cuatro restantes B, C, E y F se conocen, entonces se forma un triángulo azul con un vértice en A, por ejemplo si C y F se conocen, se obtiene el triángulo azul ACF (Figura 42.b). Si por el contrario, los cuatro asistentes restantes no se conocen entre sí, entonces todas las aristas entre ellos se colorean de rojo (Figura 42.c). Luego, solo basta considerar el triángulo rojo BCE que prueba que tres personas no se conocen entre sí.

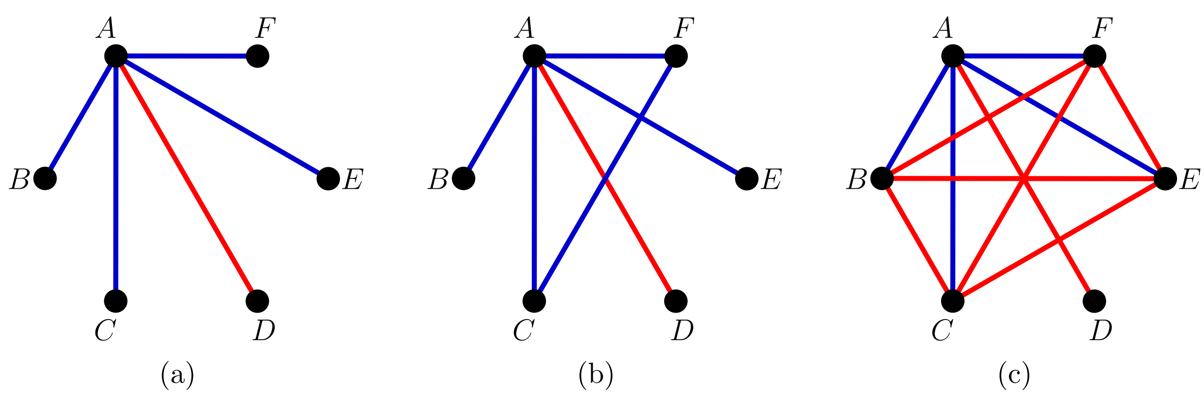


Figura 42: Caso 2. Fuente: Esta investigación.

Caso 3: A no conoce a dos de los demás.

Observe en la Figura 43 que si A no se conoce con C ni E, entonces las aristas correspondientes se colorean de rojo (Figura 43.a). Ahora note que si dos de los tres restantes B, D y F se conocen, entonces se forma un triángulo azul con un vértice en A, por ejemplo si D y F se conocen, se obtiene el triángulo azul ADF (Figura 43.b). En caso contrario todas las aristas entre ellos se colorean de rojo (Figura 43.c), formando así el triángulo rojo BDF el cual fializa la prueba.

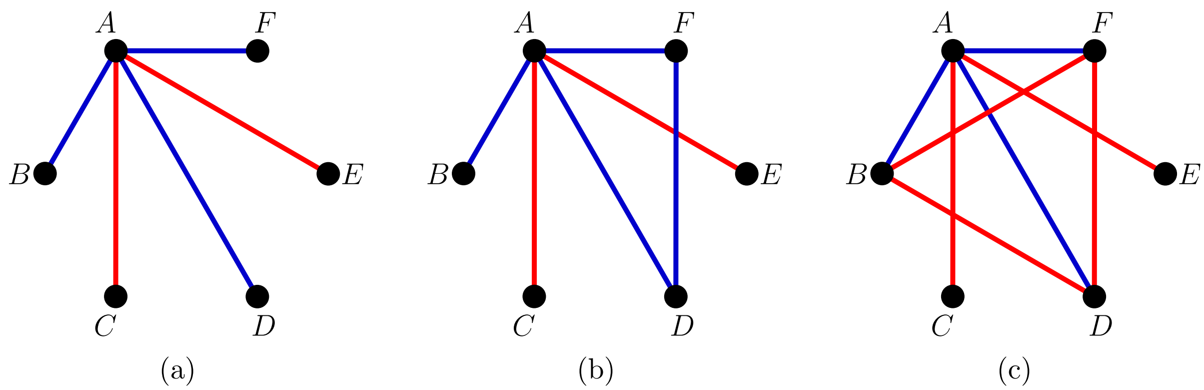


Figura 43: Caso 3. Fuente: Esta investigación.

El caso para el cual A no conoce a tres de los demás, es similar al Caso 3, pues ahora habría tres aristas rojas y dos azules, por tanto la prueba consiste en seguir el mismo procedimiento. El caso para el cual A no conoce a cuatro de los demás es similar al Caso 2. El caso para el cual A no conoce a ninguno de los demás es análogo al Caso 1.

Sugerencias de Trabajo

Problema 6.1: ¿Será cierto que en un grupo de 8 personas, cuatro se conocen entre sí o cuatro no se conocen entre sí? Analice este caso.

Problema 6.2: ¿La situación funciona para grupos con un número impar de personas? Justifique.

3.7. Problema 7: Los animales del zoológico

Algunos animales del zoológico deben ser trasladados y se necesita saber cuántas jaulas como mínimo harán falta para el respectivo traslado y cómo deben distribuirse los animales, teniendo en cuenta que algunos de ellos no pueden estar juntos: el cocodrilo no puede estar con el ciervo, antílope, mono ni elefante; el hipopótamo no puede estar con el ciervo, elefante ni jirafa; la cebra no puede estar con el rinoceronte, antílope ni cocodrilo; la jirafa no puede estar con el mono; y el oso no puede estar junto al ciervo, rinoceronte ni cocodrilo. Tomado de: Cognigni et al. (2008).

Solución

Para tener una idea global del problema, la información dada se ha organizado y recopilado en la siguiente tabla:

Tabla 3: Animales del zoológico. Fuente: Esta investigación.

Animal	**No puede estar con:**
cocodrilo	ciervo, antílope, mono, elefante
hipopótamo	ciervo, elefante, jirafa
cebra	rinoceronte, antílope, cocodrilo
jirafa	mono
oso	ciervo, rinoceronte, cocodrilo

Utilizando el lenguaje de grafos para solucionar el problema, se toma a los animales como los vértices del grafo, mientras que una arista representa la relación de que los respectivos animales NO pueden estar juntos. Para ello, los vértices del grafo se han denotado así:

C = Cocodrilo, A = antílope, E = elefante, H = hipopótamo, J = jirafa, M = mono, O = oso, R = rinoceronte, S = ciervo, Z = cebra.

Luego, el grafo que representa la situación para los 10 animales del zoológico es el siguiente:

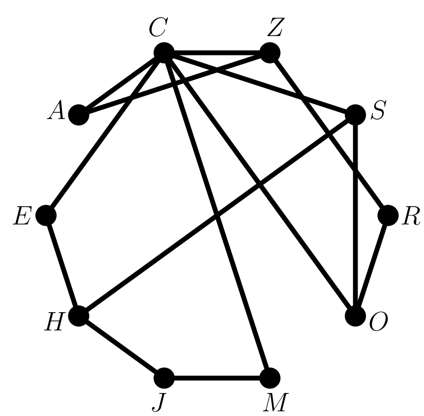


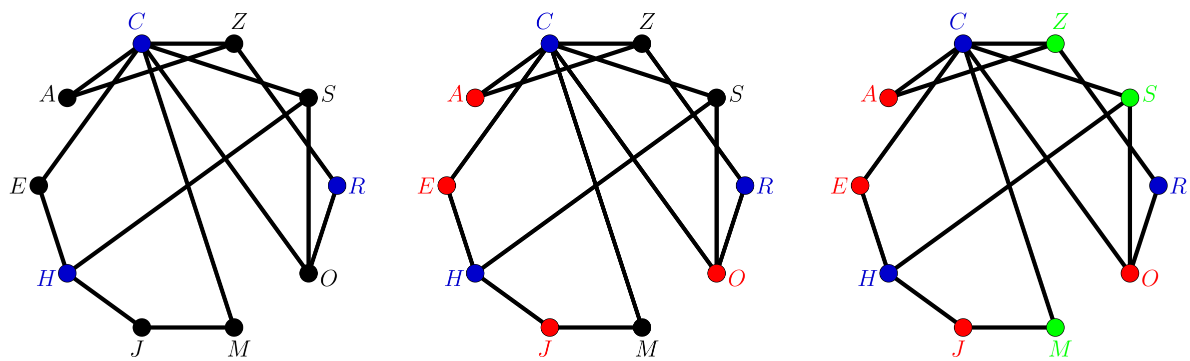
Figura 44: Grafo de la situación. Fuente: Esta investigación.

El problema se puede solucionar coloreando los vértices del grafo, donde cada color representará una jaula. De ahí que dos vértices adyacentes no pueden tener el mismo color, pues eso significaría que los animales simbolizados por estos irían en la misma jaula, lo cual no es posible ya que antes se mencionó que las aristas unen a aquellos animales que no pueden estar juntos. En este sentido:

El **objetivo** es establecer el número mínimo de colores que se necesitan para colorear los vértices del grafo bajo las condiciones antes mencionadas.

La cantidad que se pretende determinar es el número cromático de un grafo y por tanto representa la mínima cantidad de jaulas que se necesitan para hacer el traslado. Una forma de colorear el grafo, la cual aparece en la Figura 45 es la siguiente:

Se usa el mismo color en aquellos vértices que no tienen aristas entre ellos. Se empieza coloreando de azul el vértice C y se usa el mismo tono para los vértices que satisfacen la condición mencionada. Así pues, los vértices que se pueden colorear de azul son C, H y R (Figura 45.a). Enseguida se usa rojo para colorear A y se repite el proceso anterior, de este modo los vértices A, E, J y O llevarán este color (Figura 45.b). Por último, se usa el color verde para M, S y Z, pues dichos vértices no tienen aristas entre sí (Figura 45.c).



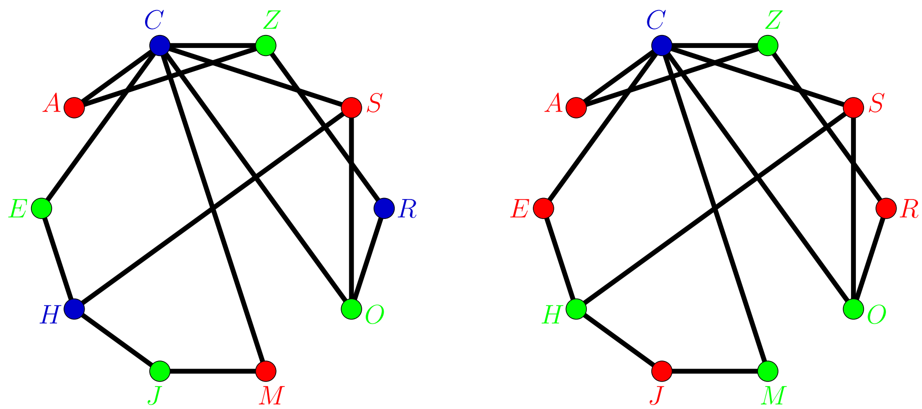
(a) (b) (c)

Figura 45: Coloración de vértices del grafo. Fuente: Esta investigación.

En la coloración anterior, fueron necesarios tres colores. Además, este es el mínimo número de colores que se pueden usar en el grafo, pues en este se observa el triángulo CAZ, cuyos tres vértices al ser adyacentes entre sí deben colorearse de distinto color indicando que los tres animales representados no pueden estar juntos. Como resultado, el número cromático del grafo es 3 y por tanto en el zoológico se necesitan tres jaulas para hacer el traslado de los animales. Como cada color representa una jaula, entonces los animales deben ser distribuidos así:

- *Jaula azul: cocodrilo, hipopótamo y rinoceronte.*
- *Jaula roja: antílope, elefante, jirafa y oso.*
- *Jaula verde: mono, ciervo y cebra.*

Note que la coloración mostrada en la Figura 45 no es la única forma de colorear los vértices del grafo. Se pueden elaborar distintas configuraciones que por la aclaración anterior, se necesita igualmente tres colores, el cambio radica en la forma como se asignaría a los animales en las jaulas. A continuación se muestran dos coloraciones más:



(a) (b)

Figura 46: Otras maneras de colorear los vértices del grafo. Fuente: Esta investigación.

Problema 7.1: Al ubicar a los animales en las jaulas organizadas en el punto anterior, se descubre además que el antílope pelea con el elefante, quien a su vez tiene pleito con la cebra, por tanto no pueden viajar juntos. ¿Cuántas jaulas se necesitan entonces para hacer el traslado?

Solución

A raíz del este problema, se deben agregar nuevas aristas al grafo de la Figura 44 que indiquen a aquellos animales que tampoco se llevan bien. Luego, nuevamente se colorea los vértices del grafo con el mínimo número de colores. En la Figura 47 aparece el grafo de la nueva situación.

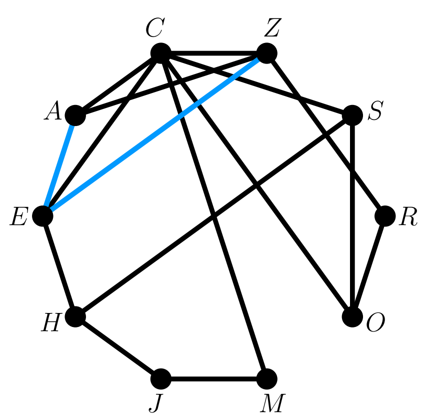


Figura 47: Grafo de la nueva situación. Fuente: Esta investigación.

Una forma de colorear este grafo, la cual aparece en la Figura 48 es siguiendo la misma técnica usada en el Problema 7. Se uitiliza el mismo color en aquellos vértices que no tienen aristas entre ellos.

Se empieza coloreando de azul el vértice C y todos aquellos satisfacen la condición mencionada. Así pues, los vértices que quedan de azul son C, H y R. (Figura 48.a). Enseguida se usa rojo para colorear A, J y O, los vértices restantes no pueden colorearse de azul ni de rojo, pues son adyacentes a alguno de los 6 ya coloreados (Figura 48.b). Más adelante, se usa verde para E, M y S ya que no existen aristas entre ellos (Figura 48.c). Por último, note que Z no puede colorearse con ninguno de los tres colores usados hasta el momento, pues es adyacente a alguno de los vértices ya coloreados, por tanto es necesario usar un nuevo color, por ejemplo amarillo, el cual representa una cuarta jaula (Figura 48.c).

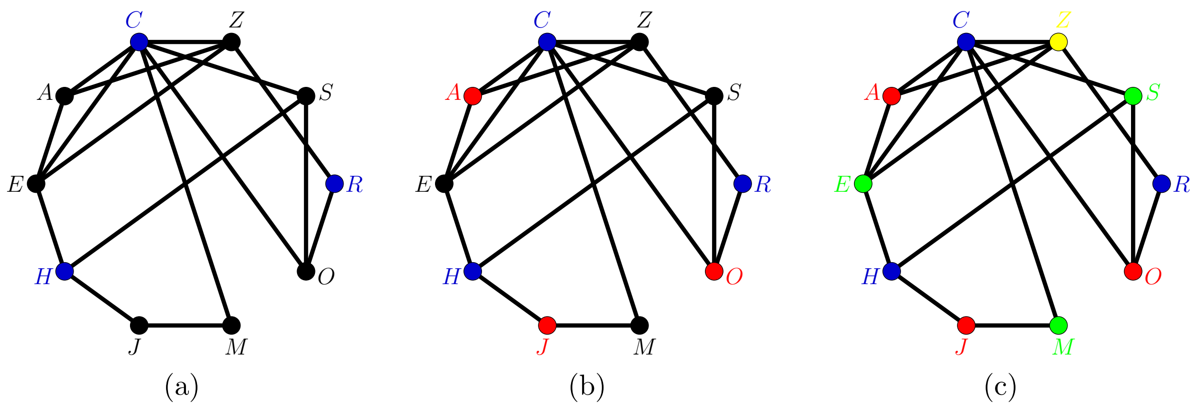


Figura 48: Coloración de vértices del nuevo grafo. Fuente: Esta investigación.

En el grafo de la Figura 47 aparece el cuadrilátero $AEZC$ y sus diagonales, es decir que cada vértice es adyacente a los otros 3, de ahí que para colorear sólo esta parte del grafo se necesitan 4 colores. En la coloración total del grafo se observa que no fue necesario utilizar un quinto color. En conclusión, el número cromático del grafo es 4 y por tanto, en el zoológico ahora se necesitan cuatro jaulas para llevar a los animales. La coloración sugiere que los animales sean trasladados así:

- *Jaula azul: cocodrilo, hipopótamo y rinoceronte.*
- *Jaula roja: antílope, jirafa y oso.*
- *Jaula verde: elefante, mono y ciervo.*
- *Jaula amarilla: cebra.*

Sugerencias de Trabajo

Problema 7.2: Determine otras configuraciones de colores para el grafo de la Figura 47 las cuales sugieran nuevas formas de trasladar a los animales.

Problema 7.3: Ariana necesita guardar los archivos de sus clases en el computador usando las mínimas carpetas posibles, por tal motivo combinará algunas materias, teniendo en cuenta que:

- Matemáticas no se guarda con Religión, Ética ni Inglés.
- Dibujo no se guarda con Física, Química, Filosofía ni Matemáticas.
- Religión no se guarda con Filosofía ni Física.
- Inglés no se guarda con Química ni Ética.

¿Cuántas carpetas como mínimo necesita crear Ariana para guardar sus archivos evitando que se junten materias que no se pueden combinar?

3.8. Problema 8: Festival de cine de matemáticas

En la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño se desea organizar un festival de cine matemático, en el cual se exhibirán 10 películas cuyas iniciales de sus nombres son: A, B, C, D, E, F, G, H, I y J. Al no disponer del tiempo suficiente, algunas películas se exhibirán en una misma sesión y hora. A cada alumno se le pide que elija las dos películas que desearía ver, resultando las siguientes parejas:

$$(A, D),(A, F),(B, C),(B, I),(B, J),(C, D),(C, G),(D, E),(E, G),(F, I),(G, H),(H, J)$$

¿Será posible diseñar un horario que satisfaga las peticiones de los 12 alumnos de manera que se use la cantidad mínima de sesiones posible que ocupen como máximo 5 salas cada una? Modificado de: Núñez et al. (2016).

Solución

El festival consiste en varias sesiones, en cada una se van a emitir películas al mismo tiempo en distintas salas, por tal motivo se debe elegir un horario que permita a cada alumno asistir si problema a las dos películas que eligió.

Para denotar la situación mediante grafos, se toma las 10 películas como los vértices del grafo. Luego, cada arista une a aquellas dos películas que fueron elegidas por algún alumno, por tanto las 12 parejas de películas mostradas anteriormente corresponden a los extremos de cada arista. La Figura 49 muestra el grafo de la situación.

Este problema se puede resolver coloreando los vértices del grafo. Para ello, cada color va a representar una sesión distinta, por tanto se debe usar el mínimo número de colores pues el festival exige que la cantidad de sesiones sea la menor posible. A su vez, dos vértices adyacentes no pueden tener igual color, pues representan las películas elegidas por algún alumno y de colorearse igual implicaría que estas se emitan en la misma sesión. Finalmente, el número de vértices con el mismo

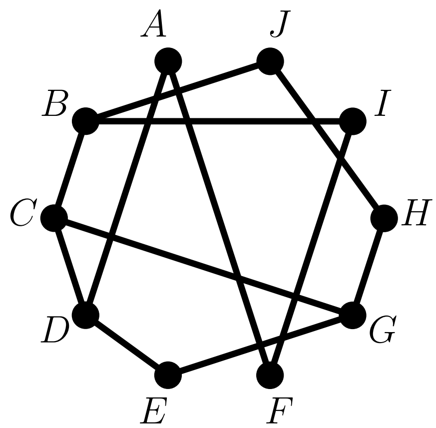


Figura 49: Grafo de la situación. Fuente: Esta investigación.

color representan la cantidad de salas que se debe disponer en cada sesión, de ahí que no debe haber más de 5 vértices de igual color, pues en el festival se dispone de máximo 5 salas.

El **objetivo** es colorear los vértices del grafo usando el mínimo número de colores de manera que no haya más de 5 vértices con igual color.

La cantidad de colores que se usen en dicha coloración corresponde al *número cromático* del grafo y por tanto representa la mínima cantidad de sesiones necesarias para emitir las 10 películas. Una forma de colorear el grafo, la cual aparece en la Figura 50 es la siguiente:

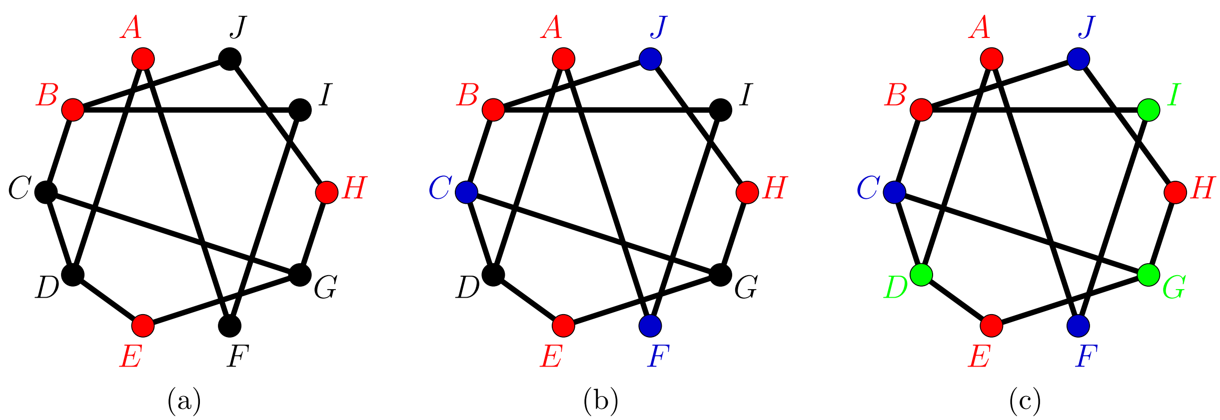


Figura 50: Coloración de vértices del grafo. Fuente: Esta investigación.

Se usa el mismo color en aquellos vértices que no tienen aristas entre ellos. Para tal fin, primero se colorea de rojo el vértice A y todos aquellos vértices que satisfacen la condición mencionada. Así pues, los vértices que quedan de rojo son A, B, E y H (Figura 50.a). Enseguida se usa azul para colorear C, dicho color también se puede aplicar en los vértices F y J, (Figura 50.b). Finalmente, se colorea de verde los vértices D, G e I, pues estos no tienen aristas entre sí (Figura 50.c).

Dado que en la coloración anterior se tiene que el número cromático del grafo es 3, entonces se necesitan planear tres sesiones para el evento. Además, como el número máximo de vértices de igual color es cuatro, entonces serán necesarias cuatro salas para la exhibición de las películas. En resumen, el horario para el festival de cine de la universidad será el siguiente:

- *Sesión 1 (rojo): Se exhibirán las películas A, B, E y H en cuatro salas.*
- *Sesión 2 (azul): Se exhibirán las películas C, F y J en tres salas.*
- *Sesión 3 (verde): Se exhibirán las películas D, G e I en tres salas.*

Como el horario diseñado cumple con los requerimientos del evento, se concluye que **si** es posible diseñar un horario que satisface las peticiones de los alumnos.

Es importante aclarar que tanto en este como en otros problemas, el grafo de la situación puede tener distintas representaciones. En este sentido, de acuerdo a como se ubiquen los vértices, las aristas no necesariamente deben ser líneas rectas, pues sin importar como se tracen, la relación sigue existiendo entre la arista y los dos vértices que une. El grafo de la Figura 51.a corresponde a otra forma de ilustrar la situación del Problema 8. En la Figura 51.b se muestra dicho grafo bajo la misma coloración realizada en la Figura 50, generando el mismo resultado.

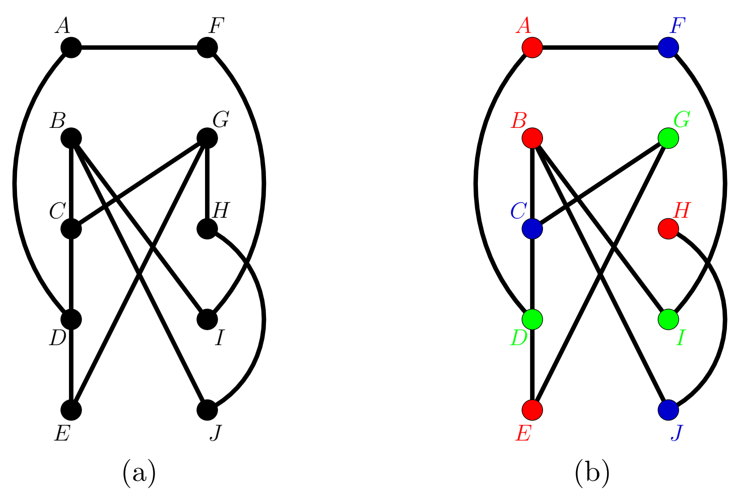


Figura 51: Grafo alternativo del problema. Modificada de: Núñez et al. (2016).

Sugerencias de Trabajo

Problema 8.1: Determine otra configuración de colores para el grafo de la Figura 49 que permita diseñar un horario distinto para el festival que cumpla con los requerimientos del evento.

Problema 8.2: Realice un diagrama de grafo diferente al de las Figuras 49 y 51 que ilustre la situación del Problema 8.

Problema 8.3: Si un día antes de iniciar el festival de cine presentado en el Problema 8, un ex-alumno manifiesta que asistirá al evento y elige mirar las películas D e I. Entonces, ¿es posible continuar con el horario ya establecido?

De lo contrario, modifique el grafo de la Figura 49 para que aparezca la elección de peliculas del ex-alumno. Luego, realice un procedimiento para determinar un nuevo horario para el festival.

3.9. Problema 9: El inspector de carreteras

Un inspector debe conducir periódicamente por las carreteras en busca de escombros y posibles reparaciones. Las carreteras son de doble sentido, por lo que es posible viajar de un punto a otro y regresar por la misma vía. La gráfica muestra el mapa de las ciudades (puntos amarillos) y las carreteras (líneas negras).

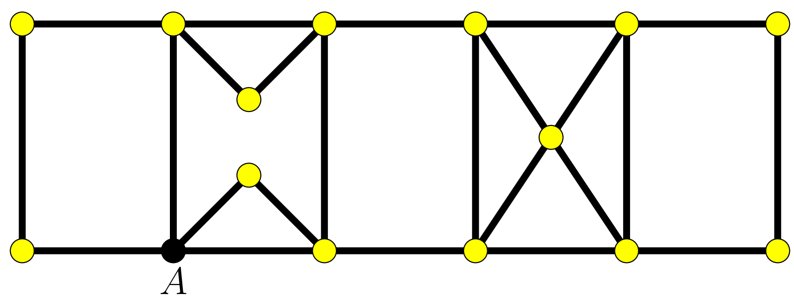


Figura 52: Mapa de ciudades y carreteras. Modificada de: Paquín (2007).

Si el inspector vive en la ciudad A, ¿es posible encontrar un camino que le permita pasar por cada carretera exactamente una vez y terminar el viaje en su ciudad? Tomado de: Paquín (2007).

Solución

El problema pide fijar una trayectoria que recorra todas las carreteras del mapa sin repetir alguna de ellas. La Figura 52 se puede asumir como un grafo en el cual las ciudades se identifican como los vértices, mientras que las carreteras dado su doble sentido, corresponden a aristas no dirigidas.

Este problema se relaciona directamente con los **ciclos eulerianos**, pues se debe buscar un camino cerrado que pase una sola vez por cada arista del grafo.

Así, el **objetivo** es determinar si existe un ciclo euleriano que comience y termine en el vértice A.

Antes de realizar trazos aleatorios para encontrar aquel camino que cumpla con las condiciones expuestas, vale preguntarse: ¿existe un ciclo euleriano para este grafo? Para responder a esta pregunta es necesario examinar el Teorema 2.11, el cual afirma que en un grafo conexo existe un ciclo euleriano si y solamente si todos sus vértices tienen grado par.

En efecto, el grafo de la Figura 52 es conexo, ya que para cada par de vértices existe una trayectoria que los une, además todos sus vértices tienen grado par. Por tanto, existe un ciclo euleriano en el grafo y como resultado si es posible encontrar el camino para el inspector.

Observe en la Figura 53 como se ha denotado a cada vértice con una letra, pues esto permite nombrar las aristas, por ejemplo la arista AC tiene como extremos a los vértices A y C.

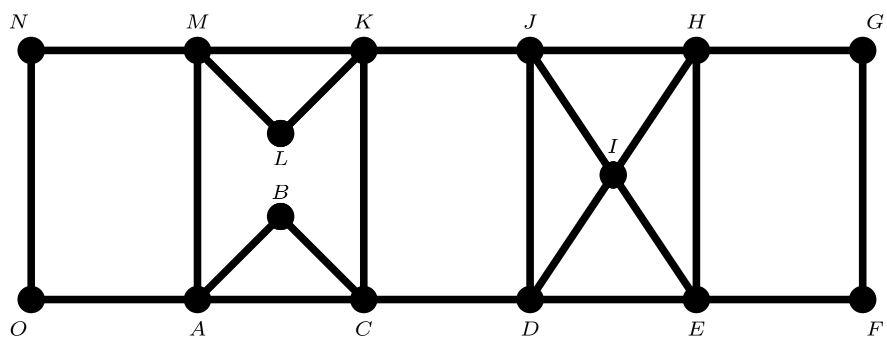


Figura 53: Grafo del problema. Fuente: Esta investigación.

Luego, un camino que puede seguir el inspector corresponde al ciclo euleriano de la Figura 54 que inicia y termina en el vértice A. Este aparece trazado en el siguiente orden de aristas:

$$AC - CB - BA - AO - ON - NM - ML - LK - KJ - JI - ID - DE - EI - IH - HE - EF - FG - GH - HJ - JD - DC - CK - KM - MA$$

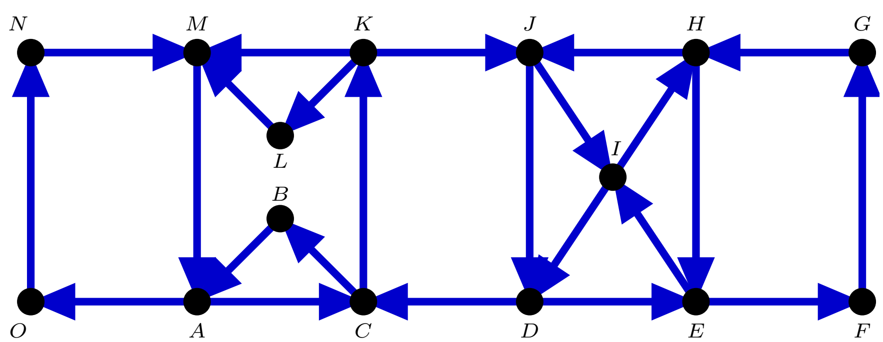


Figura 54: Ciclo euleriano del grafo. Fuente: Esta investigación.

Otra solución aparece en la Figura 55. En este caso, el ciclo euleriano indica que el inspector debe realizar su recorrido en el siguiente orden de aristas:

$$AB - BC - CK - KL - LM - MK - KJ - JH - HG - GF - FE - EH - HI - IE - ED - DI - IJ - JD - DC - CA - AM - MN - NO - OA$$

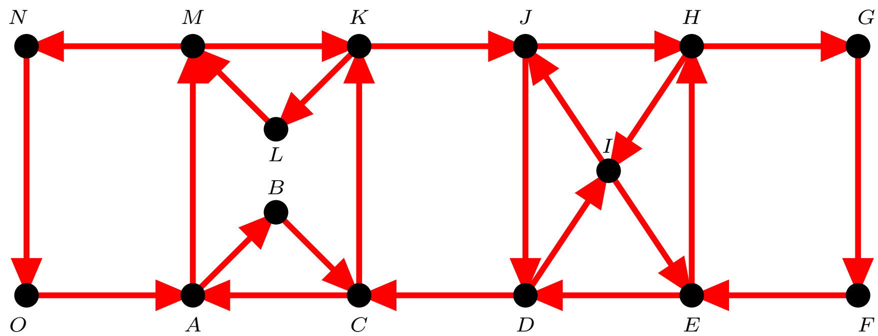


Figura 55: Ciclo euleriano 2. Fuente: Esta investigación.

Sugerencias de Trabajo

Problema 9.1: Si el inspector del Problema 9 al momento de iniciar su recorrido, se encuentra en la ciudad I. Define dos ciclos eulerianos que inicien y terminen en el vértice I.

Problema 9.2: El inspector descubre que se ha trazado una nueva carretera que conecta a las ciudades K y D como se muestra en la Figura 56, pero esta vez él puede iniciar y terminar su recorrido en cualquiera de las ciudades. En este caso:

¿Existe un camino euleriano para este grafo?, ¿en cuál ciudad debe iniciar y en cuál terminar?

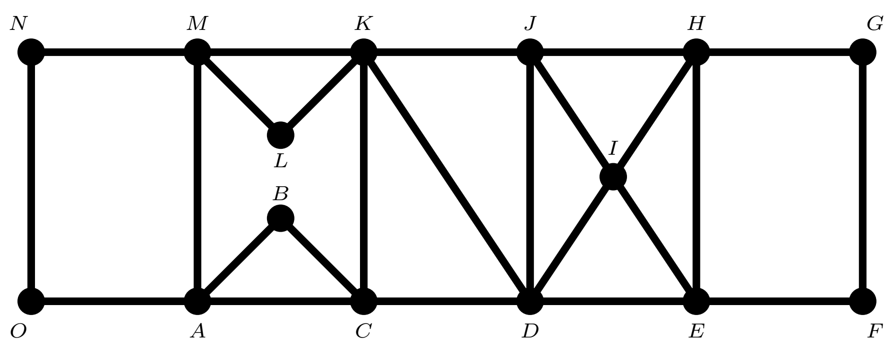


Figura 56: Mapa con la nueva carretera. Fuente: Esta investigación.

Problema 9.3: Suponga que envían al inspector a hacer un recorrido en otro sector cuyas ciudades se encuentran conectadas como se muestra en la Figura 57.

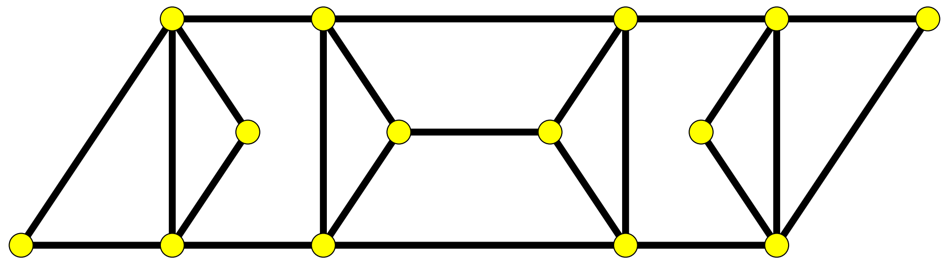


Figura 57: Mapa del nuevo sector. Fuente: Esta investigación.

- ¿Existe un ciclo euleriano para este grafo?
- ¿Existe un camino euleriano para este grafo?

3.10. Problema 10: Isla artificial en Könisberg

El problema de los 7 puentes de la ciudad de Könisberg, consistía en encontrar una trayectoria que recorriera los puentes del río Pregel pasando una sola vez por cada uno de ellos. En ese entonces, Euler demostró que no era posible encontrar un camino con las condiciones expuestas. El mapa de las islas y los puentes de Könisberg aparece en la Figura 58.a donde cada isla ha sido nombrada con una letra. El grafo que representa la situación se muestra en la Figura 58.b.

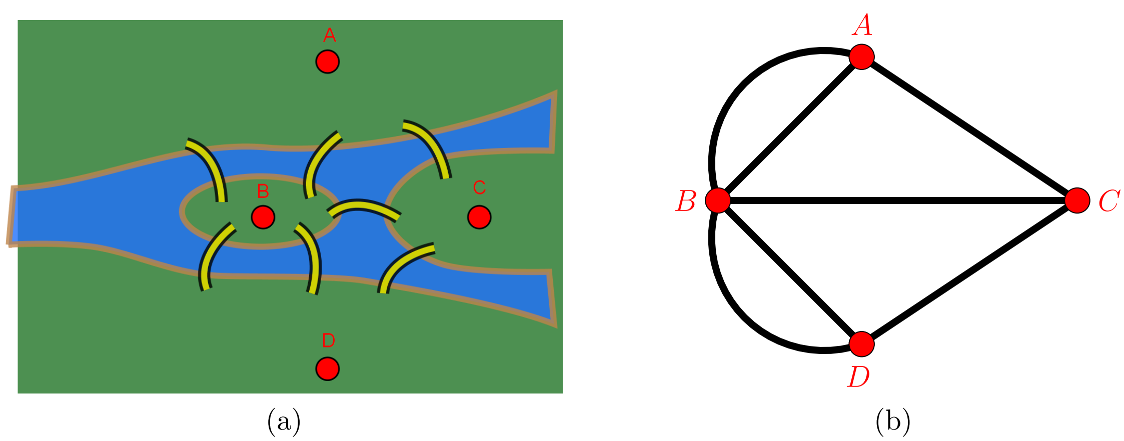


Figura 58: Mapa y grafo de las islas y puentes de Könisberg. Modificada de: Pena (2016).

Suponga que ahora se construye una isla artificial entre las islas B y C. Para ello se quita el puente que las conecta, luego se construyen varios puentes que conectan la nueva isla E con todos los demás cuerpos de tierra tal como se muestra en la Figura 59.

¿Ahora ya es posible encontrar un recorrido que cruce cada puente exactamente una vez? Si es así, encuéntralo. Tomado de: Paquin (2007).

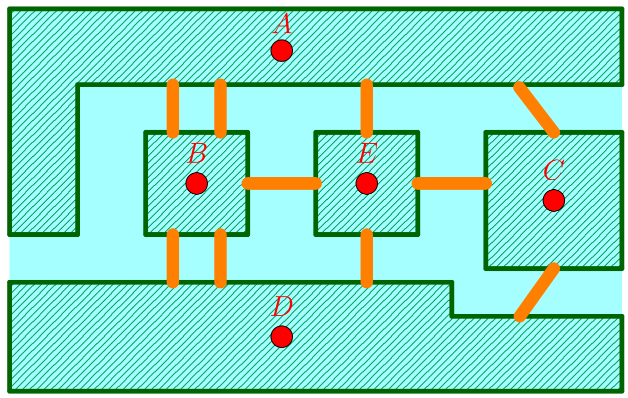


Figura 59: Mapa de la nueva región. Fuente: Esta investigación.

Solución

Se debe construir un grafo que ilustre la nueva versión del antiguo problema. Para este fin se toma a $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ como el conjunto de vértices que representan a las 5 islas, de este modo, las aristas corresponden a los 10 puentes. El grafo de la nueva región aparece a continuación.

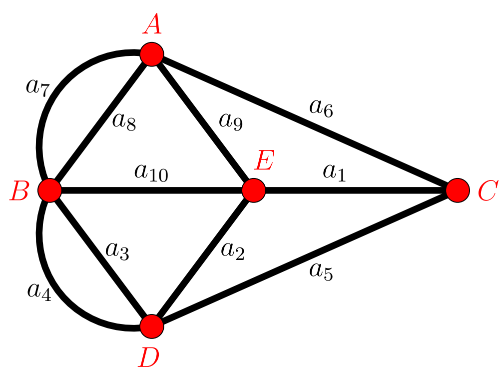


Figura 60: Grafo de la nueva región. Fuente: Esta investigación.

Así pues, se debe buscar un camino que pase una sola vez por cada arista del grafo, como no es necesario terminar el recorrido donde se inició, entonces el **objetivo** es determinar si existe un camino euleriano en el grafo de la Figura 60.

Esto conduce a examinar el Teorema 2.12 el cual afirma que en un grafo conexo existe un camino euleriano si y solamente si todos los vértices tienen grado par, excepto dos. En efecto, el grafo de la Figura 60 es conexo ya que para cada par de vértices existe una trayectoria que los une, además todos los vértices tienen grado par salvo B y C los cuales tienen grados 5 y 3 respectivamente. Por tanto, existe un camino euleriano en el grafo y como resultado si es posible encontrar un recorrido que pase una sola vez por cada uno de los diez puentes.

Luego, un recorrido por lo 10 puentes es aquel que aparece trazado en el siguiente orden de vértices y aristas:

$$Ca_1Ea_2Da_3Ba_4Da_5Ca_6Aa_7Ba_8Aa_9Ea_{10}B$$

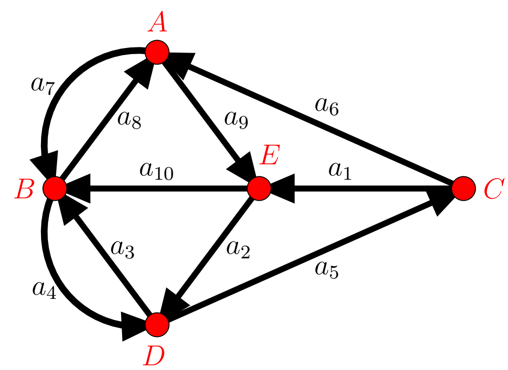


Figura 61: Camino euleriano. Fuente: Esta investigación.

El anterior camino euleriano permite pasar una sola vez por cada puente, iniciando el recorrido en la isla C y terminando en la isla B.

Sugerencias de Trabajo

Problema 10.1: Según la historia, en 1876 se construyó un nuevo puente en Könisberg. Ubica dicho puente en la Figura 58 de tal forma que el grafo que la represente tenga un camino euleriano.

Problema 10.2: ¿Cuál/es de los diez puentes de la Figura 59 se deberían destruir para lograr que exista un ciclo euleriano en el grafo que representa esa región?

Problema 10.3: Suponga que en el mapa de la Figura 59 se destruye un puente entre las islas A y B, luego se construye un puente entre las islas A y C. Entonces:

- ¿Existe un camino euleriano para el grafo de la nueva región?
- ¿Existe un ciclo euleriano para este grafo?

Problema 10.4: Encuentre un camino euleriano diferente al presentado en la Figura 61 para el grafo de la Figura 60, el cual muestre otra forma de hacer el recorrido por los 10 puentes.

3.11. Problema 11: Almuerzo universitario

La Universidad de Nariño ha convocado a siete representantes estudiantiles de las universidades del Cauca, Valle, Antioquia, Pereira, Barranquilla, Santander y Nacional a un seminario sobre la educación en Colombia. En dicho evento surgieron las siguientes amistades:

Tabla 4: Amistades. Fuente: Esta investigación.

Estudiante	Amistades
Alex	Camila, Diego, Francisco
Bruna	Camila, Enrique, Gladys
Camila	Alex, Bruna, Enrique, Francisco
Diego	Alex, Francisco, Gladys
Enrique	Bruna, Camila
Francisco	Alex, Camila, Diego
Gladys	Bruna, Diego

Para la clausura del seminario, se ha organizado un almuerzo para los asistentes en gratitud por su acompañamiento. ¿Es posible ubicar a los estudiantes en una mesa redonda de tal manera que todos se sienten con dos amigos a sus lados?

Solución

La información proporcionada en la Tabla 4 permite crear un grafo de la situación, en el cual cada vértice simboliza a un estudiante, mientras que las aristas representan las amistades entre ellos. De este modo, a cada estudiante se lo ha denotado con una letra que corresponde a la inicial de su nombre, así:

$$A = \text{Alex},\ B = \text{Bruna},\ C = \text{Camila},\ D = \text{Diego},\ E = \text{Enrique},\ F = \text{Francisco},\ G\text{= Gladys}$$

Luego, el grafo de las relaciones entre los asistentes se muestra a continuación:

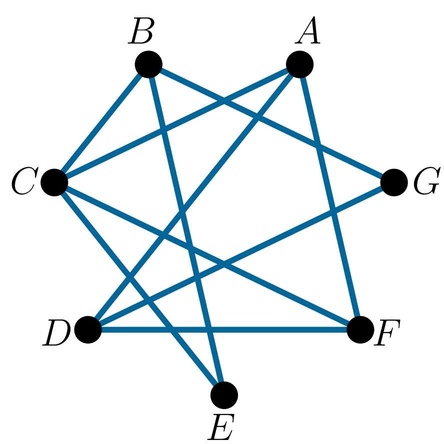


Figura 62: Grafo de las amistades. Fuente: Esta investigación.

Este problema se relaciona directamente con los **ciclos hamiltonianos**, pues se debe buscar una camino cerrado que pase una sola vez por cada vértice del grafo. Este ciclo mostrará la forma como se debe ubicar a los estudiantes en la mesa.

Por tanto, el **objetivo** es trazar un ciclo hamiltoniano en el grafo de la Figura 62.

Para averiguar si el grafo de la Figura 62 posee tal ciclo, es necesario tener en cuenta las consideraciones expuestas en el Capítulo 2 respecto a los ciclos hamiltonianos:

1. Si un grafo tiene un vértice de grado uno, entonces no puede tener un ciclo hamiltoniano.

2. Si un vértice tiene grado dos, entonces las dos aristas incidentes tienen que ser parte del ciclo.

3. Si un vértice tiene grado mayor que dos, y dos de las aristas incidentes pertenecen al ciclo, entonces el resto de aristas incidentes no pertenecen.

De la consideración 1, como el grafo de la situación no tiene vértices de grado uno, entonces es probable que si exista un ciclo hamiltoniano. Las consideraciones 2 y 3 sugieren ideas para trazar tal ciclo. Por ejemplo, los vértices E y G tienen grado dos por tanto las dos aristas incidentes en ellos serán parte del ciclo. Mientras que en los vértices A, B, C, D y F sólo dos de sus aristas pertenecerán al ciclo buscado. Así pues, luego de seguir las indicaciones se obtiene un ciclo hamiltoniano, el cual aparece en la Figura 63.a trazado en el siguiente orden de vértices:

$$A - C - E - B - G - D - F - A$$

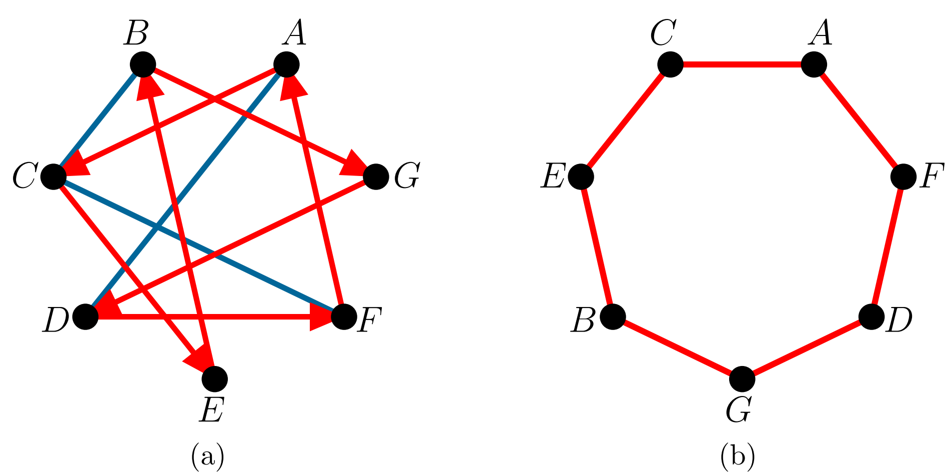


Figura 63: Ciclo hamiltoniano. Fuente: Esta investigación.

Como resultado, para que cada estudiante tenga amigos a sus lados durante el almuerzo, ellos deben ocupar los puestos en la mesa tal como se muestra en la Figura 63.b.

Problema 11.1: Si un día antes de la cena, Alex y Camila tienen un desacuerdo y ya no desean sentarse juntos en el almuerzo. Entonces, ¿cómo se debe ubicar a los estudiantes en la mesa para que todos se sienten con dos amigos a sus lados?

Solución

El nuevo problema indica que ya no existe una arista entre los vértices A y C, tal como se muestra en la Figura 64.a pues Alex y Camila ya no se quieren sentar juntos. Por tanto, el objetivo es buscar un nuevo ciclo hamiltoniano cuyo trazo no requiera conectar dichos vértices.

En la Figura 64.b se muestra que un ciclo hamiltoniano para el grafo de la Figura 64.a, es aquel que aparece trazado en el siguiente orden de vértices:

$$A - D - G - B - E - C - F - A$$

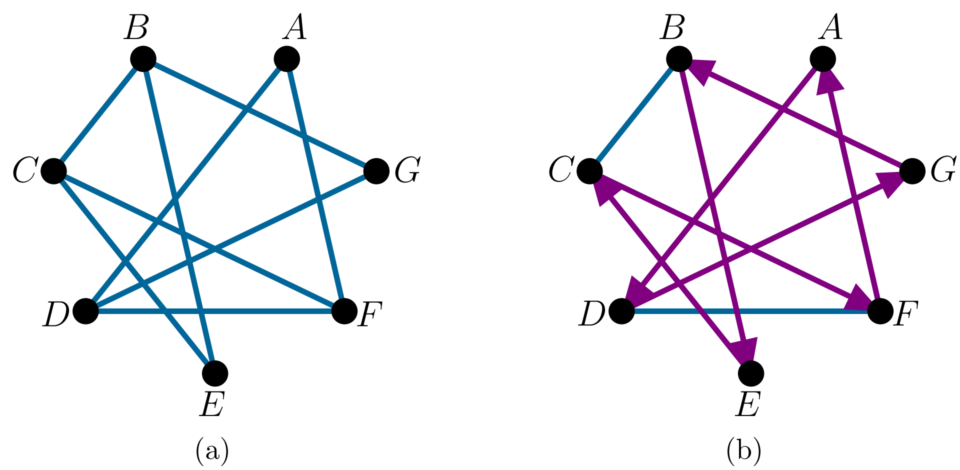


Figura 64: Ciclo hamiltoniano del nuevo grafo. Fuente: Esta investigación.

En conclusión, esta ubicación en la mesa redonda asegura que todos los estudiantes tengan amigos a sus lados durante el almuerzo.

Sugerencias de Trabajo

Problema 11.2: ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de la Figura 62 al quitar la amistad entre Alex y Francisco y agregar una amistad entre Alex y Gladys?

Problema 11.3: ¿Existe un ciclo hamiltoniano diferente al presentado en la Figura 64.b que sugiera otra forma de ubicar a los estudiantes en la mesa?

Problema 11.4: Con el fin de fomentar la integración entre los asistentes al seminario del Problema 11, se desea ubicar a los participantes en una mesa de tal forma que cada uno tenga a sus lados personas que desconozca. ¿Será posible ubicar a cada estudiante de manera que aquellos que ya se conocen no queden sentados juntos?

3.12. Problema 12: El caballo de ajedrez

Dado un tablero de ajedrez 4×4 sin las casillas de las 4 esquinas. ¿Es posible que el caballo visite cada casilla exactamente una vez y vuelva a la casilla de la cual partió? Tomado de: Kiselev y Zhukova (n.d)

Solución

El tablero de ajedrez para este problema tiene 12 casillas por las cuales se debe mover al caballo, cada una se ha marcado con una letra como se muestra en la Figura 65.

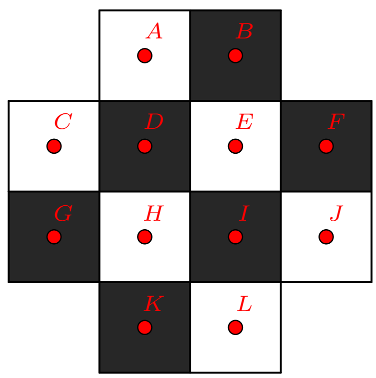


Figura 65: Tablero de ajedrez. Fuente: Esta investigación.

Luego, en la Tabla 5 se ha recogido las opciones de movimiento del caballo desde cada casilla.

Tabla 5: Opciones de movimiento del caballo. Fuente: Esta investigación.

Casilla	Posibilidades	Casilla	Posibilidades
A	F, G, I	G	A, E, L
B	C, H, J	H	B, F
C	B, I, K	I	A, C
D	J, L	J	B, D, K
E	G, K	K	C, E, J
F	A, H, L	L	D, F, G

Al modelar el problema mediante grafos, los vértices corresponden a las casillas del tablero mientras que las aristas conectan a aquellos vértices entre los cuales el caballo puede saltar con un movimiento.

El grafo de la Figura 66 ilustra todos los posibles movimientos del caballo desde cada casilla mostrados en la Tabla anterior.

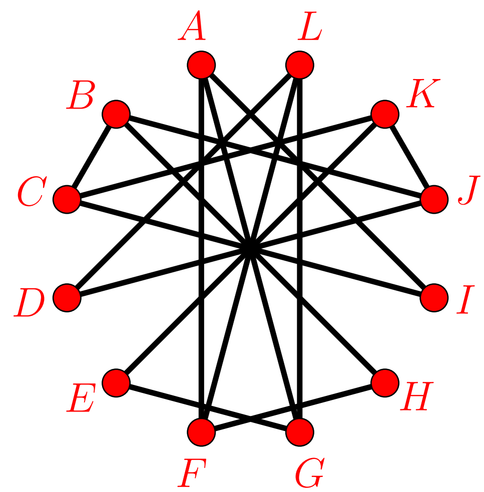


Figura 66: Grafo de los movimientos del caballo. Fuente: Esta investigación.

Este problema tiene relación con los **ciclos hamiltonianos**, pues al buscar un camino cerrado que pase sólo una vez por cada vértice del grafo, este mostrará la forma en que debe moverse el caballo por el tablero para visitar cada casilla una sola vez.

Por tanto, el **objetivo** es encontrar un ciclo hamiltoniano en el grafo de la Figura 66.

A pesar de haber fijado una manera de solucionar el problema, el grafo de la Figura 66 es muy confuso debido a la cantidad de aristas cruzadas, esto dificulta la tarea de encontrar el ciclo. Por ello, es importante destacar que al representar un problema mediante grafos, estos deben tener una forma que sea sencilla de visualizar.

Dicho lo anterior, en la Figura 67.a se muestra otro grafo con mejor perspectiva que también representa la situación, en el cual es más sencillo trazar el ciclo hamiltoniano. Suponiendo que el caballo se ubica sobre la casilla A, entonces tal ciclo aparece en la Figura 67.b trazado en el siguiente orden de vértices:

$$A - G - E - K - J - D - L - F - H - B - C - I - A$$

Esta solución determina la forma en que debe saltar el caballo por el tablero para lograr el objetivo. Además al tratarse de un ciclo, la solución es válida para cualquier casilla sobre la que se ubique al caballo al principio, pues a partir de ahí se puede continuar su recorrido hasta completar el ciclo hallado en la Figura 67.b.

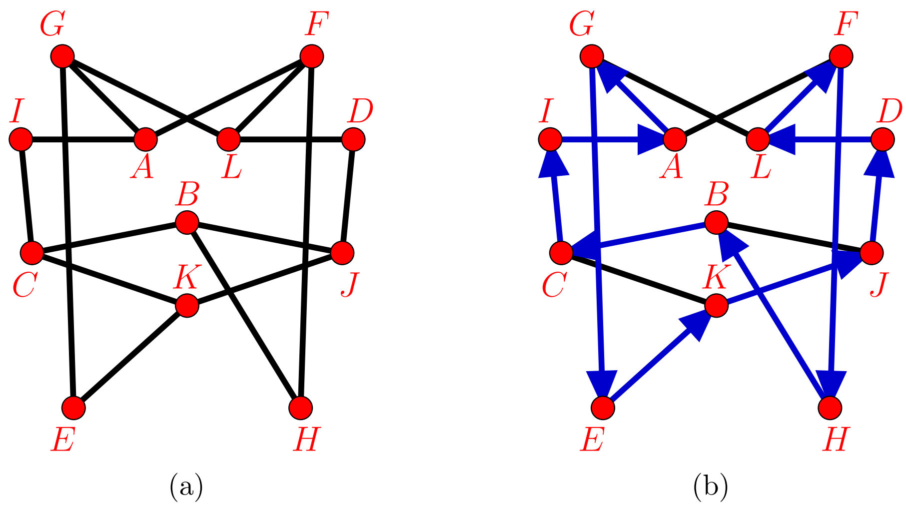


Figura 67: Otro grafo del problema con un ciclo hamiltoniano. Fuente: Esta investigación.

Sugerencias de Trabajo

Problema 12.2: Dado el tablero de ajedrez de tamaño 5×5. ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo que ilustra los movimientos del caballo?

Problema 12.3: ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de los movimientos del caballo en un tablero de ajedrez tradicional?

Problema 12.4: En el tablero de ajedrez de la Figura 65 se ha ubicado un caballo en la posición D y otro en la posición I. ¿Será posible mediante movimientos alternados lograr que los caballos cambien de posiciones?

Capítulo 4

Problemas Propuestos

En este capítulo, se presenta una colección de diversas situaciones problema con características que pueden ser relacionadas con los grafos. Es importante mencionar que no es común encontrar material, tales como libros de matemáticas o guías de educación matemática para la educación básica y media, en los cuales se presenten a los grafos como una herramienta en la resolución de problemas, pues aunque haya material teórico acerca de los grafos, solo se encuentran ejercicios que se resuelven de forma analítica a través de fórmulas o ecuaciones, lo que causa que en muchas ocasiones no sea posible trabajarlos con niños. Es por ello que en esta tesis, además de presentar la solución detallada de algunos problemas, también se considera pertinente anexar otras situaciones que se relacionen con grafos.

El propósito de este capítulo es generar curiosidad en el lector por desarrollar las situaciones planteadas, en donde pueda colocar en práctica las técnicas presentadas en el Capítulo 3, además con la experiencia adquirida busque sus propias estrategias de procedimiento que a su vez motiven al estudio de otros conceptos de la teoría de grafos, los cuales no se consideraron en este trabajo pero igualmente son aplicables a gran cantidad de situaciones cotidianas. Los siguientes problemas se recogen como material para aquellos docentes que quieran hacer uso de ellos en el aula como elementos de aprendizaje, los cuales permitan introducir conceptos, propiedades y además generar conocimiento matemático en sus estudiantes. A continuación se presentan algunos problemas que fueron tomados de: Kiselev y Zhukova (n.d), Núñez et al. (2016) y Paquin (2007).

En cada enunciado se sugiere una idea para resolverlas, la cual implica uno de los temas tratados en este documento a excepción del último.

Problema 4.1. Cada uno de los estudiantes de un grupo de 17 habla con cada uno de los demás. Todos ellos hablan de tres temas diferentes. Cada pareja de estudiantes habla entre sí de uno solo de los temas. Probar que hay tres estudiantes que hablan entre ellos del mismo tema.

Sugerencia: Aplicar un procedimiento similar al llevado a cabo en el problema 3.6.

Problema 4.2. Consideremos el siguiente juego de dos participantes. El jugador 1 dice en voz alta un número de 1 al 3. El segundo jugador suma al número dicho 1, 2 o 3 y dice el resultado en voz alta. Entonces el primer jugador sumará a este resultado 1, 2 o 3 mencionando en voz alta el nuevo número, y asi sucesivamente. Gana el primero que diga 31. ¿Existe alguna estrategia ganadora?

Sugerencia: Construir un grafo que ilustre los movimientos del juego para deducir la estrategia.

Problema 4.3. Hay 18 concursantes en un torneo. En cada ronda, los concursantes se emparejan y juegan entre sí una vez. Demuestre que después de 8 rondas, hay tres concursantes que no han jugado uno contra el otro.

Sugerencia: Construir un diagrama que ilustre los enfrentamientos en cada ronda para reducir todas las posibilidades e identificar a los jugadores.

Problema 4.4. Hay 9 matemáticos en una reunión. Se descubrió que cada uno puede hablar como máximo tres idiomas y entre tres de ellos al menos dos pueden hablar un idioma en común. Demuestre que tres de ellos hablan un idioma en común.

Sugerencia: Resaltar en un grafo la relación de hablar el mismo idioma, luego mediante trazos probar lo pedido.

Problema 4.5. Vamos a considerar que algunos vértices del grafo son azules y otros son verdes. Todo vértice azul está conectado a 5 vértices azules y a 10 vértices verdes; y todo vértice verde está conectado a 9 vértices azules y 6 verdes. ¿Cuál es el color que más aparece en ese grafo?

Sugerencia: Construir un grafo que ilustre las condiciones dadas.

Problema 4.6. En una clase hay 30 estudiantes. ¿Es posible que 9 de ellos tengan (en la clase) 3 amigos cada uno, 11 tengan 4 amigos cada uno y 10 tengan 5 amigos cada uno?

Sugerencia: Hacer uso del Lema del apretón de manos.

Problema 4.7. Probar que el número de personas de entre la población de Pasto que han dado apretones de manos a un número impar de otros residentes de Pasto, es par.

Sugerencia: Hacer uso del Lema del apretón de manos.

Problema 4.8. Juan, a su regreso de Disneylandia, dice que allí ha visto un lago encantado con 7 islas, a cada una de las cuales llegan 1, 3 o 5 puentes. ¿Es verdad que alguno de esos puentes debe llegar a la orilla del lago?

Sugerencia: Tomar como referente los caminos y ciclos eulerianos.

Problema 4.9. Un grupo de 9 personas conforman un jurado, se sabe que ninguna terna de ellas está formada por personas que no se conocen entre sí. Demostrar que cuatro de ellas se conocen mutuamente.

Sugerencia: Construir el grafo y aplicar un procedimiento similar al del problema 3.3.

Problema 4.10. En el reino de Genovia hay 3 carreteras que salen de cada ciudad. ¿Es posible que haya 100 carreteras en Genovia?

Sugerencia: Hacer uso del Lema del apretón de manos.

Problema 4.11. Hallar valores de n tales que sea posible dibujar un polígono de n lados con todas sus diagonales sin levantar el lápiz del papel.

Sugerencia: Tomar como referente los caminos y ciclos eulerianos.

Problema 4.12. Considerar un tablero de ajedrez de $8x8$. ¿Es posible que la torre de ajedrez visite cada casilla exactamente una vez y vuelva a la casilla de la cual partió?

Sugerencia: Tomar como referente los caminos y ciclos hamiltonianos.

Problema 4.13. Probar que cualquier coloración de las aristas de un K_6 usando dos colores produce siempre dos triángulos coloreados uno de cada color.

Sugerencia: Trazar el grafo completo y seguir un procedimiento similar al del problema 3.6.

Problema 4.14. En una reunión de 8 personas, se sabe que cada una tiene al menos un amigo. Probar que existen al menos dos personas que tienen el mismo número de amigos.

Sugerencia: Averiguar sobre el principio del palomar.

Conclusiones

Los problemas son el alma de las matemáticas, estos complementan el aprendizaje y le dan valor a lo aprendido. En particular, las situaciones problemas planteadas en esta tesis han permitido adquirir mayores habilidades para relacionar las matemáticas con el mundo real, pues invitan a ser creativos al momento de idear planes o estrategias que conlleven a obtener soluciones, además gracias a que los problemas son actividades abiertas a variantes y posibles generalizaciones, es posible profundizar en ellos para sacar el mayor provecho de la situación dada y así obtener un aprendizaje más significativo.

Los problemas presentados en este trabajo permitieron notar que la redacción del enunciado es clave para la comprensión del problema, pues basta una palabra o un signo de puntuación mal ubicado para cambiar el sentido a la situación, es por ello que la mayoría de problemas se modificaron con el afán de presentar enunciados claros y que no estén abiertos a varias interpretaciones. Así mismo, algunos de ellos se adaptaron al contexto social para generar mayor interés en los alumnos o en quienes dispongan de este documento.

A pesar de que la teoría de grafos no es un curso muy común en los planes curriculares de los centros educativos, se considera que sería muy productivo llevarla al aula, pues las investigaciones realizadas al respecto señalan que los grafos son herramienta ideal para introducir a los alumnos en el marco de la resolución de problemas. Además, se observó mediante el proceso de modelación y resolución de cada problema, que no es necesario profundizar en muchos aspectos para utilizar esta teoría en el aula, es por ello que varias fuentes aseguran que algunas nociones básicas son suficientes para lograr que los alumnos se sientan capaces de explorar situaciones problema, usar sus conocimientos previos e idear estrategias que los lleven a obtener resultados satisfactorios. En este sentido, sería ideal que el programa de licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño anexe a su plan curricular un curso de resolución de problemas, donde uno de los temas tratados sean los grafos, para aprovechar la gran cantidad de aplicaciones que se derivan de esta teoría.

Los modelos de resolución de problemas son un gran apoyo para el tratamiento de situaciones problema, es por ello que la metodología aquí propuesta exclusivamente para la resolución de problemas con grafos, la cual fue basada en las fases sugeridas por Polya, Schoenfeld y Guzmán, fue una guía fundamental para llevar un proceso apropiado en la solución de cada uno de los problemas planteados. Al mismo tiempo, cada problema resuelto sufrió algunas modificaciones en sus condiciones iniciales, esto con el fin de generar nuevas situaciones problema que incentiven al lector a desarrollarlas y adquirir mayor habilidad en la resolución de problemas con grafos.

Esta experiencia ha sido muy positiva por el conocimiento alcanzado en lo referente a la teoría de grafos en torno a la resolución de problemas, así como las diversas propuestas de aplicación en el aula que han surgido con el afán de superar las dificultades presentes en los alumnos e innovar en la manera de impartir conocimiento en el aula. En este sentido, un trabajo a futuro derivado de esta tesis, consiste en diseñar y aplicar una secuencia de enseñanza centrada en la introducción de la teoría de grafos en la educación básica y media, en donde el docente pueda trabajar conjuntamente con sus alumnos, estudiar las bases de esta teoría, luego analizar y resolver situaciones problema que se puedan relacionar con los grafos.

Referencias

[1] Aguilar, D. & Reyes, I. (2016). Tecnología digital y formulación de problemas durante el proceso de resolución de problemas. *Cinvestav-IPN.* pag. 1432-1447.

[2] Badger, M., Sangwin, C. & Hawkes, T. (2012). Teaching problem-solving in Undergraduate Mathematics. *The Higher Education Academy.* pag. 9-30.

[3] Bondy, J. & Murty, M. (2008). Graph Theory. *Springer.* ISBN 978-1-84628-969-9.

[4] Braicovich, T. (2005). Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

[5] Braicovich, T. & Caro, P. (2015). Formulando problemas sobre grafos eulerianos y hamiltonianos. *CUREM5.* pag. 171-178.

[6] Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Mathematical problem posing. *Springer.* pag. 3-34.

[7] Callejo de la Vega, M. (1997). Resolver e inventar problemas, juegos, números y figuras. Bariloche. Argentina.

[8] Chiappa, R. (1989). Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos. *Revista Educación Matemática, Unión Matemática Argentina,* 1(4). pag. 37-54.

[9] Cognigni, R., Braicovich, T. & Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la Educación General Básica. *Revista de Educación Matemática,* 1(24). pag. 1–17.

[10] De Guzmán, M. (1995). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. *Ediciones pirámide S.A.* Madrid. España.

[11] Holton, D. & Purcell, S. (1979). The Four-Color Theorem - A Short History. *Australian Mathematical Society Gazette,* (6). pag. 11-14.

[12] Hudson, R. (2002). Planar graphs: a historical perspective. *Electronic Theses and Dissertations,* (647). pag. 1-11, 42-65.

[13] Imaoka, M., Shimomura, T. & Kanno, E. (2015). Problem posing in the upper grades using computers. *Mathematical problem posing.* pag. 257-272.

[14] Kruja, E., Marks, J., Blair, A. & Waters R. (2002). A Short Note on the History of Graph Drawing. *Springer-Verlag.* pag. 272-286.

[15] Kiselev, A. & Zhukova, E. (n.d). Introducción a la teoría de grafos. Universidad Estatal de San Petersburgo, Rusia. pag. 1-8.

[16] Lloyd, E. (1976). Facts and Myths in the History of Graph Theory. Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference. pag. 411-416.

[17] Londoño, S. & Muñoz, L. (2011). La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variable. Universidad de Antioquia. Colombia. pag. 45-63.

[18] Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curricularres: Matemáticas.* Bogotá: D.C, Colombia. Magisterio.

[19] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá D.C, Colombia. pag. 47-55.

[20] Misfeldt, M. & Johansen, M. (2015). Research mathematicians' practices in selecting problems mathematical. *Educational Studies in Mathematics,* 89(3), p. 357-373.

[21] Murga, M. (2012). Coloración en grafos. Universidad de Cantabria. España. p. 5-32.

[22] Núñez, R., Núñez, J., Paluzo, E. & Salguero, E. (2016). Jugueteando con grafos. *Revista iberoamericana de educación matemática: UNIÓN.* p. 188-204.

[23] Patiño, B. & Charry, O. (2013). La enseñanza de la Teoría de Grafos como estrategia para desarrollar procesos de matematización. Bogotá D.C. Colombia. p. 53-66.

[24] Pena, S. (2016). El problema de Coloración de Grafos. Universidad de la Coruña. España. pag. 1-8.

[25] Pérez, R. (2008). Propuesta de un manual para el uso docente, orientado al tratamiento de la resolución de problemas, en la educación matemática de enseñanza media. Universidad de Talca. pag. 58-69.

[26] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. *México: Trillas.* México D.F.

[27] Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación,* (1). p. 275-294.

[28] Sachs, H., Stiebitz, M. & Wilson, R. (1988). An Historical Note: Euler's Königsburg Letters. *Journal of Graph Theory,* (12). pag. 133-139.

[29] Shoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. *Academic press.* Orlando. Estados Unidos.

[30] Socas, M. (2001). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. España.

[31] Socas, M., Hernández, J. & Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. Universidad de la Laguna. España. pag. 145-154.

[32] Villa, J. & Ruiz, H. (2011). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad católica del norte,* 1(27).

[33] Villarreal, M. & Esteley, C. (2010). Modelización matemática como estrategia pedagógica. *Revista Pampeana de Educación Matemática.*

[34] Wilson, R. (1996). Introduction to Graph theory. *England: Addison Wesley Longman Limited.* pag. 500-520.

[35] Wilson, R. (1999). Graph Theory. History of Topology. *Amsterdam: Elsevier Science*. pag. 27-37.

[36] Zamora, J. (2016). Propuesta de método de resolución de problemas matemáticos en educación primaria. Universidad Jaume. España. pag. 3-16.